

REPRESENTACIONES DE ESPACIOS CTS

JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2026

REPRESENTACIONES DE ESPACIOS CTS

JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES

Trabajo de grado para optar al título de  
Magíster en Matemáticas

Director  
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin  
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2026

## DEDICATORIA

*Para mi familia.*

## AGRADECIMIENTOS

*Como sucede con cualquier teorema y su demostración, la belleza no reside únicamente en el resultado final, sino en la combinación de axiomas, hipótesis, deducciones y conclusiones que le dan forma. En mi caso, lo más valioso de este camino no fue solo el logro alcanzado, sino la compañía que tuve durante mi paso por la Universidad Industrial de Santander. Por eso agradezco sinceramente a*

*A mi madre, Marlene; a mi padre, Isnardo; y a mi hermano, Brayan, por su apoyo, su cariño y por acompañarme siempre.*

*A mi pareja Nicole, por ser mi lugar tranquilo.*

*A mis amigos Cristian, Jotta y Ospino, por las tardes de tinto, los juegos de mesa y los chismes de matemáticos sin oficio que hicieron más ameno este camino.*

*A todos aquellos que, de alguna manera, influyeron en mí: Jacksymar, Reinaldo, Edward y Camilo; a la gente del CEMAT y a todos los demás que compartieron conmigo.*

*A mi director, el profesor Carlos Uzcátegui, por su orientación, sus comentarios, sus ocurrencias y por las enseñanzas académicas y de vida de las que aprendí muchísimo.*

*A los integrantes del seminario Ideal, al profesor Michael y a mis compañeros Julián, Jhon y Camilo, por las discusiones, el aprendizaje compartido y, principalmente, por el tinto.*

*A mis calificadores, en particular al profesor Ramiro, por sus valiosos comentarios y correcciones.*

*A los participantes del Seminario de Topología, profesores y estudiantes.*

*A todos aquellos que hicieron parte de mi formación, entre profesores, estudiantes y amigos.*

*A la Universidad Industrial de Santander.*

*Y, no menos importante, a Dios.*

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
1.1. SOBRE IDEALES . . . . .	15
1.2. ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS . . . . .	20
<b>2. REPRESENTACIONES DE ESPACIOS <math>CTS</math></b>	<b>26</b>
2.1. EL TEOREMA DE MORAYNE Y RYLL-NARDZEWSKI . . . . .	26
2.2. EXTENSIONES BOREL ESTÁNDAR . . . . .	30
2.3. CONJUNTOS $G_\delta$ DE CANTOR COMO EXTENSIÓN DE ESPACIOS $CTS$ .	34
2.4. EXTENSIONES LOCALMENTE COMPACTAS DE $CTS$ . . . . .	40
<b>3. ANTICADENAS Y COMPACIDAD LOCAL EN EL CONTEXTO DE IDEALES</b>	<b>46</b>
3.1. COMPACIDAD LOCAL EN IDEALES $F_\sigma$ . . . . .	48
3.2. HOMOGÉNEOS ASOCIADOS A COLORACIONES . . . . .	59
3.2.1. Un par de ejemplos más . . . . .	65
3.3. ANTICADENAS MAXIMALES GENERADORAS DE IDEALES . . . . .	68
<b>4. EL ESPECTRO DE ESPACIOS <math>CTS</math></b>	<b>72</b>
4.1. BASES COMO CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS . . . . .	72
4.2. SELECTORES . . . . .	75
4.3. ESPECTRO . . . . .	77
4.4. CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y CERRADOS HEREDITARIOS . . . . .	83
4.5. LAS CATEGORÍAS <b>CHMax</b> Y <b>Espectro</b> . . . . .	86
4.5.1. Categorías . . . . .	86
4.5.2. Equivalencia entre <b>CHMax</b> y <b>Espectro</b> . . . . .	89
4.6. MÁS SOBRE $c.p.o.$ . . . . .	93
4.7. SOBRE $\omega$ -BASES DE BANDAS DEL INTERVALO . . . . .	100

<b>5. CTS Y LA PROPIEDAD FUERTE DE CHOQUET</b>	<b>102</b>
5.1. JUEGOS DE CHOQUET . . . . .	102
5.1.1. Juego fuerte de Choquet . . . . .	103
5.2. ESPACIOS <i>c.p.o.</i> . . . . .	104
5.3. ESPACIOS <i>CTS</i> CON LA PROPIEDAD FUERTE DE CHOQUET . . . . .	108
5.4. ESPACIOS <i>CTS</i> , MF Y ESPECTRO . . . . .	113
<b>6. OTROS RESULTADOS</b>	<b>116</b>
6.1. SOBRE EL PRODUCTO DE ESPACIOS <i>CTS</i> . . . . .	116
6.2. MÁS SOBRE COMPACIDAD . . . . .	119
6.3. COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA DE LA FAMILIA DE CERRADOS HEREDITARIOS . . . . .	121
6.4. FRACCIONES EGIPCIAS CUYA SUMA ES 1 Y BARRERAS . . . . .	126
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>128</b>
<b>A. SÍMBOLOS</b>	<b>129</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>130</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
2.1. Cantor menos un punto. . . . .	38
4.1. Ejemplo de banda y capa. . . . .	74
4.2. Construcción combinatoria del intervalo. . . . .	79
4.3. Espacio de Cantor. . . . .	80
4.4. Topología cofinita sobre $\omega$ . . . . .	81
4.5. Algunos selectores minimales. . . . .	82
4.6. Intervalo. . . . .	84
5.1. Juego fuerte de Choquet. . . . .	104
5.2. Espacio <i>CTS</i> -Baire no fuerte-Choquet. . . . .	112

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
3.1. Estudio del espacio de maximales asociado a un cerrado generador y hereditario.	47

## RESUMEN

**TÍTULO:** REPRESENTACIONES DE ESPACIOS  $CTS$  \*

**AUTOR:** JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES \*\*

**PALABRAS CLAVE:** ESPACIOS  $CTS$ , CERRADOS HEREDITARIOS, IDEALES, ANTICADENAS, ESPECTRO, ESPACIO BAIRE, JUEGOS DE CHOQUET.

### DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se estudian representaciones de los espacios  $CTS$  (compactos,  $T_1$  y segundo numerables) mediante estructuras de naturaleza combinatoria, tales como cerrados hereditarios y conjuntos parcialmente ordenados. A través de estas representaciones, se estudian propiedades topológicas de ciertas extensiones polacas de dichos espacios que preservan borelianos, con especial énfasis en la compacidad y la compacidad local. Asimismo, se explora la relación entre los espacios  $CTS$  y conceptos de la teoría descriptiva y de los juegos topológicos, como ser Baire, ser Choquet y tener la propiedad fuerte de Choquet.

Entre los principales resultados de este trabajo, se establece un criterio que permite determinar la no compacidad local en cierto tipo de extensiones polacas de estos espacios  $CTS$ , y se estudian diversos ejemplos provenientes de ideales  $F_\sigma$ . Además, se demuestra que la representación mediante espectros de conjuntos parcialmente ordenados es equivalente en el sentido categórico a la representación dada por cerrados hereditarios. Finalmente, se estudian las relaciones entre ser Baire, ser Choquet y poseer la propiedad fuerte de Choquet en el contexto de los espacios  $CTS$ . En particular, se demuestra que, en los espacios  $CTS$ , ser Baire y ser Choquet son equivalentes, mientras que dicha equivalencia no se extiende a la propiedad fuerte de Choquet.

---

\* Trabajo de grado de Maestría

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** REPRESENTATIONS OF CTS SPACES \*

**AUTHOR:** JEISON LEONARDO AMOROCHO MORALES \*\*

**KEYWORDS:** CTS SPACES, HEREDITARY CLOSED SETS, IDEALS, ANTICHAINS, SPECTRUM, BAIRE SPACE, CHOQUET GAMES.

### DESCRIPTION:

In this work, representations of *CTS* spaces (compact,  $T_1$ , and second countable) are studied via combinatorial structures such as hereditary closed sets and partially ordered sets. Through these representations, topological properties of certain Polish extensions of these spaces that preserve Borel sets are analyzed, with special emphasis on compactness and local compactness. Moreover, the relationship between *CTS* spaces and concepts from descriptive set theory and topological games is explored, such as being Baire, being Choquet, and having the strong Choquet property.

Among the main results, a criterion is established to determine the lack of local compactness in certain types of Polish extensions of *CTS* spaces, and several examples arising from  $F_\sigma$  ideals are studied. In addition, it is shown that the representation via spectra of partially ordered sets is categorically equivalent to the representation given by hereditary closed sets. Finally, the relationships between being Baire, being Choquet, and having the strong Choquet property are analyzed in the context of *CTS* spaces. In particular, it is proved that, for *CTS* spaces, being Baire and being Choquet are equivalent, while this equivalence does not extend to the strong Choquet property.

---

\* Master's Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

Un espacio topológico  $X$  es **CTS** si es compacto,  $T_1$  y segundo numerable. Recientemente, el estudio de estos espacios ha dado lugar al desarrollo de métodos que permiten representarlos mediante estructuras de naturaleza combinatoria <sup>1, 2, 3</sup>, esto es, describir espacios topológicos a través de estructuras discretas, tales como conjuntos parcialmente ordenados o familias hereditarias de conjuntos. Estas estructuras permiten codificar de manera precisa las propiedades topológicas fundamentales del espacio, facilitando su análisis.

Uno de los trabajos fundamentales en esta dirección es el de Morayne y Ryll-Nardzewski <sup>1</sup>. En dicho trabajo, a cada familia hereditaria  $\mathcal{F}$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ , le asociaron un espacio *CTS*  $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$  y mostraron que todo espacio *CTS* es homeomorfo a un espacio de este tipo. Esto proporciona una representación de este tipo de espacios.

Como consecuencia de esta construcción, se obtiene que todo espacio *CTS* admite una extensión polaca que preserva los conjuntos borelianos, es decir, que cada espacio *CTS* posee una estructura estándar de Borel. Más aún, cada espacio *CTS* es homeomorfo a un subespacio de  $2^{\mathbb{N}}$  equipado con la *topología de Sierpiński*. Bajo esta identificación, dicho subespacio es un conjunto  $G_\delta$  cuando se considera  $2^{\mathbb{N}}$  con la topología producto usual. La topología de Sierpiński en  $2^{\mathbb{N}}$  es la topología producto donde cada copia de  $\{0, 1\}$  está equipada con una de las topologías  $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$  o  $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ .

El estudio de estos espacios está estrechamente relacionado con el análisis de los *cerrados hereditarios* de  $2^{\mathbb{N}}$ , los cuales han sido ampliamente investigados en el contexto de los ideales sobre  $\mathbb{N}$ , en particular de los ideales  $F_\sigma$ . Esta conexión motiva una parte importante de los resultados desarrollados en esta tesis.

Desde otra perspectiva, Bartoš, Bice y Vignati <sup>2</sup> introdujeron la noción de *espacio espectro* de un conjunto parcialmente ordenado, asociando a cada *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  un espacio compacto  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ .

---

<sup>1</sup> Morayne, M. y Ryll-Nardzewski, C. “Refinements of  $T_1$ , compact and second countable topologies”. En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: 10.1016/0166-8641(94)90016-7

<sup>2</sup> Bartoš, A., Bice, T. y Vignati, A. “Constructing compacta from posets”. En: *Publ. Mat.* 69.1 (2025), págs. 217-265. DOI: 10.5565/PUBLMAT6912510

<sup>3</sup> Mummert, C. y Stephan, F. “Topological aspects of poset spaces”. En: *Michigan Mathematical Journal* 59.1 (2010), págs. 3-24. DOI: 10.1307/mmj/1272376025

Demostraron que todo espacio  $CTS$  es homeomorfo al espectro  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  para cierto *c.p.o.* numerable (véase el Teorema 4.3.4). Este resultado proporciona una segunda representación combinatoria de los espacios  $CTS$  y permite estudiar sus propiedades topológicas a través de conjuntos parcialmente ordenados. Aunque el interés principal de estos autores se centra en espacios Hausdorff, la construcción del espectro permite obtener espacios  $T_1$  más generales.

Otro resultado relevante es la conexión entre la *propiedad fuerte de Choquet* y los denominados espacios MF. Recordemos que un espacio topológico tiene la *propiedad fuerte de Choquet* si el segundo jugador posee una estrategia ganadora en el juego fuerte de Choquet.

Mummert y Stephan <sup>3</sup> demostraron que todo espacio  $T_1$  y segundo numerable con la propiedad fuerte de Choquet es homeomorfo a un espacio MF, es decir, al espacio de ultrafiltros de un *c.p.o.* (ver Teorema 5.2.6). Esta caracterización permite analizar ciertos espacios  $CTS$  a través de juegos topológicos, como el juego de Choquet. Lo anterior se sustenta en los resultados de Morayne y Rałowski <sup>4</sup>, quienes caracterizaron los espacios  $CTS$  que son Baire (véase el Teorema 5.3.2), estableciendo así una conexión natural con la propiedad fuerte de Choquet.

El trabajo se organiza de la siguiente manera:

El capítulo inicial presenta un breve apartado de preliminares, centrado tanto en el marco teórico de los ideales como en ciertas propiedades topológicas que serán fundamentales para el desarrollo de varios de los resultados de este trabajo.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de la representación de los espacios  $CTS$  mediante familias hereditarias. En la primera parte del capítulo se presenta una breve exposición de algunos resultados previos que motivaron nuestro trabajo. Posteriormente, se presenta el resultado principal de Morayne y Ryll-Nardzewski, donde se demuestra que todo espacio  $CTS$  admite una extensión polaca que preserva los conjuntos borelianos.

En la Sección 2.3 se profundiza en esta dirección y se demuestra que todo conjunto  $G_\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$  es una extensión polaca de un espacio  $CTS$  (Teorema 2.3.1), constituyendo un resultado importante de este capítulo.

Para cada familia hereditaria y cerrada  $\mathcal{G}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , denotamos por  $\mathcal{G}^{max}$  a la

---

<sup>4</sup> Morayne, M. y Rałowski, R. “The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in  $T_1$  compact spaces”. En: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 183 (2023). DOI: 10.1016/j.bulsci.2023.103231

colección de los maximales de  $\mathcal{G}$  respecto a  $\subseteq$ . Como veremos,  $\mathcal{G}^{max}$  es  $G_\delta$  y por consiguiente es polaco con la topología de subespacio. La Sección 2.4 se centra en el estudio de  $\mathcal{G}^{max}$ . Allí se formula explícitamente la siguiente pregunta: ¿para cuáles cerrados hereditarios  $\mathcal{G}$  el espacio  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto? Esta pregunta surge a la luz de los ejemplos presentados por Morayne y Ryll-Nardzewski, que muestran que la extensión de un espacio  $CTS$  puede no ser compacta, ni  $\sigma$ -compacta, e incluso carecer de compacidad local. En esta sección se establecen dos criterios que permiten determinar cuándo el espacio  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto.

Es bien conocido que todo ideal  $F_\sigma$  está generado por un cerrado hereditario. A lo largo de este trabajo denotaremos por  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$  a un cerrado hereditario generador del ideal  $\mathcal{I}$ .

Partiendo de este hecho general, en el Capítulo 3 se estudian ejemplos y propiedades de las familias  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$  asociadas a ideales  $F_\sigma$  (véase 3.1), así como un tipo particular de estos ideales: los homogéneos asociados a coloraciones de números naturales (véase 3.2).

En particular, se analizan las propiedades de compacidad local y de compacidad de la familia de conjuntos maximales asociada a  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ , en el contexto de los ideales  $F_\sigma$ . Como resultado de este estudio, se obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 3.1.

El Capítulo 4 introduce la noción de espacio espectro asociado a un conjunto parcialmente ordenado y presenta el teorema que establece que todo espacio  $CTS$  es homeomorfo al espectro de un *c.p.o.* numerable (Teorema 4.3.4).

El objetivo principal del capítulo es determinar si las representaciones de los espacios  $CTS$ , a saber, mediante familias hereditarias y mediante espacios espectros, son equivalentes desde una perspectiva categórica. La respuesta afirmativa a esta pregunta constituye el resultado central del capítulo: en el Teorema 4.5.11 se establece que la categoría **Espectro** es equivalente a la categoría **CHMax**, demostrando que ambas descripciones son equivalentes.

Finalmente, en el Capítulo 5 se estudia la relación entre los espacios  $CTS$  y la propiedad fuerte de Choquet, lo que permite analizar su representación mediante espacios definidos a partir de conjuntos parcialmente ordenados. Inicialmente, se conjeturaba que todo espacio  $CTS$  que fuera Baire debía satisfacer también la propiedad fuerte de Choquet, como lo sugerían diversos ejemplos. En relación a este problema, mostraremos que (ver Teorema 5.3.5) un espacio  $CTS$  es Baire si, y solo si, es Choquet.

Por otra parte, se presenta un ejemplo que muestra que la propiedad fuerte de Choquet y la propiedad de Baire no son equivalentes en general para los espacios  $CTS$ .

A lo largo de este trabajo, todos los resultados —teoremas, lemas y proposiciones— que no son de autoría propia se presentan debidamente referenciados.

## 1. PRELIMINARES

En todo el desarrollo de este trabajo, consideraremos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

**Definición 1.0.1.** Un **conjunto parcialmente ordenado** es un par  $(\mathbb{P}, \leq)$  donde  $\mathbb{P}$  es un conjunto y  $\leq$  es una relación binaria sobre  $\mathbb{P}$  que satisface:

1. (Reflexividad)  $x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{P}$ .
2. (Antisimetría) Si  $x \leq y$  y  $y \leq x$ , entonces  $x = y$ .
3. (Transitividad) Si  $x \leq y$  y  $y \leq z$ , entonces  $x \leq z$ .

En este trabajo los denotaremos por **c.p.o.**

### 1.1. SOBRE IDEALES

**Definición 1.1.1.** Por un **ideal** en  $\mathbb{N}$  nos referimos a una familia  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  que satisface

1.  $\emptyset \in \mathcal{I}, \mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ .
2. Si  $B \in \mathcal{I}$  y  $A \subseteq B$  entonces  $A \in \mathcal{I}$ .
3. Si  $A, B \in \mathcal{I}$  entonces  $A \cup B \in \mathcal{I}$ .

Cuando digamos que un ideal es  $F_\sigma$ , boreliano, analítico, etc., nos referimos a que lo es como subconjunto de  $2^{\mathbb{N}}$ , identificando  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  con el espacio de Cantor mediante funciones características.

**Definición 1.1.2.** Una **submedida** en un conjunto  $X$  es una función real  $\varphi$  cuyo dominio es la familia de subconjuntos de  $X$  y satisface  $\varphi(\emptyset) = 0$  y  $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ . Una submedida  $\varphi$  es **semicontinua inferior (s.c.i.)** si para cualquier conjunto  $A$  en  $\text{dom}(\varphi)$ , cualquier  $F$  subconjunto finito de  $A$ ,  $F \in \text{dom}(\varphi)$  y  $\varphi(A) = \sup \{\varphi(F) : F \in [A]^{<\omega}\}$ . Existen

tres ideales naturales asociados a una submedida s.c.i.  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\text{Fin}(\varphi) &= \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}, \\ \text{Exh}(\varphi) &= \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A \setminus [1, n]) = 0\right\}, \\ \text{Sum}(\varphi) &= \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \varphi(\{n\}) < \infty\right\}.\end{aligned}$$

Estos ideales satisfacen las siguientes inclusiones:

$$\text{Sum}(\varphi) \subseteq \text{Exh}(\varphi) \subseteq \text{Fin}(\varphi).$$

Decimos que un ideal  $\mathcal{I}$  en  $\mathbb{N}$  es un ***P-ideal*** si para cualquier subfamilia contable  $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathcal{I}$  existe un conjunto  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $|I_n \setminus I| < \infty$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Dada una familia hereditaria  $\mathcal{K}$ , denotamos por  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  el ideal generado por  $\mathcal{K}$ . Es decir

$$B \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K} (B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

**Teorema 1.1.3** (Mazur (1991)). *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal en  $\mathbb{N}$ . Las siguiente son equivalentes.*

1.  $\mathcal{I}$  es  $F_{\sigma}$ .
2. Existe una familia hereditaria cerrada  $\mathcal{K}$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ .
3. Existe una submedida s.c.i.  $\varphi$  tal que  $\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi)$ .

**Teorema 1.1.4** (Solecki (1999)). *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal analítico en  $\mathbb{N}$ . Las siguiente son equivalentes.*

1.  $\mathcal{I}$  es un *P-ideal*.
2. Existe una submedida s.c.i.  $\varphi$  tal que  $\mathcal{I} = \text{Exh}(\varphi)$ .
3.  $\mathcal{I}$  es polonizable.

En particular, todo *P-ideal analítico* es  $\Pi_3^0(F_{\sigma\delta})$ . Además,  $\mathcal{I}$  es un *P-ideal  $F_{\sigma}$* , si y solo si, hay una submedida s.c.i.  $\phi$  tal que  $\mathcal{I} = \text{Exh}(\phi) = \text{Fin}(\phi)$ .

**Definición 1.1.5.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $X$  un conjunto numerable. Decimos que  $\mathcal{I}$  es **alto** (tall en inglés) si dado  $A \subseteq X$  infinito, existe  $B \subseteq A$  infinito tal que  $B \in \mathcal{I}$ .*

**Teorema 1.1.6** (Folclore). Sea  $\psi$  una submedida semicontinua inferiormente.  $\text{Exh}(\psi)$  es alto si, y sólo si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\{n\}) = 0$ .

**Definición 1.1.7.** Un submedida s.c.i. en  $\mathbb{N}$  tiene la **propiedad A** si  $\phi(\mathbb{N}) = \infty$  y  $\phi(\{n \in \mathbb{N} : \phi(\{n\}) > \epsilon\}) < \infty$  para todo  $\epsilon > 0$ .

**Proposición 1.1.8** (Martínez, Meza-Alcántara & Uzcátegui (2024)).  $\text{Fin}(\phi)$  es alto para todo submedida s.c.i.  $\phi$  con la propiedad A.

**Definición 1.1.9.** Sea  $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$  una submedida. Diremos que  $\phi$  es estrictamente monótona si para todos  $A \subsetneq B \subseteq \mathbb{N}$  se tiene

$$\phi(A) < \phi(B).$$

**Proposición 1.1.10.** Sea  $\phi$  una submedida s.c.i., entonces existe una submedida s.c.i.  $\psi$  estrictamente monótona tal que

$$\text{Exh}(\phi) = \text{Exh}(\psi),$$

y

$$\text{Fin}(\phi) = \text{Fin}(\psi).$$

Es decir, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\phi$  es estrictamente monótona.

*Demostración.* Definimos

$$\psi(A) = \phi(A) + \sum_{n \in A} 2^{-n}, \quad A \subseteq \mathbb{N}.$$

Notemos que:

1.  $\psi$  es una submedida s.c.i., pues es suma de dos submedidas s.c.i.
2.  $\psi$  es estrictamente monótona. En efecto, si  $A \subsetneq B$ , existe  $n \in B \setminus A$  y entonces

$$\psi(B) \geq \psi(A) + 2^{-n} > \psi(A).$$

3.  $\text{Exh}(\psi) = \text{Exh}(\phi)$  y  $\text{Fin}(\psi) = \text{Fin}(\phi)$ . En efecto,

$$\sigma(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$$

es finita y su cola tiende a 0, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(A \setminus [1, k]) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(A \setminus [1, k]) = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(A \setminus [1, k]) = 0,$$

y también  $\psi(A) < \infty \iff \phi(A) < \infty$ .

De esta forma, la submedida  $\psi$  es estrictamente monótona, es s.c.i. y satisface que  $\text{Exh}(\phi) = \text{Exh}(\psi)$  y  $\text{Fin}(\phi) = \text{Fin}(\psi)$ .  $\square$

**Proposición 1.1.11.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal  $F_\sigma$ , es decir,  $\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi)$ , para un  $\varphi$  una submedida s.c.i. Si  $\mathcal{I}$  es alto, entonces,*

$$\sup_k \varphi(\{k\}) < \infty.$$

*En particular, podemos suponer que*

$$\sup_k \varphi(\{k\}) \leq 1.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{I}$  es alto y

$$\sup_k \varphi(\{k\}) = \infty.$$

Sea  $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de naturales tales que  $\varphi(\{k_i\}) \geq i$ , y definamos

$$A = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Como  $\mathcal{I}$  es alto, debe existir un conjunto  $B \subseteq A$  con  $B \in \mathcal{I}$ . Lo cual es una contradicción, pues la medida de cualquier subconjunto infinito de  $A$  es infinito.

Por lo tanto podemos suponer que

$$\sup_k \varphi(\{k\}) < \infty$$

y definamos

$$\phi = \frac{\varphi}{\sup_k \varphi(\{k\})},$$

se sigue que

$$\text{Fin}(\phi) = \text{Fin}(\varphi),$$

y

$$\sup_k \phi(\{k\}) \leq 1.$$

□

**Definición 1.1.12** (Hrušák, Rojas-Rebolledo, & Zapletal (2014)). *Un ideal  $\mathcal{I}$  sobre  $\mathbb{N}$  se dice **fragmentado** si existe una partición*

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_j a_j$$

en conjuntos finitos y submedidas  $\varphi_j$  definidas en cada uno de ellos, tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(a_j) = \infty$$

y

$$\mathcal{I} = \{b \subseteq \mathbb{N} : \exists k, \forall j [\varphi_j(a_j \cap b) < k]\}.$$

Nótese que todo ideal fragmentado es  $F_\sigma$ , pues,

$$\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi),$$

donde,

$$\varphi = \sup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i.$$

**Teorema 1.1.13** (Brendle & Mejía (2014)). *Cualquier ideal fragmentado y alto no es un  $P$ -ideal.*

**Definición 1.1.14** (Ideales  $\sigma$ -fragmentados). *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $\mathbb{N}$ . Diremos que  $\mathcal{I}$  es  $\sigma$ -**fragmentado** si existe una partición*

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_n,$$

una partición en conjuntos finitos  $\{B_n^k : k \in \mathbb{N}\}$ ,

$$B_n = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_n^k.$$

Y

$$\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi).$$

donde

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \quad \text{y} \quad \varphi_n = \sup_k \nu_n^k,$$

con  $\nu_n^k$  una medida sobre  $B_n^k$  tal que

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \nu_n^k(B_n^k) = \infty.$$

En particular,  $\varphi$  es una submedida s.c.i. no patológica.

**Definición 1.1.15.** Una familia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  es una **familia independiente** (sobre  $\mathbb{N}$ ) si para cada par  $\mathcal{A}, \mathcal{C}$  de subconjuntos finitos y disjuntos de  $\mathcal{F}$ , el conjunto

$$\bigcap \mathcal{A} \cap \left( \mathbb{N} \setminus \bigcup \mathcal{C} \right)$$

es infinito.

**Ejemplo 1.1.16** (Geschke (2011)). Sea  $C$  el conjunto numerable de todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{Q}$ . Para cada  $r \in \mathbb{R}$  definamos

$$A_r = \{a \in C : a \cap (-1, r] \text{ es par}\}.$$

Entonces, la familia  $\{A_r : r \in \mathbb{R}\}$  es una familia independiente de subconjuntos de  $C$ . Sean  $S$  y  $T$  subconjuntos finitos y disjuntos de  $\mathbb{R}$ . Un conjunto  $a \in C$  es un elemento de

$$\left( \bigcap_{r \in S} A_r \right) \cap \left( C \setminus \bigcup_{r \in T} A_r \right)$$

si para todo  $r \in S$ ,  $a \cap (-1, r]$  es par, y para todo  $r \in T$ ,  $a \cap (-1, r]$  es impar.

Pero es fácil ver que existen infinitos conjuntos finitos  $a$  de números racionales que satisfacen estas condiciones.

## 1.2. ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS

A lo largo de esta tesis, denotaremos por  $\tau_{pro}$  a la *topología producto* y por  $\tau_{sp}$  a la *topología de Sierpiński*, independientemente de si  $\{0\}$  o  $\{1\}$  es el conjunto abierto.

El siguiente resultado fue tomado de Bourbaki (1989), <sup>5</sup>.

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y sea  $Y \subseteq X$ . Entonces,  $Y$  es localmente compacto si, y solo si, es la intersección de un abierto y un cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Demostraremos solo la implicación de izquierda a derecha. Supongamos que  $A$  es un subespacio localmente compacto de un espacio de Hausdorff  $X$ . Sea  $a \in A$  y sea  $U$  un entorno abierto de  $a$  en  $A$  tal que  $\overline{U}^A$  es compacto. Entonces existe un abierto  $V$  de  $a$  en  $X$  tal que  $U = A \cap V$ . Por lo tanto,

$$\overline{U}^A = \overline{A \cap V}^A = \overline{A \cap V} \cap A.$$

En consecuencia,  $\overline{A \cap V} \cap A$  es cerrado en  $X$ , ya que es un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff. Esto implica que

$$\overline{A \cap V} \subseteq \overline{A \cap V} \cap A,$$

pues  $\overline{A \cap V}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A \cap V$ . Por lo tanto,

$$\overline{A \cap V} \subseteq A.$$

Además, se verifica fácilmente que

$$\overline{A \cap V} \subseteq \overline{A \cap V} \subseteq A.$$

Así, vemos que  $A$  contiene un entorno abierto de  $a$  en  $\overline{A}$ , y por tanto  $A$  es abierto en  $\overline{A}$ . Entonces, por la definición de la topología heredada, existe un abierto  $G \subseteq X$  tal que

$$A = G \cap \overline{A},$$

como se quería demostrar. □

El siguiente resultado fue tomado de Munkres (2002), <sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup> Bourbaki, N. *General Topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1989

<sup>6</sup> Munkres, J. R. *Topología*. 2.<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2002

**Teorema 1.2.2.** *Un espacio producto*

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

*es localmente compacto si, y solo si, cada  $X_\alpha$  es localmente compacto y todos, salvo un número finito de los  $X_\alpha$  son compactos.*

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$  un árbol. El espacio  $[T]$  es localmente compacto en  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  si, y solo si,*

$\forall x \in [T] \exists n \in \mathbb{N}$  tal que el subárbol  $T_{x \upharpoonright n} = \{t \in T : x \upharpoonright n \preceq t\}$  tiene ramificación finita.

*Demostración.* Supongamos que  $[T]$  es localmente compacto. Sea  $x \in [T]$ . Entonces existe una vecindad básica clopen  $U_s \cap [T] = [T_s]$  de  $x$  cuya clausura en  $[T]$  es compacta. Dado que  $[T_s]$  es cerrada en  $[T]$ , se sigue que  $[T_s]$  es compacta. Por otro lado,  $[T_s]$  es compacto si y sólo si  $T_s$  es de ramificación finita. Por tanto, existe  $s \preceq x$  tal que  $T_s$  tiene ramificación finita.

Recíprocamente, supongamos que para todo  $x \in [T]$  existe  $n$  tal que  $T_{x \upharpoonright n}$  es de ramificación finita. Entonces cada  $[T_{x \upharpoonright n}]$  es compacto y constituye una vecindad clopen de  $x$ . De este modo, cada punto de  $[T]$  tiene una vecindad compacta, y por tanto  $[T]$  es localmente compacto.  $\square$

**Teorema 1.2.4.** *Sea  $X$  un espacio Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable, entonces  $X$  es  $\sigma$ -compacto.*

**Teorema 1.2.5** (Guthrie & Nymann (1988)). *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie convergente de términos positivos y sea*

$$E((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left\{ \sum_{n \in A} a_n : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

*el conjunto de todas sus subsumas. Entonces  $E$  es exactamente uno de los siguientes tipos:*

1. *una unión finita de intervalos cerrados;*
2. *un espacio homeomorfo al conjunto de Cantor;*
3. *un espacio homeomorfo al conjunto  $T$  de subsumas de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n,$$

donde

$$\beta_{2n-1} = \frac{3}{4^n} \quad y \quad \beta_{2n} = \frac{2}{4^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Teorema 1.2.6** (Banerjee & Lahiri (1964)). *Sea*

$$\sum_{i=1}^{\infty} u(i)$$

*una serie divergente de términos positivos tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0.$$

*Sea  $P$  un número positivo. Entonces existe una subserie (1) que converge a  $P$ .*

*Demostración.* Para empezar la construcción, sea  $N_1$  el menor número natural tal que

$$u(k) < \frac{P}{2} \quad \text{para todo } k \geq N_1.$$

Sea  $M_1$  el mayor natural tal que

$$s_1 = u(N_1) + u(N_1 + 1) + \dots + u(M_1) < P.$$

Por la maximalidad de  $M_1$  se tiene

$$s_1 + u(M_1 + 1) \geq P.$$

Como  $u(M_1 + 1) < \frac{P}{2}$ , se concluye que

$$\frac{P}{2} < s_1 < P.$$

Sea ahora  $N_2 > M_1$  el menor natural tal que

$$u(k) < \frac{P - s_1}{2} \quad \text{para todo } k \geq N_2.$$

Nuevamente, la existencia de  $N_2$  se sigue de que  $(u(n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ . Sea  $M_2$  el mayor natural tal que

$$s_2 = s_1 + u(N_2) + u(N_2 + 1) + \dots + u(M_2) < P.$$

Entonces, por la maximalidad de  $M_2$ ,

$$s_2 + u(M_2 + 1) \geq P.$$

Dado que  $u(M_2 + 1) < \frac{P-s_1}{2}$ , se obtiene

$$P - \frac{P}{2^2} < s_2 < P.$$

De manera análoga, sea  $N_3 > M_2$  el menor natural tal que

$$u(k) < \frac{P - s_2}{2} \quad \text{para todo } k \geq N_3,$$

y sea  $M_3$  el mayor natural tal que

$$s_3 = s_2 + u(N_3) + u(N_3 + 1) + \cdots + u(M_3) < P.$$

Entonces se cumple

$$P - \frac{P}{2^3} < s_3 < P.$$

Continuando de forma recursiva, se obtienen dos sucesiones  $(N_q)_q$  y  $(M_q)_q$  tales que

$$N_1 < M_1 < N_2 < M_2 < \cdots < N_q < M_q < \cdots ,$$

y una sucesión creciente de sumas parciales  $(s_q)_q$  que satisface

$$s_q = s_{q-1} + u(N_q) + u(N_q + 1) + \cdots + u(M_q) < P, \quad q \geq 2,$$

junto con la estimación

$$P - \frac{P}{2^q} < s_q < P.$$

Es fácil ver que la subserie formada por los términos, tomados en este orden,

$$u(N_1), u(N_1 + 1), \dots, u(M_1), u(N_2), u(N_2 + 1), \dots, u(M_2), u(N_3), \dots$$

tiene como sumas parciales principales a  $(s_q)_q$ . Como

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left( P - \frac{P}{2^q} \right) = P,$$

se concluye que dicha subserie converge a  $P$ .

□

## 2. REPRESENTACIONES DE ESPACIOS *CTS*

El Capítulo 2 se centra en dos objetivos principales. Primero, se estudia el Teorema de Morayne y Ryll–Nardzewski, el cual caracteriza a los espacios *CTS* como la familia de conjuntos maximales de un cerrado hereditario en  $2^{\mathbb{N}}$ . En segundo lugar, se aborda la pregunta de si todo subconjunto  $G_\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$  puede considerarse una extensión polaca de un espacio *CTS*, demostrando que la respuesta es afirmativa (véase el Teorema 2.3.1).

A continuación, el capítulo estudia los cerrados hereditarios de  $2^{\mathbb{N}}$  y, en particular, sus familias maximales asociadas, las cuales forman una anticadena. Todo ello con el interés de analizar en estas familias propiedades topológicas tales como la compacidad local y la compacidad, a la luz de los ejemplos presentados por los mismos autores Morayne y Ryll–Nardzewski (véanse los Ejemplos 2.2.5 y 2.2.8). En específico, se prueban los criterios de compacidad local 2.4.3 y 2.4.8.

### 2.1. EL TEOREMA DE MORAYNE Y RYLL-NARDZEWSKI

Consideremos al espacio  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  con la topología producto del espacio de Cantor, de esta manera podemos ver a  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  como un espacio métrico compacto.

**Notación 2.1.1.** *Denotaremos por  $\text{Fin} = \text{Fin}(\mathbb{N})$ .*

**Proposición 2.1.2.** *Una base para la topología de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  viene dada por*

$$\{\mathcal{V}(a, b) : a, b \in \text{Fin} \wedge a \cap b = \emptyset\},$$

donde,

$$\mathcal{V}(a, b) = \{X \subseteq \mathbb{N} : a \subseteq X \wedge b \cap X = \emptyset\}.$$

Sea  $\mathcal{H}$  una familia arbitraria de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ . Decimos que  $\mathcal{H}$  es **hereditaria** si satisface

$$(H_1 \subseteq H_2 \text{ y } H_2 \in \mathcal{H}) \text{ implica que } H_1 \in \mathcal{H}.$$

A una familia  $\mathcal{F}$  hereditaria de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  asociamos dos familias de subconjuntos  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  y  $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$ . La primera consiste en todos los conjuntos cuyos subconjuntos finitos están en  $\mathcal{F}$  y la segunda consiste en aquellos elementos de  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  que son maximales con respecto a la inclusión. Más precisamente:

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})[[1, n] \cap G \in \mathcal{F}]\} \quad (2.1)$$

y

$$\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}) = \{H \in \mathcal{G} : (\forall G \in \mathcal{G})[H \subseteq G \rightarrow H = G]\}. \quad (2.2)$$

**Observación 2.1.3.** *En algunas ocasiones, cuando se sobreentienda que se está trabajando con la familia  $\mathcal{F}$ , utilizaremos la notación  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^{max}$  para referirnos, respectivamente, a  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  y  $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$ .*

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia hereditaria de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . Entonces,  $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{G}(\mathcal{F})$ , además  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  es también hereditaria.*

*Demostración.* Sea  $G \in \mathcal{G}$  y  $a, b \in \text{Fin}$  tales que  $G \in \mathcal{V}(a, b)$ . Por la definición de  $\mathcal{G}$ , se tiene que  $a \in \mathcal{F}$ , de donde se sigue que  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . En consecuencia,  $G \in \overline{\mathcal{F}}$ , lo que demuestra que  $\mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ .

Por otro lado, sea  $H \in \overline{\mathcal{F}}$ . Queremos probar que  $H \in \mathcal{G}$ . Sea  $a \subseteq H$  finito, entonces  $\mathcal{V}(a, \emptyset)$  es una vecindad de  $H$ , lo que implica que  $\mathcal{V}(a, \emptyset) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $a \in \mathcal{F}$  y, en consecuencia,  $H \in \mathcal{G}$ .  $\square$

Considere ahora la familia

$$\mathcal{B}_n = \{H \in \mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}) : n \notin H\}. \quad (2.3)$$

Consideremos a continuación el conjunto  $\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F})$  como un espacio topológico, tomando como subbase

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.4)$$

Denotaremos por  $\tau_{sp}$  a la topología generada por esta subbase.

**Teorema 2.1.5** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Sea  $\mathcal{F}$  una familia hereditaria arbitraria de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . Entonces,  $(\mathcal{G}^{max}(\mathcal{F}), \tau_{sp})$  es un espacio CTS.*

*Demostración.* Como la subbase es numerable, entonces  $\mathcal{G}^{max}$  es segundo numerable. Para ver que es  $T_1$ , sean  $K_1, K_2 \in \mathcal{G}^{max}$  con  $K_1 \neq K_2$ . Como  $K_1$  es maximal, existe  $l \in K_1 \setminus K_2$  y  $m \in K_2 \setminus K_1$ . De ahí que  $K_2 \in \mathcal{B}_l$ ,  $K_1 \in \mathcal{B}_m$  y  $K_1 \notin \mathcal{B}_l$ ,  $K_2 \notin \mathcal{B}_m$ , lo que muestra que es  $T_1$ . Para ver que  $\mathcal{G}^{max}$  es compacto, sea  $\{\mathcal{B}_{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  un cubrimiento por subbásicos. Supongamos que no admite subcubrimiento finito a partir de  $\{\mathcal{B}_{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Entonces para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$A_m = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{B}_{\lambda_i}^c \neq \emptyset.$$

Tomemos para cada  $m \in \mathbb{N}$  un elemento  $H_m \in A_m$ . Obtenemos así una sucesión  $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathcal{G}^{max}$ . Como  $\mathcal{G}$  es compacto,  $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión  $(H_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$  que converge a  $G \in \mathcal{G}$ . Notemos que por como se construyó la sucesión,

$$H_{m_1} \supseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}\},$$

$$H_{m_2} \supseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m_2}\},$$

⋮

Por lo tanto,  $G \supseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, \dots\}$ . Sea ahora  $H \in \mathcal{G}^{max}$  tal que  $G \subseteq H$ , entonces

$$H \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\lambda_i}^c.$$

Lo que contradice que  $\{\mathcal{B}_{\lambda_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un cubrimiento de  $\mathcal{G}^{max}$ .

□

**Teorema 2.1.6** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Cada espacio topológico CTS es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  para alguna familia hereditaria  $\mathcal{F}$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  una base numerable para  $X$  y defina

$$\mathcal{C} = \{U^c : U \in \mathcal{U}\}.$$

Sea  $\{C_1, C_2, \dots\}$  una enumeración de  $\mathcal{C}$ . Considere la siguiente familia

$$\mathcal{F} = \{J \in \text{Fin} : \bigcap \{C_n : n \in J\} \neq \emptyset\}. \quad (2.5)$$

Claramente  $\mathcal{F}$  es hereditaria. Las familias  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^{max}$  son definidas por (2.1) y (2.2). Definamos  $\phi : X \rightarrow \mathcal{G}^{max}$  por

$$\phi(x) = \{n : x \in C_n\}. \quad (2.6)$$

Mostraremos que  $\phi$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $\mathcal{G}^{max}$ .

Dado que  $X$  es  $T_1$  y  $\mathcal{U}$  es una base para  $X$  tenemos que  $\bigcap \{C_n : n \in \phi(x)\} = \{x\}$ . Veamos ahora que  $\phi(x) \in \mathcal{G}$ , tome  $J \subseteq \phi(x)$  finito. Note que

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n \subseteq \bigcap_{j \in J} C_j,$$

de lo que se sigue que  $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$ . De esto obtenemos que  $\phi(x) \in \mathcal{G}$ . Para ver que  $\phi(x)$  pertenece a  $\mathcal{G}^{max}$ . Suponga que existe  $G' \in \mathcal{G}$  que cumple que  $\phi(x) \subsetneq G'$ . Luego, existe  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \in G' \setminus \phi(x)$ . Así  $x \notin C_k$ , y

$$\bigcap_{m \in G'} C_m \subseteq \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n = \{x\},$$

lo que es una contradicción. Así,  $\phi(x) \in \mathcal{G}^{max}$ . Esto muestra  $\phi$  está bien definida.

Probemos que  $\phi$  es inyectiva. Tome  $x_1 \neq x_2$ , como  $X$  es  $T_1$  existen  $C_m$  y  $C_k$  tales que  $x_1 \in C_m \setminus C_k$  y  $x_2 \in C_k \setminus C_m$ . Por tanto,  $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ .

Para mostrar que  $\phi$  es sobreyectiva, tome  $H \in \mathcal{G}^{max}$ . Por la definición de  $\mathcal{G}$  tenemos que  $\bigcap\{C_n : n \in A\} \neq \emptyset$  para todo subconjunto finito  $A$  de  $H$ , de ahí que  $\bigcap\{C_n : n \in H\} \neq \emptyset$  dado que  $X$  es compacto. Si  $x_1, x_2 \in \bigcap\{C_n : n \in H\}$  y  $x_1 \neq x_2$ , entonces existe  $C_m \in \mathcal{C}$  tal que  $x_1 \in C_m$  y  $x_2 \notin C_m$  pues  $X$  es  $T_1$ . Luego,  $H \cup \{m\} \in \mathcal{G}$  lo cual es una contradicción con la definición de  $\mathcal{G}^{max}$ . Se sigue que  $\bigcap\{C_n : n \in H\} = \{x\}$  para algún  $x \in X$ , lo que implica que  $H \subseteq \phi(x)$ . Como ambos están en  $\mathcal{G}^{max}$ ,  $\phi(x) = H$ .

De lo anterior se tiene que  $\phi$  es una función biyectiva de  $X$  a  $\mathcal{G}^{max}$ . Para probar que  $\phi$  es un homeomorfismo es suficiente notar que  $\phi(C_n) = \mathcal{B}_n^c$ , ya que esto muestra que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son funciones cerradas.

□

**Comentario 2.1.7.** *Notemos que el teorema de representación (2.1.6) no necesita pasar por la definición de una familia hereditaria de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ , de hecho se puede trabajar directamente con conjuntos hereditarios y cerrados de  $2^{\mathbb{N}}$ . Es decir, si  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  es cerrado y hereditario, definimos;*

$$\mathcal{G}^{max} = \{H \in \mathcal{G} : (\forall G \in \mathcal{G})[H \subseteq G \rightarrow H = G]\}.$$

*Consideramos de igual forma a  $\mathcal{G}^{max}$  como espacio topológico, tomando como subbase*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Denotaremos de igual manera por  $\tau_{sp}$  a la topología generada por esta subbase y por  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  cuando tomemos a  $\mathcal{G}^{max}$  con la topología heredada de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Con esta aclaración, podemos enunciar el teorema anterior como sigue.*

**Teorema 2.1.8** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Cada espacio topológico CTS es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  para algún conjunto  $\mathcal{G}$  de  $2^{\mathbb{N}}$  cerrado y hereditario.*

**Comentario 2.1.9.** *Independientemente de que trabajemos con conjuntos cerrados y hereditarios de  $2^{\mathbb{N}}$ , siempre podremos volver a la noción de familia hereditaria de subconjuntos finitos, definiendo  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \text{Fin}$  para cualquier  $\mathcal{G}$ , cerrado y hereditario.*

## 2.2. EXTENSIONES BOREL ESTÁNDAR

**Lema 2.2.1** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Sea  $X$  un espacio compacto metrizable y  $R$  una relación binaria en  $X$ . Si  $R$  es un subconjunto cerrado en  $X^2$ , entonces el conjunto de todos los elementos maximales (respecto de  $R$ ) es un subconjunto  $G_\delta$  de  $X$ .*

*Demostración.* El conjunto de elementos maximales está definido por:

$$M = \{x \in X : (\forall y)(x \neq y \implies (x, y) \notin R)\}.$$

Notemos que

$$M = (\pi_1(R \setminus \text{diag}(X^2)))^c.$$

Como  $R \setminus \text{diag}(X^2)$  es  $F_\sigma$  y la función  $\pi$  es cerrada, pues es una función continua definida en un compacto, se sigue que  $\pi_1(R \setminus \text{diag}(X^2))$  es  $F_\sigma$ . Por lo tanto  $M$  es  $G_\delta$ .  $\square$

**Teorema 2.2.2** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Si  $X$  es un espacio CTS, entonces existe una extensión polaca de tal manera que los conjuntos de Borel generados por estas dos topologías son los mismos.*

*Demostración.* En vista del Teorema 2.1.8 es suficiente probar el resultado para cada espacio de la forma  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  donde  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ . Sea  $\mathcal{B}_n$  como fue definida en 2.3, entonces

$$\mathcal{B}_n^c = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \in A\} \cap \mathcal{G}^{max}.$$

Observemos que  $\mathcal{B}_n$  es cerrado y abierto de  $\mathcal{G}^{max}$  con la topología heredada de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . De ahí, esta topología extiende a  $\tau_{sp}$ . Lo que implica que

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro}).$$

Como los conjuntos  $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \in A\} \cap \mathcal{G}^{max}$  son abiertos básicos en  $\mathcal{G}^{max}$  con la topología heredada y los  $\mathcal{B}_n^c$  son cerrados en  $\mathcal{G}^{max}$  con la topología  $\tau_{sp}$ , se tiene que  $\tau_{pro} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$ .

Es decir,

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp}).$$

Por lo tanto, los espacios  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  y  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  poseen los mismos borelianos.

Para finalizar la prueba, notemos que

$$\mathcal{R} = \{(G, H) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : G \subseteq H\}$$

es cerrado en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ , y por el Lema 2.2.1 se sigue que  $\mathcal{G}^{max}$  es  $G_\delta$  en el espacio  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , y por consiguiente  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  es un espacio polaco.  $\square$

**Corolario 2.2.3** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Cada espacio CTS tiene estructura Borel estándar.*

El siguiente ejemplo muestra que no siempre se puede obtener una extensión Hausdorff y compacta de los espacios CTS.

**Proposición 2.2.4** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Sea  $X = (0, 1]$  con la topología usual, si  $Y$  es una compactificación Hausdorff de  $X$ , entonces  $Y \setminus X$  (residuo) es conexo.*

**Ejemplo 2.2.5** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Fijemos  $a, b \notin (0, 1]$ ,  $a \neq b$ . Sea*

$$X = (0, 1] \cup \{a, b\}.$$

*Definamos las vecindades básicas de  $a$  como los conjuntos de la forma*

$$U_n = \{a\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left(\frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i}\right),$$

*con  $n \in \mathbb{N}$ . Y las vecindades básicas de  $b$  como los conjuntos de la forma*

$$V_n = \{b\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left(\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1}\right),$$

*con  $n \in \mathbb{N}$ . Los puntos de  $(0, 1]$  tienen la base usual. Este espacio es CTS y no es Hausdorff.*

*Como cualquier extensión compacta y Hausdorff de esta topología debe permanecer igual en  $(0, 1]$ , esta sería una compactificación de dos puntos de  $(0, 1]$  y tal compactificación no existe, ya que el residuo de cualquier compactificación de  $(0, 1]$  debe ser conexo, esto por la Proposición 2.2.4.*

**Observación 2.2.6.** *El siguiente conjunto es un ejemplo de un compacto que no es cerrado en el espacio descrito anteriormente. Sea*

$$M = \left\{ \frac{4m-1}{4m(2m-1)} : m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{a\},$$

*notemos que para cada  $m > 1$  se cumple que*

$$\frac{1}{2m+1} < \frac{1}{2m} < \frac{4m-1}{4m(2m-1)} < \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2m-2}.$$

*De esto se deduce fácilmente que  $M$  es compacto por la manera como se definieron los abiertos básicos que contienen al punto  $a$ . Por otra parte,  $M$  no es cerrado pues  $b \in \overline{M}$ .*

**Proposición 2.2.7** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Sea  $X$  el espacio descrito en el Ejemplo 2.2.5. Si  $K$  es compacto y denso en  $X$ , entonces  $K = X$ .*

A continuación se presenta un espacio descrito en <sup>7</sup> el cual no posee una extensión Hausdorff y  $\sigma$ -compacta con los mismos conjuntos de Borel.

**Ejemplo 2.2.8** (Morayne & Ryll-Nardzewski (1994)). *Sea  $(X, \tau)$  un espacio CTS que no admite una extensión Hausdorff compacta. Asuma que  $(X, \tau)$  tiene la propiedad de que  $X$  es el único compacto y denso en  $X$ . El espacio descrito en el Ejemplo 2.2.5 tiene todas estas propiedades.*

*Considere  $X^{\mathbb{N}}$  equipado con la topología producto  $\tau_{pro}$ . Entonces,  $(X^{\mathbb{N}}, \tau_{pro})$  es CTS. Este espacio no posee una extensión Hausdorff y  $\sigma$ -compacta que preserve los mismos conjuntos de Borel que  $(X^{\mathbb{N}}, \tau_{pro})$ .*

**Observación 2.2.9.** *A partir del ejemplo anterior se puede mostrar que existe una topología CTS que no posee como extensión a un subconjunto  $F_{\sigma}$  de un espacio topológico Hausdorff, compacto y segundo numerable. En particular, no tendrá una extensión Hausdorff, localmente compacta y segundo numerable (esto por el Teorema 1.2.4).*

**Ejemplo 2.2.10.** *Veamos cual es el cerrado hereditario asociado al espacio del Ejemplo 2.2.5. Para ello tomemos una base de  $X = \{a, b\} \cup (0, 1]$ , de la siguiente manera. Para el*

---

<sup>7</sup> Morayne, M. y Ryll-Nardzewski, C. "Refinements of T1, compact and second countable topologies". En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: 10.1016/0166-8641(94)90016-7.

punto  $a$ , seguimos usando los básicos

$$U_n = \{a\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left( \frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i} \right), \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Alrededor de  $b$ , los básicos

$$V_n = \{a\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left( \frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1} \right), \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Para  $(0, 1)$ , tomamos la base formado por los intervalos  $(p, q)$  con  $p, q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  y  $p < q$ .  
Alrededor de  $1$ , los abiertos básicos de la forma  $(r, 1]$  con  $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ .

Enumeramos una base  $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $X$  de la siguiente manera.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $O_{4n} = U_n$  y  $O_{4n+1} = V_n$ .

Fijamos una enumeración  $\{(p^{(n)}, q^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{Q} \cap (0, 1) \times \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  y tomamos

$$O_{4n+2} = (p^{(n)}, q^{(n)}).$$

Finalmente, fijamos una enumeración  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$  y tomamos

$$O_{4n+3} = (r_n, 1].$$

De la construcción de los conjuntos  $O_n$ , se sigue que para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} O_{4n}^c &= \{b\} \cup \left[ \frac{1}{2n}, 1 \right] \cup \left\{ \frac{1}{2i} : i \geq n+1 \right\}, \\ O_{4n+1}^c &= \{a\} \cup \left[ \frac{1}{2n-1}, 1 \right] \cup \left\{ \frac{1}{2i-1} : i \geq n+1 \right\}, \\ O_{4n+2}^c &= (0, p^{(n)}) \cup [q^{(n)}, 1] \cup \{a, b\}, \\ O_{4n+3}^c &= (0, p^{(n)}) \cup \{a, b\}. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \bigcap_{n \in A} O_n^c \neq \emptyset\}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} G_1 &= 4\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} + 1 \cup 4\mathbb{N} + 2, \\ G_a &= 4\mathbb{N} + 1 \cup 4\mathbb{N} + 2 \cup 4\mathbb{N} + 3, \end{aligned}$$

$$G_b = 4\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} + 2 \cup 4\mathbb{N} + 3.$$

Afirmamos que

$$\mathcal{G}^{max} = \{G_a\} \cup \{G_b\} \cup \{G_1\} \cup \bigcup_{x \in (0,1)} \{G_x\},$$

donde

$$\begin{aligned} G_x = & \left\{ 4n : \frac{1}{2^n} \leq x \text{ o } x = \frac{1}{2^i} \text{ para } i \geq n + 1 \right\} \\ & \cup \left\{ 4n + 1 : \frac{1}{2^{n-1}} \leq x \text{ o } x = \frac{1}{2^{i-1}} \text{ para } i \geq n + 1 \right\} \\ & \cup \left\{ 4n + 2 : x \leq p^{(n)} \text{ o } q^{(n)} \leq x \right\} \\ & \cup \left\{ 4n + 3 : x \leq r^{(n)} \right\}, \text{ para cada } x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Lo anterior vale pues

$$\bigcap_{n \in G_a} O_n^c = \{a\},$$

$$\bigcap_{n \in G_b} O_n^c = \{b\},$$

$$\bigcap_{n \in G_1} O_n^c = \{1\},$$

y

$$\bigcap_{n \in G_x} O_n^c = \{x\}.$$

### 2.3. CONJUNTOS $G_\delta$ DE CANTOR COMO EXTENSIÓN DE ESPACIOS $CTS$

Todo espacio  $CTS$  es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  para algún conjunto  $\mathcal{G}$  cerrado y hereditario, y además  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  es una extensión polaca que preserva borelianos.

En esta sección se estudia la siguiente pregunta: ¿Todo conjunto  $G_\delta$  de Cantor es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  para algún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ ? Se mostrará a continuación que la respuesta es afirmativa. Justo después, veremos que también existen conjuntos  $G_\delta$  en  $2^\mathbb{N}$  que no pueden coincidir exactamente con  $\mathcal{G}^{max}$  para ningún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 2.3.1.** *Todo  $G_\delta$  de Cantor es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$ , para algún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ .*

*Demostración.* Sea  $X$  un  $G_\delta$  de Cantor. Fijemos una métrica compatible con su topología polaca. Construiremos un esquema de Lusin  $\{C_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  de  $X$  tal que:

1.  $C_\emptyset = X$ ,
2.  $C_s$  es abierto y cerrado,
3.  $C_{s\hat{i}} \cap C_{s\hat{j}} = \emptyset$ , si  $i \neq j$  y  $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ ,
4.  $C_s = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{s\hat{i}}$ ;
5.  $diam(C_s) \leq 2^{-|s|}$ .

Puede pasar que algunos  $C_s$  sean vacíos. Veamos la construcción de este esquema.

Sea  $\mathcal{U}$  una base de abiertos-cerrados de  $X$ . Tomemos  $\mathcal{B} = \{B_i^\emptyset\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  un cubrimiento de  $X$  por básicos de diámetro menor o igual que 1 y definamos:

$$C_{\langle 1 \rangle} = B_1^\emptyset,$$

$$C_{\langle 2 \rangle} = B_2^\emptyset \setminus B_1^\emptyset,$$

y en general,

$$C_{\langle n \rangle} = B_n^\emptyset \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j^\emptyset \right).$$

Ahora, para cada  $C_{\langle n \rangle}$ , con  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $\mathcal{B}_{\langle n \rangle} = \{B_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  un cubrimiento de  $C_{\langle n \rangle}$  con elementos de diámetro menor e igual que  $\frac{1}{2}$ . Y definimos

$$C_{\langle n, 1 \rangle} = B_1^{(n)},$$

$$C_{\langle n, 2 \rangle} = B_2^{(n)} \setminus B_1^{(n)},$$

y en general,

$$C_{\langle n, m \rangle} = B_m^{(n)} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j^{(n)} \right).$$

De manera recursiva, se obtiene el esquema  $\{C_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  deseado. Además, notemos que  $\mathcal{O} = \{C_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  es base para  $X$ .

Sea  $\{D_1, D_2, \dots\}$  una enumeración de este esquema y considere el siguiente cerrado hereditario

$$\mathcal{G} = \{J \subseteq \mathbb{N} : \bigcap \{D_n : n \in J\} \neq \emptyset\}.$$

Veamos que  $\mathcal{G}$  es cerrado en  $2^{\mathbb{N}}$ .

Sea  $J \notin \mathcal{G}$ , es decir,

$$\bigcap_{n \in J} D_n = \emptyset.$$

Afirmamos que existe un subconjunto finito  $F \subseteq J$  tal que

$$\bigcap_{n \in F} D_n = \emptyset.$$

Supongamos por contradicción que para todo subconjunto finito  $F \subseteq J$  se cumple

$$\bigcap_{n \in F} D_n \neq \emptyset.$$

Sea  $s_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$  tal que  $D_n = C_{s_n}$  para cada  $n \in J$ . Entonces

$$C_{s_n} \cap C_{s_m} \neq \emptyset$$

para cualesquiera  $n, m \in J$ .

El esquema de Lusin  $\{C_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  satisface que, para cualesquiera  $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ , los conjuntos  $C_s$  y  $C_t$  son disjuntos o bien uno está contenido en el otro. Por lo tanto,

$$\{C_{s_n} : n \in J\}$$

es una cadena de conjuntos.

Como  $X$  es un espacio polaco y los conjuntos  $C_{s_k}$  son cerrados y encajados, se sigue que

$$\bigcap_{n \in J} D_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{s_k} \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe un subconjunto finito  $F \subseteq J$  tal que

$$\bigcap_{n \in F} D_n = \emptyset.$$

Tome  $\mathcal{V}(F, \emptyset)$  y notemos que

$$J \in \mathcal{V}(F, \emptyset) \subseteq \mathcal{G}^c.$$

De lo anterior se deduce que  $\mathcal{G}^c$  es abierto.

Definamos  $\phi : X \rightarrow \mathcal{G}^{max}$  por

$$\phi(x) = \{n : x \in C_n\}$$

para cada  $x \in X$ . Mostraremos que  $\phi$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $\mathcal{G}^{max}$ .

Dado que  $X$  es Hausdorff y  $\mathcal{O}$  es una base para  $X$  tenemos que  $\bigcap \{C_n : n \in \phi(x)\} = \{x\}$ .

Por lo tanto, se sigue que  $\phi(x) \in \mathcal{G}$ , pues

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n.$$

Para ver que  $\phi(x)$  pertenece a  $\mathcal{G}^{max}$ , suponga que existe  $G' \in \mathcal{G}$  que cumple que  $\phi(x) \subsetneq G'$ .

Luego, existe  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \in G' \setminus \phi(x)$  de tal manera que  $x \notin C_k$ . Notemos primero que

$$\bigcap_{m \in G'} C_m \subsetneq \bigcap_{n \in \phi(x)} C_n = \{x\},$$

es decir,  $\bigcap_{m \in G'} C_m = \emptyset$ . Lo cual contradice el hecho de que  $G' \in \mathcal{G}$ . De esta manera,  $\phi(x) \in \mathcal{G}^{max}$ . Esto muestra  $\phi$  está bien definida.

Veamos que  $\phi$  es inyectiva. Tome  $x_1 \neq x_2$ . Como  $X$  es  $T_2$  existen  $m$  y  $k$  tales que  $x_1 \in C_m$ ,  $x_2 \in C_k$  y  $C_m \cap C_k = \emptyset$ . Por tanto,  $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ .

Probemos que  $\phi$  es sobreyectiva. Sea  $H \in \mathcal{G}^{max}$ . Por la definición de  $\mathcal{G}$ , tenemos que  $\bigcap \{C_n : n \in H\} \neq \emptyset$ . Además, como es maximal, se tiene que  $\bigcap \{C_n : n \in H\} = \{x\}$  para algún  $x \in X$ , lo que implica que  $H \subseteq \phi(x)$ , pero como ambos están en  $\mathcal{G}^{max}$ , se sigue que  $\phi(x) = H$ . De lo anterior se tiene que  $\phi$  es una función biyectiva de  $X$  a  $\mathcal{G}^{max}$ . Para probar que  $\phi$  es un homeomorfismo es suficiente notar que  $\phi(C_n) = \{H \in \mathcal{G}^{max} : n \in H\}$  y  $\phi(C_n^c) = \{H \in \mathcal{G}^{max} : n \notin H\}$ . Esto muestra que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son funciones continuas.  $\square$

**Corolario 2.3.2.** *Todo polaco cero dimensional es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$ , para algún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ .*

El siguiente ejemplo ilustra cómo es la construcción del esquema de Lusin para un conjunto abierto de  $2^{\mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $X = 2^{\mathbb{N}} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, \dots)\}$ . Afirmamos que  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times 2^{\mathbb{N}}$ .

Definimos  $s_n = \{s \in 2^{n+1} : s(i) = 0 \text{ para } 0 \leq i < n \text{ y } s(n) = 1\}$ , es decir,

$$s_0 = \{(1)\},$$

$$s_1 = \{(0, 1)\},$$

$$s_2 = \{(0, 0, 1)\},$$

$\vdots$

Y tomamos

$$H : \mathbb{N} \cup \{0\} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, \dots)\}$$

por

$$H((n, y)) = s_n \widehat{\ } y.$$

Notemos que  $H$  es un homeomorfismo.

Construyamos ahora un esquema de Lusin en  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times 2^{\mathbb{N}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y cada  $s \in 2^{<\omega}$  definimos

$$C_{(n,s)} = \{n\} \times U_s.$$

Gráficamente, el esquema de Lusin de la siguiente manera;

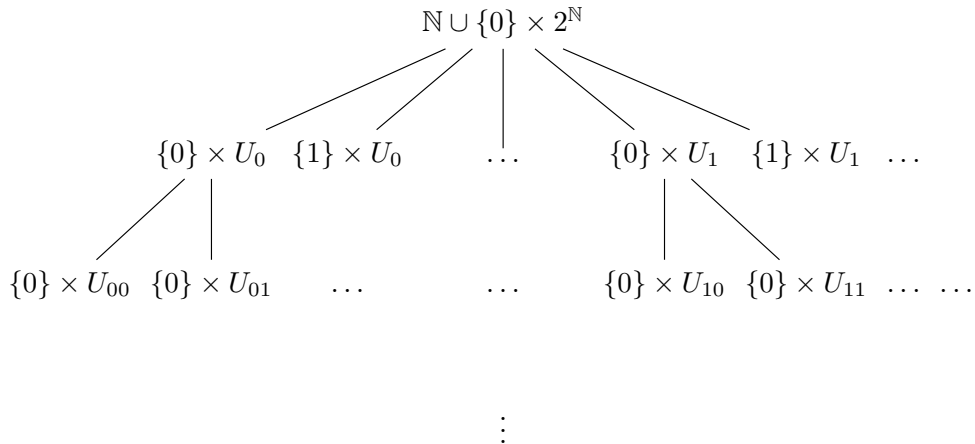


Figura 2.1: Cantor menos un punto.

Tomemos  $e : \mathbb{N} \cup \{0\} \times 2^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  una biyección y escojamos una enumeración de este esquema

$\{C_1, C_2 \dots\}$  tomando

$$C_{e(n,s)} = \{n\} \times U_s.$$

De esta manera, si  $m \in \mathbb{N}$ , escribimos  $C_m = \{k_m\} \times U_{t_m}$  con  $k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $t_m \in 2^{<\mathbb{N}}$ . Entonces el cerrado hereditario asociado a esta enumeración está descrito por;

$$\mathcal{G} = \{J \subseteq \mathbb{N} : \bigcap \{C_n : n \in J\} \neq \emptyset\},$$

y

$$\mathcal{G}^{max} = \{G \subseteq \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in G)(k_n = k)\} \wedge (\exists \alpha \in 2^{\mathbb{N}})(\{t_n : n \in G\} = \{\alpha \upharpoonright m : m \in \mathbb{N}\}).$$

Notemos que también podemos identificar a  $\mathcal{G}$  como

$$\mathcal{G} = \left\{ \{k\} \times \{\alpha \upharpoonright n : n \in J \subseteq \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(2^{<\mathbb{N}}) : k \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \right\},$$

y

$$\mathcal{G}^{max} = \left\{ \{k\} \times \{\alpha \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(2^{<\mathbb{N}}) : k \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

**Observación 2.3.4.** El teorema anterior caracteriza a los conjuntos  $G_\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$  bajo homeomorfismos. Por otra parte, el Lema 2.2.1 establece que

$$\{\mathcal{G}^{max} : \mathcal{G} \text{ es un cerrado hereditario de } 2^{\mathbb{N}}\} \subseteq \Pi_2^0(2^{\mathbb{N}}).$$

Esta inclusión es claramente propia, pues  $\mathcal{G}^{max}$  es una anticadena.

**Ejemplo 2.3.5.** Sea  $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  el espacio de Baire, notemos que  $\mathcal{N}$  es homeomorfo a un  $G_\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$ , es específico, sea

$$\begin{aligned} f : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{S} \\ \alpha &\mapsto 0^{\alpha(0)} 10^{\alpha(1)} 10^{\alpha(2)} \dots, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{S} = \{\beta \in 2^{\mathbb{N}} : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \geq m)(\beta(n) = 1)\}$ . Este  $G_\delta$  coincide precisamente, en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , con la colección de todos los subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ . Dado que dicha colección no es una anticadena, se sigue que no puede ser de la forma  $\mathcal{G}^{max}$  para ningún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ .

## 2.4. EXTENSIONES LOCALMENTE COMPACTAS DE $CTS$

En <sup>8</sup> se presentan ejemplos de espacios  $CTS$  que no admiten una extensión polaca que preserve los borelianos y que sea compacta,  $\sigma$ -compacta o localmente compacta. Como vimos en el Teorema 2.2.2, todo  $CTS$  posee una extensión polaca de la forma  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$ , donde  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ . Por lo tanto, en esta sección abordaremos el problema desde una perspectiva concreta, estudiando las condiciones bajo las cuales  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto con la topología de Cantor.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ . Si  $\mathcal{G} \subseteq \text{Fin}$ , entonces  $\mathcal{G}^{max}$  es discreto en  $2^{\mathbb{N}}$ .*

En virtud del Teorema 1.2.1, sabemos que todo espacio localmente compacto puede expresarse como la intersección de un conjunto abierto y uno cerrado del espacio. En nuestro caso, si  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$  y se cumple que  $\mathcal{G}^{max} = U \cap \mathcal{G}$ , para algún abierto  $U$ , entonces  $\mathcal{G}^{max}$  solo contiene conjuntos finitos, como mostramos a continuación.

**Lema 2.4.2.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ . Si  $\mathcal{G}^{max} = \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$  para algún abierto  $\mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{G} \subseteq \text{Fin}$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que  $\mathcal{G}^{max} = \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$  para algún abierto  $U$  y que  $\mathcal{G} \not\subseteq \text{Fin}$ . Sea  $A \in \mathcal{G}$  un conjunto infinito. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A \in \mathcal{G}^{max}$ . Entonces existen  $a, b$  finitos tales que

$$A \in \mathcal{V}(a, b) \subseteq \mathcal{U}.$$

Como  $A$  es infinito, podemos escoger  $m \in A \setminus a$  y definimos

$$B = A \setminus \{m\}.$$

Se tiene que  $B \in \mathcal{V}(a, b) \subseteq \mathcal{U}$ . Además, como  $B \subseteq A \in \mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}$  es hereditario,  $B \in \mathcal{G}$ . En consecuencia,

$$B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}^{max}.$$

Sin embargo,  $B \subsetneq A$ , lo que contradice la maximalidad de  $B$ . □

---

<sup>8</sup> Morayne, M. y Ryll-Nardzewski, C. "Refinements of T1, compact and second countable topologies". En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: 10.1016/0166-8641(94)90016-7.

**Teorema 2.4.3.** Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$  con  $\mathcal{G} \not\subseteq \text{Fin}$ . Suponga que

$$(\forall a, b \in \text{Fin})(\forall G \in \mathcal{G})[G \in \mathcal{V}(a, b) \implies (\exists H \in \mathcal{G}^{\max} \cap \mathcal{V}(a, b))(H \supseteq G)],$$

es decir, cada elemento de  $G \in \mathcal{G}$  se puede extender a uno maximal en cualquier vecindad que lo contenga. Entonces  $\mathcal{G}^{\max}$  no es localmente compacto.

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\mathcal{G}^{\max}$  es localmente compacto en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , entonces existe un abierto  $\mathcal{U}$  y un cerrado  $\mathcal{C}$  tales que  $\mathcal{G}^{\max} = \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$ . Dado que  $\mathcal{G}^{\max} \subseteq \mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}$  es cerrado, podemos suponer que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ .

**Afirmación.**  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} = \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$ .

En efecto, supongamos por contradicción, que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$ . Entonces existe un conjunto  $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$  tal que  $A \notin \mathcal{C}$ , es decir,  $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}^c$ . Como  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}^c$  es un abierto que contiene a  $A$ , por la hipótesis existe  $B \in \mathcal{G}^{\max} \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{C}^c$  tal que  $A \subseteq B$ . Como  $\mathcal{G}^{\max} = \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$ , tenemos que  $B \in \mathcal{C}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} = \mathcal{U} \cap \mathcal{G}$ .

Para concluir, por el Lema 2.4.2 se tiene que  $\mathcal{G}^{\max} \subseteq \text{Fin}$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 2.4.4.** Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ , entonces

$$\overline{(\mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin})} \cap (\mathcal{G}^{\max} \cap \text{Fin}) = \emptyset.$$

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\overline{(\mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin})} \cap (\mathcal{G}^{\max} \cap \text{Fin}) \neq \emptyset$ , existe entonces una sucesión  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow H$ , con  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}$  y  $H \in \mathcal{G}^{\max} \cap \text{Fin}$ . Notemos que lo anterior implica que  $H \subseteq H_m$  para un  $m$  lo suficientemente grande, lo cual contradice la maximalidad de  $H$ .  $\square$

**Proposición 2.4.5.** Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$  tal que

$$(\mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}) \cap \overline{(\mathcal{G}^{\max} \cap \text{Fin})} = \emptyset.$$

Entonces  $\mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}$  es localmente compacto si, y solo si,  $\mathcal{G}^{\max}$  es localmente compacto.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}$  es localmente compacto y sea  $A \in \mathcal{G}^{\max}$ . Si  $A$  es finito, notemos que  $\mathcal{V}(A, \emptyset) \cap \mathcal{G}^{\max} = \{A\}$ , la cual es una vecindad compacta alrededor de  $A$ . Sea ahora  $B \in \mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}$  y tomemos  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{\max}$  una vecindad alrededor de  $B$ . Afirmamos que existe una vecindad  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{\max}$  alrededor de  $B$  y contenida en  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{\max}$ , tal que  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{\max} = \mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{\max} \setminus \text{Fin}$ . Caso contrario, existe una sucesión  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}^{\max} \cap \text{Fin}$

con  $H_n \rightarrow B$ , lo cual contradice las hipótesis. Usando ahora la compacidad local de  $\mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$ , encontramos una vecindad compacta alrededor de  $B$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto y sea  $B \in \mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$ . Tomemos  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$  una vecindad alrededor de  $B$ . Note que existe una vecindad  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max}$  alrededor de  $B$  y contenida en  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$ , es decir, que  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max} = \mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$  (esto por la hipótesis de que  $(\mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}) \cap (\overline{\mathcal{G}^{max} \cap \text{Fin}}) = \emptyset$ ). Usando finalmente la compacidad local de  $\mathcal{G}^{max}$ , encontramos una vecindad compacta alrededor de  $B$  en  $\mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}$ .  $\square$

En los Ejemplos 2.4.10, 2.4.11 y 3.2.7 mostraremos que existen cerrados hereditarios  $\mathcal{G}$  tales que  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto, y en los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.3 que  $\mathcal{G}^{max}$  es compacto.

**Pregunta 2.4.6.** *Sabemos que, dado un cerrado hereditario  $\mathcal{G}$ , el conjunto  $\mathcal{G}^{max}$  es compacto si, y solo si, es cerrado en  $\mathcal{G}$ . No obstante, surge la siguiente pregunta: ¿existe alguna propiedad combinatoria del cerrado que permita concluir que  $\mathcal{G}^{max}$  es compacto?*

**Observación 2.4.7.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario. Notemos que si  $\mathcal{G}$  es cerrada bajo uniones finitas (es decir, que sea un ideal), entonces  $|\mathcal{G}^{max}| = 1$ . Sin embargo, veremos en la Proposición 2.4.8 una condición algo más débil que implicará compacidad local.*

**Proposición 2.4.8.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \text{Fin}$ . Si para todo  $H \in \mathcal{G}^{max}$  y  $a \subseteq H$  finito, existe un conjunto finito  $c$  tal que  $a \subseteq c \subseteq H$  y*

$$\mathcal{F}' = \{d \in \mathcal{F} : d \cup c \in \mathcal{F}\}$$

*cumple que  $\mathcal{F}' \sqcup \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ , entonces  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto.*

*Demostración.* Sea  $H \in \mathcal{G}^{max}$  y  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  un abierto alrededor de  $H$ . Por hipótesis, existe  $a \subseteq c \subseteq H$  con la propiedad de que

$$\mathcal{F}' = \{d \in \mathcal{F} : d \cup c \in \mathcal{F}\}$$

cumple que  $\mathcal{F}' \sqcup \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ .

Veamos que  $\mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  es una vecindad compacta alrededor de  $H$ , con  $\mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max} \subseteq \mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max}$ . Para ello, sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  que converge a  $G$ . Mostremos que  $G \in \mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max}$ .

En efecto,  $G \in \mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}$ ; por lo tanto, es suficiente ver que  $G \in \mathcal{G}^{max}$ .

Supongamos, por contradicción, que no es así; es decir, que existe  $G' \in \mathcal{G}$  tal que  $G \subsetneq G'$ . Sea  $m \in G' \setminus G$ . Por la convergencia  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow G$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $m \notin G_n$  para todo  $n \geq N$ .

Definamos  $G'_N = G_N \cup \{m\}$  y notemos que, por la hipótesis sobre  $\mathcal{F}'$ ,  $G'_N \in \mathcal{G}$ , lo cual contradice el hecho de que  $G_N \in \mathcal{G}^{max}$ .

De lo anterior se sigue que  $\mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  es cerrado en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , y por tanto compacto. En consecuencia,  $\mathcal{V}(c, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  es compacto en  $\mathcal{G}^{max}$ .

Esto prueba que  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto.  $\square$

**Observación 2.4.9.** *Notemos que en la proposición anterior la condición*

$$\mathcal{F}' \sqcup \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$$

*puede reemplazarse por*

$$\mathcal{F}' \sqcup \mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F},$$

*donde*

$$\mathcal{F}' = \{d \in \mathcal{F} : d \cup c \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{F}'' = \{\{m\} \in \mathcal{F} : \{m\} \cup c \in \mathcal{F}\}.$$

*Esta condición más general sigue siendo suficiente para que  $\mathcal{G}^{max}$  sea localmente compacto.*

A continuación, presentaremos algunos ejemplos de espacios *CTS* que admiten una extensión polaca localmente compacta, comenzando por aquellos casos en los que el espacio asociado resulta numerable.

**Ejemplo 2.4.10.** *Sea  $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq \text{mín}(A) + 1\}$ , entonces*

$$1. \mathcal{G}^{max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = \text{mín}(A) + 1\}.$$

*Demostración.* Sea  $G \in \mathcal{G}^{max}$ . Como  $G \in \mathcal{G}$ , se tiene que

$$\text{mín}(G) \geq |G| - 1.$$

Supongamos que  $\text{mín}(G) > |G| - 1$ , es decir,  $\text{mín}(G) \geq |G|$ . Consideremos el conjunto

$$H = G \cup \{\text{máx}(G) + 1\}.$$

Entonces  $|H| = |G| + 1$  y  $\text{mín}(H) = \text{mín}(G) \geq |G| = |H| - 1$ , por lo que  $H \in \mathcal{G}$ . Pero

esto contradice la maximalidad de  $G$ , ya que  $G \subsetneq H$ . Por lo tanto,

$$\text{mín}(G) = |G| - 1.$$

Recíprocamente, supongamos que  $\text{mín}(G) = |G| - 1$ . Entonces  $G \in \mathcal{G}$ . Supongamos que existe  $H \in \mathcal{G}$  tal que  $G \subsetneq H$ . Si  $|H| = \ell$ , entonces  $\ell \geq |G| + 1$ . Luego

$$\text{mín}(H) \geq \ell - 1 \geq |G|.$$

Sin embargo, como  $G \subseteq H$ , se sigue que  $\text{mín}(G) \in H$ , es decir,

$$\text{mín}(G) = |G| - 1 \in H,$$

lo cual contradice que  $\text{mín}(H) \geq |G|$ .

Por lo tanto,  $G$  es maximal en  $\mathcal{G}$ , es decir,  $G \in \mathcal{G}^{\max}$ . □

2.  $\mathcal{G}^{\max}$  no es cerrado. Para ver esto sea  $A_n = \{1, n + 1\}$  y  $A = \{1\}$ . Es fácil ver que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow A$ , pero  $A \notin \mathcal{G}^{\max}$ .

3.  $\mathcal{G}^{\max}$  es discreto.

**Ejemplo 2.4.11.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  fijo. Se define la siguiente familia hereditaria  $\mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \leq n\}$ , entonces:

$$\mathcal{J}^{\max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = n\}.$$

Para este ejemplo, las propiedades del Ejemplo 2.4.10 se siguen de manera similar.

**Ejemplo 2.4.12.** Dada una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definimos:

- Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la órbita de  $n$  es la sucesión

$$\mathcal{O}_f(n) = \{m \in \mathbb{N} : \exists k, l \in \mathbb{N} \text{ con } f^k(m) = f^l(n)\},$$

donde  $f^m = f \circ f \circ \dots \circ f$ ,  $m$  veces.

- Las órbitas completas  $\mathcal{O}_f(n)$  particionan el conjunto  $\mathbb{N}$  en clases de equivalencia, es decir:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_f(n).$$

- Definamos  $\mathcal{O}_f(\mathbb{N}) = \{\mathcal{O}_f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ .

- Si

$$\mathcal{H} = \{J \subseteq \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}, J \subseteq \mathcal{O}_f(n)\},$$

entonces,  $\mathcal{H}$  es un cerrado hereditario y

$$\mathcal{H}^{\max} = \mathcal{O}_f(\mathbb{N})$$

es un sucesión convergente al conjunto  $\emptyset$  y en consecuencia localmente compacto, lo cual también se sigue de la Proposición 2.4.8.

### 3. ANTICADENAS Y COMPACIDAD LOCAL EN EL CONTEXTO DE IDEALES

Al igual que en el capítulo anterior, el eje central serán los cerrados hereditarios de  $2^{\mathbb{N}}$  en el contexto de ideales  $F_\sigma$ , y en particular en sus familias maximales asociadas. En estas familias se estudiarán las nociones de compacidad local y compacidad.

Si un ideal  $\mathcal{I}$  es  $F_\sigma$  podemos considerar un *cerrado hereditario generador*, el cual está estrechamente relacionado con la noción de *cofinalidad*. La cofinalidad de un ideal  $\mathcal{I}$ , denotada por  $\text{cof}(\mathcal{I})$ , es la cardinalidad mínima de una familia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$  tal que para todo  $A \in \mathcal{I}$  existe algún  $B \in \mathcal{A}$  con  $A \subseteq B$ .

Puntualmente, si  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario que genera a  $\mathcal{I}$ , entonces  $\mathcal{G}^{max}$  es una anticadena  $G_\delta$  en la topología producto que también genera el ideal, y la colección

$$\mathcal{G}_{\text{cof}} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n H_i : n \in \mathbb{N}, H_i \in \mathcal{G} \right\}$$

es  $F_\sigma$  y es *cofinal* en  $\mathcal{I}$ .

La noción de cofinalidad, junto con la búsqueda de conjuntos generadores que presenten buenas propiedades descriptivas, ocupa un lugar central en el estudio de los ideales analíticos. En este contexto, Zafrany <sup>9</sup> mostró que todo ideal analítico sobre  $\mathbb{N}$  puede describirse mediante un generador  $G_\delta$ . Más adelante, Solecki y Todorcevic <sup>10</sup> profundizaron esta idea al demostrar que, además, todo ideal analítico admite un subconjunto  $G_\delta$  que resulta cofinal en el ideal.

Estos resultados proporcionan un marco conceptual que motiva ciertamente el análisis desarrollado en este capítulo, orientado al estudio detallado de los cerrados hereditarios, de sus familias maximales y de sus propiedades topológicas.

La tabla que se presenta a continuación resume los resultados obtenidos en este capítulo, así como algunas preguntas abiertas que surgen de este estudio.

---

<sup>9</sup> Zafrany, S. “On analytic filters and prefilters”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 55.1 (1990), págs. 315-322. DOI: 10.2307/2274970.

<sup>10</sup> Solecki, S. y Todorcevic, S. “Cofinal types of topological directed orders”. En: *Annales de l’Institut Fourier* 54.6 (2004), págs. 1877-1911. DOI: 10.5802/aif.2070.

Propiedades del ideal	Localmente compacto	Compacto
$P$ -ideal $F_\sigma$ y alto (3.1.2).	<b>X</b>	<b>X</b>
Fragmentado, alto y que cumple 3.1 (3.1.4).	<b>X</b>	<b>X</b>
$\sigma$ -Fragmentado, alto y que cumple 3.1 (3.1.5).	<b>X</b>	<b>X</b>
Coloración de Sierpiński(3.2.1).	?	?
Coloración de triplas (3.2.3).	?	?
Coloración de $\mathbb{N}$ en una cantidad finita de bloques infinitos (3.2.11).	✓	<b>X</b>
Coloración de $\mathbb{N}$ en una cantidad infinita de bloques infinitos (3.2.11).	<b>X</b>	<b>X</b>
Familia casi disjunta sobre $2^{<\mathbb{N}}$ (3.2.12).	✓	✓
Ideal de Solecki $2^{<\mathbb{N}}$ (3.2.13).	✓	✓
Ideal de grafo aleatorio (3.2.14).	?	?

Cuadro 3.1: Estudio del espacio de maximales asociado a un cerrado generador y hereditario.

Con base en la tabla anterior y con la cuestión que se aborda en esta sección -*estudiar a los CTS que admiten una extensión localmente compacta*- puede surgir la pregunta de si los espacios maximales que no son localmente compactos son todos homeomorfos a  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . La respuesta es negativa, como se puede ver en el Ejemplo 3.2.8. De igual manera, la tabla presenta ejemplos de ideales para los cuales existe un generador  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$  tal que  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}^{max}$  no es localmente compacto. Sin embargo, se desconoce si en esos mismos ideales existe algún generador cerrado cuyo maximal sea localmente compacto (ver Pregunta 3.1.7).

### 3.1. COMPACIDAD LOCAL EN IDEALES $F_\sigma$

Recordemos que dado un ideal  $\mathcal{I}$  sobre  $\mathbb{N}$  y una familia hereditaria  $\mathcal{K}_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ , decimos que  $\mathcal{K}_\mathcal{I}$  **genera** a  $\mathcal{I}$  o es **generador** de  $\mathcal{I}$  si satisface

$$\forall A \in \mathcal{I}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}_\mathcal{I} \left( A \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i \right).$$

**Proposición 3.1.1** (Folclore). *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal  $F_\sigma$ ,  $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , con  $F_n$  cerrados hereditarios encajados y  $F_1 \supseteq \{\{k\} : \{k\} \in \mathcal{I}\} \cup \{\emptyset\}$ , entonces*

$$\mathcal{G} = \{A \setminus [0, m - 1] : m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in F_m\}$$

es un cerrado hereditario que genera a  $\mathcal{I}$ .

*Demostración.* Es claro que  $\mathcal{G}$  es hereditario. Veamos ahora que es cerrado. Sea una sucesión  $(B_n \setminus [0, m_n - 1])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$  tal que

$$(B_n \setminus [0, m_n - 1])_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow B.$$

**Caso 1.**  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión creciente. En este caso,  $B = \emptyset \in \mathcal{G}$ .

**Caso 2.** Existe un  $L \in \mathbb{N}$  y un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $m_\ell = k$  para todo  $\ell \geq L$ . Entonces para  $\ell \geq L$  se tiene que  $B_\ell \in F_k$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $(B_\ell)_{\ell \geq L} \rightarrow B' \in F_k$ , pues  $F_k$  es compacto.

Dado que  $(B_\ell \setminus [0, k - 1])_{\ell \geq L} \rightarrow B' \setminus [0, k - 1]$ , concluimos que

$$B = B' \setminus [0, k - 1] \in \mathcal{G}.$$

Por lo tanto,  $\mathcal{G}$  es cerrado.

Finalmente, probemos que  $\mathcal{G}$  es generador. Para ello sea  $J \in \mathcal{I}$ , veamos que  $J \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i$ , con  $K_i \in \mathcal{G}$ . Como  $J \in \mathcal{I}$ , existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $J \in F_m$ , es decir,  $J \setminus [0, m - 1] \in \mathcal{G}$ . Luego,  $J = J \setminus [0, m - 1] \cup \bigcup_{k \in J \cap M} \{k\}$ .  $\square$

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{I}$  un  $P$ -ideal  $F_\sigma$  y alto. Entonces, existe una familia cerrada generadora  $\mathcal{G}_\mathcal{I}$  de  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{G}_\mathcal{I}^{max}$  no es localmente compacto.*

*Demostración.* Sea  $\phi$  una submedida s.c.i. estrictamente monótona tal que  $\mathcal{I} = \text{Fin}(\phi) =$

$\text{Exh}(\phi)$  (ver Proposición 1.1.10). Como  $\mathcal{I}$  es alto, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\{n\}) = 0$ . Sea  $N > 0$  tal que  $\phi(\{n\}) < N$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea

$$\mathcal{G}_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \phi(A) \leq N\}.$$

Entonces  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$  es una familia cerrada y hereditaria.

Afirmamos que  $\mathcal{I}$  es generado por la familia  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ . En efecto, sea  $G \in \mathcal{I} = \text{Exh}(\phi)$ . Luego existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\phi(G \setminus [1, n_0 - 1]) < N$ . De lo anterior,

$$G \subseteq (G \setminus [1, n_0 - 1]) \cup \bigcup_{i=1}^{n_0-1} \{i\},$$

es decir,  $G$  es unión finita de elementos de  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ .

Afirmamos que

$$\mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \phi(A) = N\}.$$

En efecto, si  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$ , entonces

$$\phi(G) \leq N.$$

Supongamos que  $\phi(G) < N$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\{n\}) = 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\phi(G) \leq \phi(G \cup \{n\}) \leq N,$$

lo cual contradice la maximalidad de  $G$ . Por otro lado, si  $\phi(G) = N$  y  $G \subsetneq H$ , entonces por ser  $\phi$  estrictamente monótona, tenemos que  $\phi(H) > N$ , y por lo tanto  $H \notin \mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ . De modo que  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$ .

Ahora usaremos el Teorema 2.4.3 para ver que  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$  no es localmente compacto. Para ello, sea  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$  y  $a, b \in \text{Fin}$  tal que  $G \in \mathcal{V}(a, b)$ , veamos que existe  $H \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$  con  $G \subseteq H$  y  $H \in \mathcal{V}(a, b)$ .

En efecto, como  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$ , se tiene que  $\phi(G) < N$ . Notemos que  $\phi(b^c \setminus G) = \infty$ , en particular,

$$\sum_{n \in b^c \setminus G} \phi(\{n\}) = \infty.$$

Caso contrario,

$$\phi(\mathbb{N}) \leq \phi(b^c) + \phi(b) \leq \phi(b^c \setminus G) + \phi(b^c \cap G) + \phi(b) < \infty.$$

Afirmamos que existe una sucesión creciente de subconjuntos  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq b^c \setminus G$  (teniendo en cuenta que  $\phi(G \cup b^c \setminus G) = \infty$ ) tal que

$$N - \frac{1}{k} < \phi(G \cup F_k) \leq N, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Construida esta sucesión, tomemos

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (G \cup F_k).$$

Como  $\phi$  es s.c.i. respecto a uniones crecientes, se cumple

$$\phi(H) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(G \cup F_k) = N.$$

De lo anterior,  $G \subseteq H \in \mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}_T^{max}$ . Por el Teorema 2.4.3, concluimos que  $\mathcal{G}_T^{max}$  no es localmente compacto.

Veamos ahora la construcción de la sucesión creciente de conjuntos finitos  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq b^c \setminus G$ . Si inicialmente  $\phi(G) > N - 1$ , tomamos  $F_1 = \emptyset$ . En caso contrario,  $\phi(G) \leq N - 1$ . Como  $\phi(b^c \setminus G) = \infty$ , existe un conjunto finito  $E \subseteq b^c \setminus G$  tal que  $\phi(G \cup E) > N$ . Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\{n\}) = 0$ , podemos elegir  $E$  de modo que  $\phi(\{x\}) < 1$  para todo  $x \in E$ . Enumeremos  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  y definamos  $H_0 = G$ ,  $H_i = H_{i-1} \cup \{x_i\}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Sea  $i_0$  el menor índice tal que  $\phi(H_{i_0}) > N - 1$ . Entonces, por subaditividad de  $\phi$ ,

$$\phi(H_{i_0}) \leq \phi(H_{i_0-1}) + \phi(\{x_{i_0}\}) < (N - 1) + 1 = N.$$

Luego,  $N - 1 < \phi(H_{i_0}) \leq N$ . Tomamos  $F_1 = \{x_1, \dots, x_{i_0}\}$ .

Supongamos construido  $F_{k-1}$  tal que  $N - \frac{1}{k-1} < \phi(G \cup F_{k-1}) \leq N$ . Si  $\phi(G \cup F_{k-1}) > N - \frac{1}{k}$ , tomamos  $F_k = F_{k-1}$ . En caso contrario,  $\phi(G \cup F_{k-1}) \leq N - \frac{1}{k}$ . Como  $\phi(b^c \setminus (G \cup F_{k-1})) = \infty$ , existe un conjunto finito  $E \subseteq b^c \setminus (G \cup F_{k-1})$  tal que  $\phi(G \cup F_{k-1} \cup E) > N$ . Elegimos  $E$  con  $\phi(\{x\}) < \frac{1}{k}$  para todo  $x \in E$ . Enumeramos  $E = \{x_1, \dots, x_m\}$  y definimos  $H_0 = G \cup F_{k-1}$ ,  $H_i = H_{i-1} \cup \{x_i\}$ . Sea  $i_0$  el menor índice tal que  $\phi(H_{i_0}) > N - \frac{1}{k}$ . Entonces,

$$\phi(H_{i_0}) \leq \phi(H_{i_0-1}) + \phi(\{x_{i_0}\}) < \left(N - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} = N.$$

Por tanto,  $N - \frac{1}{k} < \phi(H_{i_0}) \leq N$ . Tomamos  $F_k = F_{k-1} \cup \{x_1, \dots, x_{i_0}\}$ .

□

En el teorema anterior, para cada  $P$ -ideal  $\mathcal{I}$  que sea  $F_\sigma$  y alto, se definió un cerrado hereditario generador  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{I}$ , de tal manera que el espacio  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto.

A continuación, mostraremos que es posible definir otro generador del ideal que conserva la propiedad de que el maximal asociado no sea localmente compacto. Presentaremos la demostración en el caso particular de ideales sumables.

Dada  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  diverge, es decir,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \infty$ . Definimos el ideal de los conjuntos sumables bajo  $f$  por

$$\mathcal{I}_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} f(i) < \infty\}.$$

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  diverge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ . Sea*

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n),$$

y consideremos

$$\mathcal{G}_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} f(i) \leq M \min(A)\}.$$

Entonces  $\mathcal{G}_f$  es un cerrado hereditario y generador de  $\mathcal{I}_f$ ; además,

$$\mathcal{G}_f^{max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} f(i) = M \min(A)\}$$

no es localmente compacto.

*Demostración.* Veamos primero que  $\mathcal{I}$  es generada por la familia  $\mathcal{G}_f$ , esto es

$$(\forall A \in \mathcal{I})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists K_1, \dots, K_n \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}_f})(A \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i).$$

Sea  $A \in \mathcal{I}_f$ , es decir,  $\sum_{i \in A} f(i) < \infty$ . Si  $A$  es finito, se sigue de inmediato, pues es la unión de sus singletons. Supongamos entonces que es infinito y sea  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  la enumeración de sus elementos de manera creciente. Como  $\sum_{i \in A} f(i) < \infty$ , entonces existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{i \in A} f(i) \leq M a_i$ . Si  $a_i = a_1$ , entonces  $A \in \mathcal{G}_f$  y no hay nada que probar, supongamos entonces que  $a_i > a_1$ .

Definamos entonces  $K_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{k_1}\} \subseteq A$ , donde  $k_1 \in \mathbb{N}$  cumple que

$$\sum_{j=1}^{k_1} f(a_j) \leq M a_1.$$

Sea  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $K_2 = \{a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \dots, a_{k_2}\} \subseteq A$  cumple que

$$\sum_{j=k_1+1}^{k_2} f(a_j) \leq M a_{k_1+1}.$$

Y en general, sea  $k_n \in \mathbb{N}$  tal que

$$K_n = \{a_{k_{n-1}+1}, a_{k_{n-1}+2}, \dots, a_{k_n}\} \subseteq A,$$

cumpla que

$$\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} f(a_j) \leq M a_{k_{n-1}+1}.$$

Como  $\sum_{i \in A} f(i) \leq M a_i$ , la recursión termina en un número finito de pasos  $m$ . Finalmente, obtenemos que

$$A = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m,$$

donde cada  $K_j \in \mathcal{G}_f$ , con  $j = 1, \dots, m$ .

Finalmente, veamos que  $\mathcal{G}_f^{max}$  no es localmente compacto. Sea  $A \in \mathcal{G}_f \setminus \mathcal{G}_f^{max}$  y  $\mathcal{V}(a, b)$  una vecindad alrededor de  $A$ .

Notemos que

$$\sum_{i \in A} f(i) < M \min(A),$$

y

$$\sum_{i \in (A \cup b)^c, i \geq \min(A)} f(i) = \infty.$$

Usando el Teorema 1.2.6, existe un  $B \subseteq (A \cup b)^c$  tal que

$$\sum_{i \in B} f(i) = M \min(A) - \sum_{i \in A} f(i).$$

Tomemos  $H = A \cup B$ . Entonces,

$$\sum_{i \in H} f(i) = Mmin(A) = Mmin(H),$$

y  $A \subseteq H \in \mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}_f^{max}$ .

De lo anterior, se deduce por el Teorema 2.4.3 que el espacio  $\mathcal{G}_f^{max}$  no es localmente compacto.  $\square$

Recordemos que  $\mathcal{I}$  un ideal fragmentado si existe una partición

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_j b_j$$

en conjuntos finitos y submedidas  $\varphi_j$  definidas en cada uno de ellos, tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(b_j) = \infty$$

y

$$\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi),$$

donde

$$\varphi = \sup \varphi_i.$$

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal fragmentado y alto. Si,*

$$\forall \epsilon > 0, \{i \in \mathbb{N} : \varphi_i(\{a\}) < \epsilon \text{ para cada } a \in b_i\} \text{ es infinito.} \quad (3.1)$$

*Entonces  $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , donde  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión encajada de cerrados hereditarios de tal manera que  $(F_n^{max}, \tau_{pro})$  no es localmente compacto para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Más aun,*

$$\mathcal{G} = \{A \setminus [0, m - 1] : m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in F_m\}$$

*es un cerrado hereditario generador de  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto.*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  la submedida s.c.i. de la definición de ideal fragmentado, es decir,

$$\text{Fin}(\varphi) = \mathcal{I}.$$

Y sea  $\psi$  la submedida obtenida de  $\varphi$  que la hace estrictamente monótona (ver Proposición 1.1.10).

De la Proposición 1.1.11, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\sup_k \varphi(\{k\}) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{y por lo tanto } \sup_k \psi(\{k\}) \leq 1.$$

Notemos que

$$\text{Fin}(\psi) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m,$$

donde,

$$F_m = \{A \subseteq \mathbb{N} : \psi(A) \leq m\}.$$

Afirmamos que

$$F_m^{\max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \psi(A) = m\}.$$

En efecto, sea  $G \in F_m^{\max}$ . Entonces  $\psi(G) \leq m$ . Supongamos por contradicción, que  $\psi(G) < m$ . En tal caso, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$\psi(G) + \frac{1}{2^{n-1}} < m.$$

Por hipótesis, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi(b_i) \geq m$  y, para todo  $a \in b_i$ ,

$$\varphi(\{a\}) < \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2^a} < \frac{1}{2^n}.$$

Tomemos  $k \in b_i \setminus G$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi(G) &< \psi(G \cup \{k\}) \leq \psi(G) + \psi(\{k\}) = \psi(G) + \varphi(\{k\}) + \frac{1}{2^k} \\ &< \psi(G) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} < \psi(G) + \frac{1}{2^{n-1}} < m. \end{aligned}$$

lo cual contradice la maximalidad de  $G$ . Por lo tanto, debe cumplirse que  $\psi(G) = m$ .

Recíprocamente, si  $\psi(G) = m$  y  $H \supsetneq G$ , entonces  $\psi(H) > m$ . En consecuencia,  $H \notin F_m$ , lo que muestra que  $G$  es maximal en  $F_m$ .

Finalmente,

$$F_m^{\max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \psi(A) = m\}.$$

Ahora usaremos el Teorema 2.4.3 para ver que para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F_m^{\max}$  no es localmente

compacto. Para ello veamos que para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $G \in F_m \setminus F_m^{max}$  y  $c, d \in \text{Fin}$  tal que  $G \in \mathcal{V}(c, d)$ , existe  $H \in F_m^{max}$  con  $G \subseteq H$  y  $H \in \mathcal{V}(c, d)$ .

En efecto, dado un  $G \in F_m \setminus F_m^{max}$ , se tiene  $\psi(G) < m$ . Construiremos recursivamente una cadena creciente de conjuntos

$$G = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$$

contenida en  $\mathcal{V}(c, d)$ , tal que  $\psi(G_i) \leq m$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{i \rightarrow \infty} \psi(G_i) = m$ .

Supongamos que hemos construido  $G_i \in \mathcal{V}(c, d)$  con  $m - \frac{1}{2^i} < \psi(G_i) < m$ . Sea

$$\delta_i < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Supongamos también que  $\psi(G_i) < m - \frac{1}{2^{i+1}}$ . Por hipótesis, existe un bloque  $b_{k_i}$  tal que:

- $b_{k_i} \cap d = \emptyset$ .
- $\varphi_{k_i}(\{x\}) < \frac{\delta_i}{2}$  para todo  $x \in b_{k_i}$ .
- $\frac{1}{2^x} < \frac{\delta_i}{2}$ , para todo  $x \in b_{k_i}$ .
- Además, podemos elegir  $k_i$  de modo que  $\varphi_{k_i}(b_{k_i}) > m$ .

Notemos que  $b_{k_i} \setminus G_i \neq \emptyset$ . Caso contrario,  $b_{k_i} \subseteq G_i$ , lo que contradice que  $\psi(G_i) < m$ . Sea

$$x_1, x_2, \dots, x_l,$$

la enumeración creciente de los elementos de  $b_{k_i} \setminus G_i$ . Definamos ahora,

$$H_0 = G_i, \quad H_r = H_{r-1} \cup \{x_r\} \text{ para } r = 1, \dots, l.$$

Por la monotonía de la submedida

$$\begin{aligned} \psi(H_r) &\leq \psi(H_{r-1}) + \psi(\{x_r\}) = \psi(H_{r-1}) + \varphi(\{x_r\}) + \frac{1}{2^{x_r}} \\ &< \psi(H_{r-1}) + \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \psi(H_{r-1}) + \delta_i. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el primer índice  $r$  tal que  $\psi(H_r) > m - \frac{1}{2^{i+1}}$ . Y este existe porque,

$$\psi(H_l) \geq \varphi(H_l) \geq \varphi_{k_i}(b_{k_i}) > m.$$

Para este  $r$ , tenemos

$$m - \frac{1}{2^{i+1}} < \psi(H_r) < \psi(H_{r-1}) + \delta_i \leq (m - \frac{1}{2^{i+1}}) + \delta_i \leq m.$$

Definamos  $G_{i+1} = H_r$ . Entonces:

- $G_{i+1} \in \mathcal{V}(c, d)$ , pues  $c \subseteq G_i \subseteq G_{i+1}$  y  $(G_{i+1} \cap d) = \emptyset$ , ya que  $b_{k_i} \cap d = \emptyset$ .
- Se cumple  $m - \frac{1}{2^{i+1}} < \psi(G_{i+1}) \leq m$ .

Si, por el contrario,  $\psi(G_i) > m - \frac{1}{2^{i+1}}$ , simplemente tomamos  $G_{i+1} = G_i$ . Recursivamente, obtenemos una sucesión creciente  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{V}(c, d)$  tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \psi(G_i) = m.$$

Sea ahora

$$H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i.$$

Se sigue por la semicontinuidad que  $\varphi(H) = m$ .

Además,  $H \in \mathcal{V}(a, b)$ . Por tanto,  $H \in F_m^{max}$ ,  $G \subseteq H$  y  $H \in \mathcal{V}(a, b)$ , como se quería. De todo lo anterior, expresamos a  $\mathcal{I}$  como una unión numerable de cerrados hereditarios, cuyos maximales asociados no son localmente compactos.

Ahora, por la Proposición 3.1.1,

$$\mathcal{G} = \{A \setminus [0, m - 1] : m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in F_m\}$$

es un cerrado generador de  $\mathcal{I}$ . Veamos que  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto. Notemos que

$$\mathcal{G}^{max} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ A \setminus [0, m - 1] : (\forall n \leq \min(A \setminus [0, m - 1])) (\forall B \subseteq \mathbb{N}) \right. \\ \left. [B \in F_n \Rightarrow A \setminus [0, m - 1] \not\subseteq B \setminus [0, n - 1]] \right\}.$$

Sea  $H \setminus [0, m - 1] \in \mathcal{G}$  y sea  $\mathcal{V}(a, b)$  una vecindad alrededor de  $H \setminus [0, m - 1]$ . Mostraremos que  $H \setminus [0, m - 1]$  puede extenderse a un elemento de  $\mathcal{G}^{max}$  en  $\mathcal{V}(a, b)$ .

Si inicialmente  $H \setminus [0, m - 1] \in \mathcal{G}^{max}$ , no hay nada que probar.

Supongamos que  $H \setminus [0, m - 1] \notin \mathcal{G}^{max}$ . Entonces existe  $n \leq \min(H \setminus [0, m - 1]) = k$  y un

conjunto  $B \setminus [0, n - 1] \in \mathcal{G}$  tal que

$$H \setminus [0, m - 1] \subsetneq B \setminus [0, n - 1].$$

Notemos que

$$B' = H \setminus [0, m - 1] \in F_n \subseteq F_k.$$

Por las propiedades probadas para  $F_k$ , podemos extender  $B' \in \mathcal{V}(a, b \cup [0, k - 1])$  a un elemento  $H' \in F_k^{max} \cap \mathcal{V}(a, b \cup [0, k - 1])$ .

Observemos además que se cumple que, para todo  $n \leq k$

$$H' \setminus [0, n - 1] = H'.$$

De lo anterior se sigue inmediatamente que

$$H \setminus [0, m - 1] \subseteq H' \in \mathcal{G}^{max} \cap \mathcal{V}(a, b).$$

Por lo tanto,  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto por el criterio 2.4.3.

□

Recordemos ahora que un ideal  $\mathcal{I}$  es  $\sigma$ -fragmentado, si existe una partición

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_n$$

y una partición en conjuntos finitos  $\{B_n^k : k \in \mathbb{N}\}$ ,

$$B_n = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_n^k,$$

tal que

$$\mathcal{I} = \text{Fin}(\varphi),$$

donde

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \quad \text{y} \quad \varphi_n = \sup_k \nu_n^k.$$

Con  $\nu_n^k$  una medida en  $B_n^k$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{N}$ , y

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \nu_n^k(B_n^k) = \infty$$

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal  $\sigma$ -fragmentado. Si  $\mathcal{I}$  satisface*

$$\forall \varepsilon > 0, \left\{ n \in \mathbb{N} : \left\{ k \in \mathbb{N} : \nu_n^k(\{a\}) < \varepsilon \text{ para todo } a \in B_n^k \right\} \text{ es infinito} \right\} \text{ es infinito.}$$

Entonces,

$$\mathcal{G} = \{A \setminus [0, m-1] : m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in F_m\}, \quad F_m = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) \leq m\},$$

es un cerrado hereditario generador de  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto.

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema anterior. □

Un ejemplo de este tipo de ideales  $\sigma$ -fragmentados, es el siguiente.

**Ejemplo 3.1.6** (Martínez, Meza-Alcántara & Uzcátegui (2024)). *Sea  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  una partición de  $\mathbb{N}$  en conjuntos infinitos y sea  $\{B_n^k : k \in \mathbb{N}\}$  una partición de  $B_n$  que satisfice:*

- $B_n^0$  consiste de los primeros  $2^n(n+1)$  elementos de  $B_n$ .
- $\min B_n^{k+1} = \min\{x \in B_n : x > \max B_n^k\}$ .
- $|B_n^{k+1}| \geq |B_n^k|$ .

Sea  $\nu_n^k$  la medida en  $B_n^k$  dada por

$$\nu_n^k(\{x\}) = \frac{n+1}{|B_n^k|} \quad \text{para todo } x \in B_n^k.$$

Definimos

$$\varphi_n = \sup_k \nu_n^k \quad \text{y} \quad \varphi = \sum_n \varphi_n.$$

Entonces,  $\varphi$  submedida s.c.i. no patológica. Además,

1.  $\varphi(B_n) = \varphi(B_n^k) = n+1$  para todo  $n$  y  $k$ .
2. Sean  $(n_i)_i$  y  $(k_i)_i$  dos sucesiones en  $\mathbb{N}$ . Supongamos que  $(n_i)_i$  es creciente. Entonces

$$\varphi \left( \bigcup_i B_{n_i}^{k_i} \right) = \infty.$$

3.  $\varphi$  tiene la propiedad A (ver 1.1.7). Sea  $\varepsilon > 0$  y definamos

$$M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{N} : \varphi(\{x\}) \geq \varepsilon\}.$$

Nótese que  $\nu_n^k(\{x\}) \leq \frac{1}{2^n}$  para todo  $x \in B_n^k$ . Sea  $N$  tal que  $2^{-N} < \varepsilon$ , entonces  $M_\varepsilon$  es disjunto de  $B_m$  para todo  $m > N$ . Por lo tanto,

$$M_\varepsilon \subseteq B_0 \cup \dots \cup B_N$$

y así  $M_\varepsilon \in \text{Fin}(\varphi)$ .

4.  $\text{Fin}(\varphi)$  no es un  $P$ -ideal. De hecho, la propiedad  $P$  falla en la sucesión  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Supongamos que  $B_n \subseteq^* X$  para todo  $n$ . Entonces, para cada  $n$  existe  $k_n$  tal que  $B_n^{k_n} \subseteq X$ . Por consiguiente,

$$\bigcup_n B_n^{k_n} \subseteq X.$$

Usando el punto (2), se sigue que  $X \notin \text{Fin}(\varphi)$ .

**Pregunta 3.1.7.** Del Teorema 3.1.2 para cada  $P$ -ideal  $F_\sigma$  y alto, existe una familia cerrada generadora y hereditaria  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}^{max}$  no es localmente compacto. Surge la pregunta si existe una familia cerrada generadora y hereditaria tal que su familia maximal asociada es localmente compacta.

### 3.2. HOMOGÉNEOS ASOCIADOS A COLORACIONES

A continuación estudiaremos el espacio de homogéneos maximales de cerrados homogéneos asociados a una coloración. En particular, analizaremos coloraciones asociadas a particiones de  $\mathbb{N}$ . Además, presentaremos ejemplos de cerrados hereditarios cuya familia de homogéneos maximales, dotada de la topología producto, resulta ser compacta.

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $c : [\mathbb{N}]^n \rightarrow \{0, 1\}$  una coloración de  $n$ -tuplas de naturales. Consideremos el conjunto de subconjuntos homogéneos:

$$\text{hom}(c) = \{A \subseteq \mathbb{N} : |c([A]^n)| = 1\}.$$

Observemos que  $\text{hom}(c)$  es un cerrado hereditario. Además, la familia de subconjuntos

homogéneos maximales está dada por:

$$\text{hom}^{\max}(c) = \left\{ A \in \text{hom}(c) : \forall k \in A^c, \exists m_1, \dots, m_{n-1} \in A \right. \\ \left. \text{tal que } c(\{k, m_1, \dots, m_{n-1}\}) \notin c([A]^n) \right\}.$$

El problema que se aborda consiste en determinar bajo qué condiciones el espacio  $\text{hom}^{\max}(c)$  es localmente compacto. En esta sección no se ofrece una caracterización; en su lugar, se presentan diversos ejemplos que ilustran las posibles situaciones, y se plantean algunas preguntas que permanecen abiertas.

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  una biyección y consideremos  $\hat{\theta} : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$  dada por

$$\hat{\theta}(\{n, m\}_{<}) = 1 \iff \theta(n) < \theta(m).$$

Sea

$$\text{hom}(\hat{\theta}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\theta(a))_{a \in A} \text{ es monótona creciente o decreciente}\}.$$

**Pregunta 3.2.2.** ¿Es  $\text{hom}(\hat{\theta})^{\max}$  compacta o localmente compacta?

**Ejemplo 3.2.3.** Sea  $\lambda : [\mathbb{N}]^3 \rightarrow \{0, 1\}$  una coloración de triplas de números naturales, dada por

$$\lambda(\{m, n, l\}_{<}) = 1, \text{ si } |\theta(n) - \theta(l)| < \frac{1}{m},$$

y

$$\lambda(\{m, n, l\}_{<}) = 0, \text{ caso contrario,}$$

donde

$$\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

es una biyección. Consideremos

$$\text{hom}(\lambda) = \{A \subseteq \mathbb{N} : |d([A]^3)| = 1\}.$$

**Pregunta 3.2.4.** ¿Es  $\text{hom}(\lambda)^{\max}$  compacta o localmente compacta?

**Ejemplo 3.2.5.** Sea una partición de  $\mathbb{N}$  en conjuntos disjuntos de dos elementos;

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} P_k, \quad P_k = \{p_{k,0}, p_{k,1}\}.$$

Definamos la coloración  $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$c(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x, y \in P_k \text{ para algún } k, \\ 1, & \text{si } x \in P_i, y \in P_j, i \neq j. \end{cases}$$

Entonces el conjunto de subconjuntos homogéneos maximales está dado por

$$\text{hom}^{\text{max}}(c) = \{P_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}.$$

y además  $\{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : x_k \in P_k\}$  es homeomorfo a  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . En particular  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  no es numerable.

Veamos que el espacio es localmente compacto. Sea  $H \in \text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

- Si  $H = P_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mathcal{V}(P_k, \emptyset) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) = \{P_k\},$$

la cual es una vecindad compacta de  $H$  en  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

- Si  $H = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $x_k \in P_k$  para todo  $k$ , consideremos  $\mathcal{V}(a, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  una vecindad cualquiera de  $H$ . Elijamos un conjunto

$$d \text{ tal que } a \subseteq d \subseteq H \text{ y } |d| \geq 2.$$

Entonces

$$\mathcal{V}(d, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) = \mathcal{V}(d, b) \cap \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}.$$

Como el conjunto

$$\{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}$$

es cerrado en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , se sigue que

$$\mathcal{V}(d, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) \subseteq \mathcal{V}(a, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$$

es una vecindad compacta alrededor  $H$  en  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

Notemos que la compacidad local también es consecuencia de la Proposición 2.4.5. Por otro lado, no es compacto pues  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \emptyset$ .

**Observación 3.2.6.** En el Ejemplo anterior (3.2.7), la condición de que los conjuntos de la partición tengan exactamente dos elementos no es esencial. En efecto, si consideramos una partición disjunta

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} P_k,$$

donde cada  $P_k \in \mathbf{Fin}$ , y definimos  $c$  como la función de coloración dada anteriormente, el conjunto  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  conserva la compacidad local.

**Ejemplo 3.2.7.** Sea una partición de  $\mathbb{N}$  en conjuntos disjuntos de la siguiente manera;

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} P_k,$$

donde, para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $P_i$  es infinito y para cada  $k > n$ ,  $P_k \in \mathbf{Fin}$  con  $|P_k| > 1$ .

Definamos la coloración  $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$c(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x, y \in P_k \text{ para algún } k, \\ 1, & \text{si } x \in P_i, y \in P_j, i \neq j. \end{cases}$$

Entonces el conjunto de subconjuntos homogéneos maximales está dado por

$$\text{hom}^{\text{max}}(c) = \{P_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}.$$

Veamos que el espacio es localmente compacto. Sea  $H \in \text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

- Si  $H = P_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , y  $a_k \subseteq P_k$  con  $|a_k| = 2$ , entonces

$$\mathcal{V}(a_k, \emptyset) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) = \{P_k\},$$

la cual es una vecindad compacta de  $H$  en  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

- Si  $H = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $y_k \in P_k$  para todo  $k$ , consideremos  $\mathcal{V}(a, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  una vecindad cualquiera de  $H$ . Elijamos un conjunto  $d$  tal que

$$a \subseteq d \subseteq H \quad \text{y} \quad d \supseteq \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Entonces

$$\mathcal{V}(d, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) = \mathcal{V}(d, b) \cap \{\{y_1, \dots, y_n\} \cup \{x_k : k > n\} : (\forall k > n) x_k \in P_k\}.$$

Como el conjunto

$$\{\{y_1, \dots, y_n\} \cup \{x_k : k > n\} : (\forall k > n) x_k \in P_k\}$$

es cerrado en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , se sigue que

$$\mathcal{V}(d, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c) \subseteq \mathcal{V}(a, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$$

es una vecindad compacta alrededor  $H$  en  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

**Ejemplo 3.2.8.** Sea una partición de  $\mathbb{N}$  en conjuntos disjuntos infinitos;

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

Definamos la coloración  $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$c(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x, y \in B_k \text{ para algún } k, \\ 1, & \text{si } x \in B_i, y \in B_j, i \neq j. \end{cases}$$

Entonces, el conjunto de subconjuntos homogéneos maximales está dado por

$$\text{hom}^{\text{max}}(c) = \{B_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in B_k\},$$

el cual es en particular no numerable. Afirmamos que  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  no es localmente compacto. Supongamos, por contradicción, que para todo  $H \in \text{hom}^{\text{max}}(c)$  existe una vecindad de la forma  $\mathcal{V}(a, b) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  que es compacta.

Sea  $H' \in \text{hom}^{\text{max}}(c)$  tal que

$$H' = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ con } y_k \in B_k \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Consideremos una vecindad compacta  $\mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  de  $H'$ .

Puesto que  $f \subseteq H'$ , podemos escribir

$$f = \{y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}\}, \quad y_{k_i} \in B_{k_i} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Como  $d$  es finito y los bloques  $\{B_k\}$  son disjuntos e infinitos, existe un índice  $j$  tal que

$$B_j \subseteq d^c \quad \text{y} \quad B_j \cap B_{k_i} = \emptyset \quad \text{para } i = 1, \dots, n..$$

Enumeremos los elementos de  $B_j$  como

$$B_j = \{z_1^j, z_2^j, z_3^j, \dots\}.$$

Para cada  $i \in \mathbb{N}$  definimos el abierto

$$\mathcal{U}_i := \mathcal{V}(f \cup \{z_i^j\}, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c).$$

La familia  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  cubre a  $\mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$ , porque todo elemento  $H'' \in \mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  debe contener algún elemento de  $B_j$ . Por tanto, pertenecer a algún  $\mathcal{U}_i$ .

Sin embargo, ninguna subfamilia finita de  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  cubre  $\mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$ . Si  $\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_m}$  fueran una subcubierta finita, los elementos de  $B_j \setminus \{z_{i_1}^j, \dots, z_{i_m}^j\}$  darían lugar a conjuntos homogéneos en  $\mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$  que no estarían cubiertos por esa subfamilia. Esto contradice la compacidad de  $\mathcal{V}(f, d) \cap \text{hom}^{\text{max}}(c)$ .

De lo anterior, se concluye que  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  no es localmente compacto, y además no es homeomorfo a  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  pues posee puntos aislados.

**Observación 3.2.9.** En el ejemplo anterior se mostró que  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  no es localmente compacto. Observemos además que podemos concluir que el Teorema 2.4.3 proporciona una condición suficiente, pero no necesaria, para la no compacidad local. En efecto, si tomamos  $d \subseteq B_1$  con  $|d| = 2$  y elegimos  $k \in B_1 \cap d^c$ , entonces  $d \in \mathcal{V}(d, \{k\}) \cap \text{hom}(c)$ , pero no es posible extender  $d$  a un maximal dentro de esta vecindad.

**Observación 3.2.10.** El Ejemplo anterior (3.2.8) no requiere la condición de que todos los conjuntos de la partición sean infinitos. En efecto, si tomamos una partición disjunta

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k,$$

en la que infinitos de los  $B_k$  son conjuntos infinitos, y definimos  $c$  como la función de coloración previamente descrita, el conjunto  $\text{hom}^{\text{max}}(c)$  deja de ser localmente compacto.

**Teorema 3.2.11.** *Sea una partición de  $\mathbb{N}$  en conjuntos disjuntos*

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} P_k,$$

y sea  $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$  la coloración inducida por dicha partición. Entonces:

1. Si el conjunto  $\{k \in \mathbb{N} : P_k \text{ es infinito}\}$  es finito, entonces  $\text{hom}^{max}(c)$  es localmente compacto.
2. Si el conjunto  $\{k \in \mathbb{N} : P_k \text{ es infinito}\}$  es infinito, entonces  $\text{hom}^{max}(c)$  no es localmente compacto.

*Demostración.* La demostración se sigue de los ejemplos ya presentados anteriormente. Veamos a continuación otro argumento.

Sea  $\mathbb{N} = \bigsqcup_n P_n$  una partición en conjuntos disjuntos. Y consideremos  $c$  una coloración a partir de esta. Entonces,

$$\text{hom}^{max}(c) = \{P_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}.$$

Además,

$$\text{hom}^{max}(c)' = \{\{x_k : k \in \mathbb{N}\} : (\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in P_k\}$$

y

$$\text{hom}^{max}(c)' \cap \{P_k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Finalmente,

$$\text{hom}^{max}(c)' \simeq \prod_n P_n.$$

Y notemos que por un argumento similar al de la Proposición 2.4.5,  $\text{hom}^{max}(c)$  es localmente compacto si, y solo si,  $\text{hom}^{max}(c)'$  es localmente compacto. Por lo tanto, del Teorema 1.2.2 se sigue fácilmente 1 y 2.  $\square$

### 3.2.1. Un par de ejemplos más

**Ejemplo 3.2.12.** *Sea  $2^{<\mathbb{N}}$  el conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos. Definamos*

$$A_\alpha = \{\alpha \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{para todo } \alpha \in 2^{\mathbb{N}}.$$

Entonces,  $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in 2^{\mathbb{N}}\}$  es una familia casi disjunta de subconjuntos de  $2^{<\mathbb{N}}$ , la cual es compacta en  $2^{2^{<\mathbb{N}}}$ . Además,  $\mathcal{A}^{max} = \mathcal{A}$ .

**Ejemplo 3.2.13.** El ideal  $S$  (ideal de Solecki) se define <sup>11</sup> sobre el conjunto numerable  $\Omega$  de todos los subconjuntos clopen del conjunto de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$  cuya medida <sup>12</sup> es igual a  $\frac{1}{2}$ , y está generado por los conjuntos de la forma

$$\widehat{E}_x = \{a \in \Omega : x \in a\}$$

para  $x \in 2^{\mathbb{N}}$ .

Podemos definir este ideal sobre  $\mathbb{N}$  como sigue. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  una biyección, y para cada  $x \in 2^{\mathbb{N}}$  definimos

$$E_x = \{a \in \mathbb{N} : f^{-1}(a) \in \widehat{E}_x\}.$$

Sea

$$\mathcal{G} = \{E_x : x \in 2^{\mathbb{N}}\}$$

y

$$\mathcal{H} = \downarrow \mathcal{G}.$$

Finalmente, sea  $S_{\mathbb{N}}$  el ideal generado por  $\mathcal{H}$ . Entonces  $S_{\mathbb{N}} \simeq S$ , y además

$$\mathcal{H}^{max} = \mathcal{G}$$

es compacto.

En 1964, Richard Rado redescubrió el grafo aleatorio como grafo universal y proporcionó una construcción explícita del mismo tomando a los números naturales como conjunto de vértices. El grafo aleatorio sobre  $\mathbb{N}$  puede definirse de la siguiente manera.

Sea  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una familia independiente de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  (ver 1.1.15) tal que  $n \in X_m$  si, y solo si,  $m \in X_n$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dicha familia puede obtenerse mediante modificaciones finitas de los elementos de cualquier familia independiente numerable (ver <sup>13</sup>).

---

<sup>11</sup> Solecki, S. “Filters and sequences”. En: *Fundamenta Mathematicae* 163 (2000), págs. 215-228

<sup>12</sup> Aquí, la medida se refiere a la medida producto estándar en  $2^{\mathbb{N}}$ .

<sup>13</sup> Hrušák, M. et al. “Ramsey type properties of ideals”. En: *Annals of Pure and Applied Logic* 168.11 (2017), págs. 2022-2049. DOI: 10.1016/j.apal.2017.06.001

El conjunto

$$E = \{\{n, m\} : m \in X_n\}$$

es el conjunto de aristas del grafo aleatorio.

El grafo aleatorio satisface la siguiente propiedad: dados  $F$  y  $G$  subconjuntos finitos disjuntos de  $\mathbb{N}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{\{k, l\} : l \in F\} \subseteq E \quad \text{y} \quad \{\{k, l\} : l \in G\} \cap E = \emptyset.$$

Como consecuencia, dado un grafo contable  $\langle \mathbb{N}, G \rangle$ , existe un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{N}$  tal que

$$\langle \mathbb{N}, G \rangle \cong \langle X, E \upharpoonright X \rangle.$$

**Ejemplo 3.2.14.** El ideal del grafo aleatorio  $\mathcal{R}$  es el ideal generado por las cliques y los conjuntos independientes en el grafo aleatorio  $\langle \mathbb{N}, E \rangle$ . Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{N}$  es un **clique** si para cada par  $x, y \in C$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x, y\} \in E$ . Es decir, todos los vértices de  $C$  están conectados entre sí. Un conjunto  $F \subseteq \mathbb{N}$  es un **conjunto independiente** si para cada par  $x, y \in F$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x, y\} \notin E$ .

$\mathcal{R}$  es un ideal  $F_\sigma$  alto.

Sea

$$\mathcal{G} = \{C \subseteq \mathbb{N} : C \text{ es clique}\} \cup \{D \subseteq \mathbb{N} : D \text{ es un conjunto independiente}\}.$$

Entonces  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario pues los conjuntos

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq \mathbb{N} : C \text{ es un clique}\},$$

y

$$\mathcal{J} = \{D \subseteq \mathbb{N} : D \text{ es un conjunto independiente}\}$$

son cerrados hereditarios.

Notemos ahora que,

$$\mathcal{C}^{max} = \{C \subseteq \mathbb{N} : (\forall n \in C^c)(\exists m \in C)(\{n, m\} \notin E)\} \cap \mathcal{C},$$

y

$$\mathcal{J}^{max} = \{D \subseteq \mathbb{N} : (\forall n \in D^c)(\exists m \in D)(\{n, m\} \in E)\} \cap \mathcal{J}.$$

De lo anterior,

$$\mathcal{G}^{max} = \mathcal{C}^{max} \cup \mathcal{J}^{max}.$$

**Pregunta 3.2.15.** ¿Es  $\mathcal{G}^{max}$  localmente compacto?

### 3.3. ANTICADENAS MAXIMALES GENERADORAS DE IDEALES

Una pregunta natural es la siguiente: dado un ideal  $\mathcal{I}$ , ¿existe una anticadena maximal boreliana que genere a  $\mathcal{I}$ ?

Un primer acercamiento a este problema puede realizarse a través de la familia  $\mathcal{G}^{max}$  asociada a un cerrado hereditario. Sin embargo, como mostraremos a continuación, dicha anticadena no es en general maximal.

En efecto, si tomamos, por ejemplo, el ideal de la serie armónica  $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ , y como generador al cerrado

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} \frac{1}{i+1} \leq 1\},$$

entonces,

$$\mathcal{G}^{max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} \frac{1}{i+1} = 1\},$$

no es anticadena maximal en  $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ . Para ello, notemos que  $A = \{1, 2, 3\}$  cumple que

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1,$$

y además para cualquier elemento  $H \in \mathcal{G}^{max}$ ,

$$H \not\subseteq A \text{ y } A \not\subseteq H.$$

**Ejemplo 3.3.1.** *Un ejemplo trivial de un ideal que admite una anticadena maximal generadora es Fin. Tómense, por ejemplo, los singuletes o la colección de conjuntos de tamaño  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .*

En vista del ejemplo anterior, surge la siguiente pregunta.

**Pregunta 3.3.2.** *¿Cuáles ideales analíticos admiten un generador que sea anticadena maximal? En particular, ¿toda anticadena maximal en un ideal necesariamente genera al ideal?*

**Observación 3.3.3.** Sea  $\mathcal{I}$  no trivial. La segunda pregunta de si toda anticadena maximal es generadora debe entenderse únicamente al considerar los elementos infinitos del ideal. En efecto, la familia de singuletes de cualquier  $\mathcal{I}$  forma una anticadena maximal, pero no genera al ideal.

**Pregunta 3.3.4.** Sea  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  una serie divergente de términos no negativos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0.$$

Definimos

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

y el conjunto

$$\text{Sum}_M = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : M < \sum_{n \in A} f(n) < \infty \right\}.$$

¿Se cumple que

$$\bigcap_{A \in \text{Sum}_M} E(f|_A) \neq \emptyset?$$

(Ver Teorema 1.2.5).

En caso afirmativo, ¿existe algún elemento de esta intersección que sea estrictamente mayor que  $M$ ?

La pregunta anterior surge al intentar forzar, dentro de un ideal sumable, que la familia

$$\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} f(n) = M\}$$

sea una anticadena maximal.

La motivación es que los elementos de  $\mathcal{I}$  que pueden considerarse *problemáticos* (para obtener una anticadena maximal) son precisamente aquellos subconjuntos  $A \in \mathcal{I}$  para los cuales

$$\sum_{n \in A} f(n) > M.$$

De existir siempre un subconjunto en  $A$  cuya suma sea igual a  $M$ , se produciría una anticadena maximal.

Sin embargo, consideramos que la respuesta a esta pregunta es, en general, negativa. No obstante, la dejamos planteada para una posible revisión posterior.

Motivados por la discusión anterior, introducimos la siguiente definición, que proporciona una respuesta parcial a la pregunta de la existencia de una anticadena maximal en un ideal.

**Definición 3.3.5.** *Dado un ideal  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$  un anticadena. Diremos que  $\mathcal{H}$  es **cuasi-maximal** si  $\mathcal{H}$  satisface que*

$$(\forall A \in \mathcal{I})(\exists X \in \mathcal{H})(A \subseteq^* X \vee X \subseteq A).$$

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal  $F_\sigma$ . Entonces, existe una anticadena  $G_\delta$ , cuasi-maximal y generadora de  $\mathcal{I}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{I}$  un ideal  $F_\sigma$ , es decir, existe una sucesión  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de cerrados hereditarios encajados tales que

$$\mathcal{I} = \bigcup F_n.$$

Entonces por la Proposición 3.1.1,

$$\mathcal{G} = \{A \setminus [0, m - 1] : m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in F_m\} \quad (3.2)$$

es un cerrado hereditario y generador de  $\mathcal{I}$ .

Veamos que  $\mathcal{G}^{max}$  es cuasi-maximal. Sea  $A \in \mathcal{I}$ . Entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A \in F_n$ . Es decir,

$$A \setminus [0, n - 1] \in \mathcal{G}.$$

Si  $A \setminus [0, n - 1] \in \mathcal{G}^{max}$ , entonces  $A \setminus [0, n - 1] \subseteq A$ . Caso contrario, existe  $B \in \mathcal{G}^{max}$  tal que

$$A \setminus [0, n - 1] \subseteq B,$$

lo cual implica que  $A \subseteq^* B$ . Lo que queríamos demostrar. □

Recordemos que en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\text{Fin}$  se define el orden

$$[A] \leq [B] \quad \text{si, y solo si,} \quad A \setminus B \in \text{Fin.}$$

Además, dos clases  $[A]$  y  $[B]$  son *incompatibles* si

$$A \cap B \in \text{Fin,}$$

es decir, si  $A$  y  $B$  son casi disjuntos.

De esta manera, dado  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $\mathbb{N}$  con  $\text{Fin} \subseteq \mathcal{I}$ . Se dice que una familia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}/\text{Fin}$  es una *anticadena maximal* ( $\text{AM}^*$ ) en  $\mathcal{I}$  si:

1. Para cualesquiera  $[A], [B] \in \mathcal{A}$  distintos se tiene

$$A \cap B \in \text{Fin};$$

2.  $\forall B \in \mathcal{I}, \exists [A] \in \mathcal{A}$  tal que  $[A] \leq [B]$  o  $[B] \leq [A]$ .

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$  una anticadena cuasi-maximal. Entonces,  $\mathcal{H}$  vista en  $\mathcal{I}/\text{Fin}$  es  $\text{AM}^*$ .*

## 4. EL ESPECTRO DE ESPACIOS *CTS*

El presente capítulo está dedicado al estudio del espacio espectro asociado a un *c.p.o.* numerable siguiendo el trabajo de <sup>2</sup>. En particular, al estudio de las bases de un espacio topológico al considerarlas como conjuntos parcialmente ordenados bajo la relación de inclusión. Uno de los principales resultados estudiados es el Teorema 4.3.4, el cual establece que todo espacio *CTS* es homeomorfo al espectro de un *c.p.o.* numerable. De este modo, se obtiene una nueva representación combinatoria de los espacios compactos,  $T_1$  y segundo numerables.

A través de esta representación se demuestra, al igual que en el caso de las familias hereditarias, que los espacios *CTS* admiten una extensión polaca que preserva los borelianos (Teorema 4.4.3). Este resultado motiva el estudio de la relación entre la representación mediante cerrados hereditarios y la representación mediante espacios espectro. Ello conduce a establecer (véase el Teorema 4.5.11) que la categoría de los espacios espectro, **Espectro**, es equivalente a la categoría de los espacios maximales asociados a un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ , **CHMax**.

### 4.1. BASES COMO CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Consideremos cualquier relación  $\sqsubset \subseteq A \times B$ , vista como una relación de  $B$  en  $A$ . La **preimagen** de  $S \subseteq A$  está dada por

$$S^{\sqsubset} = \{b \in B : \exists s \in S(s \sqsubset b)\}.$$

Y definimos la **imagen**  $T \subseteq B$  por

$$T^{\sqsupset} = \{a \in A : \exists t \in T(a \sqsupset t)\}.$$

Decimos que  $S \subseteq A$  **refina**  $T \subseteq B$  si está contenido en su imagen, es decir,  $S \subseteq T^{\sqsupset}$ . Esta relación de refinamiento será también denotada por  $\sqsubset$ , es decir, para cada  $S \subseteq A$  y  $T \subseteq B$ ,

$$S \sqsubset T \iff S \subseteq T^{\sqsupset} \iff (\forall s \in S)(\exists t \in T)(s \sqsubset t).$$

Del mismo modo, la relación de corefinamiento también se denotará por  $\sqsupset$ , es decir, decimos que  $T \subseteq B$  **corefina**  $S \subseteq A$  si está contenido en su preimagen,

$$T \sqsupset S \iff T \subseteq S^{\square} \iff (\forall t \in T)(\exists s \in S)(s \sqsubset t).$$

Dado un preorden  $\leq$  en un conjunto  $\mathbb{P}$ , decimos que  $p, q \in \mathbb{P}$  son comparables si  $p$  está por abajo de  $q$  o viceversa. Denotaremos la relación de comparabilidad por  $\sim$ . Es decir,

$$p \sim q \iff p \leq q \text{ o } q \leq p.$$

Las anticadenas de  $\mathbb{P}$  son los subconjuntos incomparables por pares, que denotaremos por

$$A\mathbb{P} = \{A \subseteq \mathbb{P} : \forall q, r \text{ distintos en } A (q \not\sim r)\}.$$

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $\leq$  un preorden en  $\mathbb{P}$ . Entonces, la relación de refinamiento definida en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  es también un preorden. Además, si  $\leq$  es un orden parcial, entonces la relación de refinamiento es un orden parcial cuando se restringe a  $A(\mathbb{P})$ .*

**Definición 4.1.2.** *Tomemos un conjunto parcialmente ordenado  $(\mathbb{P}, \leq)$ .*

1. *Decimos que  $B \in \text{Fin}(\mathbb{P})$  es una **banda** si cada elemento  $p \in \mathbb{P}$  es comparable a algún elemento  $b \in B$ .*
2. *Llamamos a  $C \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$  una **capa** si  $C$  es refinada por alguna banda. Es decir, existe una banda  $B \in \text{Fin}(\mathbb{P})$  tal que*

$$(\forall p \in B)(\exists q \in C)(p \leq q).$$

Denotaremos las bandas y capas de  $\mathbb{P}$  por

$$B\mathbb{P} = \{B \in \text{Fin}(\mathbb{P}) : \mathbb{P} = B^{\leq} \cup B^{\geq}\}.$$

$$C\mathbb{P} = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{P}) : \exists B \in B\mathbb{P}(B \leq C)\}.$$

**Ejemplo 4.1.3.** *Veamos con un diagrama de Hasse un ejemplo de una banda y una capa.*

En este estudio,  $\mathbb{P}$  denotará en general a una base de un espacio topológico  $X$ , ordenada por inclusión. En este caso, las capas corresponden a coberturas de  $X$  por elementos de la base.

**Proposición 4.1.4** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $\mathbb{P}$  es una base de conjuntos abiertos de un espacio topológico  $X$   $T_1$ , ordenados por inclusión, entonces cada capa de  $\mathbb{P}$  cubre a  $X$ , es decir,*

$$C \in C\mathbb{P} \Rightarrow X = \bigcup C.$$

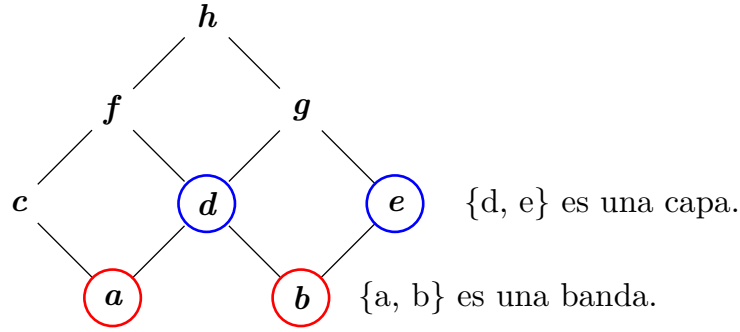


Figura 4.1: Ejemplo de banda y capa.

*Demostración.* Notemos que si  $\mathcal{B}$  refina a  $\mathcal{C}$  y  $\bigcup \mathcal{B} = X$  entonces  $\bigcup \mathcal{C} = X$ . De esta manera es suficiente probar que toda banda cubre a  $X$ . Sea  $\mathcal{B}$  una banda y supongamos que existe un  $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{B}$ . Para cada  $B \in \mathcal{B}$ , sea  $x_B$  un elemento de  $B$ . Como  $X$  es  $T_1$ , el conjunto  $C = X \setminus \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$  es abierto. Luego, dado que  $\mathbb{P}$  es una base, existe  $D \in \mathbb{P}$  tal que  $x \in D \subseteq C$ . Notemos ahora que para cada  $B \in \mathcal{B}$ ,  $x \in D \setminus B$ , con lo cual  $D \not\subseteq B$  por otro lado  $x_B \in B \setminus D$ , esto es,  $B \not\subseteq D$ . Por lo tanto,  $D$  no es comparable con ningún elemento de  $\mathcal{B}$ , contradiciendo así el hecho de que  $\mathcal{B}$  es una banda.  $\square$

**Definición 4.1.5.** Llamamos a una base  $\mathbb{P}$  de un espacio topológico  $X$  una

1. **Base de bandas** si  $B\mathbb{P} = \{\mathcal{B} \in \text{Fin}(\mathbb{P}) : X = \bigcup \mathcal{B}\}$ .
2. **Base de capas** si  $C\mathbb{P} = \{\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathbb{P}) : X = \bigcup \mathcal{C}\}$ .

**Definición 4.1.6.** Decimos que  $\mathcal{C}$  es una **cubierta minimal** de un espacio  $X$ , si  $X = \bigcup \mathcal{C}$  y para cada  $C \in \mathcal{C}$  existe un  $c \in \mathcal{C}$  tal que  $c \not\subseteq \bigcup \mathcal{C} \setminus \{C\}$ .

**Proposición 4.1.7** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Cada CTS admite una base de capas.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio CTS y  $\mathcal{B}$  una base numerable para  $X$ . Sea  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de todas las cubiertas finitas minimales de  $X$  por  $\mathcal{B}$ . Recursivamente definiremos  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , de tal manera que:

$\mathcal{C}_{n_{k+1}}$  refina a ambos  $\mathcal{C}_{n_k}$  y  $\mathcal{C}_k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Sea  $n_1 = 1$  y supongamos que  $n_k$  ha sido definido con la propiedad indicada. Notemos que para cualquier  $x \in X$ , existe  $P_x \in \mathcal{C}_{n_k}$  y  $Q_x \in \mathcal{C}_k$  tales que  $x \in P_x \cap Q_x$ . Como  $\mathcal{B}$  es una base, existe  $B_x \in \mathcal{B}$  con  $x \in B_x \subseteq P_x \cap Q_x$ . Por la compacidad de  $X$  existen  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tal que  $\{B_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$  es una cubierta minimal de  $X$ . Esto significa que existe  $n_{k+1} \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{C}_{n_{k+1}} = \{B_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$  refina a  $\mathcal{C}_{n_k}$  y a  $\mathcal{C}_k$ . Con esto concluye la construcción de la sucesión  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Definamos

$$\mathbb{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{n_k}.$$

**Afirmación 1.**  $\mathbb{P}$  es una base de  $X$ .

En efecto, dado  $x \in B \in \mathcal{B}$ , como  $X$  es  $T_1$  podemos cubrir a  $X \setminus B$  con abiertos de  $\mathcal{B}$  que eviten a  $x$ . La compacidad brinda una subcubierta finita minimal de  $X$ , es decir, existe un  $\mathcal{C}_k$  tal que  $B \in \mathcal{C}_k$  y  $x \notin \bigcup \mathcal{C}_k \setminus \{B\}$ . Sea  $C \in \mathcal{C}_{n_{k+1}}$  con  $x \in C$ . Notemos que  $C \subseteq B$ , pues  $\mathcal{C}_{n_{k+1}}$  refina a  $\mathcal{C}_k$  y  $B$  es el único elemento de  $\mathcal{C}_k$  que contiene a  $x$ . Así, hemos encontrado  $C \in \mathbb{P}$  con  $x \in C \subseteq B$ . Mostrando así que  $\mathbb{P}$  es una base de  $X$ .

**Afirmación 2.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\mathcal{C}_{n_k}$  es una banda.

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Por construcción  $\mathcal{C}_{n_{k+1}}$  refina a  $\mathcal{C}_{n_k}$ . Mostraremos que  $\mathcal{C}_{n_k}$  corefina a  $\mathcal{C}_{n_{k+1}}$ , es decir,  $\mathcal{C}_{n_k} \subseteq \mathcal{C}_{n_{k+1}}^{\subseteq}$ . En efecto, sea  $B \in \mathcal{C}_{n_k}$ . Como  $\mathcal{C}_{n_k}$  es una cubierta minimal, existe  $x \in B$  con  $x \in B \setminus \bigcup (\mathcal{C}_{n_{k+1}} \setminus \{B\})$ . Tomemos  $Q \in \mathcal{C}_{n_{k+1}}$  con  $x \in Q$ . Se tiene que  $Q \subseteq B$ , pues  $\mathcal{C}_{n_{k+1}}$  refina a  $\mathcal{C}_{n_k}$  y  $B$  es el único elemento en  $\mathcal{C}_{n_k}$  que contiene a  $x$ . Como las relaciones de refinamiento y corefinamiento son transitivas, se sigue que  $\mathcal{C}_{n_k}$  es una banda de  $\mathbb{P}$ .

Como cada cubierta de  $X$  por  $\mathcal{B}$  y en particular por  $\mathbb{P}$  es refinada por algún  $\mathcal{C}_{n_k}$ , se sigue que cualquier cubierta de  $X$  a partir de  $\mathbb{P}$  es una capa de  $\mathbb{P}$ , es decir,  $\mathbb{P}$  es una base de capas.  $\square$

## 4.2. SELECTORES

Sea  $(\mathbb{P}, \leq)$  un *c.p.o.* fijo.

**Definición 4.2.1.** Decimos que  $S \subseteq \mathbb{P}$  es una **selector**, si se interseca con todas las capas, es decir

$$C \in \mathcal{C}\mathbb{P} \Rightarrow S \cap C \neq \emptyset.$$

Equivalentemente  $S \subseteq \mathbb{P}$  es un selector cuando precisamente  $\mathbb{P} \setminus S$  no es una capa (ya que ser una capa o contener una capa es lo mismo).

**Proposición 4.2.2** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Cada selector contiene un selector minimal en el sentido de la inclusión.*

*Demostración.* Veamos que la familia de selectores contiene un elemento minimal, usando el Lema de Kuratowski-Zorn.

Notemos que cada capa  $C$  contiene una subcapa finita, pues las bandas son finitas por definición. Así, si  $B$  es una banda que refina a  $C$ , entonces podemos escoger un subconjunto

finito de  $C$  que siga siendo refinado por  $B$ . Luego, para que  $S$  sea un selector, basta con que seleccione elementos sólo de las capas finitas.

Veamos que la intersección de una cadena de selectores es de nuevo un selector y por Kuratowski–Zorn se tiene que cada selector contiene un selector minimal.

Sea  $\{F_i : i \in I\}$  una cadena de selectores y

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Veamos que  $F$  es un selector.

Si la cadena es finita, la afirmación es inmediata. Supongamos ahora que la cadena es infinita y sea  $\mathcal{C}$  una capa finita.

Supongamos que

$$\mathcal{C} \cap F = \emptyset.$$

Entonces,

$$\mathcal{C} \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset,$$

lo cual implica que

$$\forall c \in \mathcal{C}, \exists i_c \in I \text{ tal que } c \notin F_{i_c}.$$

Como  $\mathcal{C}$  es finita, existe un conjunto finito  $\{i_{c_1}, \dots, i_{c_n}\} \subseteq I$  tal que

$$\mathcal{C} \cap \bigcap_{k=1}^n F_{i_{c_k}} = \emptyset.$$

Dado que  $\{F_i : i \in I\}$  es una cadena, existe  $j \in I$  tal que

$$F_j \subseteq \bigcap_{k=1}^n F_{i_{c_k}}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{C} \cap F_j = \emptyset,$$

lo cual contradice que  $F_j$  es un selector.

En consecuencia,

$$\mathcal{C} \cap F \neq \emptyset,$$

y por tanto  $F$  es un selector. □

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $\mathbb{P}$  un c.p.o. Si  $S$  es un selector minimal, entonces para cada  $s \in S$  existe una capa  $C \subseteq \mathbb{P}$  tal que*

$$S \cap C = \{s\}.$$

*Demostración.* Tomemos un selector minimal  $S \subseteq \mathbb{P}$ . Por la minimalidad, para cada  $s \in S$ , existe un  $C \in C\mathbb{P}$  tal que  $S \cap C = \{s\}$ . Caso contrario,  $S \setminus \{s\}$  sería un selector estrictamente menor.  $\square$

**Proposición 4.2.4.** *Cada selector minimal es un conjunto ascendente.*

*Demostración.* Tomemos un selector minimal  $S \subseteq \mathbb{P}$ . Por la minimalidad, para cada  $s \in S$ , existe un  $C \in C\mathbb{P}$  tal que  $S \cap C = \{s\}$ . Notemos ahora que si  $p \in S$  y  $p \geq s$ ,  $D = C \setminus \{s\} \cup \{p\}$  es refinado por  $C$ , y por tanto es también una capa. Como  $S$  debe intersectar a  $D$ , la única posibilidad es que  $S$  contenga a  $p$ . Esto prueba que  $S^{\leq} = S$ , es decir,  $S$  es un conjunto ascendente.  $\square$

### 4.3. ESPECTRO

Consideremos a  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  con la topología generada por la subbase

$$p^+ = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{P}) : p \in S\}.$$

Equivalentemente, esta es la topología que obtenemos identificando cada  $S \subseteq \mathbb{P}$  con su función característica  $\chi_S \in 2^{\mathbb{P}}$ , donde  $2 = \{0, 1\}$  tiene la topología de Sierpiński ( $\{1\}$  es abierto pero  $\{0\}$  no lo es) y  $2^{\mathbb{P}}$  es dotado con la topología producto usual.

**Definición 4.3.1.** *El **espectro** es el subespacio de  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  de los selectores minimales.*

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) = \{S \subseteq \mathbb{P} : S \text{ es un selector minimal}\}.$$

De esta manera,  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  tiene como subbase a los conjuntos

$$p^+ = \{S \in \text{Sel}(\mathbb{P}) : p \in S\}.$$

para cada  $p \in \mathbb{P}$ . Denotaremos por  $\tau_{sp}$  a la topología generada por esta subbase.

**Teorema 4.3.2** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Sea  $(\mathbb{P}, \leq)$  un c.p.o. numerable; entonces,  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  es un espacio CTS.*

*Demostración.* Sea  $\{a^+ : a \in T\}$  un cubrimiento por subbásicos de  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ . Veamos que admite subcubrimiento finito. Afirmamos inicialmente que existe una capa  $C \subseteq T$ . Supongamos por contradicción lo contrario, entonces  $T$  no es capa (pues ser capa o contener una capa es equivalente). Luego  $\mathbb{P} \setminus T$  es selector. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\mathbb{P} \setminus T$  es selector minimal. Por lo tanto,  $\mathbb{P} \setminus T \in \text{Sel}(\mathbb{P})$ . Como  $\{a^+ : a \in T\}$  es cubrimiento, existe un  $b \in T$  tal que  $\mathbb{P} \setminus T \in b^+$ , es decir,  $b \in \mathbb{P} \setminus T$ , lo cual es una contradicción. Así, existe  $C \subseteq T$  capa. De lo anterior, podemos asumir también sin pérdida de generalidad que  $C$  es finita. Notemos finalmente que  $\{a^+ : a \in C\}$  es un subcubrimiento de  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ , esto pues, para cada  $R \in \text{Sel}(\mathbb{P})$ , existe un  $r \in R \cap C$ , es decir,  $R \in r^+$ .

La segunda numerabilidad se sigue de inmediato pues  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  posee una subbase numerable.  $\square$

**Teorema 4.3.3** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $\mathbb{P}$  es una base de capas de un espacio  $X$   $T_1$ , entonces*

$$x \rightarrow x^+ = \{p \in \mathbb{P} : x \in p\} \tag{4.1}$$

*es un homeomorfismo de  $X$  en  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Por hipótesis, cualquier capa  $C \in C\mathbb{P}$  es una cubierta de  $X$  y por tanto debe existir un  $c \in C$  conteniendo a  $x$ , es decir,  $c \in x^+ \cap C$ . Esto muestra que  $x^+$  es un selector. Tomemos ahora cualquier  $p \in x^+$ . Para cualquier  $y \in X \setminus p$ , existe algún  $q \in y^+ \setminus x^+$ , pues  $X$  es  $T_1$ . Esto significa que  $D = \{p\} \cup (\mathbb{P} \setminus x^+)$  es una cubierta de  $X$  y además una capa de  $\mathbb{P}$  con  $D \cap x^+ = \{p\}$ . Lo que prueba que  $x^+$  es selector minimal.

Por otro lado, cada selector  $S \in \text{Sel}(\mathbb{P})$ ,  $\mathbb{P} \setminus S$  no puede cubrir a  $X$  (caso contrario sería una capa con  $S \cap (\mathbb{P} \setminus S) = \emptyset$ ). De esta manera podemos escoger un  $x \in X$  que no está cubierto por  $\mathbb{P} \setminus S$ , lo que significa que  $x^+ \subseteq S$ . Como  $S$  es un selector minimal esto implica que  $x^+ = S$ . Esto prueba que  $\text{Sel}(\mathbb{P}) = \{x^+ : x \in X\}$ . También que  $x \neq y$  implica que  $x^+ \neq y^+$ , pues  $X$  es  $T_1$ , así  $x \rightarrow x^+$  es una biyección de  $X$  en  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ .

Finalmente, notemos que  $x \rightarrow x^+$  mapea cada  $p \in \mathbb{P}$  en  $p^+$ , como

$$x \in p \iff p \in x^+ \iff x^+ \in p^+.$$

Como  $\mathbb{P}$  es una subbase de  $X$  y  $(p^+)_{p \in \mathbb{P}}$  es una subbase del espectro  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ , esto muestra que la función  $x \rightarrow x^+$  es un homeomorfismo de  $X$  en  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ .  $\square$

**Teorema 4.3.4** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Sea  $X$  un espacio CTS. Entonces,  $X$  es homeomorfo a  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  para algún c.p.o.  $\mathbb{P}$  numerable.*

**Ejemplo 4.3.5** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Sea  $X = [0, 1]$ , y definamos cubiertas abiertas  $(C_n)$  de  $X$  por*

$$C_n = \left\{ \text{int} \left( \left[ \frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}} \right] \right) : 1 \leq k \leq 2^{n+1} - 1 \right\}.$$

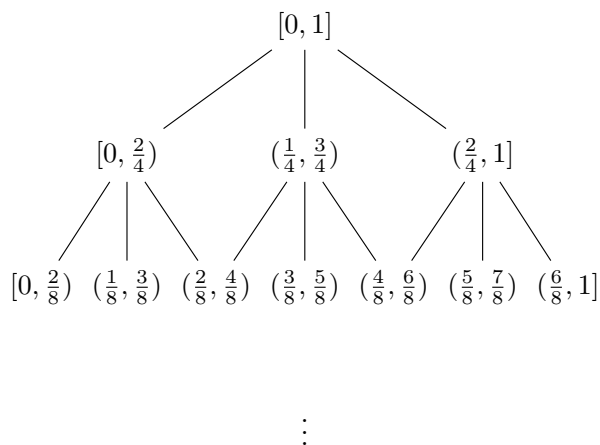


Figura 4.2: Construcción combinatoria del intervalo.

Veamos que

$$\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

es una base de capas. Para ello, veamos que todo cubrimiento por elementos de  $\mathbb{P}$  es una capa. Primero, notemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $C_n$  es una banda. Es decir, dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{P}$ , existe un  $c \in C_n$  tal que

$$p \sim c \quad (\text{es decir, } p \subseteq c \text{ o } c \subseteq p).$$

Sea ahora  $\mathcal{C}$  un cubrimiento de  $X$  por elementos de  $\mathbb{P}$ . Como  $X$  es compacto, existen  $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{C}$  tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^m p_i.$$

Tomemos

$$N = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} : p_i \in C_k, 1 \leq i \leq m\}.$$

De lo anterior,

$$C_N \leq \mathcal{C} \text{ (es decir, } C_N \text{ refina a } \mathcal{C}\text{)}.$$

Así,  $\mathcal{C}$  es una capa.

Finalmente por el Teorema 4.3.3, el espectro de  $\mathbb{P}$  recupera el espacio original  $X$ .

**Ejemplo 4.3.6.** Sea  $X = 2^{\mathbb{N}}$ .

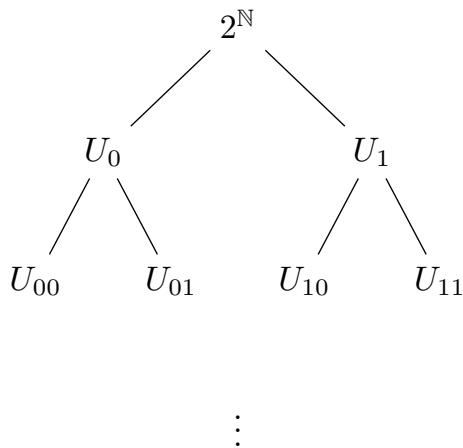


Figura 4.3: Espacio de Cantor.

Definamos

$$\mathcal{U}_0 = 2^{\mathbb{N}},$$

y para  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{U}_n = \{U_s : s \in 2^{<\mathbb{N}}, |s| = n\},$$

donde

$$U_s = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} : \alpha|_n = s\}.$$

Entonces

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$$

es una base de capas.

**Ejemplo 4.3.7** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Sea  $X = \omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$  con la topología cofinita. Definamos

$$\mathbb{P} = \{p_{n,i} : i \leq n, n \in \omega\},$$

donde

$$p_{n,i} = (\omega \setminus \{0, 1, \dots, n\}) \cup \{i\}.$$

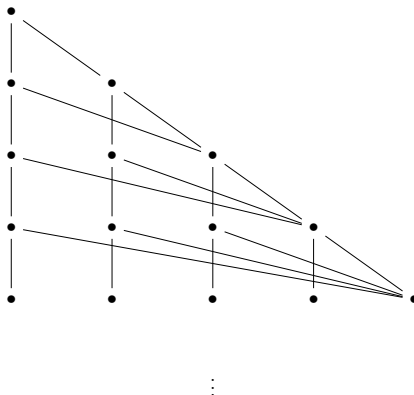


Figura 4.4: Topología cofinita sobre  $\omega$ .

Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= \omega, \\ p_{1,0} &= \omega \setminus \{1\}, \\ p_{1,1} &= \omega \setminus \{0\}, \\ p_{2,0} &= \omega \setminus \{1, 2\}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Es claro que para cada  $i \in X$ , el conjunto  $\{p_{n,i} : i < n\}$  forma una base de entornos abiertos en  $X$ , y por lo tanto,  $\mathbb{P}$  es una base para  $X$ . Cada elemento  $p_{n,i}$ , con  $i \leq n \in \omega$ , tiene exactamente dos predecesores inmediatos:  $p_{n+1,i}$  y  $p_{n+1,n+1}$ . Además:

- Si  $i < n \neq 0$ ,  $p_{n,i}$  tiene un único sucesor inmediato:  $p_{n-1,i}$ .
- Si  $i = n \neq 0$ ,  $p_{n,n}$  tiene como sucesores inmediatos a todos los  $p_{n-1,j}$  con  $j \leq n - 1$ .

De lo anterior, podemos probar que  $\mathbb{P}$  es una base de capas y el espectro de  $\mathbb{P}$  recupera el espacio original  $X$ .

**Ejemplo 4.3.8.** *Veamos cuáles son los selectores minimales asociados al c.p.o.  $\mathbb{P}$  del Ejemplo 4.3.7.*

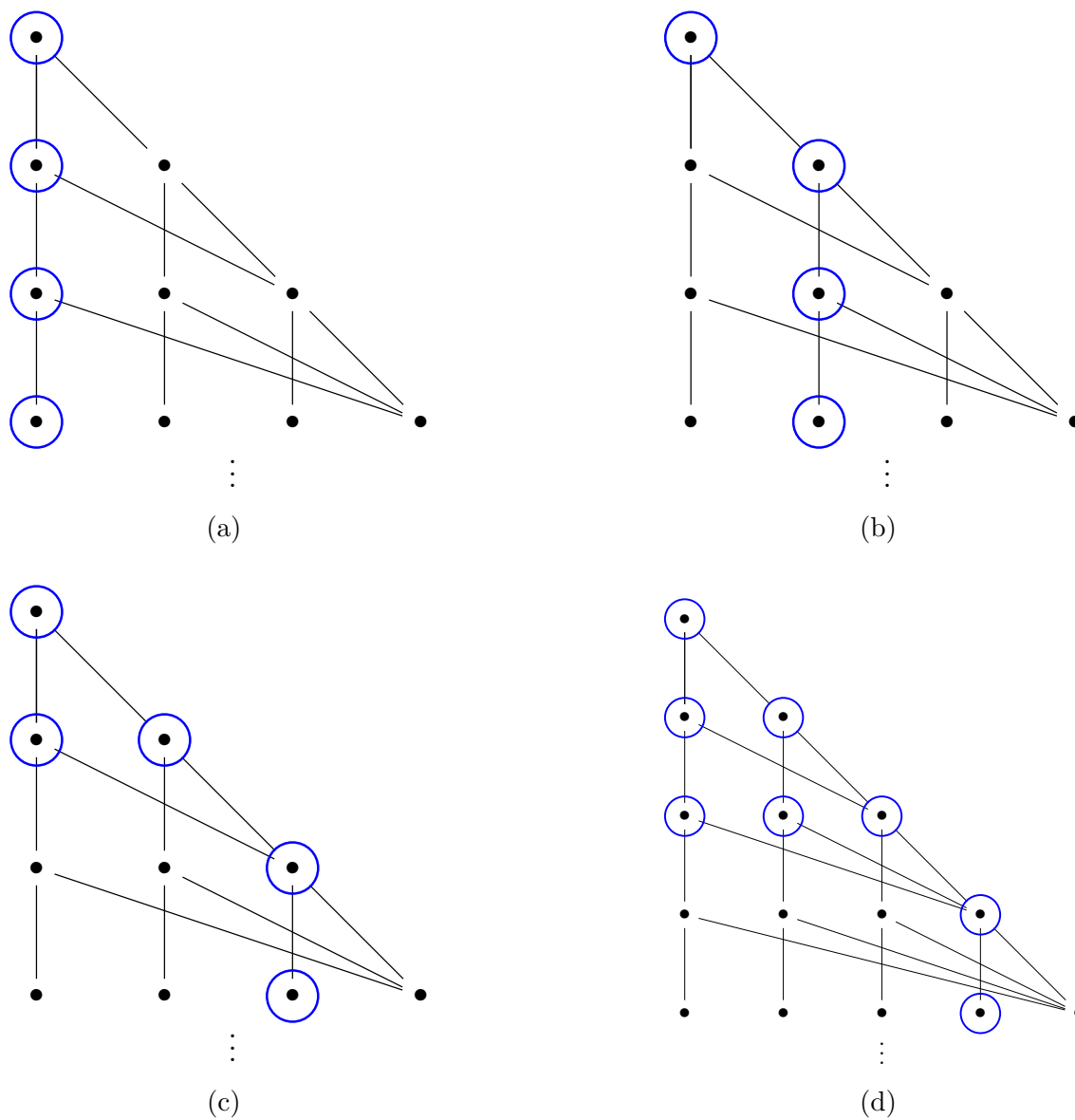


Figura 4.5: Algunos selectores minimales.

En general,

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \{p_{0,0}, p_{1,0}, \dots, p_{n,0}, \dots\}, \\
 S_1 &= \{p_{0,0}, p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{n,1}, \dots\}, \\
 S_2 &= \{p_{0,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{2,2}, p_{3,2}, \dots, p_{n,2}, \dots\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
S_n = \{p_{0,0}, p_{1,0}, \dots, p_{n-1,n-2}, p_{n-1,n-1}, p_{n,n}, p_{n+1,n}, \dots\}, \\
\vdots
\end{array}$$

Afirmamos que

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

En efecto, por la Proposición 4.3.3, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$n^+ = \{A \in \mathbb{P} : n \in A\}$$

es selector minimal. Notemos que precisamente  $n^+ = S_n$ . Y por lo tanto

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

#### 4.4. CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y CERRADOS HEREDITARIOS

**Teorema 4.4.1.** *Si  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  son c.p.o. isomorfos, entonces  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  y  $\text{Sel}(\mathbb{Q})$  son espacios homeomorfos.*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  un isomorfismo, definamos  $\phi : \text{Sel}(\mathbb{P}) \rightarrow \text{Sel}(\mathbb{Q})$  por

$$\phi(S) = f(S).$$

Veamos que  $\phi$  es un homeomorfismo.

**Afirmación 1.**  $B$  es banda en  $\mathbb{P}$  si, y solo si,  $f(B)$  es una banda en  $\mathbb{Q}$ .

Para ver esto, es suficiente notar que  $p \sim q \iff f(p) \sim f(q)$ , lo que sigue fácilmente pues  $f$  es isomorfismo.

**Afirmación 2.**  $C$  es una capa en  $\mathbb{P}$  si, y solo si,  $f(C)$  es una capa en  $\mathbb{Q}$ .

**Afirmación 3.**  $S$  es un selector minimal en  $\mathbb{P}$  si, y solo si,  $f(S)$  es un selector minimal en  $\mathbb{Q}$ .

En efecto, de la afirmación 2, se sigue fácilmente que si  $S$  es selector entonces  $f(S)$  es selector. Si además  $S$  es selector minimal, entonces para cada  $s \in S$  existe una capa  $C_s$  tal que  $S \cap C_s = \{s\}$ . Luego  $f(S) \cap f(C_s) = \{f(s)\}$ , es decir  $f(S)$  es selector minimal.

De lo anterior se sigue que  $\phi$  está bien definida y que es sobreyectiva. Por otro lado, la inyectividad de  $\phi$  se sigue de inmediato por la inyectividad de  $f$ . Para ver que  $\phi$  es homeomorfismo, notemos que para cada  $p \in \mathbb{P}$  se tiene que  $\phi(p^+) = f(p)^+$ .  $\square$

**Ejemplo 4.4.2.** Sea  $X = [0, 1]$ . Considere las siguientes cubiertas abiertas ( $C_n$ ) de  $X$ :

$$C_n = \left\{ \text{int}\left(\left[\frac{k-1}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]\right) : 1 \leq k \leq 3^{n+1} - 1 \right\}.$$

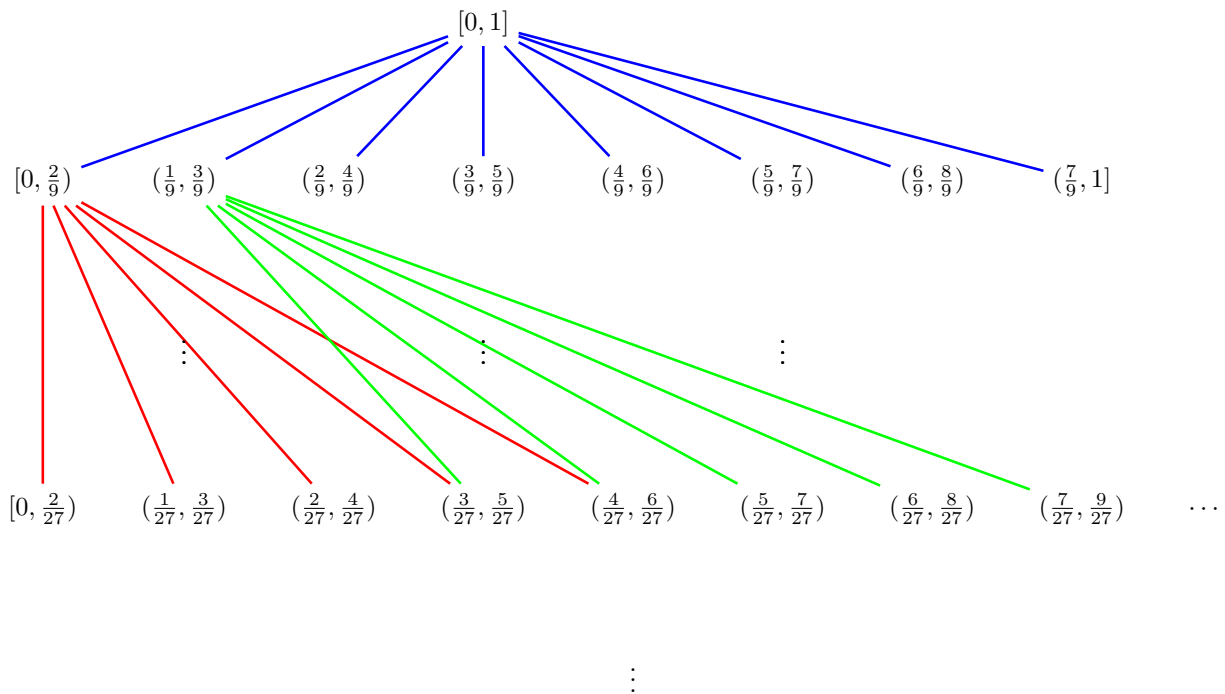


Figura 4.6: Intervalo.

Este ejemplo muestra que dos c.p.o. pueden tener espectros homeomorfos, aunque los c.p.o. no sean isomorfos. Sea  $\mathbb{Q} = \bigcup C_n$ . Entonces, el espectro  $\text{Sel}(\mathbb{Q})$  recupera el espacio original  $X$ . Sea  $\mathbb{P}$  el c.p.o. definido en el Ejemplo 4.3.5. Así,  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  y  $\text{Sel}(\mathbb{Q})$  son homeomorfos, pero  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  no son isomorfos, ya que la cantidad de predecesores inmediatos difiere (véase el diagrama de Hasse en la Figura 4.2).

El siguiente resultado es una reformulación del Teorema 2.2.2, el cual establece que todo espacio  $CTS$  admite una extensión polaca que preserva borelianos. En esta versión, el enunciado se presenta utilizando la noción de espacio espectro asociado a un c.p.o. numerable.

**Teorema 4.4.3.** *Sea  $\mathbb{P}$  un c.p.o. numerable. Entonces  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  es  $G_\delta$  en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  con la topología producto de  $2^{\mathbb{P}}$ , y además  $(\text{Sel}(\mathbb{P}), \tau_{pro})$  (topología heredada de  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ ) es una extensión polaca de  $(\text{Sel}(\mathbb{P}), \tau_{sp})$  que preserva borelianos.*

*Demostración.* Sea

$$\mathcal{S} = \{S \subseteq \mathbb{P} : S \text{ es selector}\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ . Para ello, sea  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{S}$  que converge a  $S$  en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ . Veamos que  $S$  es un selector, es decir, que intersecta toda capa finita.

Sea  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  una capa finita. Por la definición de selector, para cada  $S_n$  existe  $c_i \in C$  tal que  $c_i \in S_n$ . Como  $C$  es finito, existe un índice  $j$  y una subsucesión  $(S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $c_j \in S_{n_k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Como  $(S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow S$  en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ , se sigue que  $c_j \in S$ . Como esto es válido para toda capa finita  $C$ , concluimos que  $S$  es un selector, es decir,  $S \in \mathcal{S}$ . Por tanto,  $\mathcal{S}$  es cerrado.

Ahora, definamos el conjunto

$$R = \{(S, T) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : T \subseteq S\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P}) \times \mathcal{P}(\mathbb{P}).$$

Observamos que  $R$  es cerrado y el conjunto de elementos maximales está definido por:

$$M = \{x \in X : (\forall y)(x \neq y \implies (x, y) \notin R)\}.$$

Usando el mismo razonamiento del Lema 2.2.1, el conjunto de elementos maximales respecto a  $R$ , que corresponde con  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ , es un conjunto  $G_\delta$  en  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ .

Finalmente, que  $(\text{Sel}(\mathbb{P}), \tau_{pro})$  sea una extensión polaca de  $(\text{Sel}(\mathbb{P}), \tau_{sp})$  que preserva los conjuntos borelianos se demuestra de manera análoga al Teorema 2.2.2.

□

El teorema anterior nos permite plantear la pregunta acerca de la relación entre estas dos formas de representar a los espacios  $CTS$ . Por un lado, sabemos que todo espacio topológico  $CTS$  puede describirse como el espectro de un c.p.o. numerable, e incluso de un  $\omega$ -c.p.o. predeterminado, graduado y ramificado (Teorema 4.6.16). Por otro lado, todo  $CTS$  es homeomorfo a  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  para algún cerrado hereditario  $\mathcal{G}$  de  $2^{\mathbb{N}}$ . Además, cabe notar que las funciones que definen los homeomorfismos en 2.6 y 4.1 comparten, en cierto sentido, la misma regla de asignación.

## 4.5. LAS CATEGORÍAS CHMax Y Espectro

Las definiciones y ejemplos presentados a continuación se toman de <sup>14</sup>.

### 4.5.1. Categorías

**Definición 4.5.1.** Una *categoría*  $\mathcal{A}$  consiste en:

- Una clase  $\text{ob}(\mathcal{A})$  cuyos elementos llamaremos **objetos**.
- Para cada par de objetos  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{A})$ , un conjunto  $\mathcal{A}(A, B)$  cuyos elementos serán llamados **morfismos** o **flechas** de  $A$  en  $B$ , verificando que

$$\mathcal{A}(A, B) \cap \mathcal{A}(A', B') = \emptyset \quad \text{si} \quad (A, B) \neq (A', B').$$

- Para cada  $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{A})$ , una aplicación

$$\circ : \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) \longrightarrow \mathcal{A}(A, C)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

llamada composición, verificando:

1. **Existencia de morfismo identidad:** Para cada objeto  $A \in \mathcal{A}$  existe un morfismo

$$1_A \in \mathcal{A}(A, A)$$

tal que para todo objeto  $B \in \mathcal{A}$  y para todo  $f \in \mathcal{A}(A, B)$  se cumple

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

A este morfismo (único) se le llama **identidad** de  $A$ .

2. **Asociatividad:** Si  $A, B, C, D$  son objetos de  $\mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ ,  $g \in \mathcal{A}(B, C)$  y  $h \in \mathcal{A}(C, D)$  son morfismos, se tiene que

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

---

<sup>14</sup> Borceux, F. *Handbook of Categorical Algebra*. Cambridge University Press, 1994

Tomaremos como notación  $A \in \mathcal{A}$  para decir que  $A$  es un objeto de la categoría  $\mathcal{A}$ , y  $f : A \rightarrow B$  o  $f \in \text{Hom}(A, B)$  para decir que  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ . En este caso, decimos que  $A$  es el *dominio* de  $f$  y  $B$  su *codominio*. Además, diremos que dos categorías son iguales si tienen la misma clase de objetos, si se tiene igualdad en los conjuntos de morfismos para todo par de objetos, y todas las composiciones coinciden.

**Ejemplo 4.5.2.** 1. *El ejemplo motivador más sencillo es la categoría **Set**, en la que los objetos son los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos. La composición y la identidad son las usuales. Este es, además, un ejemplo de categoría no pequeña, pues no se puede hablar del conjunto de todos los conjuntos.*

2. *Muchos de los ejemplos interesantes son conjuntos dotados de estructura, aplicaciones que respetan las estructuras, y la composición inducida por la de aplicaciones. Lo único que se debe cumplir es que las identidades y la composición de morfismos sean morfismos. La asociatividad es consecuencia de la asociatividad en aplicaciones. Algunos ejemplos básicos:*

- a) **Grp**: la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.
- b) **Rng**: la categoría de anillos y homomorfismos de anillos.
- c) **Vect<sub>K</sub>**: la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo  $K$  y aplicaciones lineales.
- d) **Top**: la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas.

**Definición 4.5.3** (Isomorfismo). *Se dice que un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en una categoría es un **isomorfismo** si existe otro morfismo  $g : B \rightarrow A$  tal que*

$$g \circ f = 1_A \quad \text{y} \quad f \circ g = 1_B.$$

*En este caso, el morfismo  $g$  se denota como  $f^{-1}$  y se le denomina el inverso de  $f$ . Cuando existe un isomorfismo de  $A$  en  $B$ , se dice que  $A$  y  $B$  son isomorfos, y se denota*

$$A \cong B.$$

**Definición 4.5.4.** *Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías. Un **functor**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  consiste en:*

- *Una ley que asigna a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  un único objeto  $F(A)$  de  $\mathcal{B}$ .*

- Para cada par de objetos  $A, A' \in \mathcal{A}$ , una aplicación

$$F : \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$$

Verificando:

1.  $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$  cuando

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''.$$

2.  $F(1_A) = 1_{F(A)}$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

**Ejemplo 4.5.5.** El funtor de olvido  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  olvida la operación del grupo. Así, ve cada grupo como un conjunto y cada homomorfismo simplemente como una aplicación.

**Definición 4.5.6** (Transformación natural). Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorías y  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  dos funtores. Una **transformación natural**  $\alpha : F \Rightarrow G$  consiste en una familia

$$(\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \mathcal{A}}$$

de morfismos en  $\mathcal{B}$  tal que, para todo morfismo  $f : A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{A}$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

es decir,  $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ .

Cada morfismo  $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$  se denomina componente de  $\alpha$  en el objeto  $A$ .

**Definición 4.5.7** (Isomorfismo natural). Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorías. Un **isomorfismo natural** entre funtores  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es una transformación natural  $\alpha : F \Rightarrow G$  tal que para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$  es invertible en  $\mathcal{B}$ , es decir, existe  $\beta_A : G(A) \rightarrow F(A)$ , tal que  $\beta_A \circ \alpha_A = 1_{F(A)}$  y  $\alpha_A \circ \beta_A = 1_{G(A)}$ .

Si existe tal transformación natural decimos que  $F$  y  $G$  son naturalmente isomorfos.

**Definición 4.5.8.** Una **subcategoría**  $\mathcal{B}$  de una categoría  $\mathcal{A}$  consiste en:

- una subclase  $\text{ob}(\mathcal{B})$  de  $\text{ob}(\mathcal{A})$ , y

- para cada par de objetos  $S, S' \in \text{ob}(\mathcal{B})$ , un subconjunto

$$\mathcal{B}(S, S') \subseteq \mathcal{A}(S, S')$$

cerrado bajo composición e identidades.

Si  $\mathcal{B}(S, S') = \mathcal{A}(S, S')$  para todo par de objetos  $S, S'$  de  $\mathcal{B}$ , se dice que  $\mathcal{B}$  es una **subcategoría plena**.

### Equivalencia de categorías

**Definición 4.5.9.** Dos categorías  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se dicen **isomorfas** si existen funtores

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$$

de manera que  $F \circ G = 1_{\mathcal{B}}$  y  $G \circ F = 1_{\mathcal{A}}$ .

**Definición 4.5.10.** Una **equivalencia** entre categorías  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  consiste en funtores

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$$

junto con un par de isomorfismos naturales

$$\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F \quad \text{y} \quad \varepsilon : F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}.$$

Si existe dicha equivalencia, diremos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son categorías equivalentes, denotado

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B},$$

y que los funtores  $F$  y  $G$  son equivalencias de categorías.

**4.5.2. Equivalencia entre CHMax y Espectro** Sea **CHMax** la categoría cuyos objetos son espacios de la forma  $\mathcal{G}^{max}$  (con la topología  $\tau_{sp}$ ), donde  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ , y cuyos morfismos son funciones continuas entre estos espacios. Sea **Espectro** la categoría cuyos objetos son los espacios espectro asociados a conjuntos parcialmente ordenados numerables (con la topología  $\tau_{sp}$ ), con morfismos también dados por funciones continuas.

Por el Teorema 4.3.2, el espectro de un *c.p.o.* numerable es un espacio *CTS*. Además, por el Teorema 2.1.5, todo espacio de la forma  $\mathcal{G}^{max}$  también es *CTS*.

Junto con los Teoremas 2.1.6 y 4.3.4, los cuales afirman que cada espacio *CTS* es homeomorfo a uno de la forma  $\mathcal{G}^{max}$  y a uno que proviene del espectro de un *c.p.o.* numerable, se concluye que todo objeto en **CHMax** es (hasta homeomorfismo) un objeto en **Espectro**, y viceversa. Afirmamos **CHMax** y **Espectro** son categorías equivalentes.

**Teorema 4.5.11.** *Las categorías **CHMax** y **Espectro** son equivalentes.*

*Demostración.* Definimos funtores en ambas direcciones.

**De CHMax a Espectro.** Dado un cerrado hereditario  $\mathcal{G}$  sobre  $2^{\mathbb{N}}$ , sea  $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$  el *c.p.o.* numerable construido en la Proposición 4.1.7, asociado a la base generada por la subbase  $\{\mathcal{B}_n\}$ . Donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{B}_n = \{H \in \mathcal{G}^{max} : n \notin H\}.$$

Para el cual (por el Teorema 4.3.3) existe un homeomorfismo. Sea

$$\psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^{max} \longrightarrow \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}}) \text{ dicho homeomorfismo.}$$

Definimos el funtor

$$\mathcal{E} : \mathbf{CHMax} \longrightarrow \mathbf{Espectro}, \quad \mathcal{E}(\mathcal{G}^{max}) := \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}}),$$

y para un morfismo continuo  $f : \mathcal{G}^{max} \rightarrow \mathcal{H}^{max}$  ponemos

$$\mathcal{E}(f) := \psi_{\mathcal{H}} \circ f \circ \psi_{\mathcal{G}}^{-1} : \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}}) \longrightarrow \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{H}}).$$

Entonces  $\mathcal{E}$  está bien definido y functorial por construcción.

**De Espectro a CHMax.** Dado un *c.p.o.* numerable  $\mathbb{P}$ , sea  $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$  el cerrado hereditario asociado en el Teorema 2.1.6, tomando como base a la generada por la subbase,  $\{p^+ : p \in \mathbb{P}\}$ . Donde, para cada  $p \in \mathbb{P}$ ,

$$p^+ = \{S \in \text{Sel}(\mathbb{P}) : p \in S\}.$$

Para el cual existe un homeomorfismo entre  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  y  $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{max}$ . Sea

$$\varphi_{\mathbb{P}} : \text{Sel}(\mathbb{P}) \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{max} \text{ dicho homeomorfismo.}$$

Definimos el funtor

$$\mathcal{R} : \mathbf{Espectro} \longrightarrow \mathbf{CHMax}, \quad \mathcal{R}(\mathrm{Sel}(\mathbb{P})) := \mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{max},$$

y para un morfismo continuo  $g : \mathrm{Sel}(\mathbb{P}) \rightarrow \mathrm{Sel}(\mathbb{Q})$  ponemos

$$\mathcal{R}(g) := \varphi_{\mathbb{Q}} \circ g \circ \varphi_{\mathbb{P}}^{-1} : \mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{max} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{max}.$$

De nuevo,  $\mathcal{R}$  está bien definido y funtorial.

Ahora, para cada objeto  $\mathcal{G}^{max}$  de  $\mathbf{CHMax}$ , la flecha

$$\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^{max} \xrightarrow{\psi_{\mathcal{G}}} \mathrm{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}} \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}^{max}$$

es un homeomorfismo. En efecto, las construcciones  $\mathcal{G} \mapsto \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$  y  $\mathbb{P}_{\mathcal{G}} \mapsto \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}$  están diseñadas de modo que  $\mathcal{G}_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}^{max}$  es homeomorfo a  $\mathcal{G}^{max}$ ; así,  $(\eta_{\mathcal{G}})_{\mathcal{G}}$  define una isomorfía natural

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{CHMax}} \Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{E}.$$

$$\eta_{\mathcal{G}} := \varphi_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}} \circ \psi_{\mathcal{G}}.$$

Para verificar la naturalidad, sea  $f : \mathcal{G}^{max} \rightarrow \mathcal{H}^{max}$  un morfismo en  $\mathbf{CHMax}$ . Entonces, por definición de los funtores,

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{E})(f) = \varphi_{\mathbb{P}_{\mathcal{H}}} \circ \psi_{\mathcal{H}} \circ f \circ \psi_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}.$$

De esto se obtiene que

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{E})(f) \circ \eta_{\mathcal{G}} = \varphi_{\mathbb{P}_{\mathcal{H}}} \circ \psi_{\mathcal{H}} \circ f = \eta_{\mathcal{H}} \circ f.$$

En forma de diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^{max} & \xrightarrow{f} & \mathcal{H}^{max} \\ \downarrow \eta_{\mathcal{G}} & & \downarrow \eta_{\mathcal{H}} \\ \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}^{max} & \xrightarrow{(\mathcal{R} \circ \mathcal{E})(f)} & \mathcal{H}_{\mathbb{P}_{\mathcal{H}}}^{max}. \end{array}$$

Esto prueba que  $\eta = (\eta_{\mathcal{G}})_{\mathcal{G}}$  es una isomorfía natural.

Análogamente, para cada  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  en **Espectro**, la flecha

$$\varepsilon_{\mathbb{P}} : \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}) \xrightarrow{\psi_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}^{-1}} \mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{\max} \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{P}}^{-1}} \text{Sel}(\mathbb{P})$$

es un homeomorfismo y las mismas observaciones garantizan que  $(\varepsilon_{\mathbb{P}})_{\mathbb{P}}$  proporciona una isomorfía natural

$$\varepsilon : \mathcal{E} \circ \mathcal{R} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Espectro}}.$$

$$\varepsilon_{\mathbb{P}} := \psi_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbb{P}}^{-1}.$$

En efecto, para verificar la naturalidad, sea  $f : \text{Sel}(\mathbb{P}) \rightarrow \text{Sel}(\mathbb{Q})$  un morfismo en **Espectro**. Entonces, por definición de los funtores,

$$(\mathcal{E} \circ \mathcal{R})(f) = \psi_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}} \circ \varphi_{\mathbb{Q}} \circ f \circ \varphi_{\mathbb{P}}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}^{-1}.$$

De aquí se obtiene

$$\varepsilon_{\mathbb{Q}} \circ (\mathcal{E} \circ \mathcal{R})(f) = f \circ \varphi_{\mathbb{P}}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}^{-1} = f \circ \varepsilon_{\mathbb{P}}.$$

En forma de diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{\mathbb{P}}}) & \xrightarrow{(\mathcal{E} \circ \mathcal{R})(f)} & \text{Sel}(\mathbb{P}_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}}) \\ \downarrow \varepsilon_{\mathbb{P}} & & \varepsilon_{\mathbb{Q}} \downarrow \\ \text{Sel}(\mathbb{P}) & \xrightarrow{f} & \text{Sel}(\mathbb{Q}). \end{array}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{R}$  establecen una equivalencia de categorías entre

$$\mathbf{CHMax} \simeq \mathbf{Espectro}.$$

□

**Observación 4.5.12.** *En la Proposición 4.1.7, el espacio espectro obtenido depende de la enumeración de las cubiertas minimales asociadas a la base numerable del espacio. De manera análoga, en el Teorema 2.1.6, el espacio  $\mathcal{G}^{\max}$  construido depende también de la enumeración, en este caso de la base numerable. Sin embargo, distintas enumeraciones conducen a objetos homeomorfos (isomorfos en este aspecto categórico), lo que garantiza que las construcciones son únicas hasta isomorfismo natural en las categorías **CHMax** y **Espectro**.*

En resumen, las categorías **CHMax** y **Espectro** son dos subcategorías de **Top** equivalentes.

Además, si definimos

$$\text{CTS}^{\text{catg}} = \{X \in \mathbf{Top} : X \text{ es } \text{CTS}\},$$

entonces **CHMax** y **Espectro** son también subcategorías de  $\text{CTS}^{\text{catg}}$ , y las tres categorías resultan equivalentes entre sí.

**Pregunta 4.5.13.** *En el Teorema 4.5.11 se mostró que **CHMax** y **Espectro** son categorías equivalentes. ¿Son ellas isomorfas?*

#### 4.6. MÁS SOBRE *c.p.o.*

En esta sección se estudian propiedades adicionales que pueden asociarse a un *c.p.o.*, las cuales fueron presentadas por Bartoš, Bice y Vignati en <sup>15</sup>. Asimismo, se presentan mejoras de los teoremas previamente expuestos en relación con las bases de *c.p.o.*

**Definición 4.6.1.** *Un átomo de un un *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  es un elemento  $p \in \mathbb{P}$  tal que no existe  $q$  con  $q < p$ . Asimismo, el *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  se dice:*

1. **Predeterminado**, si para todo  $p \in \mathbb{P}$ ,

$$p^> \neq \emptyset \implies \exists q < p (q^< \subseteq p^{\leq}).$$

2. **Noetheriano**, si todo subconjunto de  $\mathbb{P}$  tiene un elemento maximal o, equivalentemente, si  $\mathbb{P}$  no tiene secuencias estrictamente crecientes.
3. **Ramificado**, si ningún conjunto  $q^>$  tiene una única rama, es decir,

$$p < q \implies \exists r < q (p \not\leq r \text{ y } r \not\leq p).$$

*En particular, esto implica que ningún  $p \in \mathbb{P}$  tiene un único predecesor.*

**Proposición 4.6.2** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Cualquier base de abiertos de un espacio  $T_1$  es ramificada.*

---

<sup>15</sup> Bartoš, A., Bice, T. y Vignati, A. “Constructing compacta from posets”. En: *Publ. Mat.* 69.1 (2025), págs. 217-265. DOI: 10.5565/PUBLMAT6912510.

Los *c.p.o.* Noetherianos vienen definidos con una función **rango**  $r(p)$  definida como el ordinal dado por

$$r(p) = \sup_{q \succ p} (r(q) + 1).$$

De esta manera, elementos maximales de  $\mathbb{P}$  tiene rango 0, y elementos maximales del conjunto restante tienen rango 1, etcétera. Para cualquier ordinal  $\alpha$ , denotamos el  $\alpha$ -ésimo cono de  $\mathbb{P}$  por

$$\mathbb{P}^\alpha = \{p \in \mathbb{P} : r(p) \leq \alpha\}.$$

Los átomos del  $\alpha$ -ésimo cono forman el  $\alpha$ -ésimo nivel de  $\mathbb{P}$  denotado por

$$\mathbb{P}_\alpha = \{p \in \mathbb{P}^\alpha : p^\succ \cap \mathbb{P}^\alpha = \emptyset\}.$$

Notemos que  $r^{-1}\{\alpha\} \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ , es decir, el  $\alpha$ -ésimo nivel contiene todos los elementos de rango  $\alpha$ .

**Definición 4.6.3.** *Decimos que un *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  Noetheriano es un  $\omega$ -*c.p.o.* si cada filtro principal  $p^\leq$  es finito y el número de filtros principales de tamaño  $n$  es también finito, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Proposición 4.6.4** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Un *c.p.o.* Noetheriano  $\mathbb{P}$  es  $\omega$ -*c.p.o.* si, y solo si, el rango de cada elemento de  $\mathbb{P}$  y el tamaño de  $\mathbb{P}^n$  es finito para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Proposición 4.6.5** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $\mathbb{P}$  es un  $\omega$ -*c.p.o.*, entonces los niveles  $(\mathbb{P}_n)$  son coiniciales en  $B\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Primero notemos que cada  $\mathbb{P}_n$  es una banda. En efecto, sea  $p \in \mathbb{P}$ . Si  $r(p) \leq n$  entonces  $p$  debe estar sobre algún elemento minimal de  $\mathbb{P}^n$ , es decir, sobre algún elemento de  $\mathbb{P}_n$ . Por otro lado, si  $r(p) \geq n$ , entonces  $p$  está por debajo de algún elemento de rango  $n$ , el cual debe estar en  $\mathbb{P}_n$ .

Por otro lado, sea  $B \subseteq \mathbb{P}$  una banda. Si  $n = \max_{b \in B} r(b)$ , entonces  $B \subseteq \mathbb{P}^n$ . Se sigue que ningún átomo de  $\mathbb{P}^n$  puede estar estrictamente por encima de algún elemento de  $B$ . Luego cada elemento de  $\mathbb{P}_n$  debe estar debajo de algún elemento de  $B$ . Como  $B$  es una banda, se tiene que  $\mathbb{P}_n \leq B$ .  $\square$

**Definición 4.6.6.** *Una base de bandas/capas que es también un  $\omega$ -*c.p.o.* será llamada una  $\omega$ -base de bandas/capas.*

**Proposición 4.6.7** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Los niveles de un *c.p.o.* Noetheriano  $\mathbb{P}$  en el que cada elemento tiene rango finito son las únicas anticadenas  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A\mathbb{P}$  que*

cubren  $\mathbb{P}$  y tales que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+1} \setminus A_n$  refina  $A_n \setminus A_{n-1}$  (tomando  $A_{-1} = \emptyset$ ) y  $A_n$  corefina  $A_{n+1}$ .

*Demostración.* Si  $A_{n+1} \setminus A_n$  refina a  $A_n \setminus A_{n-1}$ , entonces en particular  $A_{n+1}$  refina a  $A_n$ . Además que  $A_m$  refina a  $A_n$  para todo  $m \geq n$ .

**Afirmación 1.**  $A_n \subseteq \mathbb{P}^n$ .

Esto se sigue por inducción a partir del siguiente hecho:

$$A_m \ni p < q \in A_n \implies m > n. \quad (4.2)$$

Para ver esto, notemos que si  $A_m \ni p < q \in A_n$  y  $m \leq n$ , entonces  $A_n$  refina a  $A_m$ . Por lo que existe  $p' \in A_m$  tal que  $p < q \leq p'$ , lo cual contradice que  $A_m$  es una anticadena. Luego, debe cumplirse que  $m > n$ .

Ahora, de las hipótesis es fácil ver que

$$A_0 \subseteq \mathbb{P}^0.$$

Supongamos que  $A_n \subseteq \mathbb{P}^n$  y consideremos  $p \in A_{n+1}$ . Por definición, se tiene

$$r(p) = \sup_{q>p} (r(q) + 1).$$

Por la afirmación anterior, si  $p < q$  y  $q \in A_m$ , entonces  $n + 1 > m$ , lo que implica que  $r(q) \leq n$ . Por lo tanto,

$$r(p) = \sup_{q>p} (r(q) + 1) \leq n + 1.$$

Es decir,

$$p \in \mathbb{P}^{n+1}.$$

Así, por inducción, se concluye que  $A_n \subseteq \mathbb{P}^n$  para todo  $n$ .

**Afirmación 2.**  $A_n \setminus A_{n-1} \subseteq r^{-1}(n)$ .

En efecto, se tiene que

$$A_0 \setminus A_{-1} = A_0 \subseteq \mathbb{P}_0 = r^{-1}(0).$$

Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que

$$A_n \setminus A_{n-1} \subseteq r^{-1}(n).$$

Veamos que se cumple

$$A_{n+1} \setminus A_n \subseteq r^{-1}(n+1).$$

Sea  $p \in A_{n+1} \setminus A_n$ . Como  $A_{n+1} \setminus A_n$  refina a  $A_n \setminus A_{n-1}$ , existe  $q \in A_n \setminus A_{n-1}$  tal que  $p < q$ . Por la hipótesis de inducción,  $r(q) = n$ , y como  $p < q$ , se tiene que

$$n+1 \geq r(p) > r(q) = n.$$

De donde se concluye que  $r(p) = n+1$ . Por lo tanto,

$$A_{n+1} \setminus A_n \subseteq r^{-1}(n+1),$$

como se quería.

Ahora, dado que la sucesión  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cubre a  $\mathbb{P}$ , es decir,

$$\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

entonces la sucesión  $(A_n \setminus A_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  también cubre a  $\mathbb{P}$ . Como se demostró previamente que

$$A_n \setminus A_{n-1} \subseteq r^{-1}(n),$$

y dado que estas diferencias cubren todo  $\mathbb{P}$ , se concluye que en realidad

$$A_n \setminus A_{n-1} = r^{-1}(n).$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{k=0}^n A_k,$$

y junto con 4.2 se sigue que

$$A_n \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Si además  $A_n$  corefina a  $A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces, nuevamente por inducción, se sigue que  $A_n = \mathbb{P}^n$ .

En efecto, ya sabemos que  $\mathbb{P}^0 = A_0$ . Y si se tiene que

$$\mathbb{P}^n \geq A_n \geq A_{n+1},$$

entonces  $A_{n+1}$  debe contener todos los átomos de

$$\mathbb{P}^n \cup A_{n+1} = \mathbb{P}^{n+1},$$

es decir,

$$\mathbb{P}_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq \mathbb{P}_{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$A_{n+1} = \mathbb{P}_{n+1}.$$

□

**Corolario 4.6.8** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $\mathbb{P}$  es un c.p.o. cubierto por anticadenas finitas  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A\mathbb{P}$  tales que  $A_{n+1}$  refina  $A_n$ ,  $A_n$  corefina  $A_{n+1}$  y  $A_n \cap A_{n+1}$  contiene sólo átomos de  $\mathbb{P}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathbb{P}$  es un  $\omega$ -c.p.o. con niveles  $\mathbb{P}_n = A_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Proposición 4.6.9** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $\mathbb{P}$  es un  $\omega$ -c.p.o., entonces son equivalentes.*

1.  $\mathbb{P}$  es predeterminado.
2. Cada elemento no minimal  $p \in \mathbb{P}$  es una banda de  $q^<$ , para algún  $q \in \mathbb{P}$ .
3. Para cada  $p \in \mathbb{P}$  y  $m \geq r(p)$ , tenemos un  $q \in \mathbb{P}_m$  con  $q^{\leq} = [q, p] \cup p^<$ .
4. Cada capa finita es una banda, es decir,  $B\mathbb{P} = C\mathbb{P} \cap Fin(\mathbb{P})$ .

**Corolario 4.6.10** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Si  $X$  es un espacio compacto  $T_1$  y  $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$  entonces*

$$\mathbb{P} \text{ es una } \omega\text{-base de bandas} \iff \mathbb{P} \text{ is es una } \omega\text{-base de capas predeterminada.}$$

*Demostración.* Si  $\mathbb{P}$  es una  $\omega$ -base de capas de  $X$ , entonces por (4) de la proposición anterior,  $\mathbb{P}$  es predeterminada si, y solo si, cada cubierta finita es una banda, es decir, si solo si  $\mathbb{P}$  es realmente una base de bandas. □

**Lema 4.6.11** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Para cualquier base  $\mathcal{B}$  de un espacio  $X$  que es compacto  $T_1$ , y cualquier familia finita de abiertos  $\mathcal{C}$ , existe una cubierta minimal  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$  de  $X$  y  $(x_D)_{D \in \mathcal{D}} \subseteq X$  tal que, para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,*

$$D = \bigcap \{E \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} : x_D \in E\}$$

y

$$D \neq \{x_D\} \implies D \notin \mathcal{C}.$$

**Teorema 4.6.12** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). *Cualquier base de un espacio compacto  $T_1$  contiene una  $\omega$ -base de bandas.*

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de todas las cubiertas finitas y minimales de un espacio  $X$  compacto  $T_1$  dadas por una base numerable  $\mathcal{B}$ . Recursivamente definiremos cubiertas finitas minimales  $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con la propiedad de que  $\mathcal{B}_k$  refina a  $\mathcal{C}_k$  y a  $\mathcal{B}_j$  para todo  $j < k$ .

Sea  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_1$ . Para  $k \geq 1$  sea

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{C}_k \cup \bigcup_{j < k} \mathcal{B}_j.$$

Por el Lema 4.6.11 existe una cubierta  $\mathcal{B}_k$ , tal que  $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{D}_k$  solo contiene singletones, y también una sucesión  $(x_O)_{O \in \mathcal{B}_k}$  tal que

$$O = \bigcap \{E \in \mathcal{B}_k \cup \mathcal{D}_k : x_O \in E\},$$

para cada  $O \in \mathcal{B}_k$ . En otras palabras,  $x_O \in O \subseteq E$  para cualquier  $E \in \mathcal{B}_k \cup \mathcal{D}_k$  con  $x_O \in E$ , es decir  $\mathcal{B}_k$  refina a  $\mathcal{C}_k$  y  $\mathcal{B}_j$  para todo  $j < k$  (esto por el hecho de  $\mathcal{C}_k$  y  $\mathcal{B}_j$  con  $j < k$  son cubiertas).

Como en la demostración de la Proposición 4.1.7,  $\mathbb{P} = \bigcup \mathcal{B}_k$  es una base de capas y  $\mathcal{B}_k$  corefina a  $\mathcal{B}_{k+1}$ . Por construcción  $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{B}_{k+1}$  solo contiene singletones, los cuales son átomos en  $\mathbb{P}$ . De esto  $\mathbb{P}$  es un  $\omega$ -c.p.o. con niveles  $\mathbb{P}_n = \mathcal{B}_n$  por el Corolario 4.6.8.

También para cada  $B \in \mathcal{B}_k$  y  $x_B \in B \setminus \bigcup \mathcal{B}_k \setminus \{B\}$ , existe un  $C \in \mathcal{B}_{k+1}$  con  $x_B \in C$ . Ahora si  $C < A$ , entonces  $x_B \in A \in \mathcal{B}_j$ , para algún  $j \leq k$ , y por tanto  $B \leq A$ . Esto muestra que  $C^< \subseteq B^{\leq}$ , y más aún  $C^< = B^{\leq}$  siempre que  $B$  no sea un átomo. Esto implica que  $\mathbb{P}$  es también predeterminado y por tanto  $\mathbb{P}$  es una  $\omega$ -base de bandas por el Corolario 4.6.10.  $\square$

**Definición 4.6.13.** *Decimos que un  $\omega$ -c.p.o.  $\mathbb{P}$  es **graduado** si la función rango mapea intervalos en intervalos, es decir, para cada  $p, q \in \mathbb{P}$ ,*

$$p < q \implies r[(p, q)] = (r(q), r(p)).$$

*En particular, esto significa que la función de rango convierte a los predecesores en sucesores, es decir,*

$$p \leq q \implies r(p) = r(q) + 1.$$

De hecho, si cada elemento de  $\mathbb{P}$  tiene rango finito, entonces  $\mathbb{P}$  es graduado precisamente cuando ocurre esto.

**Definición 4.6.14.** Decimos que  $B$  **consolida** a  $A$  si  $A$  refina a  $B$  y cada  $b \in B$  puede escribirse como la unión de los elementos de  $A$  contenidos en  $b$ . Es decir,

$$B \text{ consolida a } A \iff b = \bigcup \{a \in A : a \subseteq b\} = \bigcup (b^\supset \cap A) \quad \text{para todo } b \in B.$$

**Lema 4.6.15** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Sea  $(\mathcal{C}_n)$  una secuencia de cubiertas minimales de un conjunto  $X$  tal que cada  $\mathcal{C}_n$  consolida a  $\mathcal{C}_{n+1}$  y  $\mathcal{C}_{n+1} \cap \mathcal{C}_n$  solo contiene singletons  $\{\{x\} : x \in X\}$ . Más aún,  $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{C}_n$ , considerado como c.p.o. con  $\leq = \subseteq$ . Entonces

1.  $\mathbb{P}$  es un c.p.o. predeterminado y graduado con  $\mathbb{P}_n = \mathcal{C}_n$ , y
2. si  $\mathbb{P}$  es una base para una topología compacta, entonces  $\mathbb{P}$  es una  $\omega$ -base de capas.

**Teorema 4.6.16** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Cada CTS tiene una  $\omega$ -base de bandas graduadas y ramificada.

**Teorema 4.6.17** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Cada espacio topológico CTS es homeomorfo al espectro de algún  $\omega$ -c.p.o. predeterminado, graduado y ramificado.

*Demostración.* Por el Teorema 4.6.16, cada CTS posee una  $\omega$ -base de bandas graduadas predeterminada y por 4.6.2 es ramificada. Además, su espectro  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  es homeomorfo a  $X$ , por la Proposición 4.3.3.  $\square$

El siguiente teorema es una versión mejorada del Teorema 4.3.2, extendido ahora a  $\omega$ -c.p.o.

**Teorema 4.6.18** (Bartoš, Bice & Vignati (2025)). Sea  $(\mathbb{P}, \leq)$  un  $\omega$ -c.p.o. Entonces,  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  es CTS, además cada  $S \in \text{Sel}(\mathbb{P})$  es un filtro y  $\{p^+ : p \in \mathbb{P}\}$  es una base.

*Demostración.* Veamos primero que cada  $S \in \text{Sel}(\mathbb{P})$  es un filtro. Sean  $p, q \in \text{Sel}(\mathbb{P})$ , entonces existen capas  $C$  y  $D$ , tales que  $S \cap C = \{p\}$  y  $S \cap D = \{q\}$ . Por la Proposición 4.6.5, existen niveles  $\mathbb{P}_n$  y  $\mathbb{P}_m$ , que refinan a  $C$  y  $D$ , respectivamente. Como estos niveles están ordenados por refinamiento, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}_m$ . Así,  $\mathbb{P}_n$  refina tanto a  $C$  como a  $D$ . Puesto que  $S$  es selector, podemos tomar  $s \in S \cap \mathbb{P}_n$ . Como  $\mathbb{P}_n$  refina a  $C$  y  $D$ , existen  $c \in C$  y  $d \in D$ , tales que  $s \leq c$  y  $s \leq d$ . Ya que  $S$  es un conjunto ascendente (ver 4.2.4),  $c, d \in S$ , pero por lo ya mencionado, se debe tener que,  $c = p$  y  $d = q$ . Lo anterior junto a la Proposición 4.2.4, muestran que  $S$  es un filtro.

Veamos ahora que  $\{p^+ : p \in \mathbb{P}\}$  es en realidad una base para  $\text{Sel}(\mathbb{P})$ . Sean  $p, q \in \mathbb{P}$  tales que existe  $S \in p^+ \cap q^+$ . Dado que  $S$  es un filtro, existe  $r \in S$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . En consecuencia,

$$S \in r^+ \subseteq p^+ \cap q^+,$$

lo que muestra que  $\{p^+ : p \in \mathbb{P}\}$  es una base numerable. □

#### 4.7. SOBRE $\omega$ -BASES DE BANDAS DEL INTERVALO

Esta corta sección estudia la preservación de una  $\omega$ -base de bandas bajo homeomorfismos del intervalo.

**Teorema 4.7.1.** *Sean  $X = [0, 1]$  y  $\mathbb{P}$  una  $\omega$ -base de bandas de  $X$ . Entonces*

$$\text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1]) = \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(\mathbb{P}) = \mathbb{P}\}.$$

*es semigrupo polaco.*

*Demostración.* Sea  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1])$  y consideremos  $A_n = f(\mathbb{P}_n)$ . Entonces  $\mathbb{P} = \bigcup A_n$ .

**Afirmación 1.**  $A_{n+1}$  refina a  $A_n$ .

En efecto, sea  $f(U) \in A_{n+1}$ . Como  $\mathbb{P}_{n+1}$  refina a  $\mathbb{P}_n$ , existe  $V \in \mathbb{P}_n$  tal que  $U \subseteq V$ . Luego,  $f(U) \subseteq f(V)$  y  $f(V) \in A_n$ . Esto muestra que  $A_{n+1}$  refina a  $A_n$ .

**Afirmación 2.**  $A_n$  corefina a  $A_{n+1}$ .

En efecto, sea  $f(V) \in A_n$ . Como  $\mathbb{P}_n$  corefina a  $\mathbb{P}_{n+1}$ , existe  $U \in \mathbb{P}_{n+1}$  tal que  $U \subseteq V$ . Luego,  $f(U) \subseteq f(V)$  y  $f(U) \in A_{n+1}$ . Esto muestra nuevamente que  $A_{n+1}$  refina a  $A_n$ .

**Afirmación 3.**  $A_n \cap A_{n+1}$  solo contiene átomos.

De lo anterior y por el Corolario 4.6.8, se sigue que  $A_n = \mathbb{P}_n$ . Es decir,  $f$  preserva los niveles. Entonces

$$\text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(\mathbb{P}_n) = \mathbb{P}_n\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $k_n = |\mathbb{P}_n|$  y  $\mathbb{P}_n = \{p_1, \dots, p_{k_n}\}$ .

Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i, j \leq k_n} \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(p_i) = p_j\}.$$

Veamos que para  $U$  y  $V$  abiertos  $\{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(U) = V\}$  es  $G_\delta$ .

En efecto, sea  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  y  $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$  donde  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y  $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$  son dos secuencias de compactos encajados. Sea también  $\lambda : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$  la función inversión, es decir,  $\lambda(f) = f^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(U) = V\} &= \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(U) \subseteq V\} \cap \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f^{-1}(V) \subseteq U\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(K_i) \subseteq V\} \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f^{-1}(M_i) \subseteq U\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \langle K_i, V \rangle \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \lambda^{-1}(\langle M_i, U \rangle). \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que  $\{f \in \mathcal{H}([0, 1]) : f(U) = V\}$  es  $G_\delta$ . Por lo tanto,  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1])$  es también  $G_\delta$ . Finalmente,  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}([0, 1])$  es un semigrupo polaco.  $\square$

**Ejemplo 4.7.2.** Dado el c.p.o.  $\mathbb{P}$  como en el Ejemplo 4.3.5. Entonces los únicos homeomorfismos tales que  $f(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ , son  $f(x) = x$  y  $f(x) = 1 - x$ .

En efecto, supongamos que  $f(x) \neq x$ . Usando que  $f(\mathbb{P}_n) = \mathbb{P}_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} f\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right)\right) &= \left(\frac{2^n - 1}{2^n}, 1\right], \\ f\left(\left(\frac{2^n - 1}{2^n}, 1\right]\right) &= \left[0, \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Además, por la conexidad, se tiene que:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) &= \left(\frac{2^n - (k+1)}{2^n}, \frac{2^n - (k-1)}{2^n}\right), \quad \text{para } 2 \leq k \leq 2^{n-1} - 1, \\ f\left(\left(\frac{2^n - (k+1)}{2^n}, \frac{2^n - (k-1)}{2^n}\right)\right) &= \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \quad \text{para } 2^{n-1} + 1 \leq k \leq 2^n - 2, \\ f\left(\left(\frac{2^{n-1} - 1}{2^n}, \frac{2^{n-1} + 1}{2^n}\right)\right) &= \left(\frac{2^{n-1} - 1}{2^n}, \frac{2^{n-1} + 1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Con lo anterior, y utilizando la continuidad de  $f$ , se concluye que para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) = 1 - \frac{k}{2^n}, \quad \text{para todo } k = 0, 1, \dots, 2^n.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$f(x) = 1 - x.$$

## 5. CTS Y LA PROPIEDAD FUERTE DE CHOQUET

En este capítulo estudiaremos a los *CTS* que tienen la propiedad fuerte de Choquet. El estudio de esta propiedad surge de relacionar el trabajo de Morayne y Rałowski <sup>16</sup>, quienes caracterizaron los espacios *CTS* que son Baire y el trabajo de Mummert y Stephan <sup>17</sup> sobre espacios *c.p.o.* y la propiedad fuerte de Choquet.

Inicialmente, se pensaba que todo espacio *CTS* Baire debía satisfacer también la propiedad fuerte de Choquet, como lo sugerían algunos Ejemplos (véanse 5.3.3 y 5.3.4). Este problema se abordó primeramente a través del Teorema 5.3.5, el cual establece que un espacio *CTS* es Baire si, y solo si, es Choquet. No obstante, los Ejemplos 5.3.6 y 5.3.7 muestran que en el contexto de los espacios *CTS*, la propiedad fuerte de Choquet y ser Baire no son equivalentes.

### 5.1. JUEGOS DE CHOQUET

Sea  $X$  un espacio topológico no vacío. El **juego de Choquet** en  $X$ , denotado por  $G(X)$ , se define de la siguiente manera:

El Jugador I elige  $U_1$ , un subconjunto abierto no vacío de  $X$ ; el Jugador II elige  $V_1$ , un subconjunto abierto no vacío de  $U_1$ ; después, el Jugador I elige  $U_2$ , un subconjunto abierto no vacío de  $V_1$ ; y así sucesivamente. Los jugadores continúan de esta forma, construyendo una sucesión:

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$$

Si se cumple que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \emptyset,$$

entonces el Jugador I gana; en caso contrario, gana el Jugador II.

---

<sup>16</sup> Morayne, M. y Rałowski, R. “The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in T1 compact spaces”. En: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 183 (2023). DOI: 10.1016/j.bulsci.2023.103231.

<sup>17</sup> Mummert, C. y Stephan, F. “Topological aspects of poset spaces”. En: *Michigan Mathematical Journal* 59.1 (2010), págs. 3-24. DOI: 10.1307/mmj/1272376025.

Sea  $T$  el árbol de todas las posiciones legales finitas

$$(U_1, V_1, \dots, U_n, V_n),$$

donde cada  $U_i, V_i$  son abiertos no vacíos y

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq V_n.$$

Una estrategia para I es un subárbol  $\Sigma \subseteq T$  tal que:

1.  $\Sigma$  no es vacío.
2. Si  $(U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, U_n) \in \Sigma$ , entonces para todo abierto no vacío  $V_n \subseteq U_n$ , se tiene  $(U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, U_n, V_n) \in \Sigma$ .
3. Para cada  $(U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in \Sigma$ , existe un **único** abierto no vacío  $U_n \subseteq V_{n-1}$  tal que  $(U_1, V_1, \dots, V_{n-1}, U_n) \in \Sigma$ .

Una *estrategia ganadora* para el jugador II es una función que, dado un estado del juego justo después de que el jugador I haya realizado su movimiento, retorna un **único** conjunto abierto que el jugador II debe jugar, de tal manera que si el jugador II sigue la estrategia, ganará el juego sin importar los movimientos del jugador I. (Nótese que es posible que ninguno de los jugadores tenga una estrategia ganadora).

Un resultado clásico, debido a John C. Oxtoby, establece que un espacio topológico no vacío  $X$  es de Baire si, y solo si, el Jugador I no posee una estrategia ganadora en el juego de Choquet fuerte (véase Teorema 8.11 en <sup>18</sup>). Un espacio topológico no vacío  $X$  en el cual el Jugador II tiene una estrategia ganadora se denomina *espacio de Choquet*.

En consecuencia, todo espacio de Choquet es un espacio de Baire. No obstante, la recíproca no se cumple en general: existen espacios de Baire que no son de Choquet (véase Corolario 4.6 en <sup>19</sup>).

**5.1.1. Juego fuerte de Choquet** Sea  $X$  un espacio topológico arbitrario. El **juego fuerte de Choquet**, denotado por  $G^s(X)$ , es definido de la siguiente manera.

---

<sup>18</sup> Kechris, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*. New York: Springer, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4

<sup>19</sup> Osipov, A. V. “The 1-property of  $X$  is equivalent to the Choquet property of  $B1(X)$ ”. En: *Topology and Its Applications* 370 (2025), pág. 109395. DOI: 10.1016/j.topol.2025.109395

Las etapas del juego se numeran  $1, 2, \dots$ , y ambos jugadores realizan un movimiento en cada etapa. En la etapa  $i$ :

- El jugador I juega un conjunto abierto  $U_i$  y un punto  $x_i$  tal que  $x_i \in U_i$ , y si  $i > 1$ , se requiere además que  $U_i \subseteq V_{i-1}$ .
- Luego, el jugador II responde jugando un conjunto abierto  $V_i$  tal que  $x_i \in V_i$  y  $V_i \subseteq U_i$ .

Al final del juego:

- El jugador I gana si  $\bigcap_i U_i$  es vacío (o, equivalentemente, si  $\bigcap_i V_i$  es vacío).
- El jugador II gana si  $\bigcap_i U_i$  es no vacío.

Una *posición* en el juego es una secuencia finita (posiblemente vacía) de la forma

$$\langle \langle U_1, x_1 \rangle, V_1, \langle U_2, x_2 \rangle, V_2, \dots \rangle,$$

la cual es un segmento inicial de una partida infinita del juego que respeta las reglas descritas.

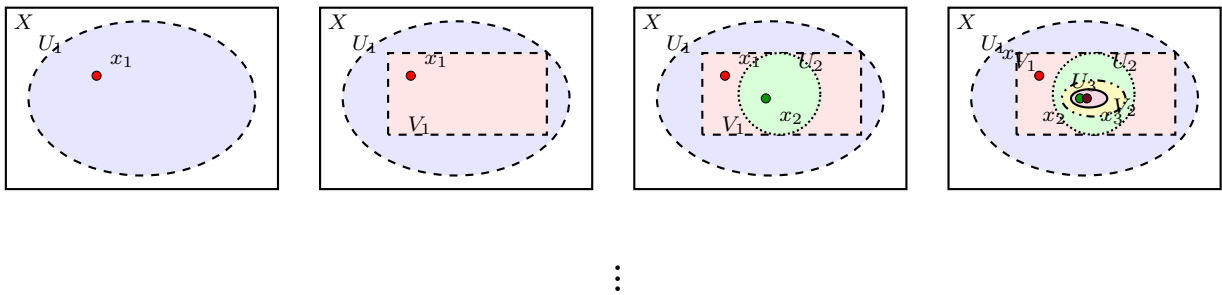


Figura 5.1: Juego fuerte de Choquet.

Decimos que un espacio  $X$  tiene la *propiedad fuerte de Choquet* si el jugador II posee una estrategia ganadora para el juego de Choquet fuerte en  $X$ .

## 5.2. ESPACIOS *c.p.o.*

Un **filtro** es un subconjunto  $F$  de un *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada  $p, q \in F$ , existe un  $r \in F$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .
2. Para cada  $p \in F$  y  $q \in \mathbb{P}$ , si  $p \leq q$ , entonces  $q \in F$ .

3.  $F \neq \emptyset$ .

**Proposición 5.2.1.** *Toda cadena no vacía de un c.p.o. puede extenderse a un filtro.*

*Demostración.* Dada una cadena  $C$  no vacía de un c.p.o.  $\mathbb{Q}$ , definamos su **cierre superior** como;

$$F = \{y \in \mathbb{Q} : (\exists c \in C)(c \leq y)\}.$$

Es fácil ver que  $F$  es un filtro que extiende a  $C$ . □

Decimos que un filtro  $F$  es **no acotado** si:

$$\neg[(\exists r \in \mathbb{P}) (\forall q \in F) (r < q)].$$

Además,  $F$  es **maximal** (o más conocido por **ultrafiltro**) si no hay ningún filtro estrictamente mayor que contenga a  $F$ .

Todo ultrafiltro es no acotado, pero en general no todo filtro no acotado es ultrafiltro (esta afirmación es válida solo cuando el c.p.o.  $\mathbb{P}$  no tiene un elemento mínimo). Para cualquier conjunto  $\mathbb{P}$ ,  $\text{UF}(\mathbb{P})$  denota el conjunto de filtros no acotados en  $\mathbb{P}$  y  $\text{MF}(\mathbb{P})$  el conjunto de ultrafiltros de  $\mathbb{P}$ . Definimos en  $\text{UF}(\mathbb{P})$  una base para una topología, dada por

$$\{\mathcal{N}_p : p \in \mathbb{P}\},$$

donde

$$\mathcal{N}_p = \{F \in \text{UF}(\mathbb{P}) : p \in F\}.$$

Asimismo, al espacio  $\text{MF}(\mathbb{P})$  se le dota con la topología que hereda como subconjunto de  $\text{UF}(\mathbb{P})$ . Un espacio UF es un espacio de la forma  $\text{UF}(\mathbb{P})$ , y un espacio MF es un espacio de la forma  $\text{MF}(\mathbb{P})$ ; los espacios UF y los espacios MF se denominan colectivamente espacios c.p.o. Un espacio c.p.o. es de **base numerable** si se forma a partir de un c.p.o. numerable.

**Proposición 5.2.2** (Mummert & Stephan (2010)). *Sea  $\mathbb{P}$  un c.p.o. Entonces*

1.  $\text{UF}(\mathbb{P})$  es  $T_0$ .
2.  $\text{MF}(\mathbb{P})$  es  $T_1$ .
3. Si  $\text{UF}(\mathbb{P})$  es  $T_1$ , entonces  $\text{UF}(\mathbb{P}) = \text{MF}(\mathbb{P})$ .

*Demostración.* La parte 1. se sigue de que dos filtros distintos son diferentes como subconjuntos de  $\mathbb{P}$ . La parte 2. se deduce del hecho de que ningún ultrafiltro puede contener propiamente a otro ultrafiltro. Para probar 3. supongamos que  $\text{UF}(\mathbb{P})$  es  $T_1$  y sea  $F$  un filtro no acotado en  $\mathbb{P}$ . Sea  $G$  un filtro en  $\mathbb{P}$  tal que  $F \subseteq G$ . Claramente  $G$  es no acotado. Si  $F \neq G$ , por hipótesis debe existir un  $p \in \mathbb{P}$  tal que  $F \in \mathcal{N}_p$  y  $G \notin \mathcal{N}_p$ , es decir,  $p \in F \setminus G$ , lo cual es contradictorio. Por lo tanto  $F = G$ , lo que muestra que  $F$  es ultrafiltro.  $\square$

**Teorema 5.2.3** (Mummert & Stephan (2010)). *Cada espacio c.p.o. es Baire.*

*Demostración.* Dado  $\mathbb{P}$  un c.p.o. Denotaremos  $\text{MF}(\mathbb{P})$  o  $\text{UF}(\mathbb{P})$  por  $X$ . Supongamos que  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de abiertos densos de  $X$  y sea  $V$  un abierto no vacío de  $X$  fijo. Construyamos una secuencias  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathbb{P}$ . Sea  $p_0$  tal que  $\mathcal{N}_{p_0} \subseteq V \cap U_0$ . Supongamos que  $p_i$  ya fue definido. Por la densidad de  $U_{i+1}$ , existe un filtro no acotado o un ultrafiltro en  $\mathcal{N}_{p_i} \cap U_{i+1}$ . Escojamos  $p_{i+1}$  tal que  $\mathcal{N}_{p_{i+1}} \subseteq \mathcal{N}_{p_i} \cap U_{i+1}$  y  $p_{i+1} \leq p_i$ . Entonces,  $F = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$  es un subconjunto linealmente ordenado de  $\mathbb{P}$ . Por tanto,  $F$  se puede extender a un elemento de  $X$ . Claramente este elemento está en  $V \cap \bigcap_i U_i$ .  $\square$

**Teorema 5.2.4** (Mummert & Stephan (2010)). *Cada espacio c.p.o. tiene la propiedad fuerte de Choquet.*

*Demostración.* Describimos la estrategia del jugador II. Al inicio del juego, el jugador I juega un abierto  $U_0$  y un punto  $x_0$ . Posteriormente, el jugador II toma una vecindad básica  $\mathcal{N}_{q_0}$  de  $x_0$  tal que  $\mathcal{N}_{q_0} \subseteq U_0$ . De esta manera el jugador II juega entonces  $\mathcal{N}_{q_0}$ .

Ahora, dada una vecindad  $\langle U_1, x_1 \rangle$  con  $U_1 \subseteq \mathcal{N}_{q_0}$ , el jugador II toma una vecindad  $\mathcal{N}_{q_1}$  de  $x_1$  tal que  $q_1 \leq q_0$  y  $\mathcal{N}_{q_1} \subseteq U_1$ . Luego, el jugador II juega  $\mathcal{N}_{q_1}$ .

En general, en el paso  $n$ , si el jugador I juega una vecindad  $\langle U_n, x_n \rangle$  con  $U_n \subseteq \mathcal{N}_{q_{n-1}}$ , el jugador II elige un  $q_n \leq q_{n-1}$  tal que  $x_n \in \mathcal{N}_{q_n} \subseteq U_n$ , y responde con  $\mathcal{N}_{q_n}$ .

Al final del juego, el jugador ha determinado una sucesión decreciente  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de elementos en  $\mathbb{P}$ . Posteriormente esta sucesión se extiende a un elemento de  $X$  que está en  $\bigcap \mathcal{N}_{q_i}$ , por lo cual el jugador II ha ganado.  $\square$

**Teorema 5.2.5** (Mummert & Stephan (2010)). *Supongamos que  $\mathbb{P}$  es un c.p.o. tal que  $\text{MF}(\mathbb{P})$  es segundo numerable. Entonces, existe un c.p.o. numerable  $\mathbb{T}$  subconjunto de  $\mathbb{P}$  tal que la aplicación  $F \rightarrow \mathbb{T} \cap F$  es un homeomorfismo de  $\text{MF}(\mathbb{P})$  a  $\text{MF}(\mathbb{T})$ .*

**Teorema 5.2.6** (Mummert & Stephan (2010)). *Un espacio topológico  $X$  es homeomorfo a un espacio MF de base numerable si, y solo si, es segundo numerable,  $T_1$  y tiene la propiedad fuerte de Choquet.*

*Demostración.* Dado que no utilizaremos los detalles de la demostración, nos limitamos a describir la construcción del *c.p.o.* Incluimos esta construcción por su interés; los detalles completos pueden consultarse en <sup>20</sup>.

Sea  $X$  un espacio  $T_1$  con una base numerable fija y una estrategia ganadora para el jugador II en el juego fuerte de Choquet. Nuestro primer paso es definir el *c.p.o.*  $\mathbb{P}$ . Llamaremos a los elementos de  $\mathbb{P}$  condiciones. Una condición es una lista finita de la forma

$$\langle U, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k \rangle$$

que satisface lo siguiente.

1. El conjunto  $U$  es un abierto básico de la base fijada. Para la condición  $c$ , denotaremos por  $S(c)$  al abierto básico  $U$  que aparece en  $c$ .
2. Cada  $\pi_i$  es una posición buena para el jugador II, en el juego fuerte de Choquet, donde cada  $\pi_i$  debe ser de la forma

$$\langle V_1, x_1; s_{II}(V_1, x_1); V_2, x_2; s_{II}(V_1, x_1; V_2, x_2); \dots; V_r, x_r; s_{II}(V_1, x_1; V_2, x_2; \dots; V_r, x_r) \rangle$$

Así, cada  $\pi_i$  termina con un conjunto abierto, que denotaremos por  $U(\pi_i)$ . Un juego  $\pi$  puede consistir en la secuencia vacía, en cuyo caso  $U(\pi) = X$ .

3. Si una posición  $\pi$  es un elemento de una condición, entonces también lo es cada segmento inicial de  $\pi$  que termina con una jugada del jugador II.
4.  $U \subseteq U(\pi_i)$  para cada  $i \leq k$ .

Definimos el orden  $<$  en  $\mathbb{P}$  como sigue. Sean  $c = \langle U, \pi_1, \dots, \pi_k \rangle$  y  $c' = \langle U', \pi'_1, \dots, \pi'_l \rangle$  son condiciones. Decimos que  $c' < c$  si, y solo si, lo siguiente se cumple

5. Para cada posición  $\pi_i$  en  $c$ , existe un punto  $x_n \in S(c)$  tal que la posición

$$\pi_i \widehat{\ } \langle U, x_n; s_{II}(\pi_i \widehat{\ } \langle U, x_n \rangle) \rangle$$

---

<sup>20</sup> Mummert, C. y Stephan, F. "Topological aspects of poset spaces". En: *Michigan Mathematical Journal* 59.1 (2010), págs. 3-24. DOI: 10.1307/mmj/1272376025.

está en  $c'$ , es decir, igual a una posición  $\pi'_j$  con  $j \leq l$ .

6.  $U' \subseteq U$  (Esto es en realidad una consecuencia de 5).

El ítem 3 de la definición de condición permite demostrar que el orden sobre  $\mathbb{P}$  es transitivo. Además, como cada condición es finita, el ítem 5 de la definición de la relación de orden garantiza que  $c \not\prec c$  para todo  $c \in \mathbb{P}$ . Por lo tanto,  $<$  define un orden parcial estricto sobre  $\mathbb{P}$ . Con esta construcción de  $\mathbb{P}$  se demuestra que  $X$  es homeomorfo a  $\text{MF}(\mathbb{P})$  y por el Teorema 5.2.5,  $\mathbb{P}$  puede suponerse numerable.  $\square$

### 5.3. ESPACIOS *CTS* CON LA PROPIEDAD FUERTE DE CHOQUET

**Lema 5.3.1** (Morayne & Rałowski (2023)). *Si  $X$  es un espacio *CTS*, entonces cada subconjunto cerrado de  $X$  es una intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir,  $G_\delta$ .*

**Teorema 5.3.2** (Morayne & Rałowski (2023)). *Sea  $X$  un espacio *CTS*. Entonces,  $X$  es un espacio Baire si, y solo si, cada subconjunto abierto no vacío de  $X$  contiene un subconjunto cerrado con interior no vacío.*

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que cada abierto  $U$  de  $X$  contiene la clausura  $\overline{V}$  de un abierto no vacío  $V$ . Mostraremos que  $X$  es Baire. Sea  $W$  un abierto no vacío de  $X$  y  $F_1, F_2, \dots$  cerrados de  $X$  con interior vacío. Queremos ver que la unión de los  $F_i$ 's no puede contener a  $W$ . Para ello construiremos una sucesión encajada de abiertos  $V_i$  tales que

$$V_{i+1} \subseteq \overline{V_{i+1}} \subseteq F_{i+1}^c \cap V_i. \quad (5.1)$$

Aplicando la hipótesis a  $U = F_1^c \cap W$ , encontramos un abierto no vacío  $V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq F_1^c \cap W$ . Suponga que para  $n \geq 1$  hemos construido la sucesión de abiertos no vacíos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tales que cumplen (5.1). Usando nuevamente la hipótesis con  $U = F_{n+1}^c \cap V_n$  encontramos un abierto no vacío  $V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq F_{n+1}^c \cap V_n$ . Con esto concluye la construcción de la sucesión  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

De la construcción es inmediato que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \cap \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \emptyset$$

y por la compacidad de  $X$  junto con el hecho que  $\overline{V_1} \subseteq W$ , obtenemos que

$$W \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset.$$

De ahí

$$W \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

La otra implicación sigue del Lema 5.3.1. Más precisamente, cada abierto no vacío  $U$  es la unión numerable de cerrados y, como  $X$  es Baire, uno de los cerrados debe tener interior no vacío.  $\square$

**Ejemplo 5.3.3** (Morayne & Rałowski (2023)). Sea  $X = [-1, 1]$ , donde los abiertos contenidos en  $(-1, 1)$  son los de la topología usual, y las vecindades básicas de  $-1$  y  $1$  son, respectivamente, los conjuntos de la forma

$$[-1, p) \cup (q, 1), \quad \text{o} \quad (-1, p) \cup (q, 1],$$

donde  $p < q$  son racionales del intervalo  $(-1, 1)$ .  $X$  es un espacio CTS que además Baire. Y es fácil ver que posee la propiedad fuerte de Choquet.

**Ejemplo 5.3.4.** El espacio del Ejemplo 2.2.5 es un espacio Baire y que además posee la propiedad fuerte de Choquet.

**Teorema 5.3.5.** Sea  $X$  un espacio CTS. Entonces  $X$  es un espacio Baire si, y solo si,  $X$  es Choquet.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio de Baire. Por el Teorema 5.3.2, todo conjunto abierto no vacío de  $X$  contiene un subconjunto cerrado cuyo interior es no vacío. Describiremos a continuación una estrategia ganadora para el Jugador II en el juego de Choquet.

$$\text{I: } U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots$$

$$\text{II: } V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \dots$$

El desarrollo del juego es el siguiente. En la primera jugada, el Jugador I selecciona un conjunto abierto no vacío  $U_1 \subseteq X$ . El Jugador II responde eligiendo un abierto  $V_1 \subseteq U_1$

de la forma  $V_1 = \text{int}(F_1)$ , donde  $F_1 \subseteq U_1$  es un conjunto cerrado con interior no vacío. La existencia de tal conjunto  $F_1$  está garantizada por el hecho de que  $X$  es un espacio de Baire. En la siguiente jugada, el Jugador I elige un abierto no vacío  $U_2 \subseteq V_1$ . El Jugador II responde seleccionando  $V_2 = \text{int}(F_2)$ , donde  $F_2 \subseteq U_2$  es cerrado y tiene interior no vacío.

Procediendo de esta manera, se obtiene una sucesión encajada de abiertos

$$U_1 \supseteq V_1 \supseteq U_2 \supseteq V_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots,$$

donde para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene  $V_k = \text{int}(F_k)$  y  $F_k \subseteq U_k$  es cerrado con interior no vacío.

Por consiguiente,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Esto prueba que el Jugador II posee una estrategia ganadora y, en consecuencia, que  $X$  es un espacio de Choquet.

La implicación recíproca se sigue de forma inmediata, ya que todo espacio de Choquet es, por el teorema de Oxtoby, un espacio de Baire.  $\square$

De lo anterior y de las representaciones a través del espectro de un *c.p.o.* de los espacios *CTS*, surge la pregunta de cuándo un *CTS* posee la propiedad fuerte de Choquet. Más específicamente, nos preguntamos si todo *CTS* que sea Baire tiene la propiedad fuerte de Choquet. La respuesta es negativa, como lo mostramos a continuación.

**Ejemplo 5.3.6** (Video en: *YouTube*<sup>21</sup>). Sea  $X = (0, 1] \cup \{\frac{-1}{2k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{-1}{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$  con la topología definida de la siguiente manera:

Para cada punto de la forma  $\frac{-1}{2k}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , se consideran abiertos básicos a los conjuntos de la forma

$$O_n^{(k)} = \left\{ \frac{-1}{2k} \right\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left( \frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i} \right) \cup \left\{ \frac{-1}{2i} : i \geq n+k \right\},$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Y para cada punto de la forma  $\frac{-1}{2k+1}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , se consideran abiertos básicos a los conjuntos de la forma

$$W_n^{(k)} = \left\{ \frac{-1}{2k+1} \right\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left( \frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1} \right) \cup \left\{ \frac{-1}{2i+1} : i \geq n+k \right\},$$

---

<sup>21</sup> <https://youtu.be/xnz04a4bDig>

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

En los demás puntos de  $X$ , la topología coincide con la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Afirmamos que este espacio es CTS y Baire, pero no posee la propiedad fuerte de Choquet.

Veamos que no posee la propiedad fuerte de Choquet construyendo una estrategia ganadora para el jugador I en el juego fuerte de Choquet.

El juego se desarrolla de la siguiente manera:

El Jugador I comienza eligiendo como abierto no vacío  $U_1 = O_1^{(1)} \subseteq X$  y el punto  $-\frac{1}{2}$ .

El Jugador II responde eligiendo un abierto  $V_1 \subseteq O_1^{(1)}$  que contiene al punto  $\frac{-1}{2}$ .

Como  $\{O_n^{(1)} : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de vecindades alrededor de  $\frac{-1}{2}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$-\frac{1}{2} \in O_{n_0}^{(1)} \subseteq V_1.$$

En particular, dado cualquier abierto  $V_1$  que elija el Jugador II, podemos reemplazarlo por un abierto básico  $O_{n_0}^{(1)}$  contenido en  $V_1$  y que contiene el punto elegido, sin afectar la estrategia.

Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$V_1 = O_{n_0}^{(1)}.$$

Luego, el Jugador I elige un abierto  $U_2 = O_{n_0+1}^{(n_0+2)} \subseteq V_1$  y el punto  $-\frac{1}{2n_0+4}$ .

El Jugador II responde eligiendo un abierto  $V_2 \subseteq U_2$  que contiene dicho punto. Por la misma razón que antes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$V_2 = O_{n_1}^{(n_0+2)}.$$

Continuando de esta forma, se define la estrategia del Jugador I.

$$I: \langle O_1^{(1)}, \frac{-1}{2} \rangle \quad \langle O_{n_0+1}^{(n_0+1)}, \frac{-1}{2n_0+4} \rangle \quad \langle O_{n_1+1}^{(n_0+n_1+1)}, \frac{-1}{2(n_0+n_1)+2} \rangle \quad \dots$$

$$II: \quad O_{n_0}^{(1)} \quad O_{n_1}^{(n_0+1)} \quad O_{n_2}^{(n_0+n_1+1)} \quad \dots$$

Finalmente, notemos que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \emptyset$ . Por lo tanto, el Jugador I gana.

**Ejemplo 5.3.7.** Sea

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq y \leq 2(1-x)\} \setminus \left\{ \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Consideremos  $X = T \cup \mathbb{N}_{\geq 2} \times \{0\}$ , junto con la siguiente topología. En  $T$  la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ , y para cada punto de la forma  $(k, 0)$  con  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  los abiertos de la forma

$$U_n^k = \{(k, 0)\} \cup \{(i, 0) : i \geq n + k\} \cup B((\frac{1}{2}, 1), \frac{1}{n}), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

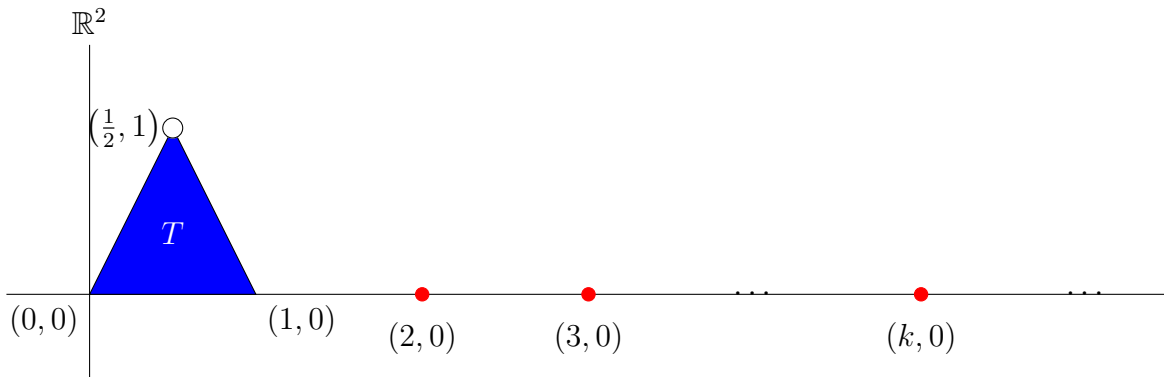


Figura 5.2: Espacio  $CTS$ -Baire no fuerte-Choquet.

**Observación 5.3.8.** Sea  $X$  un espacio  $CTS$ . Notemos que del Teorema 5.3.2 si

$$D = \{x \in X : (\forall U_x^{22})(\exists V_x)(\overline{V_x} \subseteq U_x)\}$$

es denso en  $X$ , entonces  $X$  es Baire.

La siguiente proposición constituye un primer acercamiento al problema de determinar cuándo un espacio  $CTS$  posee la propiedad fuerte de Choquet.

**Proposición 5.3.9.** Sea  $X$  un espacio  $CTS$  y

$$D^c = X \setminus \{x \in X : (\forall U_x)(\exists V_x)(\overline{V_x} \subseteq U_x)\}.$$

Si  $D^c$  es discreto (esto es, para cada  $x \in D^c$ , existe un abierto  $W$  de  $x$  tal que

$$W \cap (D^c \setminus \{x\}) = \emptyset),$$

entonces  $X$  tiene la propiedad fuerte de Choquet.

*Demostración.* Veamos la estrategia ganadora para el jugador II.

---

<sup>22</sup> Donde  $U_x$  representa un abierto alrededor de  $x$ .

En cualquier posición del juego en la que el jugador I juegue  $\langle U_i, x_i \rangle$  con  $x_i \in D^c$ , el jugador II debe responder con un abierto  $V_i$  tal que  $x_i \in V_i$  y

$$V_i \cap (D^c \setminus \{x_i\}) = \emptyset.$$

A partir de ese momento, si el jugador I cambia de punto, el jugador II debe elegir abiertos  $V_j$  que satisfagan

$$\overline{V_j} \subseteq U_j.$$

Finalmente, la compacidad de  $X$  garantiza que la intersección de esta sucesión de abiertos es no vacía. Por lo tanto la estrategia es ganadora para el jugador II.  $\square$

**Ejemplo 5.3.10.** *Veamos que el recíproco de la Proposición 5.3.9 no se cumple. Sea*

$$X = [0, 1] \cup \{m \in \mathbb{N} : m \geq 2\}.$$

En  $[0, 1]$  usamos la topología usual; y para cada elemento  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  definimos los abiertos básicos de  $k$  por

$$U_n^k = \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \{k\} \cup \{l : l > \max\{n, k\}\},$$

$$V_n^k = \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right] \cup \{k\} \cup \{l : l > \max\{n, k\}\}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Afirmamos que este espacio es CTS y tiene la propiedad fuerte de Choquet, pero

$$D^c = X \setminus \{x \in X : (\forall U_x)(\exists V_x)(\overline{V} \subseteq U)\} \text{ no es discreto.}$$

## 5.4. ESPACIOS CTS, MF Y ESPECTRO

Esta breve sección tiene como objetivo plantear la pregunta de como las distintas representaciones de espacios CTS con la propiedad fuerte de Choquet mediante *c.p.o.* numerables —una a través del espacio de ultrafiltros y otra a través del espectro— están relacionadas entre sí, y en qué medida es posible establecer correspondencias naturales entre ellas.

**Proposición 5.4.1.** *Si  $\mathbb{P}$  es un  $\omega$ -c.p.o. Entonces cada ultrafiltro  $F$  es un selector.*

*Demostración.* Sea  $F$  un ultrafiltro, veamos que es selector. Para ello, notemos que para cada banda  $\mathbb{P}_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $p \in F$  y un  $b \in \mathbb{P}_n$  y  $p \leq b$  (esto por la hipótesis de que  $F$  es

ultrafiltro y  $\mathbb{P}$  es  $\omega$ -c.p.o.). Sea  $C$  una capa. Existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{P}_m$  refina a  $C$ , es decir,  $\mathbb{P}_m \leq C$ . Por lo anterior, existe un  $p$  y  $b$  en  $F$  y  $\mathbb{P}_m$  respectivamente, tal que  $p \leq b$ . Por otro lado, como  $\mathbb{P}_m$  refina a  $C$ , existe un  $c \in C$  tal que  $p \leq b \leq c$ . Ahora, como  $F$  es ultrafiltro,  $c \in F$ . Por lo tanto, cada ultrafiltro es selector.  $\square$

**Definición 5.4.2.** Sea  $\mathbb{P}$  un  $\omega$ -c.p.o. Decimos que  $\mathbb{P}$  es **encadenable** si para cada  $p \in \mathbb{P}$ ,

$$p^{\leq} = \{q \in \mathbb{P} : p \leq q\} \text{ es una cadena.}$$

**Proposición 5.4.3.** Sea  $\mathbb{P}$  un  $\omega$ -c.p.o. Si  $\mathbb{P}$  es encadenable, entonces

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) = \text{MF}(\mathbb{P}).$$

y por lo tanto,  $\text{MF}(\mathbb{P})$  es compacto.

*Demostración.* Veamos primero que si  $\mathbb{P}$  es encadenable, entonces para cada  $F \in \text{MF}(\mathbb{P})$ ,

$$|F \cap \mathbb{P}_n| = 1, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que  $F \cap \mathbb{P}_n \neq \emptyset$  pues cada  $F$  es selector. Ahora, si  $F \cap \mathbb{P}_n \supseteq \{p, q\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe un  $r \in F$  con  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , pero como  $p, q \in \mathbb{P}_n$ ,  $p \approx q$ , se sigue entonces que  $r^{\leq}$  no es una cadena, lo cual es una contradicción.

Que cada  $F \in \text{MF}(\mathbb{P})$  sea selector minimal se sigue de que

$$|F \cap \mathbb{P}_n| = 1, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, por la Proposición 4.3.2, cada selector minimal  $S \in \text{Sel}(\mathbb{P})$  es filtro, y de lo anterior se sigue que es ultrafiltro (todo filtro se puede extender a uno maximal).

Por lo demostrado,  $\text{Sel}(\mathbb{P}) = \text{MF}(\mathbb{P})$ .  $\square$

**Observación 5.4.4.** Notemos que esta definición de encadenado es una propiedad muy fuerte. Esto en el sentido de que el c.p.o. asociado al intervalo  $[0, 1]$  (ver 4.3.5) no lo es. Por otro lado, el asociado a  $2^{\mathbb{N}}$  (ver 4.3.6) sí.

**Pregunta 5.4.5.** Se sabe que todo espacio  $X$  CTS admite una base de capas y que su espacio espectro asociado es homeomorfo a  $X$ . Además, si  $X$  posee la propiedad fuerte de Choquet, entonces  $X$  es homeomorfo al espacio de ultrafiltros de un c.p.o. numerable. Dado que estos

*c.p.o.* se construyen a partir de  $X$  de diferentes maneras, surge la pregunta de si: ¿existe, para un espacio  $X$  CTS con la propiedad fuerte de Choquet, un *c.p.o.*  $\mathbb{P}$  tal que

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) \approx \text{MF}(\mathbb{P}) \approx X?$$

Esto por ejemplo a lo que ocurre en el caso del *c.p.o.* asociado a  $2^{\mathbb{N}}$ , donde se cumple que  $\text{Sel}(\mathbb{P}) = \text{MF}(\mathbb{P})$ . En efecto Bartoš, Bice y Vignati demuestran en <sup>23</sup> que, si un  $\omega$ -*c.p.o.* satisface dos propiedades —cuyo detalle no es necesario especificar aquí—, entonces el espacio  $\text{Sel}(\mathbb{P})$  es Hausdorff y

$$\text{Sel}(\mathbb{P}) = \{U \subseteq \mathbb{P} : U \text{ es ultrafiltro}\} = \text{MF}(\mathbb{P}).$$

Sin embargo, mencionan que para que estas propiedades se cumplan, el espectro tiene que ser totalmente desconexo.

**Pregunta 5.4.6.** Sea  $X$  un espacio CTS con la propiedad fuerte de Choquet, y sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario tal que

$$\mathcal{G}^{\max} \approx X.$$

¿Qué propiedades combinatorias de la propiedad fuerte de Choquet se observan en  $\mathcal{G}$ ?

---

<sup>23</sup> Bartoš, A., Bice, T. y Vignati, A. “Constructing compacta from posets”. En: *Publ. Mat.* 69.1 (2025), págs. 217-265. DOI: 10.5565/PUBLMAT6912510.

## 6. OTROS RESULTADOS

En este capítulo se presentan algunos resultados adicionales que complementan el estudio realizado.

### 6.1. SOBRE EL PRODUCTO DE ESPACIOS *CTS*

**Proposición 6.1.1.** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio *CTS* y  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  su extensión polaca que preserva borelianos. Si  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  es localmente compacto, entonces  $Y = \mathcal{G}^{max} \cup \{\infty\}$  (compactificación por punto) es un espacio polaco compacto tal que,*

$$\mathcal{B}(Y) = \sigma(\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\}),$$

donde,

$$\sigma(\mathcal{A}),$$

representa la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$ .

*Demostración.* Sea  $V$  un abierto en  $Y$ . Entonces se tiene que

$$V \in \tau_{pro} \quad \text{o bien} \quad V = U \cup \{\infty\},$$

donde  $U \in \tau_{pro}$  y  $\mathcal{G}^{max} \setminus U$  es compacto en  $\mathcal{G}^{max}$ . En cualquiera de los dos casos, como  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{pro})$  y  $(\mathcal{G}^{max}, \tau_{sp})$  preservan borelianos se sigue que

$$V \in \sigma(\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\}).$$

Por consiguiente, todo abierto de  $Y$  pertenece a  $\sigma(\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\})$ , y de aquí obtenemos

$$\mathcal{B}(Y) \subseteq \sigma(\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\}).$$

Por otro lado, notemos que

$$\tau_{sp} \subseteq \tau_{pro} \subseteq \tau_Y,$$

luego todo conjunto abierto de  $X$  es boreliano en  $Y$ . Además, el punto  $\infty$  es cerrado en  $Y$ , pues

$$Y \setminus \{\infty\} = \mathcal{G}^{max} \in \tau_Y.$$

En particular,

$$\{\infty\} \in \mathcal{B}(Y).$$

De este modo se concluye que

$$\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\} \subseteq \mathcal{B}(Y),$$

y por tanto

$$\sigma(\tau_{sp} \cup \{\{\infty\}\}) \subseteq \mathcal{B}(Y).$$

□

**Observación 6.1.2.** Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario y una partición de  $\mathbb{N}$  en subconjuntos infinitos dos a dos disjuntos

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} N_k,$$

y

$$h_k : \mathbb{N} \rightarrow N_k$$

una biyección para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Definamos,

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : h_k^{-1}(A \cap N_k) \in \mathcal{G} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\}. \quad (6.1)$$

Entonces,  $\mathcal{H}$  es un cerrado hereditario. En efecto, para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos

$$\pi_k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \pi_k(A) = h_k^{-1}(A \cap N_k).$$

Y se sigue que,

$$\mathcal{H} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \pi_k^{-1}(\mathcal{G}).$$

Por lo tanto,  $\mathcal{H}$  es cerrado.

**Teorema 6.1.3.** Sea  $X$  un espacio CTS y  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario tal que

$$\mathcal{G}^{max} \simeq X.$$

Entonces,

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}^{max} \simeq \mathcal{H}^{max},$$

donde  $\mathcal{H}$  es el definido en 6.1.

*Demostración.* Sea

$$\varphi : \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}^{max} \longrightarrow \mathcal{H}^{max}, \quad \varphi((G_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n(G_n).$$

Veamos que está bien definida. En efecto, sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}^{max}$  y

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n(G_n).$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$A \cap N_k = h_k(G_k),$$

pues los conjuntos  $N_k$  son disjuntos. Aplicando  $h_k^{-1}$  obtenemos

$$h_k^{-1}(A \cap N_k) = h_k^{-1}(h_k(G_k)) = G_k \in \mathcal{G}.$$

Luego,  $A \in \mathcal{H}$ . Además, como cada  $G_k \in \mathcal{G}^{max}$ ,

$$A \in \mathcal{H}^{max}.$$

Así,  $\varphi$  está bien definida.

Supongamos ahora que

$$\varphi((G_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varphi((F_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Entonces

$$\bigcup_n h_n(G_n) = \bigcup_n h_n(F_n).$$

Por las hipótesis sobre  $N_k$  y dado que  $h_k$  es biyección para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$G_k = h_k^{-1}(h_k(G_k)) = h_k^{-1}(h_k(F_k)) = F_k$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por tanto  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} = (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Esto prueba inyectividad.

Sea  $A \in \mathcal{H}^{max}$ . Definimos para cada  $k \in \mathbb{N}$

$$G_k = h_k^{-1}(A \cap N_k) \in \mathcal{G}^{max}.$$

Entonces

$$\varphi((G_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} h_k(G_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap N_k) = A.$$

Luego  $\varphi$  es sobreyectiva.

Veamos que  $\varphi$  es homeomorfismo.

Sea  $U$  un abierto básico en  $\mathcal{H}^{max}$ , es decir,

$$U = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{B}_{n_i}, \text{ (ver 2,3).}$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $n_i \in N_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Sea  $m_i = h_i^{-1}(n_i)$ .

Afirmamos que

$$\varphi^{-1}(U) = \prod_{i=1}^k \mathcal{B}_{m_i} \times \prod_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{G}^{max}.$$

Y por lo tanto  $\varphi$  es continua.

Sea ahora  $U$  un abierto básico en  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}^{max}$ , es decir,

$$U = \prod_{i=1}^k U_i \times \prod_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{G}^{max},$$

donde, para cada  $i = 1, \dots, k$ ,

$$U_i = \bigcap_{r=1}^{l_i} \mathcal{B}_{m_{i,r}}.$$

Para cada  $1 \leq i \leq k$  y  $1 \leq r \leq l_i$ , sea  $n_{i,r} = h_i(m_{i,r})$ . Entonces,

$$\varphi(U) = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{r=1}^{l_i} \mathcal{B}_{n_{i,r}}.$$

Así,  $\varphi$  es un homeomorfismo.

□

## 6.2. MÁS SOBRE COMPACIDAD

**Teorema 6.2.1.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario de  $2^{\mathbb{N}}$ . Entonces,  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto si, y solo si, para cada  $H \in \mathcal{G}^{max}$  punto de acumulación y para cada  $a, b$  finitos con  $a \subseteq H$  y*

$b \subseteq H^c$ , existen  $c, d$  finitos con  $a \subseteq c \subseteq H$  y  $b \subseteq d \subseteq H^c$  tal que la familia

$$\mathcal{J} = \{e \in \mathcal{G} : e \cup c \in \mathcal{G}, e \cap c = \emptyset \text{ y } e \cap d = \emptyset\},$$

es tal que  $\mathcal{J}^{max}$  es compacto.

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Sea  $H$  un punto de acumulación de  $\mathcal{G}^{max}$ . Veamos que admite una vecindad compacta. Sea  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max}$  una vecindad alrededor de  $H$ . Por las hipótesis, existen  $c, d$  finitos tales que

$$\mathcal{J} = \{e \in \mathcal{G} : e \cup c \in \mathcal{G}, e \cap c = \emptyset \text{ y } e \cap d = \emptyset\},$$

es tal que  $\mathcal{J}^{max}$  es compacto.

Sea

$$h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad A \longmapsto A \cup c.$$

Notemos que  $h$  es continua y  $h(\mathcal{J}^{max})$  es compacto.

Finalmente  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max}$  es una vecindad alrededor de  $H$  contenida en  $\mathcal{V}(a, b) \cap \mathcal{G}^{max}$ .

Además, es compacta pues

$$\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max} = \mathcal{V}(c, d) \cap h(\mathcal{J}^{max}).$$

( $\Rightarrow$ ) Supongamos ahora que  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto. Sea  $H \in \mathcal{G}^{max}$  punto de acumulación y  $a \subseteq H$ ,  $b \subseteq H^c$  finitos. Por la compacidad local, existen  $a \subseteq c \subseteq H$  y  $b \subseteq d \subseteq H^c$  tales que  $\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max}$  es compacto.

Sea

$$\mathcal{J} = \{e \in \mathcal{G} : e \cup c \in \mathcal{G}, e \cap c = \emptyset \text{ y } e \cap d = \emptyset\},$$

y consideremos

$$h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad A \longmapsto A \setminus c.$$

Notemos que  $\mathcal{J}^{max} = h(\mathcal{V}(c, d) \cap \mathcal{G}^{max})$ , y por lo tanto es compacto.  $\square$

**Observación 6.2.2.** Sea  $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$  un árbol de sucesiones crecientes. Dadas dos ramas  $b, c \in [T]$ , diremos que  $b <_{sub} c$ , si existe una función estrictamente creciente  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que

$$b(n) = c(f(n)) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Y diremos que  $b \in [T]$  es **maximal** en  $T$ , si no existe otra rama  $c \in [T]$  tal que  $b$  sea una

subsucesión estricta de  $c$ . Es decir,

$$b \text{ es maximal} \iff \neg \exists c \in [T] (b <_{sub} c).$$

Denotemos por

$$[T]^{max} = \{\alpha \in [T] : \alpha \text{ es maximal}\}.$$

Por otro lado, para cada  $A \subseteq \mathbb{N}$ , sea  $a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots$  la enumeración creciente de sus elementos. Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario y  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \text{Fin}$ . Definamos,

$$h : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \quad h(A) = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Notemos que  $h(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$  es un árbol. Además,

$$[h(\mathcal{F})] \simeq \mathcal{G} \setminus \text{Fin},$$

y

$$[h(\mathcal{F})]^{max} \simeq \mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}.$$

**Proposición 6.2.3.** *Sea  $\mathcal{G}$  un cerrado hereditario y  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \text{Fin}$ . Entonces,  $[h(\mathcal{F})]^{max}$  es localmente compacto si, y solo si,*

$$\forall x \in [h(\mathcal{F})]^{max} \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\widehat{h(\mathcal{F})}_{x \upharpoonright n} = \{t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in [h(\mathcal{F})]^{max} (t = \alpha \upharpoonright m \wedge x \upharpoonright n \leq t)\} \quad (6.2)$$

*tiene ramificación finita.*

Por lo tanto, si  $\mathcal{G}$  es un cerrado hereditario tal que  $(\mathcal{G}^{max} \setminus \text{Fin}) \cap \overline{(\mathcal{G}^{max} \cap \text{Fin})} = \emptyset$  (ver 2.4.5). Entonces,  $\mathcal{G}^{max}$  es localmente compacto si, y solo si,  $[h(\mathcal{F})]^{max}$  satisface 6.2.

### 6.3. COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA DE LA FAMILIA DE CERRADOS HEREDITARIOS

En esta sección, estudiaremos la complejidad topológica de dos colecciones particulares de subconjuntos cerrados del espacio de Cantor. La primera está formada por aquellos conjuntos cerrados que son hereditarios, y la segunda por aquellos que, además de ser hereditarios, poseen la propiedad de que su maximal asociado es localmente compacto.

Definamos

$$\mathcal{H} = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : K \text{ es hereditaria}\}.$$

Y

$$\mathcal{H}^{loc} = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : K \text{ es hereditaria y } K^{max} \text{ es localmente compacto}\}.$$

Nuestro objetivo es determinar la complejidad topológica de los conjuntos  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^{loc}$  dentro de  $\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

El siguiente teorema es considerado folclore en la literatura; sin embargo, no suele encontrarse una demostración explícita. A continuación presentamos una.

**Teorema 6.3.1.**  $\mathcal{H}$  es cerrado en  $\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

*Demostración.* Para cada  $K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , definimos

$$\downarrow K = \{y \subseteq \mathbb{N} : (\exists x \in K)(y \subseteq x)\}.$$

Sea

$$\phi : \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

$$K \rightarrow \downarrow K.$$

Probaremos que  $\phi$  es continua.

Veamos primero que  $\phi(K)$  está bien definida. Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \downarrow K$ , con  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow A$ . Por definición de  $\downarrow K$  para cada  $n \in \mathbb{N}$   $A_n \in \downarrow K$ , existe  $B_n \in K$  con  $A_n \subseteq B_n$ . Y como  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  es compacto,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow B$ . Como  $K$  es cerrado,  $B \in K$ . Se sigue fácilmente que  $A \subseteq B$ .

Sea  $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), U \rangle$  un abierto subbásico en  $\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , donde  $U$  es abierto en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , es decir,  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, b_i)$ . Entonces,

$$\phi^{-1}(\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), U \rangle) = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \downarrow K \cap U \neq \emptyset\} = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \downarrow K \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, b_i) \neq \emptyset\}.$$

Afirmamos que

$$\phi^{-1}(\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), U \rangle) = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, \emptyset) \rangle.$$

En efecto, sea

$$K \in \phi^{-1}(\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), U \rangle).$$

Entonces, existe  $y \in \downarrow K$  tal que

$$y \in \mathcal{V}(a_j, b_j) \quad \text{para alg\u00fan } j \in \mathbb{N}.$$

Como  $y \in \downarrow K$ , existe  $x \in K$  con  $y \subseteq x$ . Observe que  $x \in \mathcal{V}(a_j, \emptyset)$ . Por lo tanto,

$$K \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, \emptyset) \neq \emptyset.$$

Por otro lado, si

$$K \in \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, \emptyset) \rangle.$$

Luego, existe un  $x \in K \cap \mathcal{V}(a_j, \emptyset)$ , para alg\u00fan  $j \in \mathbb{N}$  notemos que  $y = x \setminus b_j \in \mathcal{V}(a_j, b_j)$ . Por lo tanto,

$$\downarrow K \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, b_i) \neq \emptyset.$$

Ahora, sea  $\langle U \rangle$  un abierto subb\u00e1sico en  $\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , donde  $U$  es abierto en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , es decir,  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, b_i)$ . Entonces,

$$\phi^{-1}(\langle U \rangle) = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \downarrow K \subseteq U\} = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \downarrow K \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(a_i, b_i)\}.$$

Consideremos  $C = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus U$  y definamos

$$\uparrow C = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\exists y \in C)(y \subseteq x)\}.$$

Afirmamos que  $\uparrow C$  es cerrado. En efecto, sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \uparrow C$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ . Veamos que  $x \in \uparrow C$ . Como  $x_n \in \uparrow C$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una sucesi\u00f3n  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$  tal que  $y_n \subseteq x_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $C$  es compacto pues es cerrado,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite una subsucesi\u00f3n convergente. Sin p\u00e9rdida de generalidad, asumamos que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y \in C$ . Veamos que  $y \subseteq x$ . Sea  $m_0 \in y$ . As\u00ed, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $m_0 \in y_m$  para  $m \geq N$ , es decir,  $m_0 \in x_m$  para  $m \geq N$ , lo cual implica que  $m_0 \in x$ . Por lo tanto,  $x \in \uparrow C$ .

Veamos ahora que,

$$\phi^{-1}(\langle U \rangle) = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : \downarrow K \subseteq U\} = \langle (\uparrow C)^c \rangle = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : K \subseteq (\uparrow C)^c\}.$$

En efecto, sea  $K$  tal que  $\downarrow K \subseteq U$ . Veamos que  $K \subseteq (\uparrow C)^c$ , es decir, si  $x \in K$ , entonces  $x \in (\uparrow C)^c$ . Supongamos lo contrario y sea  $x \in K$  tal que  $x \notin (\uparrow C)^c$ , esto es,  $x \in \uparrow C$ . Por lo

tanto, existe  $y \in C$  con  $y \subseteq x$ , pero por hipótesis  $\downarrow K \subseteq U$ . Entonces,  $y \in C \cap U$  que es una contradicción.

Recíprocamente, veamos que si  $K \subseteq (\uparrow C)^c$ , entonces  $\downarrow K \subseteq U$ . En efecto, sea  $x \in K$  y  $y \subseteq x$ , y supongamos que  $y \notin U$ . Entonces  $y \in C$ , lo cual implica que  $x \in \uparrow C$ . Esto es un absurdo, pues  $K \cap \uparrow C = \emptyset$ .

Lo anterior prueba que  $\phi$  es una función continua, y así  $\mathcal{H} = \phi(\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$  es cerrado.  $\square$

### Proposición 6.3.2.

$$\mathcal{H}^{loc} = \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : K \text{ es hereditaria y } K^{max} \text{ es localmente compacto}\}$$

es a lo sumo  $\Sigma_4^1$ .

*Demostración.* Notemos que

$$\mathcal{H}^{loc} = \{\mathcal{G} \in \mathcal{H} : \mathcal{G}^{max} \text{ es localmente compacto}\}.$$

$$\mathcal{H}^{loc} = \{\mathcal{G} \in \mathcal{H} : (\exists U \text{ abierto}) (\exists C \text{ cerrado}) (\forall G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})) (G \in \mathcal{G}^{max} \iff G \in U \cap C)\}.$$

Sea

$$S = \{(\mathcal{G}, D, C) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 : (\forall G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})) (G \in \mathcal{G}^{max} \iff G \in D^c \cap C)\}.$$

$$S^c = \{(\mathcal{G}, D, C) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 : (\exists G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})) [(G \in \mathcal{G}^{max} \wedge G \notin D^c \cap C) \vee (G \notin \mathcal{G}^{max} \wedge G \in D^c \cap C)]\}.$$

Definamos ahora los conjuntos

$$\mathcal{C} = \{(\mathcal{G}, G) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : G \notin \mathcal{G}^{max}\},$$

y

$$\mathcal{D} = \{(D, C, G) \in \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : G \in D^c \cap C\}.$$

El conjunto  $\mathcal{C}$  es analítico, ya que es la proyección del boreliano

$$\widehat{\mathcal{C}} = \{(\mathcal{G}, G, H) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 : H \in \mathcal{G}, G \subseteq H, \text{ y } G \neq H\},$$

mientras que  $\mathcal{D}$  es boreliano, pues las relaciones “ $G \in \mathcal{C}$ ” y “ $G \notin \mathcal{D}$ ” son borelianas en  $\mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

De este modo,

$$S^c = \text{proj}_{\mathcal{H} \times \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2} \left( [(\mathcal{C} \times \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2) \cap (\mathcal{H} \times \mathcal{D})] \cup [(\mathcal{C}^c \times \mathcal{K}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2) \cap (\mathcal{H} \times \mathcal{D}^c)] \right),$$

es a lo sumo de clase  $\Sigma_3^1$ . Es decir,

$$S^c \in \Sigma_3^1 \implies S \in \Pi_3^1.$$

Por lo tanto,  $\mathcal{H}^{loc}$  a lo sumo  $\Sigma_4^1$ , de hecho, también es  $\Pi_4^1$ . □

**Proposición 6.3.3.** *Sea*

$$E = \{(K_1, K_2) \in \mathcal{H}^2 : \langle K_1 \rangle = \langle K_2 \rangle\},$$

donde

$$\langle K_1 \rangle := \text{Ideal Generado por } K_1.$$

Entonces,  $E$  es una relación de equivalencia coanalítica.

*Demostración.* Sea

$$S = \{(\mathcal{K}, A) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \in \langle \mathcal{K} \rangle\}.$$

Entonces,

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\mathcal{K}, A) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\exists K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K})(A \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i)\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos

$$F_n = \left\{ (\mathcal{K}, A, K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^n : K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i \right\}.$$

Notemos que  $F_n$  es cerrado. Ahora, de la proyección

$$\pi : \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^n \longrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \pi(\mathcal{K}, A, K_1, \dots, K_n) = (\mathcal{K}, A),$$

se tiene que,

$$S_n := \pi(F_n) = \left\{ (\mathcal{K}, A) \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \exists K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}, A \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i \right\}$$

es cerrado en  $\mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Finalmente,

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n,$$

es  $F_\sigma$ . Además,

$$(K_1, K_2) \in E \iff \forall A \subseteq \mathbb{N} ((K_1, A) \in S \iff (K_2, A) \in S).$$

De lo que se sigue que  $E$  es coanalítico. □

**Pregunta 6.3.4.** Sea  $E_{\frac{1}{n}} = \{K \in \mathcal{H} : \langle K \rangle = \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}\}$ , ¿qué podemos decir de  $E$ ?

## 6.4. FRACCIONES EGIPCAS CUYA SUMA ES 1 Y BARRERAS

La ecuación

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_k,$$

ha sido ampliamente estudiada en la literatura. En particular, se sabe que para todo valor de  $x_1$  la ecuación admite solución, resultado atribuido a Erdős. Asimismo, se ha investigado la existencia de soluciones bajo restricciones adicionales sobre los denominadores. Por ejemplo, Sierpiński mostró que existen soluciones en las que todos los denominadores son impares, como

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{105} + \frac{1}{945}.$$

Por otra parte, el problema de encontrar soluciones con denominadores  $x_1, \dots, x_k$  tales que  $x_i \nmid x_j$  para todo  $i \neq j$  también fue considerado, y una respuesta afirmativa fue obtenida posteriormente por Burshtein en 1973 (ver <sup>24</sup>).

Un código en Python donde puede encontrar más de estos ejemplos: *fracciones egipcias*.

Otros ejemplos y resultados de fracciones egipcias cuya suma es 1 pueden encontrarse en los artículos <sup>24, 25, 26</sup>.

<sup>24</sup> Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1”. En: *Discrete Mathematics* 5.3 (1973), págs. 201-206

<sup>25</sup> Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1”. En: *Discrete Mathematics* 300.1–3 (2005), págs. 213-217

<sup>26</sup> Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1 when  $x_i \nmid x_j$  for  $i \neq j$ ”. En: *Journal for Algebra and Number Theory Academica* 5.4 (2015), págs. 117-124

Los ejemplos presentados anteriormente tienen como finalidad ilustrar la existencia de conjuntos finitos que pertenecen a

$$\mathcal{G}^{max} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{i \in A} \frac{1}{i+1} = 1\}.$$

Así como la relación con las denominadas familias *Sperner* y *thin*. Recordemos que una familia  $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$  se dice *Sperner* si no existen  $s, t \in \mathcal{F}$  tales que  $s \subsetneq t$ . Equivalentemente,  $\mathcal{F}$  es una anticadena respecto al orden por inclusión.

Por otra parte,  $\mathcal{F}$  se dice *thin* si no existen  $s, t \in \mathcal{F}$  tales que  $s \sqsubset t$ , es decir, si ningún elemento de la familia es un segmento inicial de otro.

De las definiciones anteriores se sigue que

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}^{max} \cap \text{Fin} \text{ es una familia Sperner y thin.}$$

Ahora, una familia  $\mathcal{F}$  se llama un *front* si  $\mathcal{F}$  es thin y para todo subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$  tiene una (única) parte inicial en  $\mathcal{F}$ . Si además  $\mathcal{F}$  es Sperner, entonces la familia  $\mathcal{F}$  se llama una *barrera* en  $M$ .

**Observación 6.4.1.** *La familia  $\mathcal{H}$  no es una barrera en  $\mathbb{N}$ . En efecto, considere*

$$A = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

y note que para cualquier subconjunto finito  $F \subseteq A$ ,

$$\sum_{i \in F} \frac{1}{i+1} < 1.$$

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la representación de los espacios compactos,  $T_1$  y segundo numerables a través de tres enfoques distintos. Asimismo, se analizaron extensiones polacas de estos espacios y se estudiaron propiedades topológicas como la compacidad local, la compacidad y la propiedad fuerte de Choquet. Además, se estudió la relación entre la representación mediante cerrados hereditarios y la representación mediante espacios *c.p.o.*

Entre los resultados obtenidos en este trabajo destacamos los siguientes:

1. Se demostró que todo  $G_\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$  es una extensión polaca de un espacio compacto,  $T_1$  y segundo numerable.
2. Se obtuvieron condiciones bajo las cuales un cerrado hereditario  $\mathcal{G}$  satisface que  $\mathcal{G}^{max}$  no es localmente compacto.
3. Se demostró que la categoría **Espectro** de espacios *c.p.o.* numerables es equivalente a la categoría **CHMax** de espacios maximales asociados a cerrados hereditarios.
4. Se demostró que, para espacios compactos,  $T_1$  y segundo numerables, las propiedades de ser Baire y de ser Choquet son equivalentes, mientras que ser Baire y tener la propiedad fuerte de Choquet no lo son.

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran cómo las distintas representaciones de los espacios compactos,  $T_1$  y segundo numerables consideradas en este estudio permiten describir y analizar sus propiedades topológicas. En particular, permiten comprender con mayor detalle cómo las propiedades de los cerrados hereditarios y de los espacios *c.p.o.* numerables influyen en la estructura topológica de los espacios asociados, así como en propiedades como la compacidad local, la compacidad y la propiedad de Choquet.

Así, los resultados obtenidos, junto con las preguntas que se plantean, muestran que los objetivos propuestos al inicio de este estudio fueron alcanzados. Finalmente, los autores esperan que los resultados presentados en este trabajo puedan servir como punto de partida para futuros trabajos.

## A. SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción
$CTS$	Compacto, $T_1$ y segundo numerable.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
Fin	Conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ .
<i>s.c.i.</i>	Semicontinua inferiormente.
<i>c.p.o.</i>	Conjunto parcialmente ordenado.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto de partes de $X$ .
$\subseteq$ y $\subsetneq$	Subconjunto y subconjunto propio.
$\text{Fin}(\varphi)$	$\{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}$ .
$\text{Exh}(\varphi)$	$\{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A \setminus [1, n]) = 0\}$ .
$X$	Espacio topológico.
$A \sqcup B$	$\{a \cup b : a \in A, b \in B\}$ .
$\sqcup$	Unión disjunta.
$X$	Espacio topológico.
$\tau_{sp}$	Topología Sierpiński.
$\tau_{pro}$	Topología producto.
$\mathcal{V}(a, b)$	$\{A \subseteq \mathbb{N} : a \subseteq A \wedge b \cap A = \emptyset\}$ .
$\mathcal{B}_n$	Abiertos subbásicos.
$\mathcal{B}$	Base de la topología.
$\mathcal{B}(X, \tau)$	Borelianos de $X$ .
$\mathcal{F}$	Familia hereditaria.
$\mathcal{G}$	Cerrado hereditario.
$\mathcal{G}^{max}$	Conjunto de maximales.
$\sigma(\mathcal{A})$	$\sigma$ -álgebra generada por $\mathcal{A}$ .
$\mathcal{I}$	Ideal sobre $\mathbb{N}$ .
hom	Conjunto de homogéneos.

$\mathbb{P}$	Conjunto parcialmente ordenado.
$B\mathbb{P}$ y $C\mathbb{P}$	Bandas y capas.
$\text{Sel}(\mathbb{P})$	Espacio de selectores minimales (espectro).
<b>CHMax</b>	Categoría de conjuntos maximales asociados a cerrados hereditarios.
<b>Espectro</b>	Categoría de espacios espectro asociados a <i>c.p.o.</i> numerables.
$\text{UF}(\mathbb{P})$	Espacio de filtros no acotados.
$\text{MF}(\mathbb{P})$	Espacio de ultrafiltros.

## BIBLIOGRAFÍA

- Banerjee, C. R. y Lahiri, B. K. “On Subseries of Divergent Series”. En: *The American Mathematical Monthly* 71.7 (1964), págs. 767-768. DOI: 10.2307/2310893.
- Bartoš, A., Bice, T. y Vignati, A. “Constructing compacta from posets”. En: *Publ. Mat.* 69.1 (2025), págs. 217-265. DOI: 10.5565/PUBLMAT6912510.
- Borceux, F. *Handbook of Categorical Algebra*. Cambridge University Press, 1994.
- Bourbaki, N. *General Topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- Brendle, J. y Mejía, D. A. “Rothberger gaps in fragmented ideals”. En: *Fundamenta Mathematicae* 227.1 (2014), págs. 35-68. DOI: 10.4064/fm227-1-4.
- Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1”. En: *Discrete Mathematics* 5.3 (1973), págs. 201-206.
- Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1”. En: *Discrete Mathematics* 300.1–3 (2005), págs. 213-217.
- Burshtein, N. “On distinct unit fractions whose sum equals 1 when  $x_i \nmid x_j$  for  $i \neq j$ ”. En: *Journal for Algebra and Number Theory Academica* 5.4 (2015), págs. 117-124.
- Geschke, S. *Almost disjoint and independent families*. 2011. URL: <http://www.math.uni-hamburg.de/home/geschke/papers/IndependentFamilies.pdf>.
- Guthrie, J. A. y Nymann, J. E. “The topological structure of the set of subsums of an infinite series”. En: *Colloquium Mathematicum* 55 (1988), págs. 323-327.
- Hrušák, M., Rojas-Rebolledo, D. y Zapletal, J. “Cofinalities of Borel ideals”. En: *Mathematical Logic Quarterly* 60 (2014).
- Hrušák, M. et al. “Ramsey type properties of ideals”. En: *Annals of Pure and Applied Logic* 168.11 (2017), págs. 2022-2049. DOI: 10.1016/j.apal.2017.06.001.
- Kechris, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*. New York: Springer, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.

- Martínez, J., Meza-Alcántara, D. y Uzcátegui, C. “Pathology of submeasures and  $F_\sigma$  ideals”. En: *Archive for Mathematical Logic* 63.7–8 (2024), págs. 941-967. DOI: 10.1007/s00153-024-00910-z.
- Mazur, K. “ $F_\sigma$ -ideals and  $\omega_1\omega_1^*$ -gaps in the Boolean algebras  $\mathcal{P}(\omega)/I$ ”. En: *Fundamenta Mathematicae* 138.2 (1991), págs. 103-111.
- Morayne, M. y Rałowski, R. “The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in T1 compact spaces”. En: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 183 (2023). DOI: 10.1016/j.bulsci.2023.103231.
- Morayne, M. y Ryll-Nardzewski, C. “Refinements of T1, compact and second countable topologies”. En: *Topology and its Applications* 56 (1994), págs. 159-164. DOI: 10.1016/0166-8641(94)90016-7.
- Mummert, C. y Stephan, F. “Topological aspects of poset spaces”. En: *Michigan Mathematical Journal* 59.1 (2010), págs. 3-24. DOI: 10.1307/mmj/1272376025.
- Munkres, J. R. *Topología*. 2.<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2002.
- Osipov, A. V. “The 1-property of X is equivalent to the Choquet property of B1(X)”. En: *Topology and Its Applications* 370 (2025), pág. 109395. DOI: 10.1016/j.topol.2025.109395.
- Solecki, S. “Analytic ideals and their applications”. En: *Annals of Pure and Applied Logic* 99.1 (1999), págs. 51-72. DOI: 10.1016/S0168-0072(98)00051-7.
- Solecki, S. “Filters and sequences”. En: *Fundamenta Mathematicae* 163 (2000), págs. 215-228.
- Solecki, S. y Todorćević, S. “Cofinal types of topological directed orders”. En: *Annales de l'Institut Fourier* 54.6 (2004), págs. 1877-1911. DOI: 10.5802/aif.2070.
- Zafrany, S. “On analytic filters and prefilters”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 55.1 (1990), págs. 315-322. DOI: 10.2307/2274970.