TOPOLOGÍA EN EL PLANO COMPLEJO

EDWING FRANCISCO FIGUEROA RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005

TOPOLOGÍA EN EL PLANO COMPLEJO

EDWING FRANCISCO FIGUEROA RODRÍGUEZ

Monografía presentada como requisito para optar al título de *Licenciado en Matemáticas*

Javier Enrique Camargo García.
Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2005

A mi madre
quien confió siempre en mi, me brindo todo su amor
y no permitió que me rindiera.

Agradecimientos

Mis mas sinceros agradecimientos:

- A mis padres Cecilia Rodríguez y Noel Figueroa, por brindarme su apoyo, cariño y comprensión.
- A mis hermanos Ladys Edith, Wilmer yesid y Jenny Katherine, por su apoyo moral y afectivo.
- A mi novia Soraya Rodríguez, por su compresión, su apoyo incondicional y su compañía.
- A todos mis compañeros de la universidad por su amistad y su gran colaboración.
- A mi director de monografía, Javier Enrique Camargo quien además de ser un excelente profesor, es una gran persona, y un gran amigo.
- A Ligia Avellaneda, Hernando Rodriguez, y a mi familia en general, que siempre estuvo acompañándome, apoyándome, y me dio su ayuda en los momentos difíciles.

TITULO: TOPOLOGÍA EN EL PLANO COMPLEJO.*

AUTOR: FIGUEROA RODRÍGUEZ Edwing Francisco.**

PALABRAS CLAVES: Plano complejo, logaritmo complejo, funciones continuas, conexidad, compacidad, componentes conexos, Teorema de Jordan.

DESCRIPCIÓN

El estudio de la topología en subconjuntos de plano $\mathbb{R}^2$, en realidad no es tan sencillo; existen afirmaciones muy simples tales como el teorema de la curva de Jordan (“cada curva simple cerrada tiene interior y exterior”), que sin embargo, no son tan fáciles de probar. El conjunto de números complejos posee una estructura algebraicamente cerrada, además forma una extensión del conjunto de los números reales, es por esto que la topología de $\mathbb{R}^2$ se puede explicar utilizando el plano complejo. Algunas ventajas son la presencia de la multiplicación, y de la función exponencial; pero el gran problema es que no todas las pruebas se pueden generalizar a $\mathbb{R}^n$, para $n > 2$. En este proceso el logaritmo de un número complejo, juega un papel muy importante, así como la compacidad y la conexidad de un conjunto.

El propósito de este trabajo, basado en el artículo *Topology in the complex plane*, publicado en The American Mathematical Montlhy por Andrew Browder, es mostrar como los espacios compactos de Hausdorff, inducen una familia de funciones continuas, con propiedades topológicas interesantes, y de esta forma definir una relación de equivalencia entre funciones, para llegar a la definición del grupo H_X; este grupo será utilizado junto con algunas herramientas de topología y de análisis complejo, para mostrar una prueba corta y fácil, del teorema de la curva de Jordan. Además se presentarán las demostraciones de algunos teoremas clásicos como el teorema fundamental del álgebra y el teorema del punto fijo, utilizando resultados que se obtienen a partir del grupo H_X. El lector debe estar familiarizado con los conocimientos básicos de la topología de un conjunto, debe saber lo que es un grupo abeliano libre, y debe manejar algunos aspectos sobre los números complejos.

---

*Monografía.

**Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García.

TITLE: TOPOLOGY IN THE COMPLEX PLANE.*

AUTHOR: FIGUEROA RODRÍGUEZ Edwing Francisco.**

KEY WORDS: Complex plane, complex logarithm, continuing functions, conexity, compacity, conex components, Jordan's Theorem.

DESCRIPTION

Study of topology in $\mathbb{R}^2$ subgroups plane, really is not so easy; it exists affirmations very simples such as Jordan's curve theorem ("each simple closed curve has interior and exterior"), which in spite of it are not so simple to prove. The group of complex numbers has an algebraic closed structure, also forms an extension of the group of real number, for this reason the $\mathbb{R}^2$ topology can be explained using the complex plane. Some advantages are the presence of multiplication, and the exponential function; but a big problem is that not all the proofs can be generalized as $\mathbb{R}^n$, for $n > 2$. In this process the logarithm of a complex number plays a very important roll, just as compacity and conexity of a group.

The purpose of this work, based on the article *Topology in the complex plane*, published in The American Mathematical Montlhy by Andrew Browder, is to show as Hausdorff compact spaces lead to a family of continuing functions, with interesting topological properties, and in this way to define a equivalent relations between functions to reach the definition of Hx group; this group will be used with some topological tools and complex analysis, to show a short and easy proof of the Jordan's curve theorem. Furthermore, it will presented demonstrations of some classic theorems such as Fundamental Theorem of Algebra and Fixed Point Theorem, using results obtained from the Hx group. The reader must be familiarized with basic knowledge of topology of a group; he/she must know what a Free Abelian Group is and must handle some aspects about complex numbers.

---

*Monograph.

**Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Javier Enrique Camargo García.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$, con una estructura algebraicamente cerrada (es decir: todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$), forma una extensión del conjunto de números reales $\mathbb{R}$, donde además de sus propiedades algebraicas, presenta subconjuntos con propiedades topológicas que han sido objeto de contraejemplos fundamentales en el desarrollo de la matemática.

En cursos de análisis complejo, entre otras cosas, se estudia la manera de extender funciones muy trabajadas en variable real como $e^x, \operatorname{sen}(x), \ln(x)$, entre otras, al plano complejo. Aunque las extensiones, son tradicionalmente muy complicadas, estas se hacen de una forma muy natural, brindando la posibilidad de solucionar problemas que en variable real no es posible, por ejemplo el cálculo de integrales como:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx, \quad \int e^{x^2} dx, \text{ o simplemente la solución de, } \; x^2 + 1 = 0.$$

Los espacios compactos de Hausdorff, inducen una familia de funciones $\mathbb{C}(X)$, con propiedades topológicas, categóricas y algebraicas muy interesantes que han sido estudiadas muy a fondo en estas ramas de la matemática.

Para cumplir a cabalidad con los objetivos de esta monografía (basada en [1]), se inicia en el capítulo **1** mencionando brevemente algunas nociones y resultados conocidos tanto en la parte de topología como en la parte del análisis matemático, y del análisis complejo, que serán utilizados posteriormente, y se definirá el logaritmo para un número complejo, el cual tiene una gran importancia en este trabajo.

En el capítulo **2** se definirán los conjuntos $\mathbb{C}(X)$ y $\mathbb{C}^*(X)$, Además se estudiaran algunas propiedades del grupo H_X, formado con la construcción del conjunto $\exp \mathbb{C}(X)$, y luego realizando un cociente sobre el conjunto $\mathbb{C}(X)$, así como las propiedades de la relación de equivalencia " $\sim$ "; de esta forma se mostrará que no todas las funciones continuas poseen logaritmos complejos continuos, y se presentarán algunas propiedades topológicas que posee el plano complejo. Luego de hacer esto, se dará a conocer la relación que existe entre el conjunto H_X y la conexidad del complemento de un conjunto compacto de $\mathbb{C}$.

En el capítulo **3** se hace una pausa para mostrar como luego de haber obtenido algunos resultados previos en los capítulos **1** y **2**, se puede llegar de una manera diferente (utilizando el conjunto H_X), a la construcción de las demostraciones de algunos teoremas clásicos, los cuales son de mucha importancia en la matemática, como el teorema fundamental del álgebra y el teorema del punto fijo de Brouwer.

El último objetivo de este trabajo, obtener una sencilla demostración del teorema generalizado de la curva de Jordan, es desarrollado en el capítulo **4** y se lleva a cabo utilizando la información de los anteriores capítulos y una serie de resultados obtenidos a partir de la compacidad de un conjunto K, y de las propiedades de las componentes conexas de su complemento; en este caso $\mathbb{C} \setminus K$, es un subconjunto abierto.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se tratarán una serie de conceptos que serán utilizados durante el desarrollo de esta monografía; algunas nociones básicas tales como grupos, grupos abelianos, grupos normales, grupos libres, homomorfismos, homeomorfismos, relaciones de equivalencia, números complejos, entre otras, no serán incluidas en este trabajo, pues se asume que el lector debe estar familiarizado con ellas. Además no se entrará en detalles en algunos aspectos referentes a la topología y al análisis complejo.

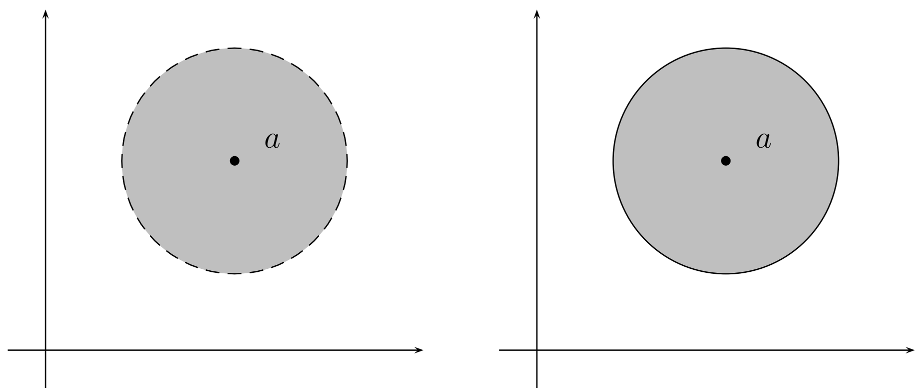
1.1. Funciones Continuas

La definición de continuidad que se da en un curso de cálculo elemental, que tiene que ver con ε, δ, y la distancia, presenta una idea natural de proximidad, es decir, si se tiene una función continua $f : X \longrightarrow Y$, y un punto a de X, y se toma cualquier punto cercano a a, su imagen por medio de f debe estar muy cerca de $f(a)$. Esta definición además, se puede expresar en términos de bolas, estas bolas en $\mathbb{C}$ también son denominadas discos.

Si a es un número complejo, y $r > 0$, se define:

$$D(a,r) := \{z : |z-a| < r\};$$

$$\overline{D}(a,r) := \{z : |z-a| \leq r\},$$



El disco abierto$D(a,r)$ *El disco cerrado* $\overline{D}(a,r)$

Figura 1.1: Discos con centro en a y radio r.

los cuales se llaman respectivamente disco abierto y disco cerrado, con centro en a y radio r. (Ver figura1.1).
Sean X un subconjunto de $\mathbb{C}$, y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que f es continua en un punto a de X, si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$, tal que

$$f(D(a,\delta) \cap X) \subseteq D(f(a),\varepsilon).$$

Esto es lo mismo que decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$D(a,\delta) \cap X \subseteq f^{-1}(D(f(a),\varepsilon)).$$

Definición 1.1. Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq X$. Si f es continua en todo punto a de A, se dice que f es continua en A. Si $A = X$, se dice simplemente que f es continua.

Ejemplo 1.1. Si f es constante en X, f es continua. Pues si $f(x) = c$, para todo z en X, se tiene que $f(D(a,\delta) \cap X) = \{c\} \subseteq D(c,\varepsilon)$, cualesquiera que sean δ y ε.

Ejemplo 1.2. $f(z) = z$ es continua. Pues $f(D(a,\varepsilon) \cap X) = D(a,\varepsilon) \cap X \subseteq D(a,\varepsilon)$, para cualquier $\varepsilon > 0$.

Los siguientes dos teoremas nos hacen mas fácil el trabajo, a la hora de saber si una función es o no continua.

Teorema 1.1. *Sean $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. f es continua si, y solo si, cualquiera que sea el conjunto abierto U de $\mathbb{C}$, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X, o equivalentemente, cualquiera que sea el conjunto cerrado V de $\mathbb{C}$, $f^{-1}(V)$ es un cerrado en X.*

Demostración.
Sea f una función continua y sea $a \in f^{-1}(U)$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $D(f(a), \varepsilon) \subseteq U$. Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$D(a, \delta) \cap X \subseteq f^{-1}(D(f(a), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U).$$

Esto implica que $f^{-1}(U)$ es abierto.
Por otra parte si $a \in f^{-1}(D(f(a), \varepsilon))$ y este conjunto es un abierto en X, debe existir $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \cap X \subseteq f^{-1}(D(f(a), \varepsilon))$. Por lo tanto f es continua.

Si se tiene en cuenta que $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A)$, se tiene que f es continua, si y solo si, para cualquier subconjunto cerrado V de $\mathbb{C}$, $f^{-1}(V)$ es cerrado en X. ■

Teorema 1.2. *Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \in X$. Entonces f es continua en z, si y solo si, para toda sucesión (z_n) de X convergente a z, se cumple que $f(z_n) \to f(z)$.*

Demostración.
Si $z_n \to z$ y f es continua en z, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(D(z, \delta) \cap X) \subseteq D(f(z), \varepsilon)$, y existe un natural $N > 0$ tal que $z_n \in D(z, \delta)$ si $n \geq N$. Entonces $f(z_n) \in D(f(z), \varepsilon)$ si $n \geq N$, así $f(z_n) \to f(z)$.
Recíprocamente si f no es continua en z, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(D(z, 1/n) \cap X) \nsubseteq D(f(z), \varepsilon)$ para todo $n \geq 1$. Entonces se puede escoger $z_n \in D(z, 1/n) \cap X$ tal que $|f(z_n) - f(z)| \geq \varepsilon$, así la sucesión (z_n) converge a z, pero $f(z_n) \notin D(f(z), \varepsilon)$. ■

Ejemplo 1.3. La aplicación $f(z) = |z|$ es continua en $\mathbb{C}$.
Sea z_n una sucesión tal que $z_n \to z$, entonces $|f(z_n) - f(z)| = ||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$ lo que implica que $f(z_n) \to f(z)$.

Proposición 1.1. *Sean f, g son funciones con valores complejos, continuas en un punto p de X. Entonces $f + g$, $f - g$, y , fg; son todas continuas en p. El cociente $\dfrac{f}{g}$ también* *es continuo en p si $g(p) \neq 0$. Además la función $h = g \circ f$, es continua en p si g es continua en $f(p)$.*

La demostración de la anterior proposición es muy sencilla, y se realiza en cualquier curso de cálculo.

Ejemplo 1.4. En general si f y g son dos funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, la función $H : X \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $H(z) = f(z) + ig(z)$, es continua en $\mathbb{C}$.
En efecto, si V es un subconjunto abierto de $H(X)$, y $(f(x), g(x))$ un punto en V, y se definen $\Pi_1(V)$, y $\Pi_2(V)$ como las respectivas proyecciones de V sobre $\mathbb{R}$, es claro que $\Pi_1(V)$ y $\Pi_2(V)$ son dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, y además $f(x) \in \Pi_1(V)$, y $g(x) \in \Pi_2(V)$. Como f y g son continuas en $\mathbb{R}$, entonces

$$U = f^{-1}(\Pi_1(V)) \cap g^{-1}(\Pi_2(V)),$$

es un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Por otra parte si $(a, b) \in H(U)$. entonces $a \in \Pi_1(V)$, y $b \in \Pi_2(V)$, luego $(a, b) \in V$. por lo tanto $H(U) \subset V$.

Ejemplo 1.5. La aplicación $f(z) = z/|z|$ es continua en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Esto se deduce fácilmente de la continuidad de las funciones $g(z) = z$ y $h(z) = |z|$, y de la proposición 1.1.

Ejemplo 1.6. La función $f(\theta) = e^{i\theta}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ es continua.
Pues $f(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, y las funciones sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7. Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es continua.

Proposición 1.2. *Sea I un intervalo semi-abierto de $\mathbb{R}$ de origen α y longitud 2π, es decir, $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ ó $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$, y sea $L_\alpha = \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$ (Figura 1.2). Entonces la función $Log(z) =: log(|z|) + iArg_I(z)$, restringida a $\mathbb{C}\backslash L_\alpha$ es continua.*

Demostración.
Sean $f_1 = log(|z|)$, y $f_2 = Arg_I(z)$, entonces del ejemplo 1.4 tenemos que $Log(z)$ es una

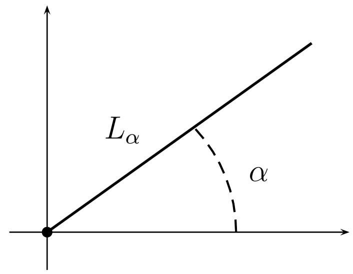


Figura 1.2: Conjunto L_α.

función continua si y solo si, f_1 y f_2 lo son.
Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $|z| > 0$, se define para z en $\mathbb{C} - \{0\}$ $g(z) = |z|$, y para x en $[0, +\infty)$, $h(x) = log(x)$, entonces $f_1 = h \circ g$. Claramente h es una función continua, y por el ejemplo 1.3 g también lo es. Por lo tanto f_1 es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$.
Ahora sean $z \in \mathbb{C} \backslash L_\alpha$ y (z_n) una sucesión de $\mathbb{C} \backslash L_\alpha$ que converge a z. Si

$$\lim_{n \to \infty} f_2(z_n) = l,$$

se tiene que $e^{if_2(z_n)} \to e^{il}$ por la continuidad de $e^{i\theta}$, y

$$e^{if_2(z_n)} = e^{iArg_I(z_n)} = \cos Arg_I(z_n) + i \operatorname{sen} Arg_I(z_n) = \frac{z_n}{|z_n|} \to \frac{z}{|z|},$$

por la continuidad de $z/|z|$. Entonces $|z|e^{il} = z$, así $l = f_2(z) + 2k\pi$, donde $k \in Z$. Si se supone que $k \neq 0$, se tiene que $k = \pm 1$, pues $|l - f_2(z)| \leq 2\pi$. Pero esto implica que $l = \alpha + 2\pi$ y $f_2(z) = \alpha$, ó $l = \alpha$ y $f_2(z) = \alpha + 2\pi$, lo que es imposible pues se tendría que $z = |z|e^{i\alpha}$ y z estaría en $\mathbb{C} \backslash L_\alpha$. Entonces necesariamente $k = 0$ y $l = f_2(z)$; así para demostrar la continuidad de f_2 solo se debe mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} f_2(z_n) \text{ existe.}$$

Sea $a = \lim inf\, f_2(z_n)$, $b = \lim sup\, f_2(z_k)$. Es claro que $\alpha \leq a \leq b \leq 2\pi$, y existen subsucesiones (z_{n_k}), (z_{m_k}) de (z_n), convergentes a z, tal que $f_2(z_{n_k}) \to a$, y $f_2(z_{m_k}) \to b$. Entonces, $a = f_2(z) = b$, quedando así demostrado. ∎

Nota 1.1. *Si z es un elemento de L_α, la función $f = Arg_I$ no puede ser continua en este punto. Pues si $z = re^{i\alpha}$, donde $r \geq 0$, y si*

$$z_n = r_n e^{i\left(\alpha + \frac{2n\pi}{n+1}\right)},$$

es una sucesión donde $r_n > 0$ *y se tiene que* $r_n \to r$, *entonces* z_n *tiende a* z, *pero* $f(z_n) \to \alpha + 2\pi \neq f(z)$. *Es por esto que se hace necesario utilizar en muchos casos argumentos distintos a* arg *y* Arg, *por ejemplo si se desea usar un argumento que sea continuo en* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Proposición 1.3. *Si se define la función* $E(z) = e^z$, *entonces* $E(Log(z)) = z$.

Demostración.
$E(Log(z)) = e^{log|z|+iArg_I(z)} = e^{log|z|}e^{iArg_I(z)}$. Como $e^{iArg_I(z)} = \cos Arg_I(z) + i \operatorname{sen} Arg_I(z) = \dfrac{z}{|z|}$, entonces $E(Log(z)) = |z|\dfrac{z}{|z|} = z$. ■

Es claro que el número $w = log|z| + iArg_I(z)$, satisface que $e^w = z$, pero también cumplen esto los números de la forma $log|z| + iArg_I(z) + 2n\pi i$ donde n es un entero. Es por esto que $Log(z)$ no es el inverso a derecha de E.

Lema 1.1. *Lema del pegamiento. Sean* X *e* Y *espacios topológicos y* $X = A \cup B$, *donde* A *y* B *son conjuntos cerrados en* X. *Sean* $f : A \longrightarrow Y$ *y* $g : B \longrightarrow Y$ *funciones continuas. Si* $f(x) = g(x)$ *para cada* x *en* $A \cap B$, *entonces* f *y* g *se combinan para dar una nueva función continua* $h : X \longrightarrow Y$, *definida mediante*

$$h(z) := \begin{cases} f(z) & si \quad z \in A. \\ g(z) & si \quad z \in B. \end{cases}$$

Demostración.
Sea C un subconjunto cerrado de Y, entonces $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$, como f es continua se tiene que $f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de A, por lo tanto es un cerrado de X. De igual forma $g^{-1}(C)$ es cerrado en B, luego es cerrado en X. Así $h^{-1}(C)$ es cerrado en X. ■

Este lema también se cumple si A y B son conjuntos abiertos en X.
Después de haber descrito algunos resultados importantes que se usarán en los capítulos posteriores sobre la continuidad de una función, y su relación con la topología, se definirá lo que es una extensión de una función.

Definición 1.2. Sea $A \subseteq X$, y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua, se dice que la función $F : X \longrightarrow Y$ es una extensión de f, si y solo si, F es continua y para cada $a \in A$, $f(a) = F(a)$.

Garantizar si una función admite una extensión es un problema no muy fácil de resolver. Sin embargo, el siguiente teorema, conocido como teorema de extensión de Tietze, ofrece una herramienta útil para darle solución a este problema, si se tiene en cuenta que $\mathbb{C}$ es un espacio *normal*.

Nota 1.2. *Un espacio es normal si, y sólo si, cada par de subconjuntos cerrados y disjuntos* A, B *pueden ser separados por abiertos disjuntos; es decir, existen conjuntos abiertos* U_A, U_B *con* $U_A \cap U_B = \emptyset$, *que contienen a* A *y* B *respectivamente.*

Teorema 1.3. *Extensión de Tietze. Sea* X *un espacio normal. Dada* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, de un subconjunto cerrado* $A \subseteq X$, *existe una extensión* F *de* f *con* $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [8].

1.2. Compacidad

En esta sección se introduce el concepto de recubrimiento de un conjunto para así definir lo que es un conjunto compacto. Además se mostrarán algunos teoremas muy importantes, entre los cuales se encuentra el teorema del recubrimiento de Lindelöf, que será de gran utilidad en uno de los capítulos posteriores.
Dado un subconjunto X de $\mathbb{C}$, se dice que una colección $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos de $\mathbb{C}$, sobre un conjunto de índices I, es un cubrimiento abierto de X, si y solo si

$$X \subseteq \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Si además existe $J \subseteq I$ tal que $\{U_j\}_{j \in J}$ es también un cubrimiento de X, a la familia $\{U_j\}$ se le llama un subcubrimiento de $\mathcal{U}$.

Definición 1.3. Un subconjunto X de $\mathbb{C}$ es compacto si y solo si, cada cubrimiento abierto de X, admite un subcubrimiento finito.

Si un conjunto es compacto, no implica que cada subconjunto suyo lo sea, por ejemplo $[0,1]$ es compacto y $(0,1) \subset [0,1]$ no es compacto, sin embargo, existen algunos subconjuntos que sí tienen esta propiedad. Esto lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea X un conjunto compacto, si A es un subconjunto cerrado de X, entonces A es compacto.*

Demostración.
Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, un cubrimiento por abiertos de A. Como A es un subconjunto cerrado en X, el conjunto $U := X \backslash A$ es un abierto de X. Tomando $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{U\}$ que es un cubrimiento de X, y teniendo en cuenta que X es compacto, existen $A_1, A_2, ..., A_k$ en $\mathcal{A}$, tal que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup U = X$, entonces $A \subset A_1 \cup A_2 ... \cup A_k \cup U$, además como $U = X\backslash A$, se tiene que $U \cap A = \emptyset$, por lo tanto $A \subset A_1 \cup ... \cup A_k$, de esta forma A es compacto. ■

En general el recíproco de este teorema no es cierto, pues si tomamos el espacio $X = \{a, b\}$ con la topología indiscreta formada por X y $\emptyset$, entonces X es compacto, y el subconjunto $\{a\} \subset X$, es compacto y no es cerrado. Sin embargo existe una excepción, pues si el conjunto tiene la característica de ser Hausdorff, esto se cumple. Esto es:

Teorema 1.5. *Cada conjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración.
Sean X un espacio de Hausdorff, S un subconjunto compacto de X, y x un elemento de $X\backslash S$. Para cada elemento p de S, existen dos abiertos U_p, V_p de X, tal que $U_p \cap V_p = \emptyset$ y además $x \in U_p$ y $p \in V_p$. Definiendo $\mathcal{S} = \{V_p : p \in S\}$, es claro que $S \subset \bigcup \mathcal{S}$, como S es compacto, existen $V_{p_1}, ..., V_{p_m}$ en $\mathcal{S}$, tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{p_i}$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{p_i}$, entonces $x \in U$ y además $U \cap V_{p_i} = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, ..., m$, pues $U \subset U_i$ para cada i, por lo tanto $U \cap S = \emptyset$, luego $U \subset X\backslash S$, y de esta forma $X\backslash S$ es un subconjunto abierto de X. ■

Ahora se mostrará que la compacidad es un invariante topológico, es más, es preservada por funciones continuas.

Teorema 1.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración.
Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento por abiertos de $f(X)$, se define $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A_\alpha) : A_\alpha \in \mathcal{A}\}$. Si $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X)$, así existe un A_α en $\mathcal{A}$ tal que $f(x) \in A_\alpha$, de esta forma $x \in f^{-1}(A_\alpha)$, por lo tanto $x \in \bigcup \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Como X es compacto se tiene que $X = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup ... \cup f^{-1}(A_n) \subset \mathcal{B}$. Tomando $\mathcal{C} = \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, ..., A_{\alpha_k}\} \subset \mathcal{A}$, y $y_0 \in f(X)$, entonces existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$, luego existe un $m \in \{1, ..., k\}$ tal que $x_0 \in f^{-1}(A_{\alpha_m})$ y $f(x_0) \in A_{\alpha_m}$, así $y_0 \in A_{\alpha_m}$, y $\mathcal{C}$ es un subcubrimiento finito de $f(X)$, y se concluye que $f(X)$ es compacto. ■

Teorema 1.7. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es homeomorfismo.*
2. *f es cerrada, es decir, la imagen de un cerrado de X es un cerrado en Y.*

Demostración.
Sea V un subconjunto cerrado de X, como $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, es continua, $(f^{-1})^{-1}(V)$ es cerrado, y como f es biyección $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$, luego f es cerrada.
Recíprocamente sea U un subconjunto cerrado de X, por lo tanto $f(U)$ es un cerrado de Y, y como $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, entonces f^{-1} es continua. ■

Si una función continua es una biyección, entonces existe su inversa, pero no se sabe nada a cerca de su continuidad. En el caso de los espacios compactos, se puede asegurar que la inversa de una función biyectiva, existe y es continua, si además se cumplen otras propiedades.

Teorema 1.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva, si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.
Se mostrará que f es cerrada. Sea A un subconjunto cerrado de X, entonces por el teorema 1.4 A es compacto, y como $f(A) \subset Y$, por el teorema 1.5 se tiene que $f(A)$ es cerrado. ■

El teorema de Lindelöf dice que todo recubrimiento abierto de un conjunto X de $\mathbb{R}^n$ contiene un subrecubrimiento numerable, para demostrar este teorema se utiliza el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Sea $G = \{A_1, A_2, ...\}$ la colección numerable de toda las n-bolas de radio racional y con centro en puntos de coordenadas racionales. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y X es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x, entonces por lo menos una de las n-bolas de G contiene a x y esta contenida en X. Es decir:*

$$x \in A_k \subseteq X \textit{para algún } A_k \textit{ de } G.$$

Demostración.
Si $x \in \mathbb{R}^n$ y X es un abierto, y además $x \in X$, entonces existe una bola $B(x, r) \subseteq X$. Se escoge un punto y de X de coordenadas racionales muy cercano a x, y se toma como centro para construir un subconjunto de G interior a $B(x, r)$ y que contenga a x. Sea

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

Y y_k un número racional tal que $|y_k - x_k| < \dfrac{r}{4n}$ para todo $k = 1, 2, ..., n$. Entonces

$$\|y - x\| \leq |y_1 - x_1| + ... + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

Si q es un número racional tal que $\dfrac{r}{4} < q < \dfrac{r}{2}$, entonces $x \in B(y, q)$ y $B(y, q) \subseteq B(x, r) \subseteq X$. Así el teorema queda demostrado. ■

Teorema 1.10. *(Teorema del recubrimiento de Lindelöf). Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, y F un recubrimiento abierto de A. Entonces existe un subcubrimiento numerable de F, que también recubre a A.*

Demostración.
Sea $x \in A$, entonces existe un conjunto abierto V de F tal que $x \in V$. Por el teorema

1.9 existe una bola A_k de centro de coordenadas racionales y radio racional, tal que $x \in A_k \subseteq V$. Para cada V existe una cantidad numerable de estas A_k pero solo se tomará una de ellas, la de índice mas pequeño. Sea $m = m(x)$ este índice. Entonces $x \in A_{m(x)} \subseteq V$. El conjunto de todas las bolas $A_{m(x)}$ obtenidas al tomar todos los elementos x de A es una colección numerable de conjuntos abiertos que recubren a A. Ahora se toma para cada $A_{k(x)}$ uno de los conjuntos V de F tal que $A_{k(x)} \subseteq V$, luego se ha encontrado un subrecubrimiento numerable de F que recubre a A. ■

Por último se va a recordar un famoso teorema debido a Weierstrass, que establece que toda función continua definida en un compacto puede aproximarse uniformemente a un polinomio. Este resultado va a ser de gran utilidad en el capítulo cuarto.

Teorema 1.11. *Sea f una función continua definida en un subconjunto compacto A. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p (que depende de ε) tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para cada } x \in A.$$

En [2] se puede ver una demostración de este teorema.

1.3. Conexidad

Algunos espacios, parecen estar formados por una sola pieza, es decir, que las partes que lo constituyen no están desconectadas. La definición de conexión es muy natural, un espacio puede ser separado, si es posible dividirlo en dos conjuntos abiertos que no se intersecan, en caso contrario, se dice que el espacio es conexo. En esta sección se precisa este concepto de conexidad, y se dan a conocer algunos resultados que serán utilizados en los siguientes capítulos.

Definición 1.4. Una desconexión de un subconjunto X de $\mathbb{C}$ es una pareja (U, V) de subconjuntos abiertos, no vacíos, tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si U, V es una pareja de abiertos en $\mathbb{C}$ tales que $X \cap U \neq \emptyset$ y $X \cap V \neq \emptyset, X \subseteq U \cup V$ y $X \cap U \cap V = \emptyset$, entonces $(U \cap X, V \cap X)$ es una desconexión de X.

Definición 1.5. Se dice que un subconjunto X de $\mathbb{C}$ es disconexo, si X admite una desconexión. En caso contrario se dice que X es conexo.

Si X es un subconjunto conexo, no admite subconjuntos propios abiertos y cerrados a la vez. Pues si existiera U abierto y cerrado en X, y $\emptyset \neq U \neq X$, $(U, X \setminus U)$ sería una desconexión de X. Por lo tanto si U es un abierto y cerrado no vacío, necesariamente $U = X$.

Ejemplo 1.8. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ es un conjunto no conexo, ya que es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos, $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Ejemplo 1.9. Si $a \in \mathbb{C}$ el conjunto $\{a\}$ es evidentemente conexo.

Ejemplo 1.10. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es no conexo, pues $\mathbb{Q} = A \cup B$ donde $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ y $B = \{y \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < y\}$.

Lema 1.2. *Si los conjuntos A y B forman una desconexión de X, y además $C \subset X$ es conexo, entonces $C \subset A$ ó $C \subset B$.*

Demostración.
Si $A \cap C \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$, entonces estos dos conjuntos serían una desconexión de C.

■

Ahora se mostrará que la conexidad es preservada por las funciones continuas, y por lo tanto un invariante topológico.

Teorema 1.12. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración.
Sea $f(X) = Z$, entonces $f : X \longrightarrow Z$ es una función continua y sobreyectiva. Si se supone que $Z = A \cup B$ donde A y B son conjuntos disjuntos no vacíos, y abiertos en Z, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos disjuntos cuya unión es X, y no vacíos pues f es sobreyectiva. Así A y B forman una desconexión de X, lo que contradice que X es conexo. ■

1.4. Componentes de $\mathbb{C}$

Cada subconjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ puede expresarse de forma única como la union de trozos conexos llamados componentes. Esto se mostrará en esta sección. Primero veremos un teorema muy importante.

Teorema 1.13. *La unión de una colección de conjuntos conexos de $\mathbb{C}$ que tienen un punto en común es conexa.*

Demostración.
Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de conexos y sea p un punto de $\bigcap A_\alpha$. Si se supone que C, D es una desconexión de $\bigcup A_\alpha$ entonces p está en C o está en D. Como A_α es conexo, $A_\alpha \subset C$ ó $A_\alpha \subset D$. Si $p \in C$, entonces $A_\alpha \subset C$ pues $p \in A_\alpha$ para cada α, y $p \in C$. Por lo tanto $\bigcup A_\alpha \subset C$ contradiciendo que $D \neq \emptyset$. ■

Todo punto z de $X \subseteq \mathbb{C}$, pertenece por lo menos, a un subconjunto conexo de $\mathbb{C}$, el conjunto $\{z\}$. Por lo tanto por el teorema 1.13 la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a z también es conexo. A esta unión se le llama la componente de X que contiene a z. Así la componente de X que contiene a z es el subconjunto conexo maximal de X que contiene a z.

Teorema 1.14. *Todo punto de $X \subseteq \mathbb{C}$, pertenece a una única y determinada componente de X.*

Demostración.
Dos componentes distintas no pueden tener ningún punto en común. Por otra parte si $z \in \mathbb{C}$, esta en dos componentes, por el teorema 1.13 su union seria un conjunto conexo más grande que contendría a z. ■

1.5. Conexión por arcos

A continuación se describe una propiedad que poseen algunos conjuntos conexos de $\mathbb{C}$, llamada conexión por arcos.

Definición 1.6. Un conjunto X de $\mathbb{C}$ se llama arco-conexo, si para cada par de puntos a y b de X, existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que

$$f(0) = a \quad \text{y} \quad f(1) = b.$$

Esta función es llamada camino de a a b. Si $f(0) \neq f(1)$, la imagen de $[0,1]$ por medio de f se denomina arco que une a a con b. Entonces X es arco-conexo si cada dos puntos distintos de X, pueden unirse por medio de un arco contenido en X.

Ejemplo 1.11. Cada conjunto convexo de $\mathbb{C}$ es arco-conexo, pues el segmento de recta que une dos puntos del conjunto, está contenido en el conjunto.

Ejemplo 1.12. Los discos abiertos y los discos cerrados en $\mathbb{C}$ son conjuntos arco-conexos.

Ejemplo 1.13. El conjunto de la figura 1.3 consiste en todos los puntos de la forma $(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x})$, para $0 < x \leq 1$, y los puntos del segmento vertical $(0, y)$, con $-1 \leq y \leq 1$. Este conjunto conocido como *curva seno del topólogo*, es conexo pero no arco-conexo.

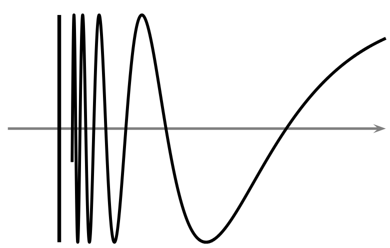


Figura 1.3: Seno del Topólogo.

El concepto de conexión por arcos, es mas fuerte que el de conexidad, esto lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Si X es un conjunto arco-conexo, entonces X es conexo.*

Demostración.
Para todo par de puntos $x, y \in X$, existe una función continua $f : I \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Por el teorema 1.12 se tiene que f(I) es un conjunto conexo por

ser imagen continua de un conexo, luego para todo $x, y \in X$ existe $M = f(I)$ conexo, tal que $x, y \in M$. Ahora se define para cada x_0 en X el conjunto

$$\mathcal{C}(x_0) = \bigcup M \text{ tal que } M \subset X \text{ es conexo y } x_0 \in M.$$

De esta forma si $z \in X$, entonces $\mathcal{C}(z) = X$, pues para todo y en X existe un M conexo tal que $\{z, y\} \subset M$ y $y \in M \subset \mathcal{C}(z)$. Por lo tanto X posee una única componente conexa, así X es conexo. ■

En el ejemplo 1.13 se muestra un conjunto conexo que no es arco-conexo, sin embargo en el caso de conjuntos abiertos, estas propiedades son equivalentes.

Teorema 1.16. *Todo conjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$ es arco-conexo.*

Demostración.
Sea S un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Sean $x \in S$, A el conjunto de los $y \in S$ que puede unirse con x, y $B = S \setminus A$. Es claro que $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos disjuntos. Sea $a \in A$, entonces se une a a con x por medio de un arco Γ contenido en S. Como S es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subseteq S$. Cada z en $D(a, r)$ puede unirse con a por medio de un segmento de recta contenido en S, por lo tanto puede unirse con x por medio de Γ. Así si $z \in D(a, r)$, entonces $z \in A$. Esto implica que $D(a, r) \subseteq A$, luego A es abierto.
Ahora se mostrará que B también es abierto. Sea $b \in B$. Entonces existe $r_1 > 0$ tal que $D(b, r_1) \subseteq S$, pues S es abierto. Si un punto z de $D(b, r_1)$ se pudiera unir con x por medio de un arco Γ_1, el punto b también podría unirse con x, pero como $b \notin A$, ningún punto de $D(b, r_1)$ debe pertenecer a A. Así $D(b, r_1) \subseteq B$, luego B es abierto.
Por lo tanto se ha encontrado una desconexión (A, B) de S. Pero A es no vacío, pues $x \in A$. Como S es conexo entonces $A = S$. ■

Teorema 1.17. *Todo conjunto abierto X de $\mathbb{C}$, puede expresarse de forma única, como la unión de una familia disjunta numerable de conjuntos conexos y abiertos.*

Demostración.
Por el teorema 1.14, las componentes de X constituyen una colección de conjuntos disjuntos cuya unión es X. Cada componente T de X es abierta, pues si $z \in T$, existe

$r > 0$ tal que $D(z,r) \subseteq T$. Por el teorema de Lindelöf, las componentes de X son una colección numerable, y nuevamente por el teorema 1.14 la descomposición en componentes es única. ■

1.6. Singularidades

En esta sección se aborda un tipo de funciones que son por decirlo así, las mas importantes en el análisis complejo: las funciones analíticas; para poder llegar a la definición de singularidad y luego definir lo que es un polo. Estas funciones tienen la propiedad de poseer derivada continua en cada punto de un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Definición 1.7. Sean $X \subseteq \mathbb{C}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, y $a \in X$. Se dice que f es analítica en a, si existen $r > 0$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, convergente en $D(a,r)$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in D(a,r) \cap X.$$

Si f es analítica en todo punto a de $A \subseteq X$, se dice que f es analítica en A. Si $A = X$, se dice simplemente que f es analítica.

Ejemplo 1.14. La función $E(z) = e^z$ es analítica en $\mathbb{C}$. Es claro que $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $a \in \mathbb{C}$, si se define

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n, \; z \in \mathbb{C},$$

Entonces es fácil ver que $G'(z) = G(z)$, para todo z. Si ahora se define $h(z) := \dfrac{G(z)}{E(z)}$, entonces

$$h'(z) = \frac{E(z)G'(z) - G(z)E'(z)}{(E(z))^2} = 0$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto h es constante. Como $h(a) = \dfrac{e^a}{e^a} = 1$, entonces $E(z) = G(z)$, para todo z en $\mathbb{C}$. Luego $E(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.15. Si z es un número complejo, se define

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Por lo tanto las funciones $\text{sen}(z)$, $\cos(z)$ son analíticas en $\mathbb{C}$, pues $e^{\pm z}$, $e^{\pm iz}$ son analíticas en $\mathbb{C}$.

Es claro que no todas las funciones son analíticas, además existen algunas que tienen pocos puntos en los cuales esta propiedad falla, estos puntos son conocidos como singularidades.

Definición 1.8. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Si a es un punto donde f no es analítica, se dice que a es una singularidad de f. Si a es una singularidad de f pero existe $F : X \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$, analítica en a, tal que $F(z) = f(z)$ para todo $z \neq a$, se dice que a es una seudo-singularidad de f.

Si a es una seudo-singularidad de $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, y $a \notin X$, se dice que a es una singularidad evitable de f, y que F es una extensión de f a a. Si $a \in X$ se dice que a es una singularidad removible de f, y que F es una redefinición de f en a. Una singularidad no removible, o no evitable, se denomina singularidad irremovible.

Ejemplo 1.16. Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n+1}}{n(n+1)}$, para z en $\overline{D}(0,1)$. Entonces $a = 1$ es singularidad irremovible de f. Pues

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -Log(1-z), \text{ para } |z| \leq 1,$$

y si fuera singularidad removible de f, también lo sería de f', lo que es imposible pues $\lim_{z\to 1} f'(z) = -\lim_{z\to 1} Log(1-z) = \infty$.

Ejemplo 1.17. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, para z tal que $|z| < 1$. Entonces $a = 1$ es singularidad irremovible de f. Pues

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)}, \text{ para } |z| \leq 1,$$

por lo tanto $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$.

Ejemplo 1.18. Sea $f(z) = \frac{\text{sen}\, z}{z}$, si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función es analítica en todo punto excepto en el 0, pues $\frac{\text{sen}\, z}{z} \to 1$, cuando $z \to 0$. Si se vuelve a definir f de tal forma que $f(0) = 1$, la nueva función es analítica. Por lo tanto 0 es una singularidad removible.

Definición 1.9. Una singularidad a de $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, se llama aislada si existe $r > 0$ tal que $D^*(a,r) \subseteq X$ y f es analítica en $D^*(a,r)$.

Si a es una singularidad aislada de $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces a es un punto interior de $X \cup \{a\}$, por lo tanto un punto de acumulación de X.

Ejemplo 1.19. Si $f(z) = \dfrac{1}{z}$, para todo $z \neq 0$, entonces 0 es una singularidad aislada de f.

Ejemplo 1.20. Si $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, para todo $z \neq 0$, 0 es una singularidad aislada removible.

Teniendo en cuenta la anterior información, ahora si se puede definir lo que es un polo. Para hacer esto es necesario conocer lo que es el desarrollo de Laurent de una función, esta información se puede encontrar en [2] y [3].

Definición 1.10. Sea a una singularidad aislada de la función f, y sea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

el desarrollo de Laurent de f alrededor de a. Si existe $m \geq 1$ tal que $a_{-n} = 0$ para $n > m$ y $a_{-m} \neq 0$, se dice que a es un polo de orden m de f. Si una singularidad aislada irremovible no es un polo, se dice que es una singularidad esencial.

Ejemplo 1.21. Sea $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^5}$ si $z \neq 0$. El desarrollo de Laurent alrededor de 0 es:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^5} = z^{-4} - \frac{1}{3!} z^{-2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} z^2 + ...$$

por lo tanto el punto 0 es un polo de orden 4, pues $a_{-n} = 0$, para cada $n > 4$ y $a_{-4} = z^{-4} \neq 0$.

Ejemplo 1.22. Sea $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ si $z \neq 0$. Entonces

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + ... + \frac{1}{n!} z^{-n} + ...$$

luego 0 es una singularidad esencial de f, pues en esta suma no existe una mínima potencia negativa de z.

CAPÍTULO 2

LOGARITMOS CONTINUOS

A lo largo de este capítulo se usará la siguiente notación y terminología: $\mathbb{R}$ denota los números reales, $\mathbb{C}$ denota el plano complejo, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el plano perforado, I denota el intervalo $[0, 1]$, $D(a, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - a| < r\}$, es el disco abierto con centro a y radio r, Δ es el disco unitario cerrado $\overline{D(0, 1)}$, y $T = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\ \zeta| = 1\}$ denota su frontera. Se dice que a es el logaritmo de b si se cumple que $e^a = b$. Todo número complejo diferente de cero admite un logaritmo, pero en funciones con valores en $\mathbb{C}^*$ no necesariamente se encuentran logaritmos continuos, en esto se basa gran parte de lo que se mostrará en esta sección. Primero se darán las definiciones de algunos conjuntos conformados por funciones complejas y la de una relación definida en uno de ellos, además se darán a conocer unas propiedades muy importantes que estos conjuntos poseen, y que serán utilizadas a la hora de mostrar los resultados deseados.

Definición 2.1. Sea X un espacio compacto de Hausdorff, se define el conjunto $\mathbb{C}(X)$ como el espacio normado de todas las funciones complejas continuas en X, con la norma usual. Esta norma esta representada por el número $\|f\|$, donde

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|, \text{ para todo } f \in \mathbb{C}(X).$$

Nota 2.1. *Un espacio normado es un espacio lineal S en el cual se ha definido una función (norma) $N : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:*

- $N(x) = 0$, *si y sólo si,* $x = \odot$ *($\odot$ es el elemento neutro del espacio lineal S.)*
- *Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, y para todo $x \in S : N(\alpha x) = |\alpha| N(x.)$*
- *Para todo $x, y \in S : N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

Definición 2.2. Sea X un espacio compacto de Hausdorff, se denota por $\mathbb{C}^*(X)$ el subconjunto de todas las funciones invertibles con el producto usual de funciones en $\mathbb{C}(X)$, es decir, aquellas que nunca toman el valor de 0.

Proposición 2.1. $\mathbb{C}^*(X)$ *es un grupo abeliano bajo la multiplicación de funciones.*

Demostración.
Sean f, g, h funciones en $\mathbb{C}^*(X)$

1. $\mathbb{C}^*(X)$ *es cerrado* :
   Sea $x \in X$, entonces $(fg)(x) := f(x)g(x)$, como $f, g \in \mathbb{C}^*(x), f(x)g(x) \neq 0$ para cada $x \in X$.

2. *En* $\mathbb{C}^*(X)$ *se cumple la asociatividad* :
   Sea $x \in X$, entonces:
   $((fg)h)(x) = (fg)(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)) = f(x)(gh(x)) = (f(gh))(x)$.

3. *Existe módulo en* $\mathbb{C}^*(X)$:
   Sea $I(x) := 1$ para todo $x \in X$, claramente $I \in \mathbb{C}^*(X)$, si $x \in X$, entonces: $(fI)(x) := f(x)I(x) = f(x) \cdot 1 = 1 \cdot f(x) = I(x)f(x) = (If)(x) = f(x)$, luego $If = fI = f$.

4. *Cada elemento de* $\mathbb{C}^*(X)$ *es invertible* :
Sea $x \in X$, entonces $f(x) \neq 0$, por lo tanto $1/f(x) \in \mathbb{C}^*(X)$, así $1/f \in \mathbb{C}^*(X)$, además $(1/f(x))f(x) = 1$, luego $f^{-1} = 1/f$ es la función deseada.

5. *En* $\mathbb{C}^*(X)$ *se cumple la conmutatividad* :
Sea $x \in X$, entonces $(fg)(x) := f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$, por la conmutatividad de la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

Luego $\mathbb{C}^*(X)$ es un grupo abeliano. ■

Definición 2.3. Sea X un espacio compacto de Hausdorff, entonces se define el siguiente conjunto

$$\exp \mathbb{C}(X) := \{e^f : f \in \mathbb{C}(X)\}.$$

La siguiente proposición muestra la relación existente entre los conjuntos definidos anteriormente.

Proposición 2.2. $\exp \mathbb{C}(X)$ *es un subgrupo de* $\mathbb{C}^*(X)$.

Demostración.
Claramente $\exp \mathbb{C}(X) \subseteq \mathbb{C}^*(X)$. Sean f, g funciones en $\exp \mathbb{C}(X)$, entonces existen f', g' en $\mathbb{C}(X)$ tal que $f = e^{f'}$ y $g = e^{g'}$.

1. $\exp \mathbb{C}(X)$ *es cerrado*:
Sea $x \in X$, entonces $(fg)(x) := f(x)g(x) = e^{f'(x)}e^{g'(x)} = e^{f'(x)+g'(x)} = e^{(f'+g')(x)}$, donde $(f' + g') \in \mathbb{C}(X)$ y por tanto $fg = e^{f'+g'} \in \exp \mathbb{C}(X)$.

2. *Existe el inverso para cada elemento de* $\exp \mathbb{C}(X)$:
Sea $f \in \exp \mathbb{C}(X)$, entonces $f = e^{f'}$, por lo tanto $1/f = 1/e^{f'} = e^{-f'}$, luego $1/f \in \exp \mathbb{C}(X)$, y $f \cdot (1/f) = 1$.

■

Es importante resaltar que en realidad $\exp \mathbb{C}(X)$ es un subgrupo normal de $\mathbb{C}^*(X)$, luego tiene sentido la siguiente definición

Definición 2.4. Para dos funciones f, g en $\mathbb{C}^*(X)$ se define la relación " $\sim$ " así:

$$f \sim g, \text{ si y solo si, } fg^{-1} \in \exp \mathbb{C}(X).$$

De esta manera la relación " $\sim$ " es de equivalencia y se define el grupo cociente

$$H_X := \mathbb{C}^*(X)/\exp \mathbb{C}(X),$$

entonces para dos funciones f, g en $\mathbb{C}^*(X)$, se tiene que $f \sim g$ si y solo si, f y g pertenecen a la misma clase de $\exp \mathbb{C}(X)$, es decir representan el mismo elemento de H_X. La siguiente proposición nos presenta un invariante entre diferentes estructuras matemáticas.

Proposición 2.3. *Si X es homeomorfo a Y, entonces H_X es isomorfo a H_Y.*

Demostración.
Sea h el homeomorfismo de X en Y. Si se define $\phi : H_Y \longrightarrow H_X$ como, $\phi([f]) = [f \circ h]$, se mostrará que ϕ es un isomorfismo de grupos.

1. Si $[f] = [g]$ entonces $f \sim g$, es decir $f/g \in \exp \mathbb{C}(X)$, luego $f/g = e^l$ donde $l \in \mathbb{C}(Y)$. Por lo tanto para todo y en Y, $(f(y))/(g(y)) = e^{l(y)}$, en particular para cada $h(x)$, con x en X, $(f(h(x)))/(g(h(x))) = e^{l(h(x))}$. Así $(f \circ h)/(g \circ h) = e^{l \circ h}$, por consiguiente $(f \circ h) \sim (g \circ h)$, y $[f \circ h] = [g \circ h]$. De esta forma ϕ esta bien definida.

2. Si $f \circ h$ es un elemento de $\exp \mathbb{C}(X)$, entonces para todo x en X, $f \circ h(x) = f(h(x)) = e^{l(x)}$, con l en $\mathbb{C}(X)$, como h es homeomorfismo $f(h(x)) = f(y)$ para algún y en Y, y además $f(y) = e^{l(h^{-1}(y))} = e^{(l \circ h^{-1})(y)}$. Claramente $l \circ h^{-1}$ es una función en $\mathbb{C}(Y)$, luego f es un elemento de $\exp \mathbb{C}(Y)$, por lo tanto ϕ es una función uno a uno.

3. Sea $[g]$ un elemento de H_X, entonces $g \circ h^{-1}$ es una función en $\mathbb{C}(Y)$, por lo tanto $[g \circ h^{-1}]$ es un elemento de H_Y, así $\phi([g \circ h^{-1}]) = [(g \circ h^{-1}) \circ h] = [g]$, luego ϕ es una función sobreyectiva.

4. Sean $[f]$,$[g]$ dos elementos en H_Y, entonces $\phi([f][g]) = \phi([fg]) = [(fg) \circ h] = [(f \circ h)(g \circ h)] = [f \circ h][g \circ h] = \phi[f]\phi[g]$.

Por consiguiente de $1, 2, 3, 4$, se tiene que ϕ es un isomorfismo de H_Y en H_X. ■

En el teorema 2.1 se dará otra interpretación de la relación de equivalencia " $\sim$." Primero se necesita mostrar un lema sencillo.

Lema 2.1. *Si $f, g \in \mathbb{C}(X)$, y $|g| < |f|$ en X, entonces $f + g \sim f$.*

Demostración.
f y $f + g$ nunca son cero, pues si existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$, entonces $|g(x)| < 0$, lo que es imposible. Por otra parte si $(f + g)(x) = 0$ para algún x en X, entonces $f(x) + g(x) = 0$, así $f(x) = -g(x)$, lo que contradice la hipótesis. Sea $r = g/f$, y $x \in X$ entonces $|r(x)| < 1$. Por lo tanto $(f(x) + g(x))/f(x) = 1 + g(x)/f(x) = 1 + r(x)$, claramente se ve que $1 + r(x) \notin A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$. Luego existe un logaritmo continuo para $1 + r(x)$. Sea $1 + r(x) = y$, entonces $Log(1 + r(x)) = Log(y)$ luego $e^{Log(1+r(x))} = e^{Log(y)}$, por consiguiente $1 + r(x) = e^{Log(y)}$, por lo tanto $(f(x) + g(x))/f(x) = e^{Log(y)}$, así $(f + g)/f \in \exp \mathbb{C}(X)$, y $f + g \sim f$. ■

Como se mencionó anteriormente, $\mathbb{C}(X)$, es un espacio *normado*, y

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \;\; f, g \in \mathbb{C}(X)$$

es la métrica inducida por la *norma* de $\mathbb{C}(X)$. De esta forma es fácil ver que con esta métrica, $\mathbb{C}^*(X)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}(X)$.
Sea f una función en $\mathbb{C}^*(X)$, como X es un conjunto compacto existe el $\min |f(x)|$, entonces basta tomar $\varepsilon = \dfrac{\min |f(x)|}{2}$, y de esta forma $B(f, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^*(X)$.
Por lo tanto el siguiente corolario es una inmediata consecuencia del lema 2.1.

Corolario 2.1. *Para cualquier $f \in \mathbb{C}^*(X)$ existe $\delta > 0$ tal que $f \sim g$ para toda g que satisface $\rho(f, g) < \delta$. Por lo tanto para cualquier $f \in \mathbb{C}^*(X)$, el conjunto $[f] = \{g \in \mathbb{C}^*(X) : g \sim f\}$ es abierto y cerrado en $\mathbb{C}^*(X)$.*

Demostración.
Sea $f \in \mathbb{C}^*(X)$, basta tomar $\delta = \min_X |f(x)|$. Entonces para toda g en $\mathbb{C}^*(X)$, tal que $g \in B(f, \delta)$ se define la función h en $C(X)$ por: $h(x) = g(x) - f(x)$. Como $\rho(f, g) < \min_X |f(x)|$, se tiene que $|h| < |f|$, y por el lema 2.1 $f + h \sim f$, luego $g \sim f$. ■

Teniendo en cuenta los anteriores resultados se puede ver de una manera sencilla que $\exp \mathbb{C}(X)$ es exactamente la componente conexa donde se encuentra el elemento identidad $I(x)$ del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*(X)$.

Teorema 2.1. *Sea $f, g \in \mathbb{C}^*(X)$. $f \sim g$ si, y solo si, existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $F(\bullet, 0) = f$ y $F(\bullet, 1) = g$.*

Demostración.

Si $f \sim g$, existe $h \in \mathbb{C}(X)$ tal que $f/g = e^h$, por lo tanto, $f = ge^h$. Sea $F(x,t) := f(x)e^{-th(x)}$ para x en X, t en I. Entonces $F(\bullet, 0) = f(\bullet)e^0 = f$, y $F(\bullet, 1) = f(\bullet)e^{-h(\bullet)} = f(\bullet)/e^{h(\bullet)} = g$. De esta forma se concluye que F cumple con las propiedades deseadas.

Ahora si se supone que existe $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continua tal que $F(\bullet, 0) = f$ y $F(\bullet, 1) = g$, y se define $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}^*(X)$ tal que $\varphi(t) = f_t = F(\bullet, t)$ para t en I. A continuación se mostrará que φ es una función continua:

Sea $t_n \longrightarrow t_0$ y $\epsilon > 0$. Sea $x \in X$. Como F es continua $F(x, t_n) \longrightarrow F(x, t_0)$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $m \geq M$, $|F(x, t_m) - F(x, t_0)| < \epsilon$, luego

$|f_{t_m}(x) - f_{t_0}(x)| < \epsilon$, para todo x en X, por lo tanto $sup_x |f_{t_m}(x) - f_{t_0}(x)| < \epsilon$, así $\rho(f_{t_m}, f_{t_0}) < \epsilon$, en consecuencia $f_{t_m} \longrightarrow f_{t_0}$ y $\varphi(t_m) \longrightarrow \varphi(t_0)$.

Por el corolario 2.1 tenemos que $[f]$ es un subconjunto abierto y cerrado en $\mathbb{C}^*(X)$, entonces $\varphi^{-1}([f_0]) = \{t \in I : \varphi(t) \sim f_0\}$ es abierto y cerrado en I. Se tiene que $0 \in \varphi^{-1}([f_0])$ pues $\varphi(0) = f_0$ quien esta relacionado con f_0 ($\sim$ es reflexiva), luego $\varphi^{-1}([f_0]) \neq \phi$, por lo tanto $\varphi^{-1}([f_0]) = I$ y $f_1 \sim f_0$, es decir $F(\bullet, 1) \sim F(\bullet, 0)$ entonces $f \sim g$. ■

Corolario 2.2. *Si $X = \Delta$ o $X = I$ entonces se cumple que $\mathbb{C}^*(X) = \exp \mathbb{C}(X)$.*

Demostración.

Sea f una función en $\mathbb{C}^*(X)$. Se define $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ por $F(\varsigma, t) = f(\varsigma t)$. Entonces $F(\bullet, 0)$ es la función constante $f(0)$ y $F(\bullet, 1) = f$, así por el teorema 2.1 se tiene que $f \sim 1$, por lo tanto $f = e^h$, con h en $\mathbb{C}(X)$, luego $\mathbb{C}^*(X) = \exp \mathbb{C}(X)$. ■

En el siguiente Lema se muestra que no todas las funciones definidas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, admiten un logaritmo continuo, en especial se dará a conocer una familia de funciones continuas de T en $\mathbb{C}^*$ que no poseen esta propiedad.

Lema 2.2. *Sea n un número entero. La función z^n no admite logaritmos continuos en T, a menos que $n = 0$.*

Demostración.

Sea $z \in T$, si existe $h : T \longrightarrow \mathbb{C}$, continua, tal que $h(z) = Log(z^n)/2\pi i$ entonces $z^n = e^{2\pi i h(z)}$, se define $H : I \longrightarrow \mathbb{C}$ por $H(t) = h(e^{2\pi i t})$, para t en I, así H es una función que no se anula en I, y $H(0) = h(e^0) = h(1)$, además

$$H(1) = h(e^{2\pi i}) = h(cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = h(1),$$

por lo tanto $H(0) = H(1)$. Sea $G(t) = H(t) - nt$, para t en I. Entonces $e^{2\pi i G(t)} = e^{2\pi i[H(t)-nt]} = e^{2\pi i h(e^{2\pi i t})} e^{-2\pi i n t}$; Si hacemos $y = e^{2\pi i t}$, entonces $y^n = e^{2\pi i n t}$, luego $e^{2\pi G(t)} = e^{2\pi i h(y)} y^{-n} = y^n y^{-n} = 1$ por lo tanto $cos 2\pi G(t) + i \operatorname{sen} 2\pi G(t) = 1$, y se deduce que $cos 2\pi G(t) = 1$ e $i \operatorname{sen} 2\pi G(t) = 0$, luego $G(t)$ es un entero para todo t en I. Como G es una función continua e I es conexo, G es constante. Por otra parte tenemos que $G(0) - G(1) = H(0) - [H(1) - n] = n$, entonces $n = 0$. ■

Ahora se introduce una propiedad muy importante que poseen algunas funciones continuas definidas de A en $\mathbb{C}^*$, donde A es un subconjunto de X, la propiedad de extensión, la cual permite encontrar para toda $f : A \longrightarrow \mathbb{C}^*$, una función continua $F : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$, cuya restricción al conjunto A es exactamente f. El siguiente corolario nos permite ver un conjunto de funciones que carecen de esta cualidad.

Corolario 2.3. *Si n es un número entero distinto de cero, la función $z^n : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$ no es la restricción a T de alguna función continua $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^*$, es decir z^n no admite una extensión a Δ.*

Demostración.

Si $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es una función continua, y $f = z^n$, por el corolario 2.2 tenemos que $f = e^g$ para alguna función continua $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$, así la restricción de g a T es un logaritmo continuo de z^n, lo que contradice el lema 2.2. ■

De este resultado se deduce inmediatamente uno más general.

Teorema 2.2. *Sea U un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{C}$, y sea $B = \overline{U} \backslash U$ la frontera de U. Entonces para cualquier a en U y para cualquier entero n diferente de cero, la función $(z-a)^n$ en B, no admite una extensión a una función continua $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.*

Demostración.
Si se selecciona $R > 0$ tal que $U \subset D(a, R)$, no se pierde la generalidad si se asume que $a = 0$ y $R = 1$. Si $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es una función continua, tal que $f(z) = z^n$, para todo z en B, entonces $F : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por:

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in \overline{U}. \\ z^n & \text{si} \quad z \in \Delta \backslash U. \end{cases}$$

es una función continua, por el lema del pegamiento, y su existencia contradice el corolario 2.3. ■

Es difícil a simple vista saber si una función continua posee la propiedad de extensión, el siguiente lema nos proporciona una herramienta útil al momento de resolver este problema.

Lema 2.3. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y f una función en $\exp \mathbb{C}(K)$. Entonces f puede ser extendida a una función continua que no se anula en $\mathbb{C}$.*

Demostración.
Sea f una función en $\exp \mathbb{C}(K)$, entonces $f = e^g$, donde g es una función en $\mathbb{C}(K)$, así por el teorema de Tietze, existe una extensión continua G, de g, y la función $F = e^G$ es la extensión deseada de f. ■

Teorema 2.3. *Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Para que $\mathbb{C} \backslash X$ sea conexo, es suficiente que H_X sea trivial, es decir, que toda función f en $\mathbb{C}^*(X)$ tiene un logaritmo continuo.*

Demostración.
Si se supone que H_X es trivial y $\mathbb{C} \backslash X$ es no conexo, entonces existen A, B subconjuntos abiertos en $\mathbb{C}$, disjuntos, tal que $A \cup B = \mathbb{C} \backslash X$, así existe entonces, la componente acotada U de $\mathbb{C} \backslash X$. Si a es un elemento en U, z un elemento en X, entonces la función

$f = (z - a)$ nunca es cero en X, luego existe g un logaritmo continuo de f en X, entonces f está en $\exp \mathbb{C}(X)$, así por el lema 2.3 existe una función F en $\mathbb{C}^*(\overline{U})$, cuya restricción a la frontera de U es f, lo que contradice el teorema 2.2. ■

Corolario 2.4. *Si X es homeomorfo a I, entonces $\mathbb{C}\backslash X$ es conexo.*

Demostración.
Sea h el homeomorfismo de X en I, si tomamos una función f de $\mathbb{C}^*(X)$, entonces para todo elemento x de X, $f(x) \neq 0$. Además $f(x) = f(h^{-1}(y))$ para algún y en I, luego $(f \circ h^{-1})(y) \neq 0$ para todo y en I, por lo tanto $f \circ h^{-1}$ es una función en $\mathbb{C}^*(I)$. Así por el corolario 2.2 $f \circ h^{-1}$ es un elemento de $\exp \mathbb{C}(X)$, entonces $(f \circ h^{-1})(y) = e^{l(y)}$, donde l es un elemento de $\mathbb{C}(I)$. Por consiguiente $f(x) = e^{l(h(x))} = e^{(l \circ h)(x)}$; claramente $l \circ h$ pertenece a $\mathbb{C}(X)$, luego f esta en $\exp \mathbb{C}(X)$, y por el teorema 2.3 $\mathbb{C}\backslash X$ es conexo. ■

CAPÍTULO 3

ALGUNOS RESULTADOS DE GRAN INTERÉS

3.1. Teorema del punto fijo

Los resultados obtenidos en el capítulo anterior, son suficientes para mostrar pruebas de teoremas clásicos muy interesantes, diferentes a las que usualmente se desarrollan en cursos de una carrera de matemáticas. El primero se conoce como el teorema de punto fijo de Brouwer. Este teorema fue probado por primera vez por el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966), para cualquier dimension, no solo en el plano. Hay una demostración debida a Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz que usa el Lema combinatorio de Sperner y que quizá sea la mas elemental para el caso n-dimensional. Así mismo hay varias demostraciones usando grupos de homología y de homotopía. Esta que se presenta a continuación, solo necesita de conocimientos elementales del plano complejo, de álgebra moderna y de topología general.

Teorema 3.1. *Si $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ es una función continua, existe un punto p en Δ tal* *que* $f(p) = p$.

Demostración.
Sea f una función continua de Δ en Δ, supongamos que no existe un p en Δ tal que $f(p) = p$. Ahora se define $G : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^*$, por $G(z) = z - f$, claramente G es una función continua en $\mathbb{C}^*(X)$, por lo tanto por el corolario 2.2 existe una función $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $e^g = G$. Consideremos la función $H = 1 - \overline{z}f$. Luego H nunca es cero, además la parte real de H es mayor que cero, para cualquier valor en Δ. Nuevamente por el corolario 2.2 existe una función $h : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $e^h = H$. Si restringimos H a T tenemos $H = 1 - \overline{z}f$, operando por z obtenemos $zH = z - f$, por lo tanto $ze^h = G = e^g$, así $z = e^g/e^h = e^{g-h}$, lo que contradice el lema 2.2. ∎

3.2. Teorema fundamental del álgebra

Otro teorema que se puede probar fácilmente, es el teorema fundamental del álgebra, conocido en la antigüedad como teorema de d'Alembert, pues fue el matemático Jean Le Rond d'Alembert quien logró una prueba en 1746, sin embargo, había un punto defectuoso en su demostración, y era que d'Alembert asumía como verdadero un resultado de cálculo diferencial que no había sido demostrado y que no tuvo demostración hasta un siglo después de que d'Alembert escribiera la suya. La primera demostración rigurosa fue dada en 1799 por Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ matemático alemán, en su tesis doctoral, quien en ese tiempo solo tenía 21 años de edad. La demostración que hizo Gauss en su tesis se basó en consideraciones geométricas, por lo que no resultó tan convincente para los matemáticos de la época. Años más tarde, en 1816 Gauss publicó dos nuevas demostraciones así como otra en 1850 tratando siempre de encontrar una demostración puramente algebraica. Hoy en día la prueba más elegante está basada en la inducción matemática, y su primer paso es demostrar que un polinomio P de grado igual o mayor a uno, debe tener una raíz. Al encontrar esta raíz x, se factoriza la función P por $(x - r)$, y se repite la operación con el cociente $P/(x - r)$, que es un polinomio de grado menor al de P. Existen pruebas puramente algebraicas, que no emplean herramientas tan elaboradas y que son posteriores a la primera prueba del teorema.

Teorema 3.2. *Sea $p = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ un polinomio en z de grado $n > 0$ con coeficientes complejos. Entonces $p(a) = 0$ para algún a en $\mathbb{C}$.*

Demostración.
Sea $R = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| + 1$, sea $\Gamma = \{\varsigma : |\varsigma| = R\}$, definimos $q = p - z^n$. Si $z \in \Gamma$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
|q| = |p - z_n| &= |a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1}z^{n-1}| \\
&\leq |a_0| + |a_1||z| + ... + |a_{n-1}||z^{n-1}| \\
&= |a_0| + |a_1||z| + ... + |a_{n-1}||z|^{n-1} \\
&= |a_0| + |a_1|R + ... + |a_{n-1}|R^{n-1} \\
&\leq |a_0|R^{n-1} + |a_1|R^{n-1} + ... + |a_{n-1}|R^{n-1} \\
&= (|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|)R^{n-1} \\
&= (R-1)R^{n-1} = R^n - R^{n-1} < R^n.
\end{aligned}$$

De esta forma $|q| < R^n = |z^n|$, y por el lema 2.1 $z^n + q \sim z^n$, entonces $(z^n + q)/z^n = e^h$, para algún $h : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, así $z^n + q = p = e^h z^n$ en Γ, pero si $p(a) \neq 0$ para todo a en $\overline{D(0,R)}$, entonces por el corolario 2.2 p tiene un logaritmo continuo en $\overline{D(0,R)}$, y así un logaritmo continuo en Γ, de esta forma z^n tiene un logaritmo continuo en Γ, contradiciendo el lema 2.2. ■

3.3. Teorema sobre la invarianza del dominio

La tercera y muy importante aplicación es el teorema 3.4 conocido como el teorema de Brouwer sobre la invarianza del dominio. La prueba de este teorema se realiza utilizando el teorema 3.3 el cual asegura que los puntos interiores de un conjunto compacto X de $\mathbb{C}$ se pueden caracterizar por medio de la topología relativa de X. Primero se deben mostrar algunos lemas, y una definición para poder llegar a este resultado.

Lema 3.1. *Para cualquier subconjunto cerrado J de I, $\mathbb{C}^*(J) = \exp \mathbb{C}(J)$.*

Demostración.
Sea J un subconjunto cerrado de I, y f una función en $\mathbb{C}^*(J)$, Si $I \backslash J \neq \emptyset$,

entonces $I \backslash J = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$, tal que I_α es un subconjunto abierto de I, para todo α en $\mathcal{A}$ y $I_{\alpha_i} \cap I_{\alpha_j} = \emptyset$ si $i \neq j$. Es claro que para todo α en $\mathcal{A}$, $I_\alpha \cap J = \emptyset$, y existe al menos una función $f_\alpha : \overline{I_\alpha} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ continua (por ejemplo la función constante) para todo α en $\mathcal{A}$. Además si x es un elemento de $\overline{I_\alpha} \cap J$, entonces $f_\alpha(x) = f(x)$. Se define $F : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ así:

$$F(z) := \begin{cases} f_\alpha(z) & \text{si} \quad z \in \overline{I_\alpha}. \\ f(z) & \text{si} \quad z \in J. \end{cases}$$

De esta forma $f|_{\overline{I_\alpha} \cap J} = f_\alpha|_{\overline{I_\alpha} \cap J}$, para todo α en $\mathcal{A}$, por el lema 1.1 (lema del pegamiento) se tiene que F es continua, luego f puede ser extendida a una función que no se anula en I. Por lo tanto por el corolario 2.2 tenemos que $\mathbb{C}^*(J) = \exp \mathbb{C}(J)$. ■

Definición 3.1. Sea A un subconjunto cerrado de un conjunto compacto X. Se dice que el par (A, X) tiene la propiedad de extensión, si cada función f en $\mathbb{C}^*(A)$ es la restricción a A, de alguna función F en $\mathbb{C}^*(X)$.

Teniendo en cuenta la anterior definición, el siguiente lema es una consecuencia inmediata del lema 2.3.

Lema 3.2. *Si A es un subconjunto compacto de X y $\mathbb{C}^*(A) = \exp \mathbb{C}(A)$, entonces (A, X) tiene la propiedad de extensión.*

Demostración.
Si f es una función en $\mathbb{C}^*(A)$ entonces $f = e^g$ donde g es una función en $\mathbb{C}(A)$, por el lema 2.3 existe una extensión continua F de f, que no se anula en X. ■

Como se puede ver el corolario 2.3 implica que la pareja (T, Δ) no tiene la propiedad de extensión. Sin embargo el lema siguiente asegura que una gran variedad de subconjuntos de T cumplen con esta propiedad, y además, que T puede ser extendido a muchos subconjuntos de Δ.

Lema 3.3. *Si J es un subconjunto propio cerrado de T, entonces (J, Δ) tiene la propiedad de extensión; si Y es un subconjunto propio cerrado de Δ con $T \subset Y$ entonces (T, Y) tiene la propiedad de extensión.*

Demostración.
Si J es un subconjunto propio cerrado de T, entonces J es homeomorfo a un subconjunto cerrado de I, así por el lema 3.1 $\mathbb{C}^*(J) = \exp \mathbb{C}(J)$, y por el lema 3.2 (J, Δ) tiene la propiedad de extensión.
Por otra parte si T es un subconjunto de Y, y Y es un subconjunto propio de Δ, existe un elemento a en $\Delta \setminus Y$. Si p es la proyección de $\Delta \setminus \{a\}$ sobre T, es decir $p(\varsigma)$ es el punto donde T se encuentra con la semirrecta de origen a y que pasa por ς, entonces p es continua en Y, y p restringida a T, es la función idéntica en T, de esta forma f es un elemento de $\mathbb{C}^*(T)$, entonces $F = f \circ p$ está en $\mathbb{C}^*(Y)$, y F restringida a T es f. Luego (T, Y) tiene la propiedad de extensión. ■

Teorema 3.3. *Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, y a un elemento de X. Entonces a es punto interior de X si, y solo si, existe un subconjunto cerrado K_0 de $X \setminus \{a\}$, tal que para cada subconjunto cerrado K de X con $K_0 \subset K \subset X \setminus \{a\}$, el par (K, X) no tiene la propiedad de extensión.*

Demostración.
Sea X^0 el interior de X, y a un elemento de X^0. Sea $K_0 = X \setminus X^0$. Si K es un subconjunto cerrado de X, y $K_0 \subset K \subset X \setminus \{a\}$, entonces $U = X \setminus K$ es una vecindad abierta de a, y el teorema 2.2 muestra que la función $z - a$ considerada como un elemento de $\mathbb{C}^*(K)$, no tiene extensión a un elemento de $\mathbb{C}^*(X)$.
Ahora si a no es un punto interior de X, entonces a es un punto límite de X. Si para cualquier subconjunto cerrado K_0 de X tal que a no esta en K_0, se toma un $r > 0$ tal que $K_0 \cap D(a, r) = \emptyset$ y $K = X \setminus D(a, r)$, se puede ver que (K, X) tiene la propiedad de extensión. No se pierde la generalidad si se toma $a = 0$, $r = 1$, $Y = X \cap \Delta$, y $J = X \cap T$. Entonces Y es un subconjunto cerrado propio de Δ siempre y cuando $D(0, 1)$ contenga puntos que no están en X. Así J es un subconjunto cerrado de K, y es un subconjunto cerrado propio de T. Si f es un elemento de $\mathbb{C}^*(K)$, $f|_J$ esta en $\mathbb{C}^*(K)$, entonces por el lema 3.3 $f|_J$ admite una extensión a un elemento de $\mathbb{C}^*(\Delta)$, luego existe $F : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $F|_J = f|_J$ como $Y \subset \Delta$, entonces F es un elemento de $\mathbb{C}^*(Y)$. Si se define $G : K \cup Y = X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ por:

$$G(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in K. \\ F(x) & \text{si} \quad x \in Y. \end{cases}$$

entonces cualquier x que esté en $K \cap Y$, está en J y $F(x) = f(x)$. Por lo tanto por el lema del pegamiento f admite una extensión a una función en $\mathbb{C}^*(X)$, luego (K, X) tiene la propiedad de extensión. ■

Teorema 3.4. *Si U es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua uno a uno, entonces $V = f(U)$ es abierto y f^{-1} es continua en V.*

Demostración.
Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, a un elemento en U, se toma un $r > 0$ de tal forma que $X = \overline{D(a, r)} \subset U$. Como X es compacto y $\mathbb{C}$ es Hausdorff, por el teorema 1.8 f es un homeomorfismo de X sobre $f(X)$. Si a es un punto interior de X, a continuación se mostrará que $f(a)$ es un punto interior de $f(X)$.
Si se supone que $f(a)$ no es punto interior de $f(X)$, entonces para cualquier subconjunto cerrado K_0 de $f(X) \setminus \{f(a)\}$, existe un subconjunto cerrado K de $f(X)$ tal que $K_0 \subset K \subset f(X) \setminus \{f(a)\}$, y el par $(K, f(X))$ tiene la propiedad de extensión. Como f es homeomorfismo $f^{-1}(K_0)$ y $f^{-1}(K)$ son cerrados en X, y $f^{-1}(K_0) \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}\{f(X) \setminus \{f(a)\}\} = X \setminus a$.
Sea h una función en $\mathbb{C}^*(f^{-1}(K))$, si x es un elemento de $f^{-1}(K)$ entonces $h(x) = h(f^{-1}(y))$ para algún y en K, luego $h(x) = (h \circ f^{-1})(y)$, así $h \circ f^{-1}$ es una función en $\mathbb{C}^*(K)$, por lo tanto existe una función $H : f(X) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ que es extensión de $h \circ f^{-1}$. Si se define para todo x en X, $H'(x) := H(f(x))$, entonces H' esta en $\mathbb{C}^*(X)$. Si x_1 es un elemento de $f^{-1}(K)$ entonces $x_1 = f^{-1}(y_1)$, para algún y_1 en K, luego $H'(x_1) = H(f(f^{-1}(y_1))) = H(y_1) = (h \circ f^{-1})(y_1) = h(x_1)$, así la restricción de H a $f^{-1}(K)$ es h, de esta forma el par $(f^{-1}(K), X)$ tiene la propiedad de extensión, lo que contradice que a es un punto interior de X. luego $f(a)$ es un punto interior de $f(X)$, y en consecuencia un punto interior de $f(U)$. Entonces $f(U)$ es abierto. Si se aplica este resultado a todo subconjunto W de U, se muestra que f^{-1} es continua en V. ■

CAPÍTULO 4

TEOREMA GENERALIZADO DE LA CURVA DE JORDAN

Se inicia este capítulo recordando que un camino en el plano complejo es una función compleja f sobre un intervalo compacto $[a, b]$. La imagen de $[a, b]$ por medio de f, se llama arco descrito por f que une los puntos $f(a)$ y $f(b)$. Si $f(a) \neq f(b)$, la curva se llama arco de extremos $f(a)$ y $f(b)$. Si f es uno a uno, la curva se llama arco simple o arco de Jordan. Si $f(a) = f(b)$, la curva se llama curva cerrada. Si $f(a) = f(b)$ y f es uno a uno en el intervalo $[a, b)$, la curva se denomina curva cerrada simple o curva de Jordan.

Existe un teorema general llamado teorema de la curva de Jordan, que establece que cada curva de Jordan tiene interior y exterior. En otras palabras una curva de Jordan Γ divide a $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ en dos componentes que tienen frontera común. El objetivo primordial de este capítulo es presentar una corta demostración del teorema generalizado de la curva de Jordan; para obtener este resultado es necesario retomar una característica del conjunto $\mathbb{C} \backslash X$, cuando X es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Como X es compacto, X es cerrado, luego $\mathbb{C} \backslash X$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y por el teorema 1.17 es la unión de un conjunto finito o contablemente infinito de componentes conexas, cada una de las cuales es abierta y de la cual una no es acotada (en [2] se puede encontrar una explicación de esta afirmación). A partir de ahora se denotara por $U_0, U_1, U_2, ...$ a las componentes de $\mathbb{C}\backslash X$ y U_0 representará siempre la componente no acotada, además por comodidad a_k será un punto de U_k para cada k. A continuación se darán algunas propiedades de estas componentes, utilizando la relación de equivalencia " $\sim$ ".

Lema 4.1. *Si a y b son elementos del mismo componente de $\mathbb{C}\backslash X$, entonces $(z-a) \sim (z-b)$.*

Demostración.
Si a y b pertenecen al mismo componente de $\mathbb{C}\backslash X$, existe un camino $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}\backslash X$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$, además para cada z en X, se tiene que $z - a \neq 0$ y $z - b \neq 0$. Por lo tanto $z - a$ y $z - b$ son dos funciones en $\mathbb{C}^*(X)$. Si se define $F(\zeta, t) =: \zeta - \gamma(t)$, se tiene que $F(\zeta, 0) = \zeta - \gamma(0) = \zeta - a$ y $F(\zeta, 1) = \zeta - \gamma(1) = \zeta - b$, luego por el teorema 2.1 se llega a que $(z-a) \sim (z-b)$. ■

Lema 4.2. *Si a es un elemento de U_0, entonces $(z-a) \sim 1$.*

Demostración.
Como X es compacto, entonces X es acotado, por lo tanto existe $\sup\{|\zeta| : \zeta \in X\}$. Sea $a \in U_0$, entonces se toma un $R > \sup\{|\zeta| : \zeta \in X\}$, tal que $R \in U_0$; de esta forma $\Re(z - R) < 0$ para todo z en X, así $z - R$ tiene un logaritmo continuo, es decir $z - R = e^f$ con f en $\mathbb{C}^*(X)$, luego $(z - R) \sim 1$ y por lo demostrado en el lema anterior $(z - R) \sim (z - a)$, además por la transitividad de " $\sim$ " se tiene que $(z - a) \sim 1$. ■

Lema 4.3. *Si $n_1, n_2, ..., n_N$ son enteros, y $f = \prod_{k=1}^{N}(z - a_k)^{n_k}$, entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ no admite un logaritmo continuo, a menos que $n_k = 0$ para todo k.*

Demostración.
Si f admite un logaritmo continuo, entonces $f = e^h$ para algún h en $\mathbb{C}(X)$, así por el lema 2.3 f tiene una extensión a una función continua $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Si se define $g(z) := \prod_{k=2}^{N}(z - a_k)^{n_k}$, es claro que $g : X \cup U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es continua, y si se toma la función $\phi : \overline{U_1} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida como $\phi = \frac{F}{g}$, se tiene que ϕ es continua, y además si B

representa la frontera de U_1, $B \subset X$, y $\phi|_B = (z-a_1)^{n_1}$, entonces por el teorema 2.2 es necesario que $n_1 = 0$. Análogamente se demuestra que $n_k = 0$ para todo k. ■

Teorema 4.1. *Si N es el número de componentes acotados de $\mathbb{C}\backslash X$, N es un número entero no negativo o ∞. Si f es una función racional, sin polos y sin ceros en X, entonces existen determinados enteros n_k tal que $n_k = 0$, para todos, excepto un número finito de k, y $f \sim \prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{n_k}$.*

Demostración.
Si f es una función racional con estas condiciones, entonces $f = \prod_{i=1}^{M}(z-a_i)^{m_i}$, donde $a_i \in \mathbb{C}$, y $m_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i = 1, ..., M$. Sean $B = \{a_i \in \mathbb{C} : a_i \in U_0\}$, y $g = \prod_{a_i \notin B}(z-a_i)^{m_i} = \prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{n_k}$, es claro que $n_k = 0$ para algunos k, entonces $\dfrac{f}{g} = \prod_{a_i \in B}(z-a_i)^{m_i}$. Si $I = \{i : a_i \in B\}$, por el lema 4.2 se tiene que $(z-a_i) \sim 1$ para todo i en I, así $(z-a_i)^{m_i} = e^{(m_i)h_i}$ con h_i en $\mathbb{C}(X)$, luego $\prod_{i \in I}(z-a_i)^{m_i} = e^{\phi}$, donde $\phi = \sum_{i \in I} m_i h_i$. Claramente ϕ es una función que está en $\mathbb{C}(X)$, por lo tanto $f \sim g$. ■

A partir de este momento es necesario desarrollar algunas herramientas analíticas. Se usará la siguiente notación: siempre que U sea un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, el conjunto $\mathbb{C}^1(U)$ representará todas las funciones $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ que tienen derivada de orden parcial continua; $\mathbb{C}^1_C(U)$ denotará el conjunto de esas f en $\mathbb{C}^1(U)$ que se anulan en el exterior de un subconjunto compacto de U; si f es una función en $\mathbb{C}^1(U)$, se define

$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

Lema 4.4. *Para cada g en $\mathbb{C}^1_C(U)$ se define la función Tg por $Tg(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\int \frac{g(z)}{\zeta - z}dxdy$ donde $z = x + iy$. Entonces $T_g \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C})$, $T_g(\overline{\partial} g) = g$ y $\overline{\partial}(T_g) = g$.*

Demostración.
Si se hace la sustitución $z_0 = \zeta - z$, donde $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces $dx_0 = -dx$, $dy_0 = -dy$, esta integral se convierte en

$$\frac{1}{\pi}\int\int \frac{g(\zeta - z_0)}{z_0}dx_0dy_0,$$

y como $\dfrac{1}{z}$ es localmente integrable, Tg esta bien definida, y además, por diferenciación bajo el signo integral, $Tg \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C})$.

Ahora se fija un $\zeta \in \mathbb{C}$, y se elige un R suficientemente grande, tal que g se anule en el exterior de un subconjunto compacto de $D(\zeta, R)$. Para cualquier ε tal que $0 < \varepsilon < R$, se definen los conjuntos $A_\varepsilon = \overline{D(\zeta, R)} \setminus D(\zeta, \varepsilon)$, B_ε como la frontera de A_ε, orientada positivamente.(ver figura 4.1).

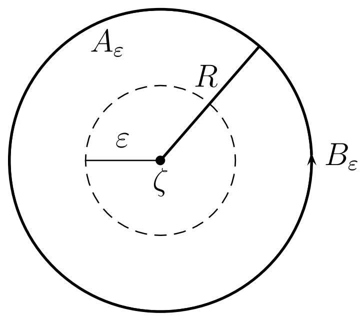


Figura 4.1: El conjunto A_ε.

Claramente se ve que

$$T(\overline{\partial} g)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int \int_{A_\varepsilon} \frac{\overline{\partial} g(z)}{\zeta - z} dxdy,$$

además

$$\overline{\partial} \left(\frac{g(z)}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(z)(z-\zeta) + g(z)}{(\zeta - z)^2} \right) + i \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(z)(z-\zeta) + ig(z)}{(\zeta - z)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2(\zeta - z)} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(z) + i \frac{\partial}{\partial y} g(z) \right) = \frac{\overline{\partial} g(z)}{(\zeta - z)}.$$

Por lo tanto $T(\overline{\partial} g)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g(z)}{\zeta - z} \right) + i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g(z)}{\zeta - z} \right) \right] dxdy$. Ahora multiplicando el termino $(\zeta - z)$ por -1, y aplicando el teorema de Green se tiene:

$$\int_{B_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-\zeta}(dx+idy) = \int\int_{A_\varepsilon} \left[i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(z)}{z-\zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g(z)}{z-\zeta}\right)\right] dxdy$$

$$= i\int\int_{A_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(z)}{z-\zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g(z)}{z-\zeta}\right)\right] dxdy.$$

Luego

$$T(\overline{\partial}g)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\frac{g(z)}{z-\zeta}(dx+idy) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\frac{g(z)}{z-\zeta}dz.$$

Si se hace la sustitución $z = \zeta + \varepsilon e^{i\theta}$ se tiene que $dz = i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$ y $z-\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$, por consiguiente:

$$T(\overline{\partial}g)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{g(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} g(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})d\theta = g(\zeta).$$

Por último, se tiene que $\overline{\partial}(Tg) = T(\overline{\partial}g)$, por diferenciación bajo el signo integral, por lo tanto $\overline{\partial}(Tg) = g$. ■

Corolario 4.1. *Si g es una función en $\mathbb{C}^1(\mathbb{C})$ y $\overline{\partial}g = 0$ en una vecindad V del conjunto compacto K, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función racional $R(z)$, con polos fuera de K, tal que $|R(\zeta) - g(\zeta)| < \varepsilon$, para todo ζ en K.*

Demostración.
Se puede asumir que $g \in \mathbb{C}^1_C(\mathbb{C})$, reemplazando a g por (ϕg) donde $\phi \in \mathbb{C}^1_C(\mathbb{C})$, y se anula en el exterior del conjunto compacto K_1, (la función ϕ también es conocida como la función característica sobre K_1), además $V \subset K_1$ y $\phi = 1$ en V. De esta forma $\overline{\partial}g = 0$ en $\mathbb{C}\setminus K_1$. Sea $A = \{\zeta : \overline{\partial}g(\zeta) \neq 0\}$, por lo tanto $\overline{A}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ disjunto de K. (ver figura 4.2).

Sea P una partición de un conjunto compacto, en m subintervalos $I_1, I_2, ...I_m$, y z_k un elemento de I_k para cada k. Entonces la suma de Riemann para la integral definida $T(\overline{\partial}g)(\zeta)$ es de la forma

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{\partial}g}{\zeta - z_k}(z_k)A(I_k)$$

donde $A(I_k)$ designa el area de I_k, y esta suma es una función racional de ζ con polos fuera de K, y su convergencia es uniforme para todo ζ. ■

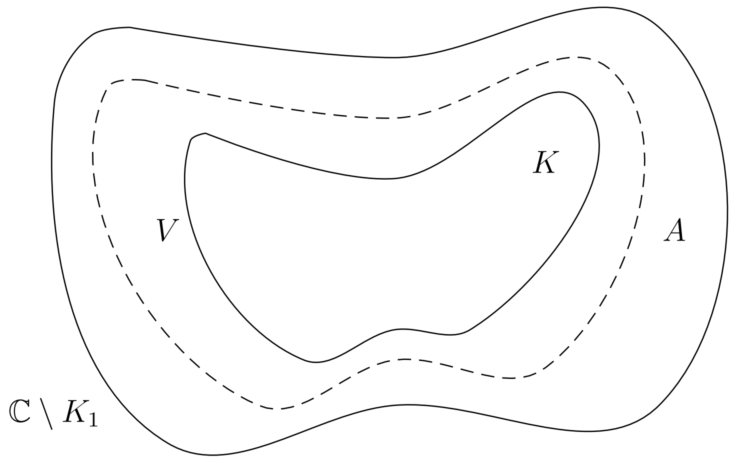


Figura 4.2: El conjunto K_1

Teorema 4.2. *Si f es una función en $\mathbb{C}^*(X)$, entonces existen determinados enteros $n_1, n_2, \ldots$, tal que $n_k = 0$ para todos, excepto un número finito de k, y $f \sim \prod_{k=1}^{N}(z-a_k)^{n_k}$.*

Demostración.
Por el teorema de aproximación de Weierstrass existe un polinomio p que depende de ε, tal que $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ en X, donde $\varepsilon = \mathrm{mín}_X |f|$. Sea U una vecindad de X en la cual p nunca es cero, y sea $\phi \in \mathbb{C}^1_C(U)$ tal que $\phi = 1$ en una vecindad V de X. Sea $g = \phi\frac{\overline{\partial}p}{p}$, entonces $g \in \mathbb{C}^1_C(\mathbb{C})$. Por el lema 4.4 existe $h \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}h = g$. Sea $F = e^{-h}p$, entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}F &= e^{-h}\overline{\partial}p - pe^{-h}\overline{\partial}h \\
&= e^{-h}\overline{\partial}p - pe^{-h}g \\
&= e^{-h}\overline{\partial}p - \frac{pe^{-h}(\phi\overline{\partial}p)}{p} \\
&= e^{-h}\overline{\partial}p - e^{-h}(\phi\overline{\partial}p).
\end{aligned}$$

Así $\overline{\partial}F = 0$ en V. Ahora por el corolario 4.1 existe una función racional $R(z)$ con polos fuera de X tal que $|F(\zeta) - R(\zeta)| < \mathrm{mín}_X |F(\zeta)|$. Como $F = \dfrac{p}{e^h}$ entonces $p \sim F$, y por el corolario 2.1 se tiene que $f \sim p$ y $F \sim R$, por lo tanto $f \sim R$. De esta forma se ha encontrado una función racional R, que no tiene polos ni ceros en X, tal que $R \sim f$, y aplicando el teorema 4.1 se completa la prueba. ■

Corolario 4.2. *El grupo* $H_X = \mathbb{C}^*(X)/\exp\mathbb{C}(X)$ *es un grupo abeliano libre con* N *generadores, donde* N *es el número de componentes acotados de* $\mathbb{C}\backslash X$.

Demostración.
Sea $S = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$, donde $a_i \in U_i$, para cada $i = 1, ..., N$. Si $g \in C^*(X)$ entonces $g \sim \prod_{i=1}^{N}(z - c_i)^{n_i}$, donde $c_i \in U_i$, y $n_i \in \mathbb{Z}$. Se define $H : C^*(X) \longrightarrow H_\Sigma$, por:

$$H(g) := a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_N^{n_N},$$

donde H_Σ es el grupo libre. Se mostrará que H es un isomorfismo.
Sean f, h funciones en $C^*(X)$, entonces $g \sim \prod_{i=1}^{N}(z-c_i)^{n_i}$, y $h \sim \prod_{i=1}^{N}(z-b_i)^{m_i}$. Como $(z - b_i) \sim (z - a_i)$, se tiene que $(z - b_i)^k \sim (z - a_i)^k$, por lo tanto $g \sim \prod_{i=1}^{N}(z - a_i)^{n_i}$, y $h \sim \prod_{i=1}^{N}(a - b_i)^{m_i}$, luego

$$gh \sim \prod_{i=1}^{N}(z - a_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{N}(z - b_i)^{m_i}, \text{ así}$$

$$gh \sim \prod_{i=1}^{N}(z - a_i)^{n_i+m_i}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} H(gh) &= a_1^{n_1+m_1} ... a_N^{n_N+m_N} \\ &= a_1^{n_1} ... a_N^{n_N} a_1^{m_1} ... a_N^{m_N} \\ &= H(g)H(h). \end{aligned}$$

Por otra parte si $H(g) = \emptyset$, entonces $g \sim \prod_{i=1}^{N}(z - d_i)^{n_i}$, donde $n_i = 0$ para todo i. Luego $g \in \exp\mathbb{C}(X)$. Así $KerH = \exp\mathbb{C}(X)$, por lo tanto $\mathbb{C}^*(X)/\exp\mathbb{C}(X)$ es isomorfo a $Im(H)$. Además si $y \in H_\Sigma$, y $y = a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_N^{n_N}$, entonces la función $g = \prod_{i=1}^{N}(z-C_i)^{n_i}$, $c_i \in U_i$, esta en $\mathbb{C}^*(X)$, y $g \sim g$, por lo tanto $H(g) = y$. Luego H_X es isomorfo a H_Σ. ■

Corolario 4.3. *Si* X *y* Y *son dos conjuntos compactos y homeomorfos del plano, entonces* X *y* Y *tienen el mismo número de componentes complementarios.*

Demostración.
Si X y Y son homeomorfos, entonces por la proposición 2.3 H_X es isomorfo a H_Y, y aplicando el corolario 4.2 se termina la demostración. ■

Corolario 4.4. *Si J es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, es decir, $J = \phi(T)$ donde ϕ es un homeomorfismo de T en $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C}\backslash J$ tiene exactamente una componente acotada. Si J es un arco de Jordan, es decir una imagen homeomorfa de I, entonces $\mathbb{C}\backslash J$ es conexo.*

Demostración.
Sea J una curva de Jordan, como J es homeomorfo a T por el corolario 4.3 J y T tienen el mismo número de componentes en su complemento, por lo tanto J tiene dos componentes, de las cuales una es acotada. Por otra parte si J es un arco de Jordan, por el corolario 4.3 J e I tienen el mismo número de componentes complementarios, y por el corolario 2.2 se tiene que $\mathbb{C}^*(I) = \exp \mathbb{C}(I)$, luego

$$H_I = \mathbb{C}^*(I)/\exp \mathbb{C}(I) = \{1_I\},$$

por lo tanto por el corolario 4.2 H_J es un grupo abeliano libre sin generadores, es decir $\mathbb{C}\backslash J$ no tiene componentes acotadas, así $\mathbb{C}\backslash J$ es conexo. ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Browder, Topology in the Complex Plane, en: The American Matematical Monthly, vol 107, número 5, p. $393 - 401$.

[2] T.M. Apostol, *Análisis Matematico*, segunda edicion, Reverte, Barcelona, 1976.

[3] J. Charris, R. D. Castro, J. Varela, *Fundamentos del Analisis Complejo de una Variable*, Academia Colombiana de Ciencias Esactas, Fisica y Naturales, Bogota D.C, 2000.

[4] G. Rubiano, *Topología General*, segunda edicion, Departamento de Matematicas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Bogota D.C, 2002.

[5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2d edition, McGraw-Hill, New York, 1974.

[6] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 1st edition, McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley, Publishing Company, New York, 1968.

[8] J. Munkres, *Topología*, segunda edicion, Prentice hall, Madrid, 2002.