

Un Experimento de Enseñanza para el fortalecimiento del Pensamiento Espacial: un planteamiento a partir del uso de material manipulable y el Software GeoGebra

Felix Andrés Luna Chavarría

Carlos Eduardo Guerrero Cuy

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Educación Básica Primaria

Directora

Juddy Amparo Valderrama Moreno

Doctora en Ciencias de la Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2026

Agradecimientos

A *Dios*, por concedernos la vida, la serenidad y la sabiduría necesarias para transitar este camino de formación con esperanza y propósito.

A la *Universidad Industrial de Santander*, por ofrecernos un entorno propicio para el aprendizaje, el acompañamiento de su cuerpo docente y los recursos institucionales que contribuyeron significativamente a nuestra formación integral.

A nuestra directora de tesis, la Dra. *Juddy Amparo Valderrama Moreno*, por su orientación constante, su compromiso ejemplar y por inspirarnos con su pasión por la educación y por la enseñanza de las matemáticas.

A cada uno de los docentes que nos acompañaron durante la carrera, por sus aportes valiosos y por sembrar en nosotras el deseo de enseñar con sentido, rigor y vocación.

Al semillero de investigación *EDUMAT* y sus grupos *TAC* y *Matemática Recreativa*, por despertar en nosotros el interés por indagar, reflexionar y transformar la práctica educativa desde la investigación.

A nuestros compañeros y amigos de formación, con quienes compartimos aprendizajes, desafíos y experiencias inolvidables a lo largo de esta etapa.

A nuestras familias, por ser el pilar fundamental que nos sostuvo en cada momento, con su amor, su confianza y su apoyo incondicional.

Y a nuestras parejas, por caminar a nuestro lado con paciencia, motivación y afecto, brindándonos fortaleza emocional e impulsándonos a alcanzar nuestras metas.

Dedicatoria

Dedico este logro a quienes han sido mi impulso constante durante este camino.

A mi mamá, *María Claudia*, por ser ejemplo de fortaleza, entrega y amor incondicional. Gracias por cada palabra de ánimo y por sostenerme incluso en los momentos en que más llegué a dudar.

A mi papá, *Felix Luna*, por confiar en mí y recordarme siempre el valor del esfuerzo y la humildad, por esas noches de juego para distraerse del estrés del día a día.

A mi hermano, *Luis Alberto*, que con su presencia y compañía me ha acompañado a lo largo de esta travesía. Su apoyo en el traspaso ha sido esencial para llegar hasta aquí.

A mi novia, *Daniela Villamizar*, quien ya cruzó esta misma meta y desde entonces ha sido mi inspiración y compañera incansable. Gracias por creer en mí, por animarme en los días difíciles y por apoyarme, siempre con paciencia, amor y alegría. Hoy, desde este otro lado de la meta, puedo decirte que valió la pena. Sigamos creciendo juntos.

A la familia *Villamizar Villamizar*, por haberme acogido con generosidad, respeto y cariño. Su apoyo y cuidados fueron fundamentales para mí, para seguir adelante con este proyecto. Siempre llevaré en mi corazón su solidaridad y afecto.

Este logro no me pertenece solo a mí. Es también de ustedes, porque lo construimos en compañía, con amor, esperanza y compromiso.

Felix L.

Quiero dedicar este espacio con profundo agradecimiento a los pilares de mi vida, aquellos que han contribuido de manera significativa a la persona que soy hoy.

A mi mamá, Yaneth Cuy Álvarez, quien me crió y cuidó a lo largo de toda mi vida, y me regaló la oportunidad invaluable de crecer acompañado del amor, la guía y la presencia de una madre.

A mi padre, Carlos Andrés Guerrero Duarte, quien ha sido un verdadero ejemplo de vida y de humanidad; de cómo afrontar las dificultades, superarlas y salir adelante. De él aprendí el valor del trabajo, la responsabilidad y el amor por algo tan especial y fundamental como la naturaleza.

A mi hermana, Carina Michely Guerrero Cuy, quien ha sido la compañía constante de mi vida; quien me cuidó cuando nadie más lo hacía y me dio el regalo invaluable de tener una hermana mayor, apoyo y guía en cada etapa.

Al voleibol, que ha marcado gran parte del carácter y la personalidad que he desarrollado, y que ha sido una fuente constante de motivación, disciplina y crecimiento personal.

Carlos G.

Tabla de contenido

Introducción.....	11
1. Planteamiento y formulación del problema.....	13
1.1. Contextualización	13
1.2. Situación problemática.....	13
1.3. Delimitación	14
1.4. Justificación.....	15
1.5. Objetivos	17
1.5.1. Objetivo general	17
1.5.2. Objetivos específicos	18
1.6. Pregunta de investigación.....	18
2. Aproximación teórica.....	19
2.1. Antecedentes de la investigación.....	20
2.1.1. Nivel internacional.....	20
2.1.2. Nivel nacional.....	22
2.1.3. Nivel local	24
2.2. Marco teórico.....	26
2.2.1. Pensamiento Espacial.....	26
2.2.2. Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA)	28
2.2.3. Teorema de Pick	30

2.2.4.	Educación Matemática Realista (EMR).....	31
2.2.5.	Tangram como recurso didáctico.....	33
2.2.6.	GeoGebra como medio para potenciar el Pensamiento Espacial	34
2.3.	Marco conceptual.....	35
2.3.1.	Área.....	35
2.3.2.	Perímetro	36
2.3.3.	Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)	35
2.4.	Marco legal.....	37
2.4.1.	Constitución política de 1991.....	37
2.4.2.	Ley 115 de 1994	38
2.4.3.	Lineamientos curriculares	39
2.4.4.	Estándares básicos de competencias.....	40
2.4.5.	Ley 2491 de 2025	40
3.	Aproximación metodológica.....	42
3.1.	Enfoque, diseño y tipo	43
3.2.	Población y muestra.....	44
3.3.	Método	45
3.3.1.	Fase 1: Preparación del Experimento.	47
3.3.2.	Fase 2: Experimentación.....	57
3.3.3.	Fase 3: Análisis retrospectivo.....	58

EXPERIMENTO CON TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAJE	6
3.4. Técnicas e instrumentos.....	59
4. Análisis de resultados.....	66
4.1. Fase 1: Preparación del experimento.....	67
4.1.1. Resultados THAp.....	67
4.1.2. THA propuesta para la experimentación.....	76
4.2. Fase 2: Experimentación.....	79
4.2.1. Resultados implementación THA, guía de observación TRA.....	79
4.2.2. Resultados TRA en GeoGebra.....	94
4.3. Fase 3: Análisis retrospectivo.....	115
Conclusiones.....	120
Discusión.....	126
Referencias bibliográficas.....	130
Apéndices.....	138

Lista de Tablas

Tabla 1 Síntesis general de la THAp _____	47
Tabla 2 Síntesis general de la THA propuesta _____	49
Tabla 3 Síntesis de técnicas e instrumentos de recolección de información _____	60
Tabla 4 Síntesis de técnicas e instrumentos de análisis de información _____	63
Tabla 5 Resultados THAp 1 _____	68
Tabla 6 Resultados THAp 2 _____	69
Tabla 7 Resultados THAp 3 _____	71
Tabla 8 Resultados THAp 4 _____	73
Tabla 9 THA 1 _____	76
Tabla 10 THA 2 _____	77
Tabla 11 THA 3 _____	78
Tabla 12 THA 4 _____	79
Tabla 13 Resultados guía de observación TRA tarea 1 _____	80
Tabla 14 Resultados guía de observación TRA tarea 2 _____	83
Tabla 15 Resultados guía de observación TRA tarea 3 _____	86
Tabla 16 Resultados guía de observación TRA tarea 4 _____	89
Tabla 17 Resultados GeoGebra TRA tarea 1 _____	94
Tabla 18 Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 1 con GeoGebra (TRA) _____	98
Tabla 19 Resultados GeoGebra TRA tarea 2 _____	100
Tabla 20 Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 2 con GeoGebra (TRA) _____	103
Tabla 21 Resultados GeoGebra TRA tarea 3 _____	105
Tabla 22 Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 3 con GeoGebra (TRA) _____	108
Tabla 23 Resultados GeoGebra TRA tarea 4 _____	110
Tabla 24 Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 4 con GeoGebra (TRA) _____	114
Tabla 25 Resumen revisión de antecedentes _____	138
Tabla 26 Ejemplo de rejilla de observación diagnóstica. _____	142
Tabla 27 Guías diagnósticas impresas y digitales. _____	144
Tabla 28 Guía de observación TRA _____	144
Tabla 29 Rúbrica analítica del Pensamiento Espacial _____	145
Tabla 30 Matriz de contraste THA–TRA _____	147

Lista de Apéndices

Apéndice A. <i>Rejilla de resumen de revisión de antecedentes.</i>	138
Apéndice B. <i>Instrumento de observación diagnóstica.</i>	142
Apéndice C. <i>Material audiovisual utilizado para la THAp.</i>	144
Apéndice D. <i>Instrumento de observación TRA.</i>	144
Apéndice E. <i>Material digital de GeoGebra durante la activación.</i>	145
Apéndice F. <i>Instrumento de análisis de resultados de la TRA.</i>	145
Apéndice G. <i>Instrumento para comparar THA con TRA.</i>	147
Apéndice H. <i>Material digital mejorado de GeoGebra</i>	148
Apéndice I. <i>Libro de GeoGebra</i>	148

Resumen

Título: Un experimento de enseñanza para el fortalecimiento del pensamiento espacial: un planteamiento a partir del uso de material manipulable y el software GeoGebra *

Autor: Felix Andrés Luna Chavarría (1), Carlos Eduardo Guerrero Cuy (2) **

Palabras Clave: Pensamiento Espacial, Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, Educación Matemática, Área, Perímetro, GeoGebra, Tangram, Primaria.

Descripción: El presente trabajo de grado se enmarca en la Investigación Basada en Diseño (IBD) y tiene como propósito fortalecer el Pensamiento Espacial en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, mediante el diseño, implementación y análisis de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). Esta trayectoria articula recursos manipulativos como el Tangram y herramientas digitales como el Software de Geometría Dinámica GeoGebra, principios metodológicos del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y la Educación Matemática Realista (EMR). La intervención se llevó a cabo con cuatro grupos de estudiantes de la Institución Educativa José Elías Puyana (sede A), en Floridablanca (Santander), y constó de cinco sesiones orientadas a la comprensión de los conceptos de área y perímetro, incorporando además el uso del Teorema de Pick. La recolección y análisis de datos se realizó mediante técnicas cualitativas como la observación directa, el análisis de producciones estudiantiles, entrevistas, encuestas y rúbricas analíticas. Los resultados evidencian un avance significativo en los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes (modelo de Van Hiele), una mayor diferenciación conceptual entre área y perímetro, y un uso más argumentado del lenguaje geométrico. Se concluye que una THA estructurada, contextualizada y apoyada en materiales concretos y tecnología interactiva, puede promover aprendizajes significativos y duraderos en geometría escolar, aportando teoría útil para la práctica docente y al desarrollo del pensamiento matemático.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Licenciatura en Educación Básica Primaria. Directora: Juddy Amparo Valderrama Moreno. Doctora en Ciencias de la Educación.

Abstract

Title: A Teaching Experiment for Strengthening Spatial Thinking: An Approach Based on the Use of Manipulative Materials and GeoGebra Software *

Author: Felix Andrés Luna Chavarría (1), Carlos Eduardo Guerrero Cuy (2) **

Key Words: Spatial Thinking, Hypothetical Learning Trajectories, Mathematics Education, Area, Perimeter, GeoGebra, Tangram, Primary School

Description: This undergraduate thesis is framed within the Design-Based Research (DBR) methodology and aims to strengthen spatial thinking in fifth-grade primary school students through the design, implementation, and analysis of a Hypothetical Learning Trajectory (HLT). The trajectory integrates manipulative materials (such as the tangram), digital tools (such as GeoGebra software), and pedagogical principles from Problem-Based Learning (PBL) and Realistic Mathematics Education (RME). The intervention was conducted with four student groups from the José Elías Puyana School (Campus A) in Floridablanca, Santander, Colombia, through five sessions focused on understanding the concepts of area and perimeter, including the application of Pick's Theorem. Data collection and analysis were carried out using qualitative techniques such as direct observation, analysis of student productions, interviews, surveys, and analytic rubrics. The results show a significant improvement in the students' geometric reasoning levels (based on the Van Hiele model), greater conceptual differentiation between area and perimeter, and more structured use of geometric language. It is concluded that a well-structured HLT, grounded in real-life contexts and supported by concrete materials and interactive technology, can foster meaningful and lasting learning in school geometry, while also contributing to the improvement of teaching practices and the development of mathematical thinking.

* Degree Work

* Faculty of Human Sciences. School of Education. Bachelor's Degree in Elementary Basic Education. Director: Juddy Amparo Valderrama Moreno. Doctor in Education Sciences

Introducción

La enseñanza de la matemática en la educación básica primaria continúa dependiendo en gran medida del uso de libros de texto, lo cual limita la participación de los estudiantes en situaciones contextualizadas reales y de aplicación; en la literatura se señala que, en muchas instituciones, la geometría se enseña mediante clases magistrales descontextualizadas, lo que fomenta desconexión y actitudes negativas hacia el área. En la educación matemática se plantea el abordaje del pensamiento matemático, en Colombia el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998, 2006) define que el pensamiento matemático encierra el desarrollo de cinco pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Dichos pensamientos se relacionan con cinco procesos y el contexto, tanto de la matemática como de otras ciencias. Los Lineamientos Curriculares enfatizan en formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos y esta misma postura se ratifica en los estándares de competencia. De igual manera, en la política pública se destaca que la clase debe asumirse como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento.

Este trabajo se centra en el Pensamiento Espacial (PE) y Sistemas Geométricos definido por el MEN (2006) como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p.61). Desde la perspectiva del desarrollo infantil, Piaget e Inhelder (1956, 1960) señalan que las concepciones espaciales iniciales de los niños son topológicas y, con la maduración y la experiencia, se refinan progresivamente hasta

comprender conceptos geométricos más complejos; de esta manera, resalta la necesidad de secuenciar adecuadamente las actividades para favorecer el paso desde la intuición espacial hasta el razonamiento formal. En respuesta, el presente trabajo de investigación se enfoca en cómo fortalecer el PE en estudiantes de educación básica primaria a través de intervenciones de aula por medio de la aplicación de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), las cuales se alinean con las orientaciones de la política educativa colombiana en cuanto a la enseñanza de la matemática se refiere.

En la primera parte de este trabajo se formuló el problema de investigación, se contextualizó la situación escolar, se identificaron las dificultades en torno al Pensamiento Espacial y se establecieron los objetivos y la pregunta que guió el estudio. En el segundo apartado se abordaron los fundamentos teóricos, antecedentes investigativos y conceptos clave que dieron soporte a la propuesta, como el uso del tangram, el Teorema de Pick y el software GeoGebra. Luego, se expuso el diseño metodológico desde la Investigación Basada en Diseño (IBD), se describió la población, el método de trabajo, las fases desarrolladas y los instrumentos empleados para la recolección de información. En el cuarto capítulo se presentó el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, destacando el progreso de los estudiantes. Finalmente, se formularon las conclusiones.

1. Planteamiento y formulación del problema

1.1.Contextualización

En la vida cotidiana, las personas enfrentan situaciones que requieren competencias numéricas como habilidades relacionadas con el espacio, la geometría y las relaciones métricas, tal como lo menciona la Secretaría de Educación Distrital [SED] (1999). Las matemáticas, por tanto, se constituyen en un saber presente en múltiples contextos, lo que hace necesario que, desde la escuela, se cimiente las bases conceptuales y procedimentales que permitan usar las herramientas ofrecidas por la matemática para entender la naturaleza y su realidad en contextos formales de la escuela.

La SED (1999) ejemplifica estas situaciones cotidianas al mencionar acciones como calcular el tamaño que ocuparán los muebles en una vivienda, lo que implica considerar el área disponible, estimar la distancia entre dos puntos o determinar, al parquear un vehículo, si el espacio es suficiente para maniobrar. En todos estos casos, el Pensamiento Espacial (PE) resulta fundamental para la toma de decisiones y la resolución de problemas.

El presente trabajo de investigación se desarrolla en la Institución Educativa Técnico José Elías Puyana Sede A, ubicado en Floridablanca, Santander. Donde se evidencia, por medio de la observación en un primer momento, que los estudiantes en general, presentan dificultades en el área de matemáticas. Esto lleva a considerar que la presente investigación se enfoque en esta área con el fin de busca dar solución a dicha dificultades.

1.2. Situación problemática

La importancia de un adecuado desarrollo del PE, particularmente desde la geometría, radica en su aplicabilidad para resolver problemas en contextos reales. Godino (2006) enfatiza que el estudio de las propiedades geométricas debe traducirse en la formalización de

conocimientos propios de la geometría euclidiana, mientras que Piaget (citado por SED, 1999) plantea que el desarrollo de competencias geométricas en los niños es progresivo, se inicia en el nivel topológico hasta llegar a la comprensión de propiedades euclidianas. Sin embargo, en la práctica escolar, este proceso no siempre se respeta, pues algunos docentes continúan la enseñanza bajo métodos tradicionales, es decir, se replican las formas en que ellos mismos aprendieron, sin priorizar el desarrollo gradual de estas competencias. Además, la enseñanza de las matemáticas en muchas instituciones educativas no se ajusta de manera coherente a los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006), que establecen, entre otros propósitos, el desarrollo de habilidades para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizar un lenguaje simbólico y numérico, aplicar procedimientos y algoritmos pertinentes, potenciar el razonamiento y la visualización, y fomentar actitudes de aprecio y confianza hacia las matemáticas. No obstante, se observa que, en numerosos casos, el aula se convierte en un espacio donde se trabajan estrategias generales, sin lograr un aprendizaje significativo de los pensamientos matemáticos, en particular del Pensamiento Espacial.

Ante esta situación observada surge la duda de ¿Qué características debe tener una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para fortalecer el Pensamiento Espacial utilizando el Teorema de Pick, a partir de intervenciones basadas en el ABP, en estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa José Elías Puyana, sede A?

1.3. Delimitación

En este contexto, se reconoce la necesidad de que los docentes integren en sus planeaciones actividades que vinculen los cinco pensamientos matemáticos, con énfasis en

el PE y en los procesos que este involucra. Por ello, el presente proyecto se plantea como una propuesta de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)* para estudiantes de grado quinto de la *Institución Educativa José Elías Puyana, sede A*, fundamentada en el enfoque de *Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)*. La propuesta integra el uso del *Teorema de Pick*, el *Tangram* y herramientas digitales como *GeoGebra*, con el objetivo de favorecer la comprensión de conceptos geométricos como el área y el perímetro. Este diseño se alinea con los Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006) para el segundo grupo de grados (cuarto y quinto) y con el currículo institucional vigente. Participan en el proceso el investigador, el/la docente titular y los estudiantes seleccionados como muestra.

1.4. Justificación

El Pensamiento Espacial (PE) constituye una habilidad necesaria dentro de la formación matemática, ya que permite representar, analizar y comprender relaciones entre figuras, posiciones, dimensiones y estructuras en el espacio. A pesar de su relevancia, en la práctica escolar este tipo de pensamiento suele ser relegado, o tratado superficialmente, lo que reduce las oportunidades de los estudiantes para desarrollar competencias espaciales sólidas. Zapata (2014; como se cita en Gonzáles, 2022) advierte que en muchas instituciones el PE ha venido perdiendo protagonismo, minimizándose sus conceptos y representaciones, lo que genera ambigüedad y desconocimiento entre los estudiantes. La investigación cualitativa de Gonzáles muestra que la enseñanza de la geometría se realiza a través de clases magistrales descontextualizadas, fomentando la desconexión y actitudes negativas hacia el área.

Ante esta problemática, el presente proyecto plantea una intervención didáctica orientada al fortalecimiento del PE en estudiantes de grado quinto, a través del diseño y aplicación de

una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). Esta trayectoria integra actividades secuenciadas que articulan el Teorema de Pick, material manipulativo como el Tangram y herramientas digitales como GeoGebra, favoreciendo una comprensión visual, concreta y tecnológica de los conceptos de área y perímetro.

La investigación presenta relevancia social, académica y práctica. De acuerdo con Quitano (2024), en el plano social, potenciar el PE ayuda a que los futuros ciudadanos comprendan y utilicen mapas, planos y otras representaciones espaciales, lo que les permite orientarse y resolver problemas cotidianos relacionados con el espacio. Desde la perspectiva académica, la literatura muestra que el entrenamiento en visualización y razonamiento espacial mejora el desempeño en matemáticas y ciencias, y que estas habilidades predicen el éxito en campos STEM; además, la geometría desarrolla el razonamiento deductivo, la creatividad y la perseverancia. A nivel práctico, incorporar actividades manipulativas (como el tangram, el geoplano y herramientas digitales) facilita que los estudiantes transiten del reconocimiento de formas a la identificación de sus propiedades, construyan vocabulario geométrico y vivan experiencias inclusivas y participativas.

La propuesta se fundamenta en los Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006), que promueven procesos como la formulación y resolución de problemas, la modelación, la comunicación y el razonamiento matemático. Para su implementación, se adopta el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como metodología activa, lo que permite que los estudiantes asuman un rol protagónico, trabajen de manera colaborativa y desarrollen sus habilidades espaciales a partir de situaciones contextualizadas.

Desde el punto de vista metodológico, la investigación se enmarca en la Investigación Basada en Diseño (IBD), enfoque que, según Cobb et al. (2003), posibilita el desarrollo de

teorías educativas a partir del análisis sistemático de intervenciones en contextos reales de aula. Este método implica un proceso cíclico de diseño, experimentación y ajuste, lo que permite mejorar de manera continua las secuencias didácticas y comprender en profundidad cómo se desarrollan los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, la investigación es pertinente porque:

- Parte de un diagnóstico sobre los conocimientos previos de los estudiantes en relación con área y perímetro.
- Propone una secuencia de actividades intencionada, fundamentada y contextualizada.
- Aporta elementos para el diseño de THA que fortalezcan el PE en la educación básica primaria.

Finalmente, se espera que los resultados contribuyan tanto a la mejora de las prácticas docentes como al campo investigativo en educación matemática, de manera que ofrece estrategias concretas y teóricamente fundamentadas para el fortalecimiento del Pensamiento Espacial y numérico en estudiantes de primaria.

1.5.Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Conjeturar una **Trayectoria Hipotética de Aprendizaje** orientada al fortalecimiento del Pensamiento Espacial en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa José Elías Puyana, sede A, mediante el uso de material manipulativo como el Tangram y tecnológico como el Software GeoGebra, a partir de intervenciones basadas en el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y el juego como estrategia Pedagógica.

1.5.2. Objetivos específicos

- Diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes de grado quinto en relación con los conceptos de área y perímetro.
- Implementar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje diseñada, integrando el Teorema de Pick, el Tangram y GeoGebra en actividades basadas en ABP.
- Analizar el desempeño y las estrategias de los estudiantes durante la implementación de la THA.
- Describir los elementos clave que debe contener una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje mejorada para fortalecer el Pensamiento Espacial en el contexto de la educación básica primaria.

1.6. Pregunta de investigación

¿Qué características debe tener una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que fortalezca el Pensamiento Espacial utilizando el Teorema de Pick, a partir de intervenciones basadas en el ABP, en estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa José Elías Puyana, sede A?

2. Aproximación teórica.

La presente sección expone los fundamentos empíricos, teóricos y conceptuales que sustentan esta investigación. En primer lugar, se presentan los *antecedentes* más relevantes, clasificados en tres niveles —internacional, nacional y local—, con el fin de contextualizar los hallazgos previos y evidenciar vacíos que justifican la propuesta. Posteriormente, se desarrolla el *marco teórico*, el cual profundiza en los conceptos clave y enfoques metodológicos que orientan el estudio: el Pensamiento Espacial (PE), las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), el Teorema de Pick, el tangram como recurso didáctico y el uso del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría. Seguidamente, se presenta el *marco conceptual*, donde se definen los términos esenciales para la comprensión del problema y de la propuesta didáctica, finalmente, se evidencia el marco legal, donde se consignan las normativas bajo las que se realizó el presente trabajo de investigación.

Estos apartados no solo cumplen una función descriptiva, sino que además establecen un puente entre la teoría y la práctica. El PE se concibe como un eje transversal del pensamiento matemático, mientras que las THA ofrecen una guía estructurada para el aprendizaje progresivo. El Teorema de Pick, el tangram y GeoGebra se integran como herramientas complementarias que facilitan la comprensión de nociones geométricas como el área y el perímetro, y que permiten articular lo concreto, lo visual y lo tecnológico en el aula. En conjunto, estos elementos fundamentan la intervención pedagógica propuesta y la alinean con los principios de metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

2.1. Antecedentes de la investigación

La revisión de antecedentes se centra en investigaciones cuyo propósito es comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje del área y el perímetro, el desarrollo del Pensamiento Espacial y la incorporación de recursos manipulativos y tecnológicos en el aula. A partir de este análisis, los hallazgos se organizan en tres niveles —internacional, nacional y local— con el fin de ofrecer una visión amplia y contextualizada del estado actual del conocimiento, identificar vacíos y sustentar la pertinencia del estudio. Esta revisión permite reconocer cómo distintas propuestas didácticas, entre ellas las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) y metodologías propias de la Investigación Basada en Diseño (IBD), orientan transformaciones significativas en la enseñanza de la geometría y del pensamiento matemático en general.

2.1.1. Nivel internacional

En el contexto internacional, múltiples investigaciones destacaron el potencial de las tecnologías dinámicas y los materiales manipulativos para favorecer el aprendizaje geométrico. Díaz-Nunja, Rodríguez-Sosa y Lingán (2018) desarrollaron un estudio cuasiexperimental en Lima y emplearon GeoGebra como herramienta principal. Durante once sesiones, los estudiantes interactuaron con representaciones dinámicas que les permitieron visualizar transformaciones, explorar propiedades geométricas y validar conjeturas. Los resultados mostraron mejoras sustanciales en el razonamiento matemático, la comunicación y la resolución de problemas, así como un aumento en la motivación y el compromiso académico. Esto evidenció que los entornos digitales no solo fortalecieron la comprensión conceptual, sino que también influyeron en variables afectivas que facilitaron la participación y el aprendizaje autónomo.

Jiménez-Gestal y Blanco Nieto (2017) incorporaron el Teorema de Pick como herramienta para promover el descubrimiento guiado en la formación inicial docente. Al trabajar con el geoplano, los participantes construyeron, analizaron y compararon figuras poligonales sobre una malla de puntos, lo que facilitó el razonamiento inductivo y la formulación de la expresión del teorema. Aunque el estudio mostró avances en visualización y argumentación, se evidenciaron dificultades relacionadas con la precisión en el lenguaje formal, lo que resaltó la necesidad de fortalecer los procesos de comunicación matemática en las propuestas de enseñanza de la geometría.

Por su parte, Fernández, B. (2009) analizó diversos recursos manipulativos —entre ellos el tangram, el geoplano y el libro de espejos— como herramientas para enseñar geometría en educación primaria. La autora describió el tangram como un material que permite construir y comparar polígonos y estudiar relaciones de área y perímetro; propuso actividades en las que los alumnos crean triángulos, trapezoides y cuadrados con diferentes combinaciones de piezas para reconocer figuras y sus propiedades. También explicó que el geoplano, un tablero punteado, favorece la construcción de polígonos, la medida de áreas y perímetros y el análisis de simetrías. Por último, presentó el libro de espejos (dos espejos unidos por uno de sus lados) como un recurso para investigar simetrías, ángulos y polígonos regulares; los estudiantes pueden crear frisos, fractales, poliedros y explorar ejes de simetría y ángulos interiores. Fernández concluyó que estos materiales son fáciles de usar, fomentan la visualización y ayudan a los niños a avanzar desde el reconocimiento visual de las formas hasta la identificación de sus propiedades, ampliando su vocabulario geométrico y generando ambientes de aprendizaje activos y conectados con el patrimonio cultural

De manera más reciente, Castro Castro (2025) diseñó una THA para la enseñanza de ecuaciones trigonométricas con infinitas soluciones, con base en los principios de la Investigación Basada en Diseño. Su estudio mostró que la combinación de tareas contextualizadas, recursos digitales y ciclos iterativos de análisis promovió la transición desde razonamientos intuitivos hacia formas más estructuradas de argumentación formal. Este trabajo demostró la versatilidad del enfoque THA para abordar distintos campos matemáticos, lo que reafirmó su pertinencia como marco de diseño instruccional.

Finalmente, Moreno Gatica (2023) exploró el uso del tangram como recurso didáctico a través de talleres secuenciales que transitaron de lo concreto a lo abstracto en educación básica y media. Sus resultados mostraron avances en la visualización espacial, en la interpretación de áreas compuestas y en el trabajo colaborativo. La investigación destacó que la manipulación, la experimentación dirigida y la reorganización de piezas geométricas fortalecieron la comprensión del espacio y permitieron establecer conexiones entre representaciones físicas, gráficas y simbólicas.

De manera conjunta, estas investigaciones internacionales confirmaron que la combinación de herramientas digitales, recursos manipulativos y metodologías activas constituyen un camino sólido para transformar la enseñanza de la geometría, apoyar el desarrollo del Pensamiento Espacial y favorecer aprendizajes duraderos. Estos aportes sustentaron las decisiones metodológicas adoptadas en la presente investigación, específicamente la integración del tangram, GeoGebra y la estructura de THA.

2.1.2. Nivel nacional

En Colombia, los estudios recientes profundizaron en la enseñanza del área, el perímetro y las habilidades espaciales mediante recursos didácticos manipulativos y

digitales. Maz-Machado, Argudo y Rodríguez (2018) diseñaron una propuesta basada en el tangram para diferenciar los conceptos de área y perímetro. Los resultados mostraron que los estudiantes reconocieron la independencia entre forma y magnitud, y comprendieron que figuras con igual superficie podían tener contornos distintos. Este hallazgo resultó relevante, pues permitió consolidar la noción de área como medida de recubrimiento y la de perímetro como medida de borde, ambas dificultades frecuentes en la educación básica.

Anaya, Coavas, Ruiz y Silgado (2022) implementaron una secuencia centrada en el Teorema de Pick desde los principios de la Educación Matemática Realista (EMR). Su estudio demostró que la combinación de actividades contextualizadas, manipulativas y digitales favoreció la construcción inductiva de la fórmula del teorema, fortaleció el razonamiento geométrico y promovió el uso de argumentos basados en relaciones entre puntos, segmentos y áreas.

Argota Ebrat (2021), desde un enfoque constructivista, investigó el Pensamiento Espacial en segundo grado mediante el tangram físico e interactivo. Su propuesta permitió que los estudiantes identificaran formas, orientaran piezas, describieran direcciones y reconocieran relaciones entre figuras, habilidades fundamentales para el desarrollo de los niveles iniciales de Van Hiele.

En un nivel más avanzado, Aldana y Pérez (2024) emplearon GeoGebra para abordar la visualización tridimensional y las relaciones espaciales en estudiantes de quinto grado. Este entorno interactivo les permitió manipular objetos geométricos, aplicar transformaciones y analizar vistas múltiples, lo que facilitó procesos de abstracción y comprensión de estructuras espaciales complejas.

Otras contribuciones relevantes incluyeron el trabajo de González Vargas (2021), quien combinó GeoGebra con proyectos de Aprendizaje Basado en Proyectos para mejorar la comprensión geométrica en estudiantes con dificultades. Su estudio evidenció que el uso de tecnologías interactivas incrementó la autoconfianza, redujo la ansiedad matemática y promovió una mayor disposición hacia el aprendizaje.

González (2022) identificó debilidades pedagógicas en instituciones rurales asociadas con la ausencia de recursos didácticos y el predominio de prácticas memorísticas. Finalmente, Bocanegra González y Devia Ávila (2019) desarrollaron una THA orientada a la generalización geométrica, en la que integraron material manipulativo y GeoGebra. Su estudio mostró que los estudiantes avanzaron desde observaciones empíricas hacia la formulación de propiedades generales, lo que evidenció la pertinencia del enfoque THA para promover aprendizajes profundos y articulados.

En conjunto, estos antecedentes nacionales reforzaron la validez de metodologías activas, el uso de tecnologías dinámicas y la estructuración de secuencias didácticas guiadas como estrategias efectivas para fortalecer el Pensamiento Espacial, en coherencia con los propósitos del presente trabajo.

2.1.3. Nivel local

A nivel local, las investigaciones realizadas en Bucaramanga y su área metropolitana reflejaron un creciente interés por mejorar los procesos de enseñanza de la geometría mediante metodologías activas y el apoyo de recursos tecnológicos. Chanaga, S. (2017) implementaron una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele con estudiantes de sexto grado, y observaron avances desde la visualización hacia el análisis estructural de las

figuras. Además, evidenciaron una mayor motivación estudiantil y un fortalecimiento en el uso del lenguaje geométrico.

Por su parte, Moreno Jaimes (2024) desarrolló un análisis documental en el que destacó la importancia del Pensamiento Espacial en primaria y propuso siete habilidades espaciales esenciales que deberían integrarse de forma transversal en los cinco pensamientos matemáticos. Su estudio subrayó la necesidad de construir un currículo más explícito y articulado, que permitiera a los estudiantes transitar de lo concreto a lo abstracto mediante el uso de recursos manipulativos, tareas contextualizadas y tecnologías interactivas.

Estos aportes locales coincidieron en la urgencia de fortalecer el Pensamiento Espacial desde los primeros grados y justificaron la propuesta de esta investigación, que integró material concreto, herramientas digitales y el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para abordar conceptos fundamentales como el área y el perímetro. Además, reforzaron la importancia de considerar el contexto institucional y las características de la población estudiantil como elementos clave en el diseño e implementación de propuestas didácticas pertinentes y efectivas.

Con el fin de sintetizar y comparar los principales aportes identificados en la revisión de antecedentes, se presenta un cuadro resumen (Apéndice A) que organiza la información según el nivel geográfico (internacional, nacional y local). En él se recogen los datos esenciales de cada investigación, incluyendo autor(es), año, título del estudio, metodología, población o muestra, principales hallazgos y su relación con la presente investigación. Esta síntesis permite visualizar de manera ordenada las tendencias, enfoques metodológicos y resultados relevantes, facilitando la identificación de vacíos y oportunidades que fundamentan el desarrollo de la propuesta planteada.

Los antecedentes revisados muestran coincidencias: el uso de materiales concretos y tecnológicos facilita la transición de los estudiantes entre diferentes niveles de razonamiento, fortalece la motivación y genera aprendizajes más significativos. Sin embargo, persisten vacíos en torno a la integración sistemática de estos recursos en propuestas didácticas estructuradas, particularmente en el nivel de educación básica primaria. En este sentido, se identifica la necesidad de diseñar Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje que articulen recursos manipulativos, tecnológicos y contextuales, con el propósito de favorecer el desarrollo progresivo del Pensamiento Espacial.

2.2. Marco teórico

El marco teórico de esta investigación recoge los conceptos, enfoques y modelos que sustentan la propuesta didáctica. Los apartados que se presentan a continuación fueron seleccionados por su relevancia directa con los objetivos del estudio y por constituir los ejes que articulan la intervención pedagógica: *Pensamiento Espacial*, *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje*, *Teorema de Pick*, *Tangram* y *GeoGebra*.

Cada uno de estos elementos aporta perspectivas y recursos complementarios que, integrados, permiten diseñar experiencias de aprendizaje significativas y alineadas con metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

2.2.1. Pensamiento Espacial

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006) incluye el Pensamiento Espacial (PE) como uno de los cinco pensamientos que conforman el Pensamiento Matemático, junto con el numérico, métrico, aleatorio y variacional. El PE se compone de la geometría, la orientación espacial y la visualización, y se considera esencial para el desarrollo del pensamiento científico y la resolución de problemas cotidianos.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), el PE aporta herramientas para enfrentar situaciones que implican ubicación, orientación y distribución de objetos en el espacio, y debe desarrollarse de forma progresiva, desde experiencias concretas hasta representaciones abstractas. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) destaca su utilidad para interpretar mapas, planificar rutas o diseñar planos. El MEN (2006) define el PE como “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones mentales de objetos del espacio, sus relaciones, transformaciones y diversas traducciones a representaciones materiales” (p. 61). Este desarrollo implica una transición desde un espacio sensoriomotor —basado en manipulación y desplazamientos— hacia un espacio conceptual en el que se razona y predicen resultados a partir de la manipulación mental de objetos.

En este sentido, el PE no solo es un contenido de la geometría escolar, sino una competencia transversal que potencia el aprendizaje de otras áreas y que, en el contexto de esta investigación, es la base para el diseño de actividades que integran recursos manipulativos y tecnológicos.

Además de su definición conceptual, el PE incluye un conjunto de competencias específicas que orientan el desarrollo geométrico en la educación básica. Los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) establecen que los estudiantes de cuarto y quinto grado deben comparar y clasificar objetos tridimensionales y figuras bidimensionales, reconocer sus componentes —caras, lados, vértices y ángulos—; identificar y representar ángulos en situaciones estáticas y dinámicas; utilizar sistemas de coordenadas para ubicar puntos y describir relaciones espaciales; reconocer y justificar relaciones de congruencia y semejanza; construir y descomponer figuras y sólidos a partir de

condiciones dadas; y formular y verificar conjeturas sobre transformaciones en el plano. Estas competencias muestran que el PE no se limita a la identificación intuitiva de figuras, sino que exige procesos cognitivos como la visualización, la organización espacial, la coordinación de perspectivas y la argumentación geométrica. En esta investigación, dichas competencias sustentan la necesidad de proponer actividades que articulen experiencias concretas con procesos de abstracción progresiva, de modo que los estudiantes avancen desde una exploración perceptiva hacia formas de razonamiento geométrico más analíticas, propias de los niveles superiores del modelo de Van Hiele. La THA diseñada responde a estos lineamientos, pues promueve el desarrollo de habilidades como la representación espacial, la descomposición y recomposición de figuras, la interpretación de coordenadas y la identificación de relaciones geométricas, competencias que fundamentales para fortalecer el Pensamiento Espacial.

2.2.2. Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA)

Las THA son propuestas didácticas que describen rutas de aprendizaje previstas para que los estudiantes alcancen un determinado nivel de comprensión en un dominio específico (Clements y Sarama, 2004). Según Simon y Tzur (2004), una THA se construye anticipando los logros esperados y los posibles obstáculos, y se adapta de forma flexible a la diversidad de perfiles estudiantiles.

Sus elementos principales, según Simón (1995), son: *la meta de aprendizaje*, que define el objetivo final; *las tareas de aprendizaje*, que son las actividades diseñadas para alcanzar esa meta; y *el proceso de aprendizaje hipotético*, que describe cómo se espera que los estudiantes progresen. Estos componentes son interdependientes y requieren monitoreo y ajustes constantes durante la implementación (Latorre et al., 2010).

El diseño de una THA implica seleccionar un enfoque teórico, identificar el concepto matemático central, revisar investigaciones y materiales curriculares, y planificar actividades que partan del conocimiento previo del estudiante (Simon, 2014).

En este estudio, la THA integra el Teorema de Pick, el tangram y GeoGebra, siguiendo una secuencia que va de lo concreto a lo visual y de allí a la formalización, en coherencia con principios de la Educación Matemática Realista y metodologías activas como el ABP.

Además de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que es un instrumento para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos desde las concepciones previas del estudiante y se compone de una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas y un proceso de aprendizaje hipotético, se diferencian otras tres variantes. La *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar* (THAp) es una versión inicial que se diseña antes de la implementación en el aula; su elaboración exige definir un enfoque teórico, seleccionar la meta y el concepto matemático, revisar investigaciones relacionadas y analizar materiales curriculares. Tras la intervención, se observa la *Trayectoria Real de Aprendizaje* (TRA), que corresponde al recorrido efectivo seguido por los estudiantes durante la implementación y se infiere a partir de evidencias empíricas, ya que el aprendizaje real no puede medirse de manera directa. La comparación entre la THA prevista y la TRA permite detectar ajustes. De este proceso iterativo surge la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje mejorada* (THAm), una versión revisada que incorpora las modificaciones necesarias para responder a las limitaciones observadas; en investigación basada en diseño se recomienda realizar microciclos de mejora durante la intervención en lugar de esperar al final, y estudios recientes han evidenciado la necesidad de añadir preguntas que fomenten la reflexión sobre la relación actividad–efecto en un nuevo ciclo de THA. Así, estas cuatro trayectorias constituyen un

ciclo dinámico de planificación, implementación, evaluación y mejora que guía el diseño didáctico y la investigación en educación matemática.

2.2.3. Teorema de Pick

El Teorema de Pick, propuesto por George Pick en 1899, establece que el área de un polígono simple cuyos vértices están en los puntos de una retícula cuadrada puede calcularse mediante la fórmula:

$$\text{Área} = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde A es el área, I es el número de puntos interiores al polígono y B el número de puntos situados sobre su borde.

Jiménez-Gestal y Blanco Nieto (2017) menciona: “Encontrar la expresión dada por G. Pick es un pretexto para que experimentéis una forma diferente de trabajar la Geometría escolar” (p. 13). Este teorema es de gran valor didáctico porque permite vincular la visualización geométrica con el conteo y el razonamiento algebraico, favoreciendo el tránsito entre representaciones concretas y abstractas. Además, fomenta procesos de formulación de conjeturas, verificación y generalización, en línea con el desarrollo del Pensamiento Espacial y geométrico.

En esta investigación, el Teorema de Pick se incorpora como herramienta para abordar el cálculo de áreas y perímetros de manera visual y manipulativa, antes de pasar a procedimientos formales.

2.2.4. Educación Matemática Realista (EMR)

Enfoque La Educación Matemática Realista (EMR) es un enfoque didáctico originado en Holanda bajo la influencia de Hans Freudenthal, que propone enseñar las matemáticas partiendo de contextos reales y significativos para el estudiante. En la EMR se concibe la matemática como una actividad humana que los alumnos *reinventan guiados por el docente*, en lugar de recibir conocimientos acabados. Esto implica presentar problemas en situaciones de la vida cotidiana que los estudiantes puedan imaginar y comprender, de modo que apliquen su sentido común y estrategias informales para resolverlos. Los contextos utilizados no son meros adornos del problema, sino parte esencial del proceso: las matemáticas emergen como herramientas para decodificar y organizar dichas situaciones. De esta manera, el conocimiento matemático se construye de forma progresiva y conectada con la realidad (Freudenthal, 1991; Bressan & Zolkower, 2012). Un principio central de la EMR es la matematización progresiva, distinguida en dos tipos: horizontal (del mundo real al lenguaje matemático) y vertical (dentro del propio mundo matemático, refinando y formalizando ideas) (Treffers, 1987, citado en Bressan & Zolkower, 2012). El estudiante, entonces, transita desde situaciones concretas hacia niveles más formales de razonamiento matemático a través de una serie de niveles de comprensión.

Gravemeijer (1994, 2002) identificó cuatro niveles en el proceso de aprendizaje dentro de la EMR, los cuales describen cómo las representaciones o modelos de los estudiantes evolucionan desde lo concreto hacia lo abstracto. Estos niveles –situacional, referencial, general y formal– no son etapas rígidas, pero constituyen referentes para entender la transición de un modelo de una situación específica a un modelo para el razonamiento

matemático general. A continuación, se describen cada uno de estos niveles, junto con un ejemplo sencillo en el contexto de la enseñanza básica:

Nivel situacional: La actividad matemática está anclada en un contexto concreto y familiar. El estudiante resuelve el problema apoyándose en conocimientos informales del contexto, sin emplear aún representaciones abstractas (Gravemeijer & Doorman, 1999). Ejemplo: si se plantea calcular el perímetro de un jardín escolar, en este nivel el alumno podría caminar alrededor del jardín con una cinta métrica para medirlo, utilizando la situación real para obtener la medida aproximada.

Nivel referencial (modelo de): Aparece una representación que modela la situación contextual original, permitiendo avanzar hacia cierta abstracción, pero todavía ligada al contexto específico (Gravemeijer, 1999). El estudiante emplea dibujos, esquemas o material manipulativo que representan el problema concreto y le ayudan a describir o comunicar la solución. Ejemplo: dibujar un esquema del jardín con sus medidas para calcular el perímetro; el dibujo actúa como un modelo que refleja la situación real medida previamente.

Nivel general (modelo para): El modelo deja de estar vinculado exclusivamente al contexto original y adquiere un carácter más general o abstracto. El estudiante puede usar su esquema o método para razonar en situaciones diferentes a la inicial, evidenciando un salto hacia la generalización (Freudenthal, 2006). Se desarrolla un lenguaje más formal y estrategias que sirven para resolver una variedad de problemas análogos, sin depender del contexto concreto. Ejemplo: utilizar una fórmula general (como $P = l+l+l+l$ para el perímetro de un rectángulo que permite calcular el perímetro de cualquier figura rectangular, no solo el jardín original, aplicando así el modelo a nuevos casos.

Nivel formal: El razonamiento es completamente abstracto y simbólico, prescindiendo de ayudas contextuales o modelos concretos. El estudiante opera con definiciones, propiedades matemáticas y notación convencional de manera autónoma (Gravemeijer, 1994). Se alcanza un pensamiento matemático formal en el que las conclusiones se apoyan en argumentos teóricos más que en la experiencia directa. Ejemplo: deducir mentalmente el perímetro o el área de una figura compleja aplicando propiedades geométricas y teoremas, sin necesidad de dibujar la figura, es decir, trabajando directamente con el lenguaje algebraico o geométrico formal

2.2.5. Tangram como recurso didáctico

El tangram es un rompecabezas de origen chino compuesto por siete piezas geométricas llamadas *tans* que pueden formar múltiples figuras. Su uso en educación matemática ha demostrado ser eficaz para promover la visualización, la orientación espacial, la descomposición y composición de figuras, así como el reconocimiento de propiedades geométricas (Moreno Gatica, 2023; Argota Ebrat, 2021).

El trabajar con el tangram permite abordar conceptos de área, perímetro, fracciones y simetrías, fomentando la manipulación activa y el aprendizaje basado en la exploración y el descubrimiento. Además, su versatilidad lo hace aplicable en distintos niveles educativos y adaptable a contextos tanto físicos como digitales.

En el marco de este estudio, el tangram se emplea como puente entre la manipulación concreta y la representación gráfica, facilitando la comprensión de relaciones métricas y espaciales.

2.2.6. GeoGebra como medio para potenciar el Pensamiento Espacial

GeoGebra es un software de geometría dinámica que integra álgebra, geometría, estadística y cálculo en un mismo entorno interactivo. Su potencial didáctico radica en la posibilidad de manipular objetos y observar en tiempo real cómo cambian sus propiedades, lo que facilita la visualización, la exploración de patrones y la validación de conjeturas (Aldana y Pérez, 2024; Díaz-Nunja et al., 2018).

El uso de GeoGebra favorece la transición de lo concreto a lo abstracto, permite representar múltiples perspectivas de un mismo objeto y fomenta el aprendizaje activo y autónomo. Además, promueve el trabajo colaborativo y el desarrollo de competencias tecnológicas, cada vez más necesarias en la educación actual.

González Vargas menciona que “...los estudiantes de ahora les gusta interactuar con la tecnología y los medios digitales, los cuales son fáciles de manipular para ellos, lo importante como docentes es que se debe utilizar esta habilidad para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, porque es una asignatura considerada aburrida y de poco interés por ellos.” (González Vargas, C., 2021, p. 9). En consonancia con esta afirmación, al analizar el contexto en el que se desarrollan los niños y las niñas en la actualidad, se reconoce la tecnología como un elemento presente en sus vidas desde edades muy tempranas. En este sentido, la vinculación intencionada de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje puede potenciar el aprendizaje de los estudiantes, en la medida en que incrementa su interés y nivel de motivación, especialmente en áreas como las matemáticas.

En este proyecto, GeoGebra se integra como herramienta para reforzar los aprendizajes obtenidos con el tangram y el Teorema de Pick, ofreciendo un entorno donde

los estudiantes puedan manipular, experimentar y consolidar su comprensión de conceptos geométricos.

2.2.7. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Metodología activa que plantea situaciones problemáticas como punto de partida para el aprendizaje, fomentando la investigación, la colaboración y la aplicación de conocimientos (Barrows, 1986). En este estudio, el ABP estructura las actividades de la THA, incentivando el razonamiento y la resolución de problemas geométricos.

2.3. Marco conceptual.

A continuación, se presentan las definiciones operativas de los términos clave utilizados en esta investigación. Estas definiciones integran perspectivas teóricas y la forma en que serán entendidas y aplicadas en el presente estudio.

2.3.1. Área

El área se concibe como la medida de la superficie delimitada por una figura bidimensional. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, “medir el área implica establecer cuántas unidades cuadradas se requieren para cubrir una región” (MEN, 1998, p. 45). Esta definición pone el énfasis en el recubrimiento, lo que permite a los estudiantes comprender que el área representa la cantidad de espacio ocupado dentro de un contorno.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas precisan que, en los grados cuarto y quinto, los estudiantes deben ser capaces de “cuantificar áreas de figuras mediante descomposición y recomposición, uso de unidades cuadradas y aplicación de fórmulas” (MEN, 2006, p. 32). De esta manera, la noción de área se relaciona con procesos de

Pensamiento Espacial que involucran visualización, equivalencia y comparación entre figuras.

En esta investigación, el área se utiliza en dos vías: (1) mediante fórmulas convencionales para figuras rectangulares y triangulares, y (2) mediante el Teorema de Pick para polígonos cuyos vértices se sitúan sobre una cuadrícula, lo cual favorece la transición del conteo a la generalización algebraica.

2.3.2. Perímetro

El perímetro se define como la longitud total del contorno de una figura. Los Lineamientos Curriculares señalan que medir el perímetro implica “recorrer el borde de un objeto y asignar una medida a esa longitud total” (MEN, 1998, p. 44). Esta noción está asociada a experiencias espaciales básicas como rodear, caminar alrededor o delimitar un área.

Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) establecen que, en educación básica primaria, el trabajo con perímetro debe permitir comparar figuras, comprender que formas distintas pueden tener perímetros iguales y analizar cómo las transformaciones afectan la medida del contorno.

La NCTM (2000) agrega que estudiar perímetro permite explorar relaciones entre “formas, tamaños y dimensiones de las figuras” (p. 41), lo cual contribuye al desarrollo del pensamiento métrico y geométrico. En esta tesis, el perímetro se emplea como herramienta para comparar regiones del “parque” y para analizar las implicaciones de la forma en la longitud del contorno.

2.4.Marco legal.

El marco legal de esta investigación delimita el horizonte normativo en el que se desarrolla la propuesta de enseñanza. Dado que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) se aplican en el contexto escolar, el estudio debe respetar y articular los mandatos constitucionales y legales que rigen la educación en Colombia. La Constitución Política de 1991 consagra la educación como un derecho fundamental, un servicio público y una responsabilidad compartida entre el Estado, la sociedad y la familia. Sobre esta base, la Ley 115 de 1994 o *Ley General de Educación* establece principios, fines y estructuras del servicio educativo, mientras que normas posteriores precisan lineamientos curriculares y estándares de competencias para guiar la práctica pedagógica. Más recientemente, las leyes 2491 de 2025 y 2383 de 2024 incorporan la *educación socio-emocional* como componente obligatorio de los proyectos educativos, subrayando que la formación integral va más allá de los contenidos académicos. Por tanto, esta investigación se desarrolla en línea con estos referentes normativos, de manera que sitúa sus objetivos en el marco del derecho a la educación, la calidad del servicio y el desarrollo integral de los estudiantes.

2.4.1. Constitución política de 1991

La Constitución de 1991 reconoce a Colombia como un Estado social de derecho y promulga un sistema político, económico y social justo

En materia educativa, el artículo 67 establece que la educación es un derecho de la persona y un servicio público con función social

Esta disposición se traduce en varios principios:

Acceso al conocimiento, ciencia y cultura: la educación debe facilitar a todos los colombianos el acceso a la ciencia, la técnica y los valores culturales

Formación integral y valores: la educación debe formar al ciudadano en el respeto a los derechos humanos, la paz, la democracia y en la práctica del trabajo y la recreación

Responsabilidad compartida y gratuidad: el Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación; esta será obligatoria entre los cinco y los quince años y comprenderá un año de preescolar y nueve de básica; en las instituciones del Estado será gratuita, aunque podrán cobrarse derechos académicos a quienes puedan sufragarlos

Inspección y calidad: corresponde al Estado ejercer la inspección y vigilancia de la educación para garantizar su calidad y la formación integral de los educandos

Estos principios no solo legitiman el derecho del estudiante a recibir educación, sino que orientan a los investigadores y docentes a diseñar propuestas que promuevan la equidad, la calidad y la pertinencia cultural del aprendizaje.

2.4.2. Ley 115 de 1994

. La Ley 115 de 1994 establece el marco general para la organización y prestación del servicio educativo en Colombia. En su Artículo 1, define la educación como un proceso permanente, personal, cultural y **social**, fundamentado en la dignidad de la persona humana y en sus derechos y deberes. Señala que las normas generales de esta ley regulan el servicio público de educación con una función social acorde con las necesidades de las personas y la sociedad. Además, dispone que, conforme al artículo 67 de la Constitución, la ley organiza la educación formal (niveles preescolar, básica y media), la educación no formal e informal,

dirigida a poblaciones diversas incluyendo adultos, grupos étnicos y personas con discapacidades.

La ley detalla los fines de la educación (Artículo 5º), entre los que se destacan: el desarrollo integral de la personalidad; la formación en el respeto a la vida, a los derechos humanos y a los principios democráticos; la participación en la vida económica y cultural del país; la adquisición de conocimientos científicos y técnicos; la comprensión de la diversidad cultural; la creación de conciencia de soberanía y solidaridad; el desarrollo de la capacidad crítica y analítica; la conservación del medio ambiente y la promoción de la salud. Asimismo, la ley enfatiza que el servicio educativo será prestado por instituciones estatales y privadas, y que el Estado, la sociedad y la familia deben velar por su calidad y cobertura.

2.4.3. Lineamientos curriculares

Los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) surgieron en cumplimiento del Artículo 78 de la Ley 115, el cual establece que el currículo es un conjunto de criterios, programas, metodologías y procesos que orientan la formación integral. Según la presentación de estos lineamientos, el MEN reconoce que la reforma educativa y la Constitución abren espacios para que las comunidades construyan un nuevo país y una nueva sociedad . En esa línea, los lineamientos son puntos de apoyo y orientación general, dirigidos a los maestros, que aportan elementos conceptuales y metodológicos para dinamizar su quehacer pedagógico . El MEN explica que no se trata de un currículo prescriptivo, sino de criterios de referencia que invitan a reflexionar sobre las áreas fundamentales, reconocer los ritmos de aprendizaje de los estudiantes y atender la diversidad cultural y regional . Su finalidad es orientar las decisiones curriculares de las instituciones educativas, facilitando que los docentes contextualicen los contenidos y propongan

experiencias significativas. Para la presente tesis, los lineamientos constituyen una guía para articular la enseñanza del pensamiento espacial, el área y el perímetro con los objetivos formativos de la educación básica.

2.4.4. Estándares básicos de competencias

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) constituyen un referente común sobre lo que los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer en cada grado. El MEN aclara que dichos estándares fueron elaborados en colaboración con facultades de educación y maestros de todo el país, y que buscan orientar la formulación del currículo, la enseñanza y la evaluación, ofreciendo un marco único que favorece la equidad y la calidad del aprendizaje. La estructura de los estándares se organiza por grados y áreas, describiendo desempeños y ejemplos de situaciones que los docentes pueden contextualizar. No son un currículo rígido, sino referencias flexibles que cada institución puede adaptar a su contexto sociocultural. En el campo de la matemática, estos estándares ayudan a delinear metas de aprendizaje para el Pensamiento Espacial (incluyendo área y perímetro) y se convierten en indicadores que permiten evaluar el avance de los estudiantes a lo largo de la trayectoria propuesta.

2.4.5. Ley 2491 de 2025

La Ley 2491 de 23 de julio de 2025 introduce la obligatoriedad de incorporar el componente socio-emocional en los Proyectos Educativos Institucionales (PEI). El artículo 1 ordena al Ministerio de Educación Nacional garantizar dicha incorporación y fortalecer las habilidades socio-emocionales en la comunidad educativa. Establece que las instituciones educativas deberán incluir de manera transversal, en su currículo y actividades escolares, el

desarrollo de competencias socio-emocionales, considerando enfoques diferenciales que garanticen el acceso de poblaciones urbanas y rurales, así como de grupos con necesidades especiales. Además, la ley prevé que el componente se implemente respetando la libertad de cultos y creencias.

El artículo 2 reconoce que niñas, niños y jóvenes tienen derecho a una educación integral que incluya el desarrollo de competencias socio-emocionales en todos los niveles, implementada de manera gradual y en colaboración con las familias. El artículo 3 dispone que el Estado, a través del Ministerio de Educación Nacional, implemente espacios de socialización y formación para docentes, estudiantes y demás miembros de la comunidad educativa. Asimismo, el artículo 4 ordena a las instituciones incorporar la educación emocional en sus estrategias de formación docente, y el artículo 5 faculta al Ministerio a supervisar y evaluar periódicamente el desarrollo de estas competencias. De este modo, la Ley 2491 articula la dimensión socio-emocional con la educación formal, buscando una formación integral y armonizando la política educativa con las necesidades de salud mental y convivencia escolar.

La presente sección ha expuesto los fundamentos que sustentan la propuesta de investigación, integrando el análisis de antecedentes, el desarrollo del marco teórico y la definición de conceptos clave. Los antecedentes revisados, tanto a nivel internacional, nacional como local, evidencian que el Pensamiento Espacial es un componente esencial en la enseñanza de la geometría y que su fortalecimiento requiere de estrategias activas, contextualizadas y apoyadas en recursos manipulativos y tecnológicos.

El marco teórico ha permitido profundizar en los conceptos y enfoques que orientan la propuesta: el Pensamiento Espacial como competencia transversal, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como guía estructurada del proceso formativo, y herramientas como el Teorema de Pick, el tangram y GeoGebra, cuya integración favorece la transición de lo concreto a lo abstracto en la comprensión de área y perímetro.

Finalmente, el marco conceptual ha precisado el sentido con el que se emplean los términos centrales de esta investigación, garantizando coherencia en su interpretación. Esta base teórica y conceptual será el soporte para el diseño metodológico que se presenta en la sección 3, en el que se detallará el enfoque, la población, los instrumentos y el procedimiento de implementación de la propuesta didáctica.

3. Aproximación metodológica

Este capítulo expone la construcción metodológica que orienta el desarrollo de la investigación, señalando el camino para dar cumplimiento a los objetivos planteados. En primera instancia, se presenta el *enfoque epistemológico* adoptado, seguido del diseño metodológico que define las características del estudio. Posteriormente, se describe el método de investigación y se ofrecen detalles acerca de la población y muestra participantes. Finalmente, se plantean las fases de la investigación, las técnicas e instrumentos de recolección de datos y el cronograma de actividades que estructuran el proceso investigativo.

3.1. Enfoque, diseño y tipo

De acuerdo con el objetivo de esta investigación, se adopta el enfoque epistemológico *pragmático*, por cuanto privilegia la utilidad y aplicabilidad del conocimiento en contextos concretos, priorizando la acción, la experiencia y los resultados que surgen de la interacción entre sujeto y entorno. Este enfoque no persigue verdades absolutas, sino soluciones prácticas a problemas reales, valorando el conocimiento emergente de la práctica reflexiva y de la transformación de la realidad educativa.

La perspectiva pragmática, fundamentada en la filosofía de John Dewey, reconoce que el aprendizaje se construye a partir de la experiencia activa. Como señala el autor en *Experience and Nature* (1929), 'la experiencia se presenta como el método, y el único método, para acceder a la naturaleza, penetrar sus secretos, y en donde la naturaleza empíricamente revelada profundiza, enriquece y orienta el desarrollo futuro de la experiencia'. Bajo esta mirada, el conocimiento matemático no se concibe como un conjunto de verdades abstractas, sino como un saber en constante construcción, situado y dinámico.

En consecuencia, el diseño e implementación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) que integra el Teorema de Pick, el Tangram y el software GeoGebra se enmarca en esta lógica pragmática: construir aprendizajes útiles, transferibles y significativos desde la experiencia. Así, la investigación promueve que los estudiantes, mediante recursos manipulativos y tecnológicos, conecten lo matemático con lo vivido y lo corporal, generando aprendizajes con sentido y favoreciendo la autonomía en la construcción del conocimiento.

La investigación se desarrolla en un contexto natural —el aula de clase—, lo cual define un diseño de campo en el que se recogen tanto fuentes primarias como secundarias. La recolección de información se efectúa en un único momento, por lo que se clasifica como

diseño transeccional contemporáneo, en el cual se examina un solo evento de estudio, constituyendo un diseño univariable o unieventual.

El proceso investigativo implica un nivel alto de intervención del investigador, quien planifica, implementa y controla cada fase del estudio. En este sentido, el diseño se enmarca en la investigación experimental, con un carácter iterativo que permite ajustar la propuesta en función de los resultados parciales. Como plantea Hurtado (2012), la investigación proyectiva se ocupa de cómo deberían ser las cosas para alcanzar determinados fines y funcionar de manera adecuada. En este caso, se busca comprobar la efectividad de la THA diseñada para el fortalecimiento del Pensamiento Espacial en estudiantes de grado quinto.

Por tanto, la metodología adoptada enfatiza la flexibilidad y el control planificado, garantizando un análisis riguroso de los efectos de la intervención y su pertinencia en el contexto escolar. De igual forma, este diseño metodológico permite generar un diálogo entre teoría y práctica, resaltando la importancia de que el docente asuma un rol activo como investigador de su propia práctica.

3.2. Población y muestra

La población objeto de estudio corresponde a los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa José Elías Puyana, sede A, ubicada en Floridablanca, Santander, que cuenta con aproximadamente 39 estudiantes matriculados en cada curso de quinto grado.

La muestra está conformada por los cuatro grupos de quinto (5-1 a 5-4) Se trata de estudiantes entre 9 y 11 años, quienes se encuentran en un momento crucial para el desarrollo del Pensamiento Espacial y Numérico, al transitar hacia formas de razonamiento geométrico más abstractas, seleccionados por su pertinencia frente a los objetivos de la investigación.

Estos grupos fueron caracterizados mediante observación directa no estructurada, atendiendo a cinco criterios: (i) percepción de instrucciones, (ii) comportamiento, (iii) conocimientos previos, (iv) manejo del computador y (v) uso del tangram. 6

Cada criterio fue valorado con una escala ordinal (1 a 5), desde muy bajo hasta muy bueno, con el fin de establecer un diagnóstico inicial y ajustar la propuesta a las características del grupo. Este proceso permitió identificar fortalezas y debilidades que orientaron la planificación de las actividades, garantizando una intervención adecuada al nivel de los estudiantes.

3.3. Método

El estudio se enmarca en la Investigación Basada en el Diseño (IBD), propuesta por Cobb et al. (2003), la cual responde a la necesidad de generar conocimiento útil y situado sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en escenarios reales. A diferencia de los enfoques experimentales tradicionales, que buscan relaciones de causa-efecto, la IBD se centra en procesos complejos y dinámicos, y en el diseño de propuestas instruccionales que atienden problemas auténticos del aula.

Este enfoque combina la intervención intencionada con un análisis sistemático de los resultados, mediante ciclos iterativos de diseño, implementación y análisis retrospectivo (Valverde, 2008). Dicho proceso incluye: (i) preparación del experimento: identificación del problema, diagnóstico (*THAp*) previo al diseño de la propuesta y formulación de hipótesis; (ii) experimentación: implementación de la propuesta (*THA*) en el aula y recolección de datos (*TRA*); y (iii) análisis retrospectivo: sistematización de la información, contraste de hipótesis entre lo propuesto en la *THA* y la información recolectada en la *TRA*, y elaboración de aportes teórico-prácticos y una nueva propuesta mejorada (*THAm*).

La herramienta central en este estudio es la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), compuesta por tres elementos: los objetivos de aprendizaje, las tareas diseñadas y las hipótesis sobre cómo los estudiantes podrían interactuar con ellas (Cobb et al., 2003). Esta trayectoria se concibe como flexible, adaptándose a la realidad del aula y permitiendo comprender cómo emergen los aprendizajes.

La investigación, en coherencia con el pragmatismo, no busca únicamente validar teorías, sino transformar la práctica educativa. De esta manera, la secuencia didáctica diseñada —centrada en el área y el perímetro mediante el Teorema de Pick, el Tangram y GeoGebra— pretende aportar tanto a la teoría educativa como a la mejora de la enseñanza en contextos reales.

Fases de la investigación

La investigación se organiza en fases que permiten estructurar el proceso de manera lógica y coherente:

1. *Preparación del experimento*: Se busca diagnosticar mediante una THAp, con el fin de establecer una caracterización inicial de los estudiantes para construir la THA y los instrumentos.
2. *Experimentación*: Aplicación de las actividades de la THA en el aula.
3. *Análisis retrospectivo*: recolección, sistematización y análisis de los datos de la TRA.

Estas fases, de carácter iterativo, garantizan la coherencia entre los objetivos planteados, la intervención realizada y los resultados alcanzados.

3.3.1. Fase 1: Preparación del Experimento.

En un primero momento se realiza un diagnóstico con el fin de determinar el estado inicial de los estudiantes frente a las temáticas a trabajar en la THA. De manera que, se trataron temas como las ideas previas que tenían sobre las figuras planas y sus características, nociones de área y perímetro, conservación del área a pesar de tener distinto perímetro. Resultando de la siguiente manera la propuesta de diagnóstico THAp:

Tabla 1

Síntesis general de la THAp

Intervención	Propósito diagnóstico	Conceptos matemáticos abordados	Pensamiento matemático implicado	Nivel de razonamiento esperado (Van Hiele)
THAp 1: Vamos a jugar con las figuras	Identificar las ideas previas de los estudiantes sobre las figuras planas y el área a partir del recubrimiento de superficies mediante el uso del tangram.	Figuras geométricas planas, área como recubrimiento, composición y descomposición de figuras.	Pensamiento Espacial y sistemas geométricos.	Nivel 0 – Visualización, con aproximaciones iniciales al Nivel 1 – Análisis.
THAp 2: Juguemos con el tangram	Explorar las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el perímetro y su	Perímetro como longitud del contorno, comparación de figuras,	Pensamiento Espacial y pensamiento métrico.	Nivel 1 – Análisis, con permanencia de rasgos del Nivel

	diferenciación con el área, a partir de la medición informal de contornos.	medición no convencional.		0 – Visualización.
THAp 3: El área de las figuras	Indagar la comprensión inicial del concepto de área mediante la comparación de superficies y el conteo de unidades cuadradas.	Área, unidades cuadradas, comparación de superficies, relación forma–tamaño.	Pensamiento espacial, métrico y numérico.	Transición entre Nivel 1 – Análisis y Nivel 2 – Deducción informal.
THAp 4: Área y perímetro mediante el modelo tradicional	Identificar el uso y comprensión inicial de fórmulas para el cálculo del área y el perímetro en situaciones contextualizadas.	Fórmulas de área y perímetro, interpretación de resultados, comparación de regiones.	Pensamiento métrico, espacial y numérico.	Predominio del Nivel 1 – Análisis , con posibles avances hacia el Nivel 2 – Deducción informal.

Nota. Elaboración propia

Luego de la aplicación del diagnóstico inicial se logran identificar los conocimientos previos y las dificultades conceptuales de los estudiantes en torno a los temas de área y perímetro, lo que permite establecer el punto de partida para el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) orientada al fortalecimiento del PE mediante el uso de recursos manipulativos y tecnológicos. Por tal motivo, se optó por iniciar con actividades acorde al nivel 0 y 1 de Van Hiele.

Esta trayectoria pretende ser una secuencia estructurada de actividades que busca guiar progresivamente el aprendizaje, permitiendo observar cómo los estudiantes avanzan desde niveles de visualización hacia niveles más analíticos y reflexivos en su razonamiento geométrico.

Con base en los resultados obtenidos en la THAp, se propuso la implementación de cuatro sesiones o intervenciones y una evaluación, cada una con una duración aproximada de una hora, desarrolladas dentro de un marco metodológico sustentado en la Educación Matemática Realista (Gravemeijer, 1999) y en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele. Cada sesión se diseñó con un objetivo de aprendizaje específico, vinculado con los estándares de Pensamiento Espacial y métrico del MEN (2006), de modo que el conjunto de sesiones conforme una secuencia coherente y progresiva.

La siguiente tabla (Tabla 1) presenta una síntesis general de la THA propuesta, en la que se muestran las cinco sesiones con sus respectivos objetivos. Posteriormente, se expone de manera detallada el desarrollo de cada una de las intervenciones, describiendo las tareas, niveles de actividad, procesos de aprendizaje hipotético e intervenciones docentes que las componen.

Tabla 2

Síntesis general de la THA propuesta

NÚMERO DE

TIEMPO POR SESIÓN: 1 hora

SESIONES: 5

Sesión 1	Objetivo: Comprender el concepto de área como superficie cubierta, identificando que diferentes configuraciones con las mismas piezas pueden conservar la misma cantidad de área. Usando el Tangram
Sesión 2	Objetivo: Comprender el concepto de perímetro como medida del contorno de una figura y diferenciarlo del área mediante medición física y digital.
Sesión 3	Objetivo: Comprender cómo funciona la fórmula para el cálculo del área de una figura y comprobar su validez mediante la visualización del área de la figura.
Sesión 4	Objetivo: Calcular el área de figuras en retículas mediante el Teorema de Pick y compararlo con otros métodos de cálculo de área.
Sesión 5	Objetivo: Evaluar los temas vistos en las 4 sesiones anteriores. Resolver problemas que integren el cálculo de área y perímetro.

Nota. Elaboración propia

La tabla anterior presenta un resumen de las 5 sesiones que se proponen para mejorar el PE. Posteriormente, en el apartado de resultados de la fase 1: preparación del experimento, se describe a detalle cada sesión propuesta.

A continuación, se presenta el desarrollo detallado de cada una de las cinco sesiones que conforman la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje propuesta. Cada intervención se describe atendiendo a los componentes esenciales de una THA el objetivo de aprendizaje, la tarea propuesta, el nivel de actividad según la Educación Matemática Realista (EMR), el

proceso de aprendizaje hipotético y la intervención docente, con el propósito de evidenciar la progresión conceptual y cognitiva que experimentan los estudiantes a lo largo del experimento de enseñanza. Es preciso aclarar que durante cada intervención en el aula, los investigadores realizaron explicaciones con el fin de aclarar dudas de los estudiantes y evitar generar dificultades de aprendizaje.

Sesión/Tarea 1:

La primera tarea tiene como propósito introducir el concepto de área a partir del recubrimiento de superficies mediante el uso del tangram. Los estudiantes deben diseñar un mosaico rectangular que cubra completamente la entrada del Parque, lo que exige manipular, componer y descomponer figuras para cubrir la totalidad del rectángulo propuesto. Esta actividad se alinea con los Estándares Básicos del MEN (2006), específicamente con el enunciado: “Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas” (p. 49), ya que los niños deben organizar las piezas del tangram para ajustar sus formas al espacio disponible. También se moviliza el estándar: “Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (MEN, 2006, p. 49), puesto que los estudiantes rotan, trasladan y reorganizan las piezas para lograr el recubrimiento. Asimismo, reconocen similitudes y diferencias entre las piezas, lo que relaciona la tarea con el estándar que propone “comparar y clasificar figuras bidimensionales según sus componentes” (MEN, 2006, p. 49). Desde el pensamiento métrico, esta actividad se conecta con el estándar: “Diferencio y ordeno atributos que se pueden medir, como el área de superficies” (MEN, 2006, p. 50), dado que el proceso de recubrimiento permite comprender que el área no es solo una percepción visual, sino una cantidad que se puede medir.

La pertinencia de la tarea se apoya en estudios como el de Argota Ebrat (2021), quien muestra que el tangram favorece el desarrollo del Pensamiento Espacial al potenciar la visualización y el análisis parte-todo. De igual manera, Maz-Machado, Argudo y Rodríguez (2018) evidencian que el tangram permite diferenciar entre área y perímetro al mostrar cómo dos figuras con la misma área pueden tener perímetros distintos. Desde la Educación Matemática Realista (EMR), esta tarea corresponde al nivel situacional, en el que los estudiantes enfrentan un problema contextualizado que da sentido al concepto matemático (Gravemeijer, 1999). De forma coherente, el nivel de Van Hiele asociado es el nivel 1 (visualización), pues los estudiantes comprenden inicialmente el área a partir de la apariencia global de las piezas y la experiencia concreta de recubrir una superficie.

Sesión/Tarea 2:

Con esta tarea se pretende el fortalecimiento del Pensamiento Espacial y métrico, al introducir el perímetro como medida del contorno o cercado de una figura y diferenciarlo del área. De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para 4° y 5°, se movilizan los siguientes: “Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 49), pues los estudiantes analizan las regiones del parque identificando sus bordes y divisiones. Asimismo, se articula con el estándar de pensamiento métrico: “Diferencio y ordeno, en objetos, propiedades o atributos que se puedan medir, como el área de superficies y longitudes de contornos” (MEN, 2006, p. 50).

Durante la actividad, los estudiantes revisan los planos propuestos y calculan el perímetro de las distintas zonas del parque para determinar cuántos metros de barandilla se

requieren para delimitarlas. Este proceso les permite comprender el perímetro como la longitud que rodea o encierra una región, superando la confusión frecuente entre el borde y la superficie.

La pertinencia de esta tarea se sustenta en los planteamientos de Del Grande (1990), quien señala que una de las habilidades esenciales del Pensamiento Espacial es la percepción figura-fondo y de contorno, necesaria para identificar los límites que separan una figura de su entorno y comprender el concepto de perímetro. De igual modo, Gutiérrez (1991) explica que el desarrollo de la visualización geométrica implica reconocer los bordes y fronteras de los objetos, relacionándolos con medidas lineales que describen su extensión. Por tanto, el cálculo del perímetro en un contexto real —como el cercado de una zona de juegos— resulta una estrategia idónea para que los estudiantes vinculen el razonamiento espacial con situaciones concretas.

Maz-Machado, Argudo y Rodríguez (2018) complementan esta idea al demostrar que el uso de materiales manipulativos permite evidenciar que figuras con igual área pueden presentar perímetros diferentes y viceversa, lo que refuerza la diferenciación conceptual entre ambas magnitudes.

Respecto al nivel de Van Hiele, esta tarea se sitúa entre el nivel 1 (análisis) y el nivel 2 (informal de deducción), ya que los estudiantes pasan de reconocer las figuras únicamente por su forma global a analizarlas considerando sus propiedades lineales, como lados y vértices. Desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, el ejercicio transita del nivel situacional al referencial (Gravemeijer, 1999), puesto que se inicia con un problema contextualizado —medir la barandilla del parque— y se generaliza hacia el reconocimiento de las diferencias entre perímetro y área en diversas figuras geométrica.

Sesión/Tarea 3:

La tarea planteada para esta intervención se centra en la exploración del cálculo del área de figuras planas mediante la aplicación de la fórmula $A = \text{base} * \text{altura}$ y corroboración de esta por el conteo de unidades cuadradas. Esta tarea quiere contribuir al fortalecimiento del Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos, en tanto promueve la comprensión de las relaciones entre las formas, el espacio y las magnitudes. Dentro de esta tarea se ve influencia del pensamiento numérico ya que según los estándares básicos de competencias se menciona la importancia de conocer la parte cuantitativa de los problemas no tan solo lo cualitativo, en palabra del MEN (1998)

ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. (p.87)

El Pensamiento Espacial constituye una de las formas más potentes del razonamiento matemático, pues permite visualizar, representar, transformar y establecer relaciones entre objetos y estructuras en el espacio (Clements & Battista, 1992; Mix, 2019). Por esta razón, no puede limitarse únicamente al ámbito geométrico, ya que sirve como fundamento para la comprensión de magnitudes, proporciones, relaciones funcionales y estructuras numéricas. En esta línea, la investigación *Spatial training improves children's mathematics ability* de Cheng y Mix (2014) evidenció que los estudiantes que participaron en un proceso de entrenamiento espacial mostraron mejoras significativas en la resolución de problemas de

cálculo, lo que evidencia la influencia directa del desarrollo espacial sobre las habilidades numéricas.

Asimismo, Uttal, Miller y Newcombe (2013) señalan que las habilidades espaciales son flexibles y transferibles, permitiendo que su fortalecimiento potencie el aprendizaje en otros dominios, principalmente en el razonamiento matemático. Por lo tanto, promover el Pensamiento Espacial desde la educación básica contribuye a integrar lo visual, lo numérico y lo simbólico, consolidando una comprensión más profunda y significativa de las matemáticas.

La tarea propuesta se sitúa entre los niveles 2 y 3 del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986), ya que promueve el tránsito del análisis de las propiedades de las figuras hacia la justificación de los procedimientos convencionales mediante modelos geométricos. En este nivel de avance, los estudiantes no se limitan a aplicar la fórmula del área de manera mecánica, sino que comprenden su significado geométrico, al reconocer que el producto entre la base y la altura generaliza el conteo de unidades cuadradas que cubren una superficie. Así, logran establecer relaciones entre las representaciones visuales y numéricas del área, comprendiendo que el valor obtenido no es solo un número, sino la medida del espacio ocupado. Este proceso refleja el paso de una comprensión operativa a una comprensión estructural del concepto, fortaleciendo el Pensamiento Espacial a través de la visualización, la argumentación y la conexión entre lo concreto y lo abstracto (Clements & Battista, 1992; Duval, 1998; Van Hiele, 1986)

Sesión/Tarea 4:

La Tarea 4 tiene como fin introducir el Teorema de Pick como herramienta para aproximar el cálculo del área. Se propone el uso de una malla de puntos o red de coordenadas como un medio para representar figuras, delimitar áreas y observar la distribución de puntos interiores y de borde. Estas acciones permiten desarrollar la capacidad de visualizar y organizar el espacio, además de promover la identificación de patrones geométricos, aspecto central del razonamiento espacial. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), promueven el fortalecimiento del Pensamiento Espacial al vincular la representación, el análisis y la generalización de relaciones geométricas. De acuerdo con el MEN, los estudiantes de educación básica deben ser capaces de “utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales”.

Dentro de esta tarea se tiene el objetivo de “Explorar patrones entre puntos interiores, puntos de borde y área en una malla de puntos”, buscando explorar en el sistema de coordenadas, para lograr razonar espacialmente. Sarama, J., & Clements, D. H. (2009) en el trabajo *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*, mencionan que el trabajo con sistemas de coordenadas favorece el desarrollo del Pensamiento Espacial, al permitir que los estudiantes comprendan la estructura del plano y las relaciones entre sus componentes. Según estos autores, las actividades que involucran la representación de figuras en rejillas o mallas promueven la integración de la información visual y numérica, aspecto esencial para fortalecer la capacidad de razonar espacialmente, identificar patrones y generalizar relaciones geométricas.

Teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele, esta tarea quiere trabajar hasta el nivel 3, ya que permite que los estudiantes experimenten geoméricamente sobre una malla de puntos, observando cómo varía el área al modificar la cantidad de puntos interiores y de

borde. En este nivel, el aprendizaje se centra en la formulación de conjeturas y el descubrimiento de relaciones geométricas, lo que transforma la actividad en un proceso de construcción de significados y no en la simple aplicación de procedimientos. A través de la exploración, los estudiantes identifican patrones visuales y numéricos, estableciendo vínculos entre la estructura de la figura y su medida. Por ejemplo, cuando un estudiante reconoce que al añadir un punto interior el área aumenta de manera predecible, está realizando un razonamiento inductivo que lo aproxima a la comprensión estructural del Teorema de Pick. Este tipo de razonamiento va más allá del cálculo mecánico, pues implica analizar, justificar y establecer relaciones lógicas entre los elementos geométricos de la figura, fortaleciendo así el Pensamiento Espacial analítico a partir de la reflexión, la argumentación y la generalización.

3.3.2. Fase 2: Experimentación

En esta fase se llevó a cabo la implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) diseñada a partir del diagnóstico inicial. El objetivo fue poner en práctica la secuencia de actividades orientadas a fortalecer el PE y la comprensión de los conceptos de área y perímetro, observando de qué manera los estudiantes transformaban sus ideas iniciales al enfrentarse a nuevas experiencias de aprendizaje.

La intervención se realizó con el grupo 5-1 de la Institución Educativa Técnico Industrial José Elías Puyana (sede A), durante cinco sesiones de una hora cada una (de manera que la quinta sesión consiste en evaluar el nivel de aprendizaje alcanzado). Las actividades combinaron el uso de material manipulativo (tangram físico) y herramientas digitales (GeoGebra), con el fin de que los estudiantes pasaran de la exploración concreta a la representación y justificación digital. Cada sesión fue registrada mediante observaciones,

fotografías, capturas de pantalla y producciones de los estudiantes, lo que permitió seguir de cerca su evolución conceptual y actitudinal.

Durante el proceso, el papel del docente-investigador fue acompañar, guiar y promover la reflexión. Se fomentó la participación activa y el trabajo colaborativo, procurando que cada estudiante expresara sus ideas, argumentara sus procedimientos y validara sus resultados con el apoyo del grupo. Esta dinámica generó un ambiente de aprendizaje en el que la curiosidad, el diálogo y la experimentación se convirtieron en los ejes del desarrollo conceptual.

El diseño de las tareas mantuvo coherencia con los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986) y con los niveles de formalización de la Educación Matemática Realista (Gravemeijer, 1999; Simon, 1995). Cada actividad buscó que los estudiantes avanzaran de lo situacional a lo formal, y de la simple observación a la argumentación geométrica. El trabajo con el tangram les permitió comprender el área y el perímetro a partir de la manipulación y comparación de figuras, mientras que el uso de GeoGebra les brindó la posibilidad de visualizar transformaciones, comprobar hipótesis y establecer relaciones entre medidas y formas.

3.3.3. Fase 3: Análisis retrospectivo

La tercera fase se centró en analizar e interpretar los datos obtenidos durante la implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Su propósito fue contrastar las hipótesis de aprendizaje planteadas con los resultados reales observados en el aula, comprendiendo cómo evolucionaron las ideas y estrategias de los estudiantes a lo largo del proceso, para finalmente, proponer una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Mejorada (THAm)

Para ello, se realizó una triangulación de información proveniente de diversas fuentes: observaciones consignadas en guías de observación, producciones en papel y en GeoGebra, entrevistas breves y rúbricas de evaluación del pensamiento espacial. Esta variedad de evidencias permitió tener una visión amplia y confiable del proceso de aprendizaje, considerando tanto los aspectos cognitivos como los actitudinales.

Los datos se organizaron por tareas y categorías analíticas relacionadas con los componentes del pensamiento espacial: visualización, relaciones espaciales, razonamiento y argumentación. Este análisis permitió reconocer patrones comunes, avances y dificultades. En general, los estudiantes mostraron un progreso gradual, pasando de la identificación visual de las figuras a la comprensión de sus propiedades y la justificación de sus procedimientos. El uso de GeoGebra fortaleció la articulación entre las representaciones gráficas y numéricas, favoreciendo la comprensión de las relaciones entre área y perímetro.

Estos resultados dialogan con los planteamientos de Clements y Battista (1992), Duval (1998) y Gravemeijer (1999), quienes señalan que la comprensión geométrica se consolida cuando el estudiante logra coordinar distintos registros de representación y reflexiona sobre sus propias acciones. En esta investigación se pudo observar cómo el uso combinado de materiales concretos y entornos digitales facilitó ese tránsito entre la acción, la visualización y la abstracción, promoviendo aprendizajes más profundos y duraderos.

3.4. Técnicas e instrumentos.

En un enfoque de Investigación Basada en Diseño (IBD), como el empleado en este estudio, la recolección sistemática de datos es fundamental para iterar y refinar las intervenciones educativas. Durante el desarrollo de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) se llevaron a cabo múltiples ciclos de diseño-implementación-evaluación, apoyados

en la obtención de diversos tipos de evidencias empíricas. De hecho, autores como Shavelson et al. (2003) abogan por una cuidadosa recolección de datos que capte la complejidad y el contexto de la intervención educativa, permitiendo además la validación del conocimiento generado. En la IBD se recomienda combinar métodos cualitativos y cuantitativos para obtener una visión integral del fenómeno estudiado (triangulación), aprovechando las fortalezas de cada técnica y compensando sus debilidades (Barab & Squire, 2004; Flick, 2004). En este trabajo se emplearon varias técnicas de recolección de datos, cada una con instrumentos específicos, integradas a lo largo de las fases de la THA –desde la elaboración de la trayectoria hipotética preliminar (THAp), pasando por la implementación de la THA en el aula, hasta el análisis de la trayectoria real de aprendizaje (TRA) observada. A continuación, se describen dichas técnicas e instrumentos, indicando su propósito, fase de aplicación y contribución al análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje, con el soporte de la literatura metodológica y de educación matemática correspondiente.

Tabla 3

Síntesis de técnicas e instrumentos de recolección de información

Fase de la investigación	Técnica	Instrumento	Descripción
Fase 1: Preparación del experimento (THAp – Diagnóstico)	Observación directa	Rejilla de observación diagnóstica (Apéndice B)	Instrumento diseñado para identificar el nivel inicial de razonamiento geométrico de los estudiantes según el modelo de Van Hiele, a partir

			de criterios como el reconocimiento de figuras, el uso del vocabulario geométrico y la diferenciación entre área y perímetro.
	Análisis de producciones estudiantiles	Guías diagnósticas impresas (THAp) (Apéndice C)	Instrumento diseñado para recoger y analizar las respuestas escritas y gráficas de los estudiantes en actividades con tangram y conteo de unidades, con el propósito de caracterizar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar y orientar el diseño de la THA.
Fase 2: Experimentación (Implementación de la THA – TRA)	Observación directa	Guía de observación TRA (Apéndice D)	Instrumento diseñado para contrastar el proceso y los resultados esperados de cada tarea con el proceso y los resultados observados durante la implementación de la THA, permitiendo identificar avances en los niveles de Van Hiele y en el desarrollo del Pensamiento Espacial.
	Análisis de producciones estudiantiles	Producciones digitales en GeoGebra (Apéndice E)	Instrumento previsto para analizar las construcciones, procedimientos y respuestas elaboradas por los estudiantes mediante el uso de GeoGebra, con el fin de evidenciar la

			Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) y los niveles de razonamiento geométrico alcanzados en cada tarea.
	Rúbrica de evaluación	Rúbrica analítica del Pensamiento Espacial (Apéndice F)	Instrumento diseñado para valorar el desempeño de los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje de cada tarea, considerando criterios asociados a la comprensión conceptual, la justificación de procedimientos y el nivel de razonamiento geométrico.
Fase 3: Análisis retrospectivo (THAm)	Análisis documental	Matriz de contraste THA-TRA (Apéndice G)	Instrumento diseñado para contrastar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con la Trayectoria Real de Aprendizaje, con el propósito de identificar ajustes y elementos de mejora para la construcción de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje mejorada (THAm).
	Triangulación de información	Síntesis de registros	Estrategia de análisis diseñada para contrastar la información proveniente de las observaciones, las producciones estudiantiles, los registros en GeoGebra y las

rúbricas de evaluación, con el fin de fortalecer la validez de los resultados y sustentar el análisis retrospectivo.

Nota. Elaboración propia

Tabla 4

Síntesis de técnicas e instrumentos de análisis de información

Fase de la investigación	Técnica	Instrumento	Descripción del instrumento
Fase 1: Preparación del experimento	Observación directa	Guía de observación THAp	Instrumento diseñado para registrar las ideas previas, estrategias iniciales y dificultades de los estudiantes durante la aplicación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar (THAp). Se fundamenta en el enfoque de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje propuestas por Clements y Sarama (2004), al permitir contrastar las conjeturas iniciales del aprendizaje con las acciones reales de los estudiantes, y en la Investigación Basada en Diseño descrita por Cobb et al. (2003), que enfatiza el análisis sistemático de los procesos de aula.

Fase 2: Experimentación (Implementación de la THA – TRA)	Observación directa	Guía de observación TRA	Instrumento elaborado para contrastar el proceso y el resultado esperado con el proceso y resultado obtenido en cada tarea de la THA. Permite identificar avances en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele y en el desarrollo del Pensamiento Espacial, registrando interacciones, estrategias, dificultades e intervenciones docentes. Su uso se enmarca en la noción de Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) planteada por Gravemeijer (1999) y en los principios de experimentos de enseñanza de Cobb et al. (2003).
Fase 2: Experimentación (Implementación de la THA – TRA)	Análisis de producciones escritas	Producciones de los estudiantes	Instrumento constituido por los registros gráficos y escritos elaborados por los estudiantes durante la resolución de las tareas propuestas. Este análisis permite identificar la evolución del razonamiento espacial, la comprensión de área y perímetro y el uso de representaciones. Se sustenta en la idea de que las producciones externas reflejan procesos cognitivos internos (Duval, 1998) y en el seguimiento

			de la trayectoria real de aprendizaje dentro de una THA (Clements & Sarama, 2004).
Fase 2: Experimentación (Implementación de la THA – TRA)	Análisis de registros digitales	Registros en GeoGebra	Instrumento basado en las construcciones realizadas por los estudiantes en el software GeoGebra, que permite analizar procesos de visualización, manipulación y validación geométrica. Su uso se vincula con el fortalecimiento del Pensamiento Espacial mediante herramientas tecnológicas (Aldana & Pérez, 2024; Díaz-Nunja et al., 2018) y con la idea de modelos emergentes dentro de una THA (Gravemeijer, 1999).
Fase 3: Análisis retrospectivo (THAm)	Análisis retrospectivo	Matriz de análisis retrospectivo	Instrumento construido para sistematizar la información obtenida durante la implementación de la THA, contrastando la trayectoria hipotética con la trayectoria real y permitiendo identificar elementos a mejorar. Se fundamenta en el análisis retrospectivo propio de la Investigación Basada en Diseño (Cobb et al., 2003) y en el enfoque de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, orientado a la reformulación de

una THA mejorada (THAm)
(Clements & Sarama, 2004).

4. Análisis de resultados

En este apartado se presentan y analizan los resultados obtenidos a lo largo del experimento de enseñanza, desarrollado bajo el enfoque de la Investigación Basada en Diseño (IBD). El análisis se estructura de acuerdo con las tres fases establecidas: la fase diagnóstica o THAp (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar) y la fase de implementación de la THA (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje) y la fase de análisis retrospectivo donde se analiza TRA (Trayectoria Real de Aprendizaje) y se propone una THAm (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Mejorada). Cada sección aborda los hallazgos relacionados con el desarrollo del Pensamiento Espacial y los niveles de razonamiento

geométrico de los estudiantes, apoyándose en la evidencia recogida mediante diversos instrumentos, como guías de observación, producciones estudiantiles, entrevistas, encuestas y rúbricas de evaluación. Esta organización permite observar la evolución del aprendizaje a lo largo del proceso, contrastar lo previsto con lo ocurrido en el aula, y valorar la pertinencia de las decisiones didácticas adoptadas.

4.1. Fase 1: Preparación del experimento

En un primer momento, se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje preliminar (THAp), diseñada con base en los referentes teóricos y curriculares que orientaron esta investigación. El análisis de esta fase diagnóstica permitió identificar fortalezas, dificultades conceptuales, niveles de razonamiento y aspectos metodológicos relevantes en el desempeño de los estudiantes. A partir de estos hallazgos, se realizó un proceso de ajuste y refinamiento que dio lugar a la elaboración de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) que fue aplicada en la fase 2, *experimentación*. Esta nueva versión tuvo en cuenta los elementos que debían fortalecerse, las necesidades identificadas durante la THAp y las oportunidades de mejora observadas tanto en las tareas como en las intervenciones docentes.

4.1.1. Resultados THAp

Para interpretar los resultados de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares (THAp) es necesario recordar que la fase 1 de la investigación basada en diseño (IBD) tiene un carácter diagnóstico. El propósito de esta fase es caracterizar el conocimiento inicial de los estudiantes sobre figuras planas, nociones de área y perímetro, y conservación del área a pesar del cambio de perímetro para construir adecuadamente la THA y los instrumentos de intervención. En este sentido, las intervenciones THAp se diseñaron como

tareas exploratorias que permitieran observar las ideas previas de los distintos grupos y ubicarlas dentro de los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele, obteniendo los siguientes resultados diagnósticos.

Tabla 5

Resultados THAp 1

Nivel evidenciado según el modelo de Van Hiele en cada grado durante la intervención THAp 1			
5-1	5-2	5-3	5-4
Los estudiantes interactuaron con el material identificando algunas de sus características como el tamaño y figuras que lo componen. La mayoría mencionaron los nombres propios de las figuras. Además, mencionaron el área y perímetro, pero sin hacer distinción entre uno y otro.	Los estudiantes manipularon el material, pero solo reconocieron como el color de las figuras.	Se manipuló el material, pero no se reconocieron características más allá del color de las figuras y sus tamaños.	Los estudiantes interactuaron con el material identificando características como el tamaño y figuras que lo componen. Se mencionaron los nombres propios de las figuras como el cuadrado y los triángulos, no se mencionó el paralelogramo. Además, conceptos de área y perímetro.

Nota. Elaboración propia

En la primera intervención se buscó que los estudiantes manipularan las piezas del tangram para identificar formas y conceptos iniciales. Los grupos 5-1 y 5-4 interactuaron con el material identificando su tamaño y las figuras que lo componen, nombraron cuadrado y

triángulos e incluso mencionaron términos como “área” y “perímetro”, pero sin diferenciarlos. Estas respuestas corresponden al nivel 0 (visualización) del modelo de Van Hiele: los estudiantes reconocen figuras por su apariencia general y pueden nombrarlas, pero no analizan sus propiedades. El grupo 5-2 se limitó a reconocer colores y tamaños de las piezas y el 5-3 apenas distinguió el color y el tamaño; ambos casos muestran un predominio del razonamiento perceptivo propio del nivel 0. Desde la perspectiva de la IBD, este resultado diagnostica que la mayoría de estudiantes no distinguen entre perímetro y área ni reconocen propiedades específicas de las figuras, lo que orienta a diseñar tareas de la THA que desarrollen el análisis de atributos y la diferenciación de conceptos.

Tabla 6

Resultados THAp 2

Nivel evidenciado según el modelo de Van Hiele en cada grado durante la intervención THAp 2			
5-1	5-2	5-3	5-4
Los estudiantes reconocen que el perímetro es la suma de las longitudes de los lados y usa la	Los estudiantes comprenden la diferencia entre área y perímetro, logran	Los estudiantes no miden el contorno de las figuras usando la cuerda, pero confunden	Los estudiantes utilizan la cuerda para medir el contorno de las figuras, pero

cuerda para medir correctamente concepto de presentan confusión
 correctamente las usando la cuerda. Se perímetro con el de entre los conceptos
 figuras. Identifican basan únicamente área. Aunque de perímetro y área.
 que las figuras en la apariencia identifican Aunque perciben
 tienen igual área por visual para concluir diferencias en la diferencias en las
 estar compuestas que dos figuras medida, no logran medidas obtenidas,
 por las mismas tienen el mismo o explicar la causa no logran establecer
 piezas, pero diferente perímetro. relacionándola con la relación entre estas
 requiere medir para No reconocen la la forma o y la forma o
 convencerse de que necesidad de medir disposición de los disposición de los
 los perímetros son y no usan el lados. Sus lados. Sus
 diferentes. Sus vocabulario argumentos son más explicaciones se
 explicaciones son geométrico básico, descriptivos (“es limitan a
 correctas, aunque no limitándose a más larga” o “es más descripciones
 siempre utilizan comentarios corta”) que generales como “es
 términos subjetivos como analíticos, y depende más larga” o “es más
 geométricos con “son iguales” o totalmente de la corta”, sin un análisis
 precisión o les “esta se ve más medición física para geométrico, y
 cuesta justificar sin grande”. dar una respuesta. dependen
 apoyo visual. completamente de la
 medición física para
 sustentar sus
 respuestas.

En la segunda intervención se introdujo la medición del perímetro con una cuerda. El grupo 5-1 reconoció que el perímetro es la suma de las longitudes de los lados, midió correctamente el contorno y comprendió que las figuras tenían igual área al estar compuestas por las mismas piezas, aunque necesitó la medición física para convencerse de que los perímetros eran distintos. Este comportamiento se sitúa en el nivel 1 (análisis): los estudiantes empiezan a analizar características como longitud y usan esas propiedades para conceptualizar clases de figuras, aunque todavía no pueden justificar las relaciones sin apoyarse en lo visual. Los grupos 5-2, 5-3 y 5-4 mostraron confusión persistente; no comprendieron la diferencia entre área y perímetro o confundieron ambos conceptos, basando sus argumentos en la apariencia o en descripciones como “es más larga” o “es más corta”. Estos resultados se corresponden con un nivel 0 o transición al nivel 1, pues se centran en aspectos visuales y no reconocen propiedades métricas de las figuras. Diagnóticamente, se evidencia la necesidad de fortalecer la conceptualización de perímetro y la diferencia con el área antes de introducir fórmulas.

Tabla 7

Resultados THAp 3

Nivel evidenciado según el modelo de Van Hiele en cada grado durante la intervención THAp 3			
5-1	5-2	5-3	5-4
Los estudiantes reconocen que el área se relaciona con	Los estudiantes comprenden concepto de área y	Los estudiantes no logran medir el área contando unidades	Los estudiantes miden el área contando algunas

el espacio que ocupa se limitan a hacer cuadradas, pero de las unidades una figura y utilizan juicios visuales confunden a veces cuadradas, pero las unidades dadas sobre el tamaño de este concepto con presentan para medirla. Pueden las figuras. No perímetro. Perciben dificultad para comparar utilizan diferencias en el completar el conteo correctamente correctamente las tamaño de las figuras, de manera figuras de diferentes unidades de medida pero no pueden ordenada o para tamaños, pero su y no logran explicar con claridad relacionar las explicación se limita diferenciar entre por qué ocurre ni medidas con el a señalar que “una es comparar por forma establecer relaciones tamaño real de la más grande” o y comparar por proporcionales. Su figura. Reconocen “ocupa más espacio” superficie ocupada. procedimiento es que una figura sin relacionarlo Sus respuestas poco sistemático y “ocupa más” que explícitamente con el carecen de depende de contar otra, pero no logran número de unidades justificación y figura por figura sin explicar con cuadradas. muestran confusión buscar patrones. claridad la razón ni Resuelven la tarea constante entre área establecer una correctamente, y perímetro. relación aunque con proporcional entre estrategias menos las medidas y las organizadas. dimensiones. A veces confunden el área con el

perímetro	o
combinan	ambos
conceptos	en sus
respuestas.	

Nota. Elaboración propia

La tercera intervención orientó a medir áreas usando unidades cuadradas. El grupo 5-1 comprendió que el área se relaciona con el espacio que ocupa una figura, utilizó las unidades para medirla y comparó correctamente figuras de distinto tamaño, aunque sus explicaciones se limitaron a afirmar que “una es más grande” o “ocupa más espacio”, sin relacionarlo con el número de unidades. Este desempeño refleja un nivel 1: los estudiantes identifican partes y comienzan a conceptualizar clases, pero todavía no explican relaciones entre propiedades. El grupo 5-3 contó unidades cuadradas para determinar áreas, pero confundió ocasionalmente área y perímetro, su procedimiento fue poco sistemático y no logró establecer relaciones proporcionales; esto indica una transición dentro del nivel 1. El grupo 5-4 midió áreas contando algunas unidades, pero tuvo dificultades para completar el conteo y para relacionar la medida con el tamaño real, además de confundir ambos conceptos; su razonamiento se sitúa entre los niveles 0 y 1. El grupo 5-2, en cambio, no comprendió el concepto de área y recurrió a juicios visuales, mostrando nuevamente un nivel 0. Estos diagnósticos subrayan que, antes de introducir fórmulas, es necesario consolidar el conteo de unidades, la diferenciación entre área y perímetro y la búsqueda de patrones.

Tabla 8

Resultados THAp 4

**Nivel evidenciado según el modelo de Van Hiele en cada grado durante la
intervención THAp 4**

5-1	5-2	5-3	5-4
<p>Los estudiantes de este grupo aplican las fórmulas para calcular el área y el perímetro de figuras rectangulares, mostrando un dominio adecuado de procedimientos. Reconocen la diferencia entre cubrir una superficie y cercar una región, utilizando estos conceptos para comparar situaciones planteadas en la actividad. En varios casos, anticipan cuál figura requerirá</p>	<p>En este grupo se observan dificultades notorias en el uso de fórmulas para calcular el área y perímetro. Sus respuestas son superficiales y no logran establecer una relación entre los cálculos y la situación planteada. Además, persiste la confusión entre ambos conceptos, lo que impide la construcción de argumentos sólidos</p>	<p>En este grado, los estudiantes logran realizar operaciones básicas de cálculo de área y perímetro, aunque requieren apoyo constante para guiar sus procedimientos. Si bien reconocen parcialmente que los conceptos son distintos, en sus explicaciones tienden a confundirlos, limitándose en ocasiones a justificar con expresiones generales. Su</p>	<p>Los estudiantes resuelven algunos cálculos de área y perímetro de manera mecánica, pero muestran dificultad para interpretar los resultados y relacionarlos con el contexto del zoológico propuesto en la actividad. Aunque logran aplicar ciertos procedimientos, sus explicaciones carecen de profundidad y se limitan a la obtención de valores numéricos</p>

mayor material para o justificaciones desempeño indica sin establecer ser cercada antes de adecuadas. En que se encuentran en vínculos claros con realizar los cálculos. consecuencia, los un proceso de las situaciones estudiantes transición hacia problemáticas. Este permanecen entre niveles más comportamiento en el nivel 0 y 1 de analíticos, pero aún evidencia un nivel de Van Hiele, con un dependen de la razonamiento bajo razonamiento orientación docente dentro del nivel 1 de centrado en para sostener sus Van Hiele. aspectos argumentos. perceptivos más que en propiedades geométricas.

Nota. Elaboración propia

En la cuarta intervención se pidió aplicar fórmulas de área y perímetro a figuras rectangulares. El grupo 5-1 demostró dominio de los procedimientos, distinguió entre cubrir una superficie y cercar una región, y anticipó cuál figura requería más material para ser cercada. Este comportamiento evidencia que algunos estudiantes han alcanzado el nivel 2 (deducción informal) del modelo de Van Hiele: pueden establecer interrelaciones entre propiedades de las figuras y deducir nuevas propiedades, comprendiendo que un cuadrado es un rectángulo por compartir atributos. El grupo 5-3 realizó operaciones básicas, reconoció parcialmente que área y perímetro son distintos, pero necesitó apoyo constante y tendió a confundir conceptos en sus explicaciones; se encuentra en transición entre los niveles 1 y 2.

El grupo 5-4 resolvió algunos cálculos de forma mecánica, pero sus explicaciones fueron superficiales y no relacionaron los resultados con el contexto, lo que indica que permanece en el nivel 1. Finalmente, el grupo 5-2 evidenció dificultades para usar fórmulas y persistió la confusión entre ambos conceptos; su razonamiento se mantiene en los niveles 0–1. El diagnóstico resultante muestra que sólo una parte del grupo alcanzó razonamientos de deducción informal y que la mayoría requiere tareas que articulen procedimientos y significado para avanzar

4.1.2. THA propuesta para la experimentación

Una vez analizados los resultados de la THAp y definidos los aspectos que requerían ser fortalecidos, se procedió a estructurar una primera versión de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que fue implementada durante la fase de experimentación. Esta versión no corresponde aún a la trayectoria definitiva, sino a una propuesta inicial ajustada a partir del diagnóstico, con el propósito de poner a prueba las hipótesis de aprendizaje planteadas y observar la evolución del Pensamiento Espacial y geométrico de los estudiantes en condiciones reales de aula. A continuación, se expone de manera general la estructura de esta THA inicial, señalando los propósitos principales de cada tarea

Tabla 9

THA 1

TAREA 1:	
Objetivo de aprendizaje	Definir el concepto de área como recubrimiento de una figura plana mediante exploración del juego del Tangram en el software GeoGebra.
Descripción de la tarea de aprendizaje:	Plantear acuerdos de aula Exploración

Clasificación			
Construcción del mosaico (Rectangular) que cubre completamente la entrada principal del Parque usando las piezas del tangram.			
Indagar sobre el concepto de superficie			
Nivel de actividad.	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:		
EMR: Situacional	Actividad	Efecto	Reflexión
Nivel de actividad.	Los estudiantes	Los estudiantes	Los estudiantes
Van Hiele: Nivel 1:	manipulan las	diseñan el mosaico	comprenden que el
Visualizan las	formas del juego del	recubriendo el	recubrimiento de
figuras por su	Tangram y	rectángulo propuesto	una superficie
apariencia global sin	proponen diseños de	para la actividad.	corresponde a su
analizar propiedades	mosaicos para	Identifican que están	área.
internas.	recubrir un	recubriendo una	
	rectángulo	superficie.	
	propuesto		
Intervención del docente	Introducir el concepto de área mediante su recubrimiento, luego se pregunta “¿queda algún espacio sin cubrir?” y modela la transferencia a GeoGebra. Aclara dudas de los estudiantes.		

Nota. Elaboración propia

Tabla 10

THA 2

TAREA 2:			
Objetivo de aprendizaje	Comprender el concepto de perímetro como medida del contorno de una figura y diferenciarlo del área.		
Descripción de la tarea de aprendizaje:	Calcular cuántos metros de barandilla se requieren para delimitar la zona de juegos infantiles.		
Nivel de actividad.	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético		
EMR: Situacional	Actividad:	Efecto:	Reflexión:
→ Referencial			
Nivel de actividad.	Los estudiantes revisan	Los estudiantes	Comprenden que el
Van Hiele: Nivel	detalladamente los	observan que dentro	perímetro se refiere

1- 2: Pasan de reconocer figuras por su forma a analizar propiedades lineales	planos propuestos, luego calculan el perímetro de las distintas regiones para saber cuánto se requiere para cercar cada una.	del área del parque se encuentran divisiones. Además, comprenden que estas tienen su propia área y perímetro. Calculan la medida del área y el perímetro de las regiones mediante el conteo de cuadros.	al borde de la figura y no a su superficie, estableciendo una diferencia clara entre estos dos conceptos.
Intervención del docente	Introduce el concepto de perímetro. Explica a los estudiantes cómo se calcula este y ayuda a diferenciar a los estudiantes entre perímetro y área.		

Nota. Elaboración propia

Tabla 11

THA 3

TAREA 3:			
Objetivo de aprendizaje	Aplicar la fórmula $A = \text{base} * \text{altura}$ comprendiendo su significado y justificación.		
	Comprender cómo funciona la fórmula para el cálculo del área de una figura y comprobar su validez mediante la visualización del área de la figura.		
Descripción de la tarea de aprendizaje:	Calcular el área de las zonas del parque, aplicando la fórmula tradicional en polígonos regulares.		
Nivel de actividad. EMR: General	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético		
	Actividad	Efecto	Reflexión
Nivel de actividad. Van Hiele: Nivel 2 → 3: Justifican procedimientos convencionales desde modelos geométricos	Los estudiantes aplican la fórmula correspondiente para el cálculo del área de cada figura propuesta (triángulos, rectángulos y cuadrados) en los planos del parque	Los estudiantes realizan el cálculo utilizando la fórmula, y lo verifican mediante el conteo directo de unidades en el mapa.	Los alumnos comprenden que al aplicar la fórmula el resultado obtenido equivale al conteo de unidades.

Intervención docente	del	Introduce la fórmula como generalización del conteo, propone distintas figuras y orienta la interpretación del resultado obtenido.
-----------------------------	------------	--

Nota. Elaboración propia

Tabla 12

THA 4

TAREA 4:			
Objetivo de aprendizaje	de	Explorar patrones entre puntos interiores, puntos de borde y área en una malla de puntos.	
Descripción de la tarea de aprendizaje:		Delimitar el área del parque de acuerdo a coordenadas propuestas para la actividad. Representar el área del parque sobre una malla de puntos (o red de puntos) para contar sus puntos internos y del borde	
Nivel de actividad. EMR: General		Descripción del proceso de aprendizaje hipotético	
		Actividad	Efecto
		Reflexión	
Nivel de actividad. Van Hiele: Nivel 3: Observan propiedades comienzan generalizar relaciones.	y a	Los estudiantes representan figuras en la red de puntos de acuerdo a coordenadas indicadas por el docente. Posteriormente se calcula el área de las zonas delimitadas.	Los estudiantes notan que algunos puntos están dentro de la figura y otros en su perímetro
			Establecen relaciones como: Entre más puntos tiene por dentro una figura mayor es su área.
Intervención docente	del	Guía al estudiante mediante ejemplos para la construcción de figuras. Cuestiona a los estudiantes mediante preguntas que lleven al teorema de PICK	

Nota. Elaboración propia

4.2. Fase 2: Experimentación

4.2.1. Resultados implementación THA, guía de observación TRA

La implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en la plataforma GeoGebra permitió observar en detalle el progreso real de los estudiantes frente a las tareas

propuestas, configurando la Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) correspondiente a la fase 2. Estos resultados evidencian cómo los estudiantes transitaron, aunque de forma heterogénea entre los distintos niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele.

Tabla 13

Resultados guía de observación TRA tarea 1

TAREA: <u>1</u>	
Objetivo de aprendizaje	Definir el concepto de área como recubrimiento de una figura plana mediante la exploración del juego del Tangram en el software GeoGebra.
Descripción de la tarea de aprendizaje:	<p>INICIO.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La tarea comienza a partir de los acuerdos de aula, se busca garantizar, la armonía y el desarrollo de la misma. De igual forma se indaga sobre los conceptos previos sobre el TANGRAM y su manipulación. <p>EXPLORACIÓN.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indagación nombre, características del todo y las figuras que lo componen EL JUEGO DEL TANGRAM • Clasificación de figuras. Se retoma el tamaño: pequeñas, medianas y grandes. <p>ELABORACION</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construcción del mosaico. Diseño de la entrada al parque, con las figuras del tangram se recubre el rectángulo. <p>CONCEPTUALIZACIÓN.</p>

- Presentar el concepto de superficie, para contextualizar sobre el concepto de área.

Nivel de actividad. EMR:	de	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:		
<u>Situacional</u>		Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido
Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel 1: Visualizan las figuras por su apariencia global sin analizar propiedades internas.	de	Explorar el juego del Tangram y determinan las características como: Numero tipo, color y tamaño.	Comprende los acuerdos de aula. Comprensión del juego del Tangram familiarizándose con sus características.	Los estudiantes reconocieron el Tangram tan pronto lo vieron en pantalla, identificaron sus piezas, colores y nombres, evidenciándose dificultad para nombrar la figura azul (el paralelogramo).
Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele: Nivel 1 Evidencias:	de	Construir el mosaico y explicar el procedimiento realizado.	Construye el mosaico y crea hipótesis acerca de la conservación del área al utilizar las mismas 7 figuras del juego del Tangram. Aborda el concepto de área como el recubrimiento de la superficie de una figura plana.	Cuando los estudiantes organizaron las figuras de acuerdo a su tamaño, se presentó el caso donde se clasifica al cuadrado como una figura pequeña y no mediana, donde argumentan que el cuadrado es “más delgado que el azul”, evidenciando que establecen relaciones de acuerdo a esta característica de las figuras.

Respecto a la construcción del mosaico, cerca del 50% de los estudiantes identifican que tanto el rectángulo (mosaico) y el cuadrado del Tangram poseen igual área. Ante esto, se hizo notar a los estudiantes que ambas figuras están formadas por igual cantidad de piezas, solo cambia su disposición.

Intervención del docente	<p>El docente para empezar con la Tarea 1, expone los acuerdos de clases, los cuales buscan garantizar el correcto desarrollo de la tarea desde lo actitudinal.</p> <p>Por último, el docente conceptualiza el concepto de área.</p> <p>Tener en cuenta que el docente hace acompañamiento a los estudiantes, ante cualquier duda.</p>
---------------------------------	--

Nota. Elaboración propia

En la primera tarea, en la cual el propósito fue familiarizar a los estudiantes con las piezas del tangram y aproximarlos al concepto de área como recubrimiento, se observó que lograron reconocer las fichas en la pantalla, identificando sus colores y formas básicas. Sin embargo, surgieron dificultades en la denominación de ciertas fichas, especialmente el paralelogramo azul, lo que evidencia un reconocimiento aún muy apoyado en la apariencia global de las figuras. Durante la clasificación por tamaño, varios estudiantes consideraron el cuadrado como “*pequeño*”, argumentando que era más delgado que el paralelogramo, lo que muestra que aún no diferencian entre tamaño real y apariencia visual. Al construir el mosaico rectangular, aproximadamente la mitad del grupo reconoció que el rectángulo y el cuadrado

del tangram poseen el mismo valor de área, lo que representa una comprensión incipiente de la conservación del área al reutilizar las mismas piezas. Estos hallazgos indican que el nivel alcanzado corresponde al nivel 1 de Van Hiele (análisis inicial): los estudiantes identifican figuras y comienzan a diferenciar atributos, pero su razonamiento sigue siendo descriptivo y dependiente de la percepción. Aun así, la tarea cumplió su función diagnóstica al revelar las concepciones iniciales sobre área y la necesidad de fortalecer la transición hacia un análisis más estructural de las figuras.

Tabla 14

Resultados guía de observación TRA tarea 2

TAREA: 2	
Objetivo de aprendizaje	Definir el concepto de perímetro como medida del contorno de una figura y diferenciarlo del área.
Descripción de la tarea de aprendizaje:	INICIO
	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea comienza planteando los acuerdos de aula, que buscan garantizar el desarrollo de la misma. • Presentación de los planos del parque que contextualiza la tarea.
	EXPLORACIÓN
	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular el área de todas las regiones que aparecen dentro de los planos y organizar de acuerdo a la cantidad de área.

ELABORACIÓN

- Cercar las regiones mencionadas dentro los planos mediante el cálculo del perímetro.

CONCEPTUALIZACIÓN

- Presentar y contrastar los conceptos de área y perímetro.

Nivel de actividad. EMR:	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:		
Situacional →	Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido
Referencial			
Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel: Nivel 1- 2: Pasan de reconocer figuras por su forma a analizar propiedades lineales	Explorar los planos del parque.	Los estudiantes despiertan conocimientos previos ante el conteo para calcular el área de las regiones a,b,c,d,e.	Los estudiantes calcularon el área de las figuras utilizando dos métodos distintos, en su mayoría, contaron cuántos cuadros tiene cada figura, por otro lado, algunos aplicaron la fórmula de Base * Altura con el fin de hallar el área.
	Calcular la medida del área de las regiones a,b,c,d,e.	Calculan y ordenan los resultados de la cantidad de área	

Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele:	dependiendo la cantidad de área en unidades cuadradas.	también determinando que se expresan en unidades cuadradas.	Respecto al cálculo del perímetro de las figuras, la mayoría de los estudiantes comprendió que era la suma de los lados de cada
Nivel 1-2 Evidencias:	Calcular el perímetro de las regiones, pero desde el proceso de cercar las regiones.	Cercan las regiones reconociendo la similitud con el perímetro y logran determinar que deben sumar todos sus lados.	figura y dieron una respuesta acorde a esto. Finalmente, con las dos últimas preguntas, se logró evidenciar que los estudiantes identifican el concepto de área y
Intervención del docente	Responder preguntas relacionadas con el concepto de área y perímetro.	Reconocen lo que significan los conceptos área y perímetro para poder responder las preguntas del docente.	perímetro.
	El docente para empezar con la Tarea 2, expone los acuerdos de clases, los cuales buscan garantizar el correcto desarrollo de la tarea desde lo actitudinal.		

Por último, el docente conceptualiza el concepto de perímetro.

Tener en cuenta que el docente hace acompañamiento a los estudiantes, ante cualquier duda.

Nota. Elaboración propia

La segunda tarea tenía como propósito comparar áreas y perímetros en planos del parque, identificando magnitudes distintas y avanzando hacia un razonamiento propio del nivel 2 e incluso del nivel 3. Se esperaba que los estudiantes determinaran el área mediante el conteo de unidades cuadradas, también, ordenaran regiones según la cantidad de su superficie y, al cercarlas, comprendieran que el perímetro corresponde al recorrido de los lados. Los resultados muestran progresos significativos: los cálculos de áreas de las regiones A–E se distribuyeron entre los niveles 1 y 3, y en la tarea de ordenar las regiones de mayor a menor área, el 41,03 % alcanzó un razonamiento de nivel 3. En el cálculo del perímetro, el 51,28 % argumentó adecuadamente cuál región requería más material para cercarla, evidenciando comprensión de la magnitud. Además, el 76,92 % identificó correctamente que el área es la medida de la superficie y un 89,74 % reconoció que el perímetro es la longitud del contorno de la figura, lo que muestra consolidación de los conceptos. No obstante, persisten dificultades en algunos estudiantes que continúan confundiendo ambas magnitudes o justifican desde la apariencia. En conjunto, los resultados confirman avances importantes hacia niveles analíticos y relacionales, aunque no generalizados en todo el grupo.

Tabla 15

Resultados guía de observación TRA tarea 3

TAREA: 3

Objetivo de aprendizaje	<p>de Aplicar la fórmula $A = \text{base} * \text{altura}$ comprendiendo su significado y justificación.</p> <p>Comprender cómo funciona la fórmula para el cálculo del área de una figura y comprobar su validez mediante la visualización del área de la figura.</p>						
Descripción de la tarea de aprendizaje:	<p>INICIO</p> <ul style="list-style-type: none"> • La tarea comienza planteando los acuerdos de aula, que buscan garantizar el desarrollo de la misma. • Presentar los planos del parque para contextualizar la tarea, con medidas determinadas para cada una de ellas, medidas para todos sus lados, eliminando la cuadrícula. <p>EXPLORACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Indaga sobre los conocimientos previos de los estudiantes para calcular el área de una figura. • Identificar la fórmula $\text{área} = \text{base} \times \text{altura}$ como procedimiento adecuado según las medidas dadas. <p>ELABORACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar la fórmula para calcular el área de cada región del parque. <p>CONCEPTUALIZACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparar resultados y analizar por qué la fórmula funciona en cada caso. 						
Nivel de actividad.	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:						
EMR:	<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="516 1629 760 1663">Actividad</th> <th data-bbox="768 1629 1057 1730">Proceso y resultado esperado</th> <th data-bbox="1065 1629 1409 1730">Proceso y resultado obtenido</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="235 1707 350 1740"><u>General</u></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido	<u>General</u>		
Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido					
<u>General</u>							

<p>Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel:</p> <p><u>Nivel 2 → 3:</u></p> <p><u>Justifican procedimientos convencionales desde modelos geométricos.</u></p>	<p>Se les presenta nuevamente los planos del parque con medidas de cada uno de los lados de cada región, eliminando la cuadrícula.</p> <p>Los estudiantes expresan las fórmulas o maneras en las que saben calcular el área.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas llegan a utilizar la fórmula de área = base*altura. Para calcular la medida del área de cada región.</p>	<p>Revisan los planos y comprenden que las medidas dadas corresponden a cada región.</p> <p>Retoman conocimientos previos acerca de la forma en que calculan el área.</p> <p>Recuerdan y reconocen que la fórmula de área=base*altura puede servir para el cálculo del área.</p> <p>Calculan el área de todas las regiones aplicando la fórmula área=base*altura.</p> <p>Comparan sus resultados con los de sus compañeros para corroborar sus respuestas</p>	<p>Los estudiantes visualizaron el recurso, inmediatamente notaron la falta de la cuadrícula en los planos. Mencionaron que con las medidas allí disponibles podían calcular el área de las figuras “usando la fórmula”.</p> <p>Luego de la aplicación de la formula por parte de los docentes para mostrar a los estudiantes como aplicarla, los estudiantes calcularon el área de las demás figuras, evidenciándose dificultad para el cálculo de aquellas áreas irregulares.</p>
<p>Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele:</p> <p><u>Nivel 1-2</u></p> <p>Evidencias:</p> <p>Intervención del docente</p>	<p>El docente para empezar con la Tarea 4, expone los acuerdos de clases, los cuales buscan garantizar el correcto desarrollo de la tarea desde lo actitudinal.</p>		

El docente recoge las respuestas de los estudiantes ante las maneras de calcular el área, y también hace llegar sus respuestas a la fórmula $\text{área}=\text{base}\cdot\text{altura}$.

Tener en cuenta que el docente hace acompañamiento a los estudiantes, ante cualquier duda.

Nota. Elaboración propia

En la tercera tarea se introdujo el uso de fórmulas para calcular el área de rectángulos, cuadrados y triángulos sin apoyo de cuadrícula, lo que suponía avanzar desde el nivel 2 hacia el nivel 3 del modelo de Van Hiele. La expectativa era que los estudiantes recordaran las expresiones $\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$ y $\text{Área} = (\text{base} \times \text{altura}) / 2$, y las aplicaran en los planos presentados. Los datos de la tarea tres muestran que el 82,05 % respondió correctamente cuál es la fórmula para calcular el área de las figuras, aplicándola de manera adecuada en las regiones A–E. Esta cifra indica una apropiación efectiva del algoritmo geométrico y un tránsito hacia razonamientos más formales. La narrativa de los resultados señala que algunos estudiantes del nivel 2 justificaron sus respuestas con base en conteo o comparaciones, mientras que quienes avanzaron al nivel 3 explicaron que el área del triángulo corresponde a la mitad del rectángulo o que la fórmula se basa en multiplicar la base por la altura. Aunque el avance es evidente, aún no todos lograron justificar formalmente el procedimiento. En términos generales, la tarea permitió consolidar aprendizajes propios de la deducción informal y del uso simbólico.

Tabla 16

Resultados guía de observación TRA tarea 4

TAREA: 4

Objetivo de aprendizaje Introducir el Teorema de Pick para el cálculo del área.

Descripción de INICIO

la tarea de aprendizaje:

- La tarea comienza planteando los acuerdos de aula, que buscan garantizar el desarrollo de la misma.
- Se presenta los planos del parque, pero ahora todo el plano se encuentra en una malla de puntos.

EXPLORACIÓN

- Introducir el Teorema de Pick como otro método del cálculo del área.
($A = I + (B/2) - 1$).
- Contar los puntos de algunas regiones, tanto los internos como los del borde. Para calcular el área de las regiones aplicando el Teorema de Pick y comprobar los resultados mediante preguntas.

ELABORACIÓN

- Explorar dentro de un recurso de GeoGebra sobre funcionamiento del Teorema de Pick, moviendo segmentos para lograr el área requerida.

CONCEPTUALIZACIÓN

- Comprobar los resultados mediante preguntas que permitan indagar sobre la aceptación del Teorema de Pick en los estudiantes.

Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:

Nivel de actividad.	Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido
EMR:			
<u>General</u>			
Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel:	Los estudiantes conocen el Teorema de Pick ($A = I + (B/2) - 1$). Explicado por el docente.	Exploran el plano presentado e identifican que este no tiene cuadrícula ni medidas.	En un primer momento algunos estudiantes no entendían como se aplicaba la fórmula del Teorema de Pick.
<u>Nivel 3:</u>	Los estudiantes analizan los planos del parque determinando que está dentro de una malla de puntos.	Comprenden el proceso para aplicar el Teorema de Pick y su función.	Luego de una explicación más detallada fue comprendida. Después, identificaron que el plano del
<u>Observan propiedades y comienzan a generalizar relaciones.</u>	Los estudiantes cuentan los puntos que cubre a cada región, internos y los del borde de forma individual. Para poder aplicar la fórmula del Teorema de Pick. Y	Reconocen que las características que las características que tiene el plano del parque tiene lo necesario para el teorema de Pick.	parque cumplía con las características necesarias para calcular el área usando el teorema de Pick.
Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele:			
<u>Nivel 3</u>			

Evidencias:	<p>comprobar preguntas aplicar el teorema Finalmente, aplicaron mediante los resultados de Pick. la formula en obtenidos. ejercicios practicos en</p> <p>Aplican la fórmula Geogebra, algunos</p> <p>Los estudiantes exploran propuesta por el estudiantes un recurso digital que les Teorema de Pick, expusieron su ejemplifica gráficamente encontrando la solución a los sobre el funcionamiento cantidad de área de compañeros. del Teorema de Pick. cada región.</p> <p>Los estudiantes exponen Comprenden que la de qué forma les gusta cantidad de puntos utilizar para el cálculo del influye en la área. cantidad de área dentro del recurso digital.</p> <p>Crean una figura en GeoGebra que cumple con lo solicitado por el docente.</p>
--------------------	---

Expresan que el Teorema de Pick les llama la atención porque pueden representar mejor sus procesos.

Intervención del docente	<p>El docente para empezar con la Tarea 4, expone los acuerdos de clases, los cuales buscan garantizar el correcto desarrollo de la tarea desde lo actitudinal.</p> <p>El docente conceptualiza sobre el Teorema de Pick.</p> <p>Tener en cuenta que el docente hace acompañamiento a los estudiantes, ante cualquier duda.</p>
---------------------------------	---

Nota. Elaboración propia

En la cuarta tarea, centrada en el teorema de Pick, fue diseñada para promover razonamientos de nivel 2 y, especialmente, del nivel 3, al integrar conteo de puntos interiores y de borde, uso de la fórmula $\text{Área} = \text{Puntos internos} + \text{Puntos del borde}/2 - 1$, y exploración de figuras irregulares en GeoGebra. En la cuarta tarea se observa que, al responder a los conteos de puntos de las regiones A, B y C, la mayoría de los estudiantes operó en niveles 1–2, apoyándose en el conteo directo sin distinguir inicialmente entre puntos interiores y del borde. No obstante, al aplicar la fórmula, el 53,85 % calculó correctamente el área de la región A, el 61,54 % lo hizo para la región C y el 69,23 % para la región B, mostrando un avance progresivo. La actividad culminó con un applet donde los estudiantes debían construir figuras con un área específica; el 87,18 % cumplió exitosamente la tarea, evidenciando

comprensión del vínculo entre puntos y área. Finalmente, al preguntar si era más fácil usar el teorema de Pick, el 76,92 % respondió correctamente, y las respuestas recogidas muestran que quienes alcanzaron el nivel 3 no solo aplicaron la fórmula, sino que justificaron su validez y compararon su eficiencia con otros métodos tradicionales. Esta tarea evidenció, por tanto, la consolidación del razonamiento geométrico formal en un porcentaje importante del grupo.

4.2.2. Resultados TRA en GeoGebra

En este apartado se presentan los resultados obtenidos luego de la aplicación de la TRA en el software GeoGebra.

Tabla 17

Resultados GeoGebra TRA tarea 1

RESULTADOS GEOGEBRA TRA 1				
TAREA	DESCRIPCIÓN	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
Explora	¿Sabes el nombre de las figuras que componen el Tangram?	37	1	2
Material		94,87%	2,56%	5,13%
	¿De cuántas figuras se conforma el Tangram?	39	0	0
		100%	0%	0%

(Es una tarea que no permite evidenciar niveles más arriba del Nivel 0)

¿Cuáles de las siguientes figuras	39	0	0
están presentes en el Tangram?	100%	0%	0%

(Es una tarea que no permite
evidenciar niveles más arriba del
Nivel 0)

¿Cuáles de los siguientes colores	39	0	0
están en la figura de arriba?	100%	0%	0%

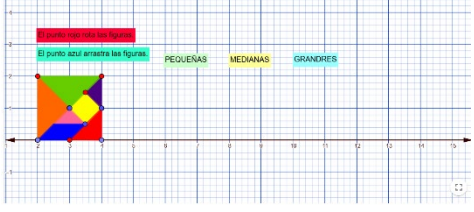
(Es una tarea que no permite
evidenciar niveles más arriba del
Nivel 0)

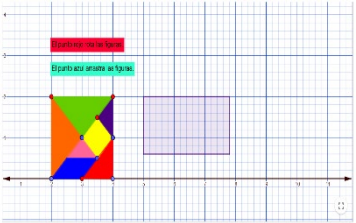
¿Cómo se llama la figura de color	39	0	0
azul?	100%	0%	0%

(Es una tarea que no permite
evidenciar niveles más arriba del
Nivel 0)

¿Cómo se llama la figura de color	39	0	0
amarillo?	100%	0%	0%

(Es una tarea que no permite evidenciar niveles más arriba del Nivel 0)

Clasifica las figuras del Tangram de acuerdo a su tamaño		5	34	0
		12,82%	87,18%	0%
		(En transición al nivel 1, con ligeros errores por la forma)		
	¿Todos los triángulos ocupan igual superficie? Justifica tu respuesta	11	11	17
		28,21%	28,21%	43,59%
	¿El cuadrado amarillo y el paralelogramo azul ocupan la misma superficie? Justifica tu respuesta	8	9	22
		20,51%	23,08%	56,41%
		(Algunos sus respuestas no son correctas, pero al justificarla s utilizaban	(Algunos sus respuestas no son correctas, pero al justificarla s utilizaban	(Algunos sus respuestas no son correctas, pero al justificarlas utilizaban

		lenguaje geométrico)	lenguaje geométrico)	lenguaje geométrico)
Ayúdano		4	0	35
s a crear		10,26%	0%	89,74%
una				
baldosa				
llamativa				
para la	(Es una tarea que solo permite			
entrada	evidenciar el cumplimiento de la			
del	tarea o no)			
Parque	¿Lograste construir la entrada de	4	0	35
de 5-1	colores?	10,26%	0%	89,74%
	(Es una tarea que solo permite			
	evidenciar el cumplimiento de la			
	tarea o no)			
	¿El cuadrado y el rectángulo	11	10	18
	ocupan el mismo espacio?	28,21%	25,64%	46,15%
	¿Qué podríamos decir acerca de la	10	5	24
	superficie que ocupa una figura?	25,64%	12,82%	61,54%

Nota. Elaboración propia

En la THA 1 *El Parque de 5-1*, las actividades diseñadas permiten evidenciar un avance progresivo del razonamiento geométrico de los estudiantes desde el nivel 0

(visualización) hasta el nivel 2 (clasificación informal), de acuerdo con la propuesta de Gutiérrez (1990). En las primeras tareas, donde se solicita reconocer las figuras del tangram y mencionar sus nombres, los estudiantes deberían responder con descripciones globales como *esa figura parece una casa o es el triángulo azul*, sin identificar aún propiedades geométricas específicas, lo cual corresponde al nivel de visualización. Posteriormente, al clasificar las piezas según su tamaño, se espera que comiencen a reconocer atributos observables, ofreciendo respuestas como *estos triángulos son del mismo tipo, pero uno es más grande porque ocupa más cuadros*, lo que indica el paso al nivel 1 de análisis, caracterizado por la identificación de propiedades y comparaciones elementales. En las actividades siguientes, como la comparación de superficies o la construcción de la baldosa del parque, los estudiantes deberían argumentar con expresiones como *el cuadrado y el paralelogramo no ocupan lo mismo aunque parezcan iguales o dos triángulos pequeños cubren el mismo espacio que uno grande*, mostrando razonamientos que integran forma y medida, propios del nivel 2 o de clasificación informal. Finalmente, en las preguntas de cierre, cuando los estudiantes concluyen que *figuras distintas pueden ocupar la misma superficie*, se evidencia una comprensión relacional del concepto de área, que marca la consolidación de este nivel y prepara el tránsito hacia procesos de deducción formal en las siguientes trayectorias.

Tabla 18

Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 1 con GeoGebra (TRA)

Nivel de Gutiérrez	Indicadores de comprensión	Ejemplos de respuestas o comportamientos esperados
Nivel 0 Visualización reconocimiento	<p>– Reconoce las figuras por su forma global o color.</p> <p>Usa descripciones perceptivas (“parece”, “tiene forma de”).</p> <p>No menciona propiedades geométricas (lados, vértices, ángulos).</p>	<p>“Esa figura es una casita.” “El azul parece una montaña.” “El triángulo grande es más bonito.”</p>
Nivel 1 – Análisis	<p>Identifica elementos y atributos concretos de las figuras (lados, vértices, tamaños).</p> <p>Usa vocabulario geométrico básico aunque sin relaciones entre propiedades.</p> <p>Compara figuras de forma empírica (“uno es más grande”, “tiene más lados”).</p>	<p>“Los triángulos pequeños tienen tres lados, igual que el grande, pero son más chicos.” “El cuadrado tiene cuatro lados iguales.”</p>
Nivel 2 Clasificación informal deducción temprana	<p>– Establece relaciones entre propiedades y figuras distintas.</p> <p>Argumenta con ejemplos o contraejemplos.</p> <p>Usa comparaciones de área o equivalencia de forma (“cubren lo mismo”).</p>	<p>“Dos triángulos pequeños forman un cuadrado.” “El paralelogramo y el cuadrado ocupan distinto espacio aunque se parezcan.” “Si roto la figura sigue siendo la misma.”</p>

Nota. Elaboración propia

En la Tarea 1, orientada a la exploración de las piezas del tangram, se esperaba que los estudiantes reconocieran las figuras, los colores y las composiciones del juego, donde inicialmente deberían encontrarse en niveles de visualización (nivel 0) y de análisis (nivel 1). Los resultados obtenidos confirman este comportamiento: el 100 % identificó correctamente las siete piezas del tangram, sus formas y colores, lo cual corresponde a un razonamiento de nivel 0. En la actividad de clasificación por tamaños, un 87,18 % organizó las piezas adecuadamente, aunque se presentaron confusiones por la orientación o inclinación de las figuras. Esto sugiere que, aunque la mayoría logró avanzar hacia el análisis básico, algunos estudiantes aún se mantuvieron en un nivel de reconocimiento global, es decir, visualización. En cuanto a la comparación de superficies, la tarea buscaba que identificaran equivalencias y diferencias en el área de las piezas, lo que implicaba un razonamiento relacional propio del nivel 2 (deducción informal). Sin embargo, solo el 43,59 % justificó correctamente que los triángulos ocupaban áreas iguales, y un 46,15 % reconoció diferencias reales entre el cuadrado y el paralelogramo. Finalmente, frente a la pregunta global sobre la superficie que ocupan las figuras, un 61,54 % logró conceptualizar que figuras distintas pueden ocupar áreas iguales, aunque no todos alcanzaron los niveles esperados, si fue logrado por un gran porcentaje de estudiantes.

Tabla 19

Resultados GeoGebra TRA tarea 2

RESULTADOS GEOGEBRA THA 2			
TAREA	DESCRIPCIÓN	Nivel de Van Hiele	Alcanzado

		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Calcula el área de la regiones.	Área de la región A.	15	6	18
		38,46%	15,38%	46,15%
	Área de la región B.	17	5	17
		43,59%	12,82%	43,59%
	Área de la región C.	16	5	18
		41,03%	12,82%	46,15%
	Área de la región D.	18	5	16
		46,15%	12,82%	41,03%
	Área de la región E.	17	5	17
		43,59%	12,82%	43,59%
	Escribe en orden las regiones de acuerdo al tamaño de su área, de menor a mayor.	17	6	16
		43,59%	15,38%	41,03%
	¿Cuál de las regiones del plano tiene menor área?	17	6	16
		43,59%	15,38%	41,03%
	¿Cuál región posee mayor área?	17	6	16
		43,59%	15,38%	41,03%
Vamos a cercar las regiones.	¿Cuánto material se requiere para cercar la región B? Explica tu respuesta.	13	6	20
		33,33%	15,38%	51,28%

	¿Cuánto material se requiere para cercar la región E? Explica tu respuesta	13	6	20
		33,33%	15,38%	51,28%
	¿Cuánto material se requiere para cercar la región C? Explica tu respuesta	13	6	20
		33,33%	15,38%	51,28%
	¿Cuánto material se requiere para cercar la región A? Explica tu respuesta	13	6	20
		33,33%	15,38%	51,28%
	¿Cuánto material se requiere para cercar la región D? Explica tu respuesta	13	6	20
		33,33%	15,38%	51,28%
Lee atentamente y selecciona la respuesta correcta.	El área es la medida de la superficie de una figura, es la cantidad de unidades que recubren la superficie.	9	0	30
		23,08%	0%	76,92%
	El perímetro es la longitud total del contorno de una figura.	4	0	35
		10,26%	0%	89,74%
	(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no).			

Nota. Elaboración propia

En la THA 2 *Cercando el Parque de 5-1*, las actividades se orientan al desarrollo de la comprensión del área y el perímetro como magnitudes relacionadas con la superficie y el contorno de las figuras, promoviendo un tránsito progresivo desde el nivel 1 (análisis) hasta el nivel 3 (deducción informal) según la caracterización de Gutiérrez (1990). En las primeras tareas, donde se solicita observar el plano del parque y reconocer las regiones A, B, C, D y E, los estudiantes que se encuentran en el nivel 1 suelen ofrecer respuestas descriptivas centradas en atributos visibles como *la región A es la más grande porque ocupa más cuadritos* o *la región C es pequeña porque casi no tiene cuadros*, evidenciando una comparación empírica basada en la percepción. En las tareas posteriores, al calcular el área de cada región y ordenarlas de menor a mayor, los estudiantes que alcanzan el nivel 2 (clasificación informal) formulan explicaciones que integran conteo y comparación, por ejemplo: *la región A tiene 20 cuadros y la D tiene 15, por eso A ocupa más espacio*, mostrando comprensión de la unidad cuadrada como medida del área. Finalmente, al responder preguntas sobre el material necesario para *cercar* cada región, los estudiantes que alcanzan el nivel 3 (deducción informal) tienden a justificar sus razonamientos con base en propiedades del contorno, expresando ideas como *la región C necesita menos material porque tiene menos lados o un perímetro más corto* o *el área no cambia si el perímetro es diferente*, demostrando una comprensión más formal del significado de área y perímetro como magnitudes distintas, pero relacionadas.

Tabla 20

Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 2 con GeoGebra (TRA)

Nivel de Van Hiele según Gutiérrez (1990)	Indicadores observables	Ejemplos de respuestas esperadas en la THA 2
Nivel 1 – Análisis	<p>Describe regiones del parque atendiendo a su forma o tamaño visible.</p> <p>Compara las figuras de manera perceptiva.</p> <p>No utiliza la noción de unidad cuadrada ni explica cómo mide.</p>	<p>“La región A es la más grande porque se ve más larga.” “La B es pequeña porque ocupa menos espacio.”</p>
Nivel 2 – Clasificación informal o relacional	<p>Utiliza conteo de cuadros o unidades para calcular el área.</p> <p>Ordena las regiones según su extensión y justifica con argumentos cuantitativos simples.</p> <p>Diferencia entre figuras con áreas distintas.</p>	<p>“La región A tiene 20 cuadros y la D tiene 15, La C es la más pequeña porque solo tiene 6 unidades cuadradas.”</p>
Nivel 3 – Deducción informal (transición a deducción formal)	<p>Comprende el perímetro como longitud del contorno y el área como cantidad de espacio interno.</p> <p>Usa vocabulario geométrico apropiado (unidad cuadrada, contorno, lados).</p> <p>Justifica comparaciones con base en propiedades o relaciones entre medidas.</p>	<p>“Aunque la región B y la C tienen áreas parecidas, la B necesita más material para cercar porque su contorno es más largo.” “3 El área es lo que ocupa dentro, el perímetro es lo que rodea la figura.”</p>

Nota. Elaboración propia

La Tarea 2 tenía como propósito comparar áreas y perímetros en planos del parque, identificando magnitudes distintas y avanzando hacia un razonamiento propio del nivel 2 (deducción informal) e incluso del nivel 3 (deducción formal). Se esperaba que los estudiantes determinaran el área mediante el conteo de unidades cuadradas, ordenaran

regiones según el tamaño de su superficie y, al cercarlas, comprendieran que el perímetro corresponde al contorno de las figuras, o sea, sus lados. Los resultados muestran progresos significativos: los cálculos de áreas de las regiones A hasta la E se distribuyeron entre los niveles 1 y 3, y en la tarea de ordenar las regiones de mayor a menor área, el 41,03 % alcanzó un razonamiento de nivel 3. En el cálculo del perímetro, el 51,28 % argumentó adecuadamente cuál región requería más material para cercarla, evidenciando comprensión de la magnitud. Además, el 76,92 % identificó correctamente que el área es la medida de la superficie y un 89,74 % reconoció que el perímetro es la longitud del contorno, lo que muestra apropiación del concepto. No obstante, persisten dificultades en algunos estudiantes que continúan confundiendo ambas magnitudes o justifican desde su apariencia. En conjunto, los resultados confirman avances importantes hacia niveles analíticos y relacionales, aunque no de la misma manera en todo el grupo.

Tabla 21

Resultados GeoGebra TRA tarea 3

RESULTADOS GEOGEBRA TRA 3					
TAREA	DESCRIPCIÓN	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	
Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo visto en las clases anteriores.	¿Cómo es la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo y un cuadrado?	7	0	32	
		17,95%	0%	82,05%	

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

¿Cómo es la fórmula para el cálculo del área de un triángulo?	7	0	32
	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Calcula el área de la región B, explica tu respuesta.	7	0	32
	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Calcula el área de la región C, explica tu respuesta.	7	0	32
	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Calcula el área de la región A,	7	0	32
explica tu respuesta.	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Calcula el área de la región E,	7	0	32
explica tu respuesta.	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Calcula el área de la región D,	7	0	32
explica tu respuesta.	17,95%	0%	82,05%

(Es una tarea que solo permite evidenciar el cumplimiento de la tarea o no)

Nota. Elaboración propia

En la THA 3 *Revisando los planos*, las actividades proponen un avance hacia el razonamiento geométrico formal mediante el uso explícito de fórmulas para calcular áreas de rectángulos, cuadrados y triángulos, consolidando lo trabajado en las trayectorias anteriores. Según los niveles de Gutiérrez (1990), esta THA permite observar la transición

del nivel 2 (clasificación informal) al nivel 3 (deducción formal). En un primer momento, cuando se pide identificar las medidas del plano, los estudiantes que se mantienen en el nivel 2 tienden a responder de manera operativa, basándose en el conteo de cuadritos o en la observación de longitudes, con expresiones como *el área del rectángulo se saca multiplicando los lados porque tiene 10 cuadros de largo y 5 de ancho*. Sin embargo, los estudiantes que alcanzan el nivel 3 formulan sus respuestas utilizando el lenguaje simbólico y las relaciones geométricas propias del pensamiento formal, por ejemplo: *el área del rectángulo se calcula aplicando la fórmula $A = base \times altura$ o el triángulo tiene la mitad del área de un rectángulo del mismo tamaño, por eso se divide entre dos*. Además, en las justificaciones sobre cada región del plano (A, B, C, D y E), los estudiantes en este nivel logran argumentar con base en propiedades y no solo en observaciones visuales, expresando ideas como *la región A es la mayor porque su base y altura son más extensas, lo que genera un producto mayor en el cálculo del área*. De esta manera, la THA 3 consolida el paso hacia un pensamiento geométrico más abstracto, donde las fórmulas se comprenden como generalizaciones que representan relaciones entre medidas y no como simples procedimientos mecánicos.

Tabla 22

Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 3 con GeoGebra (TRA)

Nivel de Gutiérrez (1990)	Indicadores observables	Ejemplos de respuestas esperadas en la THA 3
---------------------------	-------------------------	--

Nivel 2 Clasificación informal relacional	<p>– Calcula áreas mediante conteo o multiplicaciones o empíricas.</p> <p>Usa vocabulario geométrico parcial (“largo”, “ancho”, “cuadros”).</p> <p>Explica con base en ejemplos concretos.</p>	<p>“El área del rectángulo es 10 por 5 porque mide 10 de largo y 5 de alto.” “El triángulo ocupa la mitad porque solo cubre una parte del rectángulo.”</p>
Nivel 3 Deducción formal desarrollo)	<p>– Usa fórmulas geométricas correctas ($A = b \times h$, $A = (b \times h)/2$).</p> <p>Justifica sus procedimientos con base en propiedades o relaciones geométricas.</p> <p>Usa lenguaje simbólico o algebraico básico.</p>	<p>“El área del cuadrado se calcula multiplicando lado por lado.” “Para el triángulo se aplica $A = (b \times h)/2$ porque es la mitad del rectángulo.” “La región A tiene más área porque su base y altura son mayores.”</p>

Nota. Elaboración propia

La Tarea 3 introdujo el uso de la fórmula que tradicionalmente se suele utilizar en el aula para calcular el área de rectángulos, cuadrados y triángulos sin apoyo de cuadrícula, lo que suponía avanzar desde el nivel 2 hacia el nivel 3 del modelo de Van Hiele. La expectativa era que los estudiantes recordaran o dedujeran las expresiones $A = \text{base} \times \text{altura}$ y $A = (\text{base} \times \text{altura}) / 2$, y las aplicaran en los planos presentados. Los datos de la TRA muestran que el 82,05 % respondió correctamente cuál es la fórmula para calcular el área de las figuras, aplicándola de manera adecuada en las regiones A hasta la E. Esta cifra indica una apropiación efectiva del algoritmo geométrico y un avance hacia razonamientos más formales. La narrativa de los resultados señala que algunos estudiantes del nivel 2 justificaron sus respuestas con base en conteo o comparaciones, mientras que quienes avanzaron al nivel 3 explicaron que el área del triángulo corresponde a la mitad del rectángulo o que la fórmula

se basa en multiplicar la base por la altura. Aunque el avance es evidente, aún no todos lograron justificar formalmente el procedimiento. En términos generales, la tarea permitió consolidar aprendizajes propios de la deducción informal y del uso simbólico.

Tabla 23

Resultados GeoGebra TRA tarea 4

RESULTADOS GEOGEBRA TRA 4					
TAREA	DESCRIPCIÓN	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	
Contemos los puntos de las regiones.	Cuantos puntos tiene el BORDE de la región A.	7	31	1	
		17,95%	79,49%	2,56%	
	(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)				
	Cuantos puntos tiene el INTERIOR de la región A.	7	31	1	
		17,95%	79,49%	2,56%	
	(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)				

Cuanto mide el área de la Región A.	3	15	21
	7,69%	38,46%	53,85%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

Cuantos puntos tiene el BORDE de la región C.	7	31	1
	17,95%	79,49%	2,56%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

Cuanto mide el área de la Región C.	3	12	24
	7,69%	30,77%	61,54%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

¿La región B tiene 20 puntos en el BORDE?	7	31	1
	17,95%	79,49%	2,56%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

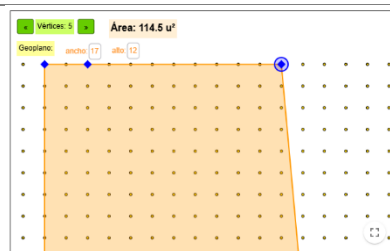
¿La región B tiene 20 puntos en el BORDE?	7	31	1
	17,95%	79,49%	2,56%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

¿Cuánto mide el área de la Región B?	2	10	27
	5,13%	25,64%	69,23%

(Es una tarea que solo permite evidenciar entre los niveles 1 y 2, por el lenguaje matemático utilizado)

Explora el siguiente recurso y crea una figura que tenga 60 Unidades



5	34	0
12,82%	87,18%	0%

cuadradas y

menos de 70.

¿Consideras que es más fácil usar el teorema de PICK para el cálculo de áreas?	2	7	30
es más fácil usar el teorema de PICK para el cálculo de áreas?	5,13%	17,95%	76,92%

PICK para el cálculo de áreas? (Es una tarea que evidencia el nivel de aceptación del Teorema de pick)

Nota. Elaboración propia

La THA 4 *Otra forma de hallar el área* introduce a los estudiantes en la aplicación del Teorema de Pick, promoviendo la comprensión del área desde una perspectiva relacional y deductiva, lo que supone un avance hacia el nivel 3 (Deducción formal) de acuerdo con Gutiérrez (1990). En esta trayectoria, los estudiantes deben contar puntos del borde y del interior de las regiones, aplicar la fórmula $\text{Área} = I + B/2 - 1$, y exponer la aceptación de los por el nuevo método de calcular el área. Los estudiantes que permanecen en el nivel 2 (deducción informal) suelen ofrecer respuestas operativas o basadas en conteo directo, por ejemplo: *la región A tiene más puntos, entonces su área es mayor*. Quienes alcanzan el nivel 3 (deducción formal) aplican correctamente la fórmula y explican el procedimiento en términos de propiedades (*se usa el número de puntos interiores y de borde para calcular el área sin medir los lados*). Finalmente, los estudiantes no solo aplican la fórmula, sino que justifican su validez y comparan su eficiencia frente a otros métodos, respondiendo con argumentos del tipo: *el Teorema de Pick es más útil porque permite hallar áreas de figuras*

irregulares sin conocer la base ni la altura o la fórmula funciona porque el borde aporta la mitad de los puntos y el interior cuenta el espacio completo. En este sentido, la THA 4 evidencia la consolidación del pensamiento geométrico formal, articulando el razonamiento algebraico con la representación visual y la argumentación lógica.

Tabla 24

Indicadores de razonamiento geométrico en la Tarea 4 con GeoGebra (TRA)

Nivel de Gutiérrez (1990)	Indicadores observables	Ejemplos de respuestas esperadas en la THA 4
Nivel 2 Clasificación informal relacional	<ul style="list-style-type: none"> – Compara áreas contando puntos sin usar la fórmula de Pick. o Realiza estimaciones visuales o comparaciones directas. No diferencia entre puntos del borde e interior. 	<p>“La región D tiene más puntos, entonces su área es mayor.” “El área se saca contando los puntos que hay dentro.”</p>
Nivel 3 – Deducción formal (en desarrollo)	<ul style="list-style-type: none"> Aplica la fórmula de Pick correctamente. Explica que el área depende del número de puntos interiores y de borde. Usa razonamiento numérico y simbólico (sustitución en la fórmula). 	<p>“El área es $A = 18 + (20/2) - 1 = 27$.” “Se usa el teorema de Pick porque no necesitamos medir los lados.”</p>

Nota. Elaboración propia

La Tarea 4, centrada en presentar y aplicar el teorema de Pick, fue diseñada para promover razonamientos de nivel 2 y, especialmente, del nivel 3, al integrar conteo de puntos interiores y de borde, uso de la fórmula $A = I + B/2 - 1$, y exploración de figuras irregulares en GeoGebra. En la TRA se observa que, al responder a los conteos de puntos de las regiones

A, B y C, la mayoría de los estudiantes operó en niveles 1 y 2, apoyándose en el conteo directo sin distinguir inicialmente entre puntos interiores y del borde. No obstante, al aplicar la fórmula, el 53,85 % calculó correctamente el área de la región A, el 61,54 % lo hizo para la región C y el 69,23 % para la región B, mostrando un avance progresivo. La actividad culminó con un applet donde los estudiantes debían construir figuras con un área específica; el 87,18 % cumplió exitosamente la tarea, evidenciando comprensión del vínculo entre puntos y área. Finalmente, al preguntar si era más fácil usar el teorema de Pick, el 76,92 % respondió afirmativamente, y los comentarios recogidos muestran que algunos de los estudiantes que alcanzaron el nivel 3 no solo aplicaron la fórmula, sino que justificaron su aplicabilidad y compararon su eficiencia con otros métodos tradicionales. Esta tarea evidenció, por tanto, la transición hacia el nivel de razonamiento geométrico formal en un porcentaje importante del grupo.

4.3. Fase 3: Análisis retrospectivo.

Durante del análisis retrospectivo se encontraron elementos que debe tener presente la construcción de una THA que tenga como propósito fortalecer el Pensamiento Espacial. En primer lugar, la visualización espacial constituye un elemento inicial del Pensamiento Espacial y, por tanto, debe ocupar un lugar central en la THA. Los estudiantes iniciaron su razonamiento geométrico desde percepciones globales de las figuras (forma, color y tamaño aparente), lo que confirma la necesidad de proponer tareas que favorezcan la observación, la comparación visual y la manipulación directa de objetos geométricos. En este sentido, actividades con material manipulativo (como el tangram) y representaciones dinámicas (GeoGebra) permiten que los estudiantes construyan imágenes mentales estables y transiten progresivamente desde un reconocimiento perceptivo hacia un análisis más estructurado de

las figuras. Este proceso es coherente con los planteamientos de Van Hiele (1986), quien señala que el aprendizaje geométrico se inicia en el nivel de visualización, donde los estudiantes reconocen las figuras por su apariencia global sin atender aún a sus propiedades internas. En este nivel, la visualización no es un complemento, sino el punto de partida necesario para avanzar hacia niveles superiores de análisis y deducción. Por tanto, una THA que no contemple explícitamente actividades orientadas al desarrollo de la visualización limita el tránsito natural del razonamiento geométrico.

Un segundo elemento es la orientación y organización espacial, entendida como la capacidad de ubicar, transformar y relacionar objetos en el plano. El análisis de las tareas muestra que los estudiantes fortalecen su Pensamiento Espacial cuando se les propone rotar, trasladar, descomponer y recomponer figuras para resolver situaciones problemáticas contextualizadas. Por ello, la THA debe incluir actividades que exijan cambios de posición y reconfiguración de formas, favoreciendo la comprensión de que las transformaciones no alteran necesariamente propiedades invariantes como el área. De igual forma, Clements y Battista (1992) destacan que la organización espacial y la manipulación de objetos geométricos son fundamentales para el desarrollo del razonamiento espacial, ya que permiten coordinar relaciones parte-todo y comprender la estructura interna de las figuras. Según estos autores, las actividades que implican reorganizar y reconfigurar formas ayudan a los estudiantes a construir representaciones mentales más flexibles, aspecto que se evidenció en esta investigación cuando los estudiantes utilizaron el tangram para construir distintas figuras con las mismas piezas, reconociendo progresivamente la conservación del área.

En tercer lugar, la comprensión de relaciones espaciales y métricas, particularmente en la diferenciación entre área y perímetro. Las dificultades iniciales de los estudiantes al

confundir ambas magnitudes confirman que la THA debe promover experiencias que articulen el Pensamiento Espacial con el Pensamiento Métrico, permitiendo comparar superficies, contornos y longitudes desde situaciones concretas. Actividades de recubrimiento, cercado y conteo de unidades constituyen un soporte esencial para que los estudiantes establezcan relaciones entre forma, tamaño y medida. Del Grande (1990) enfatiza que la comprensión de las relaciones espaciales y métricas no surge de la aplicación temprana de fórmulas, sino de experiencias concretas de comparación, recubrimiento y medición, que permitan al estudiante establecer relaciones entre forma, tamaño y medida. En coherencia con este planteamiento, el análisis retrospectivo muestra que las actividades de recubrimiento de superficies, cercado de regiones y conteo de unidades favorecieron que los estudiantes construyeran una diferenciación progresiva entre ambas magnitudes, superando explicaciones basadas exclusivamente en la percepción global.

Por cuarto elemento, la capacidad de descomposición y recomposición de figuras, la cual se manifestó de manera recurrente en el uso del tangram y en la exploración de áreas equivalentes con diferentes configuraciones. El análisis retrospectivo muestra que esta habilidad favorece la conservación del área, la comprensión parte-todo y el tránsito hacia niveles más analíticos del razonamiento geométrico. En consecuencia, una THA orientada al fortalecimiento del Pensamiento Espacial debe diseñar tareas que hagan explícitas estas relaciones estructurales, más allá de la apariencia visual. De acuerdo con Clements y Battista (1992), el razonamiento espacial se fortalece cuando los estudiantes pueden descomponer figuras en partes, reorganizarlas y establecer relaciones estructurales entre ellas. Los autores señalan que este tipo de acciones favorece la comprensión de propiedades invariantes como

el área en este contexto específico que es el Tangram, y promueve el tránsito desde un reconocimiento perceptivo hacia un análisis consciente de las propiedades geométricas.

Como quinto elemento, el uso de sistemas de representación espacial, como cuadrículas, mallas de puntos y coordenadas, emerge como un elemento clave en la construcción de la THA. La introducción del Teorema de Pick permitió que los estudiantes integraran visualización, conteo y generalización, evidenciando que el Pensamiento Espacial se fortalece cuando se articulan representaciones gráficas, numéricas y simbólicas. Desde el análisis retrospectivo, se concluye que la THA debe incorporar progresivamente estos sistemas de representación para favorecer la abstracción y la formulación de conjeturas. De acuerdo con Duval (1998), la comprensión matemática y en particular la geométrica depende de la coordinación entre diferentes registros de representación (gráfico, numérico y simbólico). El autor sostiene que el aprendizaje no se produce únicamente por manipular una figura, sino por la capacidad de interpretar, transformar y relacionar representaciones distintas de un mismo objeto matemático. En este sentido, el trabajo con mallas de puntos y cuadrículas permite a los estudiantes vincular la imagen visual de una figura con el conteo de unidades y con expresiones simbólicas que generalizan dichas relaciones.

Finalmente, como sexto elemento, el análisis permite reconocer la argumentación y justificación geométrica como un componente avanzado del Pensamiento Espacial. A medida que los estudiantes avanzaron en la trayectoria, comenzaron a explicar por qué una figura tiene mayor área, por qué dos regiones con igual superficie pueden tener distinto perímetro o por qué una fórmula es válida. Esto evidencia que la THA debe tener momentos explícitos de reflexión, discusión y validación de procedimientos, alineados con los niveles del modelo de Van Hiele, para promover el paso del razonamiento empírico a formas de deducción

informal y formal. De acuerdo con Van Hiele (1986), el aprendizaje de la geometría progresa a través de niveles de razonamiento, en los cuales el paso desde la visualización y el análisis hacia la deducción informal y formal requiere explícitamente procesos de argumentación. En los niveles superiores, los estudiantes deben justificar relaciones entre propiedades, establecer conexiones lógicas y explicar procedimientos más allá de la experiencia empírica o de la simple observación. Sin estos procesos, el razonamiento geométrico permanece en niveles descriptivos y dependientes de la percepción.

Con base en los resultados del experimento y los aportes teóricos sobre razonamiento geométrico, en esta investigación se identificaron seis elementos clave para la construcción de una THA orientada al fortalecimiento del Pensamiento Espacial.

1. Visualización.
2. Orientación y organización espacial.
3. Comprensión de relaciones espaciales y métricas.
4. Capacidad de descomposición y recomposición de figuras.
5. Sistemas de representación espacial.
6. Argumentación y justificación geométrica.

De acuerdo con los hallazgos identificados durante la aplicación del experimento de enseñanza, y con base en el presente análisis retrospectivo expuesto, se plantea una nueva versión THAm (Apéndice H). Esta propuesta integra de manera intencional aspectos considerados mejorables. Además, incorpora tareas que fortalecen específicamente los elementos del Pensamiento Espacial (visualización, orientación, relaciones métricas, descomposición de figuras, sistemas de representación y argumentación). Además, responde con mayor precisión a las necesidades de aprendizaje, mediante una progresión didáctica

coherente con el desarrollo geométrico y los referentes curriculares y teóricos de la investigación.

Conclusiones

La investigación permitió comprender de manera integral cómo los estudiantes de grado quinto desarrollan su pensamiento geométrico cuando participan en una secuencia de aprendizaje intencionalmente diseñada mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). La combinación entre actividades manipulativas, situaciones contextualizadas y el uso de herramientas digitales favoreció el tránsito progresivo de los estudiantes desde razonamientos intuitivos y perceptivos hacia formas de pensamiento más estructuradas, analíticas y justificadas.

Conclusiones generales

La investigación permitió evidenciar que el Pensamiento Espacial de los estudiantes de grado quinto mostró avances claros y sostenidos a lo largo de la implementación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. En un primer momento, predominaban razonamientos

basados en la apariencia visual de las figuras, acompañados de confusiones frecuentes entre los conceptos de área y perímetro y de un reconocimiento limitado de las propiedades geométricas. Sin embargo, a medida que se desarrollaron las tareas propuestas, los estudiantes comenzaron a identificar atributos relevantes, justificar procedimientos y establecer relaciones entre medidas, lo que reflejó un tránsito progresivo desde niveles básicos de razonamiento hacia formas más analíticas y estructuradas de pensamiento geométrico.

Este avance estuvo estrechamente vinculado con la articulación entre materiales concretos y entornos digitales. La manipulación del tangram permitió a los estudiantes explorar de manera tangible equivalencias, transformaciones y la conservación del área, favoreciendo la comprensión de relaciones parte-todo y la visualización espacial. Posteriormente, el uso de GeoGebra permitió formalizar estas ideas, visualizar con mayor precisión las construcciones realizadas y validar procedimientos, lo que fortaleció la comprensión conceptual al ofrecer múltiples representaciones de un mismo objeto matemático.

Asimismo, la diferenciación entre área y perímetro se consolidó de manera progresiva a lo largo de la trayectoria. Aunque inicialmente los estudiantes tendían a tratar ambas magnitudes como equivalentes, las tareas secuenciadas de la THA promovieron una comprensión clara de sus diferencias conceptuales. Al finalizar la intervención, la mayoría de los estudiantes logró explicar el significado de cada magnitud y aplicarlas adecuadamente en situaciones de medición, cercado, comparación y distribución de superficies, superando explicaciones basadas exclusivamente en la percepción visual.

El contexto del “Parque de 5-1” desempeñó un papel principal en este proceso, al otorgar sentido y significado a las actividades propuestas. Situar las tareas en un entorno real y

comprensible favoreció una mayor participación y motivación por parte de los estudiantes. La resolución de problemas contextualizados impulsó la formulación de hipótesis, la argumentación, el trabajo colaborativo y el uso consciente del lenguaje matemático, fortaleciendo así la conexión entre la matemática y situaciones de la vida cotidiana.

Finalmente, la comparación entre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y la Trayectoria Real de Aprendizaje enriqueció de manera significativa la intervención. Analizar cómo los estudiantes realmente construyeron sus aprendizajes permitió realizar ajustes en la secuencia, reforzar conceptos clave y reorganizar momentos de la enseñanza cuando fue necesario. Esta retroalimentación constante, propia de la Investigación Basada en Diseño, garantizó que la THA respondiera de forma coherente a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, fortaleciendo tanto el diseño didáctico como el análisis pedagógico desarrollado en la investigación.

Conclusiones por objetivos

La investigación evidenció que una secuencia didáctica diseñada mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) favorece en los estudiantes de grado quinto un tránsito progresivo desde razonamientos geométricos intuitivos y basados en la percepción hacia formas de pensamiento más estructuradas, analíticas y fundamentadas. En relación con el objetivo general, orientado a determinar el aporte de la THA al desarrollo del Pensamiento Espacial, los resultados mostraron un fortalecimiento significativo de las habilidades espaciales de los estudiantes. A lo largo de la intervención se generaron condiciones para que los alumnos no solo avanzaran en su razonamiento geométrico, sino que también argumentaran, representaran y aplicaran los conceptos de área, perímetro y equivalencia,

transitando desde la resolución de situaciones concretas hacia la comprensión de configuraciones más abstractas.

En cuanto al primer objetivo específico, centrado en diagnosticar y caracterizar las ideas previas de los estudiantes sobre figuras geométricas, área y perímetro, la fase diagnóstica permitió identificar que el punto de partida estaba marcado por nociones intuitivas y una comprensión limitada de estos conceptos. Los estudiantes reconocían las figuras de manera global, pero presentaban confusiones frecuentes entre área y perímetro, apoyando sus juicios principalmente en la apariencia visual. Esta caracterización inicial resultó fundamental para orientar el diseño de las primeras tareas de la THA, las cuales se enfocaron en atender dichas dificultades desde los momentos iniciales de la intervención.

Respecto al segundo objetivo específico, orientado al diseño de una THA coherente con las necesidades detectadas, la secuencia propuesta integró de manera progresiva materiales concretos, situaciones contextualizadas y herramientas digitales. La manipulación del tangram permitió a los estudiantes explorar de forma tangible la equivalencia entre figuras, las transformaciones geométricas y la conservación del área, mientras que el uso posterior de GeoGebra facilitó la visualización precisa de las construcciones y la validación de los procedimientos empleados. Esta articulación entre recursos concretos y digitales, sumada a la contextualización de las tareas en el entorno del “Parque de 5-1”, favoreció aprendizajes con mayor sentido, al permitir que los estudiantes construyeran significado antes de abordar procedimientos formales, como la aplicación de fórmulas o el uso del Teorema de Pick.

En relación con el tercer objetivo específico, centrado en la implementación de la THA y el análisis de la Trayectoria Real de Aprendizaje, la intervención brindó información

valiosa sobre la manera en que los estudiantes construyeron sus aprendizajes. El seguimiento continuo del trabajo en el aula permitió identificar avances, dificultades y reorientaciones en los razonamientos de los estudiantes, lo que posibilitó realizar ajustes oportunos en la secuencia didáctica. Este proceso de retroalimentación permanente, propio de la Investigación Basada en Diseño, contribuyó a que la THA se mantuviera alineada con las necesidades reales del grupo y enriqueció significativamente la intervención.

El análisis de la trayectoria real evidenció progresos importantes en el Pensamiento Espacial de los estudiantes, reflejados en la formulación de conjeturas, la comprensión del área como recubrimiento, la comparación entre figuras de distintas formas y el uso más consciente de las mediciones. Asimismo, se observó un fortalecimiento de capacidades relacionadas con la visualización, el análisis, la clasificación, la justificación y la generalización, lo que se manifestó en explicaciones más precisas, en el uso de un lenguaje matemático más riguroso y en una comprensión más profunda de los conceptos geométricos abordados.

Seguidamente, en relación con el cuarto objetivo específico, el análisis retrospectivo de la implementación permitió identificar los elementos clave que debe contener una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje mejorada para fortalecer el Pensamiento Espacial en la educación básica primaria. Se estableció la necesidad de definir objetivos de aprendizaje centrados explícitamente en habilidades espaciales como la visualización, la orientación y la manipulación de formas, así como de organizar las tareas en una progresión lógica y creciente en complejidad. Asimismo, se destacó la importancia de integrar actividades manipulativas, representaciones visuales diversas, el uso explícito del lenguaje espacial, la contextualización de las situaciones problemáticas y la evaluación formativa continua. De igual manera, se

reconoció la necesidad de diseñar trayectorias flexibles que atiendan la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje. Estos elementos se concretan en la propuesta de una THA mejorada, presentada en el recurso final (Apéndice I), que reúne la THAp, la THA implementada y la THAm resultante de esta investigación.

Finalmente, vale la pena mencionar algunas de las limitaciones con las que los investigadores se encontraron durante el desarrollo del presente proyecto de investigación. La primera de ellas, fue la dificultad para contar con computadores con acceso estable a la red de internet. La segunda dificultad, es la disposición de los estudiantes, en algunos casos, no se debía a temas propios de la materia, sino a condiciones ambientales desfavorables, como el calor en el aula de clase o el ruido, una tercera dificultad corresponde a la falta de tiempo para la implementación de las sesiones, debido a que algunos días no era posible realizar la implementación por diversos motivos ajenos a la investigación.

Discusión

El análisis de los resultados obtenidos en las distintas fases del estudio evidencia avances significativos en el desarrollo del Pensamiento Espacial y en la comprensión de los conceptos de área y perímetro. Estos progresos se reflejan tanto en las tareas de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como en los productos generados durante la fase experimental (TRA), especialmente en el entorno digital de GeoGebra. Los hallazgos confirman la pertinencia de emplear recursos manipulativos y tecnológicos dentro de una secuencia didáctica coherente con los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele y los niveles de formalización planteados por la Educación Matemática Realista (EMR).

En las primeras tareas, orientadas a la exploración del tangram y al reconocimiento del área como recubrimiento, los estudiantes mostraron un razonamiento correspondiente a los niveles iniciales de Van Hiele (visualización y análisis). Identificaron figuras por su forma global y comenzaron a distinguir atributos como lados, vértices y medidas, lo que coincide con lo planteado por Clements y Battista (1992), quienes destacan la importancia de la manipulación concreta y la visualización perceptiva en el desarrollo del razonamiento espacial. Este avance también guarda relación con los resultados de Fernández. (2009) quien observó progresos similares mediante el uso de materiales manipulativos. En esta fase, el trabajo con el tangram favoreció la interacción, el descubrimiento y la comunicación entre pares, confirmando que la manipulación de objetos concretos constituye una base sólida para comprender la geometría desde los primeros grados.

A medida que las tareas incorporaron la medición y el cálculo de áreas en figuras compuestas, se evidenció una transición hacia niveles superiores de razonamiento. Los

estudiantes comenzaron a justificar sus procedimientos y a emplear la fórmula del área de manera significativa, alcanzando el nivel 2 de Van Hiele, donde se reconocen propiedades y relaciones entre figuras. De acuerdo con Duval (1998), esta evolución depende de la coordinación entre diferentes registros de representación —gráfico, verbal y simbólico—, aspecto que se fortaleció mediante el uso de GeoGebra, herramienta que facilitó la visualización de transformaciones geométricas y la verificación empírica de las relaciones de área y perímetro.

Los resultados obtenidos en la fase TRA dentro del entorno digital evidencian una mejora sustancial en la comprensión de las relaciones espaciales y en la capacidad de los estudiantes para modelar situaciones geométricas. Este comportamiento coincide con los estudios de Díaz-Nunja, Rodríguez-Sosa y Lingán (2018) y de Aldana y Pérez (2024), quienes demostraron que GeoGebra potencia el razonamiento geométrico y la motivación estudiantil al permitir la exploración autónoma y la retroalimentación inmediata. En este caso, los estudiantes no solo reprodujeron figuras, sino que lograron explicar las equivalencias de área entre distintas composiciones del tangram, lo que evidencia una transición del modelo-de al modelo-para, en términos de Gravemeijer (1999), dentro de la Educación Matemática Realista.

La secuencia de tareas también permitió observar un desplazamiento progresivo entre los niveles de actividad propuestos por la EMR (situacional, referencial, general y formal). En las fases iniciales, los estudiantes actuaron desde lo situacional, resolviendo problemas mediante la manipulación; luego pasaron al nivel referencial al establecer comparaciones y relaciones entre áreas; y finalmente alcanzaron un nivel general, en el que pudieron justificar equivalencias y relacionar área y perímetro mediante representaciones simbólicas. Este

proceso refleja lo expuesto por Simon (1995), quien señala que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje deben guiar la transición de las acciones concretas hacia formas más abstractas de razonamiento.

Desde el componente actitudinal, se evidenció un aumento en la participación, la motivación y la confianza de los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones. El trabajo colaborativo y el apoyo de recursos digitales generaron un ambiente de aprendizaje activo, coherente con lo indicado por Moreno Gatica (2023), quien destaca que el tangram favorece la cooperación y la construcción colectiva del conocimiento. Estos resultados sugieren que la enseñanza de la geometría, cuando se apoya en experiencias visuales y significativas, contribuye tanto al desarrollo cognitivo como al fortalecimiento de habilidades sociales y comunicativas vinculadas al aprendizaje matemático.

No obstante, también se identificaron algunas dificultades persistentes relacionadas con el uso del lenguaje geométrico formal y con la argumentación deductiva. Estas limitaciones concuerdan con las observaciones de Jiménez-Gestal y Blanco Nieto (2017), quienes advierten que el paso del razonamiento empírico al formal requiere acompañamiento docente y estrategias que promuevan la explicitación del discurso matemático. Por ello, resulta necesario continuar diseñando tareas que integren de manera más intencionada la comunicación matemática y la justificación verbal de los procedimientos, aspectos fundamentales para consolidar un Pensamiento Espacial de mayor complejidad.

En síntesis, los resultados evidencian que la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, apoyada en el uso del tangram y GeoGebra, tuvo un efecto favorable en la comprensión de los conceptos de área y perímetro, así como en el fortalecimiento del pensamiento espacial. La secuencia de actividades permitió vincular los niveles de razonamiento geométrico con

los distintos grados de abstracción planteados por la Educación Matemática Realista, mostrando que es posible integrar de manera efectiva recursos manipulativos y tecnológicos en el aula. De esta forma, se confirma el valor de las estrategias activas y contextualizadas para la enseñanza de la geometría en primaria, al propiciar experiencias de aprendizaje más significativas y duraderas.

Referencias bibliográficas

- Aldana, J. C. & Perez, W. S. (2024). *Secuencia didáctica mediada por Geogebra para el desarrollo del Pensamiento Espacial en estudiantes del grado quinto*. [Proyecto aplicado]. Repositorio Institucional UNAD. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/64129>
- Argota Ebrat, A. (2021). *Secuencia didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial, a partir del uso del Tangram interactivo con estudiantes de segundo grado de educación básica primaria en la institución IE Manuel J del Castillo en el municipio de Ciénaga (Magdalena) en año 2020*. *Revista Colombiana de Educación Matemática*, 13(2), 45–62. <https://repository.icesi.edu.co/bitstreams/ba993027-71d5-4eef-a624-675039ab52c2/download>
- Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de la República de Colombia*. <https://www.corteconstitucional.gov.co/inicio/Constitucion%20politica%20de%20Colombia%20-%202015.pdf>
- Barab, S. A., & Squire, K. (2004). *Design-based research: Putting a stake in the ground*. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1–14. <https://sashabarab.org/wp-content/uploads/2015/03/dbr-jls.pdf>
- Barrows, H. S. (1986). *A taxonomy of problem-based learning methods*. *Medical Education*, 20(6), 481–486. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/3796328/>

- Bocanegra González, M., & Devia Ávila, S. (2019). *Trayectoria hipotética de aprendizaje para promover la generalización de una propiedad geométrica en educación básica*. *Revista Colombiana de Educación*, *77*, 181–204.
<https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/NoriaIE/article/download/17922/17055/102656>
- Cárcamo, A., Fortuny, J. M., & Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(1), 45-64.
- Castro Castro, T. (2025). Tareas de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción de ecuaciones trigonométricas con infinitas soluciones . *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *21*(73).
Recuperado a partir de <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1673>
- Chanaga, S. (2017). *Los manipulables virtuales como estrategia para el fortalecimiento del proceso de razonamiento en la resolución de problemas de tipo espacial en estudiantes de grado primer*. [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS. <https://noesis.uis.edu.co/items/5d9b048f-ee44-414c-8988-d4daa6c0757a>
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

https://www.researchgate.net/publication/258932007_Geometry_and_spatial_reasoning

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). *Learning trajectories in mathematics education. Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89.

https://www.researchgate.net/publication/233300911_Learning_Trajectories_in_Mathematics_Education

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design experiments in educational research. Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

<https://www.jstor.org/stable/3699928>

Congreso de la República de Colombia. (1994). *Ley 115 de 1994 por la cual se expide la Ley General de Educación. Diario Oficial No. 41.214.*

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Congreso de la República de Colombia. (2025, 23 de julio). *Ley 2491 de 2025. Por medio de la cual se incorpora el componente de competencias socioemocionales en los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) de las instituciones educativas y se dictan otras disposiciones. Diario Oficial No. 53.102.*

https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma_pdf.php?i=261636#:~:text=Las%20estrategias%20de%20prevenci%C3%B3n%20ya,promulgaci%C3%B3n%20de%20la%20presente%20ley.&text=ART%C3%8DCULO%209..el%20Ministerio%20de%20Educaci%C3%B3n%20Nacional

Del Grande, J. J. (1990). *Spatial sense. Arithmetic Teacher*, 37(6), 14–20.

<https://eric.ed.gov/?id=EJ407581>

- Dewey, J. (1929). *Experience and nature*. Open Court.
- Díaz-Nunja, L., Rodríguez-Sosa, J., & Lingán, S.K. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones*, 6(2), 217-251. Doi: <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37–52). Springer.
- Fernández Pérez, B. (2009). *Materiales para la enseñanza de las fracciones* [Artículo]. *Revista digital CSIF*, 25, 1–9. https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_25/BLANCA_FERNANDEZ_1.pdf
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer. <https://p4mriunismuh.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf>
- González Vargas, C. (2021). *Mi mundo geométrico: Una estrategia basada en la enseñanza de la geometría con uso de un software llamado GeoGebra*. *Praxis Pedagógica*, 21(29), 55–72. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/40918>
- González, E. O. (2022). Déficit en el pensamiento espacial y su repercusión en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de básica primaria. *AIBI Revista de Investigación, Administración e Ingeniería*, 10(1), 29–42. Recuperado de

<https://pdfs.semanticscholar.org/9e93/48c524c919a8193f439ecac9a074379ca4f0.pdf>

Gravemeijer, K. (1999). *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177.
https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15327833mtl0102_4

Doorman, M., & Gravemeijer, K. (1999). *Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example*. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3), 111–129.
https://www.researchgate.net/publication/226335149_Context_Problems_in_Realistic_Mathematics_Education_A_Calculus_Course_as_an_Example

Flick, U. (2004). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Madrid: Morata.
https://edmorata.es/wp-content/uploads/2021/02/Flick.-Introduccion-a-la-investigacion-cualitativa_prw.pdf

Gutiérrez, Á. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. *Educación Matemática*, 3(1), 5–19.
https://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacion_espacial

Hurtado, J. (2012). *Metodología de la investigación: Guía para una comprensión holística*. Quirón Ediciones.
<https://dariososafoula.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/01/hurtado-de-barrera-metodologicc81a-de-la-investigacioc81n-guic81a-para-la-comprensio81n-holic81stica-de-la-ciencia.pdf>

- Jiménez-Gestal, C., & Blanco Nieto, L. J. (2017). *El teorema de Pick como recurso didáctico*. PNA, 11(4), 251–272. [PDF]
<https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1243287/Jimenez2017Teorema.pdf>
- Latorre, A., del Rincón, D., & Arnal, J. (2010). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Graó.
<https://sitraiem.org.wordpress.com/wp-content/uploads/2024/06/bases-metodologicas-de-la-investigacion-educativa-latorre.pdf>
- Maz-Machado, A., Argudo, J., & Rodríguez, M. (2018). *Explicando la diferencia entre perímetro y área con el tangram*. Educación Matemática, 30(1), 73–94.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7007894>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. MEN.
https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN.
https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Mix, K. S. (2019). *Why Are Spatial Skill and Mathematics Related?*. Cognitive Research: Principles and Implications, 4(1), 1–12.
<https://srcd.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/cdep.12323>

- Moreno Gatica, D. (2023). *Uso del tangram como recurso para la enseñanza de la geometría*. RELIME, 26(1), 89–112. <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/download/2081/1573>
- Moreno Jaimes, G. (2024). *Experiencia de formación: la importancia del Pensamiento Espacial en la educación básica primaria*. Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática, 45, 33–49. <https://archivo.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/56587/59170>
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). The child's conception of geometry. Basic Books. Abstract. <https://psycnet.apa.org/record/1960-08354-000>
- Quitano Ortiz, M. (2024). *Diseñando un parque geométrico: materiales manipulativos y modelo de Van Hiele* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad de Valladolid. <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/82504/TFG-G7978.pdf>
- Ruiz Velazco, P, Coavas Martinez, Y, Anaya Guzman, J y Silgado Orozco, D. (2022). *Impacto de Geogebra en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos mediante el aprendizaje basado en juegos en estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Las Cruces en Lorica-Córdoba*. Universidad de Cartagena. <https://hdl.handle.net/11227/16291>
- Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the Science of Education Design Studies. Educational Researcher, 32(1), 25-28. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001025> (Original work published 2003)

- Simon, M. A. (1995). *Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 114-145.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED364406.pdf>
- Simon, M. A. (2014). *An approach to the design of mathematical task sequences: Conceptual learning as abstraction*. PNA, 10(4), 270-279.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company
- Zolkower, B., & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista [Realistic mathematics education]. In M. Pochulu & M. Rodríguez (Eds.), Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, Universidad de General Sarmiento

Apéndices

Apéndice A. Rejilla de resumen de revisión de antecedentes.

Tabla 25

Resumen revisión de antecedentes

Nivel geográfico	Autor(es) y año	Objetivo	Metodología	Resultados principales	Relevancia para esta investigación	Palabras clave
Internacional	Díaz-Nunja, Rodríguez-Sosa y Lingán (2018)	Analizar el efecto del uso de GeoGebra en las capacidades de razonamiento, comunicación matemática y resolución de problemas.	Cuasi-experimental, grupo control y experimental, 11 sesiones, prueba validada.	Mejoras significativas ($r_b > 0.50$), mayor motivación y compromiso.	Confirma el potencial de GeoGebra en metodologías activas.	GeoGebra, geometría, razonamiento, TIC, aprendizaje activo
Internacional	Jiménez-Gestal y Blanco	Facilitar la comprensión del	Secuencia constructivista con	Formulación empírica de la fórmula, uso	Refuerza el valor didáctico del	Teorema de Pick, visualización

	Nieto (2017)	Teorema de Pick en formación docente mediante descubrimiento guiado.	geoplano y trama cuadrada.	de estrategias visuales, dificultades en lenguaje formal.	Teorema de Pick.	n, razonamiento, geoplano, trabajo colaborativo
Internacional	Fernández, B. (2009)	Analizar el impacto de recursos manipulativos en comprensión geométrica en primaria.	Estudio cualitativo con observación, entrevistas y análisis de producciones.	Uso de material manipulativo mejora en vocabulario geométrico, mayor motivación.	Fundamental el uso de material concreto para desarrollar PE.	Tangram, geoplano, motivación, aprendizaje significativo
Internacional	Castro Castro (2025)	Diseñar e implementar una THA para ecuaciones trigonométricas con infinitas soluciones.	Investigación basada en diseño, tareas secuenciadas según Gravemeijer y Simon.	Progreso de modelo-de a modelo-para, dificultades en articulación gráfica-algebraica.	Aporta referentes para estructurar THA en matemáticas.	THA, Gravemeijer, Simon, trigonometría, progresión conceptual

Internacional	Moreno Gatica (2023)	Potenciar aprendizaje geométrico y razonamiento lógico con tangram.	Taller con actividades secuenciadas, aulas reales.	Mejora en visualización, trabajo colaborativo y motivación.	Respalda el tangram como recurso central.	Tangram, geometría, visualización, colaboración, motivación
Nacional	Maz-Machado, Argudo y Rodríguez (2018)	Diferenciar los conceptos de área y perímetro con tangram.	Propuesta didáctica constructivista, manipulación directa.	Los alumnos descubren que igual área no implica igual perímetro y viceversa.	Fortalece la comprensión conceptual y fomenta conjeturas.	Tangram, área, perímetro, visualización, manipulación
Nacional	Anaya, Coavas, Ruiz y Silgado (2022)	Diseñar e implementar una THA para la comprensión del Teorema de Pick.	Secuencia con diagnóstico, exploración, conjeturas y generalización.	Comprensión inductiva de la fórmula, fortalecimiento de razonamiento geométrico.	Demuestra la efectividad de THA para geometría escolar.	Teorema de Pick, THA, área, perímetro, razonamiento
Nacional	Argota Ebrat (2021)	Fortalecer PE mediante tangram	Secuencia constructivista con	Mejora en visualización, orientación y	Valida el tangram digital para	Tangram, PE, orientación,

		digital en segundo grado.	tangram físico y digital.	vocabulario geométrico.	educación básica.	visualización, TIC
Nacional	Aldana Aldana y Pérez Domínguez (2024)	Usar GeoGebra para desarrollar PE en quinto grado.	Diseño constructivista con manipulación de figuras y simetrías.	Avance en visualización 3D, relaciones espaciales y motivación.	Confirma efectividad de GeoGebra en primaria.	GeoGebra, PE, visualización, TIC, primaria
Nacional	González Vargas (2021)	Usar GeoGebra y ABP para superar dificultades en geometría.	Secuencia contextualizada con guías y diario de campo.	Mejora en actitud, confianza y razonamiento.	Ejemplo de integración de TIC y ABP.	GeoGebra, ABP, geometría, confianza, motivación
Local	Chanaga, S. (2017)	Diseñar e implementar secuencia para PE en sexto grado.	Enfoque constructivista y uso de TIC.	Avance en niveles de Van Hiele y motivación.	Respalda uso de TIC para PE localmente.	PE, TIC, Van Hiele, geometría, secundaria
Local	Moreno Jaimes (2024)	Reflexionar sobre importancia	Análisis de estándares, lineamiento	Urge reorientar currículo e integrar PE	Base teórica para priorizar PE en la enseñanza.	PE, currículo, transversali

		del PE en primaria.	s y literatura.	transversalmente.		dad, estándares
Local	González (2022)	Caracterizar prácticas pedagógicas y nivel de PE en primaria rural.	Enfoque cualitativo, entrevistas y observación.	PE abordado superficialmente, carencia de recursos y formación docente.	Evidencia necesidad de secuencias contextualizadas.	PE, ruralidad, recursos, formación docente
Local	Bocanegra González y Devia Ávila (2019)	Diseñar e implementar THA para generalización geométrica.	Entrevista basada en tareas, material manipulativo y GeoGebra.	Progreso en generalización y validación de propiedades.	Modelo adaptable para otros contenidos.	THA, generalización, GeoGebra, propiedades

Nota. Elaboración propia.

Apéndice B. Instrumento de observación diagnóstica.

Tabla 26

Ejemplo de rejilla de observación diagnóstica.

REJILLA DE DIAGNÓSTICO THAp: _____

Nivel	Indicadores	Respuesta de los estudiantes en cada grado			
		5-1	5-2	5-3	5-4

Nivel 0: Visualización	<p>- Reconoce las figuras del Tangram (barco, gato, caballo, cuadrado) únicamente por su forma global, sin distinguir partes o propiedades.</p> <hr/> <p>Describe las figuras comparándolas con objetos familiares (“parece un gato”, “parece un barco”).</p> <hr/> <p>Reproduce o identifica las figuras de memoria o por observación, sin usar propiedades geométricas.</p> <hr/> <p>Se guía por el color o el tamaño aparente de las piezas, sin lenguaje geométrico formal.</p>
-----------------------------------	---

Nivel 1: Análisis	<p>Identifica y nombra algunas piezas del Tangram (triángulos, cuadrado, paralelogramo).</p> <hr/> <p>Reconoce propiedades observables como número de lados, tamaño relativo y disposición de las piezas</p> <hr/> <p>Explica semejanzas y diferencias entre las figuras, aunque sus justificaciones son empíricas (“todas usan las mismas piezas”).</p> <hr/> <p>Diferencia parcialmente entre área y forma, aunque requiere manipulación concreta para convencerse.</p>
--------------------------	---

Nivel 2: Deducción informal	<p>Argumenta que todas las construcciones tienen la misma área porque se usan las siete piezas.</p> <hr/> <p>Anticipa resultados antes de medir o comprobar (“siempre que se usen todas las piezas, el área es la misma”).</p> <hr/> <p>Relaciona propiedades entre sí: reconoce que la forma cambia, pero el área se conserva.</p>
--	---

Justifica con razonamientos simples que trascienden la observación directa, aunque aún dependan del material concreto.

**Nivel 3:
Deducción
formal**

Diferencia explícitamente entre área y forma, justificando con ejemplos que el área permanece constante aunque varíe la figura.

Utiliza vocabulario geométrico con mayor precisión para describir propiedades y comparaciones.

Reconoce la necesidad de justificar sus conclusiones más allá de la manipulación concreta.

Muestra capacidad de estructurar explicaciones lógicas más organizadas (ejemplo: “siempre que se usen todas las piezas, la suma de áreas no cambia porque cada pieza conserva su tamaño”).

Nota. Elaboración propia.

Apéndice C. Material audiovisual utilizado para la THAp.

Tabla 27

Guías diagnósticas impresas y digitales.

https://www.canva.com/design/DAG3S4P3F9g/pdaRn4TJiuz2S41hTPj_sA/edit?utm_content=DAG3S4P3F9g&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton

Apéndice D. Instrumento de observación TRA.

Tabla 28

Guía de observación TRA

TAREA: 1**Objetivo de aprendizaje****Descripción de la tarea de aprendizaje:**

Nivel de actividad. EMR: <u>Situacional</u>	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:		
	Actividad	Proceso obtenido	Resultado obtenido

Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel:

Nivel:

Evidencias**Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele:**

Nivel:

Evidencias:**Intervención del docente**

Nota. Tomado y adaptado de Cárcamo, A., Fortuny, J. M., & Fuentealba, C. (2021).

Apéndice E. Material digital de GeoGebra durante la activación.

Producciones digitales en GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/mfxxjqh2#chapter/1259631>

Apéndice F. Instrumento de análisis de resultados de la TRA.

Tabla 29

Rúbrica analítica del Pensamiento Espacial

Nivel Van Hiele	Indicador (adaptado a la actividad en GeoGebra)	Estándar MEN asociado	Cumple	No cumple
------------------------	--	------------------------------	---------------	------------------

Nivel 1 – Reconocimiento o visualización	Reconoce el rectángulo de la entrada del parque únicamente por su forma global, sin describir sus partes (lados, vértices).	Comparo y clasifico figuras bidimensionales...
Nivel 1 – Reconocimiento o visualización	Selecciona y ubica las piezas del tangram en el rectángulo de GeoGebra guiándose solo por la apariencia visual, sin usar propiedades geométricas.	Comparo y clasifico figuras bidimensionales...
Nivel 1 – Reconocimiento o visualización	Completa el recubrimiento del rectángulo en GeoGebra sin dejar espacios, ajustando las piezas solo por coincidencia visual.	Diferencio y ordeno propiedades que se puedan medir (área)
Nivel 2 – Análisis	Identifica partes y propiedades de las piezas usadas en GeoGebra (ej. tipo de figura, número de lados), aunque no establezca relaciones entre ellas.	Comparo y clasifico figuras bidimensionales...
Nivel 2 – Análisis	Reconoce que dos diseños distintos (en GeoGebra) pueden cubrir la misma superficie, estableciendo la igualdad de área por observación y conteo visual.	Diferencio y ordeno propiedades que se puedan medir (área)

Nivel 2 – Análisis	Utiliza herramientas de GeoGebra para medir o verificar el área cubierta, validando de forma empírica que es igual en distintos diseños.	Diferencio y ordeno propiedades que se puedan medir (área)
Nivel 3 – Deducción informal u orden	Explica que el área cubierta es igual en dos diseños porque las piezas son las mismas y su reubicación no cambia la cantidad de superficie cubierta, estableciendo una relación entre propiedades.	Diferencio y ordeno propiedades que se puedan medir (área)

Nota. Elaboración propia

Apéndice G. Instrumento para comparar THA con TRA.

Tabla 30

Matriz de contraste THA–TRA

TAREA: <u>1</u>			
Objetivo de aprendizaje			
Descripción de la tarea de aprendizaje:			
Nivel de actividad. EMR:	Descripción del proceso de aprendizaje hipotético:		
<u>Situacional</u>	Actividad	Proceso y resultado esperado	Proceso y resultado obtenido
Nivel de actividad esperado en los niveles de Van Hiele: Nivel:			
Nivel:			
Evidencias			

Nivel de actividad logrado en los niveles de Van Hiele:

Nivel:

Evidencias:

Intervención del docente

Nota. Tomado y adaptado de Cárcamo, A., Fortuny, J. M., & Fuentealba, C. (2021).

Apéndice H. Material digital mejorado de GeoGebra

THA mejorada en GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/mfxxjqh2#chapter/1258692>

Apéndice I. Libro de GeoGebra

Libro que recopila THAp, THA y TRA en GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/mfxxjqh2>