

CONTINUOS DE AWARTANI

EDWIN RENÉ ARAQUE ALARCÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

CONTINUOS DE AWARTANI

EDWIN RENÉ ARAQUE ALARCÓN

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO  
MATEMÁTICO

DIRECTOR  
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA  
PH.D EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2021

*Dedicado: A mi madre Yolanda Alarcón y mis sobrinos Ronaldo Hernández Araque, ArletZoé Gabriela Moreno Alarcón y Sofía Hernández Araque, quienes han sido inspiración entodo momento para desarrollar esta monografía.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradecimientos a mi madre Yolanda Alarcón por su apoyo incondicional, a quienes siento como mi familia, Rubialba Vázquez, Marina Blanco Gualdrón, Silvia N Blanco Vázquez, Víctor Blanco Vázquez, Manuel J Gómez Blanco, Harold David Vergel, Esteban Montealegre Blanco, quienes me apoyaron y acogieron desde el primer día, al doctor Javier Enrique Camargo García quien estuvo presto a guiarme todo el tiempo y a Danna Katherine Chávez Sánchez quien me lleno de buena energía durante esta monografía.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>13</b>
1.1. NOCIONES BÁSICAS	13
1.2. CONTINUOS	19
<b>2. SUCESIONES DEL ESPACIO DE CANTOR</b>	<b>24</b>
2.1. SUCESIONES DEL CONJUNTO DE CANTOR	24
2.2. UNA COLECCIÓN NO NUMERABLE DE SUCESIONES DEL CONJUNTO DE CANTOR	26
<b>3. CONSTRUCCIÓN DE LOS CONTINUOS DE AWARTANI</b>	<b>30</b>
3.1. CONSTRUCCIÓN DEL RAYO $J_\alpha$	30
3.1.1. Construcción	32
3.1.2. La compactación $E_\alpha$ y el rayo $J_\alpha$	34
3.2. COMPARANDO COMPACTACIONES $E_\alpha$ y $E_\beta$	39
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>49</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 2. Una compactación del rayo	19
Figura 3. Curva del topólogo modificada	21
Figura 4. Continuos	21
Figura 5. Rayo $J_\alpha$	31
Figura 6. Rayo $J_\alpha$ cuando $\alpha_i = 0$	32
Figura 7. Rayo $J_\alpha$ cuando $\alpha_i = 1$	33
Figura 8. Parte inferior del Rayo $J_\alpha$	34
Figura 9. Rayo $J_\alpha$	35
Figura 10. Rayo $J_\alpha$	36
Figura 11. Épsilon función	38
Figura 12. Rayo $J_\beta$	40
Figura 13. Caso 1	42
Figura 14. Caso 2	42
Figura 15. Bosquejo i y ii	44
Figura 16. Casos	46

## RESUMEN

**TÍTULO:** CONTINUOS DE AWARTANI \*

**AUTOR:** EDWIN RENÉ ARAQUE ALARCÓN \*\*

**PALABRAS CLAVE:** CONTINUOS ENCADENABLES, SUCESIONES NO COMPARABLES, COMPACTACIONES.

### DESCRIPCIÓN:

Un continuo  $X$  se dice encadenable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\varepsilon$ -función  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$ ; esto es, existe  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$  continua y sobreyectiva tal que  $\text{diam}(f_\varepsilon^{-1}(t)) < \varepsilon$ , para cada  $t \in [0, 1]$ . En general, dos continuos se dicen incomparables si no existen funciones continuas y sobreyectivas en ninguna dirección; es decir,  $X$  y  $Y$  son incomparables si no existe  $f: X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva, ni tampoco  $g: Y \rightarrow X$  continua y sobreyectiva.

En 1970, en <sup>1</sup>, el profesor J. Rogers preguntó si era posible construir una familia no numerable de continuos encadenables mutuamente incomparables. Un año más tarde, David Bellamy en su artículo titulado “*An uncountable collection of chainable continua*,” <sup>2</sup>, construyó dicha familia dando respuesta afirmativa a la pregunta de Rogers. Sin embargo, los continuos de Bellamy son ejemplos complejos, donde cada continuo tiene infinitas arco-componentes. Así, Marwan M. Awartani en el artículo titulado “*An Uncountable Collection of Mutually Incomparable Chainable Continua*” <sup>3</sup> construye continuos encadenables que dan respuesta a la pregunta de Rogers, cada uno de los cuales es una compactación del intervalo  $(0, 1]$  y el residuo es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

En este trabajo estudiamos el artículo de Awartani y mostramos con detalle la construcción y las pruebas que muestran que efectivamente esta familia satisface las condiciones para dar respuesta a la pregunta del profesor Rogers. El desarrollo de esta monografía consta de 3 capítulos. Se hace una revisión

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camarco García, Ph.D en Matemáticas.

<sup>1</sup> J. Rogers. “Continuous mappings on continua”. En: *Proceedings of the Auburn Topology Conference* (1969), págs. 94-97.

<sup>2</sup> D. Bellamy. “An uncountable collection of chainable continua”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 160 (1997), págs. 297-304.

<sup>3</sup> M. Awartani. “An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 118(1) (1993), págs. 239-245.

bibliográfica de los conceptos intrínsecos de los continuos, definimos las relaciones dominar y dominar verticalmente en el espacio de Cantor. Luego demostramos que con respecto a estas relaciones existe una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables. Finalmente, asociamos cada elemento de dicha colección con una compactación del rayo con el arco como resto y demostramos que no existe una función continua y sobreyectiva entre cualquier par de tales compactaciones. Con esto completamos el objetivo principal de este trabajo.

## ABSTRACT

**TITLE:** AWARTANI CONTINUUM \*

**AUTHOR:** EDWIN RENÉ ARAQUE ALARCÓN \*\*

**KEYWORDS:** CHAINABLE CONTINUUM, INCOMPARABLE SUCCESSIONS, COMPACTIONS.

**DESCRIPTION:**

A continuum  $X$  is said to be chainable if, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists an  $\varepsilon$ -function  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$ ; that is, there exists  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$  continuous and surjective such that  $\text{diam}(f_\varepsilon^{-1}(t)) < \varepsilon$ , for each  $t \in [0, 1]$ . In general, two continua are said to be incomparable if there are no continuous and surjective functions in any direction; that is,  $X$  and  $Y$  are incomparable if there is no continuous and surjective  $f: X \rightarrow Y$  nor does  $g: Y \rightarrow X$  continuous and surjective.

In 1970, in <sup>1</sup>, Professor J. Rogers asked whether it was possible to construct uncountable collection of mutually incomparable chainable continua. A year later, David Bellamy, in his article entitled “*An uncountable collection of chainable continua*,”<sup>2</sup>, built such a family giving an affirmative answer to Rogers’s question. However, Bellamy’s continua are complex examples, where each continuum has infinite arc-components. Thus, Marwan M. Awartani, in the article entitled “*An Uncountable Collection of Mutually Incomparable Chainable Continua*”<sup>3</sup> constructs chainable continua that answer Rogers’s question, each of which is a compaction of the interval  $(0, 1]$  and the residual is homeomorphic to the closed interval  $[0, 1]$ . In this work, we studied Awartani’s article. Additionally, we showed in detail the construction and the tests that show that this family does indeed satisfy the conditions to answer Professor Rogers’s question.

The development of this monograph consists of 3 chapters. A bibliographic review of the intrinsic concepts of the continua is made, we defined the relationships dominate and dominate vertically in the Cantor space. We then showed that concerning these relations, there exists an uncountable collection of mutually incomparable sequences. Finally, we associated each element of the said collection with the ray’s compaction with the arc as a remainder. We demonstrated there exists no continuous and surjective function between any pair of such compactifications. With this, we achieved the main objective of this work.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D en Matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

El tema principal de la presente monografía hace parte de una de las ramas de la topología general, la *Teoría de continuos*. Particularmente, hablaremos de la existencia de una colección no numerable de continuos encadenables que no se pueden comparar usando funciones continuas y sobreyectivas.

La teoría de continuos surge de manera simultánea con el desarrollo de la topología a finales del siglo XIX. Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Los continuos surgieron con los trabajos de George Cantor y se formalizaron a comienzos del siglo XX con trabajos de reconocidos matemáticos como Fréchet, Borel, Hausdorff, Alexandroff y Urysohn.

Dos continuos se dicen incomparables si no existen funciones continuas y sobreyectivas en ninguna dirección; es decir,  $X$  y  $Y$  son incomparables si no existe  $f: X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva, ni tampoco  $g: Y \rightarrow X$  continua y sobreyectiva. Un conocido teorema de la topología general <sup>1</sup>, atribuido a Urysohn, establece que un espacio topológico  $X$  es normal si, y solo si, para cada par de cerrados disjuntos  $A$  y  $B$  de  $X$ , existe una función continua  $f: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(A) \subseteq \{0\}$  y  $f(B) \subseteq \{1\}$ . Así, para cada continuo  $X$  existe una función continua y sobreyectiva  $g: X \rightarrow [0, 1]$ ; es decir  $X$  y  $[0, 1]$  no son incomparables o más precisamente, son comparables mediante funciones continuas. Otro teorema que nos ayuda a determinar cuando existe una función continua y sobreyectiva entre dos continuos es el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz <sup>2</sup> que dice que un continuo es localmente conexo si, y solo si, existe una función continua y sobreyectiva  $f: [0, 1] \rightarrow X$ . Así, dos continuos localmente conexos siempre se pueden “comparar”. En general, un problema interesante es: dados dos espacios topológicos, determinar si existe una función continua y sobreyectiva entre ellos. Este problema fue

---

<sup>1</sup> J. Camargo y E. Villamizar. *Topología General*. Universidad Industrial de Santander, 2018.

<sup>2</sup> S. Nadler. *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1992.

abordado por J. J. Charatonik en su artículo <sup>3</sup>; Charatonik se basa en dos invariantes bajo funciones continuas: el grado de conexidad no local y la conexidad uniforme por arcos, para construir una familia no numerable de abanicos planos ninguno de los cuales es imagen continua del otro.

Un continuo  $X$  se dice encadenable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\varepsilon$ -función  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$ ; esto es, existe  $f_\varepsilon: X \rightarrow [0, 1]$  continua y sobreyectiva tal que  $\text{diam}(f_\varepsilon^{-1}(t)) < \varepsilon$ , para cada  $t \in [0, 1]$ . En 1970, en<sup>1</sup>, el profesor J. Rogers pregunto si era posible construir una familia no numerable de continuos encadenables mutuamente incomparables. Un año más tarde, David Bellamy en su artículo titulado “*An uncountable collection of chainable continua*,”<sup>2</sup>, construyó dicha familia dando respuesta afirmativa a la pregunta de Rogers. Sin embargo, los continuos de Bellamy son ejemplos complejos, donde cada continuo tiene infinitas arco-componentes. Así, Marwan M. Awartani en el artículo titulado “*An Uncountable Collection of Mutually Incomparable Chainable Continua*”<sup>3</sup> construye continuos encadenables que dan respuesta a la pregunta de Rogers, cada uno de los cuales es una compactación del intervalo  $(0, 1]$  y el residuo es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

En este trabajo estudiamos el artículo de Awartani y mostramos con detalle la construcción y las pruebas que muestran que efectivamente esta familia satisface las condiciones para dar respuesta a la pregunta del profesor Rogers.

El desarrollo de esta monografía consta de 3 capítulos. En el capítulo 1 se hace una revisión bibliográfica de los conceptos intrínsecos de los continuos, como son: los espacios métricos, espacios compactos y localmente compactos junto con sus características, espacios conexos, localmente conexos, arcoconexos y conexos por caminos. Mostramos que los anteriores conceptos se conservan bajo funciones continuas y abiertas. Presentamos las definiciones de compactaciones, continuos, continuos encadenables y continuos incomparables. En el capítulo 2 definimos las relaciones do-

---

<sup>3</sup> J. Charatonik. “Two invariants under continuity and the incomparability of fans”. En: *Fundamenta Mathematicae* 2(53) (1964), págs. 187-204.

minar y dominar verticalmente en el espacio de Cantor. Luego demostramos que con respecto a estas relaciones existe una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables. Finalmente, en el Capítulo 3 asociamos cada elemento de dicha colección con una compactación del rayo con el arco como resto y demostramos que no existe una función continua y sobreyectiva entre cualquier par de tales compactaciones. Con esto completamos el objetivo principal de este trabajo.

Como sabemos y veremos en el desarrollo de este trabajo, existen propiedades topológicas que se preservan mediante funciones continuas. Sin embargo, existen familias de espacios muy similares, muy simples, que comparten cualquier propiedad que podamos imaginar, pero que no se pueden comparar usando funciones continuas. En esta monografía queremos mostrar con detalle la familia de continuos que hoy se conocen como *Continuos de Awartani*.

## 1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es recordar conceptos de topología general, y agregar otros que serán utilizados en el desarrollo de esta monografía. Se omitirán algunas demostraciones y conceptos básicos. El lector interesado puede profundizar en textos de topología general y teoría de continuos.

**Definición 1.1.** Dado un conjunto  $X$ , decimos que  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  es una *topología* para  $X$  si cumple las siguientes propiedades:

- i  $\emptyset, X \in \tau$ .
- ii  $A, B \in \tau$ , entonces  $A \cap B \in \tau$ .
- iii La unión de cualquier familia de elementos en  $\tau$  pertenece a  $\tau$ .

Los elementos de  $\tau$  son llamados conjuntos abiertos y la pareja  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, donde  $\tau$  es la topología sobre el conjunto  $X$ .

Sea  $(X, d)$  es un espacio métrico. Un conjunto  $U \subseteq X$  se dice *abierto* si para cada  $x \in U$  existe  $r > 0$  tal que  $B_d(x; r) \subseteq U$ . Si  $\tau_d = \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto}\}$ , entonces  $\tau_d$  es una topología sobre  $X$ . En este trabajo estudiaremos espacios topológicos cuyas topologías son dadas por una métrica. En particular,  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclidiana dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

para cualesquiera  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , es el espacio topológico donde desarrollamos la mayor parte de este trabajo.

Las demostraciones presentadas en este capítulo se pueden consultar en libros básicos de topología general (ver por ejemplo Camargo y Villamizar, *Topología General*).

### 1.1. NOCIONES BÁSICAS

Empezamos esta sección estudiando la compacidad en un espacio topológico. La compacidad es uno de los conceptos más relevantes en topología debido a ser tras-

versal a varias ramas de la matemática.

El objetivo de esta sección es caracterizar los espacios compactos y mostrar bajo qué condiciones se puede compactar un espacio topológico; adicionalmente mostraremos cuándo un espacio topológico es conexo y con estas dos definiciones podremos avanzar a la definición de continuo. Para definir espacio compacto primero debemos introducir la siguiente definición.

**Definición 1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una *cubierta abierta* de  $X$  es una colección de conjuntos abiertos de  $X$ ,  $\{U_i \mid i \in I\}$ , tal que  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Además, si  $J \subseteq I$  y  $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ , diremos que  $\{U_j \mid j \in J\}$  es una *subcubierta* de  $\{U_i \mid i \in I\}$ .

**Definición 1.3.** Un espacio topológico  $X$  se dice *compacto*, si toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta finita.

Cualquier espacio topológico finito o el intervalo cerrado  $[0, 1]$  son ejemplos de espacios compactos.

A continuación mostramos que la compacidad se preserva bajo funciones continuas.

**Teorema 1.4.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $X$  es compacto, entonces  $Y$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $\{V_i \mid i \in I\}$  una cubierta abierta de  $Y$ . Como  $f$  es continua,  $\{f^{-1}(V_i) \mid i \in I\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Entonces, existe  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  tal que  $X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(V_{i_j})$ , pues  $X$  es compacto. Luego por ser  $f$  sobreyectiva,  $Y = \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$ . Así,  $Y$  es compacto.  $\square$

Otro resultado de gran importancia que además nos permite determinar ejemplos de compactos es el siguiente. Una prueba se puede consultar en Camargo y Villamizar, *Topología General*, Teorema 6.16.

**Teorema 1.5.** Sea  $\{X_i \mid i \in I\}$  una familia de espacios topológicos. Entonces,  $\prod_{i \in I} X_i$  es compacto si, y solo si,  $X_i$  es compacto para cada  $i \in I$ .

La siguiente proposición muestra algunas propiedades adicionales relacionadas con la compacidad.

**Proposición 1.6.** Dado un espacio topológico  $X$ , vale lo siguiente:

- i Si  $X$  es un espacio de *Hausdorff* y  $K \subset X$  es *compacto*, entonces  $K$  es *cerrado* en  $X$ .
- ii Si  $X$  es un espacio *compacto* y  $K \subset X$  es *cerrado*, entonces  $K$  es *compacto*.

*Demostración.*

- i Sea  $x \in X \setminus K$ . Para cada  $y \in K$  existen  $U_y$  y  $V_y$  vecindades abiertas de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tales que  $V_y \cap U_y = \emptyset$ . Por hipótesis,  $K$  es compacto. Entonces  $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ , con  $x_i \in K$ . Luego  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_{x_i} \subset X \setminus K$ .
- ii Sea  $C$  una colección de subconjuntos abiertos de  $X$  tal que  $K \subset \bigcup C$ . La colección  $C \cup \{X \setminus K\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Por hipótesis,  $X$  es compacto. Luego, existe una subcubierta finita  $C'$ . Así,  $C' \setminus \{X \setminus K\}$  es una subcubierta finita de  $C$  que cubre a  $K$ .

□

La siguiente proposición muestra una caracterización de la compacidad usando sucesiones.

**Proposición 1.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i  $X$  es compacto.
- ii Todo subconjunto infinito de  $X$  tiene al menos un punto de acumulación.
- iii Toda sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente.

**Observación 1.8.** Note que todo espacio métrico compacto es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente. Dado que todo espacio métrico es de *Hausdorff*, se tiene que si un conjunto  $K$  de  $X$  es compacto, entonces también es cerrado y acotado.

Un análisis de compacidad local en un espacio topológico se evidencia en la siguiente definición.

**Definición 1.9.** Un espacio topológico  $X$  es *localmente compacto*, si cada  $x \in X$ , admite una base de vecindades compactas, es decir, si  $V$  es un abierto tal que  $x \in V$  existe un compacto  $W$ , tal que  $x \in W^\circ \subseteq W \subseteq V$ .

Al igual que los espacios compactos, los espacios localmente compactos son invariantes bajo funciones continuas y abiertas.

**Proposición 1.10.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  abierta y sobreyectiva. Si  $X$  es localmente compacto, entonces  $Y$  es localmente compacto.

*Demostración.* Sean  $y \in Y$  y  $V$  un abierto de  $Y$  tal que  $y \in V$ . Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Ahora, como  $X$  es localmente compacto y  $f$  es continua, tenemos que existe una vecindad compacta  $K$  de  $x$  tal que  $f(K) \subseteq V$ . Ahora,  $f(K)$  es una vecindad compacta de  $y$ , pues  $f$  es abierta. Así,  $Y$  es localmente compacto.  $\square$

**Observación 1.11.** Ser un espacio compacto y de Hausdorff es muy valioso topológicamente hablando, pues como consecuencia se tiene que también se es normal y localmente compacto Camargo y Villamizar, *Topología General*, Proposición 6.43.

Luego de ver la riqueza de los espacios compactos de Hausdorff es interesante tomar espacios con características especial que no son compactos y transformarlos en compactos de Hausdorff. A la transformación mencionada anteriormente se le conoce como compactación.

**Definición 1.12.** Una *compactación* de un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff  $(X, \tau)$ , es un par ordenado  $((X', \tau'), f)$  con las siguientes propiedades:

- i  $(X', \tau')$  es un espacio compacto de Hausdorff.
- ii  $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$  es un encaje; es decir,  $f$  es una función continua inyectiva tal que  $f: X \rightarrow f(X)$  es un homeomorfismo.
- iii  $f(X)$  es denso en  $X'$ ; es decir,  $\overline{f(X)} = X'$ .

A continuación definimos los espacio topológicos conexos.

**Definición 1.13.** Un espacio topológico  $X$  es llamado *disconexo*, si existen abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $X = V \cup U$  y  $V \cap U = \emptyset$ . En caso contrario, se dice que  $X$  es conexo. Además, un subconjunto de un espacio topológico es conexo, si lo es con la topología de subespacio.

Un espacio con un único punto, o cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$  son ejemplos de espacios conexos. A continuación mostraremos algunos resultados que nos permitirán construir más ejemplos.

La demostración de la siguiente proposición es sencilla, se sigue directamente de las definiciones.

**Proposición 1.14.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i  $X$  es conexo.*

*ii Los únicos subconjuntos de  $X$  que son simultáneamente abiertos y cerrados son  $X$  y  $\emptyset$ .*

*iii Toda función continua de  $X$  en un espacio discreto  $Y$  es constante.*

La conexidad, al igual que la compacidad, se conserva bajo funciones continuas.

**Proposición 1.15.** *Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua y si  $A$  es un subconjunto conexo de  $X$ , entonces  $f(A)$  es un subconjunto conexo de  $Y$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f(A)$  no es conexo. Por la Proposición 1.14, existe una función continua no constante  $g: f(A) \rightarrow Z$ , donde  $Z$  es discreto. Así,  $g \circ f: A \rightarrow Z$  es continua y no es constante. Luego, nuevamente por la Proposición 1.14,  $A$  no es conexo. Con esto concluimos nuestra demostración.  $\square$

De la Proposición 1.15, tenemos en particular que  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  es conexo, pues si definimos  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  por  $f(t) = e^{2\pi it}$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces  $f$  es continua y sobreyectiva.

Otra proposición importante relacionada con los conexos es la siguiente.

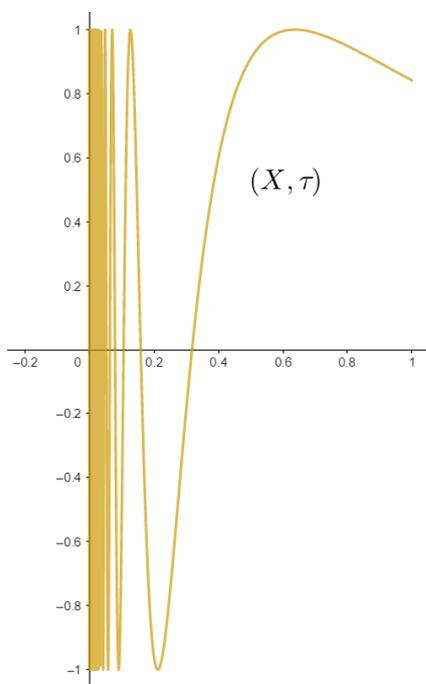
**Proposición 1.16.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $Z \subseteq X$ . Si  $Z$  es conexo, entonces  $\text{cl}_X(Z)$  también es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $\text{cl}_X(Z) = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son cerrados tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Como  $Z$  es un subconjunto conexo de  $\text{cl}_X(Z)$ , tenemos que  $Z \subset A$  o  $Z \subset B$ . Supongamos que  $Z \subset A$ . Como  $A$  es cerrado,  $\text{cl}_X(Z) \subset A$ . Así,  $B = \emptyset$ . De lo anterior,  $\text{cl}_X(Z)$  es conexo.  $\square$

A continuación mostramos un ejemplo de un espacio conexo que usaremos constantemente en este trabajo.

**Ejemplo 1.17.** Sea  $X = \text{cl}_{\mathbb{R}^2} (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(\frac{1}{x}) \text{ y } x \in (0, 1]\})$  (ver la Figura 1.1). Nótese que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(\frac{1}{x}) \text{ y } x \in (0, 1]\}$  es homeomorfo al espacio conexo  $(0, 1]$ . Así, por la Proposición 1.16,  $X$  es conexo. Además, consideramos importante resaltar que  $X$  es una compactación de  $(0, 1]$ . Este espacio se conoce como la curva senoidal del topólogo.

Figura 1. Curva senoidal del topólogo



**Definición 1.18.** Un espacio  $X$  se dice *arcoconexo* si para cada par de puntos  $x, y \in X$  existe un homeomorfismo  $f: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

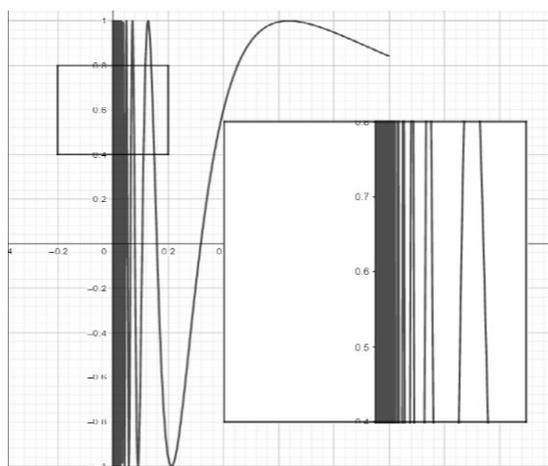
La arcoconexidad es invariante bajo funciones continuas entre espacios métricos. Esto es, si  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua y sobreyectiva, donde  $X$  y  $Y$  son espacios métricos, y  $X$  es arcoconexo, entonces  $Y$  es arcoconexo. Una prueba de esto se puede ver en Camargo y Villamizar, *Topología General*, Teorema 7.35.

**Definición 1.19.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Diremos que  $X$  es *localmente conexo* en  $x$  si para cada abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V$ , existe un abierto conexo  $U$  tal que  $x \in U \subseteq V$ . Diremos que  $X$  es localmente conexo si lo es para cada  $x \in X$ .

## 1.2. CONTINUOS

La teoría de continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos, conocidos como espacios continuos o simplemente continuos. En este estudio centramos nuestro interés en los continuos que son resultado de la compactación del rayo con el arco como resto. Donde el rayo y el arco son espacios homeomorfos al intervalo  $(0, 1]$  y al intervalo  $[0, 1]$  respectivamente. La curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 1.17, es un ejemplo de este tipo de compactaciones, que además representamos nuevamente en la siguiente figura:

Figura 2. Una compactación del rayo



Si  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } x \in (0, 1]\}$ , la curva senoidal del topólogo  $X = W \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ . El conjunto  $W$  es abierto,  $X$  no es localmente conexo en ningún punto de  $\{0\} \times [-1, 1]$  y  $X$  no es arcoconexo.

La siguiente es una definición que distingue una familia de continuos llamada continuos encadenables. La siguiente definición la tomamos de Camargo y Villamizar, *Topología General*, Definición 10.52.

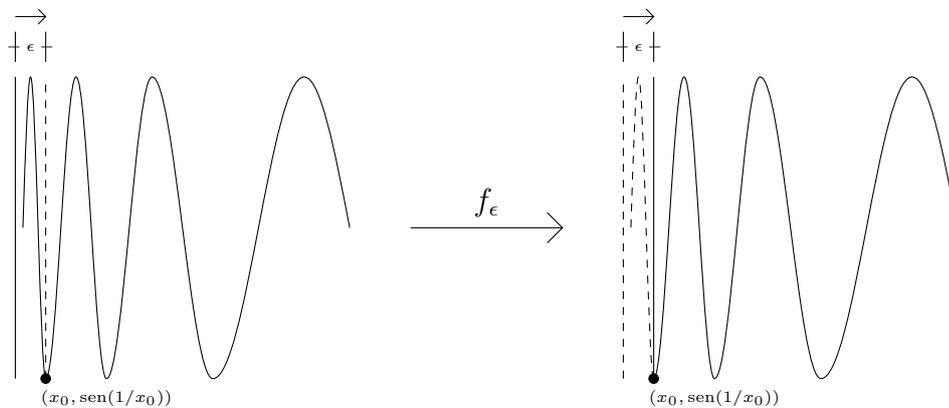
**Definición 1.20.** Sean  $f: Z \rightarrow Y$  una función continua entre espacios métricos y  $\epsilon > 0$ . Diremos que  $f$  es una  $\epsilon$ -función, si para cada  $y \in Y$ ,  $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \epsilon$ . Un continuo  $X$  se dice *encadenable* si para todo  $\epsilon > 0$ , existe una  $\epsilon$ -función  $f_\epsilon: X \rightarrow [0, 1]$ . Además, diremos que  $X$  es *circularmente encadenable* si para todo  $\epsilon > 0$ , existe una  $\epsilon$ -función  $f_\epsilon: X \rightarrow S^1$ .

**Observación 1.21.** Nótese que un continuo  $X$  es un encadenable si para cada  $\epsilon > 0$  existen un arco  $I$  y una  $\epsilon$ -función de  $X$  en  $I$  y si es encadenable circularmente, entonces es un espacio topológico arcoconexo.

**Ejemplo 1.22.** La curva del topólogo  $W = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(\frac{1}{x}) \text{ y } x \in (0, 1]\})$  es un continuo encadenable. Sean  $\epsilon > 0$  y  $x_0 > 0$  tales que  $\text{sen}(1/x_0) = -1$  y  $|x_0| < \epsilon$ , y  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \text{sen}(\frac{1}{x}) \text{ y } x \in [x_0, 1]\} \cup (\{x_0\} \times [-1, 1])$ . Observe que  $J$  es un arco (ver la figura a continuación). Sea  $f_\epsilon: W \rightarrow J$  definida para cada  $(x, y) \in W$ , por

$$f_\epsilon((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } x \geq x_0; \\ (x_0, y), & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

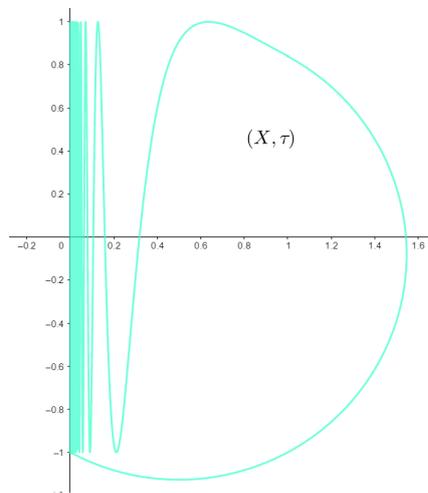
Nótese que  $f_\epsilon$  es una  $\epsilon$ -función. Así,  $W$  es encadenable.



**Ejemplo 1.23.** Una modificación de la curva del topólogo nos da como resultado un

continuo circularmente encadenable.

Figura 3. Curva del topólogo modificada

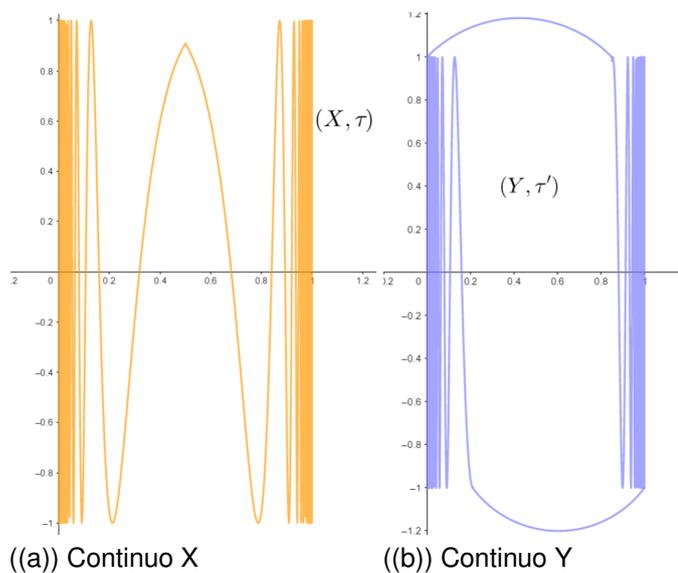


Note que solo se agrego un arco a la curva del topólogo que parte del punto  $(0, -1)$  y llega a  $\text{sen}(1)$ .

**Definición 1.24.** Dos continuos se dicen *incomparables* si no existen funciones continuas y sobreyectivas en ninguna dirección; es decir,  $X$  y  $Y$  son incomparables si no existen  $f: X \rightarrow Y$  ni  $g: Y \rightarrow X$  continuas y sobreyectivas.

**Ejemplo 1.25.** Los siguientes son dos continuos incomparables:

Figura 4. Continuos



Veamos que no existen funciones continuas y sobreyectivas entre  $X$  y  $Y$ . Escribamos  $X = \overline{X_0} = X_0 \cup I \cup I_0$ , donde  $X_0$  es la arco-componente densa y  $I$  y  $I_0$  son arcos; y  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , donde  $Y_1$  y  $Y_2$  son las arco-componentes de  $Y$ .

Suponga que existen  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  continuas y sobreyectivas.

- i Dado que  $\overline{X_0} = X$ , tenemos  $\overline{f(X_0)} = Y$ . Además,  $X_0$  es arcoconexo. Así,  $f(X_0)$  es arco conexo y denso, lo cual es absurdo pues  $Y_1$  y  $Y_2$  son no densos.
- ii Nótese que  $X = g(Y_1) \cup g(Y_2)$ . Además,  $g(Y_1)$  y  $g(Y_2)$  son arco-conexos, entonces  $g$  no puede ser sobreyectiva debido a que  $X$  tiene 3 arco-componentes.

Luego no existe tales  $f$  y  $g$  continuas y sobreyectivas.

**Observación 1.26.** *Si existe una función continua y sobreyectiva de un continuo  $X$  a un continuo  $Y$ , entonces se puede asegurar que  $Y$  contiene menos o igual número de arco-componentes que  $X$ .*

Otro ejemplo de continuos no comparables bajo funciones continuas es la colección no numerable de abanicos construida por J. J. Charatonik en Charatonik, "Two invariants under continuity and the incomparability of fans", donde un abanico es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente con exactamente un punto de ramificación (es decir, con solo un punto, que es la parte común de tres arcos disjuntos). En <sup>4</sup> se pueden encontrar mas detalles de esta familia de continuos.

Para el desarrollo de nuestra monografía se hace necesario el estudio de límites de subconjuntos de un espacio topológico. En consecuencia definiremos L-convergencia utilizando las dos nociones mencionadas en la siguiente definición.

**Definición 1.27.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\{A_i\}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Definimos el *límite inferior* de  $\{A_i\}$  denotado como  $\liminf\{A_i\}$  y el *límite*

---

<sup>4</sup> S. Macias. "Fans whose hyperspaces are cones". En: *Topology Proc* 27 (2003), págs. 217-222.

*superior* de  $\{A_i\}$  denotado como  $\limsup\{A_i\}$ , como sigue:

$$\liminf\{A_i\} = \{x \in X : \text{para cada } U \in \tau \text{ con } x \in U, \\ \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \geq N\}.$$

$$\limsup\{A_i\} = \{x \in X : \text{para cada } U \in \tau \text{ con } x \in U, \\ U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para un número infinito de índices}\}.$$

**Definición 1.28.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\{A_i\}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ , y  $A \subseteq X$ . Decimos que  $\{A_i\}$  es *L-convergente* en  $X$  a  $A$ , y denotamos por  $\lim\{A_i\} = A$  siempre que  $\liminf\{A_i\} = A = \limsup\{A_i\}$ .

## 2. SUCESIONES DEL ESPACIO DE CANTOR

El presente capítulo tiene como objetivo construir una colección no numerable de sucesiones del conjunto de Cantor que son mutuamente incomparables. Dicha construcción se hará a partir de dos relaciones que definimos en este capítulo y serán fundamentales para el desarrollo de los objetivos de este trabajo.

En los capítulos subsiguientes, como es usual,  $\mathbb{N}$  denotará el conjunto de los enteros no negativos; esto es,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Las sucesiones las denotaremos por  $\{x_i\}$ . Dos conjuntos en  $\mathbb{N}$  son casi disjuntos si su intersección es finita.

Las definiciones y resultados presentados en este capítulo las tomamos de Awartani, “An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua”.

### 2.1. SUCESIONES DEL CONJUNTO DE CANTOR

Empezamos esta sección definiendo el espacio de Cantor donde introducimos las relaciones que estudiamos en este capítulo.

**Definición 2.1.** El *espacio de Cantor* es el espacio producto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , donde  $0, 1$  tiene la topología discreta. Este espacio lo denotaremos por  $2^{\mathbb{N}}$ ; es decir, el espacio de Cantor es el espacio de sucesiones de ceros y unos,

$$2^{\mathbb{N}} = \{\{x_i\} \mid x_i \in \{0, 1\}\}.$$

A continuación definimos dos relaciones entre sucesiones, dominar y dominar verticalmente; posteriormente las utilizaremos para decidir cuando dos sucesiones son o no comparables.

**Definición 2.2.** Sean  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  en  $2^{\mathbb{N}}$ . Diremos que:

1.  $\{a_i\}$  *domina verticalmente* a  $\{b_i\}$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b_i \leq a_i$ , para todo  $i > n$ .
2.  $\{a_i\}$  *domina* a  $\{b_i\}$  si existen  $j_0 \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $b_{i+j_0} \leq a_i$ , para todo  $i > n$ .

3.  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  se dicen *incomparables* si no se dominan entre sí.

**Observación 2.3.** Si  $\{a_i\}$  domina verticalmente a  $\{b_i\}$ , entonces  $\{a_i\}$  domina a  $\{b_i\}$ . Para ver esto, basta tomar  $j = 0$  en la Definición 2.2.

El siguiente lema muestra una forma de construir dos sucesiones que se dominan entre si, pero no verticalmente. La demostración es directa de la definición. Diremos que una sucesión  $\{x_i\}$  en  $2^{\mathbb{N}}$  es eventualmente constante si existe  $n_0$  tal que  $x_i = x_{n_0}$  para todo  $i \geq n_0$ .

**Lema 2.4.** Sea  $\{a_i\}$  un punto en  $2^{\mathbb{N}}$  tal que  $\{a_i\}$  no es eventualmente constante. Si  $\{b_i\}$  es definida tal que  $b_i = a_{i+1}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  no se dominan verticalmente entre sí, pero  $\{a_i\}$  domina a  $\{b_i\}$  para un entero  $j_0 = 1$ .

**Notación 2.5.** Dado  $\{a_n\} \in 2^{\mathbb{N}}$ , el elemento  $a_i$  para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$  será denotado como  $1_i$  o  $0_i$  según el valor de  $a_i$ .

Siguiendo el Lema 2.4 se pueden construir las siguientes dos sucesiones que no se dominan verticalmente pero sí se dominan. Basta tomar  $j_0 = 1$  para que  $\{a_i\}$  domine a  $\{b_i\}$ , donde:

$$\begin{aligned} \{a_i\} &= 1_1, 0_2, 1_3, 0_4, 1_5, 0_6, 1_7, 0_8, 1_9, 0_{10}, 1_{11}, 0_{12}, 1_{13}, \dots \text{ y} \\ \{b_i\} &= 0_1, 1_2, 0_3, 1_4, 0_5, 1_6, 0_7, 1_8, 0_9, 1_{10}, 0_{11}, 1_{12}, 0_{13}, \dots \end{aligned}$$

Con la siguiente construcción mostramos un criterio para decidir si una sucesión domina a otra. Note que  $\{a_{2^i}\}$  es la subsucesión de  $\{a_i\}$  formada por todos sus ceros. Ahora, si  $\{c_i\}$  es una sucesión tal que existen  $j_0 \in \mathbb{Z}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $c_{2^i+j_0} = 0$  para todo  $i \geq n_0$ , entonces  $\{a_i\}$  domina a  $\{c_i\}$ . Por ejemplo, si definimos

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 2^n, \text{ para algún } n; \\ 0, & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

entonces  $\{a_i\}$  domina a  $\{c_i\}$ , pues  $c_{2^i+1} = 0$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . El proceso descrito anteriormente se resume en el siguiente lema.

**Lema 2.6.** Sean  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  en  $2^{\mathbb{N}}$ . Si  $\{a_{i_j}\}$  es una cola de ceros de  $\{a_i\}$ , y si para un entero  $j_0$ , la subsucesión  $\{b_{i_j+j_0}\}$  se hace cero a partir de algún  $N \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{a_i\}$  domina a  $\{b_i\}$ .

*Demostración.* Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{i_j+j_0} = 0$  para cada  $j \geq N$ . Note que  $a_l = 1$  si  $l \geq i_N$  y  $l \notin \{i_j : j \in \mathbb{N}\}$ . Así,  $b_{l+j_0} \leq a_l$ , para cada  $l \geq i_N$ . De lo anterior,  $\{a_i\}$  domina a  $\{b_i\}$ .  $\square$

Las definiciones de dominar y dominar verticalmente junto con el ítem 3 de la Definición 2.2 son el criterio que usaremos en la siguiente sección, para construir una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables.

## 2.2. UNA COLECCIÓN NO NUMERABLE DE SUCESIONES DEL CONJUNTO DE CANTOR

Para construir una colección no numerable de sucesiones del conjunto de Cantor partimos del ítem 1 de la Definición 2.2 para crear una colección no numerable de sucesiones que no se dominan verticalmente entre sí: posteriormente hacemos una transformación a cada elemento de dicha colección para que no se dominen mutuamente y de esta manera obtenemos el resultado esperado.

La siguiente proposición la utilizaremos para probar un lema que garantiza la existencia de una colección no numerable de sucesiones de Cantor que no se dominan verticalmente. Como es usual, en adelante denotaremos el conjunto de partes de  $\mathbb{N}$  por  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Proposición 2.7.** Existe una colección no numerable en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  de conjuntos infinitos casi disjuntos entre sí. Esto es, existe

$$\mathcal{L} = \{A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A_i \text{ es infinito, para cada } i \in I\},$$

tal que  $|\mathbb{N}| < |I|$  y  $A_j \cap A_i$  es finito, siempre que  $i, j \in I, i \neq j$ .

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  una función biyectiva. Para cualquier  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , fijamos

una sucesión  $\{x_i\} \subseteq \mathbb{Q}$  tal que  $\{x_i\}$  converge a  $x$ . Sea

$$\mathcal{L} = \{A_x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

donde  $A_x = \{\phi(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ . Es claro que  $\mathcal{L}$  es un conjunto no numerable. Veamos que los elementos de  $\mathcal{L}$  son casi disjuntos. Sean  $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $\{x_i\}$  y  $\{x'_i\}$  las sucesiones en  $\mathbb{Q}$ , tales que  $\{x_i\}$  converge a  $x$  y  $\{x'_i\}$  converge a  $x'$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap (x' - \epsilon, x' + \epsilon) = \emptyset$ . Así, existen  $n, n' \in \mathbb{N}$  tales que  $x_i \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$  para todo  $i \geq n$  y  $x'_i \in (x' - \epsilon, x' + \epsilon)$  para todo  $i \geq n'$ . Luego,  $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cap \{x'_i : i \in \mathbb{N}\}$  es finito. De lo anterior,  $A_x \cap A_{x'}$  es finito y terminamos nuestra demostración.  $\square$

**Lema 2.8.** *El conjunto de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$  contiene una cantidad no numerable de elementos que no se dominan verticalmente dos a dos.*

*Demostración.* Definimos la función  $F: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , para cada  $\alpha = \{\alpha_i\} \in 2^{\mathbb{N}}$ , como:

$$F(\alpha) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i = 1\}.$$

La función  $F$  es claramente una biyección. Ahora basta tomar la colección  $F^{-1}(\mathcal{L})$ , donde  $\mathcal{L}$  es la familia definida en la prueba de la Proposición 2.7, donde claramente cada par de sus elementos no se dominan verticalmente.  $\square$

El siguiente lema muestra la existencia de una colección no numerable de sucesiones que no se dominan entre sí. Su demostración es constructiva, puesto que parte de la colección creada anteriormente y transformando cada elemento se llega al resultado esperado.

**Lema 2.9.** *El conjunto de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$  contiene una colección no numerable de sucesiones que no se dominan entre sí.*

*Demostración.* Para cada  $\alpha = \{\alpha_i\}$  en la colección descrita en el Lema 2.8 defina la

sucesión  $\{a_i^\alpha\}$  como sigue:

$$a_i^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq 2^j \text{ ó } i \neq 2^j + 1; \\ 1, & \text{si } i = 2^j; \\ \alpha_j, & \text{si } i = 2^j + 1. \end{cases}$$

Veremos que si  $\{a_i^\alpha\}$  domina  $\{a_i^\beta\}$ , entonces  $\alpha$  domina verticalmente a  $\beta$ , lo cual es absurdo por la naturaleza de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Tomemos las siguientes dos sucesiones de la colección descrita en el Lema 2.8.

$$\{\alpha_i\} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$$

y

$$\{\beta_i\} = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$$

Luego de aplicar el algoritmo descrito anteriormente obtenemos

$$\{a_i^\alpha\} = 0_1, 1_2, \alpha_1, 1_4, \alpha_2, 0_6, 0_7, 1_8, \alpha_3, 0_{10}, 0_{11}, 0_{12}, \dots$$

y

$$\{a_i^\beta\} = 0_1, 1_2, \beta_1, 1_4, \beta_2, 0_6, 0_7, 1_8, \beta_3, 0_{10}, 0_{11}, 0_{12}, \dots$$

Veamos que  $\{a_i^\alpha\}$  no puede dominar a  $\{a_i^\beta\}$ . Supongamos que  $\{a_i^\alpha\}$  domina a  $\{a_i^\beta\}$ , esto significa que existe un  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $a_{i+j_0}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i > n$ .

Para el caso  $j_0 = 0$  es evidente que  $\{\alpha_i\}$  domina verticalmente a  $\{\beta_i\}$ , lo cual es un absurdo por la naturaleza de las sucesiones tomadas.

Veamos que para  $j_0 \neq 0$  no es posible que  $\{a_n^\alpha\}$  domine a  $\{a_n^\beta\}$ . Suponga que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{i+j_0}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i > n$ .

i Si  $j_0 = 1$ , se tiene que  $a_{i+1}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ , con  $i > n$ . Tome  $\hat{i} > n$ , con  $\hat{i} = 2^{k_0}$ , y  $k_0 > 2$  en  $\mathbb{N}$ . Tenemos  $a_{\hat{i}-1}^\alpha = 0$ , y  $a_{\hat{i}}^\beta = 1$  por lo tanto  $a_{\hat{i}-1}^\alpha \leq a_{\hat{i}}^\beta$  lo que es

absurdo.

- ii Si  $j_0 = -1$ , Tenemos que  $a_{i-1}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ , con  $i > n$ . Note que  $a_i^\alpha = \alpha_k$ , y  $a_{i-1}^\beta = 1$  para todo  $i = 2^k + 1$  y  $k$  en  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Para todo  $\hat{i} \geq i$ , con  $\hat{i} = 2^{k_0} + 1$  se tiene que  $a_{\hat{i}-1}^\beta \leq \alpha_{k_0}$ , esto es, para todo  $j > k_0$ ,  $\alpha_j = 1$ . Esto último es absurdo por como se escogió la sucesión.
- iii Si  $j_0 > 1$ , entonces  $a_{i+j_0}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ , con  $i > n$ . Sea  $k_0$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $2^{k_0} > 2j_0$ . Por construcción  $a_{2^{k_0+1}-j_0}^\alpha = 0$  y  $a_{2^{k_0+1}}^\beta = 1$ , Así,  $a_{2^{k_0+1}-j_0}^\alpha \leq a_{2^{k_0+1}}^\beta$ , para todo  $k \geq k_0$ , un absurdo.
- iv Si  $j_0 < -1$ , se tiene que  $a_{i-j_0}^\beta \leq a_i^\alpha$  para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ , con  $i > n$ . Sea  $k_0$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $2^{k_0} > 2j_0$ . Por construcción  $a_{2^{k_0}+j_0}^\alpha = 0$  y  $a_{2^{k_0}}^\beta = 1$ . Luego  $a_{2^{k_0}+j_0}^\alpha \leq a_{2^{k_0}}^\beta$  para todo  $k \geq k_0$  y esto es absurdo.

□

### 3. CONSTRUCCIÓN DE LOS CONTINUOS DE AWARTANI

En el capítulo anterior definimos las relaciones dominar y dominar verticalmente en el espacio de Cantor. Luego demostramos que con respecto a estas relaciones existe una colección no numerable de sucesiones mutuamente incomparables.

En el presente capítulo asociamos cada elemento de dicha colección con una compactación del rayo con el arco como resto. Finalmente, probamos que si existe una función continua y sobreyectiva entre un par de tales compactaciones, entonces las sucesiones asociadas son comparables.

**Notación 3.1.** *A lo largo de esta monografía, si  $f: (0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una función continua, entonces los puntos de la gráfica de  $f$  son ordenados por la primera coordenada. Además si  $a$  y  $b$  son dos puntos en la gráfica, entonces  $(a, b)$  y  $[a, b]$  denotan respectivamente, la porción abierta y cerrada del gráfico entre  $a$  y  $b$ ; esto es:*

$$(a, b) = \{(x, f(x)) : a < x < b\} \quad \text{y} \quad [a, b] = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}.$$

*Si  $A$  es un subarco de la gráfica, entonces  $d(A)$  denota la longitud de  $A$  medida a lo largo de la gráfica. También  $\pi_1$  y  $\pi_2$  denotan la proyección estándar sobre la primera y segunda coordenada respectivamente.*

Las definiciones y resultados presentados en este capítulo las tomamos de Awartani, “An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua”.

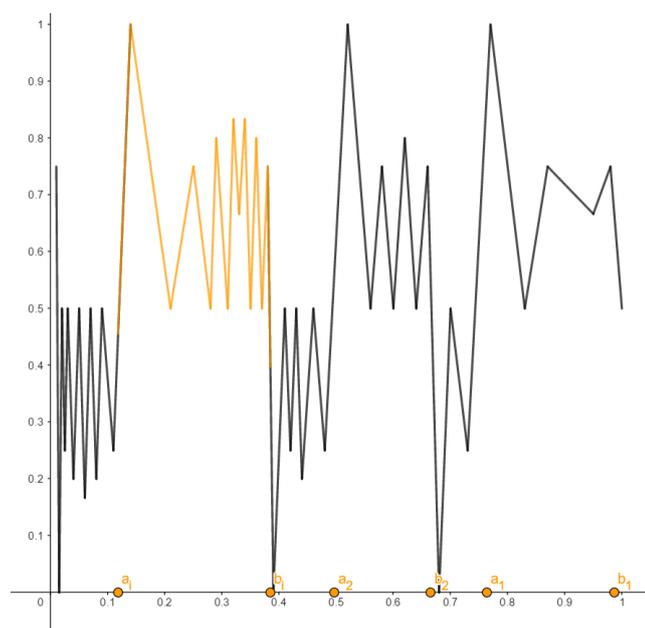
#### 3.1. CONSTRUCCIÓN DEL RAYO $J_\alpha$

En esta sección a cada  $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$  asociamos una compactación  $E_\alpha$  del rayo  $J_\alpha$  con el arco  $I_\alpha$  como resto. El conjunto  $J_\alpha$  es homeomorfo a  $(0, 1]$  y  $I_\alpha = \{0\} \times [0, 1]$  para cualquier  $\alpha$  en el conjunto de Cantor. Es decir, construimos una compactación en función de  $\alpha$ . El arco  $I_\alpha$  es invariante bajo cualquier  $\alpha$ , por otra parte,  $J_\alpha$  esta en función de cada uno de los elementos de  $\alpha$ .

Es necesario hacer una partición del arco  $[0, 1)$  para luego construir el rayo  $J_\alpha$ . Tomemos dos sucesiones estrictamente decrecientes  $\{a_i\}$  y  $\{b_i\}$  que convergen a 0, tales que  $1 > b_1 > a_1 > b_2 > a_2 > b_3 > a_3 > \dots > b_i > a_i \dots$ . Con estas sucesiones particionamos el intervalo cerrado  $[0, 1]$  como mostramos a continuación.

El siguiente es un bosquejo que muestra la porción  $[a_i, b_i]$  del rayo  $J_\alpha$ .

Figura 5. Rayo  $J_\alpha$



Para cada  $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$  definimos las siguientes características:

- i  $J_\alpha$  es el gráfico de una función lineal por partes de  $(0, 1]$  a  $[0, 1]$ .
- ii El punto  $(1, \frac{1}{2}) \in J_\alpha$ .

Hacemos la construcción de  $J_\alpha$  en dos pasos:

- Paso 1. Para la porción cerrada  $[a_i, b_i] \in J_\alpha$  intervienen los dos posibles valores de  $\alpha_i$ , siendo estos  $\alpha_i = 0$  y  $\alpha_i = 1$ .
- Paso 2. Para la porción cerrada  $[b_{i+1}, a_i]$  el comportamiento está en función de  $i$  y es invariante para cualquier valor de  $\alpha_i \in \alpha$ .

**Notación 3.2.**  $m_\alpha$  y  $M_\alpha$  denotan respectivamente el conjunto de mínimos y máximos locales de  $J_\alpha$  y  $V_\alpha = m_\alpha \cup M_\alpha$ . Los intervalos en la familia  $\{[a_i, b_i] : i \in \mathbb{N}\}$  son disjuntos dos a dos.

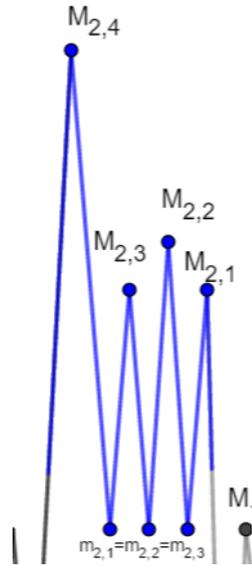
**3.1.1. Construcción** Vamos a mostrar el algoritmo que seguimos para construir  $J_\alpha$ .

En cada paso de la construcción denotamos con  $\alpha = \{x_i\}$ , donde  $\{x_i\} = 1_1, 0_2, 1_3, 0_4, 0_5, 1_6, \dots$

Paso 1. 1. Si  $\alpha_i = 0$ , entonces  $[a_i, b_i] \cap V_\alpha$  tiene las siguientes propiedades:

- i  $|[a_i, b_i] \cap M_\alpha| = 2i$  y  $|[a_i, b_i] \cap m_\alpha| = 2i - 1$ .
- ii si  $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$  es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto  $[a_i, b_i] \cap M_\alpha$ , entonces:
  - a.  $\pi_2(M_{i,2i}) = 1$ .
  - b.  $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i-j}) = \frac{(j+2)}{(j+3)} \quad \forall j, 1 \leq j \leq i$ .
  - c.  $\pi_2([a_i, b_i], m_\alpha) = \frac{1}{2}$ .

Figura 6. Rayo  $J_\alpha$  cuando  $\alpha_i = 0$

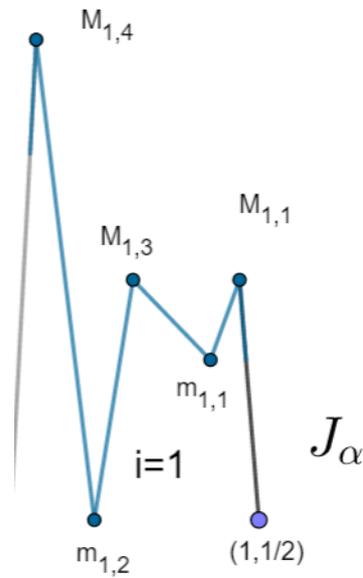


2. Si  $\alpha_i = 1$ , entonces  $[a_i, b_i] \cap V_\alpha$  tiene las siguientes propiedades:

- i  $|[a_i, b_i] \cap M_\alpha| = 2i + 1$  y  $|[a_i, b_i] \cap m_\alpha| = 2i$ .

- ii Si  $\{M_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i + 1\}$  es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto  $[a_i, b_i] \cap M_\alpha$ , entonces:
- $\pi_2(M_{i,2i+1}) = 1$ .
  - $\pi_2(M_{i,j}) = \pi_2(M_{i,2i+1-j}) = \frac{(j+2)}{(j+3)} \quad \forall j, 1 \leq j \leq i$ .
- iii Si  $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$  es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto  $[a_i, b_i] \cap m_\alpha$ , entonces:
- $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{2}{3}$  para  $j = i$ .
  - $\pi_2(m_{i,j}) = \frac{1}{2}$  para  $j \neq i$ .

Figura 7. Rayo  $J_\alpha$  cuando  $\alpha_i = 1$



Paso 2. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $[b_{i+1}, a_i] \cap V_\alpha$  tiene las siguientes propiedades:

i  $|[b_i, a_i] \cap M_\alpha| = 2i - 1$  y  $|[b_{i+1}, a_i] \cap m_\alpha| = 2i$ .

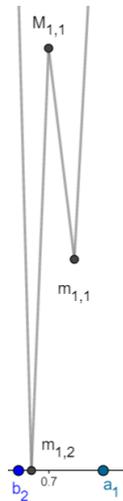
ii  $\pi_2([b_i, a_i], M_\alpha) = \frac{1}{2}$ .

iii Si  $\{m_{i,j} : 1 \leq j \leq 2i\}$  es una enumeración de derecha a izquierda de los elementos del conjunto  $[b_i, a_i] \cap m_\alpha$ , entonces:

a.  $\pi_2(m_{i,2i}) = 0$ .

b.  $\pi_2(m_{i,i}) = \pi_2(m_{i,2i-j}) = 1 - \frac{(j+2)}{(j+3)} \quad \forall j, 1 \leq j \leq i$ .

Figura 8. Parte inferior del Rayo  $J_\alpha$

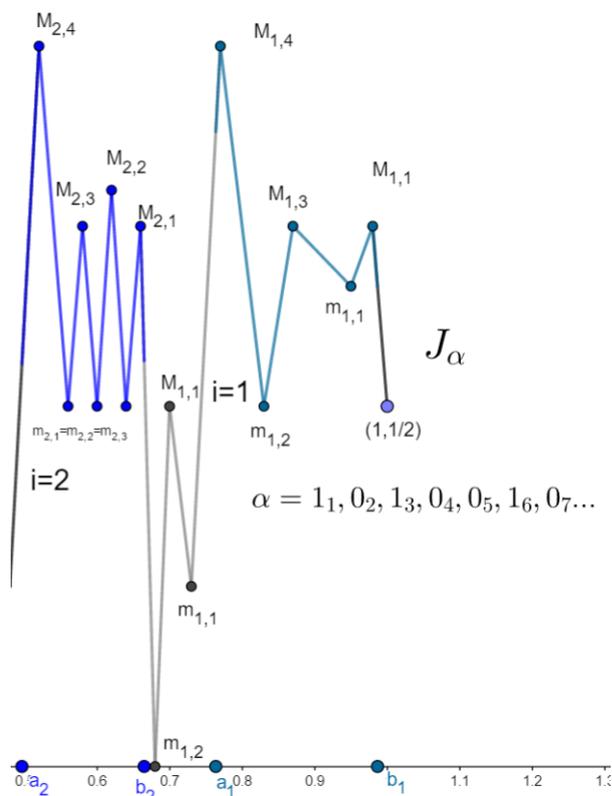


Con el siguiente ejemplo evidenciamos la construcción mencionada anteriormente en el caso particular donde  $\alpha = \{x_i\}$ , tomando  $\{x_i\} = 1_1, 0_2, 1_3, 0_4, 0_5, 1_6, \dots$

**Observación 3.3.** La proyección del último máximo de la parte superior del rayo con respecto al eje  $y$  es igual a 1 y la proyección del último mínimo de la parte inferior del rayo es igual a 0 por que buscamos que el arco  $[0, 1]$  complete la compactación del rayo.  $E_\alpha$  en efecto es un compacto, basta ver que  $E_\alpha = J_\alpha \cup I_\alpha$ , donde  $I_\alpha$  es la adherencia de  $J_\alpha$ . Lo anterior significa que  $E_\alpha$  es cerrado y por estar acotado es compacto.

**3.1.2. La compactación  $E_\alpha$  y el rayo  $J_\alpha$**  En la sección anterior a cada  $\alpha \in 2^\mathbb{N}$  le asociamos una compactación  $E_\alpha$  y construyendo el rayo  $J_\alpha$  en función de  $\alpha$ . Ahora,

Figura 9. Rayo  $J_\alpha$



es necesario describir  $E_\alpha$  en función de  $J_\alpha$ . La siguiente notación es útil para nuestro propósito.

**Notación 3.4.** A menos que se mencione lo contrario, las siguientes anotaciones se utilizan para la compactación construida anteriormente  $E_\alpha$ .

i  $a_\alpha, b_\beta, c_\alpha$  denotan respectivamente los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ , y  $(0, 1)$  en  $I_\alpha$ .

ii Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $K_i^\alpha$  y  $L_i^\alpha$  denotan los arcos  $[a_i, b_i]$  y  $[b_{i+1}, a_i]$  respectivamente.

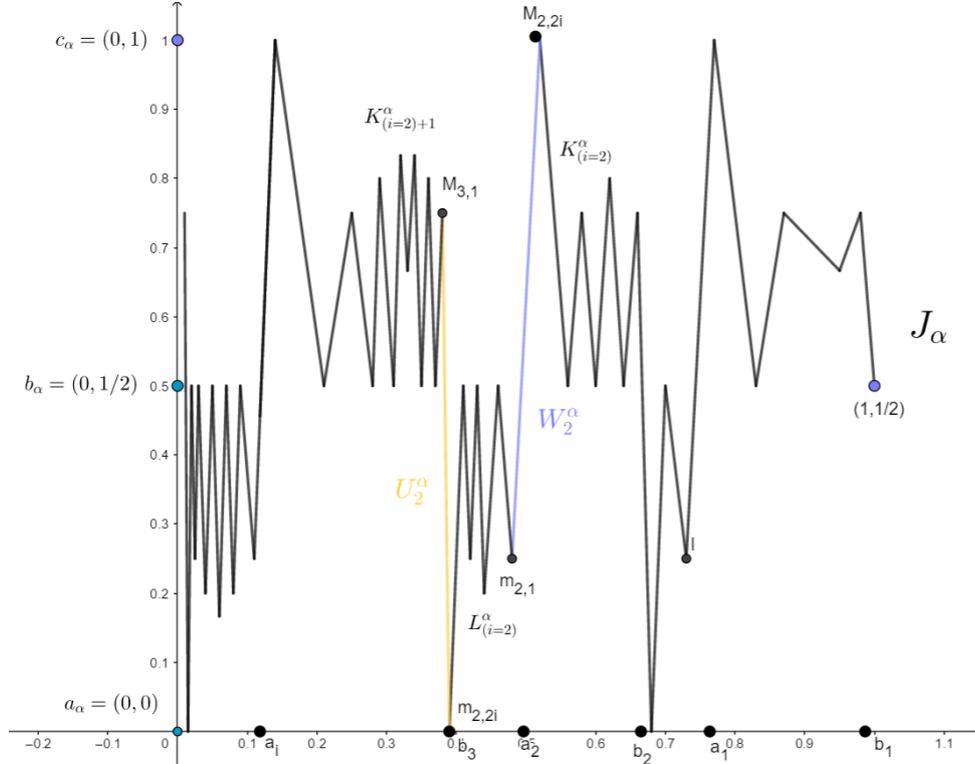
iii Para cada  $i \in \mathbb{N}$ :

a.  $U_i^\alpha$  denota el arco en  $J_\alpha$  con extremos en el último elemento de  $L_i^\alpha \cap m_\alpha$  y en el primer elemento de  $K_{i+1}^\alpha \cap M_\alpha$ .

b.  $W_i^\alpha$  denota el arco en  $J_\alpha$  con extremos en el último elemento de  $K_i^\alpha \cap M_\alpha$  y en el primer elemento de  $L_i^\alpha \cap m_\alpha$ .

**Ejemplo 3.5.** La notación anterior está reflejada en el siguiente rayo.

Figura 10. Rayo  $J_\alpha$



La siguiente es una descripción de  $E_\alpha$  en función de sus arcos y sus respectivas longitudes. Tenga en cuenta que  $y = \frac{2}{3}$  es una recta en el plano.

**Lema 3.6.** Para cada compactación  $E_\alpha$  le sigue:

- i Si  $t \in (a_\alpha, c_\alpha)$  y  $t' \in I_\alpha$ , entonces existen sucesiones  $\{t_i\}$  y  $\{t'_i\}$  en  $J_\alpha$  que convergen a  $t$  y  $t'$  respectivamente, tal que  $\{d[t_i, t'_i]\}$  es acotado.
- ii Sean  $\{t_i\}$  y  $\{t'_i\}$  dos sucesiones en  $J_\alpha$  convergen a  $a_\alpha$  y  $c_\alpha$  respectivamente; entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[t_i, t'_i] = \infty$ .
- iii Sea  $p_i$  un punto en  $J_\alpha$  tal que  $p_i \in L_i^\alpha$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ , con  $L_i^\alpha \neq L_j^\alpha$  cuando  $i \neq j$ , entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[p_i, p_{i+1}] = \infty$ .
- iv Sean  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  dos sucesiones en  $J_\alpha$  que convergen a  $a_\alpha$ . Si el  $\{d[p_i, q_i]\}$  esta acotada inferiormente por un  $K > 0$ , entonces  $[a_\alpha, b_\alpha] \subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p_i, q_i]$ .

v Sean  $\{A_i\}$  una sucesión de arcos en  $J_\alpha$  y  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $A_i \cap W_{j_i}^\alpha \neq \emptyset$  para todo  $i > n$ . Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i \supset [a_\alpha, b_\alpha]$ , entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(A_i) = \infty$ .

vi Sean  $p \in U_i^\alpha$  y  $q \in W_{i+1}^\alpha$ , entonces  $[p, q] \cap m_\alpha \cap (y = \frac{2}{3}) = \emptyset$  si, y solo si,  $\alpha_{i+1} = 0$ .

*Demostración.*

i Tomemos sin pérdida de generalidad  $t_i, t'_i$  en  $I_i = [m_{i,2i}, M_{i,2i}]$  con  $m_{i,2i} \in L_i^\alpha$  y  $M_{i,2i} \in K_i^\alpha$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  (tomamos  $M_{i,2i}$  si  $\alpha_i = 0$  de lo contrario reemplazamos por  $M_{i,2i+1}$ ).

Basta probar para  $t' = c_\alpha$  y  $t \in (a_\alpha, c_\alpha)$ . El otro caso es análogo. Para  $t \in (a_\alpha, c_\alpha)$  existe un  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $1 - \frac{(M=j)+2}{(M=j)+3} < \pi_2(t)$ . Para cada  $S$  segmento de recta en  $I_M$  vale que  $d(S) \leq \sqrt{2}$  y  $I_M$  contiene  $4M$  segmentos, entonces  $d[t_M, t'_M] < 4M\sqrt{2}$ . Así, vale que  $d[t_i, t'_i] \leq 4M\sqrt{2}$ , para todo  $M > i$ . Luego  $\{d[t_i, t'_i]\}$  es acotada.

ii Para todo  $i \in \mathbb{N}$ , tomemos nuevamente  $t_i, t'_i$  en  $I_i$ . Para cada segmento  $S$  de recta en  $I_i$  vale que  $d(S) \geq \frac{1}{4}$  y  $I_i$  contiene  $4i$  segmentos. Así  $d[t_i, t'_i] \geq \frac{1}{4}i$ , y por lo tanto  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[t_i, t'_i] = \infty$ .

iii Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p_i \in L_i^\alpha$ ,  $p_{i+1} \in L_{i+1}^\alpha$ , y  $K_i^\alpha \subset [p_{i+1}, p_i]$ . Por ii  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[K_i^\alpha] = \infty$ , y en consecuencia  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[p_i, p_{i+1}] = \infty$ .

iv Sean  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  dos sucesiones en  $J_\alpha$  que convergen a  $a_\alpha$ . Si la longitud de arco  $\{d[p_i, q_i]\}$  esta acotada inferiormente por un  $K > 0$ , entonces  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  no pueden converger simultáneamente por los segmentos que se unen en un elemento de  $m_\alpha$ , de lo contrario  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[p_i, q_i] = 0$ , lo que es absurdo.

Por el argumento anterior existen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h \in [p_i, q_i] \subset J_\alpha$  tales que  $\pi(h) = 1/2$  para todo  $i \geq n$ . Luego  $b_\alpha \subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p_i, q_i]$ . Sean  $t \in [a_\alpha, b_\alpha)$  y  $0 < \epsilon$ , entonces existe  $i_\epsilon$  tal que  $[p_{i_\epsilon}, q_{i_\epsilon}] \subset J_\alpha$  con  $[p_{i_\epsilon}, q_{i_\epsilon}] \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$ , para todo  $i > i_\epsilon$  (1). Así,  $[a_\alpha, b_\alpha] \subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p_i, q_i]$ .

La afirmación (1) se tiene por que  $I_\alpha$  es el resto de  $J_\alpha$  y  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  convergen a  $a_\alpha$ .

v Sean  $\{A_i\}$  una sucesión de arcos en  $J_\alpha$  y  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $A_i \cap W_{j_i}^\alpha \neq \emptyset$  para todo  $i > n$ . Dado que  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i \supset [a_\alpha, b_\alpha]$ , existen  $\{q_i\}$  y  $\{p_i\} \in J_\alpha$  que convergen a  $a_\alpha$  y  $m_{i,1} \in L_i^\alpha$  respectivamente. Así,  $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i^\alpha \subseteq \lim_{i \rightarrow \infty} [q_i, p_i]$ , y por el argumento en la prueba de *ii* se tiene que  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(A_i) = \infty$ .

vi Sean  $p \in U_i^\alpha$  y  $q \in W_{i+1}^\alpha$  y  $[q, p] \subseteq J_\alpha$  tal que  $K_{i+1}^\alpha \subset [q, p]$ . Note que  $m_{i,2i} = 0$  es el único elemento de  $m_\alpha$  en  $U_i^\alpha$  mientras que  $m_{i+1,1} = \frac{1}{4}$  es el único elemento de  $m_\alpha$  en  $W_{i+1}^\alpha$ .

Basta analizar  $m_\alpha \in K_{i+1}^\alpha$ . Por definición se tiene que para todo  $m_{i,j} \in K_{i+1}^\alpha$ ,  $m_{i,j} \neq 2/3$  si, y solo si,  $\alpha_{i+1} \neq 1$ .

□

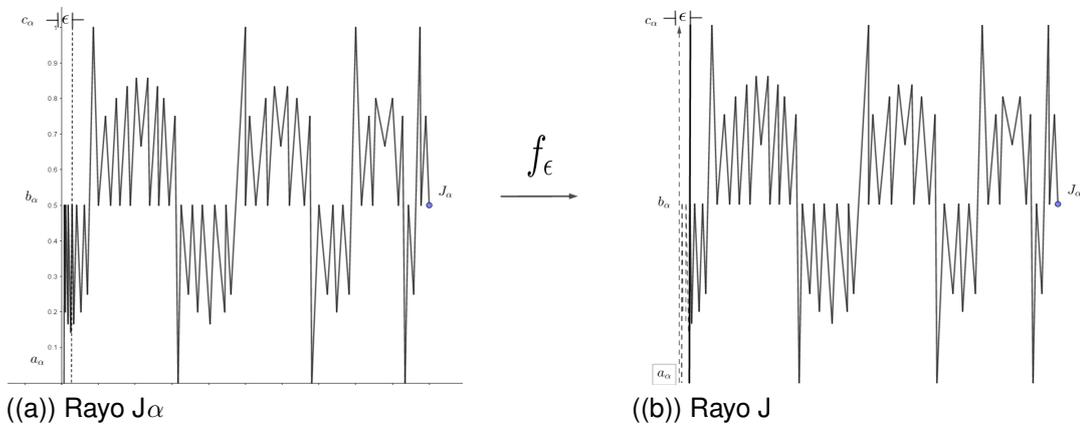
**Teorema 3.7.** La compactación  $E_\alpha$  es encadenable.

*Demostración.* Sean  $\epsilon > 0$  tal que  $\frac{1}{A} < \epsilon$ ,  $m_{i,2i} \in J_\alpha$  con  $i > A$  y  $J = \{[m_{i,2i}, 1] \in J_\alpha\} \cup (\{\pi_1(m_{i,2i})\} \times \{[0, 1]\})$ . Sea  $f_\epsilon: J_\alpha \rightarrow J$  definida para cada  $(x, y) \in J_\alpha$ , por

$$f_\epsilon((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } i \leq A; \\ (\pi_1(m_{i,2i}), y), & \text{si } i > A. \end{cases}$$

Nótese que  $f_\epsilon$  es una  $\epsilon$ -función. Así,  $E_\alpha$  es encadenable (ver Definición 1.20).

Figura 11. Épsilon función



□

### 3.2. COMPARANDO COMPACTACIONES $E_\alpha$ y $E_\beta$

En esta sección continuamos la descripción de la compactación  $E_\alpha$  en función de sus arcos y el comportamiento de ellos bajo funciones continuas y sobreyectivas. Al final tendremos argumentos suficientes para ver la relación entre comparar continuos y comparar sucesiones de Cantor.

La siguiente proposición es esencial para probar un lema que muestra el comportamiento de los arcos bajo funciones continuas y sobreyectivas. Utilizaremos dicho lema de manera frecuente en lo que resta de la presente monografía.

**Proposición 3.8.** *Sean  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua y sobreyectiva, y  $A$  un arco en  $[0, 1]$ , entonces existe  $B$  un arco en  $[0, 1]$  tal que  $h(B) = A$ .*

*Demostración.* Sea  $A = [c, d] \subseteq [0, 1]$ . Consideremos los conjuntos compactos  $C = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = c\}$  y  $D = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = d\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen puntos  $x_0 \in C$  y  $x_1 \in D$  tales que  $(x_0, x_1) \cap (C \cup D) = \emptyset$ . Finalmente,  $h([x_0, x_1]) = [c, d]$  por del Teorema del valor intermedio para funciones continuas.  $\square$

**Lema 3.9.** *Sean  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva, y  $A$  un arco en  $J_\alpha$ . Si  $B$  es un arco en  $h(A)$  entonces existe un arco en  $A$  cuya imagen es  $B$ .*

*Demostración.* Dado que la función  $h|_A: A \rightarrow h(A)$  es una función entre arcos. El resultado sigue de la Proposición 3.8.  $\square$

A continuación mostramos que una función continua y sobreyectiva entre las compactaciones  $E_\alpha$  y  $E_\beta$  nos brinda información sobre la longitud de los arcos de una compactación dada la longitud de los arcos de la otra.

**Lema 3.10.** *Sean  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva, y  $\{A_i\}$  una sucesión de arcos en  $J_\alpha$  tal que  $\limsup A_i \subseteq I_\alpha$ . Entonces se tiene lo siguiente:*

*i Si existe  $M > 0$  tal que  $\{d(h(A_i))\} \geq M \forall i \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $M' > 0$  tal que  $\{d(A_i)\} \geq M', \forall i \in \mathbb{N}$ .*

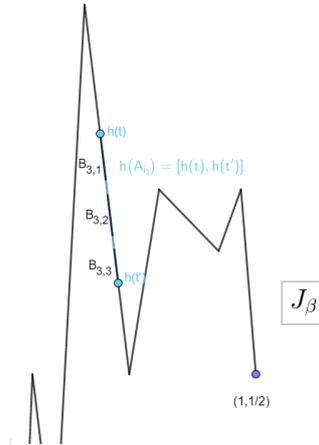
ii Si  $\{d(A_i)\}$  es acotada, entonces  $\{d(h(A_i))\}$  es acotada.

*Demostración.* Veamos cada afirmación:

i Suponga que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{d(A_{i_k})\} = 0$ , con  $\{A_{i_k}\}$  determinada por el intervalo  $[p_{i_k}, q_{i_k}]$  donde  $p_{i_k}$  y  $q_{i_k}$  pertenecen a  $J_\alpha$ , y  $\{p_{i_k}\}$  y  $\{q_{i_k}\}$  son subsucesiones convergentes de  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  respectivamente. Note que  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_k}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{i_k}$  pertenece a  $I_\alpha$  y que si  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} q_{i_k}$ , entonces  $\{d(A_{i_k})\}$  estaría acotada inferiormente, lo cual niega la hipótesis. Luego por la continuidad de  $h$  se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_{i_k}) = h(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_k}) = h(\lim_{k \rightarrow \infty} q_{i_k})$ . Por lo tanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(h(A_{i_k})) = 0$ . Así,  $\{d(h(A_i))\}$  no es acotada inferiormente por  $M > 0$ .

ii La siguiente gráfica nos ayuda a visualizar el camino que seguimos para demostrar ii.

Figura 12. Rayo  $J_\beta$



Suponga que existe  $\{h(A_{i_k})\}$  una subsucesión de  $\{h(A_i)\}$  tal que:

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(h(A_{i_k})) = \infty$ .
2. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , el arco  $h(A_{i_k})$  contiene una colección  $\{B_{k,j} \mid 1 \leq j \leq k\}$  de subarcos cerrados disjuntos, con  $d(B_{k,j}) \geq 1$ , para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

Para cada  $k, j \in \mathbb{N}$ , con  $1 \leq j \leq k$ ,  $A_{k,j}$  es un subarco de  $A_{i_k}$  tal que  $h(A_{k,j}) = B_{k,j}$ , por Lema 3.9. De  $i$  se deduce que  $\{d(A_{k,j}) \mid (k, j) \in \mathbb{N} \times \{1, 2, 3, \dots, k\}\}$  está acotada inferiormente, es decir, existe un  $R > 0$  en  $\mathbb{R}$  y un  $n_0$  en  $\mathbb{N}$  tal que

$d(A_{k,j}) \geq R$  para todo  $k > n_0$ . Lo que implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(A_{i_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (k - n_0)R = \infty$ . Dado que  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(A_i) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} d(A_{i_k})$ , concluimos que  $\{d(A_i)\}$  no es acotada.

□

**Lema 3.11.** *Sea  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva. Se puede afirmar lo siguiente:*

i  $h^{-1}\{a_\beta, c_\beta\} = \{a_\alpha, c_\alpha\}$ .

ii Si  $h(a_\alpha) = a_\beta$ , entonces  $h([a_\alpha, b_\alpha]) = [a_\beta, b_\beta]$  y  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, c_\beta]$ .

iii Si  $h(a_\alpha) = c_\beta$ , entonces  $h([a_\alpha, b_\alpha]) = [c_\beta, b_\beta]$  y  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, a_\beta]$ .

iv  $h(b_\alpha) = b_\beta$ .

*Demostración.*

i Dado que  $h$  es sobreyectiva, basta probar que  $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(c_\beta) = \emptyset$  y  $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(a_\beta) = \emptyset$ . Veamos que  $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(a_\beta) = \emptyset$ . La otra prueba es análoga. Suponga que  $(a_\alpha, c_\alpha) \cap h^{-1}(a_\beta) \neq \emptyset$ , y tome  $t'$  en  $[a_\alpha, c_\alpha]$  y  $t$  en  $(a_\alpha, c_\alpha)$ , tal que  $h(t') = c_\beta$  y  $h(t) = a_\beta$ . Por el Lema 3.6[i] existen dos sucesiones  $\{t_i\}$  y  $\{t'_i\}$  en  $J_\alpha$  tales que  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t$  y  $\lim_{i \rightarrow \infty} t'_i = t'$  donde  $\{d[t_i, t'_i]\}$  es acotada.

De la continuidad de  $h$  y de  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t$  obtenemos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} h(t_i) = h(t) = a_\beta$ . De manera semejante vale que  $\lim_{i \rightarrow \infty} h(t'_i) = h(t') = c_\beta$ . Así por el Lema 3.6[ii]  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[h(t_i), h(t'_i)] = \infty$ . Esto contradice el Lema 3.10[ii].

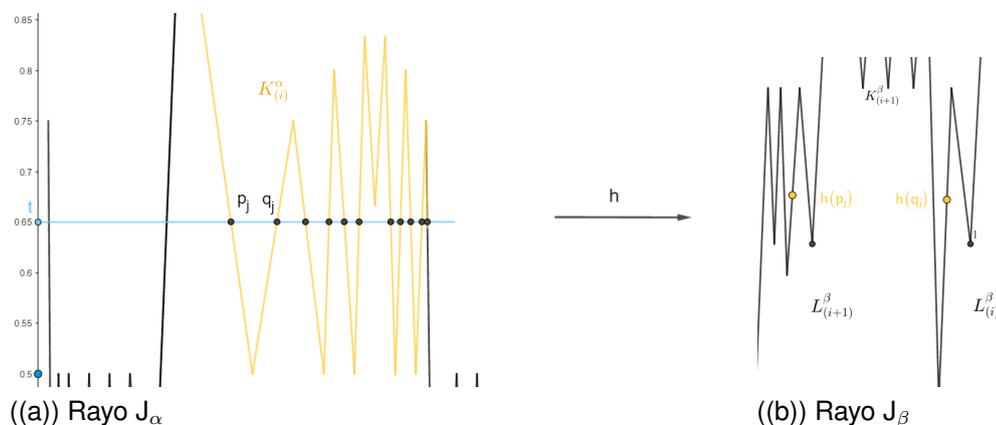
ii Probaremos que  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, c_\beta]$ . Dado  $h(a_\alpha) = (a_\beta)$ , de [i] se tiene que  $h^{-1}(c_\beta) = (c_\alpha)$ . Supongamos que existe  $t \in (b_\alpha, c_\alpha)$  tal que  $h(t) < b_\beta$ . Sea  $T$  la sucesión  $J_\alpha \cap (y = t)$ , entonces:

Caso 1. Existen dos subsucesiones  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  de  $T$  tales que para cada  $i \in \mathbb{N}$ :

a.  $p_i$  y  $q_i$  son adyacentes en  $T$ .

b.  $\{p_i, q_i\} \subset K_{j_i}^\alpha$ .

Figura 13. Caso 1



c.  $h(p_i) \in l_{k_i}^\beta$  y  $h(q_i) \in l_{r_i}^\beta$  con  $r_i \neq k_i$ .

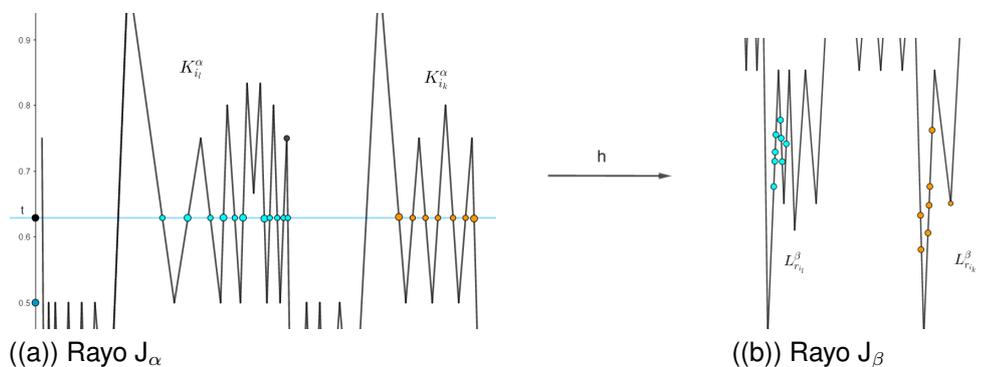
Se sigue del Lema 3.6[iii] y de [c] que  $\lim_{i \rightarrow \infty} d[h(p_i), h(q_i)] = \infty$  y consecuentemente  $\lim_{i \rightarrow \infty} (h[p_i, q_i]) = \infty$  pues existe un  $K_{i_i}^\beta \subseteq h[p_i, q_i]$ . Lo anterior contradice el Lema 3.10[ii], porque  $\{d[p_i, q_i]\}$  es acotado como consecuencia del Lema 3.6[i] y de [a].

Caso 2. Existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

a.  $h(K_i^\alpha \cap T) \subset L_{j_i}^\beta$  para todo  $i > i_0$ .

b. Existe una subsucesión  $\{K_{i_l}^\alpha\}$  de  $\{K_i^\alpha\}$ , tal que  $h(K_{i_l}^\alpha \cap T) \subset L_{j_{i_l}}^\beta$ , donde  $j_{i_l} \neq j_{k_l}$  cuando  $i_l \neq k_l$ .

Figura 14. Caso 2



Para cada  $l \in \mathbb{N}$ , vale que  $p_{i_l}, q_{i_l}$  son el primer y último punto de  $K_{i_l}^\alpha \cap T$  respectivamente. Ya que  $L_{j_{i_l}}^\beta \cap L_{j_{i_{l+1}}}^\beta = \emptyset$ , sigue de manera directa que

$$h([q_i, p_{i+1}]) \supset K_{i+1}^\beta.$$

Lo anterior implica que  $h(\lim_{l \rightarrow \infty} [q_l, p_{l+1}]) \supset \lim_{l \rightarrow \infty} K_l^\beta$ , lo que a su vez significa que  $c_\beta \in h[a_\alpha, t]$  con  $t < c_\alpha$ , absurdo pues  $h^{-1}(c_\beta) = c_\alpha$ .

Probar que  $h([a_\alpha, b_\alpha]) = [a_\beta, b_\beta]$  se hace de manera similar por tanto la omitiremos.

iii La prueba de  $h(a_\alpha) = c_\beta$ ,  $h([a_\alpha, b_\beta]) = [c_\beta, b_\beta]$  y  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, a_\beta]$  es análoga a [ii] luego la omitiremos.

iv La siguiente igualdad  $h(b_\alpha) = b_\beta$  sigue directamente de [ii] y [iii]. Note que solo se puede dar [ii] ó [iii] de manera simultánea, para cualquier  $h$  continua y sobreyectiva. Suponga que  $h(a_\alpha) = a_\beta$ ,  $h(c_\alpha) = c_\beta$  y  $h([a_\alpha, b_\alpha]) = [a_\beta, b_\beta]$ ,  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, c_\beta]$ . Dado que  $b_\alpha$  pertenece a  $[a_\alpha, b_\alpha] \cap [b_\alpha, c_\alpha]$ , entonces  $h(b_\alpha)$  pertenece a  $h[a_\alpha, b_\alpha] \cap [b_\beta, c_\beta]$  por lo tanto  $h(b_\alpha) = b_\beta$ .

□

Ahora veremos que [iii] no es posible para compactaciones  $E_\alpha$  y  $E_\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  no eventualmente constantes.

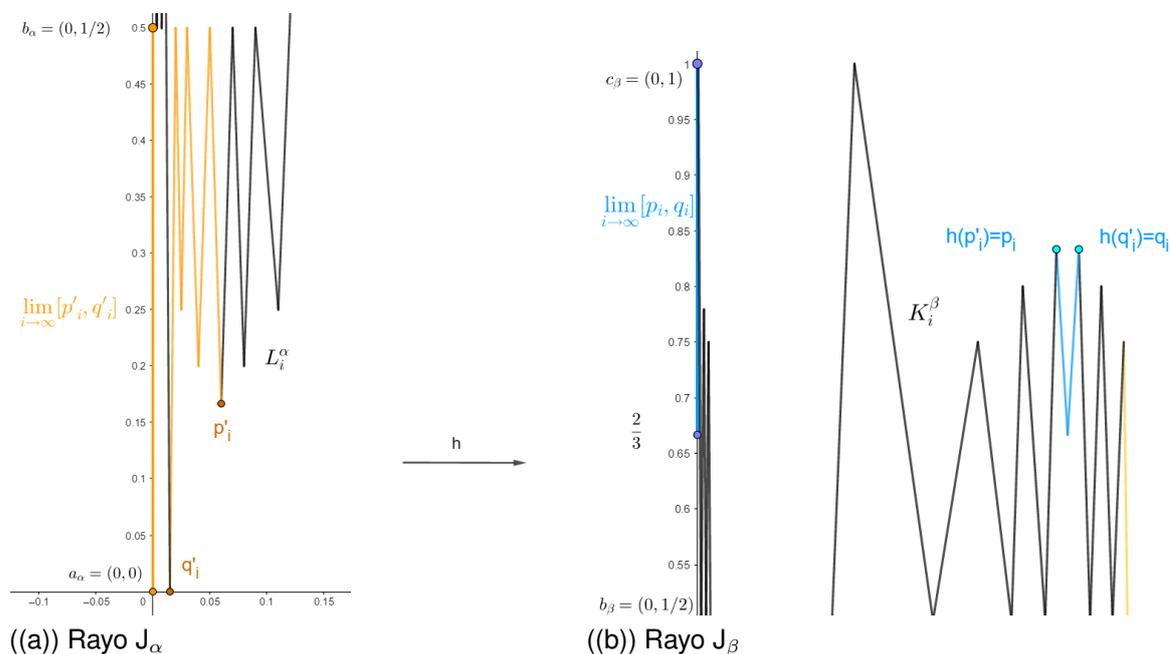
**Lema 3.12.** *Sea  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva. Si ni  $\alpha$  ni  $\beta$  son eventualmente constantes, entonces se tiene lo siguiente:*

$$i \quad h(a_\alpha) = a_\beta; h(c_\alpha) = c_\beta; h([a_\alpha, b_\alpha]) = [a_\beta, b_\beta]; h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, c_\beta].$$

ii *Si  $\{A_i\}$  es una sucesión de arcos en  $J_\alpha$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = [b_\alpha, c_\alpha]$  y  $A_i \cap m_\alpha \cap (y = 2/3) = \emptyset$ , para todo  $i$  en  $\mathbb{N}$ , entonces existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(A_i) \cap m_\alpha \cap (y = 2/3) = \emptyset$  para todo  $i > n$ .*

*Demostración.* La siguiente es una gráfica del argumento utilizado para para probar [i] y [ii].

Figura 15. Bosquejo i y ii



i Probar que  $h(a_\alpha) = a_\beta$ ;  $h(c_\alpha) = c_\beta$ ;  $h([a_\alpha, b_\alpha]) = [a_\beta, b_\beta]$ ;  $h([b_\alpha, c_\alpha]) = [b_\beta, c_\beta]$ , se reduce a probar que  $h(a_\alpha) = a_\beta$  por que el Lema 3.11[i] concluye la demostración. Suponga que  $h(a_\alpha) = c_\beta$ , sigue de la Construcción 3.1.1 que existen dos sucesiones  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  en  $J_\beta$ , tal que:

- $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = c_\beta$ .
- $\lim_{i \rightarrow \infty} [p_i, q_i] = [2/3, c_\beta]$ .
- $\{d[p_i, q_i]\}$  está acotada inferiormente por un  $M > 0$ .

Tomemos  $\{p_i\} = M_{i,i+1}$  y  $\{q_i\} = M_{i,i}$  para cada  $i$  en  $\mathbb{N}$ , con  $\alpha_i = 1$ . Note que cumplen la caracterización mencionada anteriormente.

Por el Lema 3.9 podemos encontrar una sucesión  $\{B_i\}$  de arcos en  $J_\alpha$  tal que  $h(B_i) = [p_i, q_i]$ . Por [c] se tiene que  $\{d[p_i, q_i]\}$  está acotada inferiormente por un  $M > 0$ , y el Lema 3.10[i] garantiza que  $\{d(B_i)\}$  esta acotada por un  $M' > 0$ . Escojamos  $p'_i$  y  $q'_i$  en  $B_i$  tal que  $h(p'_i) = p_i$  y  $h(q'_i) = q_i$ . De nuestro supuesto  $h^{-1}(c_\beta) = a_\alpha$  sigue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} p'_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q'_i = a_\alpha$  y  $\{d([p'_i, q'_i])\}$  es acotado inferiormente por un  $M'' > 0$ .

Por el Lema 3.6[iv],  $[a_\alpha, b_\alpha] \subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p'_i, q'_i]$  y por [b] vale que  $\lim_{i \rightarrow \infty} [p_i, q_i] = [2/3, c_\beta]$ , luego  $\lim_{i \rightarrow \infty} h([p'_i, q'_i]) \subseteq [2/3, c_\beta]$ , sigue que  $h[a_\alpha, b_\alpha] \subset [2/3, c_\beta]$  esto contradice el Lema 3.11[iv]. Por lo tanto  $h(c_\alpha) = c_\beta$  y  $h(a_\alpha) = a_\beta$ .

ii Suponga que existe una subsucesión de  $\{h(A_i)\}$  tal que  $h(A_{i_j}) \cap m_\alpha \cap (y = 2/3) \neq \emptyset$  para todo  $j$  en  $\mathbb{N}$ . Por lo tanto se sigue de la Construcción 3.1.1 que existen dos sucesiones  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  en  $J_\beta$ . Estas sucesiones están descritas en [i]. Entonces podemos encontrar una sucesión  $\{A_i\}$  de arcos en  $J_\alpha$  tal que  $h(A_i) = [p_i, q_i]$ , con  $\{d[p_i, q_i]\}$  acotada inferiormente por un  $M > 0$ , y  $\{d(A_i)\}$  acotada por un  $M' > 0$ . Escojamos  $p'_i$  y  $q'_i$  en  $A_i$  tal que  $h(p'_i) = p_i$  y  $h(q'_i) = q_i$ . Dado que  $h^{-1}(c_\beta) = c_\alpha$  sigue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} p'_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q'_i = c_\alpha$  y  $\{d([p'_i, q'_i])\}$  es acotado inferiormente por un  $M'' > 0$ .

Note que  $[2/3, c_\alpha] \subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p'_i, q'_i]$  y  $[a_\alpha, b_\alpha] \not\subset \lim_{i \rightarrow \infty} [p'_i, q'_i]$  pues esto contradice el Lema 3.11[iv]. Por lo tanto  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = [2/3, c_\alpha]$

□

**Lema 3.13.** Sean  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva,  $\{p_i\}$  y  $\{q_i\}$  sucesiones de puntos en  $J_\alpha$  tales que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p_i \in U_i^\alpha$  y  $q_i \in W_i^\alpha$ . Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = b_\alpha$  y ni  $\alpha$  ni  $\beta$  son eventualmente constantes, entonces existen un entero  $j_0$  y  $n$  en  $\mathbb{N}$  tales que  $h(p_i) \in u_{i+j_0}^\beta$  y  $h(q_i) \in w_{i+j_0}^\beta$  para todo  $i > n$ .

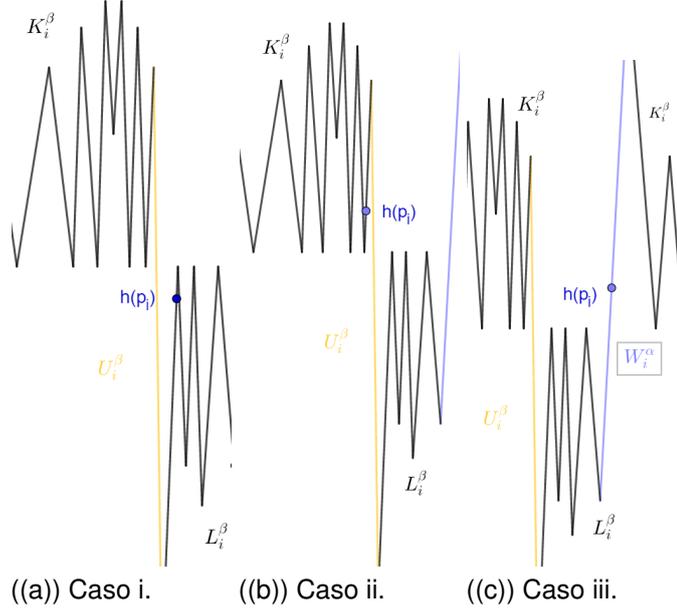
*Demostración.* Ya que  $h(b_\alpha) = b_\beta$ , se sigue  $\lim_{i \rightarrow \infty} h(p_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} h(q_i) = b_\beta$ . Dividimos la prueba en 4 pasos.

Paso 1. Existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\beta$  para todo  $i > n$ . Suponga que no, entonces tenemos tres casos:

Caso i. La sucesión  $\{d[h(p_i), M_{j_i}]\}$  converge a cero para alguna subsucesión  $\{M_{j_i}\}$  de  $M_\beta$  en  $L_{j_i}^\beta$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $h((p_i, p_i + \delta)) \subseteq (h(p_i) - \epsilon, h(p_i) + \epsilon)$  y consecuentemente  $\lim_{i \rightarrow \infty} h((p_i, p_i + \delta)) = h((b_\alpha, b_\alpha + \hat{\delta})) \subseteq (b_\beta - \hat{\epsilon}, b_\beta + \hat{\epsilon}) \subseteq [a_\beta, b_\beta]$ . Esto contradice el Lema 3.12[i].

Caso ii. La sucesión  $d[h(p_i), m_{j_i}]$  converge a cero para alguna subsucesión  $\{m_{j_i}\}$  de  $m_\beta$  en  $K_{j_i}^\beta$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $h((p_i -$

Figura 16. Casos



$\delta, p_i) \subseteq (h(p_i) - \epsilon, h(p_i) + \epsilon)$  y consecuentemente  $\lim_{i \rightarrow \infty} h((p_i - \delta, p_i)) = h((b_\alpha - \hat{\delta}, b_\alpha)) \subseteq (b_\beta - \hat{\epsilon}, b_\beta + \hat{\epsilon}) \subseteq [b_\beta, c_\beta]$ . Lo que contradice nuevamente el Lema 3.12[i].

**Caso iii.** Existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j^\beta$  para todo  $i > n$ . Sea  $m_i^* = u_i^\alpha \cap m_\alpha$ , dado que el  $\lim_{i \rightarrow \infty} [m_i^*, p_i] = [a_\alpha, b_\alpha]$ , el Lema 3.12 implica que  $\lim_{i \rightarrow \infty} h[m_i^*, p_i] = [a_\beta, b_\beta]$ . Por hipótesis existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h[m_i^*, p_i] \cap (\bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j^\beta) \neq \emptyset$  para todo  $i > n$ , sigue de Lema 3.6[v] que  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(h[m_i^*, p_i]) = \infty$ . Esto es absurdo por el Lema (3.10)[ii] ya que  $d[m_i^*, p_i]$  es acotada. Por tanto, se tiene que existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\beta$ .

**Paso 2.** Existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(q_i) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\beta$  para todo  $i > n$ . La prueba es análoga a paso 1 y por tanto se omite.

**Paso 3.** Si existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in U_{j_i}^\beta$  para todo  $i > n$ , entonces para algún  $n$   $\hat{n}$  en  $\mathbb{N}$  tenemos que  $h(q_i) \in W_{j_i}^\beta$  para todo  $i > \hat{n}$ . Suponga que no, entonces existe una subsucesión  $\{h(q_{i_r})\}$  tal que  $h(q_{i_r}) \in W_{k_{i_r}}^\beta$  cuando  $h(p_{i_r}) \in U_{j_{i_r}}^\beta$  donde  $k_{i_r} \neq j_{i_r}$ . Así, por la Construcción 3.1.1  $\lim_{r \rightarrow \infty} [p_{i_r}, q_{i_r}] = [a_\alpha, b_\alpha]$  y el  $\lim_{r \rightarrow \infty} [h(p_{i_r}), h(q_{i_r})]$  es  $[b_\beta, c_\beta]$  ó  $[a_\beta, c_\beta]$ . En cualquier caso es evidente que se

contradice el Lema 3.12[i].

Paso 4. Finalmente probamos que existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in U_{j_i}^\beta$  para todo  $i > n$ . Entonces  $j_{i+1} = j_i + 1$ . Suponga que no, entonces existe una subsucesión  $\{h(p_{i_r})\}$  tal que  $h(p_{i_r}) \in U_{j_{i_r}}^\beta$  cuando  $h(p_{i_{r-1}}) \in U_{j_{i_{r-1}}}^\beta$ , donde  $j_{i_{r-1}} + 1 \neq j_{i_r}$ . Así, por la Construcción 3.1.1  $\lim_{r \rightarrow \infty} [q_{i_r}, p_{i_{r-1}}] = [b_\alpha, c_\alpha]$  y  $\lim_{r \rightarrow \infty} [h(q_{i_r}), h(p_{i_{r-1}})] = [a_\beta, c_\beta]$ . Lo que contradice el Lema 3.12[i].

De lo anterior se deduce que existen un número entero  $j_0$  y  $n$  en  $\mathbb{N}$  tales que  $h(p_i) \in U_{i+j_0}^\beta$  y  $h(p_i) \in W_{i+l_0}^\beta$  para todo  $i > n$ . Esto completa la prueba del Lema. □

**Teorema 3.14.** *Sea  $h: E_\alpha \rightarrow E_\beta$  una función continua y sobreyectiva. Si ni  $\alpha$  ni  $\beta$  son eventualmente constantes, entonces  $\alpha$  domina a  $\beta$ .*

*Demostración.* Para cada  $i \in \mathbb{N}$  escoja  $p_i \in U_i^\beta$  y  $q_{i+1} \in W_{i+1}^\beta$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = b_\alpha$ . Por el Lema 3.13, existe un entero  $j_0$  y un  $n$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $h(p_i) \in U_{i+j_0}^\beta$  y  $h(q_i) \in W_{i+1+j_0}^\beta$  para todo  $i > n$ . Sea  $\{a_{k_i}\}$  una cola de la secuencia de todos los ceros en  $\alpha$ . Por Lema 2.6, es suficiente probar que existe un  $\hat{n}$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $\beta_{k_i+j_0} = 0$  para todo  $i > \hat{n}$ .

Ya que  $\alpha_{k_i} = 0$ , se sigue del Lema 3.6[vi] que  $[q_{k_{i+1}}, p_{k_i}] \cap m_\alpha \cap (y = 2/3) = \emptyset$ . Por el Lema 3.12[iii], existen  $m, \hat{n}$  en  $\mathbb{N}$  tales que  $h[q_{k_{i+1}}, p_{k_i}] \cap m_\alpha \cap (y = 2/3) = \emptyset$  para todo  $i > m$  y  $[h(q_{k_{i+1}}), h(p_{k_i})] \cap (y = 2/3) = \emptyset$  para todo  $i > \hat{n}$ . Como  $h(p_i) \in U_{k_i+j_0}^\beta$  y  $h(q_i) \in W_{k_{i+1}+j_0}^\beta$ , concluimos por el Lema 3.6[vi] que  $\beta_{k_i+j_0} = 0$  para todo  $i > \hat{n}$ . Lo cual completa la prueba del teorema. □

Combinando el Lema 2.9 y el Teorema 3.14, obtenemos fácilmente el resultado esperado.

**Teorema 3.15.** *Existe una colección no numerable de compactaciones del rayo con el arco como resto tal que sus elementos son mutuamente incomparables.*

**Corolario 3.16.** *Existe una colección no numerable de continuos arcoconexos circularmente encadenables planos mutuamente incomparables.*

*Demostración.* Para cada  $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ ,  $E_\alpha$  es la compactación asociada del rayo descrito en la Construcción 3.1.1. De  $E_\alpha$  obtenemos un continuo encadenable circularmente  $E'_\alpha$  simplemente uniendo el primer punto de  $J_\alpha$  con el punto  $a_\alpha \in I_\alpha$ . Note que  $E'_\alpha$  está claramente conectado y es plano.  $E'_\alpha - (a_\alpha, c_\alpha]$  es un rayo denso en  $E'_\alpha$ . Si  $h: E'_\alpha \rightarrow E'_\beta$  es una función continua y sobreyectiva, entonces es fácil verificar que existe un subrayo  $J'_\alpha$  de  $E'_\alpha - (a_\alpha, c_\alpha]$  con las siguientes propiedades:

i Si  $\bar{J}'_\alpha$  denota la clausura de  $J'_\alpha$  en  $E'_\alpha$ , entonces  $\bar{J}'_\alpha - J'_\alpha = I_\alpha$ .

ii  $h(J'_\alpha) = J_\beta$ .

Observe que ii es posible dado que  $h$  es continua y sobreyectiva, es decir, existe un elemento  $e$  en  $E'_\alpha - [a_\alpha, c_\alpha]$  a partir del cual  $h((0, e]) = J_\beta$  o  $h([e, 1] \cup (0, 1]) = J_\beta$ , según sea el caso, la preimagen es la porción de arco de  $E'_\alpha$  cuya imagen bajo  $h$  es  $J_\beta$ . Consecuentemente  $h|_{\bar{J}'_\alpha}: \bar{J}'_\alpha \rightarrow \bar{J}_\beta$  es una función continua y sobreyectiva para la cual los resultados de 3.9-3.14 aún se mantienen y el Teorema 2.9 concluye la demostración.  $\square$

## BIBLIOGRAFÍA

- Awartani, M. "An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua".  
En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 118(1) (1993), págs. 239-245  
(vid. págs. 7, 9, 11, 24, 30).
- Bellamy, D. "An uncountable collection of chainable continua". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 160 (1997), págs. 297-304 (vid. págs. 7, 9, 11).
- Camargo, J. y E. Villamizar. *Topología General*. Universidad Industrial de Santander, 2018 (vid. págs. 10, 13, 14, 16, 19, 20).
- Charatonik, J. "Two invariants under continuity and the incomparability of fans". En: *Fundamenta Mathematicae* 2(53) (1964), págs. 187-204 (vid. págs. 11, 22).
- Macias, S. "Fans whose hyperspaces are cones". En: *Topology Proc* 27 (2003), págs. 217-222 (vid. pág. 22).
- Nadler, S. *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1992 (vid. pág. 10).
- Rogers, J. "Continuous mappings on continua". En: *Proceedings of the Auburn Topology Conference* (1969), págs. 94-97 (vid. págs. 7, 9, 11).