

**Simulación autoconsistente del
calentamiento de un plasma en una
trampa magnética mínimo-B utilizando
el método Particle-in-cell
electromagnético**

Estudiante:

Alex Francisco Estupiñán López

Director:

Doctor en Física. Eduardo Alberto Orozco Ospino

Codirector:

Doctor en Física. Valeriy Dugar-Zhabon

Trabajo de grado para optar al título de:

Magister en Física

Universidad Industrial de Santander - UIS
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2018

Agradecimientos

IV

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo de felicidad.

Le doy gracias a mis padres Carlos y Adela por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir. A mi hermano Carlos y a mi abuelita Adelina por ser parte importante de mi vida y representar la unidad familiar. A todos mis tíos por ser un ejemplo de desarrollo profesional a seguir, mis primos por llenar mi vida de alegrías y amor cuando más lo he necesitado.

Al pastor Juan y a todos los hermanos de la iglesia “Rey de gloria” por sus plegarias al Dios altísimo para que todo me saliera bien, además de escucharme y comprenderme en todos los momentos difíciles de mi vida.

Le agradezco la confianza, apoyo, dedicación de tiempo, enseñanza y guía a mis profesores: Dr. Eduardo Orozco y al Dr. Valeriy Dugar-Zhabon. Por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

Al profesor Jose Omar por haber sido un excelente amigo, por haberme tenido la paciencia necesaria y por motivarme a seguir adelante en los momentos de desesperación y sobre todo por hacerme parte de su familia.

A mis amigos por confiar y creer en mi y haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidaré.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1 Marco Teórico	5
1.1 Generalidades del plasma	5
1.1.1 Definición del plasma	5
1.1.2 Longitud de Debye o apantallamiento de Debye	5
1.1.3 Frecuencia plásmica	8
1.2 Confinamiento magnético	8
1.2.1 Configuración tipo espejo	9
1.2.2 Configuración tipo Mínimo-B	11
1.3 Resonancia Ciclotrónica Electrónica (ECR)	12
1.4 Mecanismo SARA (Spatial AutoResonance Acceleration) . . .	13
1.5 Dinámica de las partículas cargadas	14
1.5.1 Descripción cinética	14
1.5.2 Interacción colectiva	15
2 Sistema físico	17
2.1 Modelo numérico	19
2.1.1 Precisión y estabilidad	20
2.1.2 Algoritmo e implementación numérica	21
3 Resultados	23
3.1 Campo magnetostático de la trampa mínimo-B	23
3.2 Campo eléctrico generado por la fuente de microondas	25
3.3 Evolución del calentamiento de los electrones	30
4 Conclusiones	35
4.1 Trabajo futuro	36
Bibliografía	37
Apéndices	44

Lista de Figuras

0.1	Vista esquemática de una fuente de iones ECR. Figura extraída de [6].	2
1.1	Clases de plasma que se pueden encontrar en la naturaleza, dependiendo de la energía térmica y de la concentración de partículas en el plasma. Figura extraída de [29].	6
1.2	Potencial ϕ_t alrededor de una carga de prueba en un plasma y el potencial de Coulomb ϕ_{coul} , ambos como una función de la distancia radial desde la partícula de prueba. La region sombreada representa el efecto del apantallamiento de Debye. Figura extraída de [31].	7
1.3	(a) Trayectoria en forma de hélice de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme B. (b) La proyección de la trayectoria de la partícula sobre un plano perpendicular al campo B es una circunferencia y el sentido de giro depende del signo de la carga q. Figura extraída de [33].	9
1.4	Trayectoria de una partícula de carga positiva en una trampa magnética tipo espejo. Además se muestran las líneas de campo magnético, el vector de la fuerza de Lorentz sobre la partícula y la velocidad de la misma. Figura extraída de [35].	10
1.5	Configuración de un espejo magnético formada por dos bobinas separadas que llevan una corriente azimutal; el campo magnético es más intenso en esas zonas y las líneas de campo dejan de ser rectas. Las partículas cargadas quedan atrapadas entre los dos puntos de campo máximo. Figura extraída de [38].	10
1.6	Cono de pérdida en el espacio de velocidades de una trampa magnética tipo espejo. Figura extraída de [34].	11
1.7	(a) Estructura típica del campo magnético (Min-B) de una fuente de iones ECR de 14.1 GHz. (b) Vista 3D de la configuración de la trampa magnética (Min-B) en la fuente. Figuras tomadas de [36].	12

2.1	(Izquierda) Diagrama esquemático de una fuente ECRIS. 1. Bobinas, 2. Sistema hexapolar, 3. Cámara de plasma, 4. Línea coaxial, 5. Selector, 6. Inyección de radiofrecuencia, 7. Agujero de extracción, 8. lentes de Einzel, 9. yunque. (Figura tomada de [48]). (Derecha) Esquema físico del sistema simulado: 1-Cavidad, 2-Ventana, 3-Aislador de ferrita, 4-Guía de onda, 5-Magnetron, 6-Sistema hexapolar, 7-Bobinas.	VII 18
2.2	Ciclo computacional Particle-In-Cell (PIC) electromagnético. . .	20
2.3	Algoritmo utilizado para implementar el método UPML.	22
3.1	Campo magnetostático en el plano transversal $z = 5$ cm.	23
3.2	Campo magnetostático en el plano longitudinal $x = 0$ cm.	24
3.3	Intensidad de campo eléctrico en la sección transversal de cavidad $z = L_c/2$	26
3.4	Perfil de campo vectorial eléctrico en el plano $z = L_c/2$	27
3.5	Perfil de campo vectorial eléctrico en el plano $z = L_c/2$, donde se presenta el resultado del cálculo analítico y numérico.	28
3.6	Intensidad del campo eléctrico en el plano longitudinal $y = 0$	29
3.7	Vista tridimensional de zona ECR.	29
3.8	Sección transversal de la zona ECR $z = L_c/2$	30
3.9	Divergencia del campo magnético en el plano $z = L_c/2$	30
3.10	Divergencia del campo eléctrico en el plano $z = L_c/2$	31
3.11	Captura de pantalla de la simulación para el instante en que la cámara se llena con el plasma.	32
3.12	Espectro energético para los electrones en el instante correspondiente en el que la cámara está llena de plasma.	32
3.13	Distribución espacial y energética de los electrones después de 200 ciclos, desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.	33
3.14	Distribución espacial en $2D$ para los electrones y sus energías, después de 200 ciclos de campo de microondas desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.	33
3.15	Espectro energético para los electrones después de 55 y 200 ciclos de microondas, desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.	34
4.1	Sección transversal del acople guía de ondas-cavidad resonante y especificación de las fronteras.	45

4.2	Definición de las regiones para el algoritmo UPML: 1-corresponde a la zona interna, donde se resuelve el algoritmo de Yee. 2-corresponde a la zona externa donde se colocan los absorbentes y donde ocurre solapamiento de las esquinas dihedrales. 3-Es la zona externa donde se presenta solapamiento de las esquinas trihedrales.	VIII 46
4.3	Disposición 3D de las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} en una celda de Yee.	49
4.4	Frontera <i>Staircase</i> utilizada para simular los bordes curvos de la cavidad.	54
4.5	Representación esquemática del algoritmo <i>leap-frog</i>	58

Lista de Apéndices

Apéndice A. Cálculo de las componentes del campo electromagnético	44
Apéndice B. Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas con frontera (UPML)	48
Apéndice C. Ecuaciones de movimiento del plasma	55
Apéndice D. Discretización temporal para las ecuaciones de movimiento del plasma	57

TÍTULO: SIMULACIÓN AUTOCONSISTENTE DEL CALENTAMIENTO DE UN PLASMA EN UNA TRAMPA MAGNÉTICA MÍNIMO-B UTILIZANDO EL MÉTODO PARTICLE-IN-CELL ELECTROMAGNÉTICO ¹.

AUTOR: ALEX FRANCISCO ESTUPIÑÁN LÓPEZ ².

PALABRAS CLAVE: Resonancia ciclotrónica electrónica (ECR), trampa magnética mínimo-B, calentamiento del plasma, Método Particle-In-Cell (PIC).

DESCRIPCIÓN:

Las fuentes de iones de resonancia ciclotrónica electrónica (por sus siglas en inglés, ECRIS), son dispositivos mayormente diseñados para generar haces de iones altamente cargados. En estos sistemas, una trampa magnética mínimo-B está formada por la superposición de un campo magnético axial producido por un par de bobinas de corriente y un campo magnético radial formado por un sistema hexapolar se aprovecha para el confinamiento de plasma. En este trabajo el plasma es calentado en una cavidad excitada por un modo TE_{111} y por una frecuencia de inyección dada por $2,45\text{ GHz}$ es estudiada numéricamente en condiciones de resonancia ciclotrónica electrónica. La interacción de partículas de plasma de hidrógeno con el campo de microondas se simula a través de un código relativista 3D Particle-In-Cell (PIC) desarrollado por nosotros. El campo magnetostático se calcula utilizando la ley Biot-Savart. La evolución del campo electromagnético autoconsistente se determina a través del método de Yee. La densidad de la corriente de plasma se calcula comenzando con las posiciones de las partículas y sus velocidades mediante un método de carga conservativa propuesto por T. Umeda. Las nuevas posiciones y velocidades de las partículas, son calculadas resolviendo la ecuación relativista de Newton-Lorentz, usando el método de Boris.

Presentamos la distribución espacial de los electrones y su espectro energético después de 96 ns de cálculo en un plasma homogéneo de densidad igual a $2 \times 10^{10}\text{ cm}^{-3}$ y una distribución maxwelliana para las velocidades, con una temperatura inicial de $5,44 \times 10^{-4}\text{ eV}$. La simulación muestra que la población de electrones puede dividirse en tres grupos: fríos (con una energía menor que 1 keV), calientes (con un rango de energía entre $1 - 10\text{ keV}$) y supercalientes (con una energía superior a los 10 keV).

¹Trabajo de grado.

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Doctor en Física.

TITLE: SELF-CONSISTING SIMULATION OF THE HEATING OF A PLASMA IN A MINIMUM-B MAGNETIC TRAP USING THE PARTICLE-IN-CELL ELECTROMAGNETIC METHOD ³.

AUTHOR: ALEX FRANCISCO ESTUPIÑÁN LÓPEZ ⁴.

KEYWORDS: Electron Cyclotron Resonance (ECR), minimum-B magnetic trap, plasma heating, Particle-In-Cell (PIC) method.

DESCRIPTION:

Electron Cyclotron Resonance Ion Sources (ECRIS) are devices predominantly designed to generate highly charged ion beams. In these systems, a minimum-B magnetic trap formed by the superposition of an axial magnetic field produced by a pair of current coils and a radial magnetic field formed by a cusp multipole system is harnessed for plasma confining. In this work, plasma heating in a TE_{111} cavity excited by $2,45\text{ GHz}$ microwave energy at electron cyclotron resonance conditions is studied numerically. The interaction of hydrogen plasma particles with microwaves is simulated through a $3D$ relativistic code Particle-In-Cell (PIC) developed by us. The magnetostatic field is calculated using the Biot-Savart law. The evolution of the self-consistent electromagnetic field is determined through the Yee's method. The plasma current density is calculated starting off with the particles positions and their velocities via a conservative charge method proposed by T. Umeda. New positions and velocities are calculated solving the relativistic Newton-Lorentz equation by using the Boris method.

We present the spatial distribution of electrons and their energetic spectrum after 96 ns of calculations at an initial homogeneous plasma density of $2 \times 10^{10}\text{ cm}^{-3}$, and a maxwellian distribution for velocities with an initial electron temperature of $5,44 \times 10^{-4}\text{ eV}$. The simulation has revealed that the electron population can be divided into three types: cold (with the energy less than 1 keV), hot (of $1 - 10\text{ keV}$) and superhot (with the energy higher than 10 keV).

³Master Thesis.

⁴Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Doctor en Física.

La historia de la fuente de iones ECR (siglas en inglés de *Electron Cyclotron Resonance*) se inicia a finales del año 1960, cuando se desarrolló el calentamiento por resonancia ciclotrónica electrónica, como una técnica para calentar el plasma en dispositivos de confinamiento magnético utilizados en la investigación de fusión nuclear [1]. En 1970 se propuso la producción de iones de alto estado de carga en dispositivos de plasma utilizando calentamiento [2]. Las primeras fuentes que utilizaron ese mecanismo para producir iones multicargados se desarrollaron en 1972 en Francia por el físico experimental Richard Geller [3] y en Alemania por Wiesemann [4]. En 1974, Richard Geller y sus colaboradores fabricaron una fuente de iones ECR al transformar un dispositivo de trampa magnética tipo espejo (CIRCE) [5] en una fuente de iones denominada SUPERMAFIOS [6]. SUPERMAFIOS fue equipado con solenoides para generar un campo magnético axial y una configuración de imanes hexapolar para producir un confinamiento radial. La superposición de los campos hexapolar y longitudinal producen una configuración de campo magnético mínimo-B que estabiliza el plasma contra las inestabilidades MHD. (Ver la figura 0.1). El siguiente paso consistió en el desarrollo de fuentes de menor consumo de energía mediante el uso de imanes permanentes de alta resistencia (NdFeB), en una configuración hexapolar, con el objetivo de mejorar el confinamiento transversal del plasma.

El funcionamiento de una ECRIS se basa en el calentamiento de plasmas confinados en trampas magnéticas mínimo-B, calentados por ondas electromagnéticas en condiciones ECR y ha sido objeto de estudios teóricos y experimentales desde 1960 [7–10]. En estos sistemas, cuyo campo magnetostático tiene una configuración compleja, se encontró experimentalmente que se generan electrones de energías relativamente altas (del orden de centenas de kiloelectron-voltios) [11]. El mecanismo de generación de estos electrones supercalientes fue desconocido por décadas hasta el año 2002 en el cual V. Dougar y coinvestigadores, basándose en datos experimentales y en simulaciones del Plasma en trampas magnéticas mínimo-B, plantearon la hipótesis de que los electrones de alta energía aparecen debido a un mecanismo de automantenimiento de las condiciones ECR cuando estos se mueven sobre una superficie de resonancia hacia regiones de mayor intensidad del campo magnético estático [12].

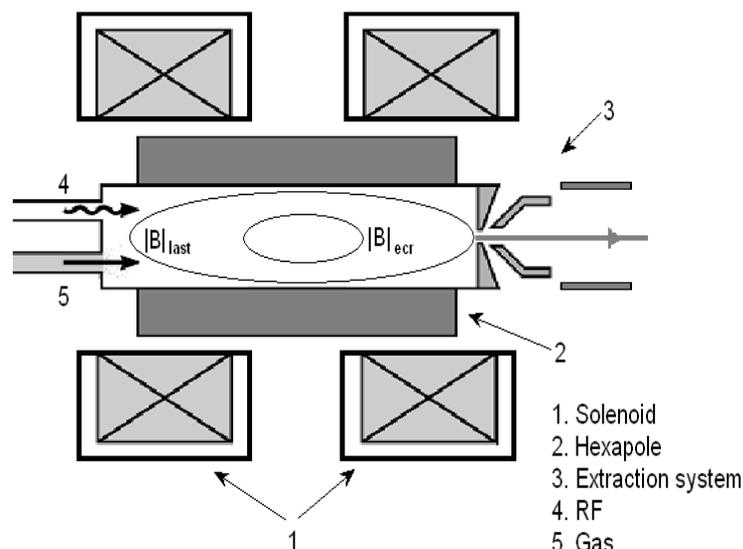


Figura 0.1. Vista esquemática de una fuente de iones ECR. Figura extraída de [6].

Los estudios de las fuentes de iones se enfocan principalmente en la generación, extracción y transporte de haces iónicos. Los dos últimos son aspectos muy bien entendidos, mientras que el proceso de generación de iones es el más complejo debido a los procesos plásmicos asociados, tales como: difusión ambipolar, recombinaciones, emisiones, interacción con la superficie de la cavidad etc.

Las fuentes iónicas basadas en el fenómeno de Resonancia Ciclotrónica Electrónica (ECRIS) con trampa magnética tipo Mínimo-B, se han convertido en una herramienta de uso generalizado para la producción de haces de iones multicargados. Estos haces iónicos tienen una amplia gama de aplicaciones en investigaciones científicas, procesos tecnológicos e industriales y en medicina; sus aplicaciones están determinadas por la energía.

Los iones de baja energía son utilizados en espectroscopía de rayos x, física atómica y en tecnología de metales y semiconductores, al igual que en el estudio de impurezas de átomos pesados en los dispositivos termonucleares. Los iones de energía media y alta tienen un amplio uso en la física del estado sólido y en medicina. Los iones acelerados hasta energías relativistas y superrelativistas (del orden de 1 GeV por nucleón y más) crean las condiciones experimentales para el estudio del plasma de quarks-gluones y la obtención de novedosos estados de la materia (superdensa y supercaliente) [13].

Dado que el estudio del plasma como un sistema de muchas partículas, calentado en condiciones de ECR en una configuración de trampa magnética mínimo-B presenta dificultades insuperables para un estudio teórico, relacionadas con no-linealidad del problema y la no claridad en los fenómenos físicos que ocurren al interior del plasma, el sistema se estudia mediante simulación computacional, la cual tiende un puente entre las leyes y principios físicos con los experimentos reales, esclareciendo detalles del comportamiento tanto colectivo como de las partículas individuales del plasma [14].

Existen diferentes modelos, para simular un plasma de acuerdo a sus características. Las ecuaciones de la aproximación hidrodinámica se deducen a partir de las ecuaciones cinéticas. Por ejemplo, cuando las dimensiones características del plasma son muchísimo mayor, que la longitud de camino libre de iones y electrones, los tiempos característicos de procesos ocurridos en el plasma son muy grandes respecto al tiempo entre dos colisiones. En este modelo el plasma es tratado como una mezcla de líquidos electrónicos e iónicos. Las condiciones anteriores se pueden cumplir en plasmas de alta densidad, que no es el caso de plasmas confinados en trampas magnéticas, ya que en este caso, la longitud de camino libre es mayor que las dimensiones del volumen de confinamiento. Estos dispositivos de confinamiento se encuentran bajo la influencia de campos externos y campos autosostenidos de largo alcance y su simulación se puede efectuar apropiadamente mediante métodos de partículas.

Esto se logra resolviendo numéricamente las ecuaciones cinéticas del plasma: Ecuación de Vlasov para plasmas acolicionales (densidades de partículas $n \leq 10^{12} \text{ cm}^{-3}$) o la ecuación de Fokker-Planck para plasmas colisionales [10]. Para esto se utiliza uno de los métodos más destacados en el estudio de la dinámica de muchas partículas ($\sim 10^{12}$); conocido como PIC (*Particle-In-Cell*, por sus siglas en inglés) [7, 15], la cual permite usar macropartículas o superpartículas, las cuales son grupos de partículas de la misma especie cercanas entre sí en el espacio de fase (posición y velocidad) de las partículas que estas representa. Dichas superpartículas, sustituyen un grupo real de partículas y por consiguiente una parte de la función de distribución de las mismas, permitiendo que la relación carga-masa permanezca constante; ya que el movimiento de las partículas y de las superpartículas bajo los efectos de campos electromagnéticos son equivalentes, de tal forma que las superpartículas pueden describir satisfactoriamente los efectos colectivos del

sistema a estudiar. Es de gran importancia resaltar que la técnica PIC ocupa el primer lugar en el área de simulaciones del comportamiento cinético de plasmas [16–23].

En este trabajo se propone comprender el mecanismo de calentamiento del plasma como elemento esencial en la generación de iones multicargados en una fuente de iones ECR, realizando una simulación autoconsistente con el objetivo de estudiar la evolución de las partículas y el campo electromagnético en el interior de la fuente de iones ECR, como lo son el campo generado por la fuente de microondas, campo autoconsistente por el plasma y el campo magnetostático creado por la trampa magnética mínimo-B [24], mediante la técnica de simulación autoconsistente basada en el método PIC electromagnético. A partir de estas simulaciones se pretende estudiar las características de los electrones que forman el plasma, como lo son; los espectros energéticos, trayectorias y distribución espacial, así como el diagnóstico del campo electromagnético presente en el sistema.

1.1. Generalidades del plasma

1.1.1. Definición del plasma

Se define el plasma, como el cuarto estado de la materia y fue descrito por primera vez por el químico Irving Langmuir [25] en la década de 1920 [26], el cual está formado por iones positivos y electrones. En la figura 1.1 se pueden ver los diferentes casos en los cuales se puede encontrar plasma en el universo.

El plasma se crea cuando se le transfiere energía a un gas para que algunos de sus electrones abandonen sus átomos, fenómeno denominado ionización. Dando como resultado partículas cargadas negativamente (electrones) y iones cargados positivamente (nucleos atómicos, comunmente de Hidrógeno) [27]. A diferencia de los otros estados de la materia, las partículas cargadas en un plasma reaccionan fácilmente a los campos electromagnéticos.

1.1.2. Longitud de Debye o apantallamiento de Debye

Se denomina como la máxima distancia en la que una partícula cargada será influenciada por el campo eléctrico generado por otra partícula cargada.

En un plasma, el medio que se encuentra en el fondo puede ser tratado como el vacío ($\kappa = 1$), y la longitud de Debye puede escribirse como sigue:

$$\lambda_D = \frac{\epsilon_0 k_B / e^2}{n_e / T_e + \sum_{ij} j^2 n_{ij} / T_i}, \quad (1.1)$$

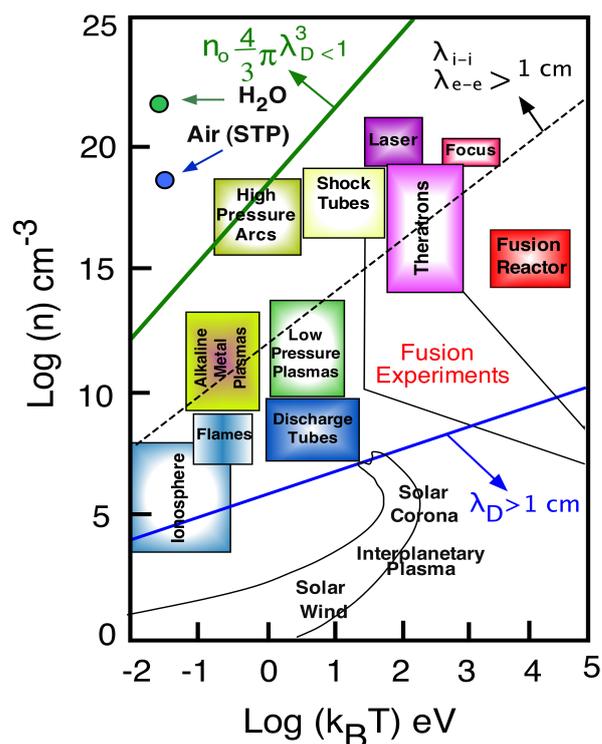


Figura 1.1. Clases de plasma que se pueden encontrar en la naturaleza, dependiendo de la energía térmica y de la concentración de partículas en el plasma. Figura extraída de [29].

el término iónico es despreciable frente al término electrónico, aunque esto es válido sólo cuando la movilidad de los iones es despreciable comparada con la escala de tiempo del proceso, obteniéndose la expresión:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}, \quad (1.2)$$

donde λ_D es la longitud de Debye, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, k_B es la constante de Boltzmann, e es la carga del electrón, T_e y T_i son las temperaturas de los electrones y de los iones, respectivamente, n_e es la densidad de electrones y n_{ij} es la densidad de especies atómicas i , con carga iónica positiva je .

El potencial electrostático asociado a una distribución de carga $\rho_{\text{ext}} = q \delta(\mathbf{r})$, en un plasma está dado por:

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}, \quad (1.3)$$

para distancias $r \ll \lambda_D$, el potencial $\Phi(r)$ es idéntico al potencial de una partícula de prueba en el vacío mientras que para distancias $r \gg \lambda_D$, la carga de prueba está completamente apantallada por la nube de cargas alrededor de ésta (Véase la figura 1.2). El radio nominal de la nube de apantallamiento es λ_D [30].

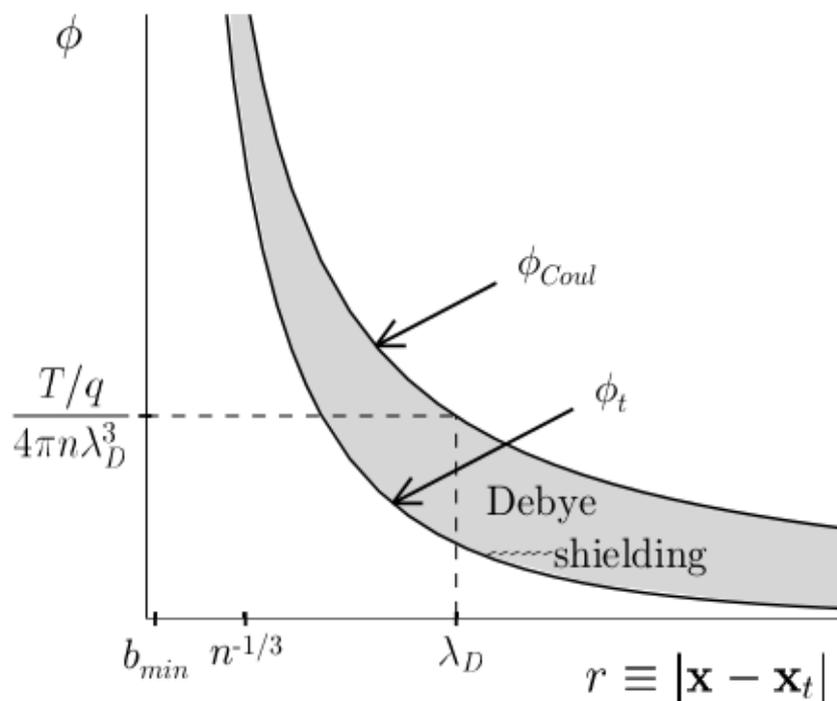


Figura 1.2. Potencial ϕ_t alrededor de una carga de prueba en un plasma y el potencial de Coulomb ϕ_{coul} , ambos como una función de la distancia radial desde la partícula de prueba. La region sombreada representa el efecto del apantallamiento de Debye. Figura extraída de [31].

Así como la longitud de Debye proporciona una medida de las longitudes típicas en un plasma, la frecuencia plásmica (ω_p) describe sus tiempos característicos. Supóngase que en un plasma en equilibrio y sin densidades de carga se introduce un pequeño desplazamiento de todos los electrones en una dirección. Estos sentirán la atracción de los iones en la dirección opuesta; se moverán hacia ella y comenzarán a oscilar en torno a la posición original de equilibrio. La frecuencia de tal oscilación es lo que se denomina frecuencia plásmica. La frecuencia plásmica de los electrones es [32]

$$\omega_{pe} = (n_e e^2 / m_e \kappa_0)^{1/2}, \quad (1.4)$$

donde m_e y e , son la masa del electrón y su carga respectivamente.

1.2. Confinamiento magnético

El movimiento de partículas cargadas eléctricamente está afectado considerablemente por un campo magnético. En ausencia del campo magnético, las partículas calentadas se moverán en líneas rectas en direcciones aleatorias hasta colisionar con otras partículas (electrones, iones, átomos neutros), o golpear las paredes de la cavidad. Cuando se aplica un campo magnético estático, las partículas cargadas seguirán trayectorias en espiral que rodean las líneas de campo magnético disminuyendo el desorden del sistema.

Al plasma confinado mediante un campo magnético, se le conoce como magnetoplasma, donde se encuentran los iones y electrones moviéndose en trayectorias helicoidales debido a su giromovimiento dentro de este campo (Véase la figura 1.3). Al aplicar un campo magnético no homogéneo se busca que las partículas sean desplazadas hacia la zona donde el campo es más débil, impidiendo el escape de partículas fuera de las paredes de la cavidad y contribuyendo al confinamiento.

Según el comportamiento dinámico de las partículas cargadas en campos electromagnéticos, se han postulado diferentes configuraciones de trampas

magnéticas para confinar el plasma en una ECRIS, generadas por bobinas de corriente o imanes permanentes, las cuales son: la trampa tipo espejo (Budker y Post, 1952), la Mínimo-B (Ioffe, 1970) y la Cero-B (Dougar Jabon, 1998), entre otras.

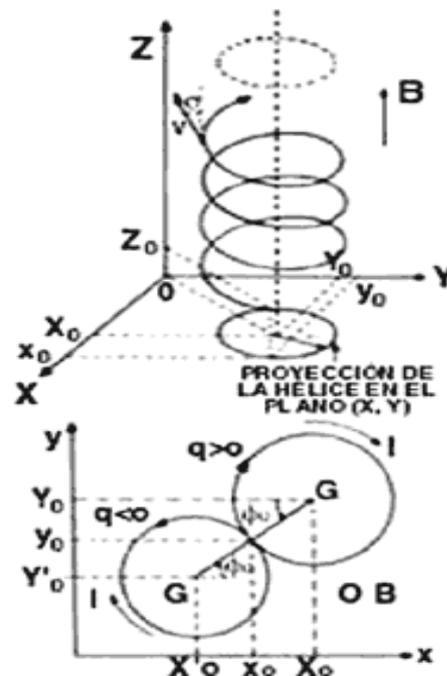


Figura 1.3. (a) Trayectoria en forma de hélice de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme B . (b) La proyección de la trayectoria de la partícula sobre un plano perpendicular al campo B es una circunferencia y el sentido de giro depende del signo de la carga q . Figura extraída de [33].

1.2.1. Configuración tipo espejo

Los procesos que tienen lugar durante un cambio comparativamente lento de las condiciones externas se denominan adiabáticos, tal como ocurre en las trampas magnéticas tipo espejo. La trampa magnética más simple, la cual es creada por dos bobinas coaxiales idénticas en las que fluye la corriente en la misma dirección. En esta trampa, el campo magnético es más intenso en las regiones cercanas a las bobinas y más débil en la región central entre estas (Ver las figuras 1.4 y 1.5).

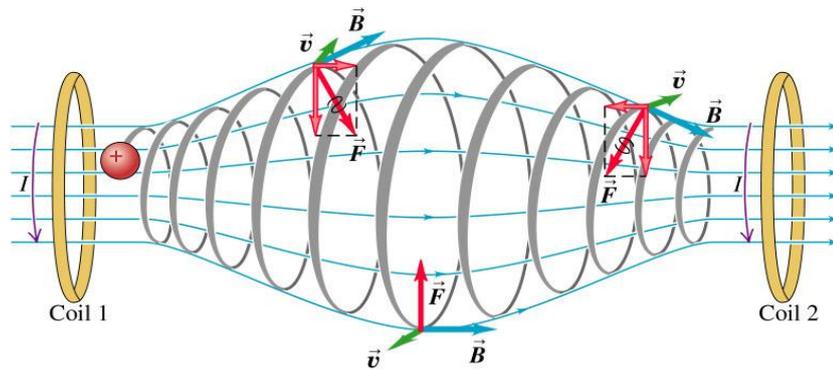


Figura 1.4. Trayectoria de una partícula de carga positiva en una trampa magnética tipo espejo. Además se muestran las líneas de campo magnético, el vector de la fuerza de Lorentz sobre la partícula y la velocidad de la misma. Figura extraída de [35].

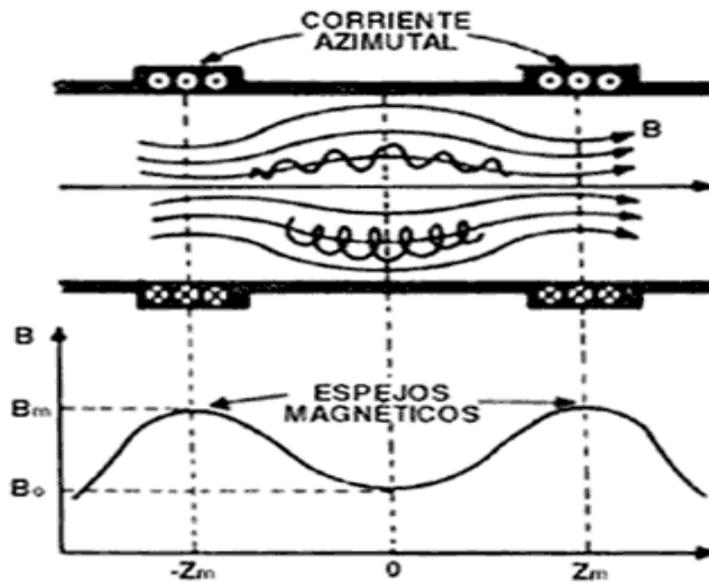


Figura 1.5. Configuración de un espejo magnético formada por dos bobinas separadas que llevan una corriente azimutal; el campo magnético es más intenso en esas zonas y las líneas de campo dejan de ser rectas. Las partículas cargadas quedan atrapadas entre los dos puntos de campo máximo. Figura extraída de [38].

Este método de confinar las partículas en una trampa magnética longitudinalmente (a lo largo del campo) fue propuesto en 1952 por el físico soviético G. I. Budker e independientemente por los científicos estadounidenses R. Post y H. York. En las trampas magnéticas tipo espejo, las partículas cargadas son reflejadas hacia regiones de menor intensidad del campo magnético, siempre que el ángulo entre el vector velocidad y el eje del campo magnético; sea mayor que un ángulo crítico dado por la siguiente expresión:

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{B_M}{B_0}\right), \quad (1.5)$$

donde B_M es el valor máximo del campo magnético y B_0 el valor del campo en la mitad del plano de la trampa magnética (Véase la figura 1.6). La figura 1.4 muestra la trayectoria de una partícula en un campo magnético no uniforme cuya intensidad cambia a lo largo de sus líneas de fuerza.

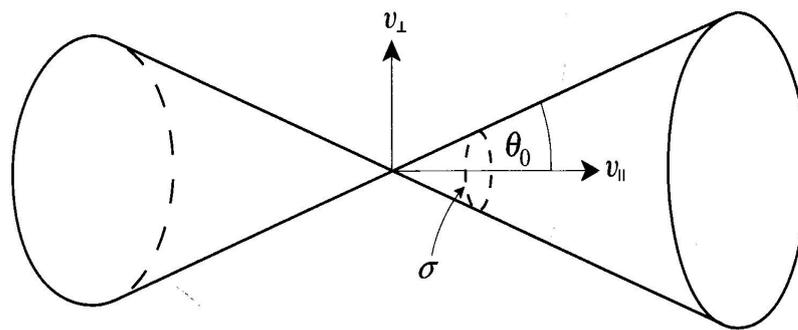


Figura 1.6. Cono de pérdida en el espacio de velocidades de una trampa magnética tipo espejo. Figura extraída de [34].

1.2.2. Configuración tipo Mínimo-B

El problema principal de una estructura de espejo simple, radica en que las inestabilidades plásmicas macroscópicas (por ejemplo, inestabilidades Magnetohidrodinámicas) se excitan porque la presión del plasma disminuye radialmente con el campo magnético [14]. Por lo tanto, el plasma escapará rápidamente en la dirección radial desde la trampa. Es debido a esto que en la mayoría de las fuentes de iones ECR, se utiliza un campo multipolar, usualmente un hexapolo, que produce un campo que aumenta radialmente,

el cual se superpone al campo del espejo magnético para estabilizarse y confinar mejor el plasma. Esto da como resultado una estructura llamada mínimo B (min-B), ya que la intensidad del campo magnético tiene un mínimo en el centro de la estructura y aumenta desde allí en todas las direcciones (Véase la figura 1.7a). La figura 1.7b muestra una vista en 3D de una fuente de iones ECR. Superficies de igual intensidad de campo magnético (isóbaras magnéticas), en una configuración magnética min-B son cascarones anidados cerrados.

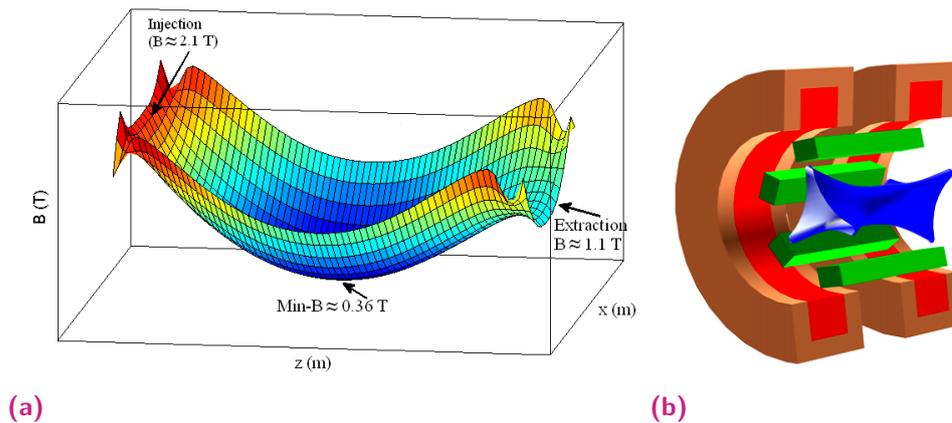


Figura 1.7. (a) Estructura típica del campo magnético (Min-B) de una fuente de iones ECR de 14.1 GHz. (b) Vista 3D de la configuración de la trampa magnética (Min-B) en la fuente. Figuras tomadas de [36].

1.3. Resonancia Ciclotrónica Electrónica (ECR)

Se define a la Resonancia Ciclotrónica Electrónica (ECR, *por sus siglas en inglés*), como un método de excitación de partícula utilizado para el calentamiento de electrones, el cual consiste en la interacción entre una onda electromagnética y la componente electrónica del plasma confinado en el campo magnetostático. Debido a que los electrones giran en torno a las líneas de campo magnético (movimiento de Larmor), la transferencia de energía es máxima cuando la onda electromagnética gira con igual frecuencia que el movimiento rotacional electrónico. En este caso se dice que se presenta el fenómeno de resonancia ciclotrónica electrónica ECR.

Así, la región de campo magnético donde el electrón gira con una frecuencia igual a la de microondas es conocida como zona de resonancia ciclotrónica electrónica o zona ECR y en esta zona se genera un efecto resonante que excitará una gran cantidad de electrones que contribuirán al calentamiento del plasma.

En una fuente de iones de resonancia ciclotrónica electrónica (*ECRIS*, Electron Cyclotron Resonance Ion Source, por sus siglas en inglés); se utilizan imanes permanentes y bobinas de solenoide para generar altos campos magnéticos al interior de la cavidad cilíndrica. Donde todos los electrones libres girarán con la misma frecuencia y se puede calcular con la siguiente ecuación [37, 39]

$$f = \frac{eB(\vec{r})}{2\pi m_e} \quad [Hz], \quad (1.6)$$

donde m_e representa la masa del electrón, e el valor absoluto de la carga del electrón y $B(\vec{r})$ el campo magnetostático que afecta el plasma. Así, todos los electrones que alcanzan estos valores de frecuencia, están ubicados en la superficie ECR.

1.4. Mecanismo SARA (Spatial AutoResonance Acceleration)

En las trampas magnéticas mínimo-B existe un grupo de electrones capturados en el régimen de autoresonancia ciclotrónica espacial, denominados electrones supercalientes; lo cual fue demostrado a partir de simulaciones computacionales [14]. Los primeros en desarrollar un modelo analítico, del fenómeno de aceleración autoresonante en campos magnéticos no homogéneos, fueron Valeriy Dugar-Zhabon y Eduardo Orozco [40]. Este fenómeno denominado SARA, el cual fue probado mediante experimentos numéricos [41]. En este mecanismo, la condición de resonancia es preservada por sí misma (Autoresonancia), la característica fundamental de dicho método consiste en el mantenimiento de las condiciones de resonancia a lo largo

de la trayectoria del electrón, a pesar del aumento del factor de Lorentz a medida que el electrón gana energía. Para mantener las condiciones de resonancia se compensa el aumento del factor relativista mediante un incremento apropiado del campo magnético en la dirección de movimiento del electrón (Ver ecuación (1.4)). Esta es la idea fundamental del mecanismo SARA.

$$\Omega = eB(z)/(m\gamma), \quad (1.7)$$

donde m representa la masa del electrón, e el valor absoluto de la carga del electrón, γ el factor relativista de Lorentz y $B(z)$ el campo magnético longitudinal.

1.5. Dinámica de las partículas cargadas

1.5.1. Descripción cinética

Clásicamente un medio físico puede ser descrito por la posición y el comportamiento de cada una de sus partes. Para un plasma, este está dado por la posición de las partículas \vec{r} y la velocidad \vec{v} de las mismas. En el plano, se pueden tener muchos tipos de partículas (electrones, iones y partículas neutras) que podemos agrupar y describir con una función de distribución $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v})$. Esta expresión se conoce como la densidad de partículas de especie α en el espacio de fase. Así, f_α está dada como la solución de la ecuación de Boltzman [42]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + \frac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = \xi, \quad (1.8)$$

el primer término del lado izquierdo describe los cambios explícitos de la función de distribución en el tiempo, el siguiente término indica los cambios

debido al movimiento en el espacio (convección), mientras que el último término en el lado izquierdo describe las variaciones relacionadas con los cambios en la velocidad (convección en el espacio de velocidad).

En esta descripción, las partículas están sometidas a una fuerza \vec{F}_α y un término colisional ξ , que maneja todas las interacciones entre las partículas, incluyendo los procesos de creación y aniquilación.

Si se ignoran los procesos de aniquilación y de creación, se presentan básicamente dos tipos de colisiones. Una donde las partículas se necesitan “tocar físicamente” entre sí para interactuar, o una interacción de largo alcance como la interacción coulombiana. Un grupo de partículas que interactúan a través de colisiones puede describirse en términos del operador de colisión. Si no existen colisiones fuertes, la ecuación (1.5.1) se reduce a:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + \frac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (1.9)$$

esto describe un llamado plasma acolisional. Esto indica que ya no se describen colisiones fuertes, como con las partículas neutras, sino sólo la interacción de largo alcance (colisiones suaves), como la que se presenta entre partículas cargadas (efecto colectivo). Donde la fuerza F_α , se obtiene con la ecuación de Newton-Lorentz para cada especie de partícula α en el punto de malla p , la cual esta dada por la siguiente expresión:

$$F_\alpha = \frac{d(\gamma m_\alpha \vec{v}_p)}{dt} = q_\alpha (\vec{E}_p + \vec{v}_p \times \vec{B}_p). \quad (1.10)$$

1.5.2. Interacción colectiva

Todas las partículas cargadas generan campos electromagnéticos que causan la interacción entre ellos en la descripción de la ecuación de Vlasov de un plasma acolisional. Los campos electromagnéticos están dados por las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{Ley de Gauss} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{Ley de Faraday} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{Ley de Ampere-Maxwell,}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de la densidad de carga ρ y la densidad de corriente J se expresan como:

$$\rho = \sum_{i=1}^N n_i q_i, \quad \vec{J} = n_i q_i \vec{v}_i, \quad (1.11)$$

donde n_i , q_i y \vec{v}_i son la concentración de partículas, la carga eléctrica y el vector velocidad de las mismas. Donde cabe notar que la suma se realiza sobre las diferentes partículas cargadas presentes en el plasma, electrones e iones.

En la actualidad existen numerosas fuentes para la producción de iones multicargados, siendo cada uno de estas diseñadas para ciertos objetivos científicos o tecnológicos. Las fuentes de iones (ECRIS) son las más adecuadas para diseñar aceleradores de iones pesados a energías muy altas, ya que pueden generar haces de iones multicargados a intensidades relativamente grandes.

En estas fuentes, el calentamiento del plasma y su confinamiento se efectúan predominantemente en trampas magnéticas de mínimo-B, este tipo de trampa magnética consiste en dos bobinas de corriente utilizadas para el confinamiento magnético longitudinal y un sistema hexapolar alrededor de la cavidad para generar un confinamiento transversal del plasma.

En una ECRIS, la frecuencia ciclotrónica electrónica y de la fuente de microondas se mantienen iguales en una superficie casi elipsoidal localizada en el volumen de la trampa. Es crucial calentar los electrones a energías suficientemente altas para ionizar niveles K- y L- de átomos pesados.

A continuación, se muestra el modelo del sistema físico considerado en las simulaciones computacionales en este trabajo.

Un esquema físico de una ECRIS típica se muestra en la Figura 2.1 (lado izquierdo) [48]. El plasma ECR está confinado por el campo magnético mínimo-B, formado por dos bobinas de corriente (1) y el sistema hexapolar de imanes permanentes (2). La cámara de descarga (3) hecha de cobre se coloca dentro del sistema magnético. La cámara de descarga es alimentada por una fuente de microondas con un generador de magnetrón a través del sistema de inyección (4), (5) y (6).

En este trabajo, se utiliza una línea alimentada por microondas transversal al eje de la cámara, que se presenta en la figura 2.1 (lado derecho). En este esquema, dos bobinas de corriente (7) están dispuestas a ambos extremos de la cavidad (1). Las barras hexapolares (6) se colocan en la superficie del cilindro de la cavidad paralelas entre sí de tal forma que la línea alimentada

pasa entre las barras. El sistema magnético se muestra en la Figura 2.1 (lado derecho).

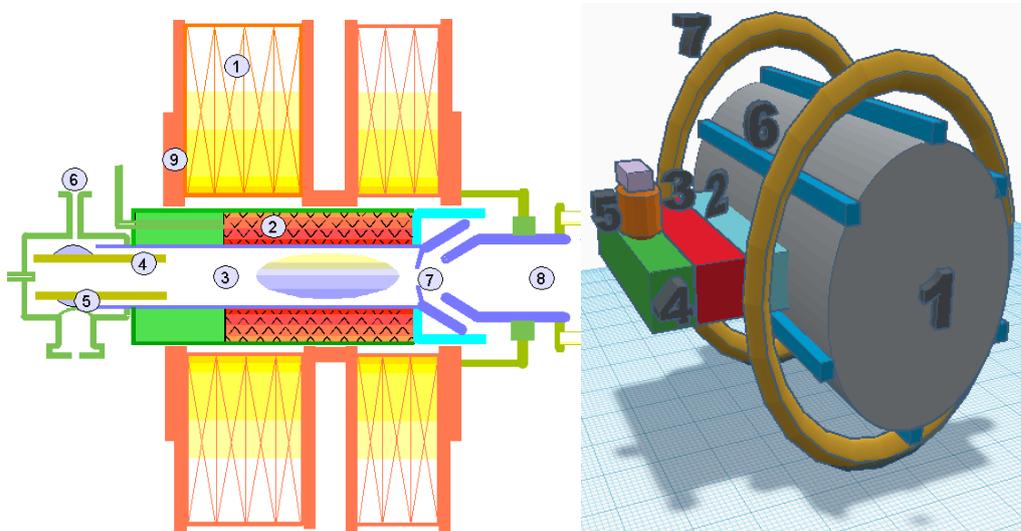


Figura 2.1. (Izquierda) Diagrama esquemático de una fuente ECRIS. 1. Bobinas, 2. Sistema hexapolar, 3. Cámara de plasma, 4. Línea coaxial, 5. Selector, 6. Inyección de radiofrecuencia, 7. Agujero de extracción, 8. lentes de Einzel, 9. yunque. (Figura tomada de [48]). (Derecha) Esquema físico del sistema simulado: 1-Cavidad, 2-Ventana, 3-Aislador de ferrita, 4-Guía de onda, 5-Magnetron, 6-Sistema hexapolar, 7-Bobinas.

La fuente de alimentación para la excitación de las partículas, consiste en un magnetron de frecuencia de inyección igual a $2,45 \text{ GHz}$ ubicado en la guía de onda que se conecta con la cámara a través de una ventana rectangular cuyas dimensiones son $7,65 \times 1,0 \text{ cm}^2$.

La distribución del campo electromagnético en la cavidad se calcula mediante el uso de un método numérico conocido como: "Partícula en celda electromagnético tridimensional" [49].

De todos los parámetros que determinan el rendimiento iónico y los estados de carga iónica, dos de ellos son importantes: el perfil del campo magnetostático y la distribución del campo de microondas en el volumen de la trampa, especialmente la ubicación de la zona ECR en el campo de la trampa magnetostática ubicada en la cavidad cilíndrica.

En este trabajo se realizó la simulación numérica del campo de microondas para un modo vibracional TE_{111} en una cavidad de resonancia cilíndrica de

10 *cm* de largo y 9,1 *cm* de diámetro, que son dimensiones típicas de una ECRIS real. En el cálculo del campo magnético, es importante a tener en cuenta que la zona ECR debe ser lo más grande posible, pero no debe tocar las paredes de la cavidad. El campo magnetostático generado por esta trampa se determina usando la ley Biot-Savart [51].

2.1. Modelo numérico

En nuestro esquema numérico, la simulación computacional se realiza en las siguientes tres etapas:

(i) *Primera etapa*: Obtención del campo para el estado estacionario en la cavidad sin plasma, llena sólo por las ondas de microondas que ingresan al interior de la cámara, a través de un puerto en la superficie cilíndrica. Para este caso el método está descrito en el apéndice 4.1.

(ii) *Segunda etapa*: La cavidad se llena de plasma. Para evitar cualquier divergencia no física inicial en la densidad de corriente, los electrones y los iones se encuentran en las mismas posiciones y velocidades aleatorias, que obedecen a una distribución de Maxwelliana.

(iii) *Tercera etapa*: simulación numérica de la evolución autoconsistente de las componentes del plasma. (Véase el apéndice 4.1), para esta etapa se utiliza el método de PIC electromagnético, cuyo algoritmo se muestra en la figura 2.2 como un ciclo de tiempo computacional que implica los siguientes pasos:

- (i) cálculo de las densidades de corriente en los nodos de malla comenzando con los datos de velocidades y posiciones de las SP;
- (ii) cálculo de los campos totales en los nodos de malla;
- (iii) cálculo de las fuerzas ejercidas sobre las SP que utilizan un Método de interpolación 3D;
- (iv) cálculo de las nuevas posiciones y las velocidades de las SP a través de la integración de sus ecuaciones de movimiento.

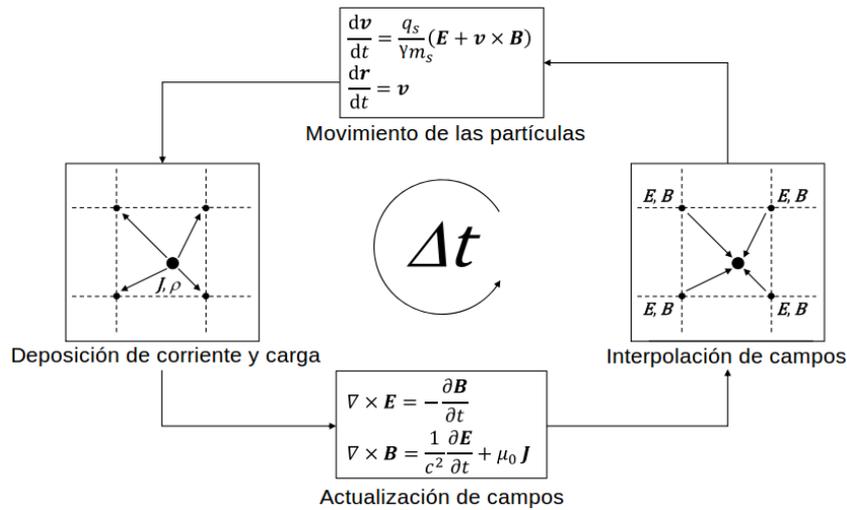


Figura 2.2. Ciclo computacional Particle-In-Cell (PIC) electromagnético.

2.1.1. Precisión y estabilidad

Para garantizar la precisión utilizamos $\lambda_{min}/h = 6,28$, para poder describir la mínima longitud de onda presente en el sistema, la cual es elegida en un caso extremo como $\lambda_{min} = c/f$, donde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío y f es la frecuencia de la onda electromagnética.

Para garantizar la estabilidad numérica utilizamos el criterio de Courant:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}, \quad (2.1)$$

donde Δx , Δy y Δz corresponden a los pasos espaciales en las direcciones x , y y z , respectivamente.

2.1.2. Algoritmo e implementación numérica ²¹

La figura 2.3 muestra el algoritmo utilizado para simular el campo electromagnético en el sistema físico de la figura 2.1. En la celda adyacente a la zona UPML, $i = 11$, se excitan las componentes B_z y E_y del modo TE_{10} en la guía de onda rectangular utilizando el método descrito en [53]. La evolución del campo electromagnético se realiza a partir del conjunto de ecuaciones (4.5-4.26). Para poder implementar estas ecuaciones es necesario definir las propiedades de las zonas UPML.

La condición UPML en Xmin (ver figura 4.1) se implementa mediante la utilización de una función de conductividad polinomial $\sigma_x(x) = (x/d)^3 \sigma_x^{max}$, donde: $d = 10\Delta x$ es el ancho de la zona UPML, x es la distancia desde el borde de la zona interior, isotropa sin pérdidas hacia el interior de la zona UPML y $\sigma_x^{max} = 0,8(m + 1)/(\eta\Delta x)$, con $m = 3$, cuando se usan 10 celdas UPML como en este caso y $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ representa la impedancia intrínseca del medio, vacío en nuestro caso [52]. Adicionalmente elegimos $K_x(x) = 1$.

Un tratamiento similar de las funciones $\sigma_y(y)$, $K_y(y)$, $\sigma_z(z)$ y $K_z(z)$ es irrelevante en nuestro caso porque la imposición de las condiciones de frontera de conductor perfecto (PEC) en las paredes de la guía de onda y la cavidad resonante simulan las reflexiones físicas que confinan la onda electromagnética y solo pueda retornar por el mismo puerto de inyección, las cuales deben ser absorbidas para no producir reflexiones no físicas cuando incidan en el plano $x = x_{min}$.

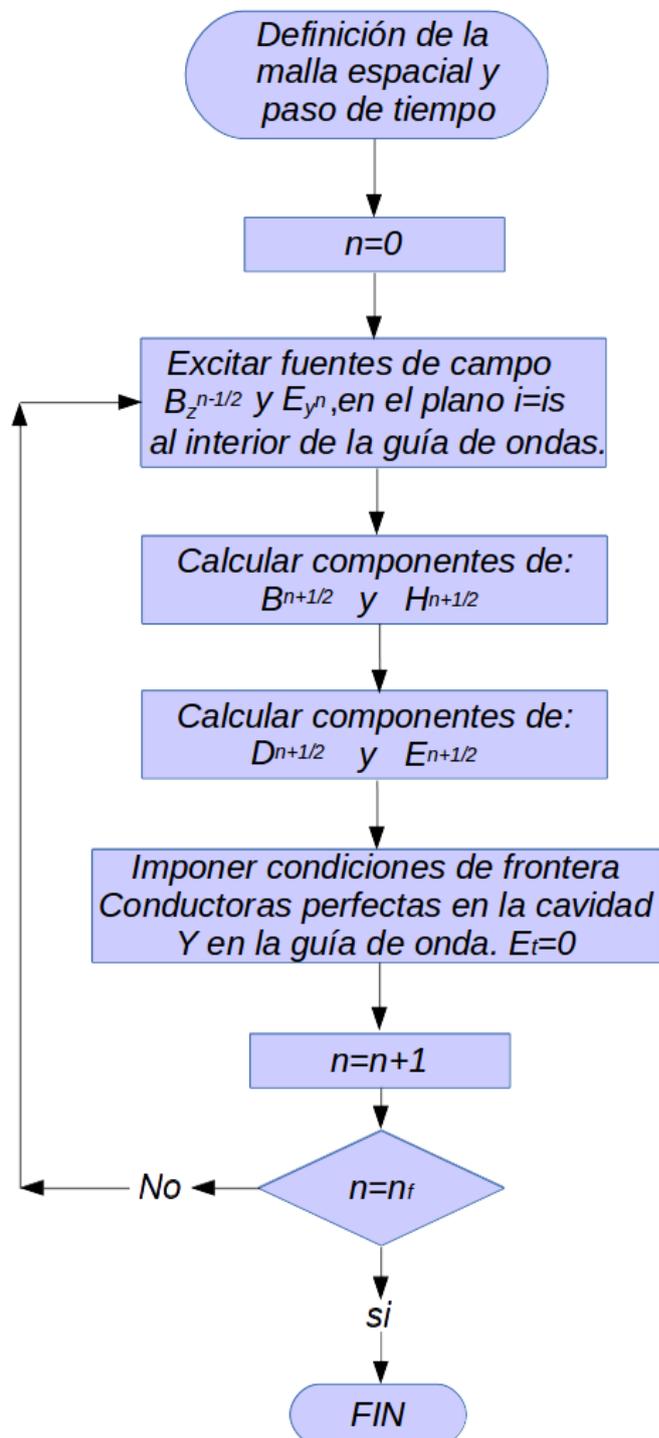


Figura 2.3. Algoritmo utilizado para implementar el método UPML.

3.1. Campo magnetostático de la trampa mínimo-B

Para empezar calculando los campos electromagnéticos que están presentes al interior de la cavidad, lo primero que se debe hacer es poder representar en un diagrama vectorial la dirección del campo y la magnitud del mismo en la cavidad cilíndrica a simular, es por esta razón que utilizando la ley de Biot-Savart para resolver los campos magnetostáticos se pudieron obtener las gráficas del comportamiento del mismo, en el caso del perfil transversal del campo magnético se puede evidenciar el comportamiento del campo vectorial dominado por el sistema hexapolar de los imanes ubicados alrededor de la cavidad cilíndrica que se está simulando, los cuales contribuyen al confinamiento radial del plasma (Véase la figura 3.1).

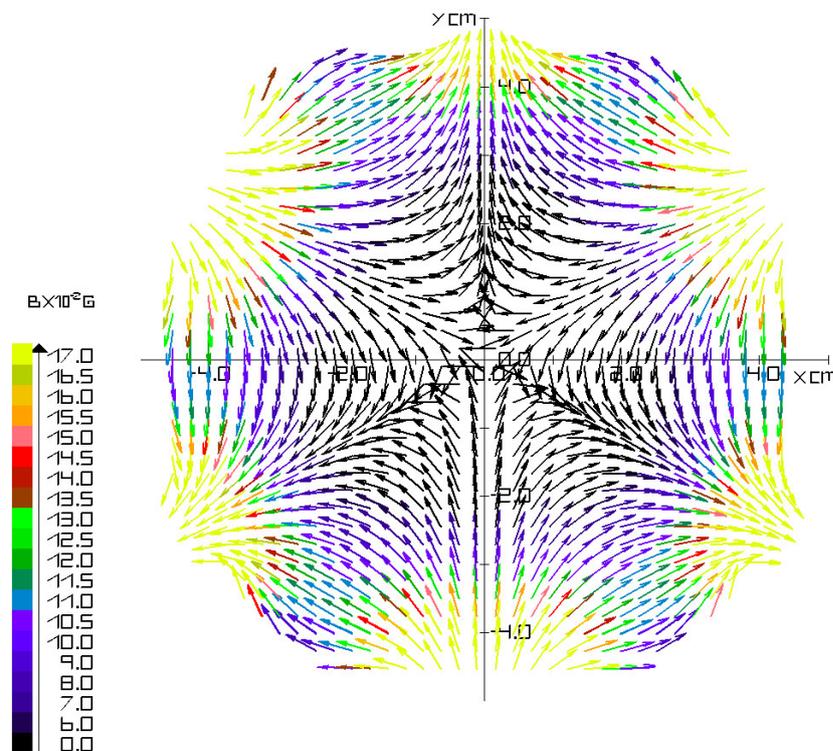


Figura 3.1. Campo magnetostático en el plano transversal $z = 5$ cm.

Además, es importante poder evidenciar el comportamiento a lo largo del eje z del campo magnetostático, en la figura 3.2 se puede ver el perfil de campo magnético, dominado principalmente por las dos bobinas de corriente ubicadas alrededor de los dos extremos de la cavidad, donde se puede resaltar el confinamiento longitudinal del plasma, esperado para este tipo de configuración conocida como trampa magnética mínimo-B.

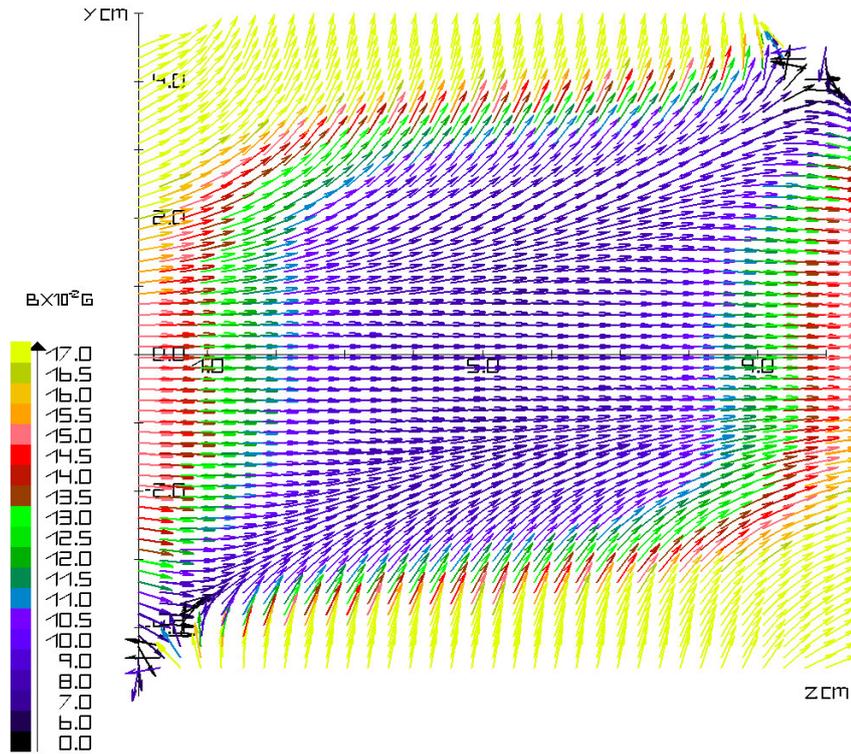


Figura 3.2. Campo magnetostático en el plano longitudinal $x = 0$ cm.

El campo magnetostático de esta trampa se obtiene mediante la superposición del campo producido por dos sistemas. El primero es el campo magnético de la bobina, donde cada bobina se simula como una superposición de vueltas circulares con corriente estacionaria. El segundo es el campo magnético hexapolar. Este campo se calcula utilizando el método del potencial magnético porque todos los imanes hexapolares están fuera de la región de confinamiento. El campo producido por el primero calculado en cada punto de la malla, en coordenadas rectangulares (x, y, z) y en unidades gaussianas es:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{RI}{c} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta(z - z_s)\hat{i} + \sin\theta(z - z_s)\hat{j} - [y\sin\theta + x\cos\theta - R]\hat{k})}{[(x^2 + y^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta) + R^2 + (z - z_s)^2]^{3/2}} d\theta, \quad (3.1)$$

donde R es el radio de giro, el cual está centrado a lo largo del eje z en el punto $(0, 0, z_s)$, I es la corriente eléctrica y c es la velocidad de la luz [24].

El segundo es el campo magnético de los imanes que conforman el sistema hexapolar. Este campo magnético puede calcularse mediante el método de gradiente de potencial magnético escalar dado que no existe ningún imán en la región del confinamiento [62]:

$$\phi_m(\vec{r}) = \int_{s(v)} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{s}' - \int_v \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (3.2)$$

donde ϕ_m es el potencial magnético escalar, $s(v)$ es la superficie de borde del imán, v es el volumen del imán.

3.2. Campo eléctrico generado por la fuente de microondas

La simulación numérica del campo eléctrico de la fuentes de microondas, en la cavidad se realizó para los parámetros físicos mencionados anteriormente. Donde se excitó un campo de microondas cuya amplitud máxima de campo fue de 14 kV/cm y una potencia de entrada de 569 kW se inyecta a través de una guía de onda con el modo fundamental de vibración TE_{10} . Cabe resaltar que en las fuentes reales la amplitud del campo electromagnético utilizado es de $E_0 \approx 1 \text{ kV/cm}$ y una potencia de inyección de $2,9 \text{ kW}$.

Tan alto nivel de potencia de microondas está relacionado con el uso de un sistema de inyección no óptimo para este tipo de simulaciones. Para este sistema, el factor de calidad de la cavidad es demasiado bajo (alrededor de 50). Sin embargo, para un sistema experimental estándar, este factor de calidad puede ser del orden de 10000, por lo que podría obtenerse la misma intensidad de campo eléctrico dentro de la cavidad con una potencia de inyección del orden de kW . En las simulaciones, se toma una aproximación de conductor eléctrico perfecto (PEC) para describir las características eléctricas tanto de la guía de ondas como de las paredes de la cavidad.

El método (UPML, *Uniaxial perfectly matched layer*) se aplica para evitar las reflexiones no físicas de las ondas electromagnéticas que se presentan en las fronteras de la cavidad cilíndrica [52], donde se utilizan paredes absorbentes perfectamente acopladas. Las simulaciones se realizan con una malla rectangular 3D para pasos espaciales iguales a $\Delta x = \Delta y = 0,07\text{cm}$, $\Delta z = 0,2\text{cm}$ y un paso de tiempo $\Delta t = 2,07\text{ps}$, los cuales se eligen de acuerdo con la condición de estabilidad de Courant [63].

En la Figura 3.3, se puede ver la distribución de la intensidad del campo eléctrico en la sección transversal media de la cavidad ($z = L_c/2$, L_c es la longitud de la cavidad).

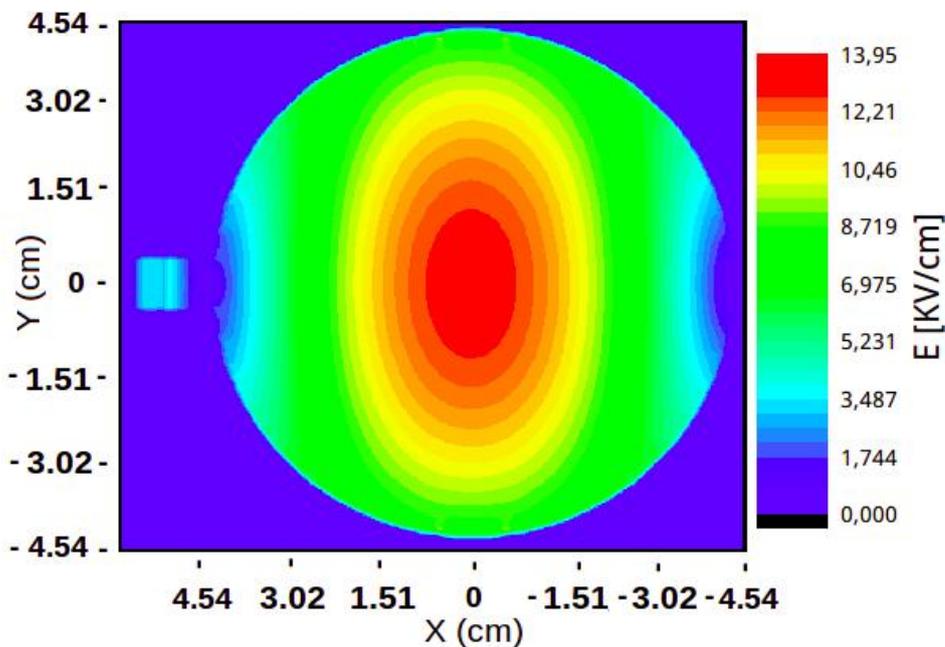


Figura 3.3. Intensidad de campo eléctrico en la sección transversal de cavidad $z = L_c/2$.

Además, en la Figura 3.4 se puede ver la configuración del campo vectorial para el campo eléctrico en $z = L_c/2$, donde se muestra el patrón TE_{111} que puede ser obtenido de las bien conocidas expresiones analíticas y compararse con la solución numérica como se puede ver en la figura 3.5.

A partir de la distribución del campo eléctrico presentada en las figuras 3.3-3.6, se deduce que la zona verde correspondiente al campo eléctrico de orden de $8,7 \text{ kV/cm}$, la cual es apropiada para el calentamiento de los electrones por resonancia. Desde este punto de vista, es útil que la zona

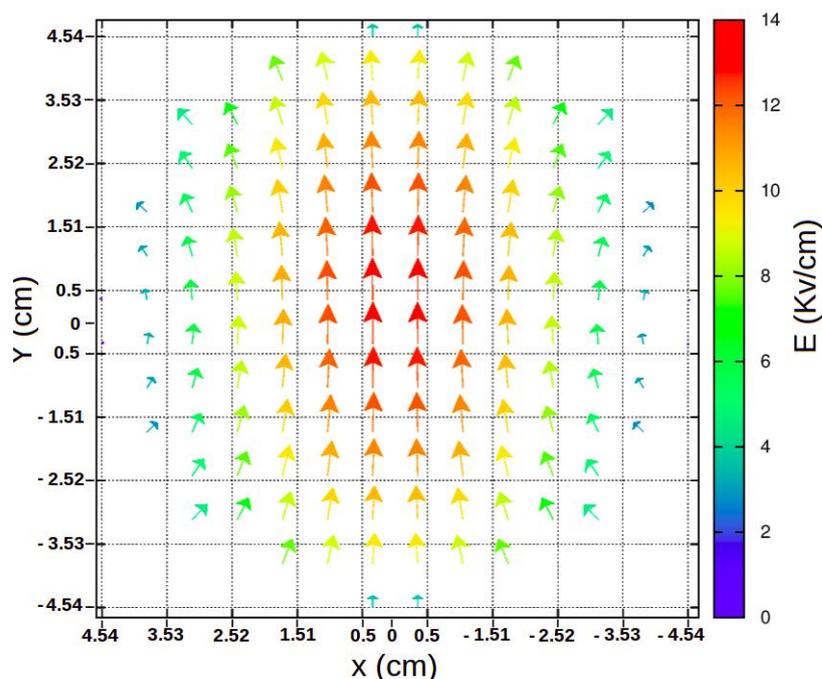


Figura 3.4. Perfil de campo vectorial eléctrico en el plano $z = L_c/2$.

ECR, este muy cercana a valores de campo eléctrico, que oscilen entre 8 – 10 kV/cm .

La geometría de las bobinas y los imanes, el grado de magnetización de la barra y la corriente de la bobina se eligen para que la zona ECR coincida $B(x, y, z) = (m\omega)/(-e) = 87,53 \text{ mT}$ coincida exactamente con la zona verde (Véase la Figura 3.6). Donde m y $-e$ son; la masa de los electrones y la magnitud de la carga eléctrica de los mismos, y ω es la frecuencia angular de la fuente de inyección de microondas.

La forma espacial de la zona ECR, es calculada de acuerdo con el método mencionado anteriormente, se pueden comparar las figuras 3.3-3.6 con las gráficas 3.7 y 3.8, donde se puede evidenciar que las zonas ECR y la región de campo eléctrico de color verde generada por la fuente de microondas están muy cercanas, lo cual nos puede dar un buen indicio del eficiente calentamiento electrónico al interior de la cavidad.

Al elegir esta forma de campo magnetostático para la cavidad, se procede a revisar la distribución del campo de microondas en la cavidad, cuyo modo fue el TE_{111} , debido a que es el modo fundamental y por lo tanto ha sido el más utilizado en muchos estudios en simulaciones de este tipo. Partiendo de estos resultados se pudo demostrar, que en la trampa magnética mínimo-B

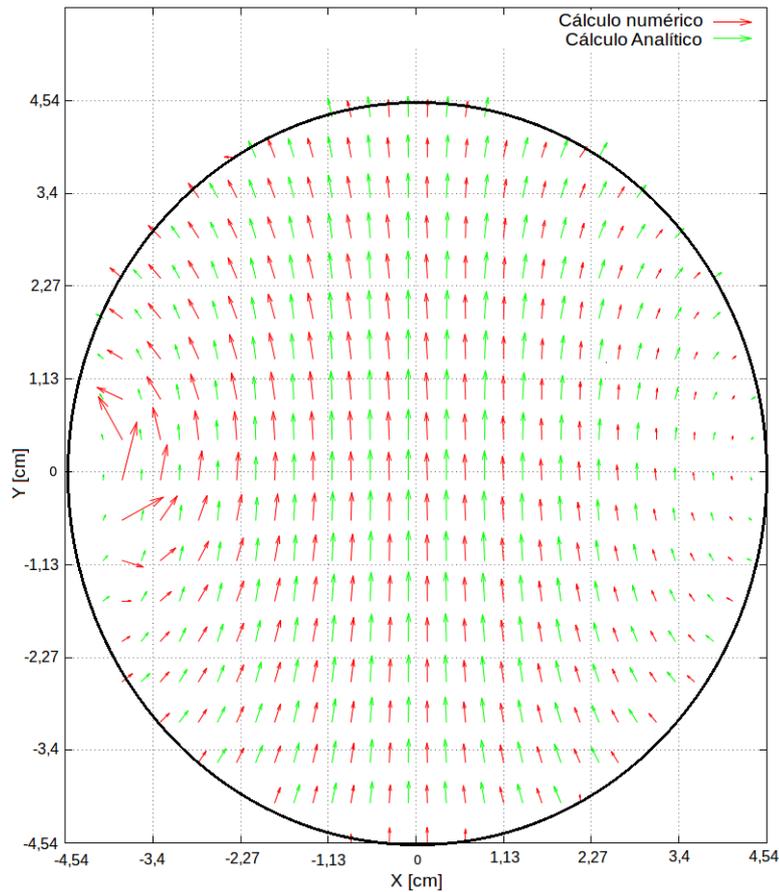


Figura 3.5. Perfil de campo vectorial eléctrico en el plano $z = L_c/2$, donde se presenta el resultado del cálculo analítico y numérico.

elegida, la zona ECR debe ser de tipo elipsoidal como se muestra en las figuras 3.7 y 3.8.

Con el propósito de verificar el comportamiento del campo electromagnético al interior de la cavidad, se realizó el cálculo de la diferencia de divergencia del campo eléctrico y la densidad de carga ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho/\epsilon_0 = 0$) y magnético ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) en cada uno de los puntos de malla que forman parte de la cavidad, y se obtuvo un resultado del orden de 10^{-7} para la divergencia del campo magnético (Véase la Figura 3.9), resultado esperado debido a la inexistencia de monopolos magnéticos y seguidamente se realizó el mismo cálculo pero esta vez para el campo eléctrico, obteniéndose un resultado del orden de 10^{-5} , donde cabe recordar que en este caso la densidad de carga es nula, debido a la ausencia de partículas cargadas (plasma) al interior de la cavidad (Véase la Figura 3.10).

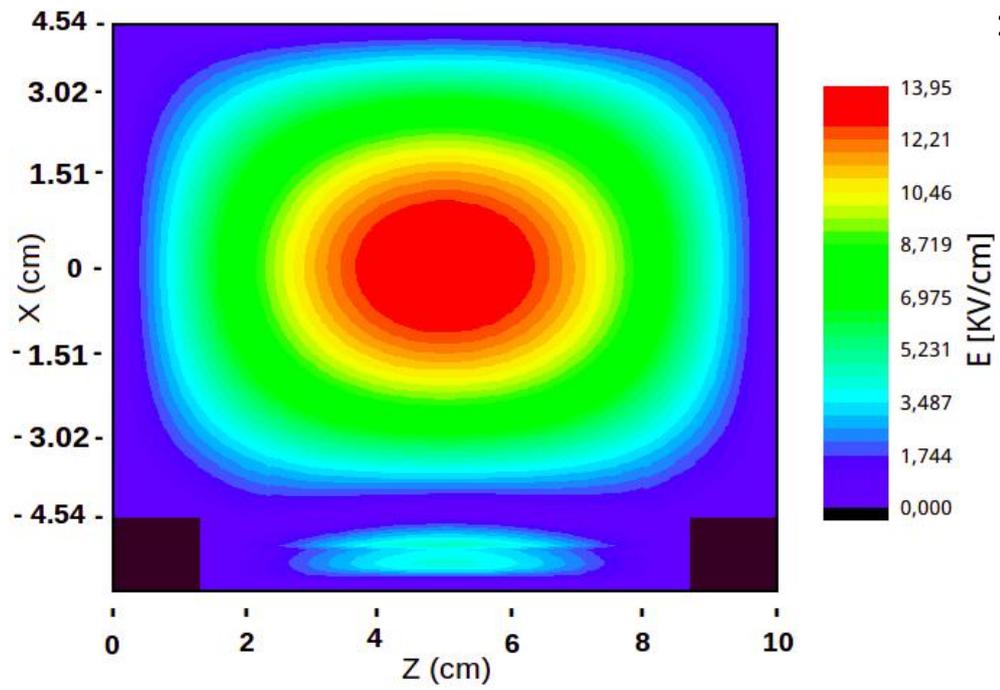


Figura 3.6. Intensidad del campo eléctrico en el plano longitudinal $y = 0$.

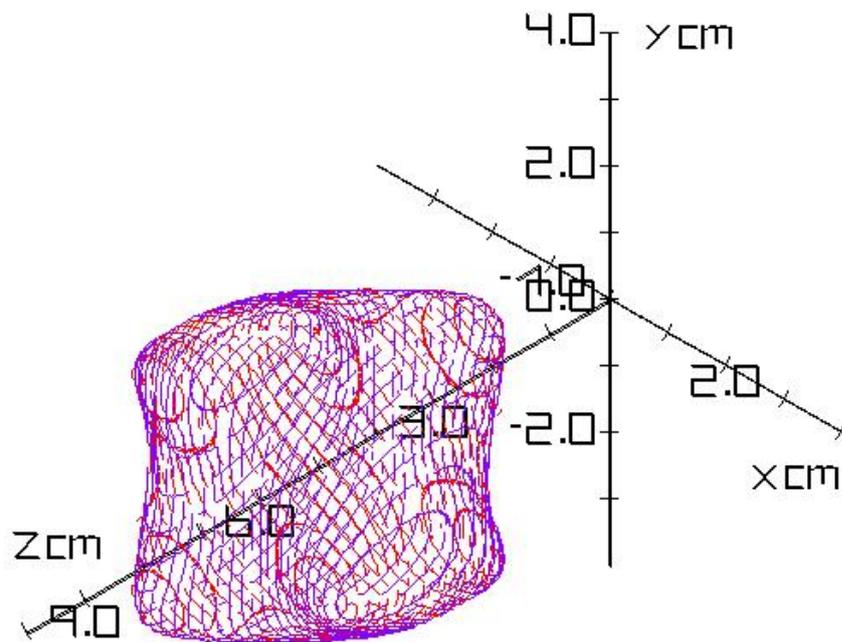


Figura 3.7. Vista tridimensional de zona ECR.

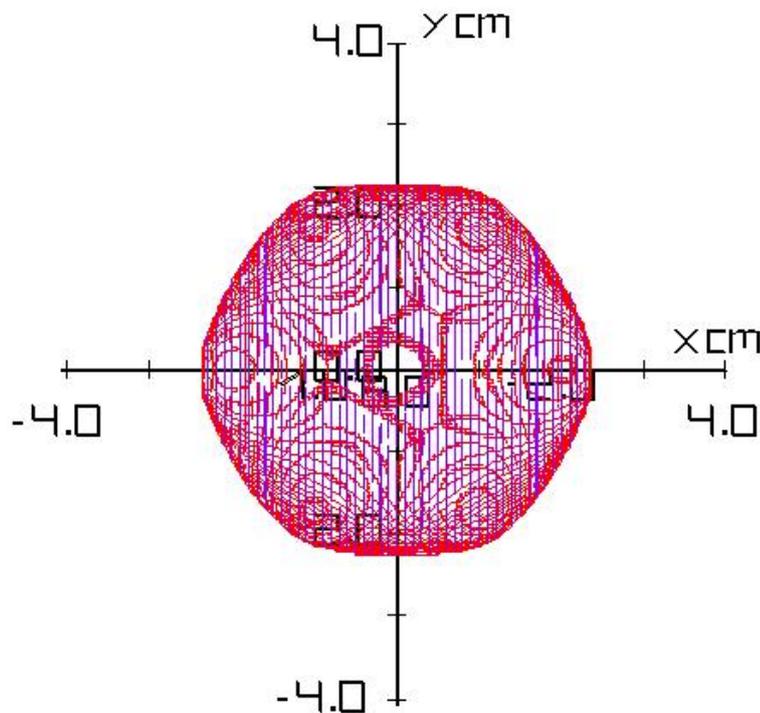


Figura 3.8. Sección transversal de la zona ECR $z = L_c/2$.

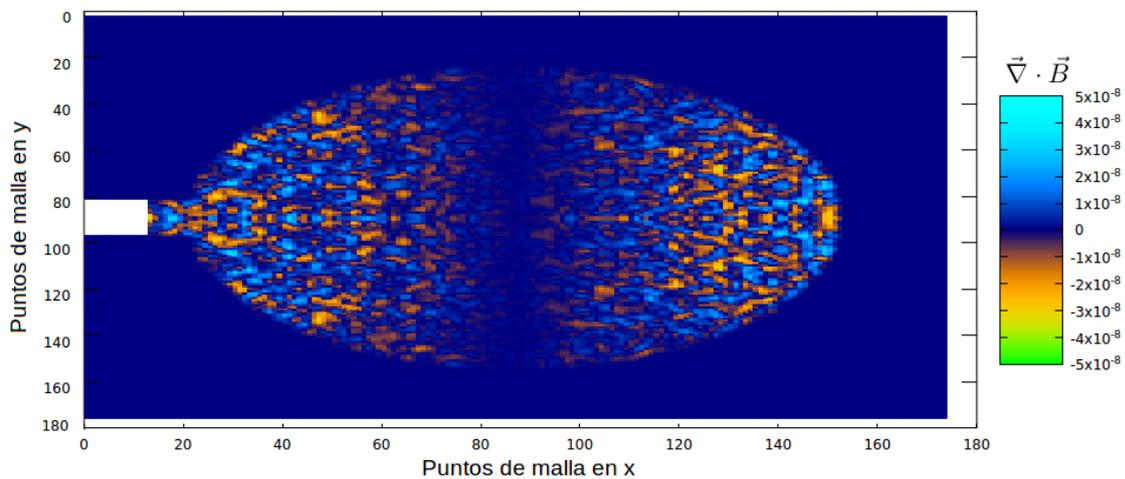


Figura 3.9. Divergencia del campo magnético en el plano $z = L_c/2$.

3.3. Evolución del calentamiento de los electrones

En este trabajo, se realizó la simulación para un número total de partículas (electrones e iones) igual a 3×10^{12} , las cuales se representan en 6×10^6 superpartículas simuladas, que recíprocamente interactúan a través con sus campos eléctricos y magnéticos. En el transcurso de las simulaciones, las

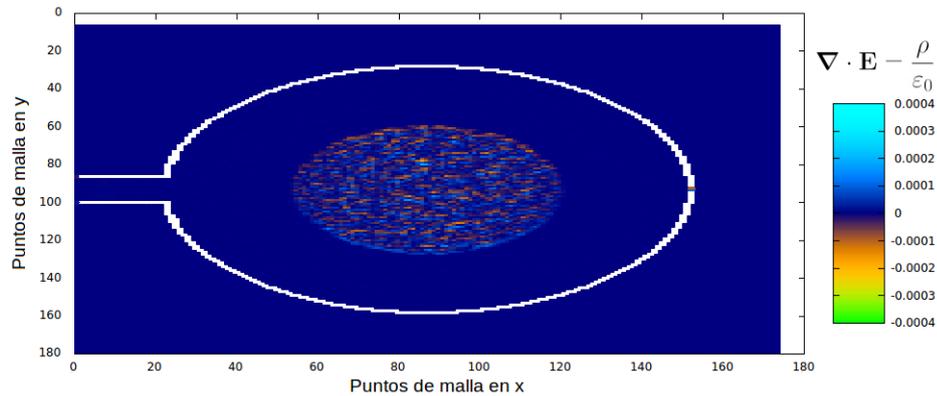


Figura 3.10. Divergencia del campo eléctrico en el plano $z = L_c/2$.

partículas de plasma se redistribuyen al azar en el volumen de la cámara, donde su número total permanece fijo en el interior de la cavidad.

Para empezar, se cargan las partículas en una distribución espacial aleatoria en forma de esfera, donde los electrones y los iones se ubican en la misma posición inicial, con el propósito de satisfacer la ecuación de continuidad y también garantizar la cuasineutralidad local. Además, es importante resaltar que la distribución de velocidades iniciales para el plasma que se utiliza en este trabajo es Maxwelliana, con el objetivo de alcanzar el estado estacionario con el menor tiempo de simulación posible, de esta manera las partículas que forman el plasma llenan la cavidad en una esfera de $2,27 \text{ cm}$ de radio con una energía para los electrones de $0,02 \text{ eV}$ (Véase las figuras 3.11 y 3.12).

En las figuras 3.13 y 3.14, se muestra la distribución espacial energética para los electrones después de 200 ciclos de microondas, donde se puede ver que la densidad del plasma del núcleo excede de lejos a la densidad en la región de la corona. En general, el plasma es acumulado en la vecindad del eje de la trampa simétricamente al centro de la trampa.

Los datos que se muestran en la Figura 3.15 demuestran que la población de los electrones se pueden dividir en 3 grupos: los electrones fríos con energías menores a $0,2 \text{ keV}$, los electrones con energía intermedia entre $0,2$ y 3 keV , los electrones calientes cuya energía oscila entre 3 y 10 keV y por último los electrones super calientes con energías superiores a 10 keV .

Estimando los electrones de energía intermedia y los calientes, éstos constituyen el $90,3\%$ con referencia a la población total de los electrones, la

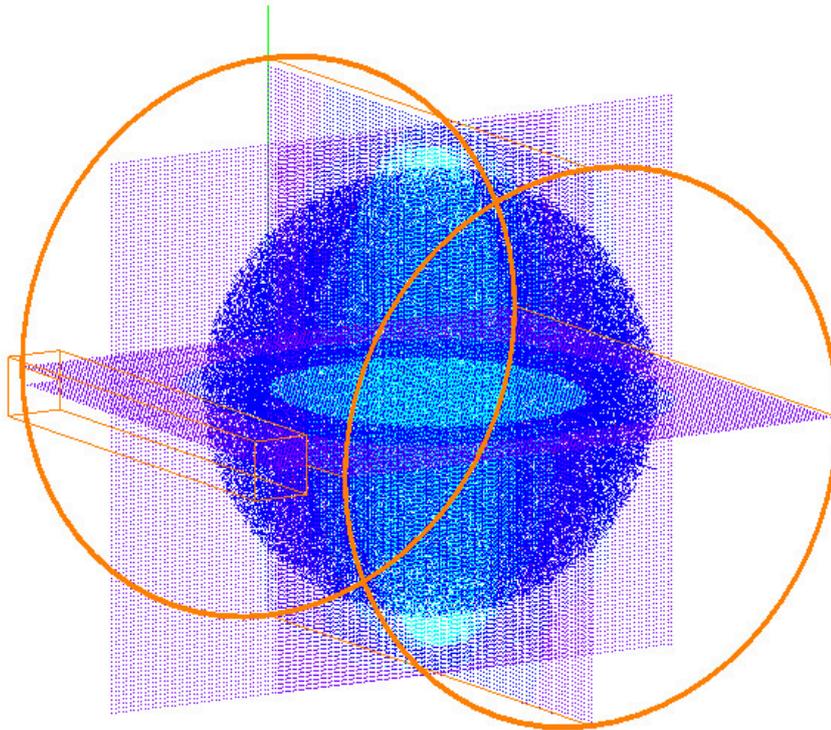


Figura 3.11. Captura de pantalla de la simulación para el instante en que la cámara se llena con el plasma.

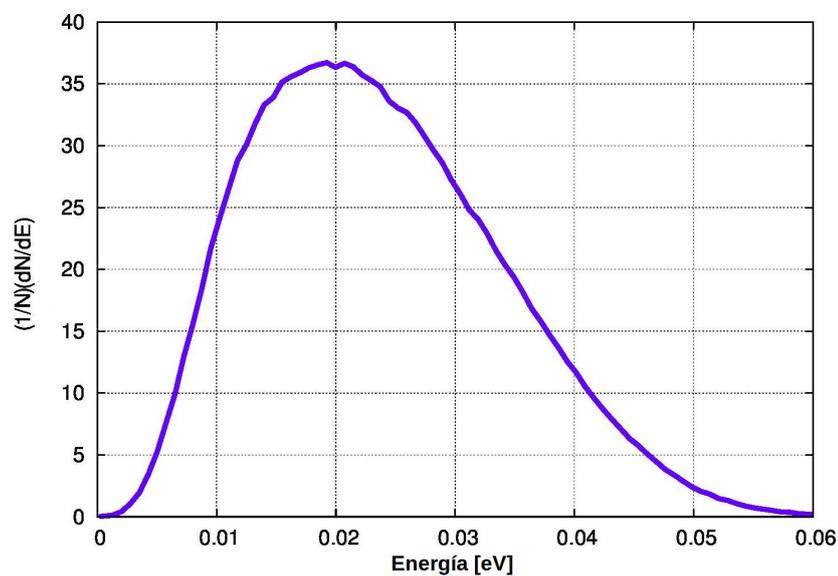


Figura 3.12. Espectro energético para los electrones en el instante correspondiente en el que la cámara está llena de plasma.

contribución de los electrones fríos es del 9,5 % y la fracción de electrones calientes es aproximadamente de 0,2 %.

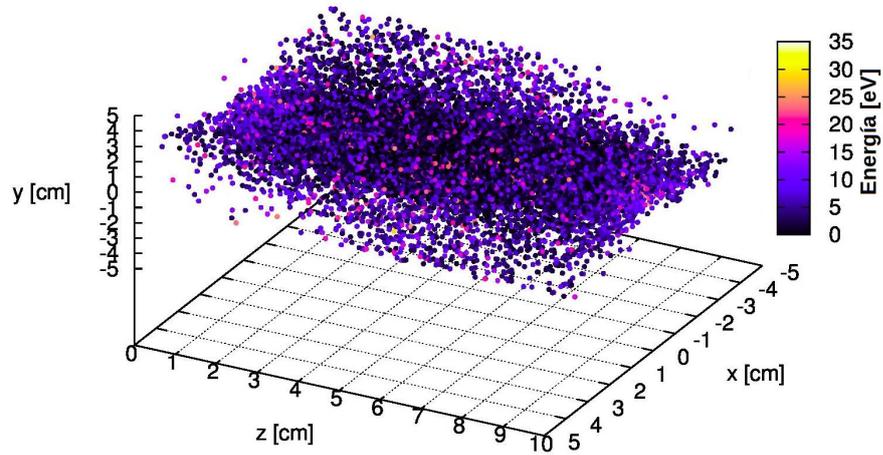


Figura 3.13. Distribución espacial y energética de los electrones después de 200 ciclos, desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.

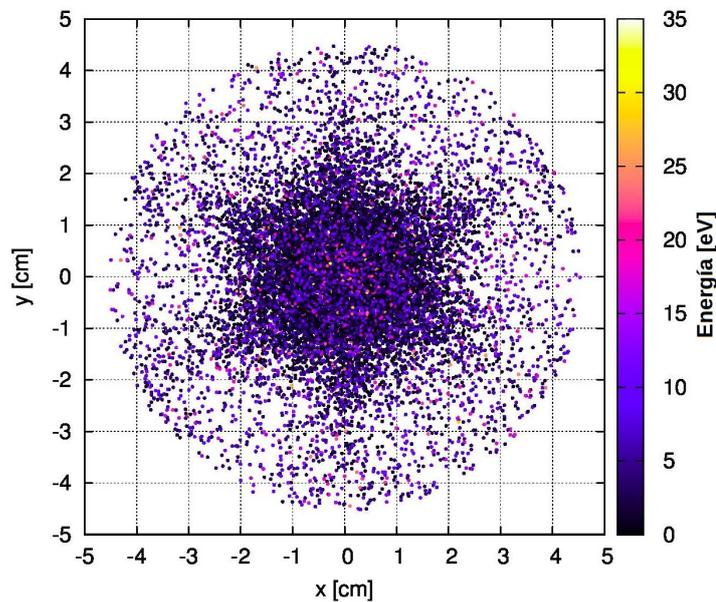


Figura 3.14. Distribución espacial en 2D para los electrones y sus energías, después de 200 ciclos de campo de microondas desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.

La densidad de los electrones con una energía superior a 20 eV , se concentra aproximadamente en el 4% del volumen de la cavidad cilíndrica, con una concentración aún mayor cerca al centro de la misma, dando una distribución conservando el perfil de una función Maxwelliana, la densidad energética promedio de los electrones se muestra en la Figura 3.15. La densidad más energética de los electrones se concentra aún más en el pico de la campana en solo el 3% del volumen de la cavidad. El espectro de energía electrónica en este volumen, se muestra en la Figura 3.15, donde se puede observar una alta concentración de los electrones en el centro radial de la cavidad, mostrando el buen confinamiento magnético al interior de la cavidad, donde

además muy pocos de estos se localizan en las regiones cercanas a los bordes de la cavidad como se puede ver en las figuras 3.13 y 3.14.

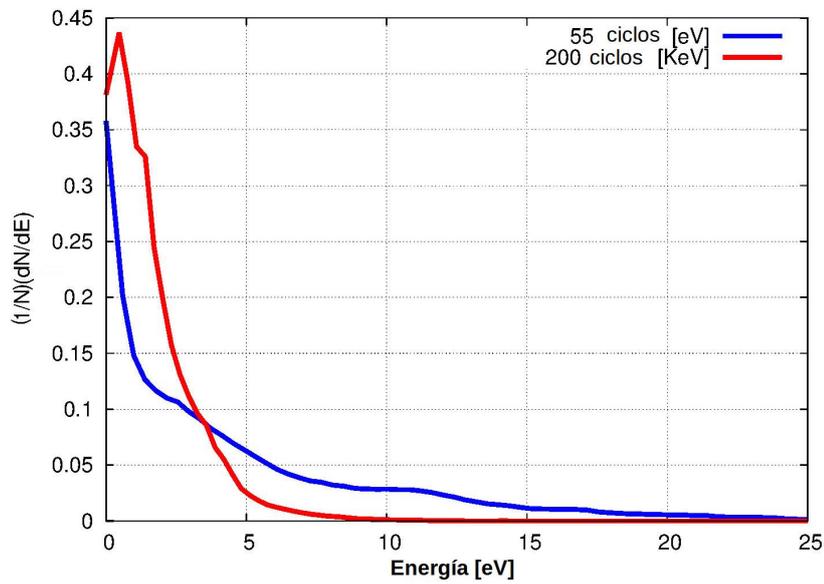


Figura 3.15. Espectro energético para los electrones después de 55 y 200 ciclos de microondas, desde el instante en que la cámara se llena con el plasma.

- Se realizó la simulación de las ecuaciones de Maxwell, usando el algoritmo de Yee incorporando el método UPML, se muestran los resultados de su implementación, para la simulación del campo de microondas usando el modo TE_{111} cilíndrico, en una cavidad excitada mediante una guía de onda acoplada lateralmente a dicha cavidad, los cuales muestran una excelente concordancia con los cálculos descritos en la literatura mediante expresiones analíticas.
- Se utilizaron las ecuaciones de Maxwell de control, la diferencia de la divergencia del campo eléctrico y la densidad de carga ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho/\epsilon_0 = 0$), y la divergencia del campo magnético ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$), con el propósito de verificar la calidad de los cálculos del campo de microondas.
- El software funciona bien para describir el sistema complejo de muchas partículas cargadas, interactuando autoconsistentemente entre sí, con campos electromagnéticos externos, como en el presente caso, en el calentamiento de un plasma en una fuente de iones de resonancia ciclotrónica electrónica (ECRIS).
- la simulación numérica 3D, usando un método Particle-In-Cell (PIC), muestra que el estudio basado en una cavidad cilíndrica excitada, usando un modo TE_{111} por una frecuencia de 2,45 GHz de microondas y amplitud de campo eléctrico 14 kV/cm, pueden calentar los electrones del plasma que tienen una densidad igual a $1,45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ a energías más altas que 10 keV. Los resultados simulados obtenidos evidencian una coexistencia en el plasma ECR confinado magnéticamente, de tres grupos de electrones: los fríos, cálidos y calientes, donde el grupo caliente se encuentra concentrado predominantemente en el centro de trampa.

- Partiendo del código realizado en este trabajo, se quiere tomar como punto de partida para incorporarle un sistema de interacción entre las partículas del plasma más realista, en el que además de incluir la interacción electromagnética de las mismas se incluya también un modelo de colisiones usando el método Monte Carlo (MCC).

- [1] Jacquinot, J., Putvinski, S., Bosia, G., Fukuyama, A., Hemsworth, R., Konovalov, S., ... & Tobita, K. (1999). Plasma auxiliary heating and current drive. *Nuclear Fusion*, 39(12), 2495-2539.
- [2] Saminathan, S. (2011). Extraction and transport of ion beams from an ECR ion source. Groningen (Netherlands): University of Groningen.
- [3] Geller, R. (1996). Electron cyclotron resonance ion sources and ECR plasmas. CRC Press.
- [4] Bohm, C., & Perrin, J. (1993). Retarding field analyzer for measurements of ion energy distributions and secondary electron emission coefficients in low pressure radio frequency discharges. *Review of scientific instruments*, 64(1), 31-44.
- [5] Consoli, T. (1966). Acceleration and Reflection of Plasma by the Gradients of HF and Static Magnetic Fields at the Electron Cyclotron Resonance. In *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vol. II. Proceedings of a Conference on Plasma Physics and Controlled Physics Research Nuclear Fusion Research*.
- [6] Geller, R. (1996). Electron cyclotron resonance ion sources and ECR plasmas. CRC Press.
- [7] Lichtenberg, A. J., Schwartz, M. J., & Tuma, D. T. (1969). Non adiabatic and stochastic mechanisms for cyclotron resonance trapping and heating in mirror geometries. *Plasma Physics*, 11(2), 101.
- [8] Timofeev, A. V. (1974). Confinement of charged particles in adiabatic traps in the presence of monochromatic cyclotron oscillations. *Nuclear Fusion*, 14(2), 165.
- [9] Dandl, R. A., Eason, H. O., Edmonds, P. H., & England, A. C. (1971). Off resonance effects on electrons in mirror-contained plasmas. *Nuclear Fusion*, 11(5), 411.

- [10] Porkolab, M., Friedland, L., & Bernstein, I. B. (1981). Electron cyclotron resonance heating of plasmas in tandem mirrors. *Nuclear Fusion*, 21(12), 1643.
- [11] Ikegami, H., Ikezi, H., & Hosokawa, M. (1967). Tanaka Sh. Takayama K. *Phys. Rev. Lett*, 19, 778.
- [12] Dougar-Jabon, V. D., Umnov, A. M., & Diaz, D. S. (2004). Properties of Plasma in an ECR Minimum-B Trap via Numerical Modeling. *Physica Scripta*, 70(1), 38.
- [13] Geller, R. (1996). *Electron cyclotron resonance ion sources and ECR plasmas*. CRC Press.
- [14] Mao Tsetung Murillo Acevedo, (2014). Tesis doctoral, Estudio Computacional de Confinamiento De Plasmas RCE en Trampas Magnéticas Tipo Espejo, Mínimo-B Y Cero-B.
- [15] Burau, H., Widera, R., Honig, W., Juckeland, G., Debus, A., Kluge, T., ... & Bussmann, M. (2010). PIconGPU: A fully relativistic particle-in-cell code for a GPU cluster. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(10), 2831-2839.
- [16] Hockney, R. W., & Eastwood, J. W. (1988). *Computer simulation using particles*. crc Press.
- [17] Birdsall, C. K., & Langdon, A. B. (1991). *Plasma physics via computer simulation*, Inst. of Phys. Publishing, Bristol/Philadelphia, 32.
- [18] Bruhwiler, D. L., Giacone, R. E., Cary, J. R., Verboncoeur, J. P., Mardahl, P., Esarey, E., ... & Shadwick, B. A. (2001). Particle-in-cell simulations of plasma accelerators and electron-neutral collisions. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 4(10), 101302.
- [19] Luhmann Jr, N. C., & Trivelpiece, A. W. (1978). Properties of an RF produced magnetically confined nonneutral hot electron plasma. *The*

- [20] Dougar-Jabon, V. D., Umnov, A. M., & Diaz, D. S. (2002). Three-dimensional simulation of an ECR plasma in a minimum-B trap. *Review of scientific instruments*, 73(2), 629-631.
- [21] Dougar-Jabon, V. D., Umnov, A. M., & Diaz, D. S. (2004). Properties of Plasma in an ECR Minimum-B Trap via Numerical Modeling. *Physica Scripta*, 70(1), 38.
- [22] Fitzpatrick, R. (2006). *Computational physics. Lecture notes*, University of Texas at Austin.
- [23] Terzić, B., Pogorelov, I. V., & Bohn, C. L. (2007). Particle-in-cell beam dynamics simulations with a wavelet-based Poisson solver. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 10(3), 034201.
- [24] Murillo, M. T., & Otero, O. (2016, February). Simulation of the magnetic field generated by wires with stationary current and magnets with constant magnetization applied to the mirror trap, minimum-B and zero-B. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 687, No. 1, p. 012022). IOP Publishing.
- [25] Goldston, R.J.; Rutherford, P.H. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Taylor & Francis. p. 1-2. ISBN 978-0-7503-0183-1.
- [26] Morozov, A.I. (2012). *Introduction to Plasma Dynamics*. CRC Press. p. 17. ISBN 978-1-4398-8132-3.
- [27] Morozov, A.I. (2012). *Introduction to Plasma Dynamics*. CRC Press. p. 17.
- [28] H. Ikegami, M. Ikezi, S. Tanaka, and K. Takayama, (1967). *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, no. 14, p. 778.
- [29] Fridman, A., & Kennedy, L. A. (2004). *Plasma physics and engineering*. CRC press.

- [30] Bellan, P. M. (2008). *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge University Press.
- [31] Kumar, B., & Crittenden, S. R. (2013). Stern potential and Debye length measurements in dilute ionic solutions with electrostatic force microscopy. *Nanotechnology*, 24(43), 435701.
- [32] Bittencourt, J. A. (2013). *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media.
- [33] van der Poel, A. P., Dulitz, K., Softley, T. P., & Bethlem, H. L. (2015). A compact design for a magnetic synchrotron to store beams of hydrogen atoms. *New Journal of Physics*, 17(5), 055012.
- [34] Deresz, R., & Richard, J. (2009). Acceleration of a Plasma Flow by Oscillating Magnetic Mirrors. In 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (p. 4822).
- [35] Dyson, F. J. (1990). Feynman's proof of the Maxwell equations. *American Journal of Physics*, 58(3), 209-211.
- [36] Leitner, D., Galloway, M. L., Loew, T. J., Lyneis, C. M., Castro Rodriguez, I., & Todd, D. S. (2008). High intensity production of high and medium charge state uranium and other heavy ion beams with VENUS. *Review of Scientific Instruments*, 79(2), 02C710.
- [37] Kolomenskii, A. A. (1963). AA Kolomenskii and AN Lebedev, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 145, 1259 (1962)[*Sov. Phys. Dokl.* 7, 745 (1963)]. In *Sov. Phys. Dokl.* (Vol. 7, p. 745).
- [38] Bulmer, R. H., & Van Sant, J. H. (1980). Tandem mirror magnet system for the mirror fusion test facility (No. UCRL-84309; CONF-801011-27). California Univ., Livermore (USA). Lawrence Livermore National Lab.
- [39] Davydovskii, V. Y. (1963). Possibility of resonance acceleration of charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field.

- [40] Dugar-Zhabon, V. D., & Orozco, E. A. (2009). Cyclotron spatial autoresonance acceleration model. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 12(4), 041301.
- [41] Dugar-Zhabon, V. D., & Orozco, E. A. (2010). Three-Dimensional Particle-In-Cell Simulation of Spatial Autoresonance Electron-Beam Motion. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(10), 2980-2984.
- [42] Numerical methods for the Vlasov equations Eric Sonnendrucker Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (2012/2013). Technische Universität München. Lecture notes Wintersemester.
- [43] Sonnendrücker, E., Roche, J., Bertrand, P., & Ghizzo, A. (1999). The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *Journal of computational physics*, 149(2), 201-220.
- [44] Jin, J. (2002). *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons. Inc., New York.
- [45] Birdsall, C. K., & Langdon, A. B. (2004). *Plasma physics via computer simulation*. CRC press.
- [46] Consoli, T. (1966). Acceleration and Reflection of Plasma by the Gradients of HF and Static Magnetic Fields at the Electron Cyclotron Resonance. In *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vol. II. Proceedings of a Conference on Plasma Physics and Controlled Physics Research Nuclear Fusion Research*.
- [47] Coppi, B., & Sharky, N. (1981). Model for particle transport in high-density plasmas. *Nuclear Fusion*, 21(11), 1363.
- [48] PIconGPU members, ECRIS - *Electron Cyclotron Resonance Ion Source*. (2000-2017). Dresden, Germany. <http://www.slj.uw.edu.pl/en/4.html>.
- [49] “*Three dimensional electromagnetic particle in cell code*” by V.D. Dugar-Zhabon. E.A. Orozco Ospino, Software, Universidad Industrial de Santander (2014).

- [50] Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 14(3), 302-307.
- [51] Murillo, M. T., and Otero, O. (2016, February). Simulation of the magnetic field generated by wires with stationary current and magnets with constant magnetization applied to the mirror trap, minimum-B and zero-B. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 687, No. 1, p. 012022). IOP Publishing.
- [52] Taflove, A., & Hagness, S. C. (2000). *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method in Electromagnetics* (Norwood, MA: Artech House).
- [53] Prescott, D. T., & Shuley, N. V. (1994, June). A technique for analysing frequency selective surfaces using the finite-difference time-domain method. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1994. AP-S. Digest* (Vol. 3, pp. 2152-2155). IEEE.
- [54] Lapenta, G. (2012). Particle simulations of space weather. *Journal of Computational Physics*, 231(3), 795-821.
- [55] Thomée, V. (1984). *Galerkin finite element methods for parabolic problems* (Vol. 1054). Berlin: Springer-Verlag.
- [56] Bateson, W. B., & Hewett, D. W. (1998). Grid and particle hydrodynamics:: Beyond hydrodynamics via fluid element particle-in-cell. *Journal of Computational Physics*, 144(2), 358-378.
- [57] Coppa, G. G. M., Lapenta, G., Dellapiana, G., Donato, F., & Riccardo, V. (1996). Blob method for kinetic plasma simulation with variable-size particles. *Journal of computational physics*, 127(2), 268-284.

- [58] Umeda, T., Omura, Y., Tominaga, T., & Matsumoto, H. (2003). A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations. *Computer Physics Communications*, 156(1), 73-85.
- [59] Villasenor, J., & Buneman, O. (1992). Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers. *Computer Physics Communications*, 69(2-3), 306-316.
- [60] Boris, J. P. (1970). Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. In *Proc. 4th Conf. Num. Sim. Plasmas* (pp. 3-67).
- [61] Qin, H., Zhang, S., Xiao, J., Liu, J., Sun, Y., & Tang, W. M. (2013). Why is Boris algorithm so good?. *Physics of Plasmas*, 20(8), 084503.
- [62] Acevedo, M. M., Dugar-Zhabon, V. D., & Otero, O. (2016, February). Analytical study of the magnetic field generated by multipolar magnetic configuration. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 687, No. 1, p. 012023). IOP Publishing.
- [63] Dugar-Zhabon, V. D., González, J. D., & Orozco, E. A. (2016, February). 3D electromagnetic simulation of spatial autoresonance acceleration of electron beams. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 687, No. 1, p. 012077). IOP Publishing.

Apéndice A. Cálculo de las componentes del campo electromagnético

Las cavidades resonantes de microondas son elementos conductores utilizados para confinar energía electromagnética con intensidades relativamente altas. Dichas cavidades tienen múltiples aplicaciones en el campo de aceleradores de radiofrecuencia (RF) y el calentamiento de plasmas en condiciones ECR, entre otros. En estos sistemas, dichos campos interactúan autoconsistentemente con un sistema de muchas partículas cargadas, como electrones en el primero y electrones e iones en el segundo. Estos sistemas son complejos y no es posible obtener una solución analítica del problema, siendo la herramienta computacional la única alternativa. Para simular apropiadamente tales sistemas es necesario describir la evolución del campo electromagnético dentro de la cavidad, entre otros aspectos.

La solución numérica, para simular el campo de microondas en la cavidad cilíndrica con modo TE_{111} se utilizó el método de Yee, el cual se basa en usar diferencias finitas en el dominio del tiempo $FDTD$, que además utiliza un esquema *leap-frog* de diferencias centradas de segundo orden para discretizar las ecuaciones de Maxwell. Se considera una cavidad resonante perfectamente conductora cuya frontera curva es descrita mediante la aproximación *Staircase*. Dicha cavidad contiene un puerto de inyección de microondas mediante el acople con una guía de onda rectangular que propaga un modo TE_{10} , el cual es excitado en un plano específico de dicha guía.

Para modelar numéricamente el campo de microondas en la cámara de descarga (1) y su inyección a través de la guía de onda (2) del sistema físico de la figura 2.1, utilizamos condiciones de fronteras de conductor perfecto. En el puerto de inyección de microondas se debe utilizar condiciones de fronteras de paredes perfectamente acopladas para evitar reflexiones no físicas en el extremo opuesto de dicho puerto (ver figura 4.1). Esta condición de frontera no sólo evita el crecimiento ilimitado del campo de microondas

en el sistema, sino también produce un efecto equivalente al del aislante de ferrita (3) del sistema físico de la figura 2.1, evitar el retorno del campo de microondas hacia la fuente de excitación.

Por las características de este sistema, un método apropiado para su modela-

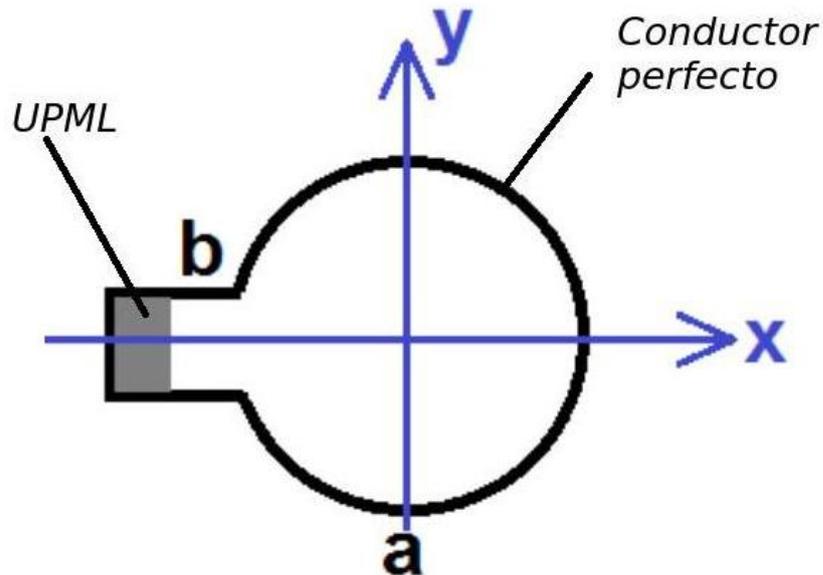


Figura 4.1. Sección transversal del acople guía de ondas-cavidad resonante y especificación de las fronteras.

miento es el *UPML*, un método que resuelve numéricamente las ecuaciones de Maxwell usando un esquema de diferencias finitas en el dominio del tiempo (método de Yee) con condiciones de frontera perfectamente acopladas [52].

A continuación se presenta la formulación 3D del método *UPML*: Las ecuaciones de Maxwell del rotacional que describen la evolución de los campos eléctrico y magnético de frecuencia ω en un medio finito con condiciones *UPML* se expresan en forma fasorial como:

$$\vec{\nabla} \times \check{\check{H}} = j\omega\epsilon\check{\check{S}}\check{\check{E}} \quad (4.1)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \check{\check{E}} = -j\omega\mu\check{\check{S}}\check{\check{H}} \quad (4.2)$$

con:

46

$$\overline{\overline{S}} = \begin{bmatrix} S_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_z & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y S_z S_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & S_x S_z S_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S_x S_y S_z^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde,

$$S_x = K_x + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon} ; S_y = K_y + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon} ; S_z = K_z + \frac{\sigma_z}{j\omega\epsilon} \quad (4.4)$$

El tensor $\overline{\overline{S}}$ describe un medio isótropo sin pérdidas en la zona computacional primaria, y un absorbente *UPML*, ubicado en la región externa de la malla de Yee, región secundaria; la cual permite atenuar las reflexiones no físicas de la onda (reflexiones numéricas). El ajuste de los parámetros S_x , S_y y S_z definen diferentes regiones: zona interna (1) donde se resuelve el algoritmo de Yee, zona externa (2) donde se definen las paredes absorbentes (Ver figura 4.2). K_x , K_y y K_z son constantes del orden de la unidad, mientras que σ_x , σ_y , σ_z representan conductividades eléctricas, relacionadas con la pérdida eléctrica en cada dirección, y ϵ la permitividad eléctrica en cada región.

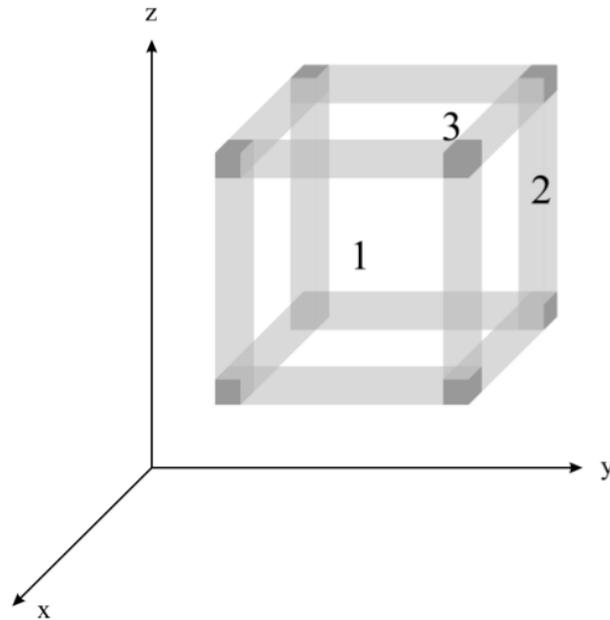


Figura 4.2. Definición de las regiones para el algoritmo UPML: 1-corresponde a la zona interna, donde se resuelve el algoritmo de Yee. 2-corresponde a la zona externa donde se colocan los absorbentes y donde ocurre solapamiento de las esquinas dihedrales. 3-Es la zona externa donde se presenta solapamiento de las esquinas trihedrales.

- **Zona interior, isótropa sin pérdidas:** $S_x = S_y = S_z = 1$ ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ y $K_x = K_y = K_z = 1$)
- **Absorbente UPML en Xmin y Xmax:** $S_y = S_z = 1$ ($\sigma_y = \sigma_z = 0$ y $K_y = K_z = 1$)
- **Absorbente UPML en Ymin y Ymax:** $S_x = S_z = 1$ ($\sigma_x = \sigma_z = 0$ y $K_x = K_z = 1$)
- **Absorbente UPML en Zmin y Zmax:** $S_x = S_y = 1$ ($\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $K_x = K_y = 1$)
- **Solapamiento absorbentes UPML Xmin, Xmax y Ymin, Ymax (esquinas dihedrales):** $S_z = 1$ ($\sigma_z = 0$ y $K_z = 1$)
- **Solapamiento absorbentes UPML Xmin, Xmax y Zmin, Zmax (esquinas dihedrales):** $S_y = 1$ ($\sigma_y = 0$ y $K_y = 1$)
- **Solapamiento absorbentes UPML Ymin, Ymax y Zmin, Zmax (esquinas dihedrales):** $S_x = 1$ ($\sigma_x = 0$ y $K_x = 1$)
- **Solapamiento de los absorbentes UPML en todas las esquinas trihedrales:** se usa el tensor general completo (4.3).

Para este caso la condición de frontera absorbente en x_{min} es la única que participa activamente puesto que el resto del sistema está limitado por paredes conductoras perfectas, las cuales reflejan las ondas electromagnéticas e impiden que alcancen las zonas UPML restantes.

Apéndice B. Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas con frontera (UPML)

Partiendo de la ley de Ampere-Maxwell (4.1), el tensor (4.3), definiendo las relaciones constitutivas como:

$$\check{D}_x = \epsilon \frac{S_z}{S_x} \check{E}_x, \quad \check{D}_y = \epsilon \frac{S_x}{S_y} \check{E}_y, \quad \check{D}_z = \epsilon \frac{S_y}{S_z} \check{E}_z \quad (4.5)$$

y aplicando transformada inversa de Fourier, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones equivalentes en el dominio del tiempo:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}(K_y D_x) + \frac{\sigma_y}{\epsilon} D_x \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(K_z D_y) + \frac{\sigma_z}{\epsilon} D_y \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}(K_x D_z) + \frac{\sigma_x}{\epsilon} D_z \quad (4.8)$$

Análogamente, a partir de la ley de Faraday (4.2) y las relaciones constitutivas:

$$\check{B}_x = \mu \frac{S_z}{S_x} \check{H}_x, \quad \check{B}_y = \mu \frac{S_x}{S_y} \check{H}_y, \quad \check{B}_z = \mu \frac{S_y}{S_z} \check{H}_z \quad (4.9)$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}(K_y B_x) - \frac{\sigma_y}{\epsilon} B_x \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}(K_z B_y) - \frac{\sigma_z}{\epsilon} B_y \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t}(K_x B_z) - \frac{\sigma_x}{\epsilon} B_z \quad (4.12)$$

Utilizando la celda de Yee mostrada en la figura 4.3, la ecuación (4.6) puede aproximarse en diferencias finitas como:

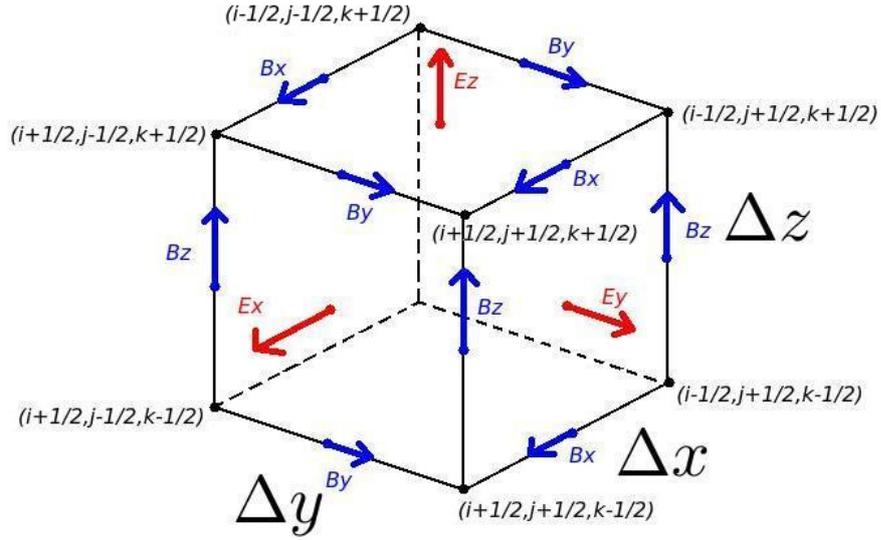


Figura 4.3. Disposición 3D de las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} en una celda de Yee.

$$\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} = K_y(j) \frac{D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) - D_x^n(i+1/2, j, k)}{\Delta t} + \frac{\sigma_y(j)}{\epsilon} \frac{D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) + D_x^n(i+1/2, j, k)}{2} \quad (4.13)$$

O bien:

$$D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_x^n(i+1/2, j, k) + \frac{\Delta t}{K_y(j) \left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} \left[\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} \right] \quad (4.14)$$

Por otra parte, expresando en diferencias finitas centradas:

$$\check{D}_x = \epsilon \frac{S_z}{S_x} \check{E}_x \rightarrow K_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\epsilon} D_x = \epsilon \left(K_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\sigma_z E_x}{\epsilon} \right) \quad (4.15)$$

se obtiene:

50

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} E_x^n(i+1/2, j, k) + \frac{K_x(i+1/2)}{\epsilon k_z(k)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_x^{n+1}(i+1/2, j, k) \\
&- \frac{K_x(i+1/2)}{\epsilon k_z(k)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_x^n(i+1/2, j, k)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Cálculo de las componentes del vector desplazamiento \vec{D} y el campo eléctrico \vec{E} . A continuación se muestra la expresión de la componente y .

$$\begin{aligned}
D_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} D_y^n(i, j+1/2, k) + \frac{\Delta t}{k_z(k) \left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]} \\
&\frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k-1/2)}{\Delta Z} \\
&- \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i-1/2, j+1/2, k)}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(k)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} E_y^n(i, j+1/2, k) \\
&+ \frac{K_y(i+1/2)}{\epsilon k_x(i)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_y^{n+1}(i, j+1/2, k) \\
&- \frac{K_y(j+1/2)}{\epsilon k_x(i)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_y^n(i, j+1/2, k)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Cálculo de las componentes del vector desplazamiento \vec{D} y el campo eléctrico \vec{E} . A continuación se muestra la expresión de la componente z .

$$\begin{aligned}
D_z^{n+1}(i, j, k+1/2) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} D_z^n(i, j, k+1/2) + \frac{\Delta t}{k_x(i) \left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]} \\
&\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j - 1/2, k + 1/2)}{\Delta y} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) &= \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} E_z^n(i, j, k + 1/2) \\ &\quad - \frac{K_z(k + 1/2)}{\epsilon k_y(j)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) \\ &\quad - \frac{K_z(k + 1/2)}{\epsilon k_y(j)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]} D_z^n(i, j, k + 1/2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Las ecuaciones que determinan la evolución del campo magnético se obtienen de un modo similar. Por ejemplo, a partir de (4.10) y la relación constitutiva $\check{B}_x = \mu \frac{S_z}{S_x} \check{H}_x$ se obtiene:

$$B_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - \frac{\Delta t}{k_y(j+1/2) \left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} \left[\frac{E_z^n(i, j+1, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i, j+1/2, k+1) - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k)}{\Delta z} \right] \quad (4.21)$$

y

$$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) + \frac{K_x(i)}{\mu k_z(k+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} B_x^{n-1}(i, j+1/2, k+1/2) - \frac{K_x(i)}{\mu k_z(k+1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(i)\Delta t}{2\epsilon K_x(i)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} B_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) \quad (4.22)$$

Análogamente se obtienen:

$$B_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} B_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - \frac{\Delta t}{k_z(k+1/2) \left[1 + \frac{\sigma_z(k+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_z(k+1/2)}\right]} \left[\frac{E_x^n(i+1/2, j, k+1) - E_z^n(i+1/2, j, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)}{\Delta x} \right] \quad (4.23)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} H_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_y(j)}{\mu K_x(i+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \\
& - \frac{K_y(j)}{\mu K_x(i+1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j)\Delta t}{2\epsilon K_y(j)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

$$B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]} B_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$$

$$+ \frac{\Delta t}{K_x(i+1/2) \left[1 + \frac{\sigma_x(i+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_x(i+1/2)}\right]}$$

$$\left[\frac{E_y^n(i+1, j+1/2, k) - E_y^n(i, j+1/2, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i+1/2, j+1, k) - E_x^n(i+1/2, j+1, k)}{\Delta y} \right] \quad (4.25)$$

$$H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$$

$$+ \frac{K_z(k)}{\mu K_y(j+1/2)} \frac{\left[1 + \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$$

$$- \frac{K_y(j)}{\mu K_y(j+1/2)} \frac{\left[1 - \frac{\sigma_z(k)\Delta t}{2\epsilon K_z(k)}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y(j+1/2)\Delta t}{2\epsilon K_y(j+1/2)}\right]} B_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \quad (4.26)$$

Es importante notar de que para realizar la simulación numérica de los bordes de la cavidad, fue necesario tener en cuenta las condiciones de frontera de la misma; es decir que la componente tangencial del campo eléctrico se anula en las superficies conductoras. Para ello, la frontera original se reemplazo por los bordes “Staircase” mostrada en la figura 4.4, de modo que la condición de frontera se reduce a $E_x = 0$ en los segmentos horizontales y a $E_y = 0$ en los segmentos verticales.

Además se debe aclarar que en el caso cuando está presente una densidad de corriente \vec{J} (debido al movimiento del plasma), las ecuaciones 4.1 y 4.2, se convierten en:

$$\vec{\nabla} \times \check{\vec{H}} = j\omega\epsilon\check{\vec{S}}\check{\vec{E}} + \vec{J} \quad (4.27)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \check{\vec{E}} = -j\omega\mu\check{\vec{S}}\check{\vec{H}} + \vec{J} \quad (4.28)$$

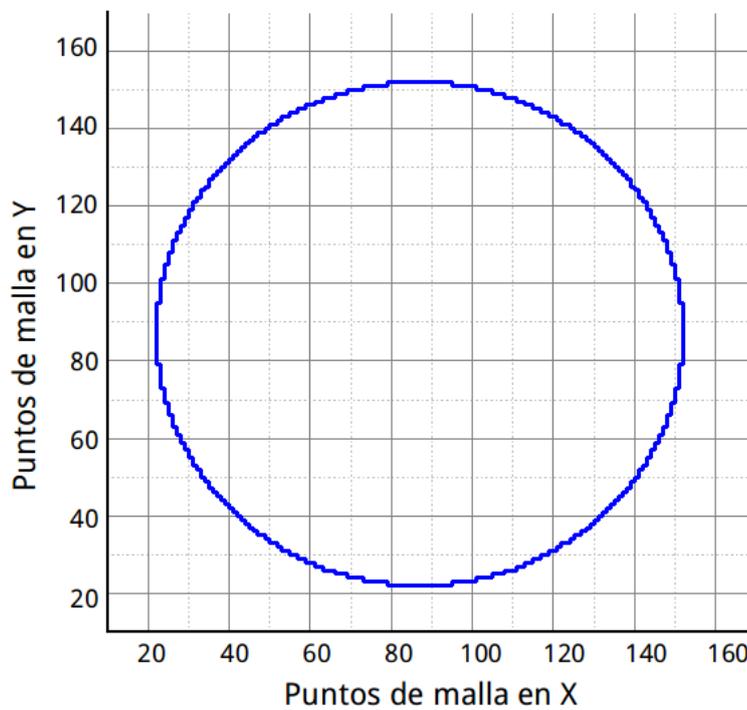


Figura 4.4. Frontera *Staircase* utilizada para simular los bordes curvos de la cavidad.

Apéndice C. Ecuaciones de movimiento del plasma 55

Siguiendo el proceso mostrado en la referencia [54], para obtener la evolución de las ecuaciones expresadas, en función de las tres componentes de los parámetros \vec{r}_p y \vec{v}_p , se requieren los primeros momentos de la ecuación de Vlasov para estar exactamente satisfechas con las formas funcionales elegidas para los elementos.

La simulación autoconsistente de la interacción plasma-microondas en nuestro sistema se describe en el marco de las ecuaciones Vlasov-Maxwell:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{\gamma m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0, \quad (4.29)$$

donde $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ es la función de distribución en el espacio de fase para una especie α , electrones o iones en nuestro caso, cuyas masas y cargas son q_α y m_α , respectivamente.

\vec{E} y \vec{B} son los campos eléctricos y magnéticos totales, respectivamente. En nuestro sistema, $\vec{E} = \vec{E}^{sc}$ corresponden al campo eléctrico autoconsistente, el cual es una superposición del campo de microondas E^{hf} y el campo eléctrico autogenerado por el plasma E^{sg} .

$\vec{B} = \vec{B}^s + \vec{B}^{sc}$, donde \vec{B}^s es el campo magnetostático de la trampa magnética mínimo-B magnetic, la cual es calculada como se describe en [51]. \vec{B}^{sc} es el campo magnético autoconsistente, que tiene un significado similar al de la componente del campo eléctrico descrito anteriormente. La evolución del vector \vec{E}^{sc} y \vec{B}^{sc} están dadas por las siguientes ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{sc} = -\frac{\partial \vec{B}^{sc}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}^{sc} = \mu_0 \vec{J} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial t}. \quad (4.30)$$

La densidad de carga y corriente, están determinadas por las expresiones:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\vec{v}, \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (4.31)$$

respectivamente.

En las simulaciones PIC, las funciones de distribución de cada especie vienen dadas por la superposición de nubes de partículas cercanas entre sí en el

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_p f_p(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (4.32)$$

En nuestras simulaciones, nosotros usamos la forma estándar para las SP:

$$f_p(\vec{r}, \vec{v}, t) = N_p S_{\vec{r}}(\vec{r} - \vec{r}_p(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_p(t)), \quad (4.33)$$

donde N_p es el número real de las partículas que forman una SP; $\delta(\vec{v} - \vec{v}_p(t))$ es la función delta de Dirac para la distribución de velocidades, siendo \vec{v}_p la velocidad de la SP. El factor de forma espacial está dado por,

$$S_{\vec{r}}(\vec{r} - \vec{r}_p(t)) = \prod_{j=1}^3 b_0 \left(\frac{x_j - x_{jp}(t)}{\Delta x_j} \right) \quad (4.34)$$

donde el índice j se refiere a las coordenadas x, y o z . \vec{r}_p es la posición de la SP; Δx_j es el paso espacial en la dirección j , y

$$b_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < 1/2 \\ 0 & \text{Para todo lo demás} \end{cases} \quad (4.35)$$

corresponde al primer b-spline.

Para este esquema, la posición y la velocidad de la SP están dadas por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{v}_p, \quad \frac{d(\gamma m_s \vec{v}_p)}{dt} = q_s (\vec{E}_p + \vec{v}_p \times \vec{B}_p), \quad (4.36)$$

donde $\gamma = [1 - (v_p/c)^2]^{-1/2}$ es el factor relativista, $q_s (= N_p q_\alpha)$ and $m_s (= N_p m_\alpha)$ son la carga y la masa de una SP. Estas ecuaciones son muy similares a las que describen el movimiento de las partículas reales, pero los campos \vec{E}_p y \vec{B}_p se calculan como un promedio sobre la SP para preservar los momentos de la ecuación de Vlasov. Estos campos se pueden hallar a partir de los valores calculados en los puntos de la malla, \vec{E}_g y \vec{B}_g como:

$$\vec{E}_p = \sum_g \vec{E}_g W(\vec{r}_g - \vec{r}_p) d\vec{r}, \quad (4.37)$$

y

$$\vec{B}_p = \sum_g \vec{B}_g W(\vec{r}_g - \vec{r}_p) d\vec{r}, \quad (4.38)$$

respectivamente. La función de interpolación W depende del factor de forma espacial elegido. Para este caso

$$W(\vec{r}_g - \vec{r}_p) = \prod_{j=1}^3 b_1\left(\frac{x_{jg} - x_{jp}(t)}{\Delta x_j}\right), \quad (4.39)$$

donde

$$b_1(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi| & \text{si } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{Para todo lo demás,} \end{cases} \quad (4.40)$$

corresponde al segundo b-spline.

Para ver con más detalle la discretización de las ecuaciones utilizadas para simular la dinámica de las partículas, véase el apéndice 4.1.

Apéndice D. Discretización temporal para las ecuaciones de movimiento del plasma

Lo primero que se debe hacer es discretizar en el tiempo las ecuaciones de Newton para las partículas. Los dos esquemas explícitos más estables y ampliamente utilizados son el algoritmo llamado *leap-frog* [45] y el de Boris [60, 61]. El método *leap-frog* esta basado principalmente en escalonar los pasos de tiempo de la velocidad y la posición por medio de un intervalo temporal:

$$\vec{r}_p(t = n\Delta t) \equiv \vec{r}_p^n, \quad (4.41)$$

y

$$\vec{v}_p(t = (n + 1/2)\Delta t) \equiv \vec{v}_p^{n+1/2}, \quad (4.42)$$

donde la actualización de la posición desde el nivel de tiempo n a el nivel $n + 1$ utiliza la velocidad en un punto medio $\vec{v}_p^{n+1/2}$, y de manera similar la actualización de la velocidad desde el nivel $n - 1/2$ a $n + 1/2$ usando la posición de un punto medio \vec{r}_p^n . En la figura 4.5, se muestra la

discretización del tiempo escalonado, con el campo eléctrico, la densidad de carga y las posiciones de las partículas en tiempos enteros y el campo magnético, la corriente y la velocidad de la partícula en pasos de medio tiempo. Discretizando las ecuaciones de Newton, se obtienen las siguientes

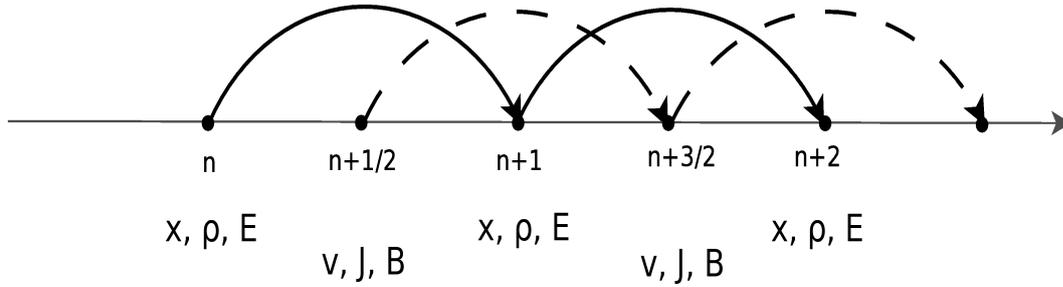


Figura 4.5. Representación esquemática del algoritmo *leap-frog*.

expresiones:

$$\frac{\vec{r}_p^{n+1} - \vec{r}_p^n}{\Delta t} = \vec{v}_p^{n+1/2}, \quad (4.43)$$

y

$$\frac{\vec{v}_p^{n+1/2} - \vec{v}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q_s}{\gamma m_s} \vec{E}^n(x_p^n) + \frac{q_s}{\gamma m_s} \left(\frac{\vec{v}_p^{n+1/2} + \vec{v}_p^{n-1/2}}{2} \right) \times \vec{B}^n(x_p^n), \quad (4.44)$$

donde el uso de \vec{E}_p^n y \vec{B}_p^n implica conocer la solución de las ecuaciones de Maxwell dada la información de la partícula.

Para realizar las simulaciones de partículas y campos electromagnéticos en este trabajo, se utilizó el esquema de Boris, en el cual se plantea la discretización de la ecuación de movimiento asociada con la fuerza de Lorentz de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (4.45)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.46)$$

donde las coordenadas del espacio de fase (\vec{r}_k, \vec{r}_k) en el paso tiempo K-ésimo $t_k = k\Delta t$, el algoritmo de Boris se resuelve para las coordenadas del espacio

de fase $(\vec{r}_{k+1}, \vec{v}_{k+1})$ en el paso de tiempo $(k+1) t_{k+1} = (k+1)\Delta t$, de la ecuación de movimiento discretizada, se obtiene:

$$\frac{\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k}{\Delta t} = \vec{v}_{k+1}, \quad (4.47)$$

$$\frac{\vec{v}_{k+1} - \vec{v}_k}{\Delta t} = \frac{q}{\gamma m} \left[\vec{E}_k + \frac{(\vec{v}_{k+1} + \vec{v}_k) \times \vec{B}_k}{2} \right], \quad (4.48)$$

donde Δt es el tamaño del paso en el tiempo y $\vec{r}_k \equiv \vec{v}(t_k)$, $\vec{v}_k = \vec{v}(t_k - \Delta t/2)$, $t_k \equiv k\Delta t$, $\vec{E}_k \equiv \vec{E}(\vec{r}_p)$ y $\vec{B}_k \equiv \vec{B}(\vec{r}_p)$. Para poder expresar estas ecuaciones de forma explícita, lo más común es separar la fuerza eléctrica de y la magnética de la siguiente manera:

$$\vec{v}^- = \vec{v}_k + \frac{q}{\gamma m} \vec{E}_k \frac{\Delta t}{2}, \quad (4.49)$$

$$\frac{\vec{v}^+ - \vec{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2\gamma m} (\vec{v}^+ + \vec{v}^-) \times \vec{B}_k, \quad (4.50)$$

$$\vec{v}_{k+1} = \vec{v}^+ + \frac{q}{\gamma m} \vec{E}_k \frac{\Delta t}{2}. \quad (4.51)$$

Aquí, la mitad del impulso eléctrico es adherido a \vec{v}_k para obtener primero \vec{v}^- . Entonces \vec{v}^+ es calculado de la ecuación 4.50 a través de una rotación de \vec{v}^- , y \vec{v}_{k+1} se obtiene añadiendo la mitad restante del impulso eléctrico a \vec{v}^+ . Este método, definido por un mapeo paso a paso $\psi_B : Z_k \equiv (\vec{r}_k, \vec{v}_k) \rightarrow z_{k+1} \equiv (\vec{r}_{k+1}, \vec{v}_{k+1})$ de acuerdo a las ecuaciones (4.47-4.51) es lo que se define como el esquema de Boris y se ha aplicado con exitosamente en estudios de simulación de plasmas durante más de 40 años, principalmente debido a su excelente precisión para grandes tiempos de simulación.