Sistemas de ecuaciones lineales en AlNuSet: Situaciones que propician el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural con profesores en formación

NELSON DANIEL VÁSQUEZ LÓPEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

Sistemas de ecuaciones lineales en AlNuSet: Situaciones que propician el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural con profesores en formación

NELSON DANIEL VÁSQUEZ LÓPEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Directora
Dra. Solange Roa Fuentes

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme todos los días despertarme para iluminar y guiarme en este proceso de aprendizaje y poder culminar esta grandiosa meta en mi vida.

A mis padres Nelson Vásquez y Suly López por confiar en mí y brindarme este apoyo incondicional que desde siempre me permite luchar por lo que quiero alcanzar.

A mi novia Erika Ariza por estar ahí pendiente de mí, ser mi guía académica, mi apoyo frecuente y permitir estar conmigo durante este proceso de mi vida profesional.

A mi directora de proyecto, la profesora Solange Roa por su paciencia y dedicación constante y sus ganas de dar fin a mi meta las cuales permitieron corregir frecuentemente errores que tuve en este maravilloso andar.

A mi hermana Wendy Vásquez por creer en mí y ser mi compañía espiritual y familiar.

A todos mis profesores del pregrado que de una u otra manera formaron en mí la semilla de ser docente en matemáticas y permitir poco a poco crecer como persona y terminar mi vida profesional.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ALNUSET: SITUACIONES QUE PROPICIAN EL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO SINTÉTICO GEOMÉTRICO, ANALÍTICO ARITMÉTICO Y ANALÍTICO ESTRUCTURAL CON PROFESORES EN FORMACIÓN*

AUTOR: NELSON DANIEL VÁSQUEZ LÓPEZ**

PALABRAS CLAVE: Modos de pensar, sistemas de ecuaciones lineales, AlNuSet.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo de investigación mediante la interacción en el aula se busca responder la siguiente pregunta: ¿Qué situaciones generan el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural de profesores de matemáticas en formación usando el software AlNuSet como herramienta didáctica aplicada a los sistemas de ecuaciones lineales?

Este proyecto es de orden cualitativo por lo que se trabaja con once estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra de la Universidad Industrial de Santander. Se diseñan y desarrollan 4 actividades en 4 sesiones de dos horas (1 actividad por sesión). Las actividades son diseñadas con el software dinámico AlNuSet; para la toma y análisis de datos, se usa el software Action! Se analiza la potencialidad de las actividades propuestas para motivar el tránsito entre los modos de pensar en álgebra lineal.

*Tesis de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Dra. En Educación Matemática

ABSTRACT

TITLE: SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN ALNUSET: SITUATIONS THAT PROVIDE TRANSIT BETWEEN MODES OF THINKING GEOMETRIC SYTHETIC, ARITHMETICAL ANALYTICAL AND STRUCTURAL ANALYTICAS WITH TRAINING TEACHERS*

AUTHOR: VÁQUEZ LÓPEZ NELSON DANIEL**

KEYWORDS: Modes of thinking,

DESCIPTION:

In this research work through the interaction in the classroom seeks to answer the following question: What situations generate the traffic between the modes of synthetic geometric thinking, analytical arithmetic and structural analytic of teachers of mathematics in training using AlNuSet software as a didactic tool applied to systems of linear equations?

This project is of a qualitative nature, so we work with 11 bachelor's students in mathematics in the course of Didactics of Arithmetic and Algebra of the Universidad Industrial de Santander. Four activities are designed and developed in four two-hour sessions (one activity per session). The activities are designed with AlNuSet dynamic software; we used the software Action! for the taking and analysis of data. We analyzed the potentiality of the proposed activities to motivate the transit between the modes of thinking in linear algebra.

---

*Bachelor Thesis

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Dra. En Educación Matemática

INTRODUCCIÓN

Resolver sistemas de ecuaciones lineales es un tema contemplado en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (MEN, 2002) en el grado octavo y noveno en Colombia. En algunas instituciones educativas la enseñanza de este tema se desarrolla terminando octavo grado o iniciando noveno. Los alumnos en grados anteriores ya deben tener una idea sobre el concepto de variable y la relación entre variable independiente y dependiente; y por tanto, deberían ser capaces de establecer relaciones lineales y representarlas gráficamente.

Partiendo de este hecho, esta propuesta está dirigida a docentes de matemáticas en formación, buscando que a través del desarrollo de actividades en un software particular se propicie un ambiente en la clase de matemática, en donde el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales pueda ser explorado en diferentes representaciones que propicien el tránsito entre ellas.

El software en que se apoya el diseño de las actividades es *Algebra Numerical of Set* (AlNuSet, por sus siglas en inglés) éste es un sistema dinámico e interactivo diseñado para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, los conjuntos y las funciones numéricas en secundaria. En muchos casos la enseñanza del álgebra se da de manera tradicional haciendo énfasis en los algoritmos y la mecanización, por tanto los estudiantes muestran profundas dificultades en el desarrollo de matemáticas más avanzadas.

Por tanto el objetivo de este proyecto se centra en analizar el trabajo de profesores en formación al desarrollar un conjunto de actividades en AlNuSet que buscan propiciar el tránsito entre los diferentes modos de pensar en álgebra; estos son: sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural (Sierpinska, 2000). Estas maneras de pensar sobre los objetos matemáticos permiten analizar no sólo las diferentes representaciones de un objeto matemático, sino además la importancia de desarrollar las diferentes formas de pensar sobre el objeto y las relaciones que se establecen entre ellas.

Tomando en cuenta cada uno de los entornos del software (Recta algebraica, Manipulador algebraico y Plano cartesiano) se analizan las formas de pensar que sobre los sistemas de ecuaciones lineales pueden desarrollar profesores de matemáticas en formación, así como el tránsito entre cada una de ellas. A continuación se presentan los antecedentes que fundamentan este trabajo, algunos aspectos teóricos iniciales y las etapas del método que guían el desarrollo de los objetivos.

1. ANTECEDENTES

Los antecedentes de esta propuesta se dividen principalmente en dos categorías: una relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales en matemática educativa, su estudio desde diferentes perspectivas teóricas; y otra relacionada con el software AlNuSet en donde describimos las características principales de cada entorno, intentando resaltar su relación con los diferentes modos de representar un sistema de ecuaciones lineal. Además de esto, se presentan ejercicios diseñados por un grupo de expertos que fueron adaptados en AlNuSet.

1.1. Los sistemas de ecuaciones lineales

Respecto a los sistemas de ecuaciones lineales se han elaborado tesis de maestría y doctorado que analizan su representación geométrica, algebraica y analítica de los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo Ramírez, Oktaç y García (2005) observan aquellos fenómenos relacionados con la representación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables, así como el pasaje que existe entre la representación geométrica y analítica de los sistemas de ecuaciones lineales. Estas formas de representación según Sierpinska (2000) generan maneras de pensar sobre los objetos matemáticos.

En esta parte nos centraremos en presentar algunos trabajos realizados por investigadores en Educación Matemática acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, que se enfocan en describir el tránsito entre los modos de pensamiento que genera cada representación, estos son: sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural.

Para empezar, Ardila y Montañez (2000) trabajan con dos grupos diferentes: un grupo de estudiantes de noveno grado de básica secundaria y un segundo grupo de estudiantes de pregrado (Física, Ingeniería Electríca, Ingeniería Electrónica, Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas) que cursan Álgebra Lineal II con el principal objetivo de determinar las dificultades y fortalezas que presentan los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico. Estos autores argumentan que una de las dificultades que presentaron algunos estudiantes para desarrollar las actividades propuestas en la entrevista, están relacionadas con el manejo adecuado de los procesos algebraicos esenciales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Esto impide que el estudiante asocie el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación geométrica; de tal manera que no logran transitar entre estos modos de pensamiento.

Por otra parte un estudio realizado por Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2003), con estudiantes de ingeniería de primer semestre de ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), se evidencian dificultades en el tránsito del modo de pensamiento sintético geométrico y analítico; estos autores mencionan: “el alumno no puede transitar por ambos pensamientos si no cuenta con un guía, él no puede pasar del pensamiento sintético analítico porque no le enseñaron como hacerlo”. Por lo tanto, “el transitar del pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético es más difícil porque de esta forma desde la primaria no los han enseñado a pensar sino a mecanizar existiendo una gran resistencia a este cambio” (Oaxaca, De la Cruz y Sánchez, 2003, p.3).

Posteriormente, Ramírez, Oktaç y García (2005) observan fenómenos relacionados con la representación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables; así como el pasaje que existe entre la representación geométrica y analítica de los sistemas de ecuaciones lineales. Los estudiantes entrevistados presentan dificultades en la comprensión del concepto de conjunto solución y además la comprensión de un pasaje entre los distintos modos de pensamiento. Otra dificultad que se presenta en el caso de los sistemas de ecuaciones que representa rectas coincidentes, donde los estudiantes concluyen que el sistema no tiene solución.

Ramírez (2005) se propone identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes con la representación gráfica y analítica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los estudiantes que entrevistó evidenciaron dificultades al trabajar con sistemas de ecuaciones que constan de infinitas soluciones y además cuando se les daba la representación gráfica del sistema los estudiantes tuvieron problemas para plantearlo. Según la autora esto muestra que no lograron transitar entre el modo de pensamiento geométrico y el modo de pensamiento analítico ya que algunos estudiantes pueden saber qué es un sistema de ecuaciones lineales y su interpretación, pero no son pueden resolverlo ya que no poseen los conocimientos matemáticos suficientes. Además Ramírez (2005) analiza las dificultades que presentan los estudiantes para interpretar la expresión $0 = 0$ en la solución de un sistema de ecuaciones lineales; frente a soluciones de este tipo, los estudiantes concluyen que el sistema no tiene solución.

De esta manera muestra que los estudiantes que entrevistó presentan dificultades en el modo de pensamiento analítico algebraico, ya que no observan las propiedades particulares de los sistemas. Por ejemplo, al pedirles que resolvieran el sistema: $\begin{cases} 12x + 4y = -8 \\ -3x - y = 2 \end{cases}$ la mayoría lo resuelven llegan a la identidad $0 = 0$, sin tener en cuenta que las ecuaciones son equivalentes y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Este comportamiento está relacionado con la dificultad de los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento analítico aritmético y analítico estructural, ya que al tener un sistema determinado parece que la prioridad es realizar algún tipo de manipulación con los elementos que se presentan sin tener consciencia de su aplicación sobre los resultados teóricos.

En consecuencia, Ramirez (2005) recomienda el diseño de situaciones novedosas que involucren diferentes modos de pensamiento y que requieran tanto el análisis de sistemas con solución única, como los casos sin solución o con infinitas soluciones, sin privilegiar el primero de ellos.

Más adelante, Ramírez (2008) retoma los resultados que obtuvo en 2005 y enfoca su trabajo en los sistemas de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas. En esta investigación muestra que en su mayoría los estudiantes no logran determinar cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Particularmente no lo logran ni de manera algebraica, esto se enfatiza generalmente en los cursos de matemáticas, al llegar a la identidad $0 = 0$; ni de manera analítica, es decir, no pueden determinar que las tres ecuaciones son equivalentes y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Esto tampoco se logra cuando tienen la representación geométrica del sistema, es decir, cuando las ecuaciones del sistema están representadas por una única recta.

Posteriormente en Uruguay un proyecto desarrollado con estudiantes de 14 – 15 años y 17 – 18 años se propuso como objetivo: “Estudiar qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2x2”. Un segundo objetivo de este trabajo fue “diseñar una secuencia de enseñanza y de actividades para los estudiantes de 14 – 15 años del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene en cuenta los datos revelados a partir del primer objetivo”. (Ochoviet, 2009, p.8)

> […] De acuerdo a las dificultades que se detectaron en los estudiantes al “reconocer el número de soluciones de un sistema poniendo en evidencia la problemática existente”, sugiere “enseñar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, de tal manera que se puedan ofrecer a los estudiantes diferentes tareas donde tengan que enfrentar distintos tipos de

> situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales". También recomienda que "los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético geométrico, el analítico aritmético y el analítico estructural". (Ochoviet, 2009, p.12)

Finalmente tenemos que Barrera (1998), citado por Arenas (2013) analiza los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico aritmético y analítico estructural en álgebra lineal, que se ponen en juego en la solución y planteamiento de una selección de problemas de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas, y su relación con conceptos de dependencia e independencia lineal; así como las estrategias que presentan los estudiantes de los primeros semestres de la carrera de ingeniería. Barrera detecta que existen dificultades en la transición entre los diferentes modos de pensamiento y con el concepto de sistema homogéneo. Detecta también que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamiento en los estudiantes al abordar los problemas de sistemas de ecuaciones lineales y de conceptos estructurales relacionados como ser combinación lineal y dependencia lineal. Observa que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a otros aún cuando la situación matemática lo requiera. Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan el modo de pensamiento analíticoestructural, y no otros, mientras que algunos estudiantes trabajan en el modo de pensamiento sintético geométrico y no pueden pasar a otras formas de pensar.

Las investigaciones descritas presentan la necesidad de plantear tareas que involucren el trabajos sobre sistema de ecuaciones lineales y su solución. En particular donde el estudiante evidencie los posibles casos, cuando busque resolver un sistema de ecuaciones, es decir, ejemplos donde al momento de desarrollarlos se llegue a solución única, soluciones infinitas o que simplemente el sistema no tenga solución. De esta manera se busca lograr que el estudiante trascienda sobre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural propuestos por Sierpinska en el año 2000.

1.2 AlNuSet como un software dinámico para matemática

En didáctica de las matemáticas el uso de las tecnologías se ha convertido en una herramienta potente para trabajar en las diferentes disciplinas, ya que, mediante algunos software como Cabri II plus, Geogebra, entre otros, se puede acceder a una o más representaciones de los objetos matemáticos abstractos. Además se propone que su uso posibilita un mayor entendimiento sobre las matemáticas y amplía el conjunto de situaciones que pueden ser aboradas en el aula.

Es importante aclarar que esto no quiere decir que por “obligación” o sólo por “seguir la moda” debamos usar tecnologías en el aula, al respecto Acosta (2010) propone:

> […] es necesario que la comunidad de educación matemática realice un esfuerzo de reflexión crítica, evitando las decisiones fundamentadas únicamente en la presión social o la moda. Deben buscarse respuestas a las siguientes preguntas, entre otras: ¿Es necesario el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles son las ventajas del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles son los efectos del uso de la tecnología en el aprendizaje? ¿Cómo debe transformarse la práctica de la enseñanza para poder aprovechar las ventajas de la tecnología? ¿Es viable un uso esporádico de la tecnología? ¿El sistema educativo (macro y micro) está en capacidad de garantizar un uso intensivo de la tecnología? (Acosta, 2010, p. 132)

El uso de un software como acabamos de mencionar, deja muchas preguntas sobre su uso o no en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo queremos caracterizar las situaciones que propician el tránsito entre los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000) para profesores en formación, y para esto utilizaremos un software de matemáticas dinámico denominado AlNuSet. Este software permite tener los objetos matemáticos en tres ambientes diferentes. A continuación haremos la descripción de AlNuSet que está dada por sus desarrolladores DiDiMa (Didacttica Digitale della Matematica).

AlNuSet es un sistema multi-entorno dinámico e interactivo que fue desarrollado para mejorar las prácticas didácticas de las matemáticas acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, los conjuntos y las funciones numéricas en la escuela secundaria. Este cuenta con tres entornos: la recta algebraica, el plano cartesiano y el manipulador algebraico.

AlNuSet se ha desarrollado para favorecer la comprensión de los conceptos fundamentales de matemáticas, para desarrollar el dominio de su lenguaje y mejorar las prácticas didácticas de esta disciplina. A continuación describimos los tres entornos haciendo referencia a las características de los objetos matemáticos que se pueden potenciar en cada uno.

1.2.1 Recta algebraica

Su principal característica es la representación de la variable algebraica como un punto móvil sobre la recta numérica, es decir, como un punto que se puede arrastrar con el mouse a lo largo de la línea numérica. Esta función transforma la recta numérica en una recta algebraica donde es posible operar con expresiones algebraicas y proposiciones a través de técnicas de naturaleza cuantitativa y dinámica. Estas técnicas se centran en las cantidades numéricas indicadas por una expresión donde esta variable es arrastrada a lo largo de la recta. Hace un algebra dinámica posible (DiDiMa srl).

Una de las ventajas de la recta algebraica es que al introducir una función que dependa de la variable x, también se debe introducirse esta variable (x) y de esta manera la función se moverá a lo largo de la recta algebraica sólo si se desplaza la variable independiente x. Tanto así que el estudiante observará que x^2 se somete a la variable x.

De acuerdo con lo dicho anteriormente y tratando de responder algunas de las preguntas que surgen al usar las tecnologías en el aula de clase, veamos un ejemplo sobre el entorno de la recta algebraica de AlNuSet que consiste en ingresar la función $f(x) = x^2$ y mirar en qué valores de x, $x^2 = 4$.

El estudiante debe introducir 3 elementos en la recta algebraica: x, x^2 y $x^2 = 4$ al hacer esto obtendrá la representación se muestra en la figura 1.

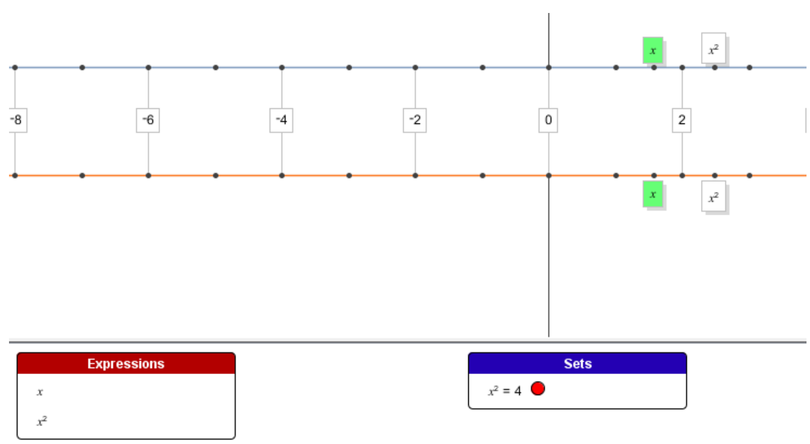


Figura 1. Recta algebraica

En el recuadro "*expressions*" (ver figura 1) está x y x^2, y en el recuadro *"sets"* está la igualdad que se plantea en el ejercicio.

Mientras se mueve el punto que representa la variable x el punto rojo que se muestra en *sets* se volverá verde cuando x^2 sea igual a 4, como lo muestran las figuras 2 y 3.

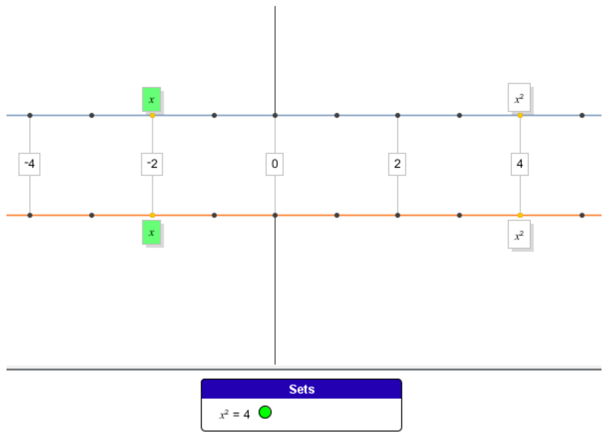


Figura 2. Variable x^2

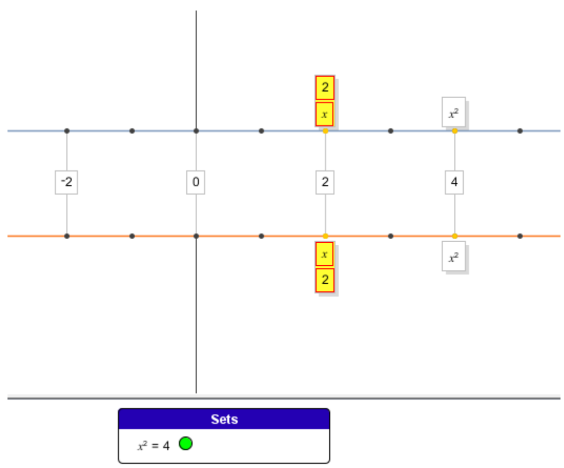


Figura 3. Variable x^2 si $\mathrm{x} = 2$

De esta manera el punto rojo se vuelve verde cuando $x = -2$ (figura 2) y $x = 2$ (figura 3). Se observar que mediante este entorno es posible llegar a la solución de una igualdad mediante el movimiento de la variable independiente x a través de la recta algebraica.

1.2.2. Manipulador algebraico

Su principal característica es posibilitar la transformación de expresiones algebraicas en proposiciones a través de un conjunto particular de comandos. Estos comandos corresponden a las propiedades básicas de las operaciones, las propiedades de igualdades y desigualdades, las operaciones lógicas entre proposiciones, las operaciones entre conjuntos, entre otras. Otra propiedad del manipulador algebraico es que permite crear una nueva regla de transformación (usar una regla) una vez esta haya sido probada. El usuario puede controlar fácilmente todo el proceso de transformación algebraica explotando la retroalimentación dada por el sistema. Estas características apoyan el desarrollo de habilidades en la transformación algebraica y contribuyen a asignar el significado de la prueba a la misma.

Esta herramienta puede ser usada para que el alumno observe qué propiedades se pueden usar en algunas actividades y el orden en el que se pueden usar; Por ejemplo consideremos la siguiente desigualdad $3x^2 - 3 > 1$. Como puede verse en la figura 4 al introducirla en el programa saldrá en el recuadro de “sets”. Luego es posible “enviar al manipulador algebraico” y al darle clic sobre la desigualdad nos mostrará las diferentes reglas que podemos aplicar como se muestra en la figura 4.

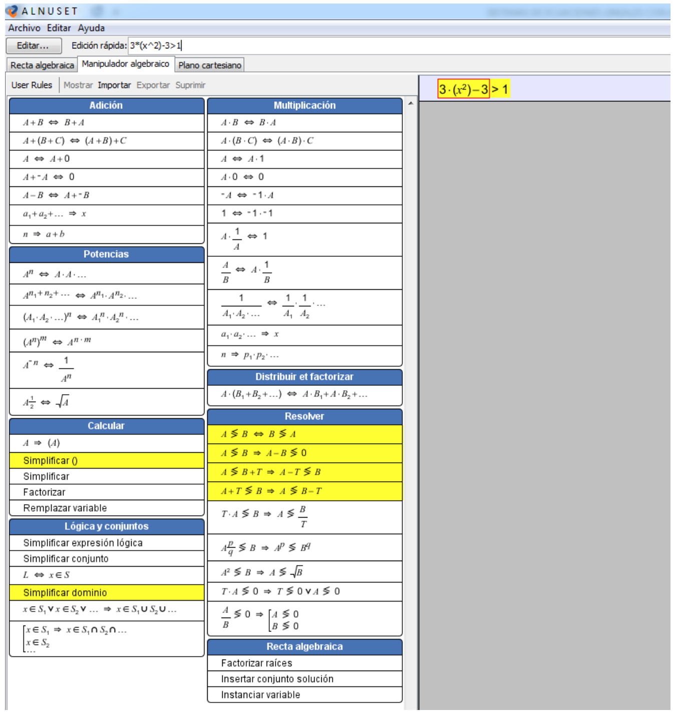


Figura 4. Reglas teóricas AlNuSet

Luego de esto, daremos clic en simplificar y al ejecutar la herramienta $A + T \lesseqgtr B \rightarrow A \lesseqgtr B - T$, obtendremos lo siguiente: (Ver figura 5)

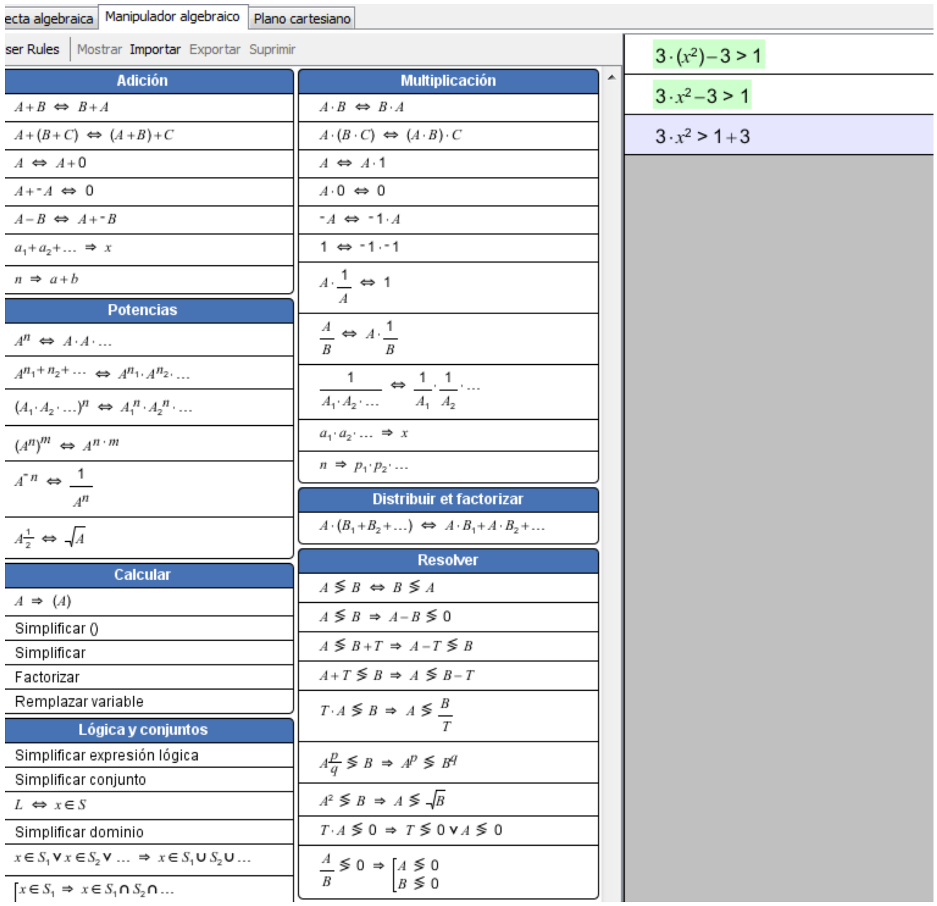


Figura 5. Aplicación Simplificar

Como podemos observar en esta figura, la herramienta es sumar o restar a ambos lados de la desigualdad el número que está separado de la x. Y luego usando la herramienta $T\cdot A \lesssim B \rightarrow A \lesssim \frac{B}{T}$ lo que nos hace es multiplicar a ambos lados el inverso del número que acompaña a la x, obteniendo lo siguiente:

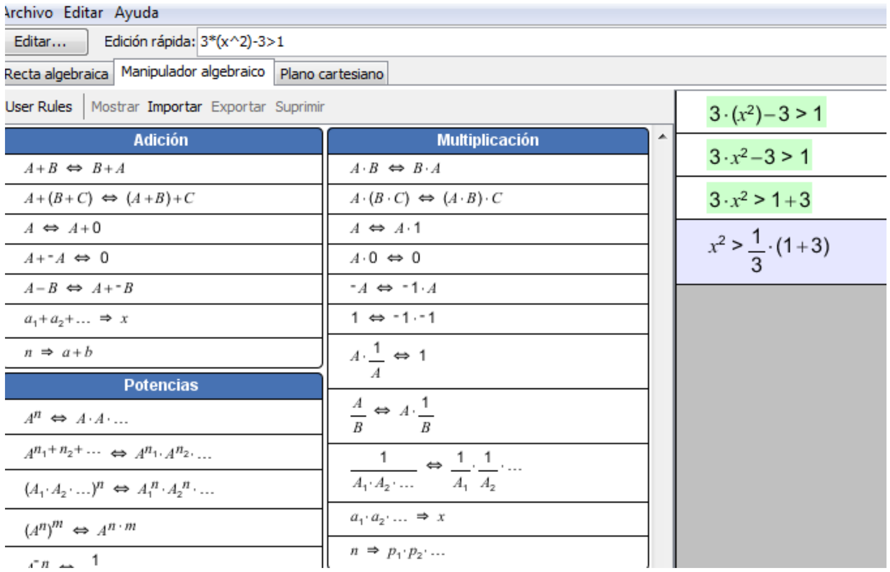


Figura 6. Aplicación herramientas

Ahora, usaremos la herramienta $A^2 \lesseqgtr B \to A \lesseqgtr \sqrt{B}$ para despejar cuadrados y lo interesante de esto es que muestra al estudiante que al despejar un cuadrado tenemos dos resultados, uno positivo y uno negativo, como se muestra en la figura 7, lo que la mayoría de estudiantes (por experiencia propia) no ven.

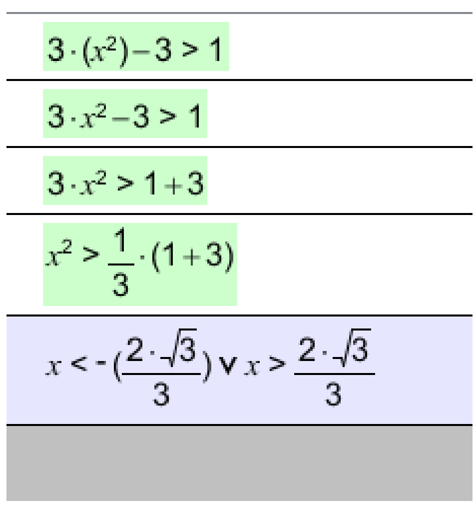


Figura 7. Despejar cuadrados

Del ejercicio anterior es posible ver que a medida que el estudiante seleccione expresiones algebraicas el manipulador algebraico le mostrará las herramientas que podrá usar. Así a medida que siga experimentando este ambiente de AlNuSet podrá analizar la pertinencia del orden de la aplicación de cada transformación. Por ejemplo cuando seleccionamos la expresión $3x^2 - 3 > 1$ no aparecía la herramienta $T \cdot A \lesseqgtr B \rightarrow A \lesseqgtr \frac{B}{T}$ (ver figura 8).

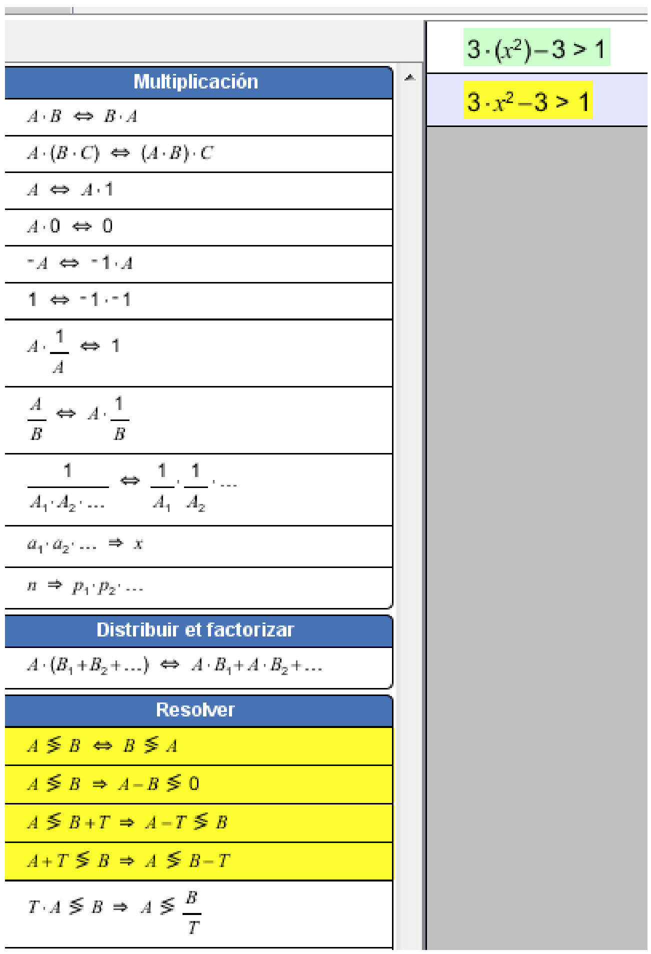


Figura 8. Aplicación herramienta Resolver

1.2.3. Plano cartesiano

La principal característica de este ambiente es la posibilidad de integrar operativamente la recta algebraica con el plano cartesiano, donde las gráficas de las expresiones se pueden representar de forma automática.

Además, arrastrando el punto correspondiente a la variable en la línea algebraica, la expresión que contiene la variable se mueve en consecuencia sobre el plano cartesiano, el punto definido por el par de valores de la variable y de la expresión se mueve en el gráfico.

Estas características apoyan dos concepciones integradas sobre la noción de función: una concepción dinámica desarrollada en la recta algebraica y una estática asociada a la gráfica en el plano cartesiano.

Siguiendo con las dos expresiones algebraicas x y x^2 al mostrarlas en el plano cartesiano y manipular x sobre la recta algebraica observaremos cómo mientras x se mueve en las dos funciones tanto $f(x) = x$ como $f(x) = x^2$ (ver figura 9).

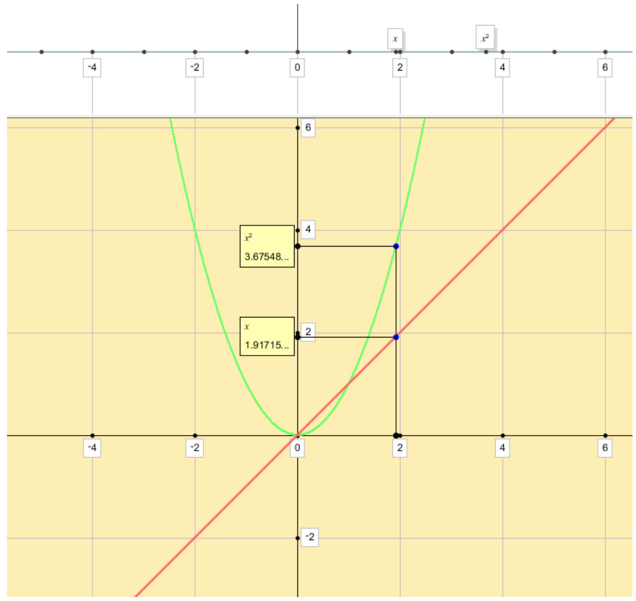


Figura 9. Representación gráfica

1.3. Ejemplos de tránsito entre los tres ambientes de AlNuSet

A continuación presentamos algunas actividades que permiten el tránsito entre los ambientes: recta algebraica, manipulador algebraico y plano cartesiano en el software AlNuSet.

1.3.1. Recta algebraica

En este entorno de AlNuSet queremos determinar la aplicabilidad e interacción del software con el modo de pensamiento analítico estructural.

1. Iniciaremos resaltando la siguiente función lineal: $f(x) = 2x + 3$

2. Abrimos el software AlNuSet y seleccionamos como dominio los reales

3. Posteriormente se va a digitar en el recuadro de Edición rápida la variable independiente x y la ecuación 2*x+3.

4. Al finalizar lo anterior, digitar 2*x+3>0 con el fin de encontrar para qué valores reales la función f(x)=2x+3>0 (Figura 10).

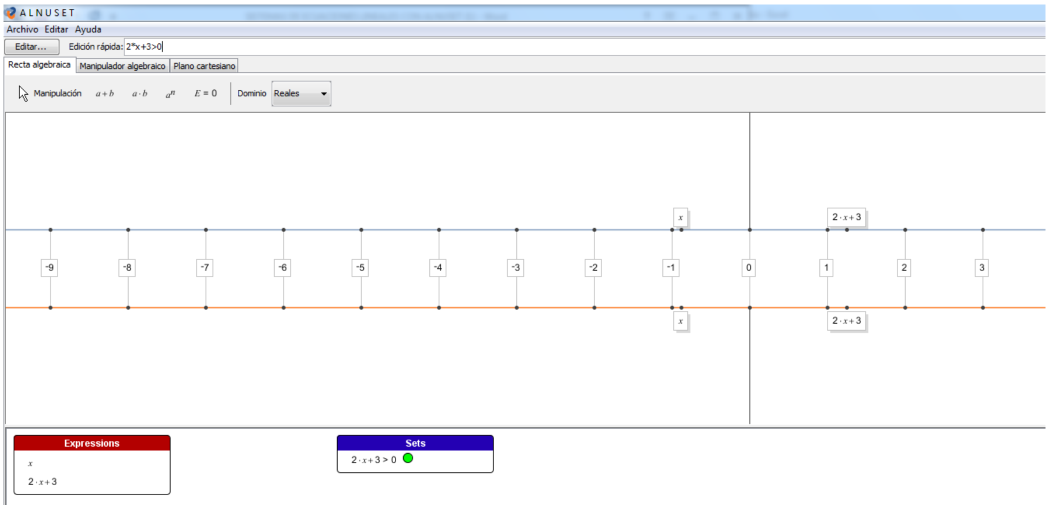


Figura 10. Ejemplo en AlNuSet

Con los pasos anteriores es posible manipular la recta algebraica para verificar aquellos valores reales donde se cumple que 2x+3>0. Mostraremos dos casos, uno donde verifica la desigualdad anterior y otro donde no cumple. Cuando en AlNuSet la luz que se encuentra en la casilla Sets, se ponga de color verde, indicará que sí cumple, en el caso de ser de color roja, no cumple la desigualdad tal cual lo indica las figuras 11 y 12.

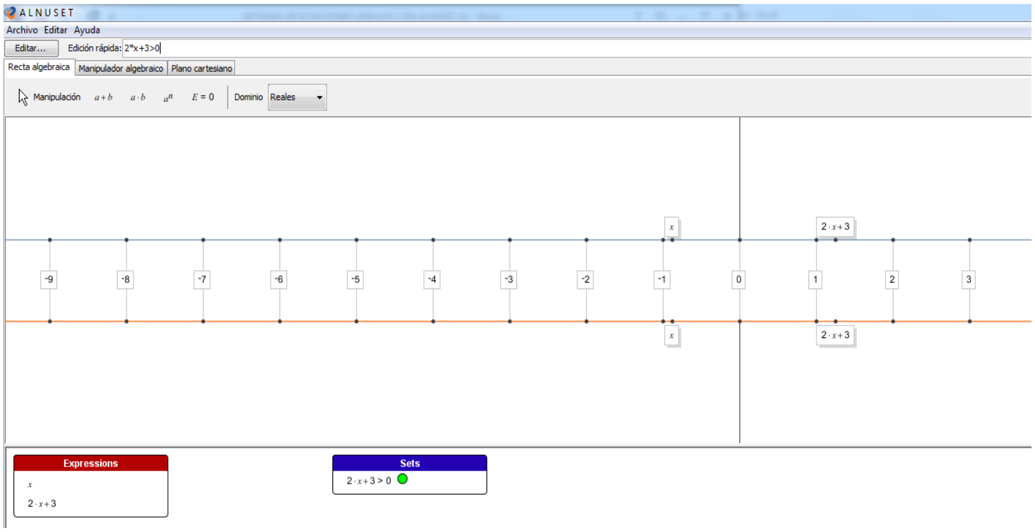


Figura 11. Veracidad de la desigualdad

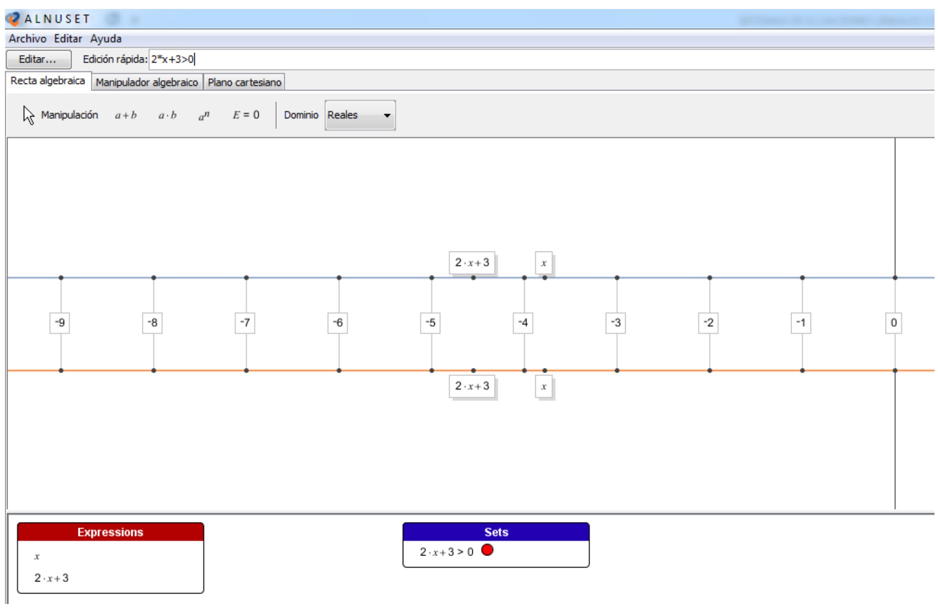


Figura 12. Incumplimiento de la desigualdad

Usando el entorno recta algebraica y tomando como base el modo de pensamiento analítico estructural se muestra que existen números reales para los cuales la desigualdad 2x+3>0 no verifica y de esta manera, no podremos asumir que el conjunto de solución es R.

1.3.2. Manipulador algebraico

Al culminar la actividad anterior en la recta algebraica, se procedede a trabajar con el manipulador algebraico, de tal manera que el participante podrá realizar de manera didáctica los procesos algebraicos pertinentes para encontrar la solución del problema.

1. Escribimos 2*x+3>0 en la barra de herramientas “Edición rápida”; dar Enter.
2. Seleccionamos toda la ecuación generada anteriormente (2·x+3>0).
3. En las reglas que aparecen a mano izquierda, marcamos la que dice: A+T ⋚ B→A⋚B-T, obteniendo así: 2·x>-3.
4. Seleccionamos ahora la expresión anterior y escogemos la herramienta: T·A⋚B→A⋚B/T. Obteniendo: x>1/2·-3
5. Luego de realizado lo anterior, seleccionamos esta expresión resultante y seguidamente la herramienta Simplificar, obteniendo así la respuesta: x>(-3)/2

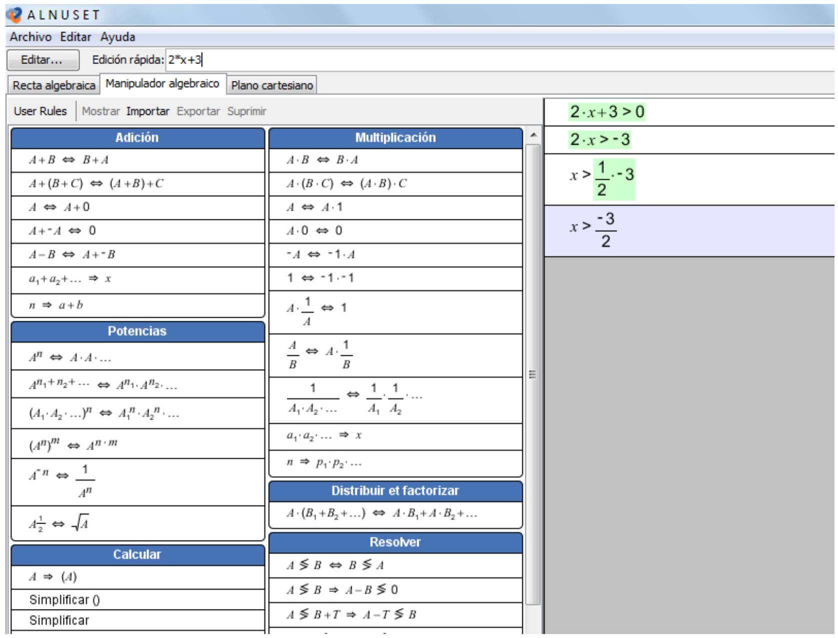


Figura 13. Interacción con el manipulador algebraico

Luego de la interacción con el software y teniendo en cuenta las propiedades presentes para el desarrollo de la ecuación 2x+3>0, es posible ver el paso a paso que se ha de desarrollar con este entorno en AlNuSet, verificando así el uso del modo de pensamiento analítico aritmético.

1.3.3. Plano Cartesiano

Finalmente se tiene el entorno de Plano Cartesiano, en el que gráficamente es posible observar para qué valores reales la inecuación 2x+3>0 tiene solución. Ya teniendo la ecuación 2*x+3>0 proveniente desde la interacción con el entorno Recta Algebraica de AlNuSet, observaremos en la parte superior la recta real junto con los posibles valores que puede tomar la variable independiente x.

1. Nos devolvemos al entorno Recta algebraica de AlNuSet y escribimos en la barra "Edición Rápida" la ecuación 2*x+3 y damos enter.

2. Tras hacer la acción anterior, volvemos al entorno Plano Cartesiano y en la parte superior del plano podemos observar la variable independiente x y la expresión algebraica 2·x+3.

3. Sobre la anterior expresión algebraica damos clic derecho y en la pestaña Mostrar/ Ocultar valor y seleccionamos la variable x.

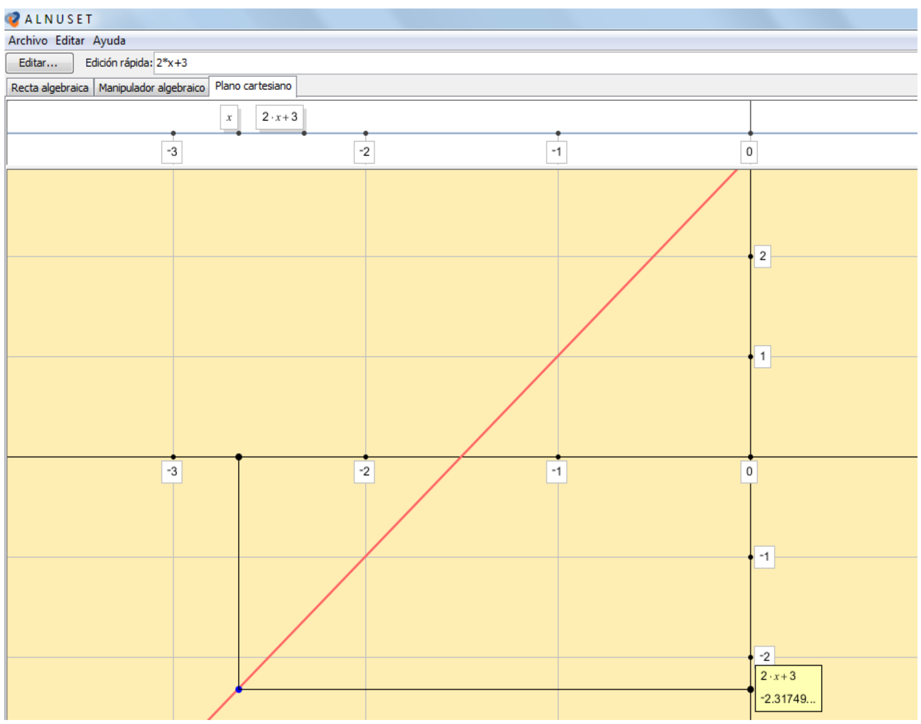


Figura 14. Interacción con el plano cartesiano

De la anterior situación es posible observar que existe un valor en x para la ecuación 2x+3>0 que hace que 2x+3=0 y además existen valores en x para que la ecuación 2x+3>0 que hacen que 2x+3<0. De ahí que el estudiante deberá elegir cuál de las etapas se está presentando en el ejercicio planteado y determinará que existen algunos valores $x \in R$ para los cuales la ecuación se satisface y así habrá determinado la solución del problema que en este caso es $x=-3/2$

Este tipo de representación motiva un modo de pensar sintético geométrico dado que la solución de la inecuación es determinada por el estudiante por las características de la representación geométrica de la ecuación.

A partir de la descripción de las características generales de AlNuSet, a continuación se desarrolla el planteamiento del problema que se aborda en este trabajo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

2.1. Sobre el problema de investigación

De los trabajos anteriores se concluye que el estudio de las ecuaciones lineales lleva un recorrido tanto en el concepto de variable hasta los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. Es por esto que se ha identificado como problemática trabajar sistemas de ecuaciones lineales por medio de un software didáctico usando referentes teóricos propios de la Matemática Educativa. En particular usando los tres modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000) como referente teórico que permite analizar desde la parte geométrica, aritmética y estructural la resolución de sistemas de ecuaciones lineales estudiando el tránsito entre estos modos de pensar sobre este contenido matemático.

Es por esto que se propone la siguiente pregunta: ¿Qué situaciones pueden generan el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural de profesores en formación usando el software AlNuSet como herramienta para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

De tal manera que con el desarrollo de cuatro actividades aplicadas a docentes de matemáticas en formación buscamos determinar si existe el tránsito entre los modos de pensamiento utilizando el software AlNuSet tal como se han venido presentando en las investigaciones plasmadas en los antecedentes de este documento.

2.2. Objetivo general

Caracterizar el tránsito de los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural de profesores en formación en la solución de situaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales a través de su representación en los tres entornos del software AlNuSet.

2.3. Objetivos específicos

- ✓ Diseñar actividades que desarrollen docentes de matemáticas en formación.
- ✓ Sintetizar métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Resolver problemas que pueden modelarse a través de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Aplicar el software AlNuSet como herramienta para el desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales.

2.4. Justificación

Teniendo en cuenta lo mencionado en los antecedentes acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es necesario tomar como referencia la construcción escrita y/o verbal que se realiza en la interacción en el aula al momento de abordar un ejercicio o situación problema de este tipo. Sin embargo encontramos que lo realizado carece en cuanto a la aplicación de TIC'S en Colombia. Es por esto que deseo abordar este tema en un trabajo de investigación incluyendo como herramienta el software AlNuSet.

Abordando la temática de los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural descritos por Anna Sierpinska (2000) se observa que el tránsito entre ellos se encuentra presente para cada una de las poblaciones en las cuales se aplicaron los respectivos trabajos de investigación pero si nos fijamos bien estos modos de pensamiento no han sido trabajados con docentes de matemáticas en formación.

Por tanto se propone este proyecto para analizar si el tránsito entre los modos de pensamiento también se presenta en docentes de matemáticas en formación, los cuales interactuarán en varias sesiones con actividades enfocadas hacia la temática y tomando como herramienta el software AlNuSet.

Estas actividades estarán dispuestas para establecer la relación entre una manera de pensar analítica con la geométrica. Otra manera de pensar geométrica con la estructurada y una tercera entre la analítica y la estructurada, de tal manera que el tránsito entre ellos, permitirá un desarrollo pleno y completo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Modos de pensamiento

En este trabajo se tendrá como marco teórico la teoría de los Modos de Pensamiento planteados por Sierpinska (2000) para el estudio de conceptos en álgebra lineal; como ya se han mencionado estos son: modo sintético geométrico, modo analítico aritmético y modo analítico estructural. “Estos se pueden ver como superación a dos obstáculos opuestos; el que rechaza los números dentro de la geometría y el que rechaza que la “intuición geométrica” pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético” (Sierpinska, 2000, citado por Maturana y Parraguez, 2011, p.3). A continuación explicamos en qué consiste cada uno de dichos pensamientos.

Modo de pensamiento sintético geométrico: este pensamiento utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales. En esta manera de pensar se considera que la visualización matemática es fundamental, ésta se define como “el proceso de formación de imágenes (mentales o con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología) y el uso de tales imágenes efectivamente, para el descubrimiento de la matemática y su comprensión” (Maturana y Parraguez, 2011, p.3).

Modo de pensamiento analítico aritmético: en este modo de pensamiento “las figuras geométricas son consideradas como un conjunto de “n-uplas” que satisfacen algunas propiedades que son escritas", por ejemplo; "la forma de sistema de ecuaciones o desigualdades, las matrices como arreglos de números en filas y columnas, los puntos del plano que aparecen como pares ordenados de reales y las rectas como ecuaciones". (Sierpinska, 2000)

En este modo de pensamiento "las componentes numéricas de los objetos geométricos como puntos y vectores son muy importantes. Así, un sistema general de ecuaciones, podría ser escrito usando todos sus coeficientes" (Maturana y Parraguez, 2011, p.3).

Modo de pensamiento analítico estructural: en este modo de pensamiento "se recurre a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas y sus representaciones analíticas dentro de una estructura, es decir, las propiedades son más importantes que la naturaleza de las componentes numéricas". Por ejemplo, "cuando la solución del sistema de ecuaciones se enfoca en las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o del determinante de la matriz que representa el sistema" (Sierpinska, 2000).

En esta investigación se busca caracterizar el tránsito entre estos modos de pensar sobre los objetos matemáticos, al respecto Sierpinska (2000) menciona:

> […] si uno está pensando en las posibles soluciones de tres ecuaciones lineales con tres variables por visualización de las posibles posiciones de tres

> planos en el espacio, está en el modo sintético geométrico. Si piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz de 3×3, está en el modo analítico aritmético. Pensando en términos de matrices invertibles y no invertibles, podría ser un síntoma del modo analítico estructural. (Sierpinska, 2000)

De lo anterior podemos establecer la siguiente situación:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

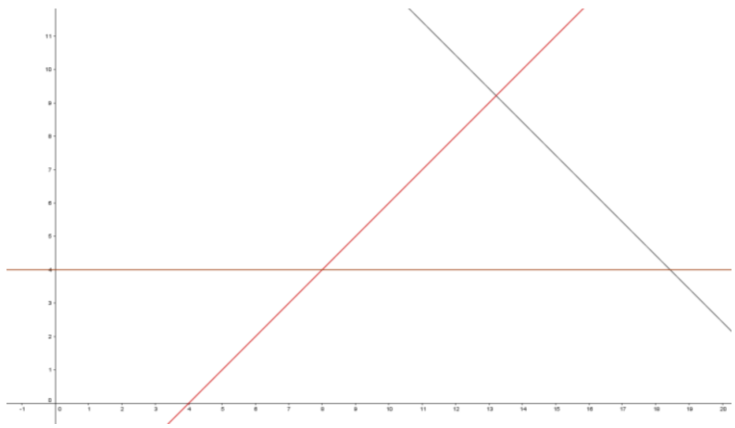
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$$

Si se pide a un estudiante encontrar la solución del problema planteado, él o ella pueden utilizar algún algoritmo (reducción, igualación, sustitución) para encontrar que el sistema tiene solución única $x = -1,\ y = 2$. Este procedimiento hace referencia a una manera de pensar aritmética sobre el sistema y su solución. Si se pregunta ¿por qué el sistema tiene solución única? Él o ella tendrán que analizar las propiedades de todo el sistema, por ejemplo, analizando que si el determinante de la matriz asociada al sistema es diferente de cero, éste tendrá solución única. Esta respuesta se relaciona con una forma de pensar analítica estructural sobre el sistema y por tanto evidenciamos un tránsito entre dichos modos de pensar.

Además si le decimos al estudiante que represente la situación anterior gráficamente y encuentre y analice la solución teniendo en cuenta que el punto $(-1,2)$ es común a las rectas que están representadas en cada ecuación del sistema. En este caso se está pensando sobre los objetos matemáticos de una manera sintética geométrica.

Un aspecto claro es que la forma en que se presenta una situación puede promover una u otra manera de pensar sobre un objeto matemático. Por ejemplo si planteamos el siguiente problema:

En el plano se muestra la siguiente representación de tres rectas.



a. Escribe un sistema que corresponda con las rectas dadas en el plano.
b. ¿Cuál es el conjunto solución de dicho sistema?

El paso de una manera de pensar sintético geométrica sobre un objeto a una analítica aritmética o estructural no es común en las situaciones planteadas en los libros de texto. En general se propicia el tránsito de lo analítico aritmético a lo estructural o a lo sintético geométrico. En esta investigación buscamos a través del diseño de diferentes situaciones, promover el tránsito entre las tres formas de pensar. A continuación se describen los principales elementos del método que guía este trabajo.

4. MÉTODO

En esta investigación trabajaremos con once estudiantes del curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra de la Universidad Industrial de Santander, futuros licenciados en matemáticas los cuales desarrollan cada una de las actividades propuestas de manera individual. Se trabajan 4 actividades en 4 sesiones de dos horas (1 actividad por sesión), además se cuenta con el apoyo del software Action! para la toma de datos en el respectivo lugar de trabajo de los participantes. El método a seguir durante la elaboración de esta investigación se dividirá en seis fases las cuales hemos llamado:

Fase A. Diseño de actividades: Esta fase consiste en el diseño y análisis a priori de las actividades que se desarrollarán a lo largo de este trabajo. El objetivo de esta fase es promover que los participantes establezcan el tránsito entre los tres modos de pensamientos (Sierpinska, 2000). Y contempla el estudio de otras investigaciones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales desde diferentes perspectivas teóricas, así como trabajos que usan AlNuSet y que analizan las características principales de este software.

Fase B. Presentación del proyecto: En esta fase se hará una breve introducción al proyecto de grado y se dará a conocer el cronograma de actividades a los participantes de esta investigación. El fin de esta actividad es informar y crear un ambiente de trabajo entre los profesores en formación participantes y el autor de este proyecto.

FASE C. AlNuSet como herramienta: Se desarrollan cuatro actividades con los participantes remitidas desde la *Fase B. Diseño de actividades*, las cuales permiten analizar el conocimiento que los estudiantes tienen sobre el concepto de variable y que pueden permitir la familiarización con el software.

Fase D. Desarrollo y trabajo con los profesores en formación: En esta fase se desarrollan las actividades con los estudiantes que fueron diseñadas en la *Fase A. Diseño de actividades*. El objetivo de esta fase es propiciar el tránsito de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) utilizando a AlNuSet como herramienta.

Fase E. Análisis a posteriori: Se analizan las actividades desarrolladas por los participantes y se caracterizará el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural; además se muestran evidencias de lo ocurrido durante las actividades.

Fase F. Conclusiones del proyecto: Se darán a conocer los hallazgos más relevantes durante el transcurso de esta investigación mediante la presentación de la tesis.

4.1. FASE A. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Esta fase consiste en la elaboración y el análisis a priori de las actividades que se desarrollarán a lo largo de esta investigación. El objetivo de estas actividades es permitir que los participantes establezcan el tránsito entre los tres modos de pensamientos descritos por Anna Sierpinska (2000).

4.1.1. Análisis a priori

A continuación se presentan las actividades que se desarrollan con los docentes en formación y su respectivo análisis; este análisis se realiza sin tomar en cuenta la experiencia con los participantes. También se estudian las características más importantes que emergen en cada uno de los pasos presentes en cada actividad y lo que se espera que los participantes respondan.

Actividad Ejemplo

Esta actividad será desarrollada entre los participantes con el apoyo del autor de este proyecto. Por tanto solo permitirá la interacción con el software AlNuSet y verificar qué tanto saben los participantes acerca de solución de ecuaciones o inecuaciones de manera algebraica, geométrica y analítica, así como las relaciones que logran establecer entre ellas.

1. Recta algebraica

Iniciaremos resaltando la siguiente función lineal: $f(x) = 2x + 3$.

Abrimos el software AlNuSet y seleccionamos como dominio los reales.

Posteriormente se va a digitar en el recuadro de Edición rápida la variable independiente x y la ecuación $2 * x + 3$.

Al finalizar lo anterior digitar $2 * x + 3 > 0$ (Ver figura 14).

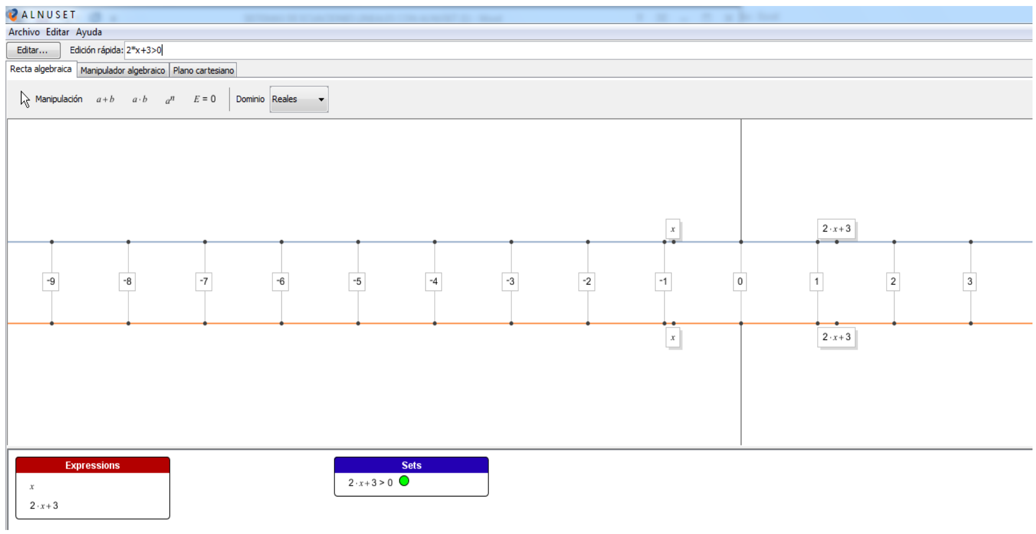


Figura 14. Recta algebraica ejercicio

Cuando arrastramos la variable independiente x sobre la recta real es posible ver que el punto que se encuentra en la parte inferior de la pantalla cambiará de verde a rojo o de rojo a verde. Esto significa que existen valores para los cuales $2 * x + 3 > 0$ se satisface y algunos otros para las cuales no.

Si se ubica la variable x exactamente en $x = -3/2$ será el punto donde la recta real es dividida en dos partes. A derecha la inecuación $2 * x + 3 > 0$ se cumple y a izquierda no.

Se consideran dos casos, uno donde se cumple la desigualdad anterior y otro donde no cumple. Cuando en AlNuSet la luz que se encuentra en la casilla Sets se pone de color verde significa que sí cumple, en caso de ser de color roja, no verificará la desigualdad (figuras 15 y 16).

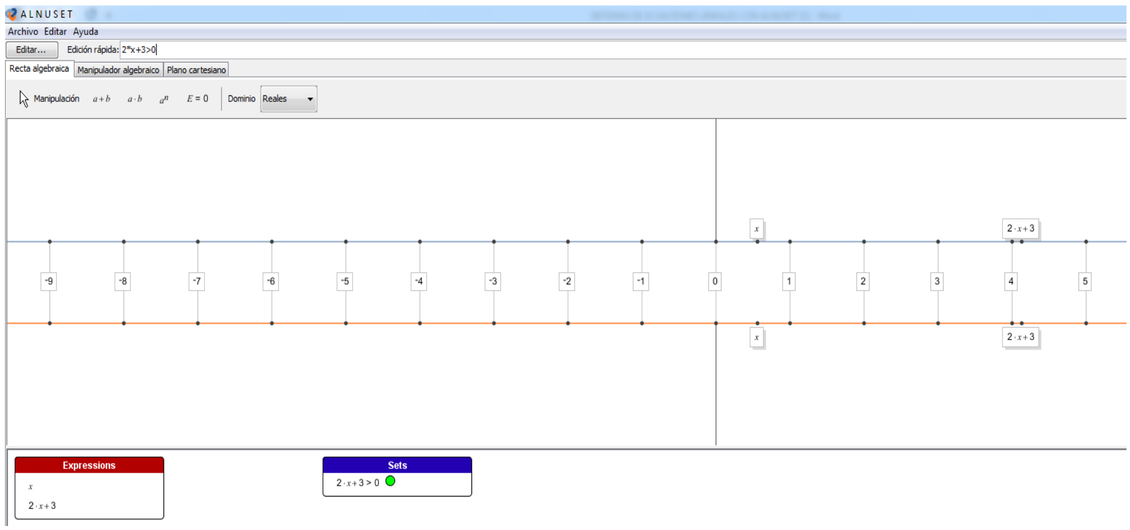


Figura 15. Cumplimiento de la desigualdad

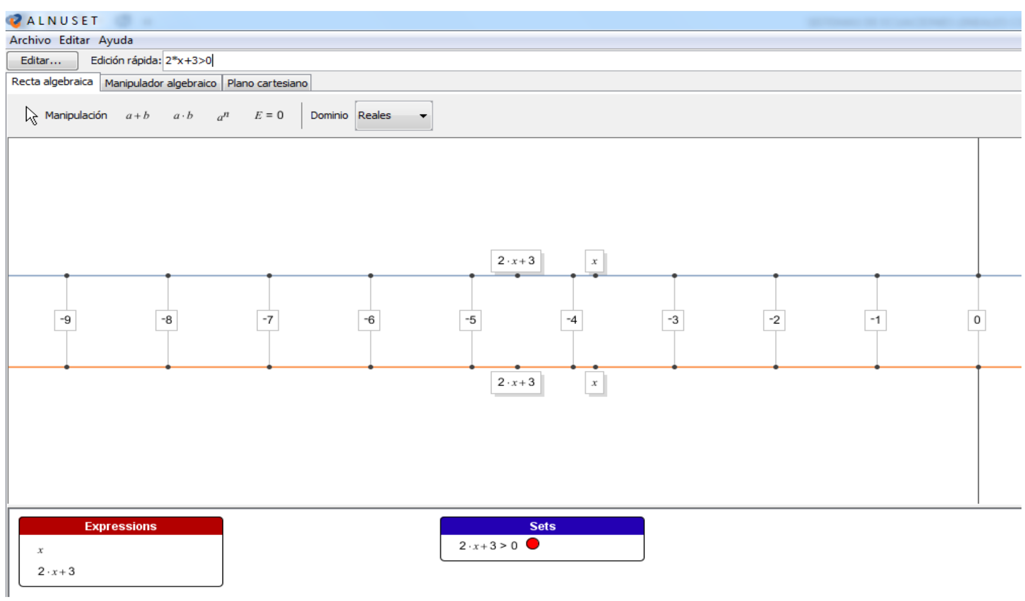


Figura 16. Cuando no cumple la desigualdad

Este entorno (recta algebraica) y tomando como base el modo de pensamiento analítico estructural se muestra que existen números reales para los cuales la desigualdad $2 * x + 3 > 0$ no se cumple y de esta manera, no es posible asumir que el conjunto de solución es R y permite observar las características presentes en la inecuación y recordar cómo se soluciona de manera correcta sin recurrir al lápiz y el papel.

2. Al culminar el paso anterior en la recta algebraica, se procederá a trabajar con el manipulador algebraico, de tal manera que el participante podrá realizar de manera didáctica los procesos algebraicos pertinentes para encontrar la solución del problema.

2.1. Escribimos $2 * x + 3 > 0$ en la barra de herramientas "Edición rápida" y se da Enter.

Seleccionamos toda la ecuación generada anteriormente $(2 \cdot x + 3 > 0)$.

En las reglas que aparecen a mano izquierda, marcamos la que dice: $A + T \lesseqgtr B \to A \lesseqgtr B - T$, obteniendo así: $2 \cdot x > -3$.

Seleccionamos ahora la expresión anterior y escogemos la herramienta: $T \cdot A \lesseqgtr B \to A \lesseqgtr BT$. Obteniendo: $x > \frac{1}{2} \cdot -3$.

Luego de realizado lo anterior, seleccionamos esta expresión resultante y seguidamente la herramienta Simplificar, obteniendo así la respuesta: $x > -3/2$ (Ver figura 17).

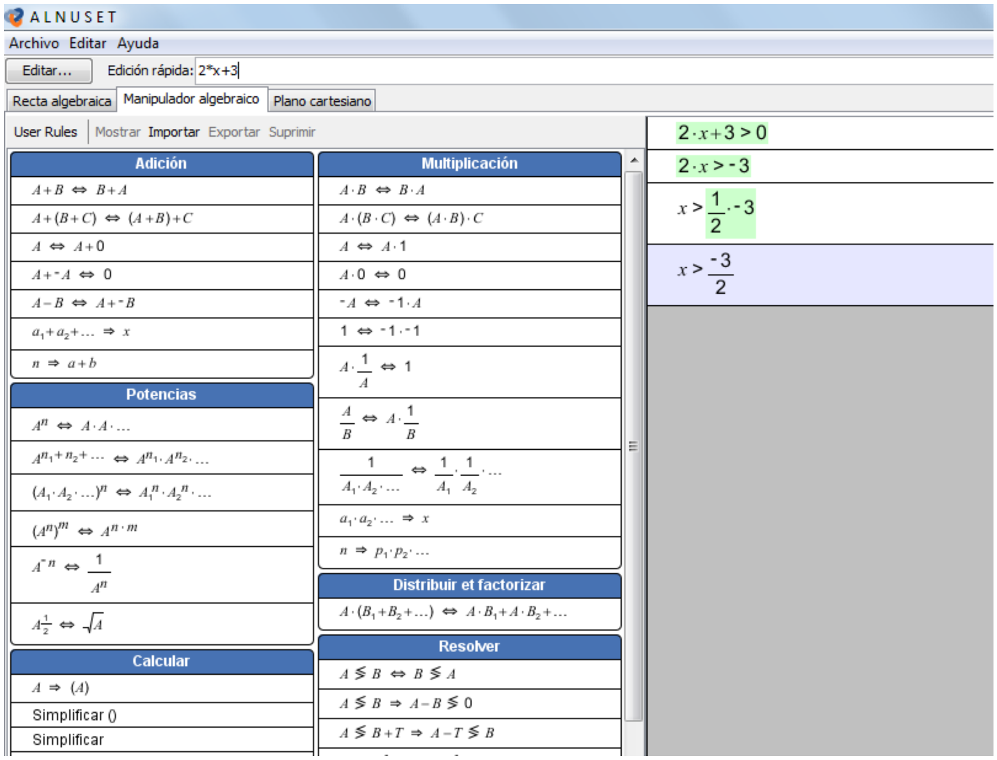


Figura 17. Solución algebraica

Luego de la interacción con el software y teniendo en cuenta las propiedades presentes para el desarrollo de la ecuación 2x+3>0, es posible ver el paso a paso que se ha de desarrollar con este entorno en AlNuSet, verificando así el desarrollo de una manera de pensar analítico aritmético sobre la expresión.

3. Para cerrar se pro a tracede a trabajar con el plano cartesiano, de tal manera que el participante podrá realizar la representación gráfica del sistema propuesto. Gráficamente es posible observar para qué valores reales la inecuación $2x + 3 > 0$ tiene solución. Ya teniendo la ecuación $2 * x + 3 > 0$ proveniente desde la interacción con el entorno Recta Algebraica de AlNuSet, se observa en la parte

superior la recta real junto con los posibles valores que puede tomar la variable independiente x. Para esto se realiza el siguiente procedimiento:

Regresamos al entorno *Recta algebraica* de AlNuSet y se escribe en la barra “Edición Rápida” la ecuación $2 * x + 3$ y se da enter.

Tras hacer la acción anterior, volvemos al entorno *Plano Cartesiano* y en la parte superior del plano es posible observar la variable independiente x y la expresión algebraica $2 \cdot x + 3$.

Sobre la anterior expresión algebraica damos clic derecho y en la pestaña Mostrar/ Ocultar valor y seleccionamos la variable x. (Ver figura 18)

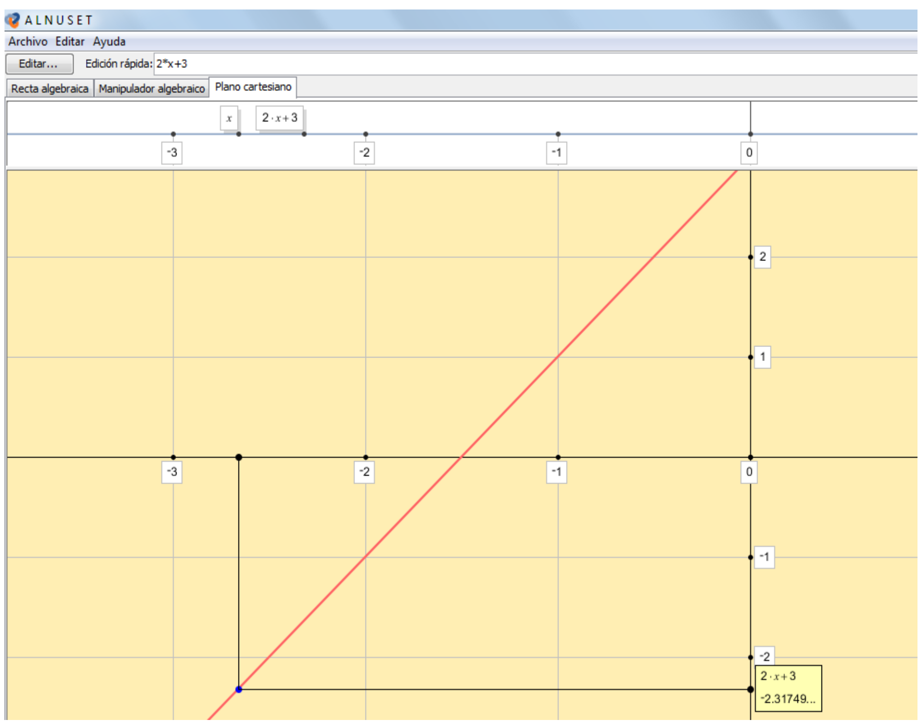


Figura 18. Solución geométrica

De esta manera podemos observar que existe un valor en x para la ecuación $2x + 3 > 0$ que hace que $2x + 3 = 0$ y además existen infinitos valores en x para que la ecuación $2x + 3 > 0$ que hacen que $2x + 3 < 0$.

Es aquí cuando cada estudiante deberá elegir cuál de las etapas se está presentando en el ejercicio planteado y determinará que existen algunos valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación se satisface y así habrá determinado la solución del problema que en este caso es $x = -\frac{3}{2}$.

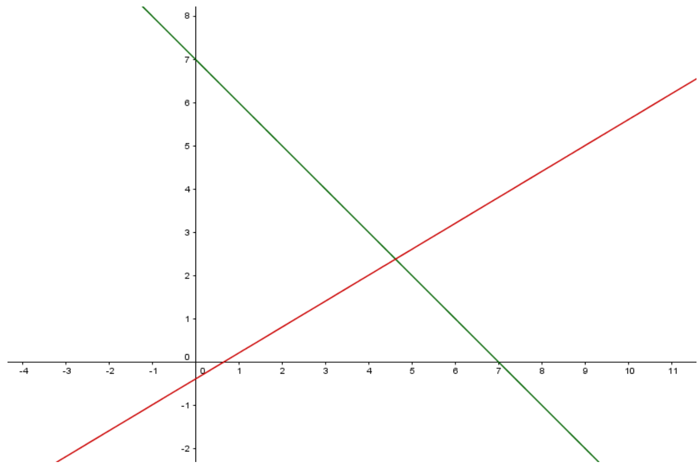
Este tipo de representación motiva un modo de pensar sintético geométrico dado que la solución de la inecuación es determinada por el estudiante por las características de la representación geométrica de la ecuación.

Actividad 1

El desarrollo de esta actividad está a cargo de cada uno de los participantes. El autor de este trabajo servirá como mediador en la realización de cada uno de los ejercicios presentes en esta actividad. Esta actividad permitirá determinar si los participantes realizan el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético.

Veamos cómo sería el desarrollo de esta actividad y qué se espera que cada uno de los participantes domine y realice en cada uno de los ejercicios propuestos.

1. Considere la siguiente imagen, realice lo indicado a continuación y responda las siguientes preguntas:



a. Represente el sistema de ecuaciones lineales formado por el par de rectas anterior.

Teniendo en cuenta los puntos por donde pasan ambas rectas, tenemos que la recta de color verde la cual llamaremos l_1 pasa por los puntos $(0,7)$; $(7,0)$ mientras que la recta de color rojo que llamaremos l_2 pasa por los puntos $\left(\frac{2}{3},0\right)$; $(0,-\frac{2}{5})$ puntos que serán dados a los estudiantes si es necesario.

Posteriormente se espera que al tener dichos valores, los participantes calculen las pendientes teniendo que:

$$m_1 = \frac{7-0}{0-7} = \frac{7}{-7} = -\frac{7}{7} = -1$$

$$m_2 = \frac{0-\left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{3}-0} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Luego para la recta l_1 se tiene:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 7 = (-1)(x - 0)$$

$$y = -x + 7$$

O también:

$$l_1: \quad x + y = 7$$

Luego para la recta l_2 se tiene:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(3x - 2)$$

O también:

$$5y = 3x - 2$$

$$l_2: \quad 3x - 5y = 2$$

Así, el sistema de ecuaciones representado en el plano anterior será:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ \quad x + y = 7 \end{cases}$$

Gráficamente verificamos que sí es el sistema apropiado el anteriormente mencionado según la figura 19.

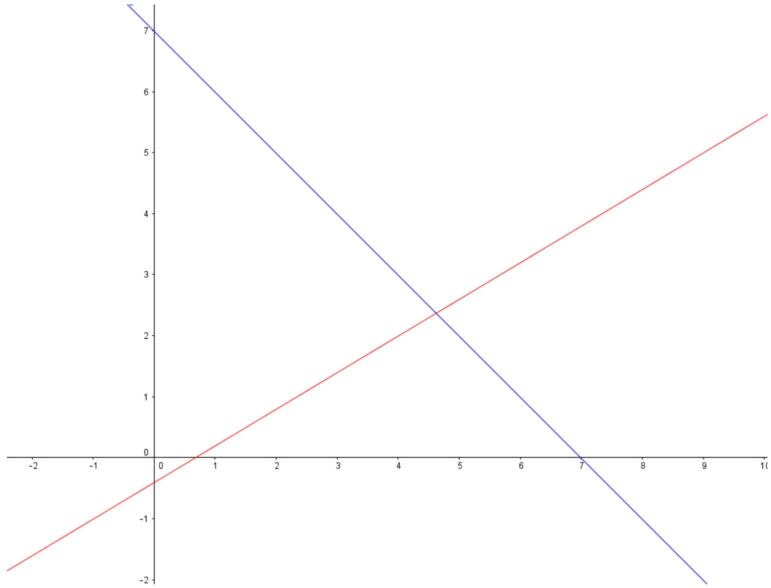


Figura 19. Sistema de Ecuaciones Lineales

b. Decimos que una solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b \\ a_{21}x + a_{22}y = c \end{cases}$ si para $(b, c) = (a_{11}, a_{21})x + (a_{12}, a_{22})$y. Dado esto, ¿El sistema de ecuaciones lineales representado en el punto a tiene solución? De tenerla, ¿Cuál es ésta?

Tomando como referencia el sistema anterior:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ \ \ x + y = 7 \end{cases}$$

Y aplicando el concepto de combinación lineal representado en el enunciado, se tiene que encontrar una pareja ordenada (x, y) tal que $(2,7) = (3,1)x + (-5,1)y$

Por tanto:

Multiplico por (-3) la segunda fila y el resultado lo sumo a la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & |2 \\ 1 & 1 & |7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & |-19 \\ 1 & 1 & | \quad 7 \end{pmatrix}$$

Dividimos entre (-8) la primera fila

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 & |-19 \\ 1 & 1 & | \quad 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & |\frac{19}{8} \\ 1 & 1 & | \ 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primer fila por (-1) y el resultado lo sumamos a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & |\frac{19}{8} \\ 1 & 1 & | \ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & |\frac{19}{8} \\ 1 & 0 & |\frac{37}{8} \end{pmatrix}$$

Obteniendo como resultado:

$$x = \frac{37}{8} \qquad y = -\frac{19}{8}$$

Entonces: $(2,7) = (3,1)\left(\frac{37}{8}\right) + (-5,1)\left(\frac{19}{8}\right)$

c. Teniendo en cuenta que si $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$ entonces, ¿respecto al sistema de ecuaciones lineales representado en el gráfico anterior podemos concluir que tiene solución?

Tomando como referencia en el enunciado respecto a la matriz asociada al anterior sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Debemos realizar la siguiente operación: $(3)(1) - (1)(-5) = 3 + 5 = 8 \neq 0$ entonces el sistema de ecuaciones representado anteriormente tiene solución.

d. ¿El sistema $Ax = b$ tiene solución única si A es invertible? De ser así, entonces ¿La matriz A asociada al sistema de ecuaciones lineales anterior es invertible?

Para este momento de la actividad se espera que los participantes deberán comprender que la matriz asociada al sistema anterior es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y a esta es que debemos verificar si es invertible o no realizando el método Gaussiano extendiendo la matriz asociada a la matriz identidad y realizando operaciones elementales:

(Multiplico la segunda fila por -3 y al resultado le sumo la primera)

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & |1 & 0 \\ 1 & 1 & |0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & |1 & -3 \\ 1 & 1 & |0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Multiplico la primera fila por $-\frac{1}{8}$ y el resultado se lo sumo a la segunda fila)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & |-\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 & |0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & |-\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & |\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(Permutando ambas filas)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | \ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & |-\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Así se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Y por tanto la matriz asociada al sistema es invertible y luego se concluye que el sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$ tiene solución única.

e. Plantee un sistema de ecuaciones teniendo en cuenta el ya representado en el punto a, para que este último:

- Tenga infinitas soluciones.
- No tenga solución.
- Tenga infinitas soluciones

Teniendo el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$ gráficamente es posible determinar que tiene solución única. Así que para encontrar un sistema de ecuaciones lineales que tenga infinitas soluciones, basta con cambiar alguna de las filas como por ejemplo se muestra a continuación:

Tomando la primera ecuación para realizar este cambio, se tiene la ecuación:

$$3x - 5y = 2 \rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$$

Así mismo, tomando 9 como factor a multiplicar, se obtiene la nueva ecuación $27x - 45y = 18$. Esta ecuación permite formar el nuevo sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 27 - 45y = 18 \end{cases}$ el cual mediante la dependencia lineal entre ambas ecuaciones permite observar que tiene infinitas soluciones.

Ahora, cambiando la segunda ecuación: $x + y = 7 \rightarrow y = -x + 7$ así, para que el nuevo sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones debemos multiplicar la ecuación anterior por cualquier número real. Tomando 3 como factor a multiplicar, tenemos que:

$$3y = -3x + 21$$

Puede ser un ejemplo de ecuación a tomar para que el nuevo sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ \quad x + y = 7 \end{cases}$$

Tenga infinitas soluciones debido a la dependencia lineal que hay entre ambas ecuaciones.

No tenga solución.

Para este caso solo es suficiente con cambiar una de las dos ecuaciones, de tal manera que la nueva ecuación tenga la misma pendiente que la anterior. Por ejemplo, tomando $x + y = 7 \rightarrow y = -x + 7$ tenemos que una posible nueva ecuación sería $y = -x + 3$ obteniendo así $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$ de donde gráficamente podemos observar que el sistema anterior lo conforma dos rectas paralelas como lo mostrado en la figura 20.

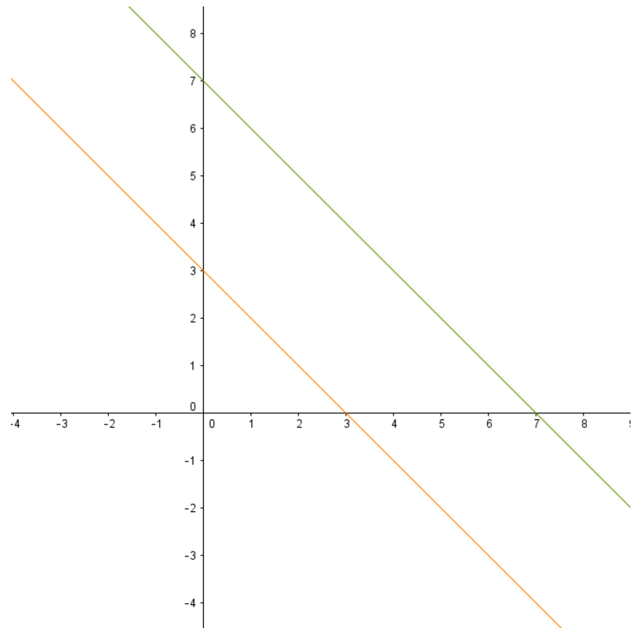


Figura 20. Solución gráfica caso I

También es posible cambiar la primera ecuación $3x - 5y = 2 \rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$ donde la nueva tendría también la misma pendiente sin importar el valor del corte con el eje y. Por ejemplo, $y = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5} \rightarrow 3x - 5y = 8$ sería una posible ecuación para que el nuevo sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ no tenga solución. Gráficamente mediante la figura 21 es posible determinarlo.

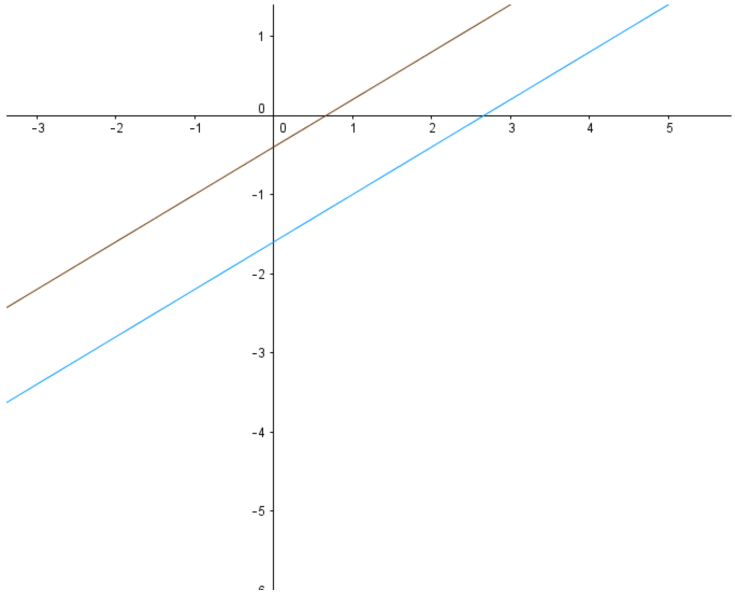


Figura 21. Solución gráfica caso II

f. Determine matricialmente si el nuevo sistema de ecuaciones lineales satisface con las dos condiciones anteriores.

Este caso se puede verificar mediante lo mencionado en el índice anterior.

g. Teniendo en cuenta lo visto en el punto c, ¿podríamos determinar si lo realizado en el punto e. satisface ambas condiciones?

1. Tenga infinitas soluciones

Realizando lo mencionado en el punto c., concerniente al determinante de la matriz asociada al sistema podemos ver que para el sistema $\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ x + y = 7 \end{cases}$ su matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, realizando ahora su determinante $detA = (3)(1) - (3)(1) = 0$ y por tanto el sistema $\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ x + y = 7 \end{cases}$ puede tener infinitas soluciones o no tener; lo cual verifica lo realizado en el punto e.

2. No tenga solución

Realizando lo mencionado en el punto c, concerniente al determinante de la matriz asociada al sistema podemos ver que para el sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ su matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, realizando ahora su determinante $detA = (3)(-5) - (3)(-5) = -15 + 15$ y por tanto el sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ puede tener infinitas soluciones o no tener; lo cual verifica lo realizado en el punto e.

Actividad 2.

El desarrollo de esta actividad está a cargo de cada uno de los participantes. El autor de este trabajo servirá como mediador en la realización de cada uno de los ejercicios presentes en esta actividad. Esta actividad permitirá determinar si los participantes realizan el tránsito entre los modos de pensamiento analítico aritmético y analítico estructural.

Veamos cómo sería el desarrollo de esta actividad y qué se espera que cada uno de los participantes domine y realice en cada uno de los ejercicios propuestos.

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$$

Utilizando AlNuSet determine si tiene solución única, solución infinita o en caso contrario, no tiene solución.

Para poder determinar si el sistema anterior tiene solución, primer debemos despejar la variable dependiente en cada una de las ecuaciones.

Sea $3x + 2y = 1 \rightarrow 2y = -3x + 1 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (primera ecuación)

Sea $2y - 2x = 6 \rightarrow y - x = 3 \rightarrow y = x + 3$ (segunda ecuación)

Posteriormente se abre AlNuSet, y se digita cada una de ellas, incluyendo la variable independiente x y luego interactuamos con la recta algebraica. (Ver figura 22).

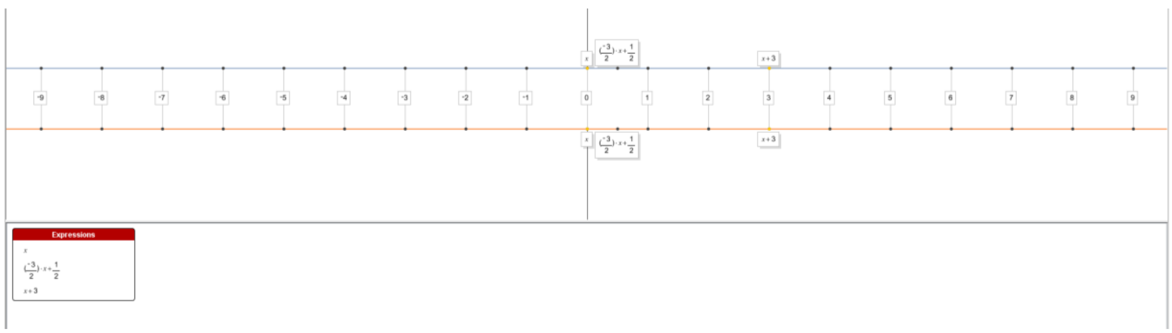


Figura 22. Plano cartesiano

2. Teorema de Rouché – Frobenius: Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y AM la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Entonces tenemos que:

- Si $r(A) = r(AM) = n \rightarrow$ S.C.D. (sistema compatible determinado: una única solución)

- Si $r(A) = r(AM) < n \rightarrow$ S.C.I. (sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones)
- Si $r(A) < r(AM) \rightarrow$ S.I. (sistema incompatible: no tiene solución)

n: $número\ de\ incógnitas$. Según lo descrito anteriormente, determine la solución del sistema anterior en caso de tener.

a. Teniendo en cuenta el teorema anterior, determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales en caso de tener.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Para el sistema anterior se tiene que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Y la matriz aumentada es:

$$AM = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Para determinar el rango de una matriz debemos proceder a aplicar el proceso de Gauss:

Multiplicamos la fila 2 por (-5) y el resultado lo sumamos a la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila 2 por (-2) y el resultado lo sumamos a la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplico la fila 1 por (-2) y el resultado lo sumamos a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Sumamos la fila 3 con la fila 1

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Dividimos la fila 1 entre (10)

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplico la fila 1 por (-11) y el resultado lo sumamos a la fila 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dividimos la fila 3 entre (2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplico la fila 3 por (-5) y el resultado lo sumamos a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutamos la fila 1 con la fila 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango de la matriz $r(A) = 3$

Veamos ahora el rango de la matriz aumentada mediante su determinante:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Sacamos el determinante de cada submatriz asociada:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (1)(-5) = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

Ahora ampliamos la matriz anterior en una fila y una columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)(-2)(7) + (-5)(1)(5) + (0)(1)(1)) - ((0)(-2)(5) + (-5)(1)(7) + (2)(1)(1))$$

$$= -28 - 25 + 0 - (-10 - 35 + 2) = -53 - (-43) = -10 \neq 0$$

Así, $r(AM) = 3$ y por lo tanto por teorema: $r(A) = r(AM) = n = 3$ luego decimos que el sistema anterior es un sistema compatible determinado: una única solución

De esta manera, podemos apreciar el tránsito entre el modo analítico aritmético y analítico estructural, donde, mediante el desarrollo del determinante de la matriz de coeficientes, su matriz asociada (procesos netamente aritméticos) y el teorema de Rouché – Frobenius (estructura utilizada), es posible determinar si tiene solución única, infinitas o simplemente no tiene solución.

b. De manera algebraica, determine la solución del sistema de ecuaciones lineales anterior.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Del sistema anterior, despejemos la variable x de la primera y segunda ecuación.

$$x - 2y + z = 3 \rightarrow x = 2y - z + 3 \quad (1)$$

$$2x - 5y = 4 \rightarrow x = \frac{5}{2}y + 2 \quad (2)$$

Posteriormente procedemos a realizar una igualación entre (1) y (2):

$$2y - z + 3 = \frac{5}{2}y + 2 \rightarrow 4y - 2z + 6 = 5y + 4 \rightarrow y = -2z - 4 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en la ecuación 2 tenemos:

$$x = 2(-2z - 4) - z + 3 \rightarrow x = -4z - 8 - z + 3 \rightarrow x = -5z - 5 \quad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en la ecuación 3 tenemos:

$$5(-5z - 5) + (-2z - 4) + 7z = 11$$

$$-25z - 25 - 2z - 4 + 7z = 11$$

$$-20z = 11 + 25 + 4$$

$$20z = -11 - 25 - 4$$

$$z = -\frac{3}{2} \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) y (3) respectivamente:

$$x = -5\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{15}{2} - 5 = -\frac{5}{2} \quad (6)$$

$$y = -2\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = -1$$

Lo que verifica que el sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$ tiene solución única.

c. Gráficamente, ¿es posible generar dicha solución? ¿Cómo podríamos lograrla? Represente la solución del anterior sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Claramente el sistema anterior en un sistema que consta de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, así que su representación gráfica está dada mediante la intersección de los planos que representan.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales (Tomado de TAREA 2. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales* (Retamosa 2010; 2011)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

a. Añádele una ecuación para que el sistema sea incompatible.
b. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado
c. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

a. Sistema Incompatible.

Dado el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$ podemos agregar cualquier ecuación que sea dependiente de alguna de las dos planteadas en el anterior sistema. Por ejemplo, la ecuación $4x - 6y + 8z = 2$ y así quedaría el nuevo sistema un sistema sin solución, es decir, un sistema incompatible.

b. Compatible Indeterminado

Dado el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$ podemos agregar la siguiente ecuación:$0x + oy + 0 = 0$ y así quedaría el nuevo sistema, un sistema con soluciones infinitas, es decir un sistema compatible indeterminado.

c. Compatible Determinado.

Para este caso, podremos agregar cualquier ecuación, de tal manera que el determinante de la nueva matriz de coeficientes obtenida sea diferente de cero. Por ejemplo verifiquemos si el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-6 - 3) + 3(-8 - 3) + 4(4 - 3) = -18 - 72 + 4 = -86 \neq 0$$

Y por tanto el sistema anterior tiene solución única.

4. El siguiente sistema de ecuaciones lineales, es compatible determinado. (Tomado de TAREA 3. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Retamosa, A, 2010 – 2011)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a. ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema de ecuaciones lineales tenga entre sus soluciones $(0,0,0)$?

Determinamos que al sustituir el vector $(0,0,0)$ en cada una de las ecuaciones que conforman el sistema anterior, tenemos que:

$$0+2(0)+0=0 \rightarrow 0=0$$

Así $(0,0,0)$ es solución de la primera ecuación.

Ahora, reemplazando $(0,0,0)$ en la ecuación 2, tenemos que:

$$0+0-0=4 \rightarrow ¿\,0=4?$$

Lo cual nos indica que para este caso, no satisface la ecuación 2.

Luego, sustituimos $(0,0,0)$ en la ecuación 3, teniendo así:

$$0-0+2(0)=0 \rightarrow 0=0$$

Lo que satisface la ecuación 3 y por lo tanto deberíamos quitar la ecuación 2.

b. Si se añado una nueva ecuación al anterior sistema, el sistema resultante puede ser:

- ✓ ¿Compatible determinado?
- ✓ ¿Compatible indeterminado?
- ✓ ¿Incompatible?

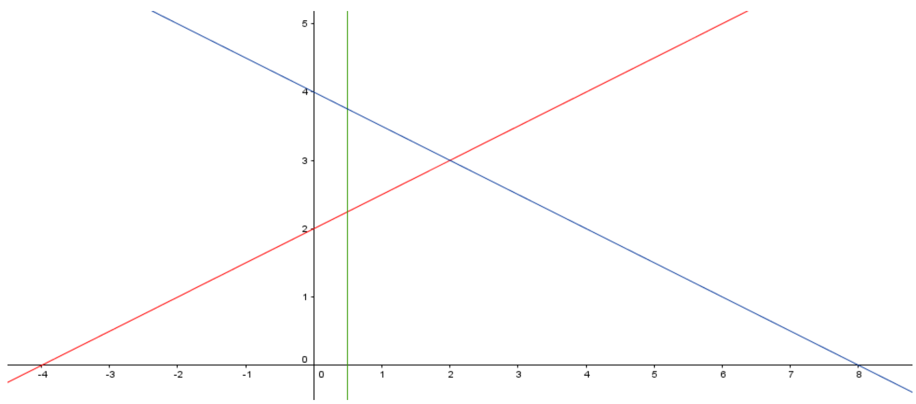
Justifica tu respuesta en cada caso y coloca un ejemplo cuando sea posible.

Tomando como hipótesis que el sistema $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ es un Sistema Compatible

Determinado debemos recordar que al añadirle una ecuación al mismo; este nuevo sistema quedaría de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, lo que da lugar a pensar que el nuevo sistema sea compatible indeterminado, es decir, tenga soluciones infinitas.

Actividad 3.

1. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique su respuesta.



a. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

b. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

c. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

d. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

¿El sistema anterior tiene solución? Justifica tu respuesta.

Para resolver este problema los participantes deberán encontrar la ecuación de las rectas azul, roja y verde. Llamemos l_1 a la recta azul, l_2 la roja y l_3 la verde.

a. Caso l_1:

Determinemos la ecuación de la recta verde, la cual pasa por los puntos $(0,4)\ y\ (8,0)$. Para esto, calculemos la pendiente m_1:

$$m_1 = \frac{4-0}{0-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Aplicando la ecuación general de la recta tenemos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\mathrm{y} - 4 = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathrm{x} - 0)$$

$$\mathrm{y} = -\frac{1}{2}x + 4$$

Teniendo así:

$$2\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 8$$

Entonces:

$$\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 8$$

b. Caso l_2:

Determinemos la ecuación de la recta roja, la cual pasa por los puntos $(0,2)\ y\ (-4,0)$.

Para esto, calculemos la pendiente m_2:

$$m_2 = \frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Aplicando la ecuación general de la recta tenemos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Teniendo así:

$$2y = x + 4$$

Entonces:

$$x - 2y = -4$$

Si multiplicamos por (-3) a toda la ecuación, obtenemos: $-3x + 6y = 12$

c. Caso l_3:

Determinemos la ecuación de la recta verde, la cual pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Para esto, calculemos la pendiente m_3:

$$m_3 = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{0} = pendiente\ infinita$$

Luego, esta recta al ser vertical, será de la forma $x = a$, donde a es el corte de la recta con el eje x, por tanto, $x = \frac{1}{2}$ será la ecuación de la recta verde, la cual si multiplicamos por 4 a ambos lados obtendremos $4x = 2$. Así, el sistema formado por la gráfica anterior será:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 8 \end{cases}$$

3. De qué manera podemos modificar la figura del punto anterior para que el sistema tenga:

a. Solución única

b. Infinitas soluciones

c. No tenga solución

a. Solución única

Para que el sistema tenga solución única, basta con colocar la recta l_3 en el punto de intersección de las rectas l_1 y l_2 el cual podemos determinar:

$$x - 2y = -4$$

$$x + 2y = 8$$

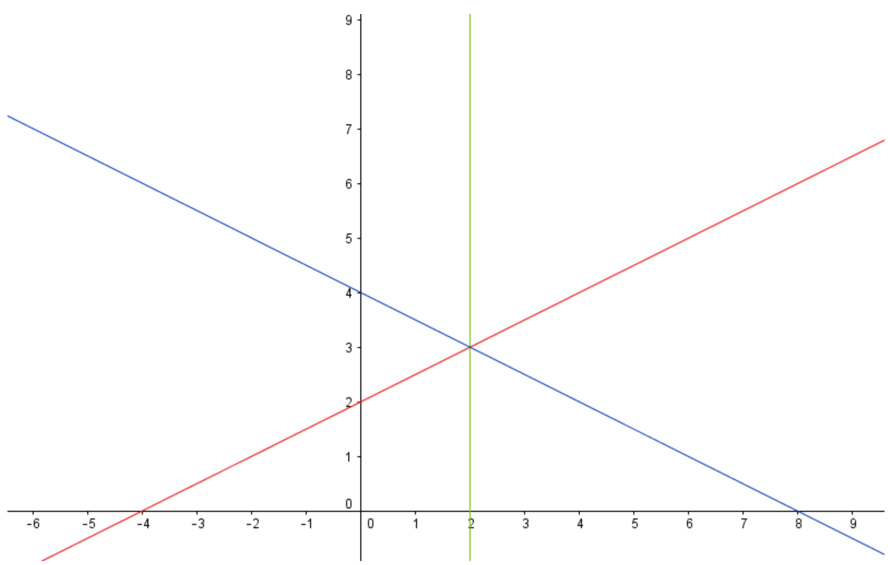
Sumando término a término ambas ecuaciones tenemos:

$$2x = 4 \to x = 2$$

Sustituyendo en alguna de las ecuaciones:

$$2 - 2y = -4 \to 6 = 2y \to y = 3$$

Así el punto de corte de l_1 y l_2 es: $(2{,}3)$ y por tanto para satisfacer la existencia de solución única, su ecuación debería ser: $x = 2$. Obteniendo así:



b. Infinitas soluciones

Teniendo en cuenta el sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ \mathrm{x + 2y = 8} \end{cases}$ cualquier forma en la que las rectas dadas sean paralelas no tendrán puntos en común y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones.

c. No tenga solución

Viendo que el sistema representado por $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ \mathrm{x + 2y = 8} \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, no hay necesidad de modificarlo, sin embargo, podemos cambiar la ecuación $4x = 2$ por alguna de sus combinaciones lineales, por ejemplo, $8x = 4$ conseguirá que el nuevo sistema no tenga solución.

4. Planteamos un sistema de ecuaciones lineales $2x2$, dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}$$

a. Encuentre la solución del sistema anterior.

El sistema anterior tendrá solución siempre y cuando su determinante sea diferente de cero, esto es:

Dada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ podemos ver que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \rightarrow ad = bc$

Por lo tanto, cuando $ad = bc$ el sistema no tendrá soluciones o tendrá soluciones infinitas. Así, para cuales quiera valores que cumplan $ad \neq bc$ el sistema tendrá única solución.

5. Encuentre el valor de μ para que el sistema:

$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ \ \ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a. Tenga solución única

Aplicamos el método de Gauss para la solución del sistema:

Multiplico por (-2) la fila 2 y el resultado lo sumo a la fila 1

$$\begin{pmatrix} 4 & \mu| & -2 \\ 2 & -1| & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & \mu| & -2 \\ 2 & -1| & 4 \end{pmatrix}$$

b. Tenga infinitas soluciones

c. No tenga soluciones

Tomemos el determinante de la matriz asociada al sistema:

$$\begin{vmatrix} 4 & \mu \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2\mu$$

Cuando $2\mu - 4 = 0 \rightarrow u = \frac{1}{2}$ tenemos que el sistema no tendrá solución.

4.2. FASE B. PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

En esta fase se hará una breve introducción al proyecto de grado y se dará a conocer el cronograma de actividades a los participantes de esta investigación. El fin de esta actividad es informar y crear un ambiente de trabajo entre los profesores en formación participantes y el investigador.

4.2.1. Cronograma de Actividades

A continuación se presenta el cronograma de actividades.

Fecha	Fase a ejecutar	Actividad a realizar	Duración de la actividad
Agosto 22 de 2016	Fase B. Presentación del proyecto.	Se hará una breve introducción al proyecto de grado y se dará a conocer el cronograma de actividades a los participantes de esta investigación.	Una sesión de dos horas
Agosto 22 de 2016	Fase C. AlNuSet como herramienta.	Desarrollo de las actividades ejemplo y 1 que tiene como objetivo observar el conocimiento que tienen los participantes sobre el concepto de variable y que permitan la familiarización con el software.	Una sesión de dos horas
Agosto 22 de 2016	Fase C. AlNuSet como herramienta.	Desarrollo de las actividades 2 y 3 que tiene como objetivo observar el conocimiento que tienen los participantes sobre el concepto de variable y que permitan la familiarización con el software.	Una sesión de dos horas
Agosto 30 de 2016	Fase D. Desarrollo y trabajo con los profesores en formación.	Desarrollo de la actividad ejemplo que tiene como objetivo propiciar el tránsito entre dos modos de pensamiento utilizando AlNuSet como herramienta	Una sesión de dos horas
Agosto30 de 2016	Fase D. Desarrollo y trabajo con los profesores en formación.	Desarrollo de la actividad 1 que tiene como objetivo propiciar el tránsito entre dos modos de pensamiento utilizando AlNuSet como herramienta	Una sesión de dos horas
Agosto 31 de 2016	Fase D. Desarrollo y trabajo con los profesores en formación.	Desarrollo de la actividad 2 que tiene como objetivo propiciar el tránsito entre dos modos de pensamiento utilizando AlNuSet como herramienta	Una sesión de dos horas
Septiembre 01 de 2016	Fase D. Desarrollo y trabajo con los profesores en formación.	Desarrollo de la actividad 3 que tiene como objetivo propiciar el tránsito entre los tres modos de pensamiento utilizando AlNuSet como herramienta	Una sesión de dos horas

4.3. FASE C. ALNUSET COMO HERRAMIENTA

*S*e desarrollan cuatro actividades con los participantes remitidas desde la *Fase B* las cuales permitan observar el conocimiento que han logrado sobre el concepto de variable y su familiarización con el software. Estas actividades se encuentran en el apartado de ANEXOS.

4.4. FASE D. DESARROLLO Y TRABAJO CON LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

En esta fase se desarrollan las actividades con los participantes que se elaboraron previamente en la *Fase A*. El objetivo de esta fase es propiciar el tránsito de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) utilizando a AlNuSet como herramienta.

En el desarrollo de esta fase, se contó con todos los participantes teniendo en cuenta el cronograma mencionado anteriormente. Además, se contó con el servicio del software de grabación de pantallas Action!

Las actividades se diseñaron teniendo en cuenta el objetivo de investigación y enfocadas esencialmente en determinar si los docentes de matemáticas en formación pueden lograr el tránsito entre los modos de pensar en matemáticas.

4.5. FASE E. ANÁLISIS A POSTERIORI

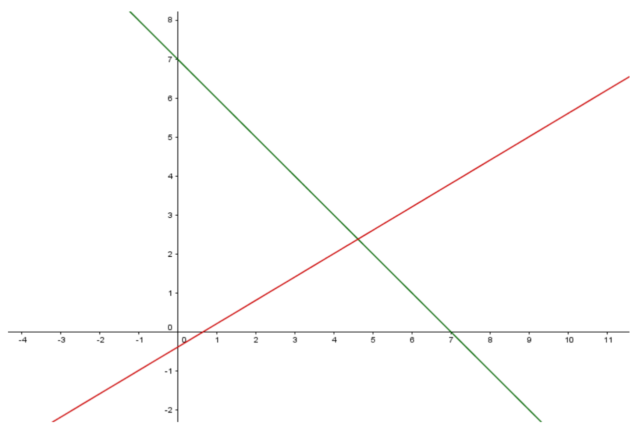
Se analizan las actividades desarrolladas por los participantes y se caracteriza el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural; además se muestran evidencias de lo ocurrido durante el desarrollo de las actividades.

A continuación se presenta el trabajo realizado por los participantes en cada una de las actividades propuestas, estableciendo su respectivo análisis y conclusiones teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo.

Actividad 1.

Se muestran los resultados más relevantes de algunos participantes respecto al desarrollo de esta actividad, teniendo en cuenta el objetivo del desarrollo de la misma.

1. Considere la siguiente imagen, realice lo indicado a continuación y responda las siguientes preguntas:



a. Represente el sistema de ecuaciones lineales formado por el par de rectas anterior.

Veamos a continuación en la figura 23 lo realizado por una de las participantes:

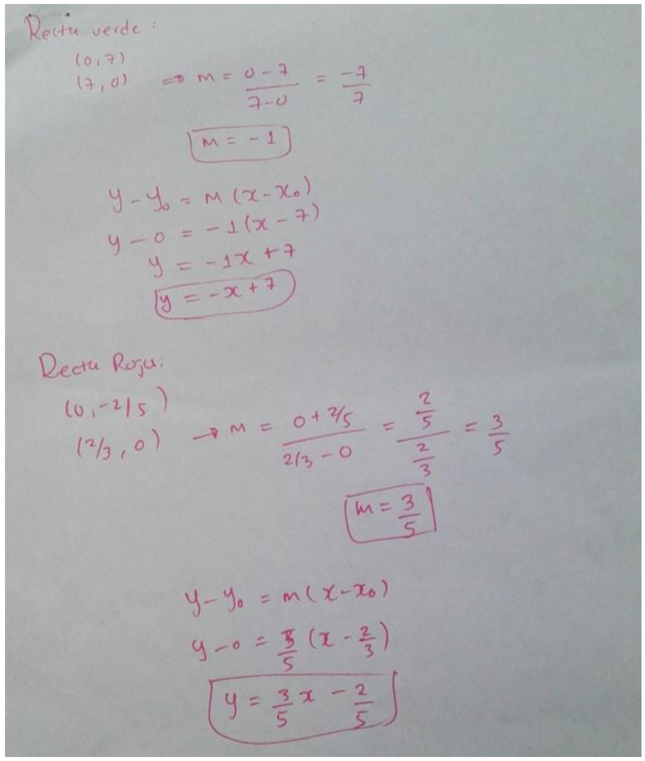


Figura 23. Actividad 1 – punto 1 – índice a.

Remitiéndonos a lo plasmado en el análisis a priori del mismo numeral, podemos ver un correcto análisis respecto a este índice y por tanto se ha comprendido perfectamente el planteamiento de la ecuación de la recta, sin embargo no se evidencia un sistema de ecuaciones lineales de manera explícita.

b. Decimos que una solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b \\ a_{21}x + a_{22}y = c \end{cases}$ si para $(b, c) = (a_{11}, a_{21})x + (a_{12}, a_{22})$y. Dado esto, ¿el sistema de ecuaciones lineales representado en el punto a tiene solución? De tenerla, ¿cuál es ésta?

A continuación la participante Andrea encuentra la solución del sistema de ecuaciones lineales que implícitamente realizó en el índice anterior: (Ver figura 24).

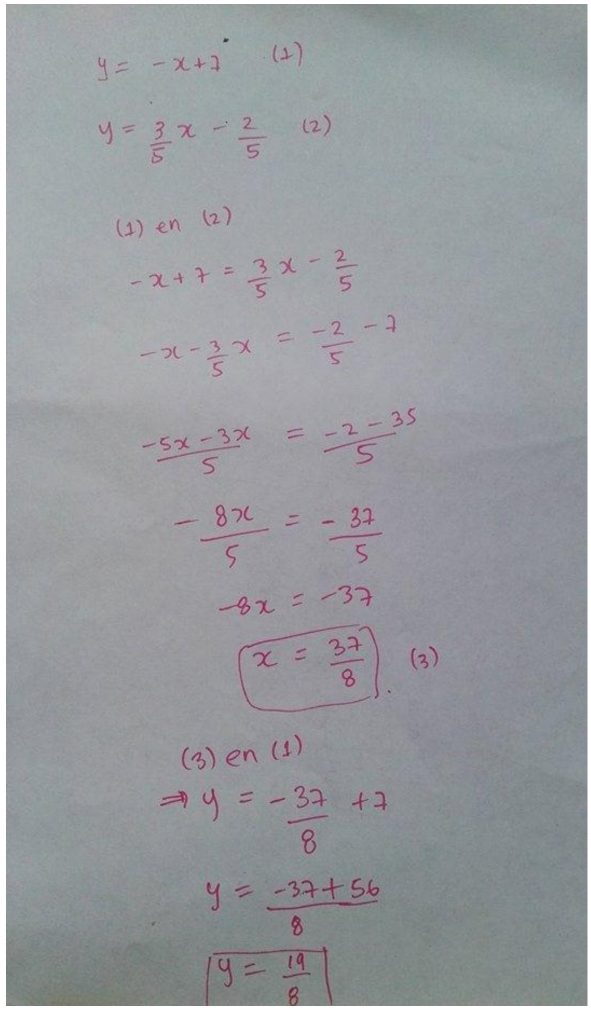


Figura 24. Actividad 1 – punto 1 – índice b.

A pesar que la solución es correcta, no se evidencia la aplicación sobre que si dado el sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b \\ a_{21}x + a_{22}y = c \end{cases}$, si tenemos que $(b, c) = (a_{11}, a_{21})x + (a_{12}, a_{22})y$ entonces $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema anterior.

Usando el entorno Recta algebraica de AlNuSet, Karla, ingresa las ecuaciones obtenidas anteriormente (Ver figura 25)

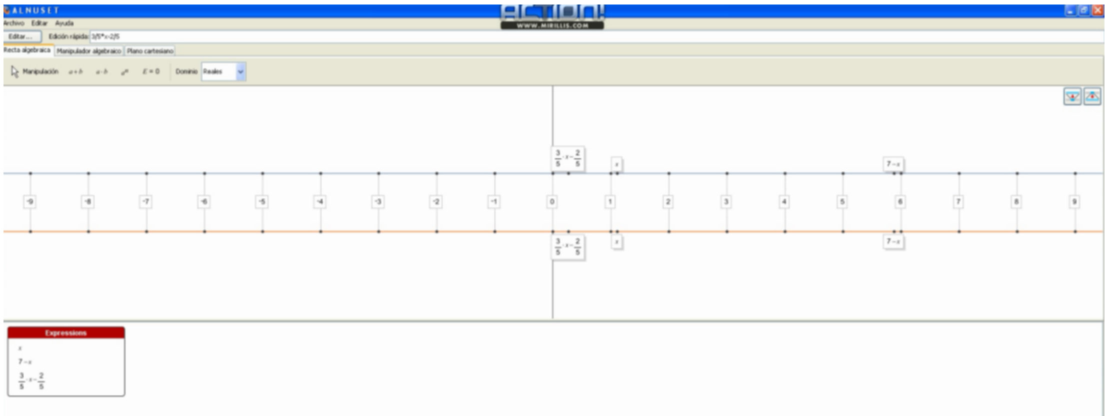


Figura 25. Entorno Recta algebraica A1 E1.

Gráficamente y usando el software AlNuSet una de las participantes en la charla, ingresa ambas ecuaciones en Edición rápida y genera geométricamente la solución del sistema sin tener exactamente la solución del mismo. (Ver figura 26).

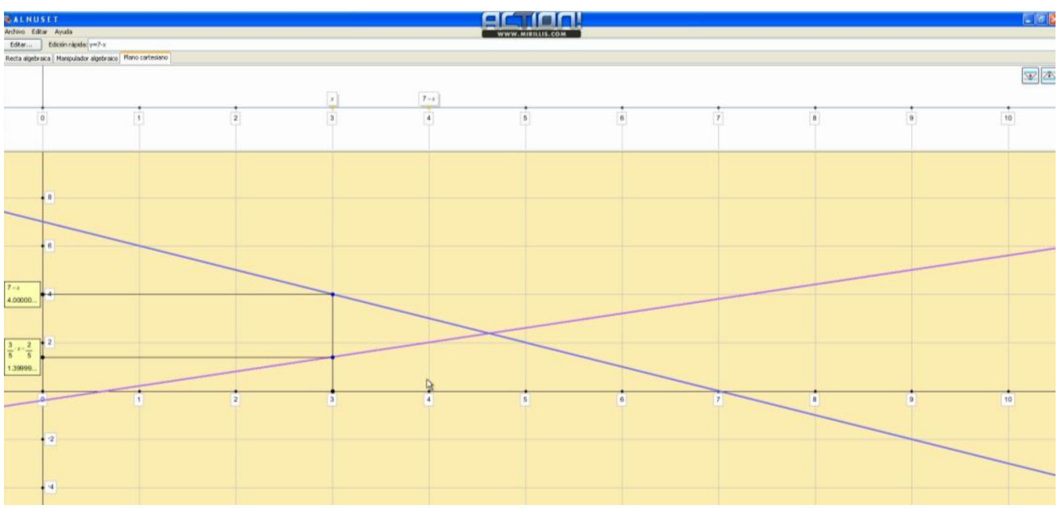
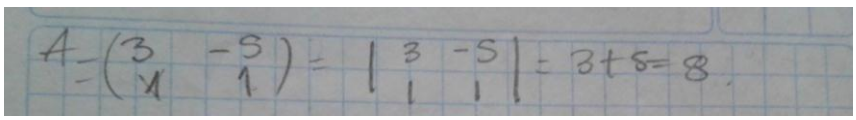
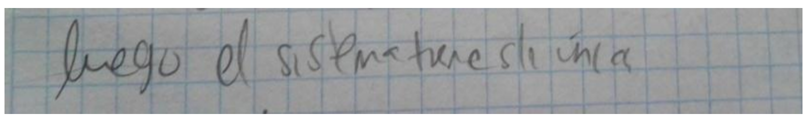


Figura 26. Entorno Plano cartesiano A1 E1.

c. Teniendo en cuenta que si $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$ entonces, ¿respecto al sistema de ecuaciones lineales representado en el gráfico anterior podemos concluir que tiene solución?

De las siguientes imágenes obtenidas en el desarrollo de una de las participantes (Silvia), podemos diferir acerca de la aplicación correcta del determinante de la matriz de coeficientes asociada.

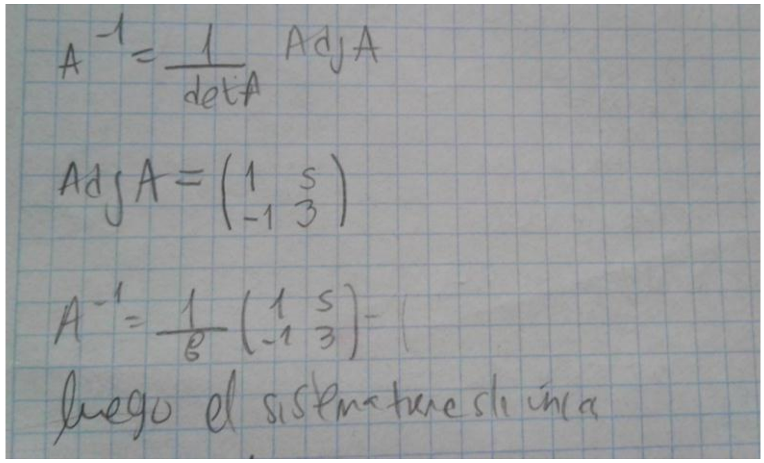




Una vez realizado correctamente el determinante y verificar que su resultado es diferente de cero, ella concluye que el sistema tiene solución única.

d. ¿El sistema $Ax = b$ tiene solución única si A es invertible? De ser así, entonces ¿La matriz A asociada al sistema de ecuaciones lineales anterior es invertible?

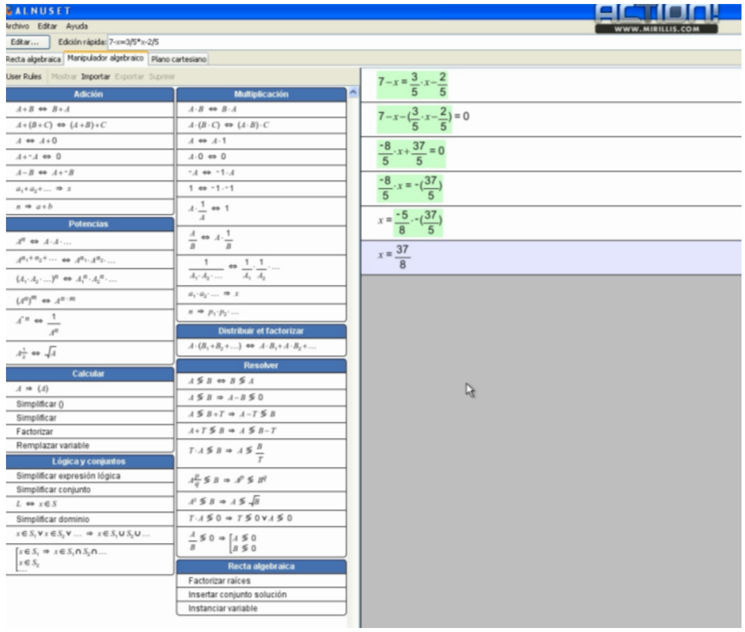
La misma participante del caso anterior realiza un pequeño ejercicio para verificar si la matriz de coeficientes asociada al sistema es invertible, para ello decide aplicar el concepto de la adjunta de una matriz $2x2$.



Una vez aplicado correctamente el concepto de la inversa de una matriz, ella concluye que tiene solución única.

Para saber con precisión cuál es la solución del sistema la participante Karla experimenta su desarrollo mediante el entorno Manipulador algebraico de AlNuSet.

En la siguiente imagen podemos verificar que primero expresa y en términos de x una de las ecuaciones del sistema planteado. Para este caso, ella usó $y = -x + 7$.



Sin embargo solo obtiene la componente x de la solución.

e. Plantee un sistema de ecuaciones teniendo en cuenta el ya representado en el punto a, para que este último:

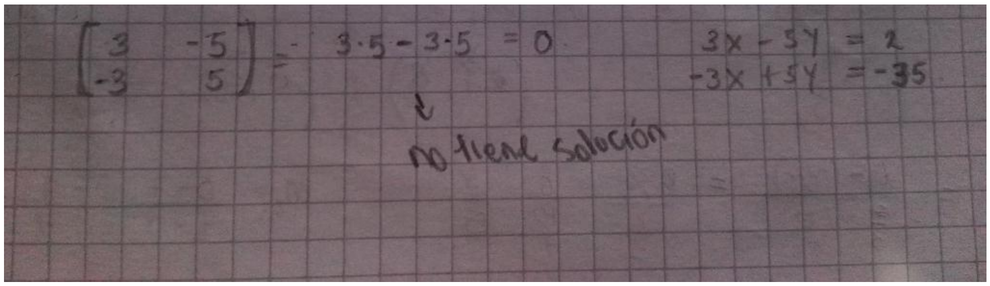
- Tenga infinitas soluciones.
- No tenga solución.

- Tenga infinitas soluciones

En este caso no pudieron obtener un sistema que cumpla con la condición dada, sin embargo se plantea que el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$ de donde podemos verificar que la ecuación 2 es claramente combinación lineal de la ecuación 1 (linealmente dependiente) y por tanto el nuevo sistema tiene infinitas soluciones.

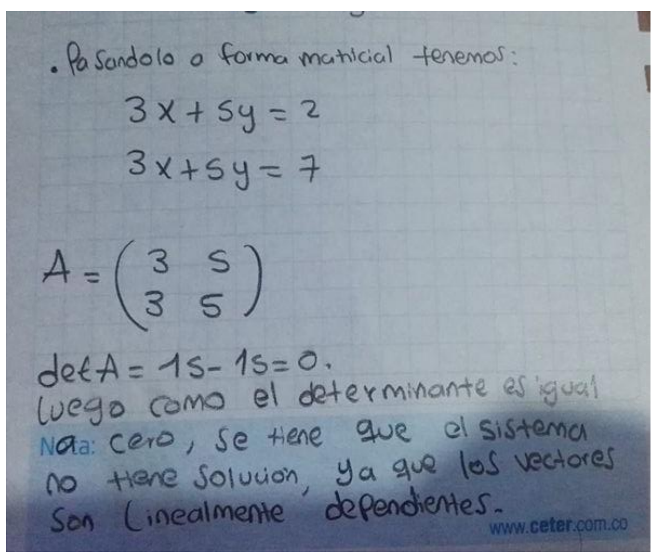
- No tenga solución

De acuerdo por lo realizado por la participante Leidy, ella plantea la siguiente situación:



Claramente podemos ver que plantea un nuevo sistema cambiando una de las ecuaciones del sistema anterior. El sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -3x + 5y = -35 \end{cases}$ no tiene solución cuando aplica la noción de determinante de una matriz.

Otra participante, Silvia, plantea lo siguiente:



Ella argumenta que aparte de obtener un nuevo sistema $\begin{cases}3x+5y=2\\3x+5y=7\end{cases}$, mediante el determinante infiere que al ser igual a cero, este nuevo sistema no tiene solución pues los vectores son linealmente dependientes. Verifiquemos lo que ella menciona: Sea $AM\begin{pmatrix}3 & 5 & |2\\3 & 5 & |7\end{pmatrix}$ la matriz aumentada, entonces realizando operaciones elementales tenemos que multiplicando por (-1) la primera fila y el resultado sumándolo a la segunda fila: $\begin{pmatrix}3 & 5 & |2\\3 & 5 & |7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & 5 & |2\\0 & 0 & |5\end{pmatrix}$ De ahí obtenemos una ecuación del tipo $0=5$ y por tanto satisface la condición dada.

f. Determine matricialmente si el nuevo sistema de ecuaciones lineales satisface con las dos condiciones anteriores.

Su respectivo análisis se hizo en el índice anterior.

g. Teniendo en cuenta lo visto en el punto c, ¿podríamos determinar si lo realizado en el punto e, satisface ambas condiciones?

Claramente sí, pues se han aplicado conceptos como combinación lineal, dependencia lineal y concepto de determinante de una matriz.

Al terminar esta sesión el investigador les informa a todos los participantes que lo realizado en esta actividad nos permite el tránsito entre los modos de pensamiento analítico aritmético y analítico estructural.

El modo de pensamiento analítico aritmético lo vivenciaron cuando se les pidió que resolvieran de manera algebraica cada uno de los problemas presentados y el modo de pensamiento analítico estructural lo vivieron cuando mediante conceptos como determinante de una matriz, adjunta de una matriz $2x2$ combinación lineal y dependencia lineal pudieron establecer si cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales planteados tiene solución única, infinita o no tiene.

El tránsito entre ellos se ve cuando logran establecer la conexión entre definiciones, teoremas o simplemente la aplicación operaciones elementales cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales.

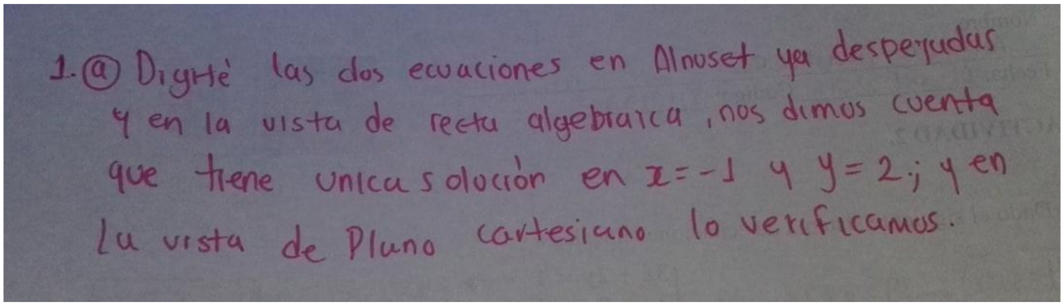
Actividad 2

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

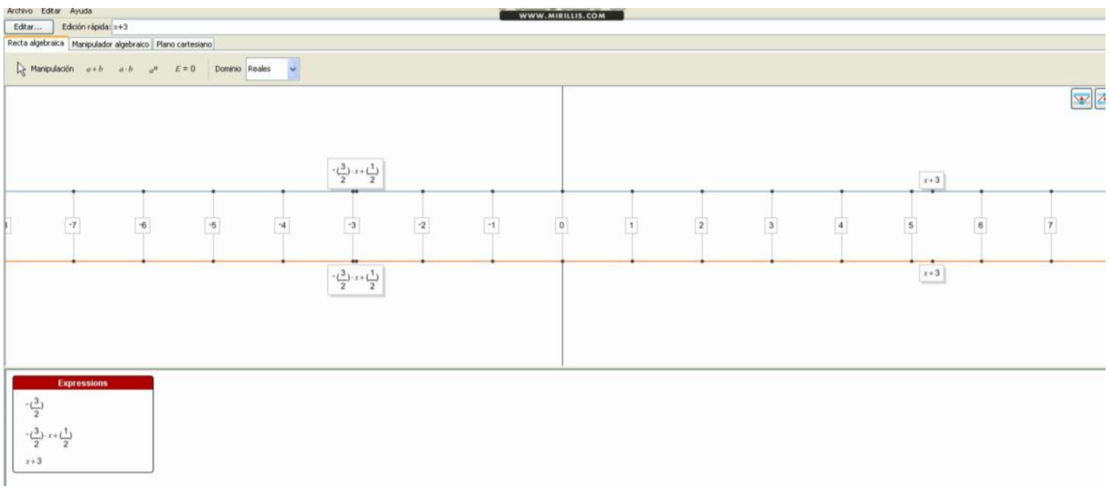
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$$

Utilizando AlNuSet determine si tiene solución única, solución infinita o en caso contrario, no tiene solución.

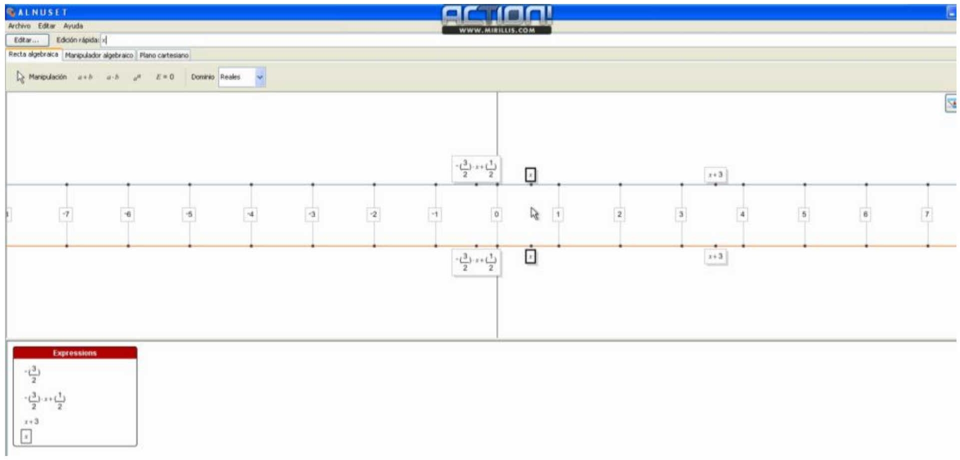
Examinemos lo realizado por Andrea en este índice:


1. (a) Digité las dos ecuaciones en Alnuset ya despejadas y en la vista de recta algebraica, nos dimos cuenta que tiene unica solución en $x=-1$ y $y=2$; y en la vista de Plano cartesiano lo verificamos.

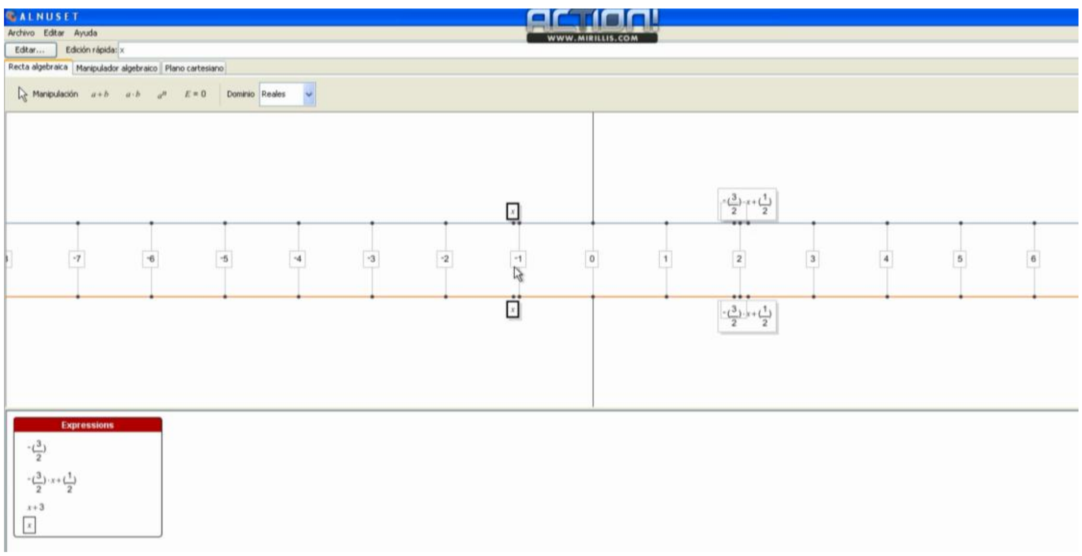
En el entorno Recta algebraica ella digita ambas ecuaciones expresadas en términos de y obteniendo:



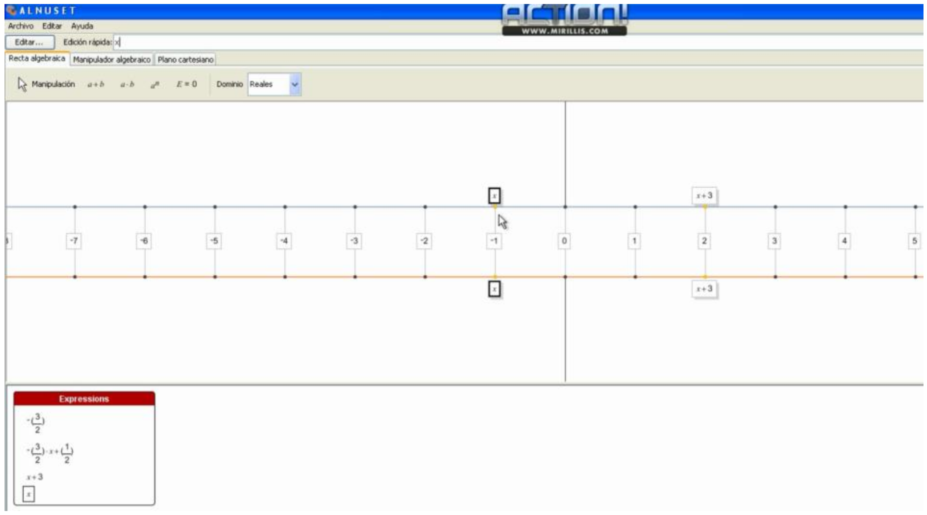
Al realizar el desplazamiento a través de la recta tomando el conjunto de los reales, verifica lo descrito anteriormente:



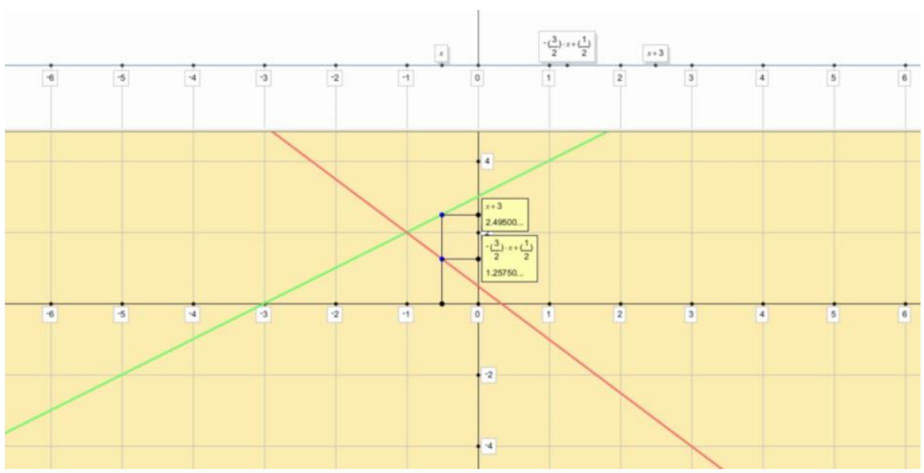
Justo en este momento ella identifica que ambas ecuaciones se van a encontrar en algún punto cercano a $x = -1$



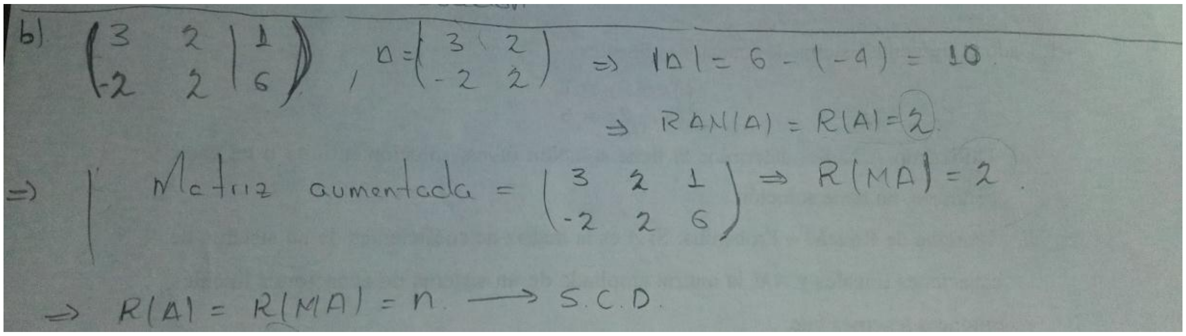
En la siguiente imagen verifica que la solución es $x = -1$ y por ende $y = 2$ cuando reemplaza el valor x en la ecuación 2.



En el entorno Plano cartesiano también se verifica lo realizado anteriormente:



Veamos a continuación lo realizado por el participante Brandon quien utiliza el Teorema de Rouché – Frobenius:



b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$, $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\Delta| = 6 - (-4) = 10$.

$\Rightarrow \mathrm{RAN}(A) = R(A) = 2$.

$\Rightarrow$ Matriz aumentada $= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(MA) = 2$.

$\Rightarrow R(A) = R(MA) = n. \longrightarrow$ S.C.D.

Brandon verifica que al aplicar el rango de la matriz de coeficientes asociada (A)y el rango de la matriz aumentada(AM) le da igual a la cantidad (n) de filas que posee el sistema de ecuaciones lineales.

Este proceso le permite en el participante establecer una conexión analítica aritmética y analítica estructural la cual ya había obtenido en la sesión anterior.

2. Teorema de Rouché – Frobenius: Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y AM la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Entonces tenemos que:

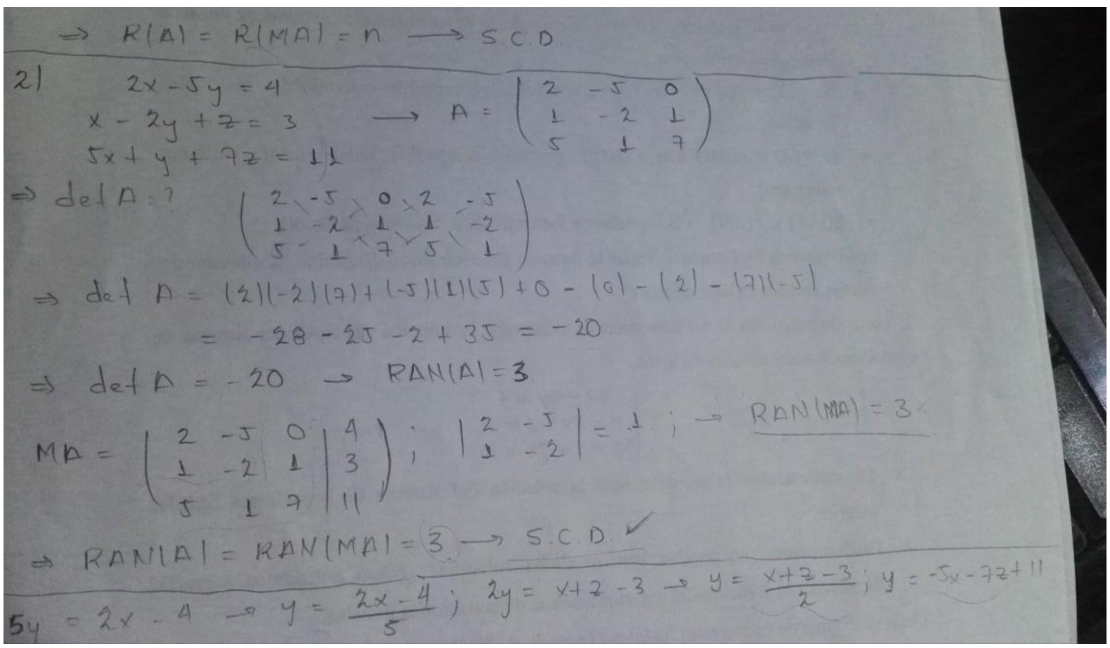
- Si $r(A) = r(AM) = n \rightarrow$ S.C.D. (sistema compatible determinado: una única solución)
- Si $r(A) = r(AM) < n \rightarrow$ S.C.I. (sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones)
- Si $r(A) < r(AM) \rightarrow$ S.I. (sistema incompatible: no tiene solución)

n: *número de incógnitas*. Según lo descrito anteriormente, determine la solución del sistema anterior en caso de tener.

a. Teniendo en cuenta el teorema anterior, determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales en caso de tener.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

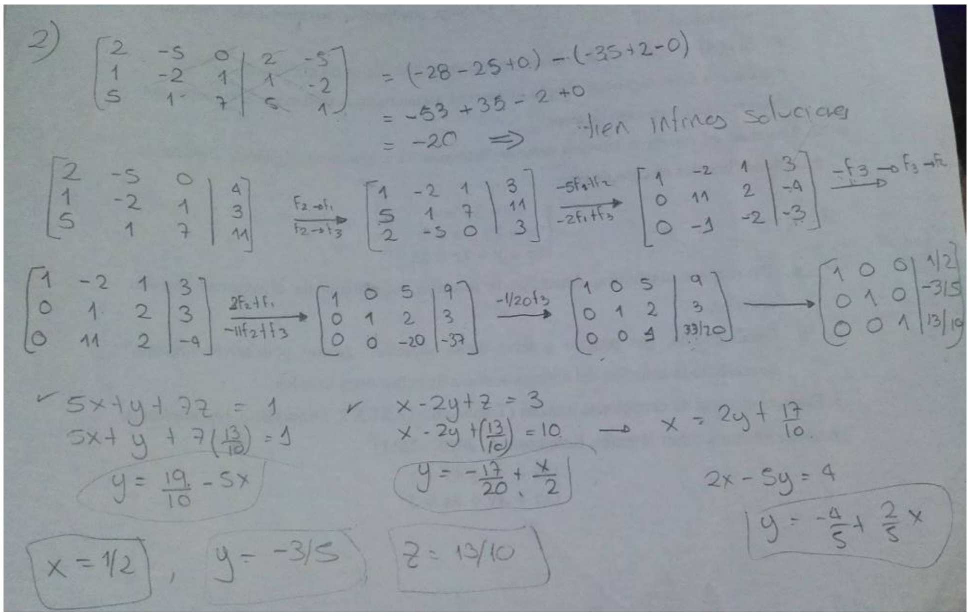
Veamos a continuación lo realizado por el participante Brandon:



Claramente podemos verificar que él establece que el sistema anterior es un Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única sin mencionar cuál es exactamente la solución.

b. De manera algebraica, determine la solución del sistema de ecuaciones lineales anterior.

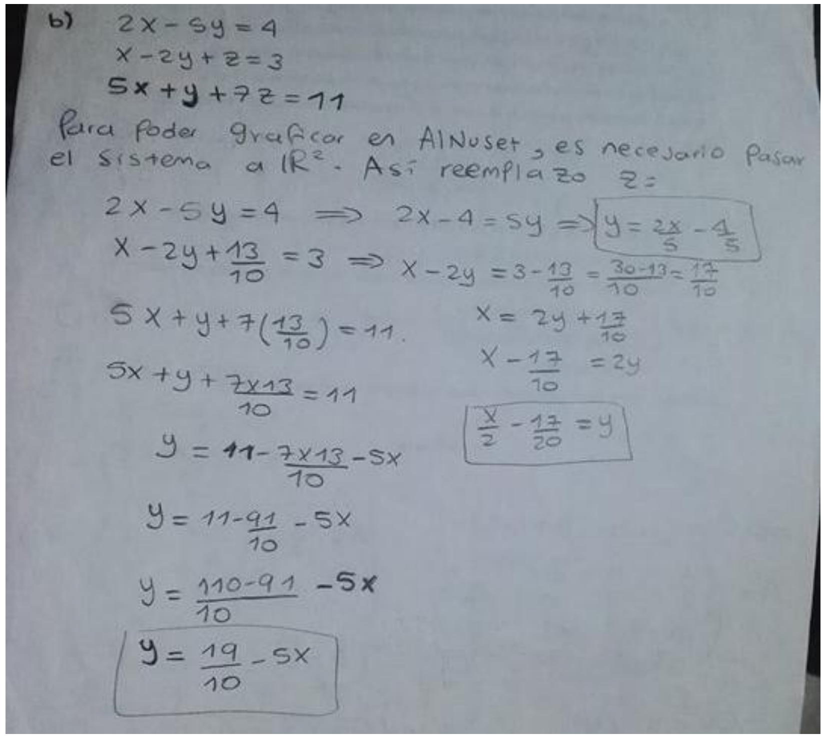
A continuación veremos lo desarrollado por Paola quien determinó la solución del sistema anterior:



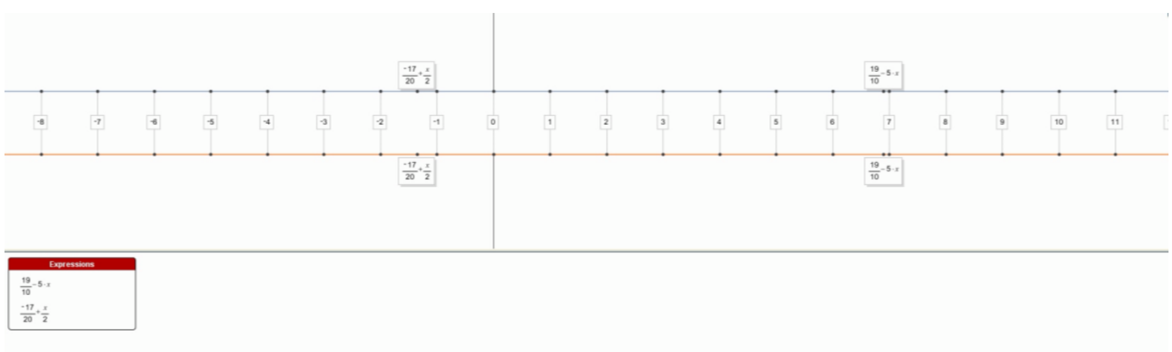
Ella inicialmente nos comenta que el sistema anterior es un Sistema Compatible Indeterminado, sin embargo realizando operaciones elementales aplicando el método de Gauss se da cuenta que realmente el sistema anterior es un Sistema Compatible Determinado.

c. Gráficamente, ¿es posible generar dicha solución? ¿Cómo podríamos lograrla? Represente la solución del anterior sistema de ecuaciones lineales.

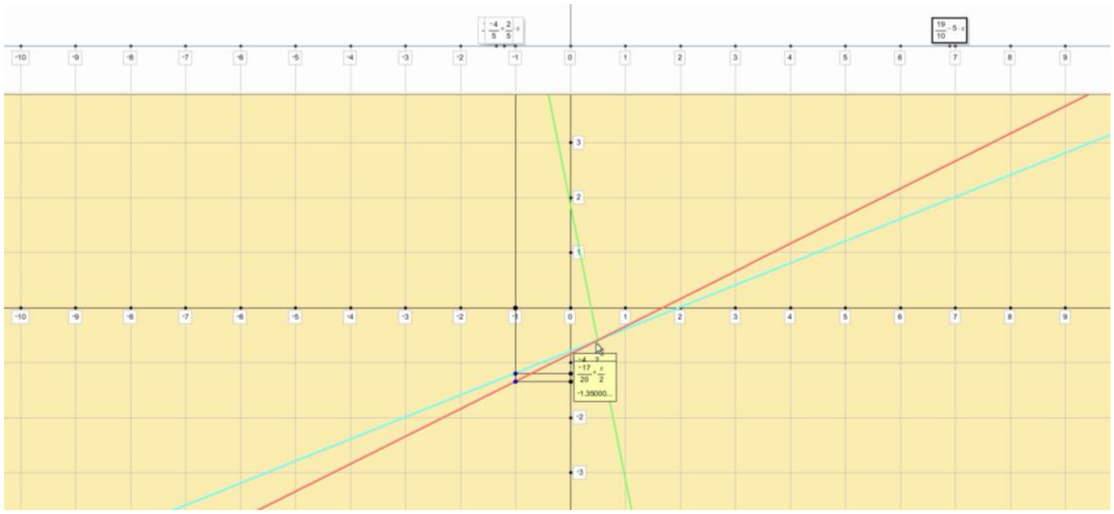
Veamos lo desarrollado por Silvia:



Ella nos expresa que debemos representar el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ pues AlNuSet admite sistemas $2x2$ y ahí podemos representarla gráficamente, es decir:



Gráficamente podemos determinar que el sistema anterior tiene solución única:



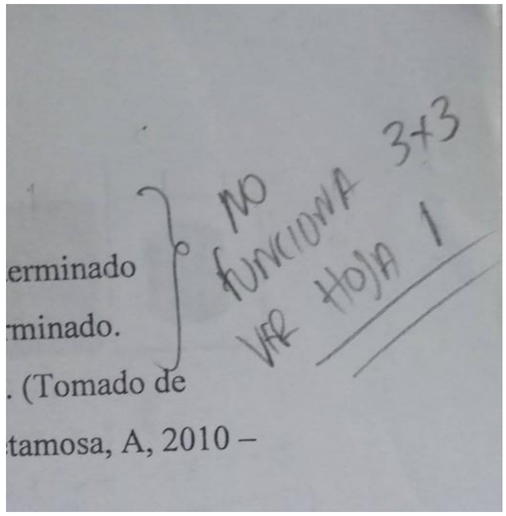
Por tanto si podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales nxn que tengan solución única utilizando como herramienta el software AlNuSet.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales (Tomado de TAREA 2. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Retamosa, A, 2010 – 2011)

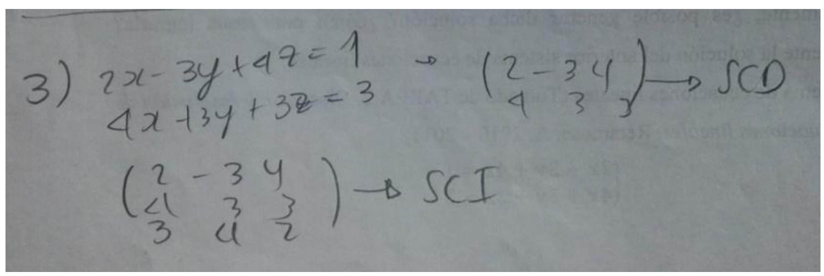
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

a. Añádele una ecuación para que el sistema sea incompatible.
b. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado
c. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Inicialmente los participantes argumentaron que el ejercicio no se puede resolver usando AlNuSet, como por ejemplo:



Sin embargo encontramos que algunos participantes nos comentan que el sistema original es un SCD y nos dan un ejemplo en el cual el nuevo sistema es SCI sin obtener un desarrollo pleno del mismo.

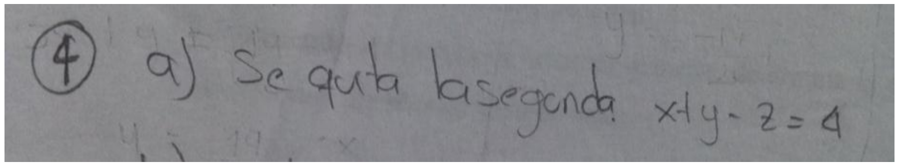


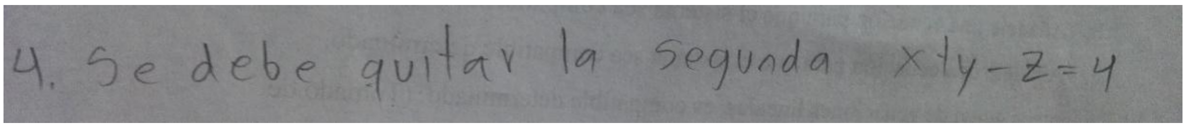
4. El siguiente sistema de ecuaciones lineales, es compatible determinado. (Tomado de TAREA 3. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Retamosa, A, 2010 – 2011)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a. ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema de ecuaciones lineales tenga entre sus soluciones $(0, 0, 0)$?

Los participantes en común acuerdo en la discusión en el aula nos comentan lo siguiente:


4 a) Se quta la segunda $x+y-z=4$

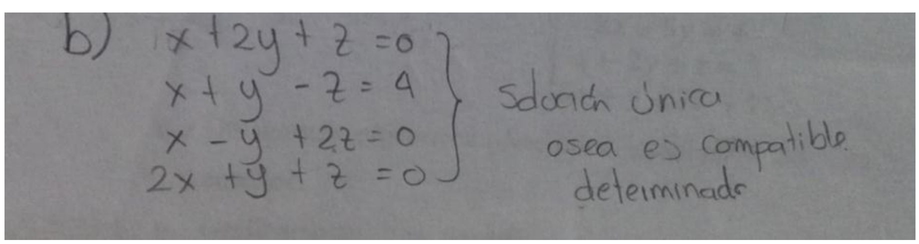

4. Se debe quitar la segunda $x+y-z=4$

No realizan un argumento como tal pero su discusión era debida a lo ya relacionado en el análisis a priori.

b. Si se añado una nueva ecuación al anterior sistema, el sistema resultante puede ser:

- ✓ ¿Compatible determinado?
- ✓ ¿Compatible indeterminado?
- ✓ ¿Incompatible?

De acuerdo a esta imagen se argumenta en el aula que es un Sistema Compatible Determinado, logrando así lo ya mencionado en el análisis a priori.

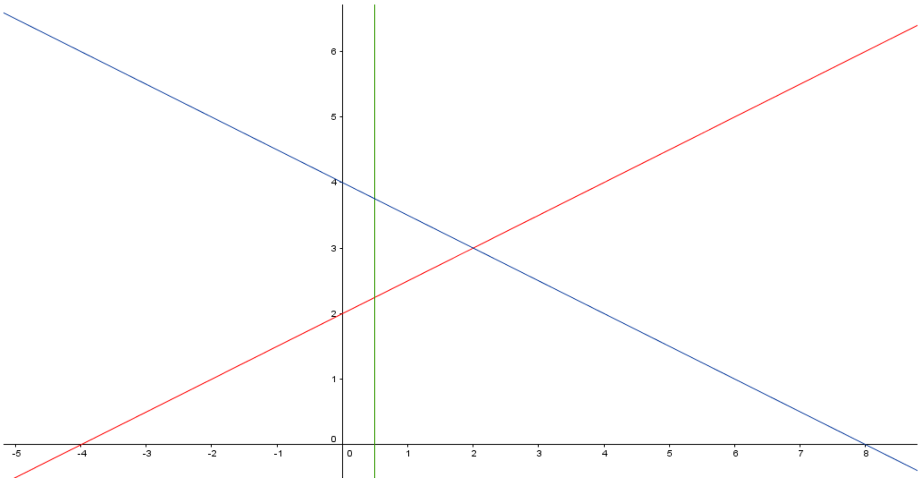

b) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\}$ Solución única osea es compatible determinado

Terminando con la segunda sesión los participantes lograron interactuar con el software y generar el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético y en una parte se toca el analítico estructural.

Cuando interactúan con el software en el entorno del Plano cartesiano generan la relación entre lo gráfico y lo aritmético, es decir, el uso del software les permite verificar que si las rectas de un sistema de ecuaciones se intersecan en un único punto, éste tendrá única solución. Si no se intersecan en algún punto, el sistema no tendrá solución y si podemos encontrar una recta que sea combinación lineal de las otras, esto es, que las $n-1$ filas son linealmente dependientes de otra.

Actividad 3

1. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique su respuesta.



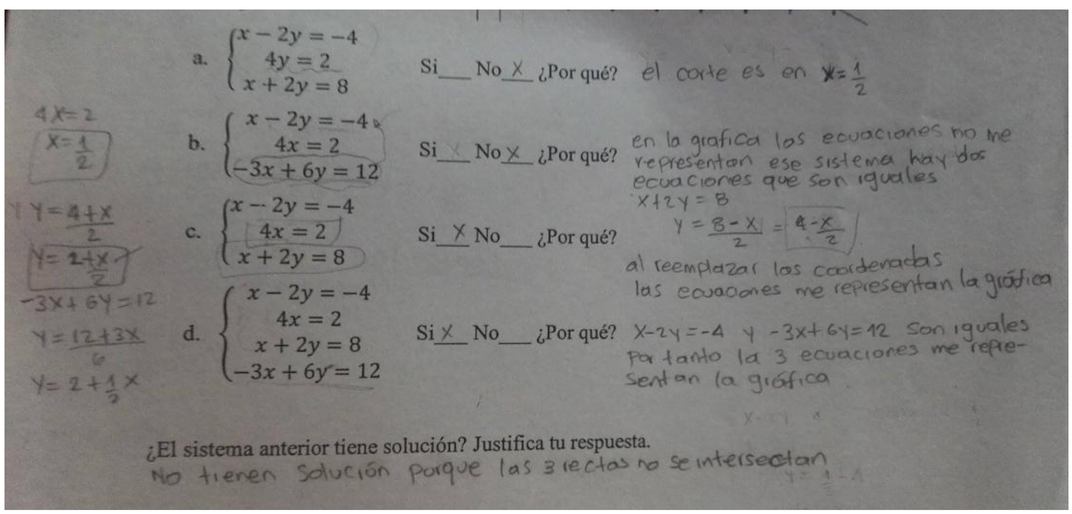
a. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

b. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

c. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

d. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

A continuación veamos la justificación de cada índice dada por la participante Leidy:



a. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No_X_ ¿Por qué? el corte es en $x = \frac{1}{2}$

b. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No_X_ ¿Por qué? en la grafica los ecuaciones no me representan ese sistema hay dos ecuaciones que son iguales

c. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si_X_ No___ ¿Por qué? $x+2y=8$ $y = \frac{8-x}{2} = \frac{4-x}{2}$ al reemplazar los coordenadas las ecuaciones me representan la gráfica

d. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si_X_ No___ ¿Por qué? $x-2y=-4$ y $-3x+6y=12$ son iguales por tanto la 3 ecuaciones me representan la gráfica

$4x=2$
$x=\frac{1}{2}$
$y=\frac{4+x}{2}$
$y=\frac{2+x}{2}$
$-3x+6y=12$
$y=\frac{12+3x}{6}$
$y=2+\frac{1}{2}x$

¿El sistema anterior tiene solución? Justifica tu respuesta.
No tienen solución porque las 3 rectas no se intersectan

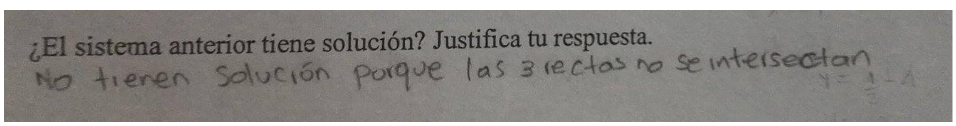
Claramente podemos ver que la participante establece correctamente el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural.

Cuando menciona “No tienen solución porque las 3 rectas no se intersectan” se está refiriendo a un modo de pensamiento sintético geométrico, recordando que las tres rectas no se cortan en un punto común.

El modo de pensamiento analítico aritmético se encuentra presente en cada una de las justificaciones que menciona en cada uno de los sistemas mencionados.

Por último, el modo de pensamiento analítico estructural viene dado mediante las definiciones, teoremas, etc. que garantizan que aquellos sistemas donde las ecuaciones no se intersectan son los que no tienen solución.

2. ¿El sistema anterior tiene solución? Justifica tu respuesta.


¿El sistema anterior tiene solución? Justifica tu respuesta.
No tienen solución porque las 3 rectas no se intersectan

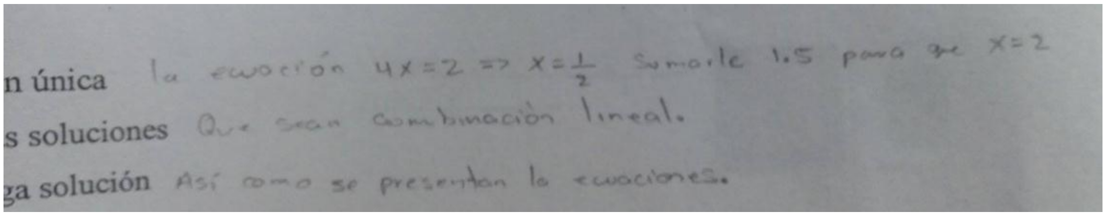
3. De qué manera podemos modificar la figura del punto anterior para que el sistema tenga:

a. Solución única

b. Infinitas soluciones

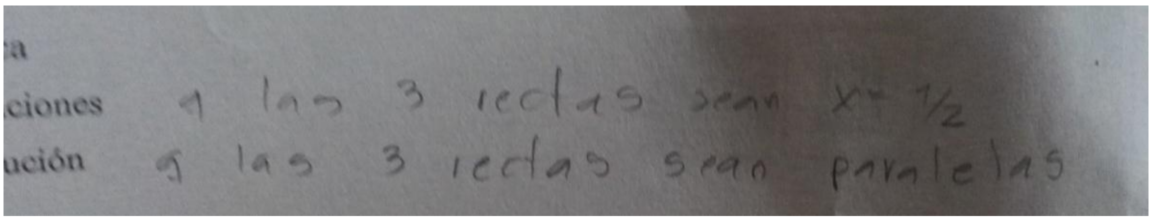
c. No tenga solución

El participante Edwin nos presenta a continuación su argumento:



n única La ecuación $4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ Sumarle 1.5 para que $x=2$
s soluciones Que sean combinación lineal.
ga solución Así como se presentan la ecuaciones.

La participante Karla nos comenta:



a
ciones q las 3 rectas sean $x=1/2$
ución q las 3 rectas sean paralelas

Que las rectas sean $x=\frac{1}{2}$ se refiere a que las tres rectas sean combinación lineal entre ellas, es decir que dos sean linealmente dependientes de una tercera.

Que las rectas sean paralelas, significará que nunca se van a tocar y por tanto no tendrá solución.

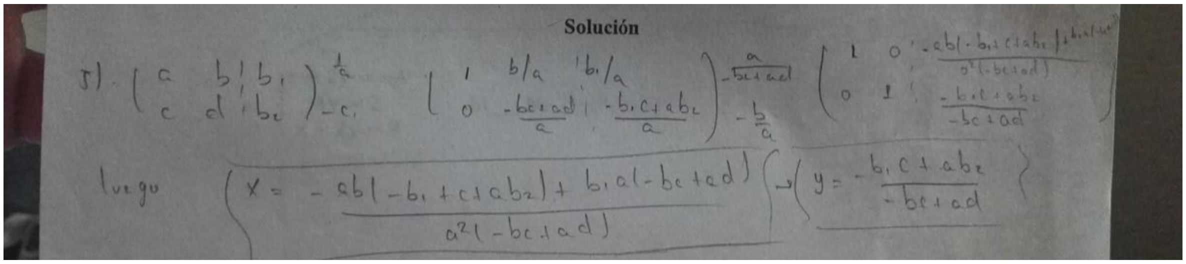
4. Represente gráficamente cada uno de los casos anteriores en AlNuSet.

5. Planteamos un sistema de ecuaciones lineales $2x2$, dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax+by=b_1 \\ cx+dy=b_2 \end{cases}$$

Encuentre la solución del sistema anterior.

El participante Brandon realiza operaciones elementales tomando en cuenta el método de Gauss para encontrar su solución:


Solución

$5).\ \left(\begin{array}{cc|c} a & b & b_1 \\ c & d & b_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{a} \\ -c_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & b_1/a \\ 0 & \frac{-bc+ad}{a} & \frac{-b_1c+ab_2}{a} \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{a}{-bc+ad} \\ -\frac{b}{a} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-ab(-b_1c+ab_2)+b_1a(-bc+ad)}{a^2(-bc+ad)} \\ 0 & 1 & \frac{-b_1c+ab_2}{-bc+ad} \end{array}\right)$

luego $\left\{ x = \frac{-ab(-b_1+c+ab_2)+b_1a(-bc+ad)}{a^2(-bc+ad)} \right\} \rightarrow \left\{ y = -\frac{b_1c+ab_2}{-bc+ad} \right\}$

De esta manera, permite encontrar que el sistema anterior tiene única solución.

6. Encuentre el valor de μ para que el sistema:

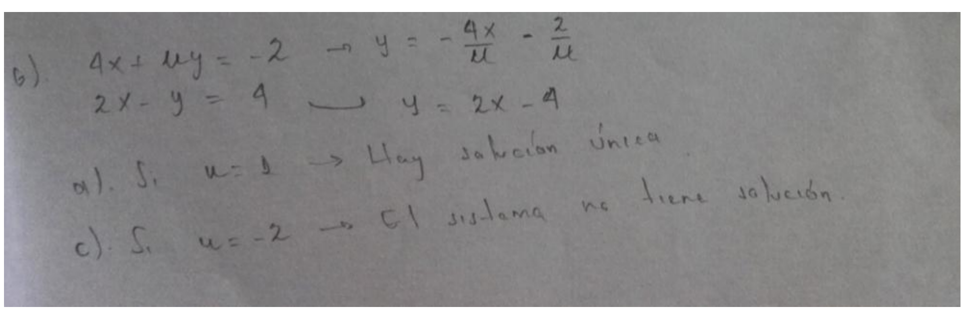
$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ \ \ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a. Tenga solución única

b. Tenga infinitas soluciones

c. No tenga soluciones

El mismo participante del índice anterior nos da dos ejemplos sin argumentos, solo basándose en posibles casos. Uno en el cual el sistema tiene solución única y otro en el que el sistema no tiene solución.

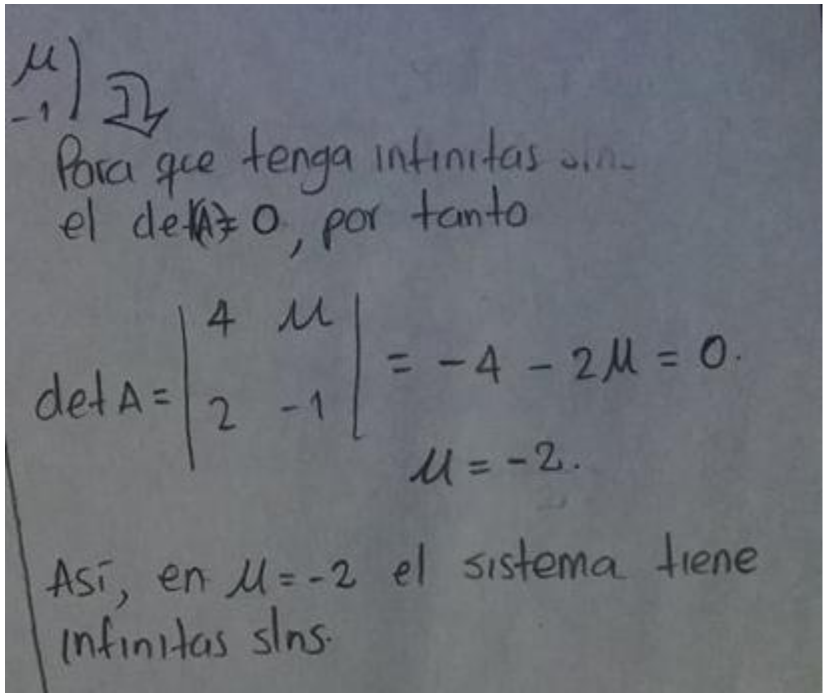

6). $4x + \mu y = -2 \rightarrow y = -\frac{4x}{\mu} - \frac{2}{\mu}$

$2x - y = 4 \longrightarrow y = 2x - 4$

a). Si $\mu = 1 \rightarrow$ Hay solución única

c). Si $\mu = -2 \rightarrow$ El sistema no tiene solución.

Sin embargo, la participante Kelly nos acompaña el ejercicio mediante el determinante de la matriz asociada de coeficientes al sistema anterior encontrando que para $\mu = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones.



$\mu)$

$-1)$ $\Rightarrow$

Para que tenga infinitas sln.
el $\det(A) = 0$, por tanto

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & \mu \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2\mu = 0.$$

$$\mu = -2.$$

Así, en $\mu = -2$ el sistema tiene infinitas slns.

Finalizando esta última actividad que fue diseñada especialmente para que los participantes generen el tránsito entre los tres modos de pensamiento e interactuaran más a fondo con el software AlNuSet el cual en algunos casos nos permitió obtener la solución de manera más precisa desde el ámbito estructural, geométrico y algebraico.

CONCLUSIONES

A continuación se darán a conocer los resultados más relevantes de esta investigación.

1. Los participantes interactuaron con un software de álgebra dinámica con el cual nunca habían trabajado y que les permite desarrollar más a fondo temas como solución de ecuaciones lineales, solución de inecuaciones lineales, operaciones entre números enteros y números reales, etc.

2. Así como en trabajos anteriores con estudiantes de Instituciones Educativas e Instituciones de Educación Superior, el desarrollo de las actividades les permitió a los profesores en formación establecer el tránsito entre los tres modos de pensamiento. Al terminar este trabajo encontramos que la aplicación a docentes de matemáticas en formación también permite el tránsito entre la forma de pensar sobre los objetos matemáticos.

3. El desarrollo de este trabajo también permitió que los participantes recordaran conceptos algebraicos tales como determinante de una matriz, adjunta de una matriz $2x2$, combinación lineal, dependencia e independencia lineal.

4. El diseño de las actividades presentadas permitió el desarrollo algebraico, geométrico y estructural en cada uno de los entornos que tiene AlNuSet.

5. Los participantes pudieron analizar que un sistema de ecuaciones lineales nxn también se puede resolver mediante AlNuSet, solo que previamente se deberá establecer cada una de sus ecuaciones en $\mathbb{R}^2$.

6. La actividad permitió que los participantes se dieran cuenta que mediante procesos geométricos y usando el software AlNuSet se puede llegar a pensar de manera analítica, y decidir si un sistema de ecuaciones tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

7. Con el desarrollo de procesos algebraico como por ejemplo, el cálculo de la inversa de una matriz, el determinante de la matriz asociada al sistema y la aplicación de teoremas relevantes, nos permite definir cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, soluciones infinitas o no tiene solución y así transitar desde un modo aritmético hacia un modo estructural cuando se aplican correctamente estos procesos algebraicos.

8. Tomando en cuenta lo mencionado en el Teorema de Rouché – Frobenius el cual permite determinar de manera teórica la solución de un sistema de ecuaciones lineales, nos lleva a partir desde un modo de pensar analítico estructural y llegar a un modo geométrico cuando se realiza el gráfico correspondiente al sistema de ecuaciones lineales donde logramos determinar si este sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene.

9. El concepto de combinación lineal utilizado en las actividades propias de esta investigación permite transitar desde un modo de pensar analítico estructural y llegar a un modo analítico aritmético en el cual se desarrolla la matriz asociada al sistema por el método de Gauss y permite deducir acerca de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

10. Tomando como referencia los gráficos que visualizan un sistema de ecuaciones nos valemos del hecho sobre si las rectas representadas se cortan en un solo punto, infinitos puntos o no se cortan. Esto servirá para determinar mediante las

propiedades de un sistema de ecuaciones lineales si tiene solución única, infinitas o no tiene solución.

11. Construir el gráfico representativo de un sistema de ecuaciones lineales dado nos permite determinar si cuando modificamos alguna de las filas del sistema, éste tendrá solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. Este proceso permitirá transitar desde un modo de pensar analítico a un modo de pensar geométrico.

12. Finalmente, el progreso entre las actividades realizadas nos deja concluir que sí existe un tránsito entre cada uno de los modos de pensar tanto de manera implícita como explícita cuando estamos encontrando la solución a un sistema de ecuaciones lineales.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. Universidad Industrial de Santander, Colombia

Ardila, Á. (2010). Evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento geométrico, aritmético, aritmético y estructural en estudiantes de secundaria y primer año de universidad: el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Aymerich, J. & Macario, S. (Ed.). (2006). Matemáticas para el siglo XXI. Castelló de la Plana, España: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Cifuentes, W. (2011). Propuesta de enseñanza para el aula. Ecuaciones y modelos. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Colombia

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

González, D. (2011). Los sistemas de ecuaciones lineales: evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Maturana, I. & Parraguez, M. (2011). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitario. XXIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 1(1), 1-4.

Muñoz, R, & Rueda, M. (2011). AlNuSet como medio: situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Oaxaca, J, Trejo, J & Sánchez, M. (s.f.). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Universidad Autónoma de México, México.

Ochoviet, C. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Instituto Politécnico Nacional, Uruguay.

Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. CINVESTAV, México

Ramirez, M. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 413 – 418.

Sierpniska, A. (2000). On some aspect of students thinking in linear algebra. In J-l. Dorier (ed.), On the teaching of linear algebra, 209 – 246. Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

Nombre: ____

Fecha: _______________ Código: _________________

ACTIVIDAD EJEMPLO.

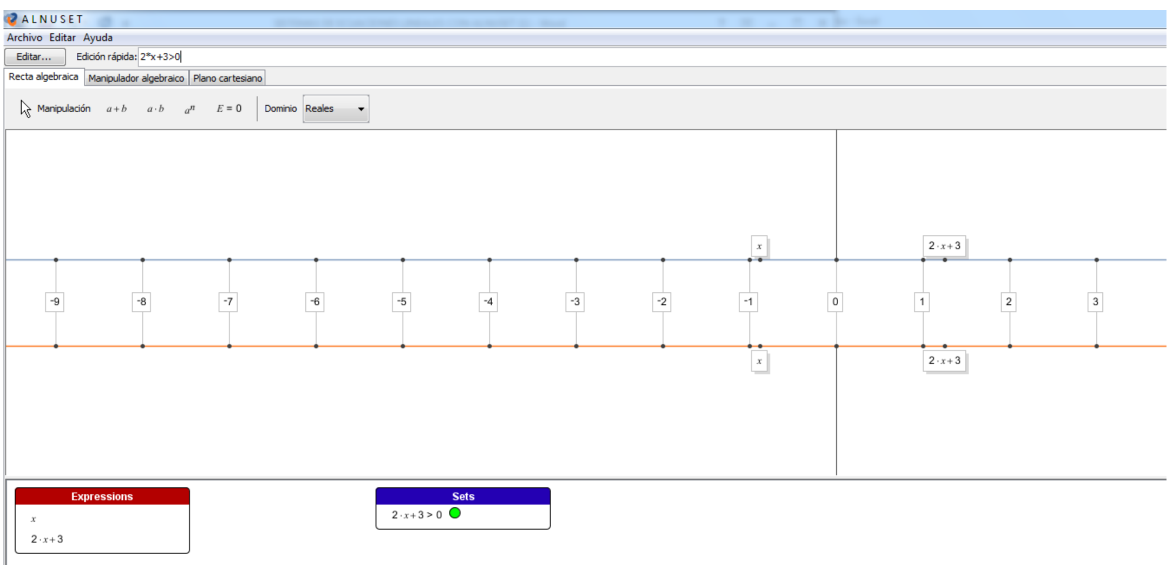
1. Recta algebraica

   1.1. Iniciaremos resaltando la siguiente función lineal: $f(x) = 2x + 3$

   1.2. Abrimos el software AlNuSet y seleccionamos como dominio los reales

   1.3. Posteriormente se va a digitar en el recuadro de Edición rápida la variable independiente x y la ecuación $2 * x + 3$

   1.4. Al finalizar lo anterior, vamos a digitar $2 * x + 3 > 0$



2. Al culminar el paso anterior en la recta algebraica, se procederá a trabajar con el manipulador algebraico, de tal manera que el participante podrá realizar de manera didáctica los procesos algebraicos pertinentes para encontrar la solución del problema.

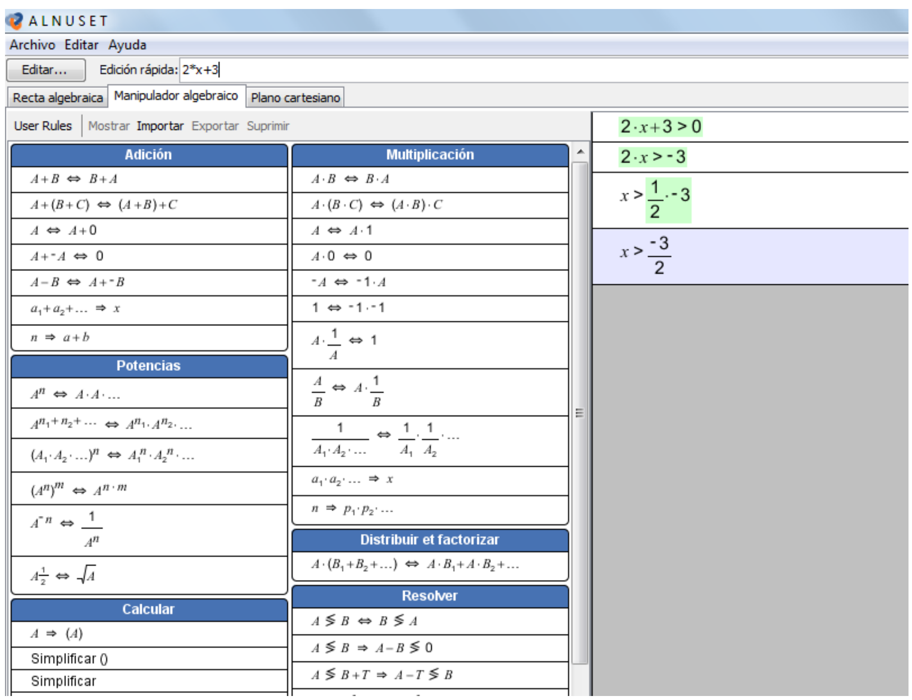
2.1. Escribimos *2*x+3>0* en la barra de herramientas “Edición rápida” y damos Enter.

2.2. Seleccionamos toda la ecuación generada anteriormente $(2 \cdot x + 3 > 0)$.

2.3 En las reglas que aparecen a mano izquierda, marcamos la que dice: $A + T \lesseqgtr B \rightarrow A \lesseqgtr B - T$, obteniendo así: $2 \cdot x > -3$

2.4. Seleccionamos ahora la expresión anterior y escogemos la herramienta: $T \cdot A \lesseqgtr B \rightarrow A \lesseqgtr BT$. Obteniendo: $x > \frac{1}{2} \cdot -3$

2.5. Luego de realizado lo anterior, seleccionamos esta expresión resultante y seguidamente la herramienta Simplificar, obteniendo así la respuesta: $x > -3/2$

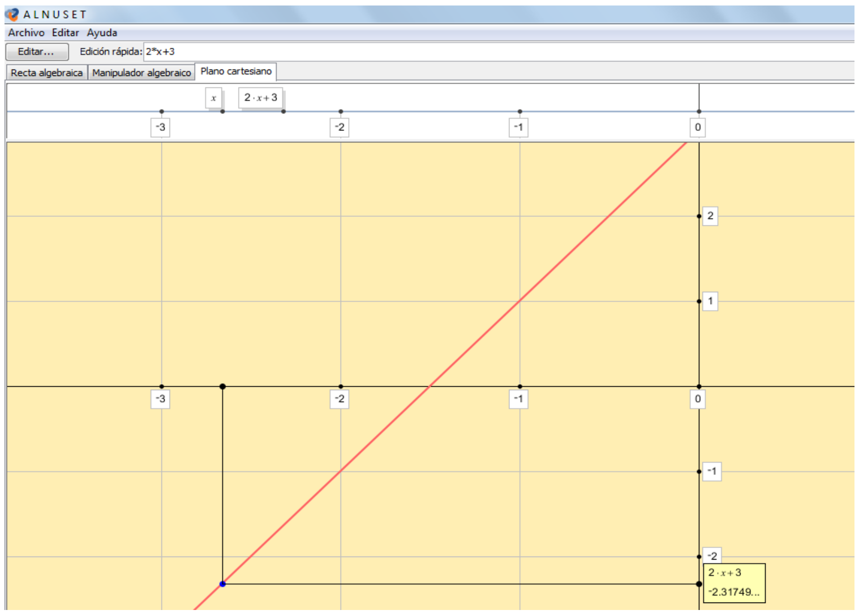


3. Terminando el paso anterior en el manipulador algebraico, se procederá a trabajar con el plano cartesiano, de tal manera que el participante podrá realizar de manera didáctica los la representación gráfica de la situación planteada.

3.1. Ir al entorno de Plano cartesiano proporcionado por AlNuSet.

3.2. Observar la parte superior donde aparecerán ecuación representada: $2 * x + 3$.

3.3. Clic derecho sobre la variable anteriormente mencionada, a continuación seleccionar Mostrar/ocultar valor y luego seleccionamos x.

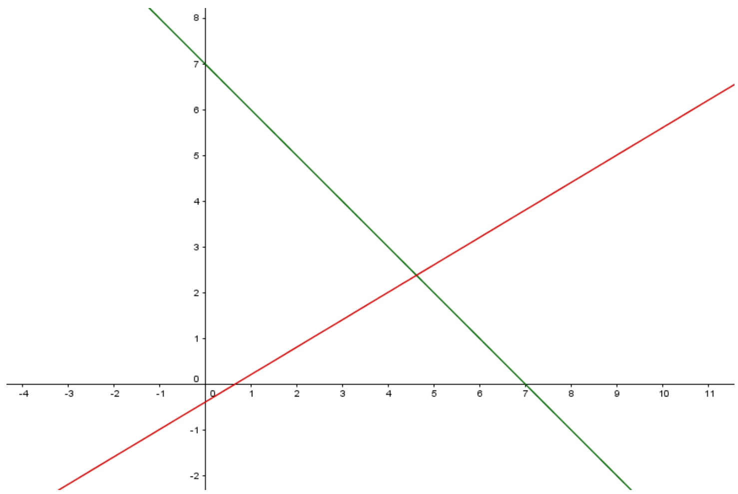


Nombre: ____

Fecha: ______________ Código: ________________

ACTIVIDAD 1.

1. Considere la siguiente imagen, realice lo indicado a continuación y responda las siguientes preguntas:



a. Represente el sistema de ecuaciones lineales formado por el par de rectas anterior.

b. Decimos que una solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b \\ a_{21}x + a_{22}y = c \end{cases}$ si para $(b, c) = (a_{11}, a_{21})x + (a_{12}, a_{22})$y. Dado esto, ¿el sistema de ecuaciones lineales representado en el punto a tiene solución? De tenerla, ¿cuál es ésta?

c. Teniendo en cuenta que si $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$ entonces, ¿respecto al sistema de ecuaciones lineales representado en el gráfico anterior podemos concluir que tiene solución?

d. ¿El sistema $Ax = b$ tiene solución única si A es invertible? De ser así, entonces ¿La matriz A asociada al sistema de ecuaciones lineales anterior es invertible?

e. Plantee un sistema de ecuaciones teniendo en cuenta el ya representado en el punto a, para que este último:

- Tenga infinitas soluciones.
- No tenga solución.

f. Determine matricialmente si el nuevo sistema de ecuaciones lineales satisface con las dos condiciones anteriores.

g. Teniendo en cuenta lo visto en el punto c, ¿podríamos determinar si lo realizado en el punto e, satisface ambas condiciones?

Solución

Nombre: ____

Fecha: ______________ Código: ________________

ACTIVIDAD 2.

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$$

Utilizando AlNuSet determine si tiene solución única, solución infinita o en caso contrario, no tiene solución.

2. Teorema de Rouché – Frobenius: Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y AM la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Entonces tenemos que:

- Si $r(A) = r(AM) = n \rightarrow$ S.C.D. (sistema compatible determinado: una única solución)
- Si $r(A) = r(AM) < n \rightarrow$ S.C.I. (sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones)
- Si $r(A) < r(AM) \rightarrow$ S.I. (sistema incompatible: no tiene solución)

n: *número de incógnitas*. Según lo descrito anteriormente, determine la solución del sistema anterior en caso de tener.

a. Teniendo en cuenta el teorema anterior, determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales en caso de tener.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

b. De manera algebraica, determine la solución del sistema de ecuaciones lineales anterior.

c. Gráficamente, ¿es posible generar dicha solución? ¿Cómo podríamos lograrla? Represente la solución del anterior sistema de ecuaciones lineales.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales (Tomado de TAREA 2. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Retamosa, A, 2010 – 2011)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

a. Añádele una ecuación para que el sistema sea incompatible.
b. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado
c. Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

4. El siguiente sistema de ecuaciones lineales, es compatible determinado.

(Tomado de TAREA 3. *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Retamosa, A, 2010 – 2011)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

d. ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema de ecuaciones lineales tenga entre sus soluciones $(0, 0, 0)$?
e. Si se añado una nueva ecuación al anterior sistema, el sistema resultante puede ser:
   - ✓ ¿Compatible determinado?
   - ✓ ¿Compatible indeterminado?
   - ✓ ¿Incompatible?

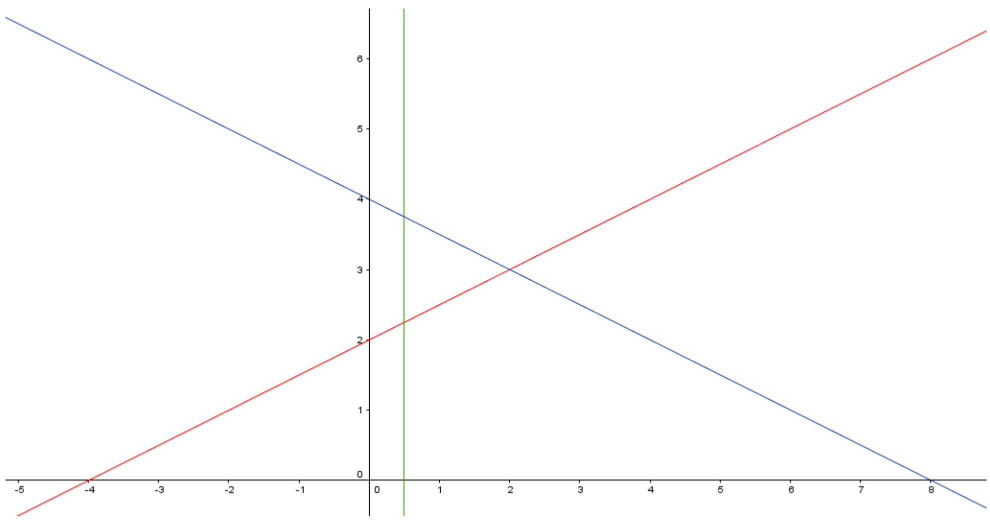
Justifica tu respuesta en cada caso y coloca un ejemplo cuando sea posible.

Nombre: ____

Fecha: ______________ Código: ________________

ACTIVIDAD 3.

1. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique su respuesta.



a. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

b. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

c. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

d. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ Si___ No___ ¿Por qué?

2. ¿El sistema anterior tiene solución? Justifica tu respuesta.

3. De qué manera podemos modificar la figura del punto anterior para que el sistema tenga:

a. Solución única

b. Infinitas soluciones

c. No tenga solución

4. Represente gráficamente cada uno de los casos anteriores en AlNuSet.

5. Planteamos un sistema de ecuaciones lineales $2x2$, dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}$$

Encuentre la solución del sistema anterior.

6. Encuentre el valor de μ para que el sistema:

$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a. Tenga solución única
b. Tenga infinitas soluciones
c. No tenga soluciones

Solución