

EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS

JOHAN CAMILO CANCINO REY

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2019

EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS

JOHAN CAMILO CANCINO REY

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director

Javier Enrique Camargo García
Doctorado en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2019

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mi papá, Andelfo Cancino, a mi mamá, Ana Mercedes Rey y a mis dos hermanos, Willy y Ándel, por el apoyo económico brindado, su ayuda, su compañía y toda su preocupación en lo relacionado con mis estudios.

Al profesor Javier Enrique Camargo García, por todo su tiempo, esfuerzo y explicaciones que me dio para realizar este trabajo y por todas las cosas que me ha enseñado.

A todos mis amigos y compañeros de la carrera, por los aprendizajes y colaboraciones compartidas. Agradezco especialmente a Sergio y Mateo, con quienes he estado en la mayor parte del proceso de la carrera, por su ayuda, consejos y experiencias buenas que hemos tenido.

Por último, agradezco a quienes me hayan colaborado en algún aspecto antes y durante el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	10
1. PRELIMINARES	14
1.1. CONCEPTOS GENERALES	14
1.2. PROPIEDADES DE LAS DENDRITAS	20
2. LA FUNCIÓN OMEGA LÍMITE	31
2.1. PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS OMEGA LÍMITE	31
2.2. CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN OMEGA LÍMITE EN DENDRITAS	38
3. EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS	56
3.1. ALGUNAS PROPIEDADES EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS	56
3.2. EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS	61
BIBLIOGRAFÍA	75

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Dendrita F_ω	15
Figura 2. Función Tienda	30
Figura 3. Cono de $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \cup \{\infty, \infty\}$	45
Figura 4. Abanico armónico	55
Figura 5. Dendritas Y y X en el Ejemplo 3.2.17	70
Figura 6. Abanico de Cantor	73
Figura 7. Dendrita de Gehmann	74

RESUMEN

TÍTULO: EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS *

AUTOR: JOHAN CAMILO CANCINO REY **

PALABRAS CLAVE: CONJUNTOS OMEGA LÍMITE, DENDRITA, EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS, FUNCIÓN OMEGA LÍMITE, SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Una dendrita es un continuo de Peano (localmente conexo) que no contiene curvas cerradas simples. Dada una dendrita X y $x \in X$, se definen los conjuntos omega límite $\omega(x, f) = \{y \in X : y \text{ es punto límite de la sucesión } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}$ y $\Omega(x, f) = \{y \in X : \text{existen sucesiones } (x_i) \subseteq X \text{ y } (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ con } x_i \rightarrow x \text{ y } f^{n_i}(x_i) \rightarrow y\}$. Asimismo, diremos que una función $f: X \rightarrow X$ es equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo daremos algunas condiciones necesarias para la continuidad de la función $\omega_f: X \rightarrow 2^X$, definida por $\omega_f(x) = \omega(x, f)$, en el contexto de las dendritas. También, se mostrarán algunas propiedades con respecto a la equicontinuidad en dendritas.

En el Capítulo 1, se darán algunos conceptos relacionados con sistemas dinámicos discretos y las propiedades más relevantes sobre las dendritas que se usarán posteriormente. En el Capítulo 2 veremos que, en una dendrita, la continuidad de ω_f implica que el conjunto de puntos periódicos, $\text{Per}(f)$, sea conexo, que el conjunto de puntos recurrentes, $\text{R}(f)$, sea un continuo y que además, $\text{R}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$; siendo estos los principales resultados de este capítulo. Finalmente, en el Capítulo 3, se enuncian algunos teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para que una función f definida en una dendrita sea equicontinua.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctorado en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: EQUICONTINUITY ON DENDRITES *

AUTHOR: JOHAN CAMILO CANCINO REY **

KEYWORDS: OMEGA LIMIT SETS, DENDRITE, EQUICONTINUITY ON DENDRITES, OMEGA LIMIT FUNCTION, DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS.

DESCRIPTION:

A continuum is a nonempty, compact, connected metric space. A dendrite is a Peano continuum (locally connected) which contains no simple closed curves. Given a dendrite X and $x \in X$, are defined the omega limit sets $\omega(x, f) = \{y \in X : y \text{ is a limit point of the sequence } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}$ and $\Omega(x, f) = \{y \in X : \text{there exist sequences } (x_i) \subseteq X \text{ and } (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ with } x_i \rightarrow x \text{ and } f^{n_i}(x_i) \rightarrow y\}$. Likewise, we say that a function $f: X \rightarrow X$ is equicontinuous provided that for each $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, for each $n \in \mathbb{N}$, whenever $d(x, y) < \delta$. In this work, we shall present some necessary conditions for the continuity of ω_f , given by $\omega_f(x) = \omega(x, f)$, in the context of dendrites. Also, we show some properties with respect to equicontinuity on dendrites.

In Chapter 1, some concepts related to discrete dynamical systems and the most relevant properties about dendrites that are used later will be given. In Chapter 2 we shall see that, in a dendrite, continuity of ω_f implies that the set of periodic points, $\text{Per}(f)$, is connected, that the set of recurrent points, $\text{R}(f)$, is a continuum and additionally, $\text{R}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$; these being the main results of this chapter. Finally, in Chapter 3, some theorems that give us necessary and sufficient conditions for the equicontinuity of a function f defined in a dendrite are given.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctorado en Ciencias Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico es una pareja (X, f) , donde X es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una función continua que determina el comportamiento de cada punto de X con el paso del tiempo; es decir, para cada $x_0 \in X$, decimos que para $t = 1$ (puede ser una hora) el punto x_0 se encuentra en la posición $f(x_0)$, para $t = 2$ (dos horas) en una posición $f^2(x_0)$, etc. De esta forma podemos decir que “entendemos” o “resolvimos” el sistema dinámico (X, f) , si podemos decir con “precisión” el comportamiento de cada punto de X con el paso del tiempo.

La teoría de los sistemas dinámicos se deriva del trabajo realizado por H.J. Poincaré en el cual estudiaba órbitas periódicas para problemas de tres cuerpos en mecánica celeste. También, los nombres de Birkhoff, Andronov, Arnold, Kolmogorov o Smale aparecen entre aquellos que hicieron contribuciones relacionadas con los sistemas dinámicos en problemas de ecuaciones diferenciales. Lorentz, analizando un modelo que describe el comportamiento de la atmósfera, observó que realizando cambios pequeños en las condiciones iniciales obtenía resultados muy diferentes, dando con esto origen a lo que hoy se conoce como atractor de Lorentz.

Particularmente, dada una función $f: X \rightarrow X$ donde X es un espacio métrico compacto, es interesante estudiar el conjunto $\mathcal{F} = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ como subespacio del espacio producto X^X . En general \mathcal{F} no es cerrado y las funciones en $\text{cl}_{X^X}(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}$ no son continuas. Una condición suficiente para obtener continuidad en este conjunto es que la familia \mathcal{F} sea equicontinua. Por esta razón, es de interés el estudio de la

equicontinuidad de la familia \mathcal{F} , en ciertos contextos particulares. Por ejemplo en ¹, se prueba el siguiente resultado:

Teorema. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Son equivalentes:

1. f es equicontinua;
2. $\text{Fix}(f^2)$ es conexo;
3. $\text{Fix}(f^2) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n([0, 1])$,

donde $\text{Fix}(f^2) = \{x \in [0, 1] : f^2(x) = x\}$.

En ^{1 2 3 4 5} se han hecho investigaciones relacionadas con este teorema, en casos más generales al intervalo cerrado $[0, 1]$, como gráficas y dendritas. Aunque existen más trabajos relacionados con este tema, solamente nos enfocaremos en revisar los resultados en estos artículos.

En este trabajo estudiaremos la teoría relacionada con la equicontinuidad en dendritas, mostraremos ejemplos y plantearemos preguntas.

En el Capítulo 1, se inicia dando las definiciones básicas que se usarán en los capítulos subsiguientes, en cuanto a sistemas dinámicos discretos y dendritas. Se

¹ A. BRUCKNER y J. CEDER. "Chaos in terms of the map $x \rightarrow \omega(x, f)$ ". En: *Pacific Journal of Mathematics* 156 (1992), págs. 63-96.

² J. CAMARGO, M. RINCÓN y C. UZCÁTEGUI. "Equicontinuity of maps on dendrites". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 126 (2019), págs. 1-6.

³ T. SUN, Z. CHEN y H. XI. "Equicontinuity of dendrite maps". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 69 (2014), págs. 10-13.

⁴ T. X. SUN, G. W. SU y H. J. XI. "Equicontinuity of Maps on a Dendrite with Finite Branch Points". En: *Acta Mathematica Sinica* 33.8 (2017), págs. 1125-1130.

⁵ T. SUN, Y. ZHAN y X. ZHAN. "Equicontinuity of graph maps". En: *Bull. Austral. Mathl Soc.* 71 (2005), págs. 61-67.

enuncian algunos resultados conocidos en la teoría de continuos, como el Teorema de golpes en la frontera y finalmente se dan algunas propiedades y caracterizaciones sobre las dendritas, tales como que en ellas todo punto es final o de corte, sus subconjuntos conexos son arcoconexos y que en toda función continua sobre una dendrita, existe al menos un punto fijo.

En el Capítulo 2, se estudiarán algunas propiedades concernientes a los conjuntos omega límite $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$, cuando X es un espacio métrico compacto. Asimismo, se mostrarán condiciones necesarias para la continuidad de la función ω_f en el contexto de las dendritas, tales como la conexidad del conjunto de puntos periódicos, la minimalidad de los conjuntos $\omega(x, f)$, la compacidad y conexidad del conjunto $R(f)$ y la densidad del conjunto $\text{Per}(f)$ en $R(f)$.

En el Capítulo 3, se comenzará dando algunas propiedades que tienen que ver con la continuidad de ω_f , la igualdad de los conjunto omega límite y la equicontinuidad de f para espacios métricos compactos. Se probará que si en un espacio todo punto es periódico, entonces son equivalentes la continuidad de ω_f y la igualdad de los conjuntos omega límite. Luego, se presentan resultados con respecto a la equicontinuidad en dendritas. Se incluye la prueba del siguiente teorema que caracteriza la equicontinuidad en dendritas:

Teorema. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. ω_f es continua y $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$;
2. $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$;
3. f es equicontinua.

Cabe resaltar que todo lo que se presenta en el Capítulo 3 es una recolección de las propiedades, ejemplos y demás, realizados en ². El Teorema 3.2.13 es un resultado original de este trabajo y responde afirmativamente la Pregunta 4.4 planteada en ².

1. PRELIMINARES

En este capítulo, se darán las definiciones que nos servirán como base para los propósitos de este trabajo. Entre las definiciones, las más relevantes serán las relacionadas con dendritas, conjuntos omega límite y función equicontinua. Asimismo, se presentarán algunos teoremas generales relacionados con continuos y finalmente algunas propiedades importantes en cuanto a las dendritas.

Dados un espacio topológico X y $A \subseteq X$, los conjuntos \bar{A} , ∂A y $|A|$ representarán la adherencia, frontera y cardinal del conjunto A , respectivamente.

La gran mayoría de las propiedades que se presentan en este capítulo fueron tomadas de ⁶.

1.1. CONCEPTOS GENERALES

A lo largo de esta sección se enuncian algunas definiciones y teoremas generales sobre espacios métricos compactos y sistemas dinámicos discretos.

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un arco es un continuo homeomorfo a $[0, 1]$ y una curva cerrada simple es cualquier espacio topológico homeomorfo a $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es localmente conexo si para cada $p \in X$ y cada abierto U con $p \in U$, existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subseteq U$. Un continuo X es llamado continuo de Peano si X es localmente conexo.

Las dendritas son un caso particular de los continuos de Peano, en las cuales nos centraremos. A continuación se da su definición y algunos ejemplos de estas.

⁶ S. B. Jr. NADLER. *Continuum Theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

Definición 1.1.2. Una dendrita es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples.

Un arco o un árbol (una unión finita de arcos que no contienen una curva cerrada simple), son ejemplos de dendritas.

Ejemplo 1.1.3. Sea $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y consideremos $Z = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $p, q \in \mathbb{R}^2$, denotamos

$$[p, q] = \{tp + (1 - t)q : t \in [0, 1]\}.$$

Definimos el continuo

$$F_\omega = \{[v, p_n] : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $v = (0, 0)$. No es difícil ver que F_ω es una dendrita (Figura 1).

Figura 1. Dendrita F_ω



Ahora, mencionaremos algunas propiedades.

Un sistema dinámico discreto es un par (X, f) , donde X es un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ es una función continua.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio métrico compacto, $x \in X$ y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Definimos la órbita de x bajo f como el conjunto $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Dado un sistema dinámico (X, f) y $x_0 \in X$, diremos que x_0 es un punto periódico si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) = x_0$. Si n_0 es el mínimo natural tal que $f^{n_0}(x_0) = x_0$, diremos que n_0 es el periodo de x_0 . Si $n_0 = 1$, x_0 será un punto fijo de f . $\text{Per}(f)$ y $\text{Fix}(f)$ denotan las familias de puntos periódicos y puntos fijos de f , respectivamente. Es claro que $\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f)$.

Ejemplo 1.1.5. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \frac{3}{2} - x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces, $([0, 1], f)$ es un sistema dinámico. Nótese que $\text{Fix}(f) = \{0, \frac{3}{4}\}$. Además $\text{Per}(f) = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Dada una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq Y^X$, donde X y Y son espacios métricos compactos, se dice que \mathcal{F} es equicontinua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } d_X(x, y) < \delta, \text{ entonces } d_Y(g(x), g(y)) < \epsilon, \text{ para cada } g \in \mathcal{F}.$$

Si $f: X \rightarrow X$ es continua, decimos que f es equicontinua si la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua. Así, tomaremos la siguiente definición:

Definición 1.1.6. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que f es equicontinua si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se da a continuación la definición de los conjuntos omega límite, los cuales tendrán un papel muy importante a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.7. Dado $x \in X$, definimos los siguientes conjuntos:

1. $\omega(x, f) = \{y \in X : \text{existe una sucesión creciente } (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y\}$;
2. $\Omega(x, f) = \{y \in X : \text{existen una sucesión creciente } (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ y una sucesión } (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X \text{ tales que } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \text{ y } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = y\}$.

A los conjuntos $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ les llamaremos conjuntos omega límite y omega límite débil, respectivamente. Se dirá que un punto x es recurrente, si $x \in \omega(x, f)$. El conjunto de puntos recurrentes de la función f lo denotaremos por $R(f)$.

De la Definición 1.1.7, vemos que para cada $x \in X$ se cumple que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$. Sin embargo, esta contención puede ser estricta como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.8. Sean $X = [0, 1]$ y $f : X \rightarrow X$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f es una función continua y es fácil ver que

$$\omega(x, f) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si } x = 1; \\ \{0\}, & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

Ahora, veamos que $0 \in \Omega(1, f)$. Formando una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente en $(0, 1)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, tomemos $k_1 = 1$, para x_1 , elegimos $k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_2 > k_1$ de modo que $f^{k_2}(x_2) < f^{k_1}(x_1)$; para x_2 tomamos $k_3 \in \mathbb{N}$ con $k_3 > k_2 > k_1$ y $f^{k_3}(x_3) < f^{k_2}(x_2) < f^{k_1}(x_1)$. Continuando de este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n > k_{n-1} > \dots > k_2 > k_1$ y $f^{k_n}(x_n) < f^{k_{n-1}}(x_{n-1}) < \dots < f^{k_2}(x_2) < f^{k_1}(x_1)$. Así, por como se construyeron los k_n , se tiene que la sucesión $(f^{k_n}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(x_n) = 0$. Por tanto, $0 \in \Omega(1, f)$ y $\{1\} = \omega(1, f) \subsetneq \Omega(1, f)$.

La definición de conjunto invariante en 1.1.9 será empleada en el Capítulo 2, donde veremos más propiedades interesantes de los conjuntos omega límite.

Definición 1.1.9. Sean X un espacio métrico, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $A \subseteq X$. A es llamado f -invariante si $f(A) \subseteq A$. Si $f(A) = A$, diremos que A es fuertemente f -invariante.

La prueba de la siguiente proposición no es difícil; sin embargo, una prueba se puede encontrar en ⁷ Proposiciones 12.6 y 12.7.

Proposición 1.1.10. *Sea X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces para cada $x \in X$, los conjuntos omega límite $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ son subconjuntos compactos no vacíos y estrictamente f -invariantes.*

Dado un espacio métrico compacto X , definimos

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Además, si $A, B \in 2^X$ entonces

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq N_d(B; r) \text{ y } B \subseteq N_d(A; r)\}$$

es una métrica en 2^X , donde $N_d(D; s) = \bigcup\{B_d(x; s) : x \in D\}$. \mathcal{H} se conoce como la métrica de Hausdorff. Asimismo, se define el subespacio $\mathcal{C}(X)$ de 2^X como:

$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un subconjunto conexo de } X\}.$$

Una prueba del siguiente teorema se puede ver en ⁶ Teoremas 4.2, 4.13 y 4.17.

Teorema 1.1.11. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces \mathcal{H} es una métrica sobre 2^X y 2^X y $\mathcal{C}(X)$ son compactos.*

⁷ J. KING y H. MÉNDEZ. *Sistemas Dinámicos Discretos*. Editorial UNAM, México, 2014.

Para $x \in X$ y $f : X \rightarrow X$, las funciones omega límite $\omega_f, \Omega_f : X \rightarrow 2^X$, vienen dadas por $\omega_f(x) = \omega(x, f)$ y $\Omega_f(x) = \Omega(x, f)$, respectivamente. De la Proposición 1.1.10, sabemos que estas funciones están bien definidas. En el siguiente lema se prueba un resultado útil en la demostración del Teorema de golpes en la frontera 1.1.13.

Teorema 1.1.12. (*Teorema del cable cortado.*) Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sean A y B subconjuntos cerrados de X . Si ningún subconjunto conexo (equivalentemente, ninguna componente) de X interseca tanto a A como a B , entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son subconjuntos disjuntos cerrados de X con $A \subseteq X_1$ y $B \subseteq X_2$.

Demostración. Veamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $C(A, \varepsilon) \cap B = \emptyset$, donde $C(A, \varepsilon)$ está definido como:

$$C(A, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe una } \varepsilon\text{-cadena de algún punto } a \in A \text{ a } x\}.$$

Supongamos por contradicción que no existe tal $\varepsilon > 0$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, existen $a_i \in A$, $b_i \in B$ y $\frac{1}{i}$ -cadenas C_i que unen a_i con b_i . Cada C_i es un conjunto compacto y como 2^X es compacto, existe una subsucesión $(C_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} C_{i_j} = C \in 2^X$. Por el Lema 4.16 en ⁶, concluimos que $C \in \mathcal{C}(X)$. Considerando las sucesiones $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y usando el hecho de que A y B son compactos, se sigue fácilmente que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$ con $C \in \mathcal{C}(X)$, lo cual es una contradicción. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $C(A, \varepsilon) \cap B = \emptyset$. Finalmente, no es difícil ver que $C(A, \varepsilon)$ es un conjunto abierto y cerrado. Así, tomando $X_1 = C(A, \varepsilon)$ y $X_2 = X \setminus C(A, \varepsilon)$, tenemos que X_1 y X_2 son cerrados disjuntos en X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subseteq X_1$ y $B \subseteq X_2$. □

Por último, incluimos en esta sección una demostración de un teorema muy conocido y usado en teoría de continuos, llamado Teorema de golpes en la frontera.

Teorema 1.1.13. (Teorema de golpes en la frontera.) Sean X un continuo y U un subconjunto propio abierto y no vacío de X . Si K es una componente de \bar{U} , entonces $K \cap \partial U \neq \emptyset$ (equivalentemente, como $K \subseteq \bar{U}$ y U es abierto. $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$).

Demostración. Supongamos que $K \cap \partial U = \emptyset$. Entonces K y ∂U son conjuntos cerrados en \bar{U} tales que ningún conjunto conexo en \bar{U} interseca a los dos.. Luego, por el Teorema del cable cortado 1.1.12, existen conjuntos cerrados disjuntos en \bar{U} , F_1 y F_2 tales que $\bar{U} = F_1 \cup F_2$, $K \subseteq F_1$ y $\partial U \subseteq F_2$. Sea $F_3 = F_2 \cup (X \setminus U)$, entonces F_3 es cerrado y $X = F_1 \cup F_3$. Además, tenemos que

$$F_1 \cap F_3 = F_1 \cap (X \setminus U) \subseteq \bar{U} \cap (X \setminus U) = \partial U \subseteq F_2,$$

y como $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, se sigue que $F_1 \cap F_3 = \emptyset$. □

1.2. PROPIEDADES DE LAS DENDRITAS

En esta sección se presentan algunas propiedades generales que caracterizan las dendritas y serán necesarias en las pruebas que daremos en los capítulos subsiguientes. Para ver estas propiedades, mostraremos antes unos lemas preliminares. Empezamos dando las definiciones de punto final y punto de corte de un espacio topológico. Estos conceptos se verán a menudo en el presente trabajo y usaremos las notaciones $\text{Cut}(X)$ y $\text{End}(X)$.

Definición 1.2.1. Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, decimos que p es un punto de no corte de X . Cuando $X \setminus \{p\}$ sea desconexo, diremos que p es un punto de corte de X . La colección de puntos de corte de X la denotaremos por $\text{Cut}(X)$.

Definición 1.2.2. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un punto final de X si para todo conjunto abierto U en X con $p \in U$, existe un conjunto abierto V en

X tal que $p \in V \subseteq U$ y $|\partial V| = 1$. El conjunto de puntos finales de X se denotará por $\text{End}(X)$.

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en ⁶ Teorema 5.12.

Teorema 1.2.3. (*Teorema del continuo de convergencia.*) Sean X un continuo y $N = \{p \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } p\}$. Si $q \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $q \in K$ y $K \subseteq N$.

Nótese que del Teorema 1.2.3, se sigue que si un continuo X no contiene continuos de convergencia, entonces X es un continuo de Peano. En el siguiente lema mostramos que cualesquiera dos puntos de un continuo de convergencia no pueden ser separados por un tercer punto.

Lema 1.2.4. Si K es un continuo de convergencia y $x, y \in K$, entonces ningún subconjunto de K puede separar a x e y en X . Además, de esto se sigue que ningún punto en X separa a x e y .

Demostración. Supongamos que existe $A \subseteq K$ tal que $X \setminus A \subseteq U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos no vacíos de X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como K es un continuo de convergencia, existe una sucesión $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(X)$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = K$ y $K \cap A_i = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Nótese que para todo $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq X \setminus K \subseteq U \cup V$. Como $x \in U$ y $y \in V$, existen $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ tales que $A_i \cap U \neq \emptyset$ para $i \geq i_0$ y $A_i \cap V \neq \emptyset$ para $i \geq i_1$. Luego, tomando $j = \max\{i_0, i_1\}$, por la conexidad de los conjuntos A_i , se tiene que $A_i \subseteq U$ y $A_i \subseteq V$ para todo $i \geq j$. Esto contradice que $U \cap V = \emptyset$. Así, ningún subconjunto de K separa a x e y en X .

Finalmente, sea z un punto en X . Si $z \in K$, la conclusión se sigue de lo hecho antes. Si $z \notin K$, entonces es claro que x e y están en una misma componente de $X \setminus \{z\}$. Luego, z no separa a x e y . □

La prueba de los siguientes dos teoremas puede ser consultada en ⁶ Teoremas 8.23 y 8.26.

Teorema 1.2.5. *(Teorema de arcoconexidad). Todo continuo de Peano no degenerado es arcoconexo.*

Teorema 1.2.6. *Todo subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano es arcoconexo.*

La primer caracterización de las dendritas 1.2.7 nos dice que dos puntos en una dendrita siempre están separados por otro punto. Su prueba se puede encontrar en ⁶ Teorema 10.2.

Teorema 1.2.7. *Un continuo X es una dendrita si, y solo si, cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X .*

Se define ahora la noción de arcoaccesibilidad, cuya definición es bastante intuitiva. Seguido de esto, se prueba un lema en el cual se ve que el conjunto de puntos arcoaccesibles es denso en la frontera de todo abierto, siempre y cuando el espacio sea localmente arcoconexo.

Definición 1.2.8. Sean X un espacio topológico, $Z \subseteq X$ y $p \in Z$. Se dice que p es arcoaccesible desde $X \setminus Z$, si existe una arco en $(X \setminus Z) \cup \{p\}$ que tiene a p como punto final.

Lema 1.2.9. *Si X es un espacio localmente arcoconexo y U es un subconjunto abierto de X , entonces el conjunto de todos los puntos de ∂U que son arcoaccesibles desde U es denso en ∂U .*

Demostración. Sean $x_0 \in \partial U$ y V un subconjunto abierto de X tal que $x_0 \in V$. Veamos que existe un punto en $V \cap \partial U$ que es arcoaccesible desde U .

Como X es localmente arcoconexo, existe una vecindad arcoconexa W de x_0 tal que $W \subseteq V$. Dado que $x_0 \in \partial U$, podemos tomar $y_0 \in W \cap U$. Sea α el arco en W que va de y_0 a x_0 . Es claro que el conjunto $\alpha \cap \partial U$ es un cerrado en α . Sea z_0 el mínimo del conjunto $\alpha \cap \partial U$ con respecto al orden \leq_{y_0} ($c \leq d$ si $[y_0, c] \subseteq [y_0, d]$).

Entonces, por la definición de z_0 , el arco $[y_0, z_0)$ no intersecta a ∂U . Luego, como $[y_0, z_0) \cap U \neq \emptyset$ y $[y_0, z_0)$ es conexo, $[y_0, z_0) \subseteq U$. De esto, el arco $[y_0, z_0] \subseteq U \cup \{z_0\}$ y z_0 es un punto arcoaccesible desde U . \square

La próxima definición y el lema subsiguiente se usarán en la prueba del Teorema 1.2.19, el cual se involucra en muchos de los teoremas que se presentan en este trabajo.

Definición 1.2.10. Un espacio topológico X es llamado semi-localmente-conexo en p , si toda vecindad de p contiene una vecindad V de p tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes.

Es posible que un continuo sea localmente conexo en un punto pero no sea semi-localmente-conexo allí y viceversa: Considérense por ejemplo los puntos extremos del arco I en el abanico armónico de la Figura 4. Sin embargo, si un continuo es localmente conexo en todo punto, entonces es semi-localmente-conexo en todo punto, como muestra el Lema 1.2.11

Lema 1.2.11. *Todo continuo de Peano es semi-localmente-conexo.*

Demostración. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Para cada $q \in \partial U$, sea U_q un conjunto abierto y conexo tal que $q \in U_q \subseteq \overline{U_q} \subseteq X \setminus \{p\}$. Por la compacidad de ∂U , existe una familia finita $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subseteq \{U_q : q \in \partial U\}$ tal que $\partial U \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Sea $C = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$. Es claro que C es un conjunto cerrado y $p \in X \setminus C$. Sea K la componente de $X \setminus C$ tal que $p \in K$. Por la conexidad local de X , K es un conjunto abierto de X . Además, como K es conexo y $K \cap \partial U = \emptyset$, tenemos que $K \subseteq U$. Veamos que $X \setminus K$ tiene a lo más n componentes.

Supongamos que L_1, L_2, \dots, L_{n+1} son componentes de $X \setminus K$. Por el Teorema de golpes en la frontera 1.1.13, $L_i \cap \overline{K} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$. Nótese que, como K es componente de $X \setminus C$, $L_i \cap C \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$. De esto, para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$, existe $l_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $L_i \cap \overline{V_{l_i}} \neq \emptyset$. Nótese que

de lo anterior, existen $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n+1\}$ y $l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $L_{i_1} \cap \overline{V}_l \neq \emptyset$ y $L_{i_2} \cap \overline{V}_l \neq \emptyset$. Por tanto, $L_{i_1} \cup L_{i_2} \cup \overline{V}_l$ es un conjunto conexo en $X \setminus K$ que contiene propiamente a L_{i_1} y a L_{i_2} . Esto contradice que L_{i_1} y L_{i_2} sean componentes de $X \setminus K$. Así, $X \setminus K$ tiene a lo más n componentes. \square

Con el siguiente lema vemos que en un continuo de Peano, todo punto de no corte tiene vecindades abiertas y conexas que además satisfacen que su complemento también es conexo.

Lema 1.2.12. *Sean X un continuo de Peano y $p \notin \text{Cut}(X)$. Entonces, para toda vecindad U de p , existe un conjunto abierto y conexo V tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es conexo.*

Demostración. Por el Lema 1.2.11, existe un subconjunto abierto O tal que $p \in O \subseteq U$ y $X \setminus O$ tiene una cantidad finita de componentes. Sean L_1, L_2, \dots, L_n tales componentes de $X \setminus O$. Como $p \notin \text{Cut}(x)$, $X \setminus \{p\}$ es conexo y por tanto arcoconexo (Teorema 1.2.6). Sean $p_i \in L_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para $i \in \{2, \dots, n\}$, sea α_i el arco que une p_1 con p_i . Entonces, el conjunto $C = (X \setminus O) \cup (\bigcup_{i=2}^n \alpha_i)$ es un subcontinuo de X y además, $p \in X \setminus C$. Sea V la componente de $X \setminus C$ tal que $p \in V$. Por la conexidad local de X , V es un conjunto abierto. Veamos que $X \setminus V$ es conexo.

Nótese que V es un conjunto cerrado en $X \setminus C$. Luego,

$$X \setminus C = V \cup [(X \setminus V) \cap (X \setminus C)] = V \cup [X \setminus (V \cup C)] \quad (1.2.1)$$

Por la Proposición 6.3 de ⁶, $[X \setminus (V \cup C)] \cup C$ es conexo y además, por la igualdad en 1.2.1, $X \setminus V = C \cup [X \setminus (V \cup C)]$. Así, $X \setminus V$ es conexo, como queríamos probar. \square

Definición 1.2.13. *(Continuo hereditariamente localmente conexo). Se dice que un continuo X es hereditariamente localmente conexo, escrito hlc, cuando todo subcontinuo de X es un continuo de Peano.*

El siguiente teorema da una condición suficiente y necesaria para que un continuo sea hlc. Una prueba puede verse en ⁶ Teorema 10.4.

Teorema 1.2.14. *Un continuo X es hlc si, y solo si, X no contiene continuos de convergencia.*

Usando los resultados en 1.2.7, 1.2.4 y 1.2.14, se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.2.15. *Toda dendrita es hlc.*

Con ayuda del Corolario 1.2.16, se obtiene otra propiedad importante en el contexto de las dendritas.

Corolario 1.2.16. *Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Demostración. Sea Y un subcontinuo de X . Por ser X dendrita, es claro que Y no puede contener curvas cerradas simples. Además, por el Corolario 1.2.15, se tiene que Y es un continuo de Peano. Luego, Y es una dendrita. \square

Las siguientes propiedades para espacios métricos conexos y separables se usarán en la prueba de las caracterizaciones restantes que se darán para las dendritas.

Definición 1.2.17. Sea X un espacio topológico conexo. Un corte cerrado de X es un subconjunto cerrado C de X tal que $X \setminus C$ no es conexo.

Lema 1.2.18. *Para un espacio métrico separable y conexo, se tiene lo siguiente:*

- i) Si G es una colección no numerable de cortes cerrados de X disjuntos dos a dos, entonces existe $C \in G$ tal que $X \setminus C = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos no vacíos y $U \cap (\bigcup G) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup G)$.*
- ii) Si K es un continuo de convergencia de X , entonces K no contiene ninguna colección no numerable de cortes cerrados de X disjuntos dos a dos. Esto*

implica que a lo más una cantidad numerable de puntos de K son puntos de corte de X .

iii) Si Y es una colección no numerable de puntos de corte de X , entonces existen $a, b, c \in Y$ tales que c separa a y b .

iv) Sea $Y = \text{Cut}(X)$. Si Z es un subconjunto conexo de X , entonces todos excepto una cantidad numerable de puntos en $Y \cap Z$ son puntos de corte de Z .

v) Si X es no degenerado, la familia en el inciso i) siempre existe.

Demostración. *i)* Supongamos que para todo $C_\alpha \in G$, se tiene que si $X \setminus C_\alpha = U_\alpha \cup V_\alpha$, entonces $V_\alpha \cap (\bigcup G) = \emptyset$. Veamos que para todo $C_\alpha, C_\beta \in G$ con $C_\alpha \neq C_\beta$, $X = (U_\alpha \cup U_\beta) \cup (V_\alpha \cap V_\beta)$.

Sea $p \in X \setminus (U_\alpha \cup U_\beta)$ y probemos que $p \in V_\alpha \cap V_\beta$. Como $p \notin U_\alpha$, tenemos que $p \in C_\alpha \cup V_\alpha$. Supongamos que $p \in C_\alpha$. Entonces, como los conjuntos en G son disjuntos, $p \in U_\beta \cup V_\beta$. Dado que, por nuestra suposición, $V_\alpha \cap (\bigcup G) = \emptyset$, se sigue que $p \in U_\beta$, lo cual es una contradicción. Luego, $p \in V_\alpha$. Del mismo modo se puede ver que $p \in V_\beta$. Así, $X = (U_\alpha \cup U_\beta) \cup (V_\alpha \cap V_\beta)$. Como U_α y U_β son conjuntos no vacíos y X es conexo, tenemos que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Es decir, hay una familia no numerable de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos en X . Esto contradice la separabilidad de X . Por tanto, existe $C \in G$ tal que $X \setminus C = U \cup V$ y $U \cap (\bigcup G) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup G)$.

ii) Supongamos que existe una familia no numerable G de cortes cerrados disjuntos dos a dos tal que $C \subseteq K$ para todo $C \in G$. Por *i)*, existe $C \in G$ tal que $X \setminus C = U \cup V$ y $U \cap (\bigcup G) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup G)$. Sean $p \in U \cap (\bigcup G)$ y $q \in V \cap (\bigcup G)$. Es claro que $p, q \in K$ y por lo anterior, C es un subconjunto de K que separa p y q . Esto contradice 1.2.4.

iii) Se obtiene inmediatamente de i).

iv) Sea $C \subseteq Y \cap Z$ tal que C es no numerable. Veamos que existe $r \in C \cap \text{Cut}(Z)$. Sean $p, q \in C$. Por iii), existe $r \in C$ tal que r separa p y q . Esto es, $X \setminus \{r\} \subseteq U \cup V$ con U y V abiertos disjuntos no vacíos tales que $p \in U$ y $q \in V$. Como $p, q \in Z \setminus \{r\}$, $U \cap (Z \setminus \{r\}) \neq \emptyset$ y $V \cap (Z \setminus \{r\}) \neq \emptyset$. Luego, $r \in \text{Cut}(Z)$.

v) Como X es un espacio métrico, podemos suponer que su métrica d es acotada y $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. Sea $x_0 \in X$. Para cada $\varepsilon \in (0, 1)$, sea $S_\varepsilon = \partial B(x_0; \varepsilon)$. Nótese que por la conexidad de X , $S_\varepsilon \neq \emptyset$. Además, como la frontera de todo subconjunto es un corte cerrado del espacio X , la colección $\{S_\varepsilon : \varepsilon \in (0, 1)\}$ satisface las condiciones en i). \square

Si consideramos el continuo S^1 , vemos que en él no hay puntos de corte ni puntos finales. Asimismo, en el abanico armónico, existen puntos que no cortan al espacio y no son puntos finales. Sin embargo, en las dendritas no ocurre esto, como se puede ver abajo.

Teorema 1.2.19. *Un continuo no degenerado X es una dendrita si, y solo si, cada punto de X es un punto de corte de X o un punto final de X .*

Demostración. Sea X una dendrita no degenerada. Sea p un punto de no corte de X . Dado $\varepsilon > 0$, por el Lema 1.2.12, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U$, $\text{diam}(U) < \varepsilon$ y $X \setminus U$ es conexo.

Supongamos que $|\partial U| \geq 2$. Entonces, por el Teorema 8.25 de ⁶ y el Lema 1.2.9, existen puntos distintos $q, r \in \partial U$ que son arcoaccesibles desde U . Por el Teorema 1.2.6, U es arcoconexo. Luego, existe un arco α en $U \cup \{q, r\}$ de q a r . Nótese que $X \setminus U$ es un conjunto conexo y cerrado. De esto, $X \setminus U$ es un continuo de Peano (Teorema 1.2.16) y por tanto arcoconexo (Teorema 1.2.5). Como $q, r \in X \setminus U$, existe

un arco β en $X \setminus U$ de q a r . Es claro que $\alpha \cup \beta$ es una curva cerrada simple, lo que contradice que X es dendrita. Luego, $|\partial U| \leq 1$. Nótese que, por la conexidad de X , $\partial U \neq \emptyset$ y por tanto, $|\partial U| = 1$. Así, $p \in \text{End}(X)$.

Recíprocamente, supongamos que todo punto de X es de corte o final. Veamos que X no contiene continuos de convergencia. Supongamos que existe K continuo de convergencia de X . Nótese que ningún punto de K es punto final de X . Luego, K tiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X . Esto contradice *ii*) en el Lema 1.2.18. Por tanto, por el Teorema 1.2.3, X es un continuo de Peano. Supongamos que X contiene una curva cerrada simple S . Es claro que ningún punto de S es un punto final de X . De esto, todo punto en S es un punto de corte de X . Por *iv*) del Lema 1.2.18, existe un punto de corte de S , lo cual es imposible. De lo anterior, concluimos que X es una dendrita. \square

No es difícil ver ejemplos de continuos arcoconexos que tienen subcontinuos que no son arcoconexos (basta considerar por ejemplo el círculo de Varsovia en el Ejemplo 1.6 de ⁶). El siguiente teorema nos dice que en las dendritas no se puede presentar lo mencionado antes.

Teorema 1.2.20. *Todo subconjunto conexo de una dendrita es arcoconexo.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo de una dendrita X . Sean $p, q \in C$ dos puntos diferentes. Por el Corolario 1.2.16, \overline{C} es una dendrita. Por tanto, por el Teorema 1.2.5, existe un arco α en \overline{C} que une p y q . Veamos que $\alpha \subseteq C$.

Nótese que para cada $a \in \overline{C} \setminus C$, $C \subseteq \overline{C} \setminus \{a\} \subseteq \overline{C}$. De esto, por la conexidad de C , $\overline{C} \setminus \{a\}$ es conexo y por tanto, cada punto en $\overline{C} \setminus C$ es un punto de no corte de \overline{C} . Luego, por el Teorema 1.2.19, $a \in \text{End}(\overline{C})$ para cada $a \in \overline{C} \setminus C$. Puesto que los únicos puntos de α que pueden ser puntos finales de \overline{C} son p y q y además, $p, q \in C$, se tiene que $(\overline{C} \setminus C) \cap \alpha = \emptyset$. Así, puesto que $\alpha \subseteq \overline{C}$, se concluye que $\alpha \subseteq C$. Por tanto, C es un conjunto arcoconexo. \square

Se prueba ahora que, en una dendrita, la intersección de conjuntos conexos siempre resulta ser un conjunto conexo.

Teorema 1.2.21. *Un continuo X es una dendrita si, y solo si, la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es también conexo.*

Demostración. Supongamos primero que X es una dendrita. Si existiesen subconjuntos conexos de C , C_1 y C_2 , tales que $C_1 \cap C_2$ no es conexo, podemos tomar puntos a y b en diferentes componentes de $C_1 \cap C_2$. Por el Teorema 1.2.20, existen arcos α en C_1 y β en C_2 que unen a y b . Claramente, $\alpha \cap \beta$ no es conexo, pues a y b no pertenecen a una misma componente. Luego, $\alpha \cup \beta$ contiene una curva cerrada simple. Esto contradice que X es dendrita.

Recíprocamente, supongamos que la intersección de dos conjuntos conexos en X es conexo. Veamos que X no contiene continuos de convergencia. Si existe K continuo de convergencia de X , por v) en el Lema 1.2.18, existe G una familia no numerable de cortes cerrados de K . Por *ii*) del Lema 1.2.18, existe $C \in G$ tal que $X \setminus C$ es conexo. Luego, por la hipótesis, $K \cap (X \setminus C) = K \setminus C$ es conexo. Pero esto es una contradicción, pues $C \in G$. Así, X no puede contener continuos de convergencia y por el Teorema 1.2.3, X es un continuo de Peano. Además, es claro que X no puede contener curvas cerradas simples, pues en S^1 , la intersección de los conjuntos $\{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ y $\{z = e^{i\theta} : \theta \in [-\pi, 0]\}$ no es un conjunto conexo. Por lo hecho antes, se concluye que X es una dendrita. \square

Nótese que del teorema anterior se sigue que dados a y b en una dendrita X , existe un único arco α en X que une a y b . La última propiedad que mencionaremos para las dendritas, nos dice que toda función continua $f: X \rightarrow X$ definida en una dendrita X siempre posee un punto fijo; es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. La prueba de este resultado puede consultarse en ⁶ Teorema 10.31.

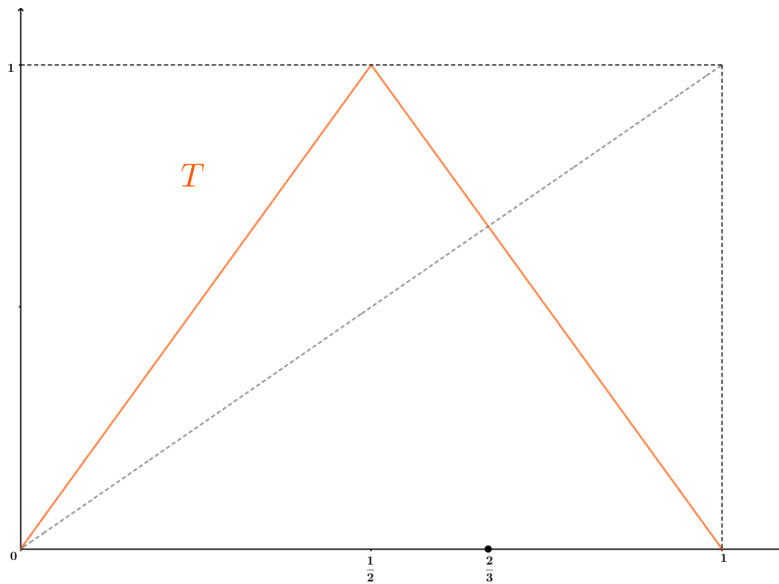
Teorema 1.2.22. *Toda dendrita tiene la propiedad del punto fijo.*

Para finalizar esta sección, se define la función Tienda, la cual servirá como ejemplo en el capítulo 2, para ver que la continuidad de la de la función Ω_f no implica ciertas propiedades que se prueban para el caso de ω_f .

Ejemplo 1.2.23. (La función Tienda). Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Figura 2. Función Tienda



La función T es conocida como la función Tienda. Algunas propiedades muy conocidas sobre la función Tienda que usaremos son que $\text{Fix}(T) = \{0, \frac{2}{3}\}$, $\text{Per}(T)$ es un subconjunto denso y además, que hay puntos con órbita densa. Una demostración de las propiedades mencionadas antes puede ser consultada en ⁷.

2. LA FUNCIÓN OMEGA LÍMITE

En este capítulo damos algunas propiedades interesantes sobre las funciones omega límite ω_f y Ω_f , principalmente en el contexto de las dendritas. Más precisamente, mostramos que si hay un punto cuya órbita es densa, entonces esta es una condición suficiente para que Ω_f sea continua. Asimismo, daremos condiciones necesarias para la continuidad de ω_f , tales como que el conjunto de puntos periódicos sea un subconjunto conexo y el conjunto de puntos recurrentes sea un continuo.

Los principales resultados en este capítulo relacionados con la función ω_f se pueden encontrar en ⁸.

2.1. PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS OMEGA LÍMITE

El objetivo principal de esta sección es dar algunas propiedades relacionadas con los conjuntos omega límite $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ cuando $f: X \rightarrow X$ está definida en un espacio métrico compacto.

Empezamos con una propiedad elemental del conjunto $\text{Fix}(f^n)$ que usaremos con frecuencia.

Teorema 2.1.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces, $\text{Fix}(f^n)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Veamos que $\text{Fix}(f^n)$ es cerrado y por tanto compacto. Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Fix}(f^n)$ una sucesión tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$, y veamos que $x \in \text{Fix}(f^n)$. Como $x_i \in \text{Fix}(f^n)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y f^n es continua, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} f^n(x_i) = f^n(x)$, y por tanto $f^n(x) = x$. Así, $x \in \text{Fix}(f^n)$. \square

⁸ J. CAMARGO y J. CANCINO. "The ω -limit function on dendrites". Preprint (2019).

La prueba del siguiente resultado es sencilla; sin embargo, incluimos una demostración pues no encontramos en la literatura una referencia y lo consideramos una propiedad interesante del conjunto omega límite.

Lema 2.1.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $x_0 \in X$ es tal que $\mathcal{O}(x_0, f)$ es densa, entonces $\omega(x_0, f) = X$. En particular, $\Omega(x_0, f) = X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por la densidad del conjunto $\mathcal{O}(x_0, f)$ podemos formar una sucesión creciente de naturales $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x_0) \in B(x, \frac{1}{k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De donde es claro que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_0) = x$. Así, $x \in \omega(x_0, f)$ y $\omega(x_0, f) = X$. Como $\omega(x_0, f) \subseteq \Omega(x_0, f)$, $\Omega(x_0, f) = X$. \square

Con el siguiente teorema mostramos una condición suficiente para tener la continuidad de la función Ω_f .

Teorema 2.1.3. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Si existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f)$ es denso en X , entonces $\Omega(x, f) = X$, para todo $x \in X$. En particular, la función $\Omega_f : X \rightarrow 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $x \in X$. Si $x = x_0$, entonces $\Omega(x, f) = X$, por el Lema 2.1.2. Así, supongamos que $x \neq x_0$ y sea $y \in X$. Por la densidad de $\mathcal{O}(x_0, f)$ podemos formar sucesiones crecientes de naturales $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_0) = x$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_k}(x_0) = y$. En las sucesiones formadas antes, podemos elegir subsucesiones $(n_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y $(m_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de modo que $m_{k_j} - n_{k_j} > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sean $r_j = m_{k_j} - n_{k_j}$ y $x_j = f^{n_{k_j}}(x_0)$. Entonces, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{r_j}(x_j) = y$; es decir, $y \in \Omega(x, f)$ y así, $\Omega(x, f) = X$. \square

Cuando tenemos una sucesión encajada $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de un espacio topológico X , es posible determinar el valor de $\lim A_i$ sin necesidad de usar las definiciones de límite superior e inferior, como vemos con el siguiente resultado.

Lema 2.1.4. Sean X un espacio topológico y $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . Entonces:

1. Si $A_i \subseteq A_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_i = \text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
2. Si $A_i \supseteq A_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl}(A_i)$.

Demostración. Veamos independientemente cada afirmación.

1. Veamos primero que $\limsup A_i \subseteq \liminf A_i$. Sean $p \in \limsup A_i$ y U abierto en X con $p \in U$, entonces existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, tomando $j_0 = n_1$, y usando el hecho de que $A_i \subseteq A_{i+1}$, se sigue que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \geq j_0$, y por tanto $p \in \liminf A_i$. Ahora, dados $y \in \liminf A_i$ y U un abierto en X con $y \in U$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \geq i_0$. De esto, es claro que $U \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$, y por tanto $y \in \text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. También, dados $z \in \text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ y U un abierto en X con $z \in U$, tenemos que $U \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$, y por ende existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Como $A_i \subseteq A_{i+1}$, es claro que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \geq i_0$, y así $z \in \liminf A_i$. Con lo anterior, concluimos que $\lim A_i = \text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
2. Sean $x_0 \in \limsup A_i$ y U un abierto en X con $x_0 \in U$. Existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión creciente tal que $U \cap A_{n_k} \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Nótese que para $k \in \mathbb{N}$, puesto que $A_i \supseteq A_{i+1}$, se tiene que $A_l \cap U \neq \emptyset$ para todo $l \leq n_k$. Así, es claro que tomando $j_0 = n_1$, $U \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \geq j_0$. Luego, $x_0 \in \liminf A_i$ y así $\liminf A_i = \limsup A_i$. Ahora, dados $y \in \liminf A_i$ y U un abierto en X con $y \in U$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \geq i_0$. Sabemos que $A_j \supseteq A_{i_0}$ para $j \leq i_0$, y por tanto $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De esto, $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl}(A_i)$ y $\liminf A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl}(A_i)$. Ahora, para $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl}(A_i)$ y U un abierto con $z \in U$, tenemos que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y de esto es claro que $z \in \liminf A_i$. Por lo hecho antes, vemos que $\lim A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl}(A_i)$.

□

Con el siguiente lema mostramos que, siempre que $A_i \subseteq A_{i+1}$, todo punto en el límite superior es límite de una sucesión, donde el i -ésimo término de dicha sucesión pertenece al respectivo A_i . Consideramos importante destacar que en la siguiente prueba es indispensable la condición de que $A_i \subseteq A_{i+1}$.

Lema 2.1.5. *Sean X un espacio métrico compacto y $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . Si $A_i \subseteq A_{i+1}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y $p \in \limsup A_i$, entonces existe una sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $a_i \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = p$.*

Demostración. Como $p \in \limsup A_i$, para el abierto $U_1 = B(p, 1)$, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $U_1 \cap A_{i_1} \neq \emptyset$. Tomemos $x_1 \in U_1 \cap A_{i_1}$. De igual forma, para $U_2 = B(p, \frac{1}{2})$, existe $i_2 > i_1$ tal que $U_2 \cap A_{i_2} \neq \emptyset$, y escojamos $x_2 \in U_2 \cap A_{i_2}$. Inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos x_k de modo que $x_k \in B(p, \frac{1}{k}) \cap A_{i_k}$. Ahora, elijamos cualquier $x_0 \in A_1$ y definamos la sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como sigue: $a_i = x_0$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ y $a_i = x_k$, siempre que $i \in \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}$. Entonces, es claro que $a_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y por nuestra construcción, se sigue que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = p$. □

Notemos que si consideramos $X = [-1, 1]$ y tomamos $A_i = \{-1\}$ si i es impar y $A_i = \{1\}$ si i es par, entonces tenemos que $\limsup A_i = \{-1, 1\}$; sin embargo, no es posible formar una sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de forma que $a_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \in \{-1, 1\}$, pues $\liminf A_i = \emptyset$, como se puede ver fácilmente.

A continuación mostramos que los límites inferior y superior de una sucesión $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son subconjuntos cerrados. En particular, si X es compacto, entonces tendremos que $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$ también son compactos.

Lema 2.1.6. *Sean X un espacio métrico y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . Entonces $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ son conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\liminf A_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y veamos que $x_0 \in \liminf A_n$. Dado U un abierto de X con $x_0 \in U$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal

que $x_n \in U$ para cada $n \geq n_0$. En particular, $x_{n_0} \in U$ y como $x_{n_0} \in \liminf A_n$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq k_0$. Así, $x_0 \in \liminf A_n$. De igual forma se puede ver que $\limsup A_n$ es un conjunto cerrado. \square

El siguiente resultado será útil en la prueba del Teorema 2.2.1. Este nos da una forma de expresar el omega conjunto límite $\omega(x, f)$ como una unión de aplicaciones sucesivas a $\omega(x, f^n)$ con la función f .

Lema 2.1.7. *Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\omega(x, f) = \omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n)).$$

Demostración. Es claro que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^m(\omega(x, f^n)) \subseteq \omega(x, f)$ y de esto se sigue que $\omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n)) \subseteq \omega(x, f)$. Ahora, dado $y \in \omega(x, f)$, existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Por el algoritmo de la división, $n_k = r_k n + s_k$, con $s_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por ser $\{0, 1, \dots, n-1\}$ un conjunto finito, entonces existen una subsucesión $(n_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tales que $n_{k_j} = r_{k_j} n + s$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tenemos así que $f^{n_{k_j}}(x) = f^s((f^n)^{r_{k_j}}(x))$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X , podemos suponer que $\lim_{j \rightarrow \infty} (f^n)^{r_{k_j}}(x) = p$, para algún $p \in X$ (pasando a una subsucesión de ser necesario). Luego, tenemos que $p \in \omega(x, f^n)$ y $y = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}}(x) = f^s(\lim_{j \rightarrow \infty} (f^n)^{r_{k_j}}(x)) = f^s(p)$. Así, $y \in f^s(\omega(x, f^n))$, y por tanto $\omega(x, f) \subseteq \omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n))$. \square

Una propiedad interesante de los conjuntos omega límite es que estos son fuertemente invariantes. Para la prueba de la siguiente proposición, tomamos como guía la Proposición 12.7 en ⁷.

Proposición 2.1.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, para cada $x \in X$, los conjuntos $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ son fuertemente invariantes.*

Demostración. Veamos primero que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Sea $y \in \omega(x, f)$, entonces existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Por la continuidad de f , se sigue que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}(x) = f(y)$ y por tanto $f(y) \in \omega(x, f)$. Así, $f(\omega(x, f)) \subseteq \omega(x, f)$. Ahora, dado $y \in \omega(x, f)$, tomando $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ creciente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si consideramos la sucesión $(f^{n_k-1}(x))_{k \in \mathbb{N}}$, por la compacidad de X , existe una subsucesión $(n_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x) = p$, para algún $p \in X$. Es claro que $p \in \omega(x, f)$ y por la continuidad de f , $y = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}}(x) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x)) = f(p)$. Luego, $y \in f(\omega(x, f))$ y $\omega(x, f) \subseteq f(\omega(x, f))$.

Mostremos ahora que $f(\Omega(x, f)) \subseteq \Omega(x, f)$. Dado $y \in \Omega(x, f)$, existen sucesiones $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_k) = y$. Por ser f continua, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}(x_k) = f(y)$, y de esto $f(y) \in \Omega(x, f)$ y $f(\Omega(x, f)) \subseteq \Omega(x, f)$. Igualmente, para $y \in \Omega(x, f)$, siendo $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_k) = y$, podemos suponer que $n_k > 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, tomando la sucesión $(f^{n_k-1}(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$, por ser X compacto, existe una subsucesión $(n_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x_{k_j}) = z$, para algún $z \in X$. Claramente $z \in \Omega(x, f)$ y usando la continuidad de f vemos que $y = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}}(x_{k_j}) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x_{k_j})) = f(z)$. De lo anterior, $y \in f(\Omega(x, f))$ y con esto, $\Omega(x, f) \subseteq f(\Omega(x, f))$. \square

Además de ser conjuntos invariantes $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$, estos también son conjuntos cerrados como mostramos en la proposición que sigue. Así, cuando X sea un espacio métrico compacto, $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ también serán subconjuntos compactos.

Proposición 2.1.9. *Sea $f: X \rightarrow X$ una función continua con X espacio métrico, entonces $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ son conjuntos cerrados, para cada $x \in X$.*

Demostración. Probemos que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\omega(x, f)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$ y veamos que $p \in \omega(x, f)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Como $y_n \rightarrow p$, podemos escoger $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_1} \in B(p, \varepsilon_1)$. De igual

forma, puesto que $y_{n_1} \in \omega(x, f)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_1}(x) \in B(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}) \subseteq B(p, \varepsilon_1)$. Ahora, podemos tomar $n_2 > n_1$ tal que $y_{n_2} \in B(p, \frac{\varepsilon_2}{2})$ y $k_2 > k_1$ de forma que $f^{k_2}(x) \in B(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}) \subseteq B(p, \varepsilon_2)$. Continuando inductivamente, formamos una sucesión creciente $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f^{k_n}(x) \in B(p, \varepsilon_n) = B(p, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(x) = p$ y así, $p \in \omega(x, f)$. Con lo anterior, concluimos que $\omega(x, f)$ es cerrado.

Mostremos ahora que $\Omega(x, f)$ es cerrado. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\Omega(x, f)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z$ y veamos que $z \in \Omega(x, f)$. Tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_1} \in B(z, \frac{\varepsilon_1}{2})$. Como $y_{n_1} \in \Omega(x, f)$, existen sucesiones $(r_k^{(n_1)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_k^{(n_1)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n_1)} = x$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{r_k^{(n_1)}}(x_k^{(n_1)}) = z$. Por tanto, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_1}^{(n_1)} \in B(x, \varepsilon_1)$ y $f^{r_{k_1}^{(n_1)}}(x_{k_1}^{(n_1)}) \in B(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}) \subseteq B(z, \varepsilon_1)$. Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 > n_1$ con $y_{n_2} \in B(z, \frac{\varepsilon_2}{2})$. Ya que $y_{n_2} \in \Omega(x, f)$, existen sucesiones $(r_k^{(n_2)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_k^{(n_2)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n_2)} = x$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{r_k^{(n_2)}}(x_k^{(n_2)}) = z$. Luego, es posible escoger $k_2 > k_1$, con $r_{k_2}^{(n_2)} > r_{k_1}^{(n_1)}$, $x_{k_2}^{(n_2)} \in B(x, \varepsilon_2)$ y $f^{r_{k_2}^{(n_2)}}(x_{k_2}^{(n_2)}) \in B(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}) \subseteq B(z, \varepsilon_2)$. Así, inductivamente, construimos sucesiones $(r_{k_i}^{(n_i)})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_{k_i}^{(n_i)})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_{k_i}^{(n_i)} \in B(x, \frac{1}{i})$ y $f^{r_{k_i}^{(n_i)}}(x_{k_i}^{(n_i)}) \in B(z, \frac{1}{i})$. De esto, se sigue que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i}^{(n_i)} = x$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{r_{k_i}^{(n_i)}}(x_{k_i}^{(n_i)}) = z$. Por tanto, $z \in \Omega(x, f)$ y así $\Omega(x, f)$ es un conjunto cerrado. \square

Para los conjuntos $\liminf \omega(x_n, f)$ y $\limsup \omega(x_n, f)$, se cumple que son conjuntos invariantes, como mostramos en el siguiente resultado.

Lema 2.1.10. *Sean X un espacio métrico compacto, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces, $\liminf \omega(x_n, f)$ y $\limsup \omega(x_n, f)$ son conjuntos invariantes.*

Demostración. Veamos inicialmente que $f(\liminf \omega(x_n, f)) \subseteq \liminf \omega(x_n, f)$. Sean $x_0 \in \liminf \omega(x_n, f)$ y V un abierto de X con $f(x_0) \in V$. Por ser f continua, existe

un abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Además, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\omega(x_n, f) \cap U \neq \emptyset$, y por tanto $f(\omega(x_n, f)) \cap f(U) \neq \emptyset$. Como $\omega(x_n, f)$ es invariante (ver Proposición 2.1.8), $\omega(x_n, f) \cap f(U) \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$. De lo anterior, $\omega(x_n, f) \cap V \neq \emptyset$ para $n \geq n_0$ y así, $f(x_0) \in \liminf \omega(x_n, f)$. De forma análoga se muestra que $\limsup \omega(x_n, f)$ es un conjunto invariante. \square

Pregunta 2.1.11. Sean X un espacio métrico compacto, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . ¿Los conjuntos $\liminf \omega(x_n, f)$ y $\limsup \omega(x_n, f)$ son fuertemente invariantes?

Del mismo modo en que probamos el Lema 2.1.10, utilizando la Proposición 2.1.8, podemos obtener un resultado similar para $\Omega(x_n, f)$, concluyendo que los conjuntos $\liminf \Omega(x_n, f)$ y $\limsup \Omega(x_n, f)$ son invariantes bajo f .

2.2. CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN OMEGA LÍMITE EN DENDRITAS

En esta sección se darán condiciones necesarias para la continuidad de la función $\omega_f: X \rightarrow 2^X$ cuando X es una dendrita. Entre estas condiciones se pueden destacar: la conexidad de los puntos periódicos, la minimalidad de los conjuntos $\omega(x, f)$, que el conjunto de puntos recurrentes sea un continuo y que el conjunto $\text{Per}(f)$ es denso en $R(f)$. Las propiedades que se mencionaron antes pueden encontrarse en ⁸.

Enseguida veremos que si X es una dendrita, entonces una condición necesaria para la continuidad de la función $\omega_f: X \rightarrow 2^X$ es que el conjunto $\text{Per}(f)$ sea un conjunto conexo.

Teorema 2.2.1. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $\text{Fix}(f^n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$, y de esto, $\text{Per}(f)$ también es conexo.

Demostración. Nótese que, por el Teorema 2.1.1, $\text{Fix}(f^n)$ es compacto y además, por el Teorema 1.2.20, un subconjunto de X es conexo si, y solo si, es arcoconexo. Supongamos que $\text{Fix}(f^n)$ no es conexo; esto es, existen $p, q \in \text{Fix}(f^n)$, tales que $[p, q] \cap \text{Fix}(f^n) = \{p, q\}$.

Sea $x \in (p, q)$. Luego, $f^n(x) \neq x$. Como X es una dendrita, se tiene que $x \in [p, f^n(x)]$ ó $x \in [f^n(x), q]$. Supongamos que $x \in [p, f^n(x)]$. Como $\{p, f^n(x)\} \subseteq f^n([p, x])$, $x \in [p, f^n(x)] \subseteq f^n([p, x])$, y por tanto existe $x_1 \in [p, x]$ donde $x_1 \notin \{p, x\}$, tal que $f^n(x_1) = x$. De lo anterior, $\{p, x\} \subseteq f^n([p, x_1])$ y así, $x_1 \in [p, x] \subseteq f^n([p, x_1])$. Luego, existe $x_2 \in [p, x_1]$, donde $x_2 \notin \{p, x_1\}$, tal que $f^n(x_2) = x_1$. Continuando de este modo, inductivamente formamos una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $f^n(x_{i+1}) = x_i$, $[p, x_{i+1}] \subseteq [p, x_i]$, para todo $i \in \mathbb{N}$, y $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = p$. Como ω_f es continua, se tiene que $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(x_i, f) = \omega(p, f)$, donde $\omega(p, f) = \mathcal{O}(p, f)$ es un conjunto finito, pues $p \in \text{Fix}(f^n)$. Nótese que, como $x = f^n(x_1)$ y $f^n(x_{i+1}) = x_i$, tenemos que $\omega(x, f^n) = \omega(x_i, f^n) = \omega(x_{i+1}, f^n)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, por el Lema 2.1.7, tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \omega(x_i, f) &= \omega(x_i, f^n) \cup f(\omega(x_i, f^n)) \cup f^2(\omega(x_i, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x_i, f^n)) \\ &= \omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup f^2(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n)) \\ &= \omega(x, f). \end{aligned}$$

Luego, $(\omega(x_i, f))_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión constante de valor $\omega(x, f)$, convergente a $\omega(p, f)$, y por tanto $\omega(x, f) = \omega(p, f)$. En el caso en que $x \in [f^n(x), q]$, se va a tener que $\omega(x, f) = \omega(q, f)$. Con lo hecho antes, vemos que $\omega_f([p, q]) = \{\omega(p, f), \omega(q, f)\}$. Como ω_f es una función continua, $\omega_f([p, q])$ es conexo. Así, $\omega_f([p, q]) = \{\omega(p, f)\}$; es decir, $\omega_f(p) = \omega_f(q)$. Veamos ahora que esto no es posible. Sea k el periodo de p bajo f . Como $p, q \in \text{Fix}(f^n)$, $p \neq q$ y $\omega(p, f) = \omega(q, f)$, tenemos que existe $k_0 < k$, tal que $f^{k_0}(p) = q$. Luego, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $f^{ik_0}(q) \in f^{(i+1)k_0}([p, q]) \cap f^{ik_0}([p, q])$,

y por tanto $\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{ik_0}([p, q])$ es conexo. Así, $X_1 = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{ik_0}([p, q])}$ es una dendrita. Usando la continuidad de la función f^{k_0} , tenemos las siguientes relaciones:

$$f^{k_0}(X_1) \subseteq \overline{f^{k_0}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{ik_0}([p, q])\right)} = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{(i+1)k_0}([p, q])} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{ik_0}([p, q])} \subseteq X_1$$

Luego, $f^{k_0}(X_1) \subseteq X_1$ y considerando $f^{k_0}|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_1$ se tiene que existe $x_0 \in X_1$, tal que $f^{k_0}(x_0) = x_0$ (Teorema 1.2.22). Sea $L = \{x \in X : \omega(x, f) = \omega(p, f)\}$. Sabemos que $[p, q] \subseteq L$ y además, es fácil ver que L es cerrado y $f(L) \subseteq L$. De esto se sigue que $X_1 \subseteq L$, y por tanto $\omega(x_0, f) = \omega(p, f)$ y $f^{k_0}(x_0) = x_0$. Esto es una contradicción, pues $k_0 < k$ y k es el periodo de p .

Como $\text{Per}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(f^n)$ y $\text{Fix}(f) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(f^n)$, tenemos que $\text{Per}(f)$ es conexo. \square

Por el Teorema 2.2.1, la continuidad de la función ω_f cuando f está definida en una dendrita, implica que el conjunto $\text{Per}(f)$ es conexo. Sin embargo, es natural preguntarse si este conjunto es un continuo.

En el Ejemplo 3.2.20 mostramos una construcción que evidencia una respuesta negativa a esta pregunta. Luego, formulamos la siguiente pregunta general.

Pregunta 2.2.2. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua tales que ω_f es continua. ¿Bajo que condiciones el conjunto $\text{Per}(f)$ es un continuo?

En el Teorema 2.2.5 daremos dos condiciones adicionales a la continuidad de la función ω_f que nos permiten garantizar que $\text{Per}(f)$ sea un continuo cuando X es una dendrita. A continuación mostramos dos lemas que nos serán útiles en la prueba del Teorema 2.2.5.

Lema 2.2.3. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $x_0 \in \text{R}(f) \setminus \text{Per}(f)$, entonces $\omega(x_0, f)$ es un conjunto no numerable con cardinalidad mayor o igual a $\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$.

Demostración. Por la Proposición 2.1.9 sabemos que $\omega(x_0, f)$ es compacto. Veamos que $\omega(x_0, f)$ no tiene puntos aislados. Supongamos que existen $p \in \omega(x_0, f)$ y U abierto de X tales que $U \cap \omega(x_0, f) = \{p\}$. Como $p \in \omega(x_0, f)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x_0) = p$. De lo anterior, $\omega(x_0, f) = \omega(p, f)$. Como $U \cap \omega(p, f) = \{p\}$, es claro que $p \in \text{Per}(f)$. Como $x_0 \in \text{R}(f)$, $x_0 \in \omega(x_0, f) = \omega(p, f)$. Así, $x_0 \in \text{Per}(f)$, pero esto contradice que $x_0 \notin \text{Per}(f)$.

Finalmente, $\omega(x_0, f)$ es un conjunto no numerable con $|\omega(x_0, f)| \geq \mathcal{C}$, por el Teorema 27.7 de ⁹. □

Lema 2.2.4. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X . Entonces $|\text{End}(Y)| \leq |\text{End}(X)|$.

Demostración. Definamos una función inyectiva $\phi: \text{End}(Y) \rightarrow \text{End}(X)$. Sea $p \in \text{End}(Y)$. Si $p \in \text{End}(X)$, entonces $\phi(p) = p$. Si $p \notin \text{End}(X)$, entonces por el Teorema 1.2.19, $p \in \text{Cut}(X)$ y por tanto, $X \setminus \{p\} = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de X . Como $Y \setminus \{p\}$ es conexo y $Y \setminus \{p\} \subseteq U \cup V$, entonces $Y \setminus \{p\} \subseteq U$ ó $Y \setminus \{p\} \subseteq V$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $Y \setminus \{p\} \subseteq U$. Nótese que, por el Teorema 6.6 de ⁶, existe $q_p \in V$ tal que $q_p \notin \text{Cut}(X)$; esto es, $q_p \in \text{End}(X)$. En este caso, definimos $\phi(p) = q_p$. Veamos que ϕ es inyectiva. Sean $p_1, p_2 \in \text{End}(Y)$ con $p_1 \neq p_2$. Tenemos los siguientes tres casos:

1. $\phi(p_1) = p_1$ y $\phi(p_2) = p_2$;
2. $\phi(p_1) \neq p_1$ y $\phi(p_2) = p_2$;
3. $\phi(p_1) \neq p_1$ y $\phi(p_2) \neq p_2$.

En el caso 1., es claro que $\phi(p_1) \neq \phi(p_2)$. Para el caso 2., tenemos que $X \setminus \{p_1\} = U \cup V$ con U y V abiertos disjuntos y no vacíos. Suponiendo que $Y \setminus \{p_1\} \subseteq U$,

⁹ J. R. MUNKRES. *Topology a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

tenemos que $p_2 \in U$ y escogiendo $q_{p_1} \in V$ como mencionamos arriba, $\phi(p_1) = q_{p_1} \neq p_2 = \phi(p_2)$, pues $U \cap V = \emptyset$. Finalmente, para el caso 3., tenemos que $X \setminus \{p_1\} = U_1 \cup V_1$, $X \setminus \{p_2\} = U_2 \cup V_2$ con U_1, U_2, V_1, V_2 conjuntos abiertos no vacíos tales que $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ y $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. Suponiendo que $Y \setminus \{p_1\} \subseteq U_1$ y $Y \setminus \{p_2\} \subseteq U_2$, escogemos $q_{p_1} \in V_1 \cap \text{End}(X)$ y $q_{p_2} \in V_2 \cap \text{End}(X)$ como hicimos antes. Nótese que, por la Proposición 6.3 de ⁶, $V_1 \cup \{p_1\}$ y $V_2 \cup \{p_2\}$ son subcontinuos de X y por tanto dendritas (Corolario 1.2.16). Así, existen un arco α_1 en $V_1 \cup \{p_1\}$ que une p_1 y q_{p_1} y un arco α_2 en $V_2 \cup \{p_2\}$ que une p_2 y q_{p_2} . Se tiene que $\alpha_1 \cap Y = \{p_1\}$ y $\alpha_2 \cap Y = \{p_2\}$. Si $\phi(p_1) = \phi(p_2)$, $\alpha_1 \cup \alpha_2$ y Y son continuos tales que $(\alpha_1 \cup \alpha_2) \cap Y = \{p_1, p_2\}$, lo cual contradice el Teorema 1.2.21. Por tanto, $\phi(p_1) \neq \phi(p_2)$ y ϕ es inyectiva. \square

Ahora, mostramos que dadas X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ tal que ω_f es continua, entonces el hecho de que el periodo de todo punto en X este acotado por un mismo número $k \in \mathbb{N}$ o el conjunto de puntos finales sea numerable, implica que $\text{Per}(f)$ sea un continuo.

Teorema 2.2.5. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua tal que ω_f es continua. Entonces:*

- i) *Si $P = \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } x \in X \text{ con } f^n(x) = x\}$ es finito, entonces $\text{Per}(f)$ es un continuo.*
- ii) *Si $|\text{End}(X)| < \mathcal{C}$, entonces $\text{Per}(f)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, sabemos que $\text{Per}(f)$ es un conjunto conexo. Así, solo debemos mostrar que $\text{Per}(f)$ es también un conjunto cerrado.

- i) Como P es finito, existe el mínimo común múltiplo de los $n \in P$, $m = m.c.m(P)$. Nótese que $f^m(x) = x$ para todo $x \in \text{Per}(f)$. Así, dada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Per}(f)$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^m(x_n) = f^m(x_0)$. Como $f^m(x_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f^m(x_0)$ y por tanto, $f^m(x_0) = x_0$. Luego, $x_0 \in \text{Per}(f)$ y concluimos que $\text{Per}(f)$ es un conjunto cerrado.

ii) Supongamos que $\text{Per}(f)$ no es cerrado; esto es, existe $x_0 \in \overline{\text{Per}(f)} \setminus \text{Per}(f)$. Como ω_f es continua, $\overline{\text{Per}(f)} = \text{R}(f)$, por el Corolario 2.2.18. Así, $x_0 \in \text{R}(f) \setminus \text{Per}(f)$ y por el Lema 2.2.3, $\omega(x_0, f)$ es un conjunto no numerable con $|\omega(x_0, f)| \geq \mathcal{C}$. Nótese que $\omega(x_0, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)} \setminus \text{Per}(f)$, pues $\omega(x_0, f)$ es un conjunto minimal por la Proposición 2.2.13. Sea $Y = \overline{\text{Per}(f)}$, entonces Y es una dendrita (Teorema 1.2.16) y para cada $z \in \omega(x_0, f)$, es claro que $\text{Per}(f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)} \setminus \{z\} \subseteq \overline{\text{Per}(f)} = Y$. Por tanto, $Y \setminus \{z\}$ es conexo para todo $z \in \omega(x_0, f)$ y con esto, por el Teorema 1.2.19, $\omega(x_0, f) \subseteq \text{End}(Y)$; es decir, $\text{End}(Y)$ es un conjunto no numerable con $|\text{End}(Y)| \geq \mathcal{C}$. Esto contradice el Lema 2.2.4. Concluimos así que $\text{Per}(f)$ es un conjunto cerrado.

□

Pregunta 2.2.6. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. ¿Si $\text{Fix}(f^n)$ es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces ω_f es continua?

Dado X un continuo y f una función continua definida en X , la continuidad de ω_f nos permite concluir que $\text{R}(f)$ es un subconjunto cerrado (compacto) de X , como se puede probar fácilmente. Sin embargo, esto no nos garantiza que $\text{R}(f)$ sea conexo, como mostraremos en el Ejemplo 2.2.10. Cuando X es una dendrita, la continuidad de ω_f implica que $\text{R}(f)$ es un subcontinuo de X , y por tanto una dendrita (ver Corolario 1.2.16).

Teorema 2.2.7. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $\text{R}(f)$ es un continuo.

Demostración. Veamos primero que $\bigcup_{x \in X} \omega(x, f) = \text{R}(f)$. Nótese que como $x \in \omega(x, f)$ para cada $x \in \text{R}(f)$, tenemos que $\text{R}(f) \subseteq \bigcup_{x \in X} \omega(x, f)$.

Mostremos que $\omega(x, f) \subseteq \text{R}(f)$ para cada $x \in X$. Sea $y \in \omega(x, f)$. Luego, existe una sucesión creciente de naturales $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Como ω_f es continua, $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(f^{n_k}(x), f) = \omega(y, f)$. Además, como $\omega(f^{n_k}(x), f) = \omega(x, f)$

para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que la sucesión $(\omega(f^{n_k}(x), f))_{k \in \mathbb{N}}$ es constante y así, $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. Luego, $y \in \omega(y, f)$ y $y \in R(f)$. De lo anterior, $\bigcup_{x \in X} \omega(x, f) \subseteq R(f)$. Como ω_f es continua, $\omega_f(X)$ es un subcontinuo de 2^X . Además por el Teorema 1.2.22, existe $x_0 \in \text{Fix}(f)$, y por tanto $\{x_0\} \in \omega_f(X) \cap \mathcal{C}(X)$, de lo que se sigue que $\bigcup \omega_f(X)$ es un continuo, por el Lema 1.49 de ¹⁰. Es claro que $\bigcup \omega_f(X) = \bigcup_{x \in X} \omega(x, f)$. Así, $R(f)$ es un continuo. \square

Pregunta 2.2.8. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. ¿Si $R(f)$ es un continuo, entonces ω_f es continua?

En el siguiente ejemplo vemos que el recíproco del Teorema 2.2.7 no es válido en general para un continuo arbitrario.

Ejemplo 2.2.9. Sean $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ compactación para \mathbb{Z} y $f: \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Z}^*$ dada por:

$$f(k) = \begin{cases} k + 1, & \text{si } k \in \mathbb{Z}; \\ \infty, & \text{si } k = \infty; \\ -\infty, & \text{si } k = -\infty. \end{cases}$$

Ahora, sean $X = (\mathbb{Z}^* \times [0, 1]) / (\mathbb{Z}^* \times \{1\})$ el cono de \mathbb{Z}^* , $p = \mathbb{Z}^* \times \{1\}$ la única clase no degenerada y $g: X \rightarrow X$ definida como:

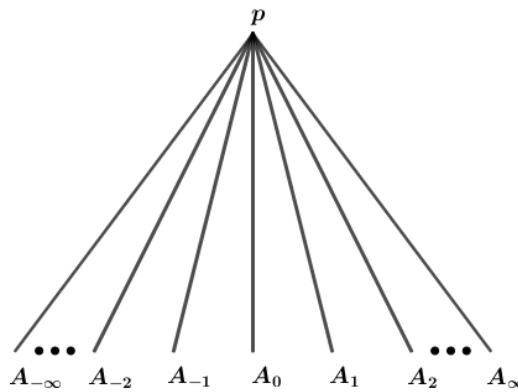
$$g(\alpha) = \begin{cases} p, & \text{si } \alpha = p; \\ (f(k), t), & \text{si } \alpha = (k, t), t \in [0, 1). \end{cases}$$

Entonces, llamando $A_k = [k, p]$ el arco en X que une k con p para cada $k \in \mathbb{Z}^*$ (ver Figura 3), se observa que $\text{Fix}(g) = \text{Per}(g) = R(g) = A_{-\infty} \cup A_{\infty}$ y además,

¹⁰ S. B. Jr. NADLER. *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. Aportaciones Matemáticas, México, 2006.

$\omega((-\infty, 0), g) = \{(-\infty, 0)\}$ y $\omega((k, 0), g) = \{(\infty, 0)\}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-\infty\}$. Por tanto, $R(g)$ es un continuo, mas ω_g no es continua, pues podemos formar una sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^* \times \{0\} \setminus (-\infty, 0)$ de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = (-\infty, 0)$, y en este caso $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(h_n, g) = (\infty, 0) \neq (-\infty, 0) = \omega((-\infty, 0), g)$.

Figura 3. Cono de $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}$



Con el siguiente ejemplo mostramos que el Teorema 2.2.7 no es válido si el espacio no es una dendrita.

Ejemplo 2.2.10. Consideremos $f: S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} e^{\pi i(t^2+1)} & \text{Si } z = e^{\pi i t} \text{ con } t \in [0, 1], \\ e^{\pi i(-\sqrt{|t|+1})} & \text{Si } z = e^{\pi i t} \text{ con } t \in (-1, 0). \end{cases}$$

Sean $p = (-1, 0)$ y $q = (0, 1)$. Entonces tenemos que para $z = e^{\pi i t}$ con $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(z) = q$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n-1}(z) = p$ y para $z = e^{\pi i t}$ con $t \in (-1, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(z) = p$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n-1}(z) = q$. Luego, se tiene que $\omega(z, f) = \{p, q\}$ para todo $z \in S^1$ y por tanto la función ω_f es continua y además $R(f) = \{p, q\}$. De lo anterior vemos que $R(f)$ no es un subconjunto conexo de X .

Damos ahora la definición de conjunto minimal para un subconjunto A de un espacio métrico X .

Definición 2.2.11. Sean $A \subseteq X$ y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que A es minimal si satisface las siguientes condiciones:

- i)* $A \neq \emptyset$;
- ii)* A es cerrado;
- iii)* A es invariante bajo f ;
- iv)* A es minimal respecto a *i)*, *ii)* y *iii)*; esto es, no existe $B \subsetneq A$ tal que B satisfice *i)*, *ii)* y *iii)*.

A continuación mostramos que todo conjunto minimal es un conjunto omega límite.

Lema 2.2.12. Sean X un espacio métrico compacto, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $A \subseteq X$. Entonces, A es un conjunto minimal si, y solo si, $A = \omega(x, f)$ para todo $x \in A$.

Demostración. Supongamos primero que A es un conjunto minimal. Como A es cerrado e invariante, entonces $\omega(x, f) \subseteq A$ para cada $x \in A$. Además, la contención no puede ser estricta, pues $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante (Proposiciones 2.1.9 y 2.1.8), lo cual contradeciría la minimalidad de A . Luego, $\omega(x, f) = A$ para cada $x \in A$.

Recíprocamente, como $A = \omega(x, f)$ para todo $x \in A$, tenemos que A es cerrado, invariante y no vacío. Además, si B es un conjunto cerrado e invariante tal que $B \subseteq A$, entonces $\omega(b, f) \subseteq B \subseteq A$ para cada $b \in B$. Por la hipótesis para A , se sigue que $A = \omega(b, f)$ y así, $B = A$. □

En un espacio métrico compacto X , la continuidad de la función ω_f es una condición suficiente para que todo omega conjunto límite $\omega(x, f)$ sea un subconjunto minimal de X , como se muestra en la proposición que sigue.

Proposición 2.2.13. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal para cada $x \in X$.

Demostración. Nótese que por el Lema 2.2.12, basta ver que para cada $y \in \omega(x, f)$ tenemos que $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. Dado que $y \in \omega(x, f)$, existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Por la continuidad de ω_f , tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(f^{n_k}(x), f) = \omega(y, f)$. Además, es claro que $\omega(f^{n_k}(x), f) = \omega(x, f)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. \square

El recíproco de la proposición anterior no se cumple en general, como vemos a continuación.

Ejemplo 2.2.14. Consideremos $X = [0, 1]$ y la función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x) = x^2$, para cada $x \in X$. Entonces sabemos que

$$\omega(x, f) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } x \neq 1; \\ \{1\}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Por tanto, $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal para todo $x \in X$, pero ω_f no es una función continua.

La prueba del siguiente lema se deduce fácilmente de la Proposición 6.3 en ⁶.

Lema 2.2.15. Sean X una dendrita y $p \in \text{End}(X)$. Si A es un subconjunto compacto de X tal que $p \notin A$, entonces existe un subcontinuo W de X tal que $A \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$.

Demostración. Como $X \setminus A$ es abierto, $p \in X \setminus A$ y $p \in \text{End}(X)$, tenemos que existe un abierto U en X tal que $p \in U \subseteq X \setminus A$ y $|\partial U| = 1$. Nótese que $X \setminus \partial U = U^\circ \cup (X \setminus U)^\circ$ y por tanto, por ser ∂U cerrado y conexo, $W = \partial U \cup (X \setminus U)^\circ$ es un subcontinuo de X (ver Proposición 6.3 de ⁶). Además, W satisface que $A \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$. \square

La prueba del siguiente lema sobre dendritas es sencilla usando el Teorema 1.2.5 y el hecho de que en una dendrita cualesquiera dos puntos se pueden unir mediante un único arco. Haremos una demostración para comodidad del lector.

Lema 2.2.16. *Sean X una dendrita y L un subcontinuo propio de X . Si U es una componente de $X \setminus L$, entonces existe un único $p \in X$ tal que $\overline{U} \cap L = \{p\}$ y en este caso, $\overline{U} = U \cup \{p\}$.*

Demostración. Por el teorema de golpes en la frontera sabemos que existe $p \in X$ tal que :

$$p \in \overline{U} \cap \partial(\overline{X \setminus L}) \subseteq \overline{U} \cap \partial(X \setminus L) = \overline{U} \cap \partial L \subseteq \overline{U} \cap L.$$

Supongamos que existe $q \in \overline{U} \cap L$ con $p \neq q$. Sean V, W abiertos de \overline{U} tales que $p \in V, q \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Como \overline{U} es dendrita, podemos escoger abiertos conexos V_1, W_1 de \overline{U} tales que $p \in V_1 \subseteq V, q \in W_1 \subseteq W$. De la conexidad local de \overline{U} se sigue que V_1 y W_1 son arcoconexos. Sean $\alpha \in V_1 \setminus \{p\}, b \in W_1 \setminus \{q\}$, α un arco de a a p y β un arco de b a q . Por ser \overline{U} y L dendritas, $[p, q]_{\overline{U}}$ y $[p, q]_L$ son los únicos arcos en \overline{U} y L , respectivamente, que unen p y q . Luego, si consideramos $\alpha \cup [p, q]_{\overline{U}} \cup [p, q]_L \cup \beta$, se formaría una curva cerrada simple lo cual contradice que X sea dendrita. Así, $\overline{U} \cap L = \{p\}$.

Veamos ahora que en este caso se tiene que $\overline{U} = U \cup \{p\}$. Es claro que $U \cup \{p\} \subseteq \overline{U}$. Además, dado $x \in \overline{U}, x \in L$ ó $x \in X \setminus L$. Si $x \in L$, entonces $x = p$ ya que $\overline{U} \cap L = \{p\}$. Si $x \in X \setminus L$, entonces se tiene que $x \in U$, ya que por ser U componente de $X \setminus L$, U es cerrado de $X \setminus L$. Así, $\overline{U} \subseteq U \cup \{p\}$. \square

Sabemos ya que en una dendrita X , el hecho de ser ω_f continua implica que $R(f)$ es un continuo. Mostramos en el próximo teorema que si se tiene esta misma hipótesis y además $X = R(f)$, entonces $\text{Per}(f)$ es un subconjunto denso.

Teorema 2.2.17. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua y $X = R(f)$, entonces $R(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.*

Demostración. Es claro que $\overline{\text{Per}(f)} \subseteq \text{R}(f)$. Supongamos que existe $x_0 \in \text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Sea U la componente de $\text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ tal que $x_0 \in U$. Como $\text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ es abierto y X es dendrita, entonces U es abierto y dado que $x_0 \in \omega(x_0, f)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) \in U$. Nótese que $f^k(U) \cap \overline{\text{Per}(f)} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pues si $y \in f^k(U) \cap \overline{\text{Per}(f)}$, entonces $\omega(y, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$ y existe $u \in U$ tal que $f^k(u) = y$. Luego, $\omega(f^k(u), f) = \omega(u, f) = \omega(y, f)$ y por tanto $\omega(u, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$, lo cual contradice que $u \in \text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Por lo anterior, tenemos que $f^{n_0}(U)$ es un conexo de $\text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ y como $f^{n_0}(x_0) \in U$, entonces se sigue que $f^{n_0}(U) \subseteq U$ y por tanto, $f^{n_0}(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Del Lema 2.2.16, existe $p \in X$ tal que $\overline{U} \cap \overline{\text{Per}(f)} = \{p\}$ y $\overline{U} = U \cup \{p\}$. Por ser \overline{U} dendrita, sabemos que existe $l \in \overline{U}$ tal que $l \in \text{Fix}(f^{n_0})$. Como $\overline{U} = U \cup \{p\}$ y $U \subseteq \text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$, concluimos que $l = p$. Afijemos que $p \in \omega(x_0, f^{n_0}) \subseteq \omega(x_0, f)$:

Supongamos que $p \notin \omega(x_0, f^{n_0})$ y definamos el conjunto

$$I_{x_0} = \bigcap \{L : L \text{ es un subcontinuo de } \overline{U} \text{ y } \omega(x_0, f^{n_0}) \subseteq L\}.$$

Entonces I_{x_0} es un subcontinuo de \overline{U} y $p \notin I_{x_0}$, ya que por ser \overline{U} dendrita, por el Lema 2.2.15, existe un subcontinuo L de \overline{U} tal que $\omega(x_0, f^{n_0}) \subseteq L \subseteq \overline{U} \setminus \{p\} = U$. Además, como $f^{n_0}(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$ y $\omega(x_0, f^{n_0})$ es un conjunto f^{n_0} -invariante, entonces para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $g^{n_0 i}(I_{x_0}) \subseteq g^{n_0(i+1)}(I_{x_0})$. Sea $H = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_0 i}(I_{x_0}) = \text{cl}_{\overline{U}}(\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{n_0 i}(I_{x_0}))$ (ver Lema 2.1.4), entonces H es una dendrita y

$$f^{n_0}(H) = f^{n_0}\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_0 i}(I_{x_0})\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_0}(f^{n_0 i}(I_{x_0})) = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_0(i+1)}(I_{x_0}) = H.$$

Luego, existe $h \in H$ tal que $f^{n_0}(h) = h$. Como $H \subseteq \overline{U} \subseteq \text{R}(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)} \cup \{p\}$ y p es el único punto en \overline{U} tal que $f^{n_0}(p) = p$, entonces $h = p$. Así, por el Lema 2.1.5, existen sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $y_i \in f^{n_0 i}(I_{x_0})$, $x_i \in I_{x_0}$, tales que $y_i = f^{n_0}(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = p$. Por la compacidad de I_{x_0} , $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = z$ para

algún $z \in I_{x_0}$ (pasando a una subsección de ser necesario) y por ser ω_f continua, $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(y_i, f) = \omega(p, f)$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(x_i, f) = \omega(z, f)$. Como $f^{n_0 i}(x_i) = y_i$, entonces $\omega(y_i, f) = \omega(x_i, f)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y se sigue que $\omega(z, f) = \omega(p, f) \subseteq \text{Per}(f)$, lo que es absurdo pues $z \in R(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Luego, $p \in \omega(x_0, f^{n_0}) \subseteq \omega(x_0, f)$ y por la Proposición 2.2.13 $\omega(p, f) = \omega(x_0, f)$, lo cual es una contradicción pues $\omega(p, f) \subseteq \text{Per}(f)$ y $x_0 \in R(f) \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Por tanto, $R(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

□

La prueba del siguiente corolario se sigue fácilmente con el resultado obtenido en el teorema anterior.

Corolario 2.2.18. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $R(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

Demostración. Sabemos que $R(f)$ es un continuo, por el Teorema 2.2.7. Nótese que $f(R(f)) \subseteq R(f)$. Sean $Z = R(f)$ y $g: Z \rightarrow Z$ definida por $g(z) = f(z)$, para cada $z \in Z$. Observe que $R(f) = R(g)$. De esto, $R(g) = \overline{\text{Per}(g)}$, por el Teorema 2.2.17.

Finalmente, no es difícil ver que $\text{Per}(f) = \text{Per}(g)$. Así, $R(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

□

A continuación hacemos una observación sobre algunos de los resultados planteados antes para el caso de la función Ω_f .

Observación 2.2.19. En el ejemplo 1.2.23 vimos que la función Tienda T tiene puntos con órbita densa. Así, por el Teorema 2.1.3, Ω_T es continua. Sin embargo, esta condición no es suficiente para obtener las conclusiones en el Teorema 2.2.7, el Teorema 2.2.1, la Proposición 2.2.13 y el Corolario 2.2.18, pues:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{Fix}(T^n)$ no es conexo.
- $R(T)$ no es un continuo, pues hay órbitas densas y por tanto $R(f)$ no es compacto.

- $\omega(x, T)$ y $\Omega(x, T)$ no son conjuntos minimales para cada $x \in X$, ya que existen puntos con órbita densa.
- $R(T) \neq \overline{\text{Per}(T)}$, pues $\overline{\text{Per}(T)} = [0, 1]$ y existen puntos en $[0, 1]$ que no son recurrentes como por ejemplo $x = \frac{1}{3}$.

Si todo punto de un espacio métrico compacto X es recurrente, entonces para cada sucesión convergente a un punto $p \in X$, se tiene que su órbita está contenida en el límite inferior de la sucesión de omega conjuntos límite.

Teorema 2.2.20. *Sea $f: X \rightarrow X$ continua, donde X es un métrico compacto. Si $R(f) = X$, entonces $\omega(x_0, f) \subseteq \liminf \omega(x_n, f)$, para cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X , donde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.*

Demostración. Veamos que $x_0 \in \liminf \omega(x_n, f)$. Dado U abierto de X con $x_0 \in U$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Puesto que $X = R(f)$, $x_n \in \omega(x_n, f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $\omega(x_n, f) \cap U \neq \emptyset$, para $n \geq n_0$. Luego, $x_0 \in \liminf \omega(x_n, f)$. Además, por los lemas 2.1.6 y 2.1.10, $\liminf \omega(x_n, f)$ es un conjunto cerrado e invariante y de esto se sigue que $\omega(x_0, f) \subseteq \liminf \omega(x_n, f)$. □

Pregunta 2.2.21. *¿Se cumple que $\limsup \omega(x_n, f) \subseteq \omega(x_0, f)$, cuando X es una dendrita?*

La hipótesis de que $R(f) = X$ si es necesaria, pues si se toma $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, todo conjunto omega límite es minimal, pero ω_f no es continua.

Pregunta 2.2.22. *Sea $f: X \rightarrow X$ continua, con X un espacio métrico compacto. ¿Si $R(f) = X$, entonces $\Omega(x_0, f) \subseteq \liminf \Omega(x_n, f)$, para cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$? Además, ¿se cumple que $\limsup \Omega(x_n, f) \subseteq \Omega(x_0, f)$ con X dendrita?*

Dadas X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua, veremos a continuación una condición necesaria para la continuidad de la función ω_f , en términos de una nueva función $\overline{\omega}_f: X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ que definiremos, donde para cada $x \in X$, $\overline{\omega}_f(x)$ es el subcontinuo de X más pequeño que contiene a su omega conjunto límite $\omega(x, f)$.

Definición 2.2.23. Sean X una dendrita y $A \in 2^X$. Definimos

$$Co(A) = \bigcap \{L \in \mathcal{C}(X) : A \subseteq L\}.$$

Nótese que como X es hereditariamente unicoherente, $Co(A)$ es un continuo. Además, $Co(X)$ es el continuo más pequeño que contiene a A . Tenemos naturalmente una función $Co: 2^X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ y además, definimos una nueva función $\overline{\omega}_f: X \rightarrow \mathcal{C}(X)$, donde $\overline{\omega}_f(x) = Co(\omega(x, f))$ para cada $x \in X$.

El siguiente lema sencillo de demostrar afirma que todo punto final del subcontinuo $Co(A)$ es necesariamente un punto de A .

Lema 2.2.24. Sean X una dendrita y $A \in 2^X$. Entonces, $\text{End}(Co(A)) \subseteq A$.

Demostración. Sea $p \in \text{End}(Co(A))$. Si $p \notin A$, entonces por el Lema 2.2.15, existe un subcontinuo W de $Co(A)$ tal que $A \subseteq W \subseteq Co(A) \setminus \{p\}$. Esto contradice que $Co(A)$ sea el continuo más pequeño que contiene a A . \square

En el contexto de las dendritas se cumple que la función Co definida en 2.2.23 es continua, como probamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.25. Sea X una dendrita. Entonces la función $Co: 2^X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ es continua.

Demostración. Sean $A_0 \in 2^X$ y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0$. Veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} Co(A_n) = Co(A_0)$. Para esto, probemos que toda subsucesión convergente de $(Co(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $Co(A_0)$.

Sea $(Co(A_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $Co((A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} Co(A_{n_k}) = B \in C(X)$. Nótese que $A_0 \subseteq B$, ya que $A_{n_k} \subseteq Co(A_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A_0$. De esto, $Co(A_0) \subseteq B$.

Probemos ahora que $B \subseteq Co(A_0)$. Sea $z \in B$. Luego existe una sucesión $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $z_k \in Co(A_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$. Tenemos los siguientes dos casos:

- i) $z_k \in \text{End}(Co(A_{n_k}))$ para una cantidad infinita de subíndices k .
- ii) $z_k \notin \text{End}(Co(A_{n_k}))$ para todo k excepto una cantidad finita de subíndices.

Para i), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $z_k \in \text{End}(Co(A_{n_k}))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema 2.2.24, $z_k \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A_0$, $z \in A_0 \subseteq Co(A_0)$.

Para ii), suponemos, sin pérdida de generalidad, que $z_k \notin \text{End}(Co(A_{n_k}))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, $z_k \in \text{Cut}(Co(A_{n_k}))$ (Teorema 1.2.19) y existen abiertos disjuntos no vacíos U_k y V_k en $Co(A_{n_k})$ tales que $Co(A_{n_k}) \setminus \{z_k\} = U_k \cup V_k$. Nótese que, por el Teorema 6.6 de ⁶ y el Lema 2.2.24, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $p_{n_k} \in U_k \cap A_{n_k}$ y $q_{n_k} \in V_k \cap A_{n_k}$. Como X es compacto y $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A_0$, podemos suponer que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = p_0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{n_k} = q_0$, donde $p_0, q_0 \in A_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea α_k el arco que une p_{n_k} con q_0 .

Afirmación 2.2.26. *Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in \alpha_k$ para todo $k \geq k_0$.*

Por el Teorema 6.3 de ⁶, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $U_k \cup \{z_k\}$ y $V_k \cup \{z_k\}$ son continuos y por tanto dendritas, tales que $(U_k \cup \{z_k\}) \cap (V_k \cup \{z_k\}) = \{z_k\}$. De esto, es claro que $z_k \in [p_{n_k}, q_{n_k}]$.

Supongamos que no existe tal k_0 . Entonces, como $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{n_k} = q_0$, podemos elegir un conjunto abierto y conexo U con $q_0 \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $q_{n_k} \in U$, $p_{n_k}, z_{n_k} \notin U$ y $z_k \notin \alpha_k$. Como X es dendrita, tenemos que U es arcoconexo (ver Proposición 10.9 de ⁶) y así, $[q_{n_k}, q_0] \subseteq U$. Como $z_k \notin \alpha_k$, tenemos

que $[p_{n_k}, q_{n_k}] \cup \alpha_k \cup [q_{n_k}, q_0]$ contiene una curva cerrada simple. Esto contradice que X es dendrita. Por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in \alpha_k$ para $k \geq k_0$.

Por ser X dendrita, se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = [p_0, q_0]$ (ver Teorema 1-2-E de ¹¹). Así, dado que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$ y $z_k \in \alpha_k$ para todo $k \geq k_0$, tenemos que $z \in [p_0, q_0]$. Además, puesto que $Co(A_0)$ es dendrita y $p_0, q_0 \in A_0 \subseteq Co(A_0)$, $[p_0, q_0] \subseteq Co(A_0)$ y por tanto, $z \in Co(A_0)$.

De lo anterior, concluimos que $B = Co(A_0)$ y con esto, $\lim_{n \rightarrow \infty} Co(A_n) = Co(A_0)$. \square

Corolario 2.2.27. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $\overline{\omega_f}$ es continua.

Demostración. Por la Proposición 2.2.25, sabemos que $Co: X \rightarrow \mathcal{C}(X)$ es continua. Luego, por ser ω_f continua, se sigue que $\overline{\omega_f} = Co \circ \omega_f$ es continua. \square

No siempre que se considere un continuo hereditariamente unicoherente X , se tiene la continuidad de la función $Co: 2^X \rightarrow \mathcal{C}(X)$, como mostramos en el siguiente ejemplo definiendo una función en el abanico armónico.

Ejemplo 2.2.28. Sean $\alpha_n = [(0, 0), (1, \frac{1}{n})]$ la combinación convexa de $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{n})$ en \mathbb{R}^2 para cada $n \in \mathbb{N}$, $I = [(0, 0), (1, 0)]$ y $X = I \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n)$ (ver Figura 4). El continuo X se conoce como abanico armónico. Definimos $f: X \rightarrow X$ de modo que:

1. $f|_I = Id_I$ y;
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f|_{\alpha_{2n-1}}: \alpha_{2n-1} \rightarrow \alpha_{2n}$ es un homeomorfismo y $f^2(x) = x$ para cada $x \in \alpha_{2n-1}$

Nótese que ω_f es continua, $\omega(x, f) = \{x, f(x)\}$ para $x \in X \setminus I$ y $\omega(x, f) = \{x\}$ para

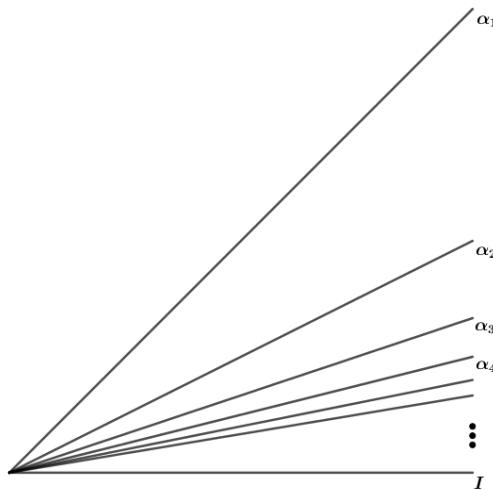
¹¹ J. B. FUGATE, G. R. GORDH y LUM LEWIS. "Arc-Smooth Continua". En: *Mathematics Faculty Publications and Presentations 2* (1981).

cada $x \in I$. Además, $\overline{\omega_f}(x) = \{x\}$ si $x \in I$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{\omega_f}\left(\left(1, \frac{1}{n}\right)\right) = \begin{cases} \alpha_{n-1} \cup \alpha_n, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \alpha_n \cup \alpha_{n+1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, $\overline{\omega_f}$ no es una función continua, pues si consideramos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(1, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1, 0)$ pero, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\omega_f}(x_n) = I \neq \{(1, 0)\} = \overline{\omega_f}((1, 0))$.

Figura 4. Abanico armónico



3. EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS

Se inicia este capítulo dando algunas propiedades relacionadas con la continuidad de la función ω_f , la igualdad de los conjuntos omega límite y la equicontinuidad de una función $f: X \rightarrow X$ definida en general sobre un espacio métrico compacto. En el Teorema 3.1.9, se ve que si todo punto es periódico, entonces es equivalente la continuidad de ω_f a la igualdad de los conjuntos omega límite.

Luego, se presentan teoremas para el contexto de las dendritas, como por ejemplo condiciones necesarias y suficientes para que f sea equicontinua o ω_f sea continua. En el Teorema 3.2.11, se da una caracterización para la equicontinuidad de una función f definida en una dendrita. En el Teorema 3.2.3, se verá una respuesta positiva a la Pregunta 4.4 en CAMARGO, RINCÓN y UZCÁTEGUI, “Equicontinuity of maps on dendrites”

Es de destacar que todo lo que se muestra en el presente capítulo, es una recopilación de lo realizado en ².

3.1. ALGUNAS PROPIEDADES EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

En esta pequeña sección se verán algunos resultados relacionados con la equicontinuidad, la igualdad de los conjuntos omega límite y la continuidad de ω_f en el contexto general de los espacios métricos compactos.

Se inicia esta sección con un lema sencillo de demostrar para espacios métricos compactos.

Lema 3.1.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua y $R(f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$, entonces $R(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.*

Demostración. Veamos que $\overline{\text{Per}(f)} \subseteq R(f)$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Per}(f)$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Por ser ω_f continua, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(x_n, f) = \omega(x_0, f)$ y

como $x_n \in \text{Per}(f)$, $x_n \in \omega(x_n, f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $x_0 \in \omega(x_0, f)$. Así, $\overline{\text{Per}(f)} \subseteq R(f)$. \square

El siguiente lema es otra forma de escribir el Lema 3.1.1, tomando en cuenta el continuo fuertemente invariante $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

Lema 3.1.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua y $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, entonces $R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

En el siguiente lema se muestra que la continuidad de la función ω_f y la densidad del conjunto $\text{Per}(f)$ en $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ son condiciones suficientes para que se tenga la igualdad de los conjuntos omega límite.

Lema 3.1.3. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si ω_f es continua y $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, entonces $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$.

Demostración. Es claro que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$, y que $\omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ y $\Omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ usando el hecho de que $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$ son conjuntos fuertemente invariantes (Proposición 2.1.8). Sea $y \in \Omega(x, f)$, entonces existen sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = y$. Luego, por la continuidad de ω_f , tenemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(x_i, f) = \omega(x, f)$ y además, $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(f^{n_i}(x_i), f) = \omega(y, f)$. Nótese que $\omega(f^{n_i}(x_i), f) = \omega(x_i, f)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y de esto, $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. Como $\Omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$, $y \in R(f)$ por el Lema 3.1.2. Así, $y \in \omega(y, f) = \omega(x, f)$ y $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$. \square

Dados X un espacio métrico compacto y f una función definida en X , la igualdad de los omega conjuntos límite de f^n es una condición necesaria para que f sea equicontinua como se prueba en el lema que sigue.

Lema 3.1.4. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función equicontinua. Entonces $\omega(x, f^n) = \Omega(x, f^n)$ para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Es claro que $\omega(x, f^n) \subseteq \Omega(x, f^n)$. Ahora, dado $y \in \Omega(x, f^n)$, existen sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(l_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n l_i}(x_i) = y$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n l_i}(x_i), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \geq i_0$. Por ser f equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, siempre que $d(x, y) < \delta$. Como $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$, podemos elegir $i_1 > i_0$ de modo que $d(x_i, x) < \delta$ para todo $i \geq i_1$ y con esto, $d(f^{n l_i}(x_i), f^{n l_i}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Con lo anterior, tenemos que para $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned} d(f^{n l_i}(x), y) &\leq d(f^{n l_i}(x), f^{n l_i}(x_i)) + d(f^{n l_i}(x_i), y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo hecho antes, tenemos que $y \in \omega(x, f^n)$ y con esto concluimos que $\omega(x, f^n) = \Omega(x, f^n)$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. \square

La equicontinuidad de una función $f: X \rightarrow X$ definida sobre un espacio métrico compacto, es una condición suficiente para concluir que ω_f es continua.

Teorema 3.1.5. *Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si f es equicontinua, entonces ω_f es continua.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por ser f equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^m(x), f^m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Veamos que tomando este $\delta > 0$, se tiene que $\mathcal{H}(\omega(x, f), \omega(y, f)) < \varepsilon$ siempre que $d(x, y) < \delta$. Sea $x_0 \in \omega(x, f)$, entonces existe una sucesión creciente $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = x_0$. Luego, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_i}(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ para $i \geq i_0$. Por la compacidad de X , tenemos que para la sucesión $(f^{n_i}(y))_{i \in \mathbb{N}}$ existe una subsucesión $(f^{n_{i_j}}(y))_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}}(y) = y_0 \in X$. Es claro que $y_0 \in \omega(y, f)$ y podemos tomar $j_0 > i_0$ tal que si $j \geq j_0$, entonces $d(f^{n_{i_j}}(y), y_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Así, para $j \geq j_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_0) &\leq d(x_0, f^{n_{i_j}}(x)) + d(f^{n_{i_j}}(x), f^{n_{i_j}}(y)) + d(f^{n_{i_j}}(y), y_0) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De lo anterior, $\omega(x, f) \subseteq N_d(\omega(y, f); \varepsilon)$. De forma análoga vemos que $\omega(y, f) \subseteq N_d(\omega(x, f); \varepsilon)$ y con esto, $\mathcal{H}(\omega(x, f), \omega(y, f)) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$, con lo cual concluimos que ω_f es continua. \square

Es sencillo dar ejemplos que muestran que el recíproco del Teorema 3.1.5 no es cierto en general (ver Ejemplo 2.2.10). En la proposición que sigue se puede ver que la igualdad de los conjuntos omega límite nos permite concluir que la función ω_f es semicontinua superiormente.

Proposición 3.1.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$, entonces ω_f es usc.*

Demostración. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto en X tal que $\omega_f(p) \subseteq U$. Supongamos que existe $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = p$ y $\omega_f(x_i) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $y_i \in \omega_f(x_i) \cap (X \setminus U)$. Por la compacidad de $X \setminus U$, existe $y_0 \in X \setminus U$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y_0$ (pasando a una subsucesión de $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de ser necesario). Como $y_i \in \omega_f(x_i)$, entonces existe una sucesión creciente $(l_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{l_n^i}(x_i) = y_i$. Como $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = p$, se sigue fácilmente que existe una sucesión creciente $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{r_n}(x_n) = p$. Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, de lo anterior se tiene que $y_0 \in \Omega(p, f) = \omega(p, f) \subseteq U$. De lo cual, $y_0 \in U$, obteniéndose así una contradicción. Luego, ω_f es usc. \square

Si todo punto del espacio métrico compacto X pertenece al conjunto de puntos recurrentes, esto implica que la función omega límite ω_f es semicontinua inferiormente.

Proposición 3.1.7. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $X = R(f)$, entonces ω_f es lsc.

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y U un abierto en X tal que $\omega_f(x_0) \cap U \neq \emptyset$ y mostremos que existe un abierto V en X tal que $x_0 \in V$ y $\omega_f(p) \cap U \neq \emptyset$ para todo $p \in V$. Si no existe tal abierto, entonces podemos formar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $\omega_f(x_n) \subseteq X \setminus U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\omega_f(x_0) \cap U \neq \emptyset$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x_0) \in U$. De esto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^m(x_n) = f^m(x_0)$. De igual forma, como $X = R(f)$ y $\omega_f(x_n) \subseteq X \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f^m(x_n) \in X \setminus U$ y por tanto, por ser $X \setminus U$ cerrado y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^m(x_n) = f^m(x_0)$, $f^m(x_0) \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción. Concluimos así que ω_f es lsc. \square

Dado que todo punto periódico de una función es a su vez un punto recurrente, se obtiene inmediatamente el siguiente corolario de la proposición anterior.

Corolario 3.1.8. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $X = \text{Per}(f)$, entonces ω_f es lsc.

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos en el Lema 3.1.3, la Proposición 3.1.6 y el Corolario 3.1.8, para el caso en que todo punto del espacio sea periódico.

Teorema 3.1.9. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $X = \text{Per}(f)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$.
- ii) ω_f es continua.
- iii) ω_f es usc.

3.2. EQUICONTINUIDAD EN DENDRITAS

Las propiedades que se demostrarán ahora son para el caso en que X es una dendrita y el objetivo es dar una caracterización para la equicontinuidad en dendritas. Este resultado principal será enunciado en el Teorema 3.2.11. En el Teorema 3.2.13, se da respuesta afirmativa a la Pregunta 4.4 en ².

En el próximo lema se demuestra que la conexidad del conjunto de puntos periódicos es una condición necesaria para que coincidan los conjuntos omega límite.

Lema 3.2.1. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$, entonces $\text{Fix}(f^n)$ es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{Per}(f)$ también es un conjunto conexo.*

Demostración. Sean $a, b \in \text{Fix}(f^n)$ y veamos que $[a, b] \subseteq \text{Fix}(f^n)$ (Teorema 1.2.20). Sea $y \in (a, b)$. Como X es dendrita, $y \in [a, f^n(y)]$ ó $y \in [f^n(y), b]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $y \in [a, f^n(y)]$. Como $a \in \text{Fix}(f^n)$, $\{a, f^n(y)\} \subseteq f^n([a, y])$ y por tanto, por ser $f^n([a, y])$ dendrita (Corolario 1.2.16), $[a, f^n(y)] \subseteq f^n([a, y])$. Luego, existe $x_1 \in [a, y]$ tal que $f^n(x_1) = y$. De igual forma, vemos que $[a, y] \subseteq f^n([a, x_1])$ y podemos elegir $x_2 \in [a, x_1]$ tal que $f^n(x_2) = x_1$. Así, inductivamente, construimos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ de modo que $f^n(x_k) = x_{k-1}$, $(f^n)^k(x_k) = y$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$, para algún $p \in [a, b]$. De esto, $y \in \Omega(p, f^n) \subseteq \Omega(p, f) = \omega(p, f)$. Además, $f^n(p) = f^n(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^n(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k-1} = p$ y de esto, $\omega(p, f) = \mathcal{O}(p, f)$ es finito. Como $y \in \omega(p, f)$, tenemos que $f^n(y) = y$ y así, $[a, b] \subseteq \text{Fix}(f^n)$. Puesto que $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ (ver Teorema 1.2.22), $\text{Per}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(f^n)$ y $\text{Fix}(f) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(f^n)$, concluimos que $\text{Per}(f)$ también es un conjunto conexo. \square

En una dendrita X , si $f: X \rightarrow X$ no es una función equicontinua en algún punto $x \in X$, entonces existe un arco α , con puntos finales en $\omega_f(x)$ y $\Omega_f(x) \setminus \omega_f(x)$, contenido en $\Omega_f(x)$.

Lema 3.2.2. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\Omega(x, f)$ es totalmente desconexo para cada $x \in X$, entonces f es equicontinua.

Demostración. Supongamos que f no es equicontinua. Entonces existen $x_0 \in X$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sucesiones tales que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = a$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = b$, para algunos $a, b \in X$ con $d(a, b) > 0$. De esto, tenemos que $a \in \Omega(x_0, f)$ y $b \in \omega(x_0, f)$. Veamos que $[a, b] \subseteq \Omega(x_0, f)$. Sea $y \in (a, b)$. Como $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = a$, $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = b$ y X es una dendrita, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in [f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(x_0)]$ para cada $i \geq i_0$. Además, como $\{f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(x_0)\} \subseteq f^{n_i}([x_i, x_0])$ y $f^{n_i}([x_i, x_0])$ es dendrita (Corolario 1.2.16), se tiene que $[f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(x_0)] \subseteq f^{n_i}([x_i, x_0])$. Luego, para $i \geq i_0$, existe $y_i \in [x_i, x_0]$ tal que $f^{n_i}(y_i) = y$. Nótese que $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = x_0$ y por tanto, $y \in \Omega(x_0, f)$. Así, $[a, b] \subseteq \Omega(x_0, f)$, lo cual contradice que $\Omega(x_0, f)$ es totalmente desconexo. \square

En la demostración que sigue, vemos que la conexidad y densidad del conjunto $\text{Per}(f)$, con f definida en una dendrita, garantiza que todo punto de corte de la dendrita sea periódico y además que f es un homeomorfismo.

Lema 3.2.3. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva. Si $X = \overline{\text{Per}(f)}$ y $\text{Per}(f)$ es conexo, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos primero que $X \setminus \text{End}(X) \subseteq \text{Per}(f)$. Si existiera $x_0 \in [X \setminus \text{End}(X)] \cap [X \setminus \text{Per}(f)]$, entonces por el Teorema 1.2.19, se tiene que $X \setminus \{x_0\} = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de X . De esto, $\text{Per}(f) \subseteq X \setminus \{x_0\} \subseteq U \cup V$ y por la conexidad de $\text{Per}(f)$, $\text{Per}(f) \subseteq U$ ó $\text{Per}(f) \subseteq V$. Como $\overline{\text{Per}(f)} = X$, $U = \emptyset$ ó $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción y por tanto, $X \setminus \text{End}(X) \subseteq \text{Per}(f)$.

Por ser X un espacio métrico compacto, tenemos que f es una función cerrada y basta con demostrar que f es inyectiva para concluir que f sea un homeomorfismo. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $f(x) = f(y)$ y $[x, y]$ el único arco en X que une

x y y . Por el Teorema 6.6 de ⁶, sabemos que el continuo $f([x, y])$ tiene al menos dos puntos de no corte. Sea z un punto de no corte de $f([x, y])$ distinto de $f(x)$. Entonces, existe $p \in (x, y)$ tal que $f(p) = z$, y podemos escoger un arco $\alpha \subseteq (x, y)$ de modo que $p \in \text{Cut}(\alpha)$. Es claro que $\alpha \cap \text{End}(X) = \emptyset$ y por tanto, $\alpha \subseteq \text{Per}(f)$. Nótese que $f|_{\text{Per}(f)}$ es inyectiva, pues si $a_1, a_2 \in \text{Per}(f)$ son tales que $f(a_1) = f(a_2)$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n > 1$ tales que $f^m(a_1) = a_1$ y $f^n(a_2) = a_2$. Luego, $a_1 = f^{mn-1}(f(a_1)) = f^{mn-1}(f(a_2)) = a_2$ y $f|_{\text{Per}(f)}$ es inyectiva. De lo anterior, $f|_{\alpha}: \alpha \rightarrow f(\alpha)$ es un homeomorfismo; una contradicción, pues $\alpha \setminus \{p\}$ no es conexo y $f(\alpha) \setminus \{f(p)\} = f(\alpha) \setminus \{z\}$ es conexo. Así, f es inyectiva y por tanto, un homeomorfismo. \square

Dadas X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua, la minimalidad de los conjuntos $\omega(x, f)$ es una condición necesaria para la igualdad de $\omega(x, f)$ y $\Omega(x, f)$. En el teorema que sigue probamos este hecho.

Lema 3.2.4. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$, entonces $\omega(y, f) = \omega(x, f)$ para cada $y \in \omega(x, f)$.*

Demostración. Como $y \in \omega(x, f)$, existe una sucesión creciente $(m_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{m_i}(x) = y$. Usando el hecho de que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante (Proposiciones 2.1.9 y 2.1.8), es claro que $\omega(y, f) \subseteq \omega(x, f)$. Además, dado $z \in \omega(x, f)$, existe una sucesión $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = z$. Como $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son sucesiones crecientes, podemos formar subsucesiones $(m_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y $(n_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que satisfacen que $r_j = n_{i_j} - m_{i_j} > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y además la sucesión $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sea creciente. Sea $x_j = f^{m_{i_j}}(x)$, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = y$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{r_j}(x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j} - m_{i_j}}(f^{m_{i_j}}(x)) = z$. Luego, $z \in \Omega(y, f) = \omega(y, f)$ y así $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. \square

Es fácil ver que el recíproco del Lema 3.2.4 no es cierto. Basta con considerar el Ejemplo 2.2.14, en el cual todo conjunto $\omega(x, f)$ es minimal, pero $\omega(1, f) \neq \Omega(1, f)$.

Se prueba ahora que, en dendritas, la igualdad de los conjuntos omega límite implica que el conjunto de puntos periódicos sea denso.

Teorema 3.2.5. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$, entonces $X = \overline{\text{Per}(f)}$.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus \overline{\text{Per}(f)} \neq \emptyset$. Como $f(\text{Per}(f)) = \text{Per}(f)$, tenemos que $f(\overline{\text{Per}(f)}) = \overline{\text{Per}(f)}$.

Afirmación 3.2.6. *Para todo $x \in X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$, $\omega(x, f) \cap \overline{\text{Per}(f)} = \emptyset$.*

Supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ tal que $\omega(x_0, f) \cap \overline{\text{Per}(f)} \neq \emptyset$. Sea $y_0 \in \omega(x_0, f) \cap \overline{\text{Per}(f)}$, entonces existe una sucesión creciente $(n : i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0$. Usando el hecho de que f es sobreyectiva, podemos formar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $f(x_1) = x$ y $f(x_{i+1}) = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X , existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = z_0$ para algún $z_0 \in X$. De esto, $x_0 \in \Omega(z_0, f)$, pues $f^{n_i}(x_{n_i}) = x$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = z_0$. Por tanto, $x_0 \in \omega(z_0, f) = \Omega(z_0, f)$. Aplicando dos veces el Lema 3.2.4, obtenemos que $\omega(x_0, f) = \omega(z_0, f)$ y $\omega(y_0, f) = \omega(z_0, f)$.

Luego, $x_0 \in \omega(y_0, f)$. Sin embargo, dado que $y_0 \in \overline{\text{Per}(f)}$ y $f(\overline{\text{Per}(f)}) = \overline{\text{Per}(f)}$, $\omega(y_0, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$. Esto contradice que $x_0 \notin \overline{\text{Per}(f)}$. Así, $\omega(x, f) \cap \overline{\text{Per}(f)} = \emptyset$ para todo $x \in X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$.

Afirmación 3.2.7. *Existe una componente W de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ tal que $f^m(W) \subseteq W$ para algún $m \in \mathbb{N}$.*

Sean $x_0 \in X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ y $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Entonces, existe una sucesión $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0$. Sea W la componente de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ tal que $y_0 \in W$. Por la conexidad local de X , se sigue que W es abierta. Luego, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_i}(x_0) \in W$ para todo $i \geq i_0$. Sean $s, t \in \mathbb{N}$ tales que $s, t \geq i_0$ y $n_s < n_t$. Tomando $m = n_t - n_s$, tenemos que $f^{n_s}(x_0) \in W$ y $f^{n_t - n_s}(f^{n_s}(x_0)) = f^{n_t}(x_0) \in W$. De esto, $f^m(W) \cap W \neq \emptyset$. Por la Afirmación 3.2.6 y el hecho de que $f(\overline{\text{Per}(f)}) = \overline{\text{Per}(f)}$,

concluimos que $f^m(W) \subseteq X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Por tanto, $f^m(W) \subseteq W$, pues $f^m(W)$ es un conjunto conexo en $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ y W es una componente de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$. Esto prueba la Afirmación 3.2.7

Además, tenemos que $\overline{\text{Per}(f)}$ es conexo (Teorema 3.2.1) y por el Lema 2.2.16, existe $p_0 \in X$ tal que $\overline{W} \cap \overline{\text{Per}(f)} = \{p_0\}$, $\overline{W} = W \cup \{p_0\}$ y $p_0 \in \text{End}(\overline{W})$.

Sea $x \in W$. Por la Afirmación 3.2.7, $f^{km}(x) \in W$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la Afirmación 3.2.6, $\omega(x, f^m) \subseteq W$. Sea H el conjunto definido como sigue:

$$H = \bigcap \{L \in \mathcal{C}(X) : \omega(x, f^m) \subseteq L\}.$$

Como X es dendrita, H es un continuo (Teorema 10.10 de ⁶) y $p_0 \notin H$, por el Lema 2.2.15. Así, $H \subseteq W$. Dado que $f^m(\omega(x, f^m)) = \omega(x, f^m)$ (Proposición 2.1.8), se tiene que $H \subseteq f^m(H)$. De esto, $(f^{km}(H))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de continuos y además, por la Afirmación 3.2.6, $p_0 \notin f^{km}(H)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, $f^{km}(H) \subseteq W$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (Afirmación 3.2.7).

Sea $R = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{km}(H) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{km}(H)}$. Nótese que $R \subseteq \overline{W} = W \cup \{p_0\}$ y además, $f^m(R) = R$. Veamos que $p_0 \notin R$. Si se supone que $p_0 \in R$, existe una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{km}(H)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $q_n \in H$ de modo que $p_n = f^{m l_n}(q_n)$ para algún $l_n \in \mathbb{N}$. Como H es compacto, existe una subsucesión $(q_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} q_{n_i} = q_0$ para algún $q_0 \in H$. Luego, $p_0 \in \Omega(q_0, f^m) \subseteq \Omega(q_0, f) = \omega(q_0, f)$, lo cual contradice la Afirmación 3.2.6. Así, $p_0 \notin R$. Nótese que R es una dendrita (Corolario 1.2.16). Además, como $\text{Fix}(f^m|_R) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq X \setminus R$, $f^m|_R: R \rightarrow R$ es una función continua con $\text{Fix}(f^m|_R) = \emptyset$. Esto contradice el Teorema 1.2.22. Concluimos así que $X = \overline{\text{Per}(f)}$.

□

Corolario 3.2.8. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$, entonces $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

Demostración. Sea $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. Es fácil ver que $f(I) = I$ y por tanto, $g = f|_I: I \rightarrow I$ es una función continua y sobreyectiva. Dado $p \in I$, se tiene que:

$$i) \omega(p, f) = \omega(p, g);$$

$$ii) \omega(p, g) \subseteq \Omega(p, g);$$

$$iii) \Omega(p, g) \subseteq \Omega(p, f).$$

Luego, $\omega(p, g) = \Omega(p, g)$ para todo $p \in I$ y por el Teorema 3.2.5, $\overline{\text{Per}(g)} = I$. Además, es claro que $\text{Per}(f) \subseteq I$ y por tanto, $\overline{\text{Per}(g)} = \overline{\text{Per}(f)}$. Así, $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. \square

Una demostración del siguiente teorema puede ser vista en ¹². Esta propiedad de los conjuntos $\omega(x, f)$ será útil en la demostración del Teorema 3.2.10.

Teorema 3.2.9. (Teorema 3.8 de ¹²) Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Entonces, para todo $x \in X$, $\omega(x, f)$ es una órbita periódica ó un conjunto de Cantor.

En el Lema 3.1.4 vimos que si $f: X \rightarrow X$ es equicontinua con X métrico compacto, entonces para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\omega(x, f^n) = \Omega(x, f^n)$. El teorema que sigue asegura que en dendritas el recíproco de este lema es verdad.

Teorema 3.2.10. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$, entonces f es equicontinua.

Demostración. Sea $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. Por el Teorema 3.2.1 y el Corolario 3.2.8, tenemos que $\text{Per}(f)$ es conexo y $\overline{\text{Per}(f)} = I$. Luego, I es una dendrita (Teorema 1.2.16) y $f|_I: I \rightarrow I$ es un homeomorfismo por el Lema 3.2.3. Por el Teorema 3.2.9, $\omega(p, f)$ es totalmente desconexo para cada $p \in I$. Sean $x \in X$ y $y \in \omega(x, f)$, entonces $y \in I$ ya

¹² G. ACOSTA, P. ESLAMI y L. OVERSTEEGEN. "On open maps between dendrites". En: *Houston J. Math.* 33 (2007), págs. 753-770.

que $\omega(x, f) \subseteq I$ para cada $x \in X$. Luego, $\omega(y, f)$ es totalmente desconexo y además, por el Lema 3.2.4 $\omega(x, f) = \omega(y, f)$. Así, $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ es totalmente desconexo y concluimos, por el Teorema 3.2.2, que f es equicontinua. \square

Como consecuencia de las propiedades mostradas antes para dendritas, se tiene el siguiente teorema que nos da una caracterización respecto a la equicontinuidad de una función $f: X \rightarrow X$ definida en una dendrita X .

Teorema 3.2.11. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- i) ω_f es continua y $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$;*
- ii) $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$;*
- iii) f es equicontinua.*

Demostración. Por el Lema 3.1.3, tenemos que *i)* implica *ii)*. Por el Teorema 3.2.10 y el Lema 3.1.4, se tiene la equivalencia entre *ii)* y *iii)*. Como *ii)* y *iii)* son equivalentes, del Teorema 3.1.5 y el Corolario 3.2.8 se sigue que *ii)* implica *i)*. \square

Con el Lema 3.1.4 y el teorema anterior, se deduce fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 3.2.12. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$, entonces $\omega(x, f^n) = \Omega(x, f^n)$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.*

Por el Teorema 3.2.11, sabemos que en una dendrita la equicontinuidad de la función f es equivalente a la igualdad de los conjuntos omega límite. Usando este hecho, el teorema que sigue responde afirmativamente la Pregunta 4.4 planteada en ².

Teorema 3.2.13. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva. Si $\text{Per}(f)$ es conexo y denso, entonces $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.3, tenemos que f es un homeomorfismo. Sea $x_0 \in X$, entonces es claro que $\omega(x_0, f) \subseteq \Omega(x_0, f)$. Supongamos que existe $y_0 \in \Omega(x_0, f) \setminus \omega(x_0, f)$. Luego, existen sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ creciente, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x_n) = y_0$. Como $y_0 \notin \omega(x_0, f)$ y $\omega(x_0, f)$ es compacto, podemos suponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x_0) = z_0$, con $z_0 \in \omega(x_0, f)$ y $z_0 \neq y_0$.

Afirmación 3.2.14. *Si $c \in (z_0, y_0)$, existen sucesiones $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0$ y $f^{k_n}(c_n) = c$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Sea $c \in (z_0, y_0)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x_0) = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x_n) = y_0$ y X es dendrita, tenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c \in [f^{m_n}(x_0), f^{m_n}(x_n)]$ para todo $n \geq n_1$. Nótese que $[f^{m_n}(x_0), f^{m_n}(x_n)] \subseteq f^{m_n}([x_0, x_n])$, pues $f^{m_n}([x_0, x_n])$ es una dendrita (Teorema 1.2.16). Así, para todo $n \geq n_1$, existe $c_n \in [x_0, x_n]$ tal que $f^{m_n}(c_n) = c$. Luego, tomando $k_i = m_{n_i}$, se tiene que $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = x_0$ y $f^{k_i}(c_i) = c$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Así, como $y_0 \notin \omega(x_0, f)$, podemos escoger $d \in (z_0, y_0) \cap (X \setminus \omega(x_0, f))$. Por la Afirmación 3.2.14, existen sucesiones $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = x_0$ y $f^{k_n}(d_n) = d$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $d_n \notin \text{End}(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues como $d \in (z_0, y_0)$, $d \notin \text{End}(X)$ y por tanto, $d \in \text{Cut}(X)$ (Teorema 1.2.19). Así, por ser f^{k_n} un homeomorfismo, $d_n \in \text{Cut}(X)$ y $d_n \notin \text{End}(X)$. Luego, $d_n \in \text{Per}(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver demostración del Lema 3.2.3). Como $d \in \mathcal{O}(d_n, f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathcal{O}(d_n, f) = \mathcal{O}(d, f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y de esto se sigue que $x_0 \in \mathcal{O}(d, f)$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_0) = d$ y $d \in \omega(x_0, f)$, lo cual es una contradicción. De lo anterior, concluimos que $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$.

□

Para dendritas hemos visto antes algunas condiciones que implican la equicontinuidad de una función. Otra condición suficiente para la equicontinuidad de una función definida en una dendrita es que todo punto sea periódico, como se evidencia en seguida.

Teorema 3.2.15. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si $X = \text{Per}(f)$, entonces f es equicontinua.

Demostración. Veamos que $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$ y con esto, por el Teorema 3.2.11, podemos concluir que f es equicontinua. Sea $x \in X$, es claro que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$. Además, si suponemos que $\Omega(x, f) \setminus \omega(x, f) \neq \emptyset$, existe $y \in \Omega(x, f) \setminus \omega(x, f)$ y sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = y$. Como $x \in \text{Per}(f)$, tenemos que $\omega(x, f) = \mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $\{0, \dots, k-1\}$ es finito, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para todo $i \in \mathbb{N}$, $n_i \equiv l \pmod{k}$ para algún $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Sea $z \in (f^l(x), y)$. Dado que X es dendrita y $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_i) = y$, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in [f^l(x), f^{n_i}(x_i)]$ para cada $i \geq i_1$. Nótese que $[f^l(x), f^{n_{i_1}}(x_{i_1})] \subseteq f^{n_{i_1}}([x, x_{i_1}])$ (Teoremas 1.2.16 y 1.2.5). Luego, existe $p_1 \in [x, x_{i_1}]$ tal que $f^{n_{i_1}}(p_1) = z$. Como $z \in (f^l(x), y)$ y $f^l(x) = f^{n_{i_1}}(x)$, tenemos que $p_1 \neq x$ y por tanto, podemos elegir $i_2 > i_1$ de modo que $p_1 \notin [x, x_{i_2}]$. Puesto que $[f^l(x), f^{n_{i_2}}(x_{i_2})] \subseteq f^{n_{i_2}}([x, x_{i_2}])$, existe $p_2 \in [x, x_{i_2}]$ tal que $f^{n_{i_2}}(p_2) = z$. De este modo, formamos inductivamente un conjunto infinito $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ de modo que $z \in \mathcal{O}(p_i, f)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De esto, $p_i \in \mathcal{O}(z, f)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, lo cual contradice que $z \in \text{Per}(f)$. Así, concluimos que $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$ y f es equicontinua. \square

Pregunta 3.2.16. Sean X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. ¿Si $X = \text{Per}(f)$, entonces f es equicontinua?

Con el siguiente ejemplo se puede ver que en $i)$ del Teorema 3.2.11 es necesaria la hipótesis de que $\overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

Ejemplo 3.2.17. Sea $Y = I \cup (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k)$, donde $I = [-1, 1] \times \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$

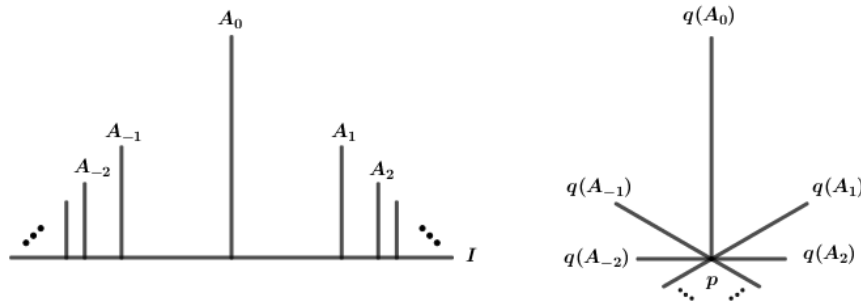
$$A_k = \begin{cases} \{1 - \frac{1}{k+1}\} \times [0, \frac{1}{k+1}], & \text{si } k \geq 0; \\ \{-1 + \frac{1}{1-k}\} \times [0, \frac{1}{1-k}], & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

No es difícil ver que Y es una dendrita (Figura 5) y defínase $g: Y \rightarrow Y$ de modo que:

- i) g es un homeomorfismo;
- ii) $g(I) = I$ y;
- iii) para todo $k \in \mathbb{Z}$, $g|_{A_k}: A_k \rightarrow A_{k+1}$ es un homeomorfismo.

Se tiene que $\text{Fix}(g) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Sean $X = Y/I$, $q: Y \rightarrow X$ la función cociente $yp = q(I)$. Es sencillo verificar que X es una dendrita (Figura 5). Además, tomando $f: X \rightarrow X$ de modo que $q \circ g = f \circ q$, se tiene que f es un homeomorfismo y f no es equicontinua. También, $\text{Per}(f) = \{p\}$ y $\omega(x, f) = \{p\}$ para cada $x \in X$. De esto, ω_f es continua, pero $\Omega(p, f) = X$.

Figura 5. Dendritas Y y X en el Ejemplo 3.2.17



Teorema 3.2.18. Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Si ω_f es continua y $X \setminus \overline{\text{Per}(f)} \neq \emptyset$, entonces $f^m(W) \cap W = \emptyset$, para cada componente W de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $\omega(x, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Sea W una componente de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(W) \cap W \neq \emptyset$. Por ser f un homeomorfismo, se tiene que $f(\overline{\text{Per}(f)}) = \overline{\text{Per}(f)}$ y $f^k(W)$ es una componente de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f^m(W) = W$. Consideremos $g|_{\overline{W}}: \overline{W} \rightarrow \overline{W}$. Entonces, g es un homeomorfismo y \overline{W} es una dendrita (Teorema 1.2.16). Luego, por el Teorema 1.2.22, $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$. Como

$W \cap \text{Per}(f) = \emptyset$, $\text{Fix}(g) \subseteq \overline{W} \setminus W$ y por el Teorema 1.2.19, se sigue que $\text{Fix}(g) \subseteq \text{End}(\overline{W})$.

Por el Lema 3.5 de ¹², $|\text{Fix}(g)| \geq 2$. Sean $x_0, y_0 \in \text{Fix}(g) \cap \text{End}(\overline{W})$ con $x_0 \neq y_0$ y α el único arco en \overline{W} que une x_0 y y_0 . Puesto que \overline{W} es una dendrita y g es un homeomorfismo, tenemos que $g(\alpha) = \alpha$. Como $\text{Fix}(g) \subseteq \text{End}(\overline{W})$, tenemos además que $(\alpha \setminus \{x_0, y_0\}) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$. Nótese que para todo $x \in \alpha \setminus \{x_0, y_0\}$ se cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x_0$ o $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = y_0$. Por ser α un arco y $\text{Fix}(g) \cap \alpha = \{x_0, y_0\}$, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = x_0$ para cada $x \in \alpha \setminus \{x_0, y_0\}$. Luego $\omega(x, g) = \{x_0\}$ y por tanto, $\omega(x, f) = \omega(x_0, f)$ para todo $x \in \alpha \setminus \{x_0, y_0\}$. Así, por la continuidad de ω_f , $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$. Veamos que esto no es posible.

Si $m = 1$, tenemos que $f(W) = W$ y $x_0, y_0 \in \text{Fix}(f)$, de donde $\omega(x_0, f) \neq \omega(y_0, f)$. Supongamos que $m > 1$ y $f^k(W) \cap W = \emptyset$ para todo $k < m$. Como $x_0 \in \text{Per}(f)$, $\omega(x_0, f) = \mathcal{O}(x_0, f)$ y por ende, existe $k_1 \in \{1, \dots, m-1\}$ tal que $f^{k_1}(x_0) = y_0$. Nótese que $\alpha, f(\alpha), \dots, f^{m-1}(\alpha)$ son arcos distintos tales que : Si $f^k(\alpha) \cap f^l(\alpha) \neq \emptyset$ para $k \neq l$, entonces $|f^k(\alpha) \cap f^l(\alpha)| = 1$ y $f^k(\alpha) \cap f^l(\alpha) \subseteq \mathcal{O}(x_0, f)$. De esto, $\alpha \cap f^{k_1}(\alpha) = \{f^{k_1}(x_0)\}$. No es difícil ver que existen k_1, k_2, \dots, k_n tales que $f^{k_i}(\alpha) \cap f^{k_{i+1}}(\alpha) = \{f^{k_i}(x_0)\}$ y $\alpha \cap f^{k_n}(\alpha) = \{x_0\}$. Luego, $\alpha, f^{k_1}(\alpha), \dots, f^{k_n}(\alpha)$ es una curva cerrada simple, lo cual contradice que X es una dendrita. Concluimos así que $f^m(W) \cap W = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Finalmente, supongamos que $\omega(x, f) \cap (X \setminus \overline{\text{Per}(f)}) \neq \emptyset$ para algún $x \in X$. Sean $y \in \omega(x, f) \cap (X \setminus \overline{\text{Per}(f)})$ y W la componente de $X \setminus \overline{\text{Per}(f)}$ que contiene a y . Por la conexidad local de X , tenemos que W es abierto y por tanto, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m - n > 0$ y $f^m(x), f^n(x) \in W$. Luego $f^{m-n}(f^n(x)) = f^m(x)$ y $f^{m-n}(W) \cap W \neq \emptyset$, que contradice lo probado anteriormente. Por tanto, $\omega(x, f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$ para todo $x \in X$. □

Ahora, se define el odómetro o máquina sumadora en el conjunto de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Sea $h: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida del siguiente modo: Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es de valor constante 1, entonces $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}})$ es la sucesión constante de valor 0. En caso contrario, llamando $m = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i = 0\}$, $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i < m; \\ 1, & \text{si } i = m; \\ x_i, & \text{si } i > m. \end{cases}$$

Algunas propiedades conocidas sobre la función h son las siguientes (ver ¹³): h es un homeomorfismo, $\text{Per}(h) = \emptyset$ y $\omega(p, h) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ para todo $p \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Además, para $c = (c_1, \dots, c_n) \in \{0, 1\}^n$ y $[c] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_i = c_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$, es fácil ver que dados $i, j \in \{1, \dots, 2^n\}$ con $i \neq j$, $h^i([c]) \cap h^j([c]) = \emptyset$ y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{2^n} h^i([c])$. De lo dicho antes, se sigue que h es una función equicontinua. Se dice que un continuo es hereditariamente unicoherente si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos es un conjunto conexo. Es sencillo verificar que un continuo de Peano es una dendrita si, y solo si, es hereditariamente unicoherente. Un dendroide es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Un abanico es un dendroide con un único punto de ramificación. De lo anterior, es claro que toda dendrita es un dendroide y en el ejemplo que se presenta a continuación vemos que el Teorema 3.2.11 no es válido en general para un dendroide.

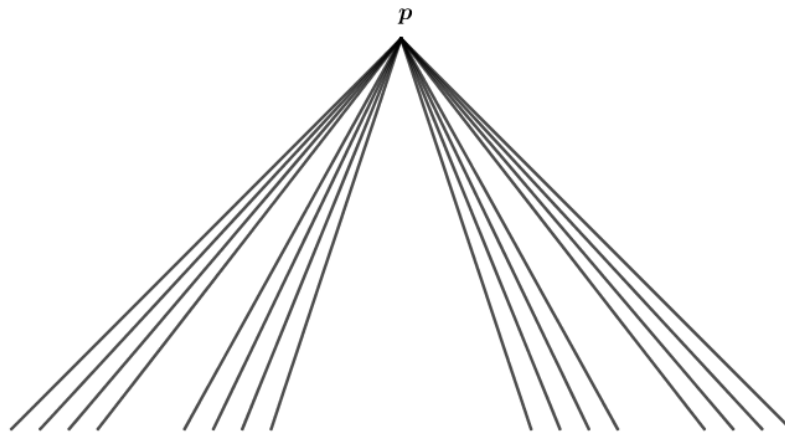
Ejemplo 3.2.19. Sean $X = (\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]) / (\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{1\})$ el abanico de Cantor (ver Figura 6), p la única clase no degenerada de X y h el odómetro o máquina sumadora, como se definió antes. Definamos $f: X \rightarrow X$ como sigue:

¹³ J. BANKS. "Chaos for induced hyperspace maps". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 25 (2005), págs. 681-685.

$$f(\alpha) = \begin{cases} p, & \text{si } \alpha = p; \\ (h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t), & \text{si } \alpha = ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t) \text{ y } t \in [0, 1). \end{cases}$$

En este caso, tenemos que f es un homeomorfismo con $\text{Per}(f) = \{p\}$ y además, por la equicontinuidad de h , f es equicontinua.

Figura 6. Abanico de Cantor



En el siguiente ejemplo mostramos una dendrita X y un homeomorfismo $f: X \rightarrow X$ tal que f es equicontinua y $\text{Per}(f) \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

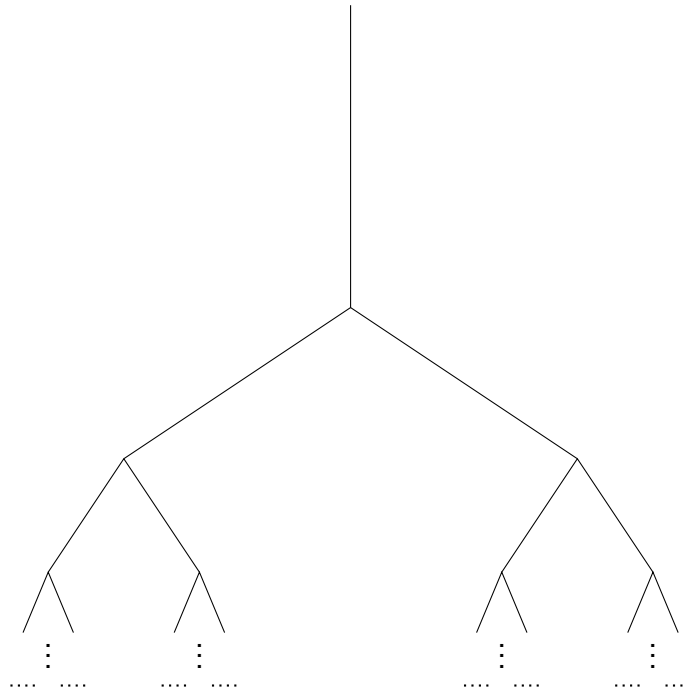
Ejemplo 3.2.20. Sean $Y = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ el cilindro del conjunto de Cantor, h el odómetro o máquina sumadora y $g: Y \rightarrow Y$ dada por $g((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t) = (h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, t)$ para cada $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y cada $t \in [0, 1]$. Dados $(x, s), (y, t) \in Y$, definimos la relación de equivalencia $(x, s) \sim (y, t)$ si, y solo si, $s = t$ y:

1. Si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $(x, s) \sim (y, t)$ para todo $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$
2. Si $t \in [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{m+1})$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x, s) \sim (y, t)$ si existe $c \in \{0, 1\}^n$ tal que $x, y \in [c]$.

Tenemos que la relación \sim genera una partición semicontinua superiormente en Y y por tanto, por el Teorema 3.10 de ⁶, $X = Y / \sim$ es un continuo. En la Figura 7

puede verse la dendrita X definida antes, conocida como dendrita de Gehmann. Sea $q: Y \rightarrow X = Y/\sim$ la función cociente asociada a \sim . Sabemos que $h: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es equicontinua y además, dado $c = (c_1, \dots, c_n) \in \{0, 1\}^n$, $h^i([c]) \cap h^j([c]) = \emptyset$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, 2^n\}$. De esto, se puede definir $f: X \rightarrow X$ tal que $f \circ q = q \circ g$ con f equicontinua. Notemos que para esta función f , se tiene que $\text{Per}(f) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{1\} \neq X = \overline{\text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$.

Figura 7. Dendrita de Gehmann



BIBLIOGRAFÍA

- ACOSTA, G., P. ESLAMI y L. OVERSTEEGEN. "On open maps between dendrites". En: *Houston J. Math.* 33 (2007), págs. 753-770 (vid. págs. 66, 71).
- BANKS, J. "Chaos for induced hyperspace maps". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 25 (2005), págs. 681-685 (vid. pág. 72).
- BRUCKNER, A. y J. CEDER. "Chaos in terms of the map $x \rightarrow \omega(x, f)$ ". En: *Pacific Journal of Mathematics* 156 (1992), págs. 63-96 (vid. pág. 11).
- CAMARGO, J. y J. CANCINO. "The ω -limit function on dendrites". Preprint (2019). (vid. págs. 31, 38).
- CAMARGO, J., M. RINCÓN y C. UZCÁTEGUI. "Equicontinuity of maps on dendrites". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 126 (2019), págs. 1-6 (vid. págs. 11, 13, 56, 61, 67).
- FUGATE, J. B., G. R. GORDH y LUM LEWIS. "Arc-Smooth Continua". En: *Mathematics Faculty Publications and Presentations* 2 (1981) (vid. pág. 54).
- KING, J. y H. MÉNDEZ. *Sistemas Dinámicos Discretos*. Editorial UNAM, México, 2014 (vid. págs. 18, 30, 35).
- MUNKRES, J. R. *Topology a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975 (vid. pág. 41).
- NADLER, S. B. Jr. *Continuum Theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1992 (vid. págs. 14, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27-29, 41, 42, 47, 53, 63, 65, 73).

- NADLER, S. B. Jr. *Hyperspaces of sets. A text with research questions*. Aportaciones Matemáticas, México, 2006 (vid. pág. 44).
- SUN, T., Z. CHEN y H. XI. "Equicontinuity of dendrite maps". En: *Chaos, Solitons and Fractals* 69 (2014), págs. 10-13 (vid. pág. 11).
- SUN, T., Y. ZHAN y X. ZHAN. "Equicontinuity of graph maps". En: *Bull. Austral. Mathl Soc.* 71 (2005), págs. 61-67 (vid. pág. 11).
- SUN, T. X., G. W. SU y H. J. XI. "Equicontinuity of Maps on a Dendrite with Finite Branch Points". En: *Acta Mathematica Sinica* 33.8 (2017), págs. 1125-1130 (vid. pág. 11).