

# ESPACIOS Y CONVERGENCIA DE CONJUNTOS DIFUSOS

Nicolás Cáceres Moreno

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Bucaramanga  
2006

# ESPACIOS Y CONVERGENCIA DE CONJUNTOS DIFUSOS

Nicolás Cáceres Moreno

Trabajo de grado presentado como  
requisito parcial para optar al título de  
*Licenciado en Matemáticas*

Director

Dr. Élder Jesús Villamizar Roa

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Licenciatura en Matemáticas  
Bucaramanga  
2006

*A las tres mujeres más importantes y especiales de mi vida:*

*A mi madre,*

*A mi abuela y*

*Adriana.*

---

# Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- A **Dios**.
- A la profesora **Rosalba Osorio**, quien con su cariño, esfuerzo, amor y comprensión me impulsó a seguir adelante.
- Al profesor **Elder J. Villamizar**, por su colaboración, por su apoyo incondicional, su paciencia y su acertada orientación en el desarrollo de ésta monografía.
- Al profesor **Edilberto Reyes**, porque fué uno de los mayores aportes en mi formación tanto académica como personal.
- Al profesor **Marko Rojas M.**, por su valiosa colaboración, aportes y comentarios que me permitieron desarrollar satisfactoriamente ésta monografía.
- A mis **hermanos**, quienes han compartido conmigo buenos y malos momentos durante mi vida.

**TITLE:** SPACES AND CONVERGENCE OF FUZZY SETS<sup>1</sup>

**AUTHOR:** Nicolás Cáceres Moreno<sup>2</sup>

**KEY WORDS:** Fuzzy sets; Convergence; Metric spaces; Hausdorff metric;  $D, L, h$  and  $\Gamma$ -convergence.

## DESCRIPTION

The theory of fuzzy sets was suggested by the professor Lofti Asker Zadeh in his article "Fuzzy Sets" in 1965. The aim of the theory is to work with the imprecision and the uncertainty of the information which describe some phenomena that we find in the universe. There have been formulated many articles about the development of the theory since 1965. That's how the professor Marko Rojas Medar, professor of the University of Campinas, SP-Brazil, published an article called "On the equivalence of convergence of fuzzy sets" and he does, later, a work called "Análisis Fuzzy Multívoco". This work is the most important topic of this monography.

The following work is divided into four chapters. In the first one, there is a presentation of the most important tools to develop this work as concepts related to the metric spaces, Kuratowski's convergence and Hausdorff metric. In the second one, it can be found the essential part of the theory of fuzzy sets, where are presented, the theoretical concepts, definitions, connections between fuzzy sets and crisp sets, operations, properties and, representations of these sets. In third one, some kind of convergence are defined about the space  $\mathcal{K}^n$  of the fuzzy sets on  $\mathbb{R}^n$  and its interrelations. Finally, It will be done a brief remark of the applications about the theory of fuzzy sets in different fields. The main aim is to have a first approximation as well analysis of fuzzy sets as to its convergence; therefore, to try to give a first step in the communication of this theory between the community interested in the subject. In each chapter, we find a determined number of examples, which are proposed for to join and to obtain a better understanding of the concepts and theorems presented here.

---

<sup>1</sup>Thesis

<sup>2</sup> FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

DIRECTOR Dr. Élder Jesús Villamizar Roa.

**TÍTULO:** ESPACIOS Y CONVERGENCIA DE CONJUNTOS DIFUSOS<sup>1</sup>

**AUTOR:** Nicolás Cáceres Moreno<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Conjuntos difusos; Convergencia; Espacios métricos; Métrica de Hausdorff;  $D$ ,  $L$ ,  $h$  y  $\Gamma$ -convergencia.

## DESCRIPCIÓN

La teoría de conjuntos difusos es una teoría originada en 1965 por el profesor Lofti Asker Zadeh en su artículo "Fuzzy Sets". El objetivo de esta teoría es trabajar con la imprecisión y la incertidumbre de la información que describen ciertos fenómenos que encontramos en el universo. A Partir de ese momento, se han formulado infinidad de artículos y aportes en el avance de la Teoría difusa. Es así, como en 1996 el profesor Marko Rojas Medar, profesor de la Universidad de Campinas, SP-Brasil, publica un artículo titulado "On the equivalence of convergences of fuzzy sets" y realiza posteriormente un trabajo llamado "Análisis Fuzzy Multívoco". Este trabajo es la principal fuente de estudio de la presente monografía.

El presente trabajo de grado está dividido en cuatro capítulos. En el primero, se hace una presentación de las principales herramientas para el desarrollo del trabajo como lo son los conceptos relacionados a los espacios métricos, convergencia de Kuratowski y la métrica de Hausdorff entre otros. En el segundo capítulo se presenta la parte esencial de la teoría de conjuntos difusos, introduciendo los conceptos teóricos, definiciones, conexiones entre conjuntos difusos y conjuntos clásicos, operaciones y propiedades entre otros aspectos. En el tercer capítulo se definen varios tipos de convergencia sobre el espacio  $\mathcal{K}^n$  de conjuntos difusos compactos sobre  $\mathbb{R}^n$  y sus interrelaciones. Y por último en el cuarto capítulo se hará un breve comentario de algunas de las aplicaciones generales de la teoría de conjuntos difusos en diferentes campos. El principal objetivo es hacer una primera aproximación tanto al análisis de conjuntos difusos como a su convergencia; por lo tanto, se trata de un primer paso en la divulgación de esta teoría entre la comunidad interesada en el tema. En cada capítulo se encontrará un determinado número de ejemplos, los cuales son propuestos para enlazar y lograr un mejor entendimiento de los conceptos y teoremas allí presentados.

---

<sup>1</sup>Tesis

<sup>2</sup> FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

DIRECTOR Dr. Élder Jesús Villamizar Roa.

---

# CONTENIDO

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios métricos . . . . .	1
1.2. Convergencia de Kuratowski . . . . .	5
1.3. Métrica de Hausdorff sobre $K(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	7
1.4. Espacios de conjuntos convexos . . . . .	11
1.4.1. El espacio $KC(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	11
<b>2. Espacios de conjuntos difusos</b>	<b>12</b>
2.1. Conjuntos difusos . . . . .	13
2.2. Niveles de un conjunto difuso . . . . .	16
2.3. Conjunto difuso convexo . . . . .	19
2.4. Números difusos . . . . .	21
2.5. Operaciones de conjuntos difusos . . . . .	27
2.5.1. Operaciones básicas . . . . .	27

2.5.2. Propiedades de conjuntos difusos . . . . .	29
2.6. Representación de conjuntos difusos . . . . .	29
2.7. Operaciones algebraicas sobre $\mathcal{F}(X)$ . . . . .	31
2.7.1. Principio de Extensión . . . . .	32
2.7.2. Operaciones aritméticas sobre números difusos . . . . .	34
2.8. Relaciones difusas . . . . .	37
2.9. El espacio $\mathcal{K}^n$ . . . . .	38
2.10. Completitud y separabilidad de $(\mathcal{K}^n, D)$ . . . . .	40
<b>3. Convergencia de conjuntos difusos</b>	<b>43</b>
3.1. $D, L, h$ y $\Gamma$ -convergencia sobre $\mathcal{K}^n$ . . . . .	44
3.2. Comparaciones entre convergencias . . . . .	45
3.3. Relación con las convergencias clásicas . . . . .	47
3.4. Equivalencias entre convergencias . . . . .	48
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>58</b>
4.1. Ingeniería mecánica . . . . .	58
4.2. Ingeniería civil . . . . .	59
4.3. Ingeniería industrial . . . . .	59
4.4. Medicina . . . . .	60
4.5. Otras aplicaciones . . . . .	61
<b>Referencias</b>	<b>62</b>

---

# Introducción

La mayoría de los fenómenos que encontramos cada día son imprecisos, es decir, tienen implícito un cierto grado de incertidumbre en la descripción de su naturaleza. Esta imprecisión puede estar asociada con su forma, posición, momento, color o incluso en el lenguaje que describe lo que son. En muchos casos el mismo concepto puede tener diferentes grados de imprecisión en diferentes contextos o tiempo. Este tipo de imprecisión asociado continuamente a los fenómenos es común en todos los campos de estudio: sociología, física, biología, ingenierías, etc.

A pesar de las incertezas de los conceptos subjetivos que utilizamos en nuestro cotidiano, esos conceptos son transmitidos y comprendidos desde un punto lingüístico entre los interlocutores. Es natural, por ejemplo, la utilización de expresiones como “Juan es obeso”, “María es vieja”, etc. Sin embargo, siendo términos altamente utilizados, han permanecido fuera de la formalidad matemática tradicional.

Por ejemplo, si queremos formalizar matemáticamente el conjunto que representa “las personas altas”, podríamos pensar primeramente en un formalismo desde un punto de vista “clásico”, distinguiendo a partir de que valor (altura) un individuo es considerado alto, por ejemplo, diciendo que un individuo es alto si tiene más de 1,80 m. Esta visión implica que una persona con 1,79 m de estatura no es considerada alta. El segundo punto de vista, menos convencional, es dado de manera que todos los individuos son considerados altos con más o menos intensidad, permitiendo la existencia de elementos que pertenecieran más a la clase de las personas altas, que otras.

Fue a través de desafíos como este, donde la propiedad que define el conjunto es subjetiva, que surge la teoría difusa introducida por Lofti Asker Zadeh en 1965, publicando su artículo “Fuzzy sets” (ver [20]).

Probablemente cuando oímos por primera vez términos como “teoría difusa”, “conjunto difuso”, “análisis difuso”, tengamos una inmediata reacción acerca del significado de dichas expresiones: debe ser algo “poco claro”, muy “borroso” o quizás “es confuso”. Sin embargo, la paradoja de su nombre no ha sido un obstáculo para su amplísimo desarrollo tanto teórico como práctico. En otras palabras, *no hay nada difuso en la teoría difusa*, y por el contrario *el futuro es cada día más borroso*.

En esta monografía pretendemos hacer una primera aproximación tanto al análisis de conjuntos difusos como a su convergencia; por lo tanto, se trata de un primer paso entorno a la divulgación de esta teoría entre la comunidad interesada en el tema y buscando poder ampliar estos estudios en un futuro inmediato.

Vale la pena comentarle al lector que no entra dentro de los objetivos de la monografía profundizar en el tema de las aplicaciones de la teoría difusa, pero sí nos parece de suma importancia hacer un breve comentario de su uso y orientándolo en la búsqueda de mayor información en las referencias allí descritas.

El presente trabajo se encuentra organizado en cuatro capítulos de la siguiente manera: En la primera parte de la monografía presentaremos las principales herramientas para el desarrollo del trabajo. Iniciamos dando un breve resumen sobre las principales definiciones y teoremas relacionados a los espacios métricos, y posteriormente haremos un corto análisis sobre los aspectos básicos relativos a la convergencia de Kuratowski, métrica de Hausdorff y espacios de conjuntos convexos.

En el segundo capítulo presentaremos la parte esencial de la teoría de conjuntos difusos, introduciendo los fundamentos teóricos, definiciones y ejemplos de conjuntos difusos, conexiones entre conjuntos clásicos y conjuntos difusos, operaciones, propiedades y representación de estos conjuntos, entre otros aspectos.

En el tercer capítulo definiremos varios tipos de convergencia sobre el espacio  $\mathcal{K}^n$  de conjuntos difusos compactos sobre  $\mathbb{R}^n$ , y analizaremos sus interrelaciones.

Y por último, en el cuarto capítulo comentaremos algunas de las aplicaciones generales de la teoría de conjuntos difusos en diversos campos tales como la medicina, la ingeniería mecánica y la ingeniería civil, entre otras.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar las principales herramientas imprescindibles para el desarrollo del trabajo. Iniciamos dando un breve resumen sobre las principales definiciones y teoremas relacionados a los espacios métricos, y posteriormente haremos un corto análisis sobre los aspectos básicos relativos a la convergencia de Kuratowski, la métrica de Hausdorff y los espacios de conjuntos convexos.

---

### 1.1. Espacios métricos

---

**Definición 1.1.** Una métrica sobre un conjunto  $X$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que asocia a cada par ordenado de elementos  $x, y \in X$  un número real  $d(x, y)$ , llamado distancia de  $x$  a  $y$ , de modo que sean satisfechas las siguientes condiciones para cualesquiera  $x, y, z \in X$ .

- a)  $d(x, x) = 0$ ;
- b) Si  $x \neq y$  entonces  $d(x, y) > 0$ ;
- c)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- d)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Un **espacio métrico** es una pareja  $(X, d)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $d$  es una métrica en  $X$ .

**Ejemplo 1.2.** Consideremos el espacio  $X = \mathbb{R}^n$  y la métrica  $d_n$  en  $\mathbb{R}^n$  definida por

$$d_n = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . La pareja  $(X, d_n) = (\mathbb{R}^n, d_n)$  es un espacio métrico. La métrica  $d_n$  es llamada métrica euclidiana.

**Definición 1.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $a \in X, \varepsilon > 0$ . Se define:

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

como la bola con centro en  $a$  y radio  $\varepsilon$ .

**Definición 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X, a \in X$ . Se dice que  $a$  es un **punto interior** de  $S$  si, y solamente si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a; \varepsilon) \subset S$ .

El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto  $S$  se denomina interior de  $S$ , y se denota por  $\text{int } S$  ó  $S^\circ$ .

**Definición 1.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X, a \in X$ . Se dice que  $a$  es un **punto de adherencia** de  $S$  si, y solamente si para todo  $\varepsilon > 0, B(a; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ .

El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto  $S$  se llama adherencia, cerradura o clausura de  $S$  y se denota por  $\bar{S}$ .

**Definición 1.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subseteq X, a \in X$ . Se dice que  $a$  es un **punto de acumulación** de  $S$  si, y solamente si para todo  $\varepsilon > 0, (B(a; \varepsilon) - \{a\}) \cap S \neq \emptyset$ .

El conjunto de todos los puntos de acumulación de  $S$  se llama derivado de  $S$ , y se denota por  $S'$ .

**Definición 1.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Se dice que  $S$  es **abierto** si coincide con su interior, esto es:

$$S \text{ es abierto} \Leftrightarrow S = S^\circ.$$

**Definición 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Se dice que  $S$  es **cerrado** si coincide con su clausura, esto es:

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S = \bar{S}.$$

**Definición 1.9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subseteq X$ . Se dice que  $S$  es **acotado** si, y solamente si existen  $a \in X, \varepsilon > 0$  tales que  $S \subset B(a; \varepsilon)$ .

**Definición 1.10.** Se dice que una colección  $A$  de subconjuntos de un espacio métrico  $X$  es un **cubrimiento** de  $X$ , si la unión de los elementos de  $A$  contiene a  $X$ .

Se dice que  $A$  es un cubrimiento abierto de  $X$  si los conjuntos de la colección  $A$  son abiertos y  $A$  cubre a  $X$ .

**Definición 1.11.** Se dice que un espacio métrico  $X$  es **compacto** si de cada cubrimiento abierto  $A$  de  $X$  podemos extraer una subcolección finita que también cubre  $X$ .

Un resultado fundamentalmente muy conocido es el siguiente:

**Proposición 1.12.** *A es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana si y sólo si A es cerrado y acotado.*

**Ejemplo 1.13.** *La recta real  $\mathbb{R}$  no es compacta, pues el cubrimiento de  $\mathbb{R}$  por intervalos abiertos*

$$A = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

*no contiene ninguna subcolección finita que cubra  $\mathbb{R}$ .*

**Ejemplo 1.14.** *El subconjunto X de  $\mathbb{R}$  dado por:*

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \text{es compacto.}$$

*De hecho, dado un cubrimiento abierto A de X, existe un elemento U de A que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma 1/n excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U, un elemento de A que los contenga. La colección de estos elementos de A, junto con el propio U, es una colección finita de A que cubre X.*

**Definición 1.15.** *Se dice que una sucesión  $(x_n)$  converge a x en X si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  para todo  $n \geq K$ .*

**Definición 1.16.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que una sucesión  $(x_n)$  en X es una **sucesión de Cauchy** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  para todo  $n, m \geq n_0$ .*

**Definición 1.17.** *Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X.*

En lo que sigue usaremos principalmente los siguientes espacios de subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ :

- i)  $K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \emptyset, \quad A \text{ compacto}\};$
- ii)  $KC(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \emptyset, \quad A \text{ compacto-convexo}\}.$

Recordemos también que:

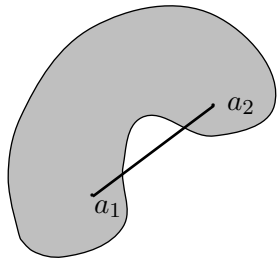
- a)  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo si y sólo si para todo  $a_1, a_2 \in A$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$  el punto

$$a = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$$

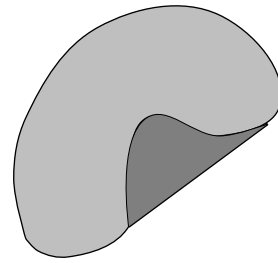
es también un punto de A.

- b) La envoltura convexa de A es el conjunto

$$coA = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \quad a_1, a_2 \in A, \lambda \in [0, 1]\}.$$



a) Conjunto  $A$  no convexo.



b) Envoltura convexa de  $A$ .

Fig. 1. Ilustración de la envoltura convexa en  $\mathbb{R}^2$ .

Puesto que, como se sabe, la intersección de conjuntos convexos es convexa, y  $coA$  es la intersección de todos los subconjuntos convexos que contienen a  $A$ , se tiene que  $coA$  es un conjunto convexo.

Es claro que:  $A \subseteq coA = co(coA)$ . Además, no es difícil probar la siguiente proposición.

**Proposición 1.18.** *Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Entonces,*

- i) *Si  $A$  es convexo entonces  $coA = A$ .*
- ii) *Si  $A$  es cerrado entonces  $coA$  es cerrado.*
- iii) *Si  $A$  es compacto entonces  $coA$  es compacto.*

**Definición 1.19.** *Si  $A, B$  son subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se define:*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

De la Proposición 1.18,  $K(\mathbb{R}^n)$  y  $KC(\mathbb{R}^n)$  son cerrados bajo estas operaciones de adición y producto por escalar.

**Definición 1.20.** *Un subconjunto  $S$  de un espacio métrico  $X$  se dice **denso** en  $X$  cuando  $\bar{S} = X$ .*

**Definición 1.21.** *Un espacio métrico  $X$  es **separable** si  $X$  contiene un subconjunto denso y enumerable. En otras palabras,  $X$  es separable si y sólo si existe un subconjunto enumerable  $A$  de  $X$  tal que la clausura de  $A$  es todo el espacio  $X$ , es decir,  $\bar{A} = X$ .*

**Ejemplo 1.22.** *La recta real  $\mathbb{R}$  con la métrica ordinaria es un espacio separable, porque el subconjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es enumerable y denso, es decir,  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .*

**Definición 1.23.** Se dice que una colección  $\mathfrak{B}$  de abiertos de un espacio métrico  $X$  es llamada una **base** cuando todo abierto  $A \subset X$  se expresa como una reunión  $A = \cup B_\lambda$  de conjuntos  $B_\lambda \in \mathfrak{B}$ .

**Ejemplo 1.24.** Todo subconjunto  $A$  de un espacio métrico separable  $X$  es separable. En efecto, si  $\mathfrak{B}$  es una base enumerable de  $X$ , las intersecciones  $B \cap A$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , constituyen una base (enumerable) de  $A$ .

Notemos que todo abierto en  $A$  es de la forma  $M \cap A$ , con  $M$  abierto en  $X$ . Tenemos  $M = \cup_n B_n$ ,  $B_n \in \mathfrak{B}$ , luego  $M \cap A = \cup_n (B_n \cap A)$ .

**Definición 1.25.** Sea  $M, N$  espacios métricos. Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es llamada una **inmersión isométrica** cuando  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  para cualesquiera  $x, y \in M$ . En este caso, diremos que  $f$  preserva distancias.

Una inmersión isométrica  $f : M \rightarrow N$  es siempre inyectiva, pues si  $f(x) = f(y)$  entonces  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$ , y por lo tanto  $x = y$ .

**Definición 1.26.** Una isometría es una inmersión isométrica sobreyectiva. Toda inmersión isométrica  $f : M \rightarrow N$  define una isometría de  $M$  sobre un subespacio  $f(M) \subset N$ .

**Ejemplo 1.27.** Todo espacio métrico  $M = (M, d)$  puede ser inmerso isométricamente en un espacio vectorial normado. (ver [12] pág. 20)

## 1.2. Convergencia de Kuratowski

En esta parte de la monografía introduciremos la noción de convergencia de Kuratowski, noción relevante para el desarrollo del trabajo.

**Definición 1.28.** Sea  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:

- i) Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto de acumulación de  $(A_p)$  si para todo  $V = B(x, \varepsilon)$ , existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A_p \cap V \neq \emptyset$ , para todo  $p \geq p_0$ .
- ii) Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto adherente de  $(A_p)$  si para todo  $p \in \mathbb{N}$  y para todo  $V = B(x, \varepsilon)$ , existe  $q \geq p$  tal que  $A_q \cap V \neq \emptyset$ .
- iii)  $\liminf A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto de acumulación de } (A_p)\}$ .
- iv)  $\limsup A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto adherente de } (A_p)\}$ .
- v) Si  $\liminf A_p = \limsup A_p = A$ , entonces decimos que  $A$  es el límite (en el sentido Kuratowski) de la sucesión  $(A_p)$  y, en este caso, escribimos  $\lim A_p = A$  (o bien,  $A_p \xrightarrow{K} A$ ).

**Observación 1.29.** *Puede probarse que tanto  $\liminf A_p$ , como  $\limsup A_p$  son conjuntos cerrados (ver [4], [18]).*

**Observación 1.30.** *Una caracterización del  $\liminf$  y  $\limsup$  (ver [1]) está dada por,*

$$\liminf A_p = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[ \bigcap_{p=m}^{\infty} A_p \right], \quad \limsup A_p = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[ \bigcup_{p=m}^{\infty} A_p \right].$$

**Proposición 1.31.** [18] *Los límites de Kuratowski verifican las siguientes propiedades:*

- i)  $\liminf A_p \subseteq \limsup A_p$ ;
- ii)  $\liminf A_p = \liminf \bar{A}_p$  y  $\limsup A_p = \limsup \bar{A}_p$ , en donde  $\bar{A}_p$  denota la clausura de  $A_p$  en  $\mathbb{R}^n$ ;
- iii)  $\liminf A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lim_{p \rightarrow \infty} x_p, x_p \in A_p\}$ ;
- iv)  $\limsup A_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k}, x_{p_k} \in A_{p_k}\}$ .

**Ejemplo 1.32.** *Si  $A_p = A$ , para todo  $p \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim A_p = \bar{A}$ .*

**Ejemplo 1.33.** *En  $\mathbb{R}^n$  sea  $A_p = B(0, p)$ , para todo  $p \in \mathbb{N}$ .*

*Si  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $V$  es cualquier vecindad de  $x$ , entonces es claro que existe un  $p_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A_p \cap V \neq \emptyset$  para todo  $p \geq p_0$ . En consecuencia, vemos que  $\lim A_p = \mathbb{R}^n$ .*

**Ejemplo 1.34.** *En  $\mathbb{R}$  sea:*

$$A_p = \begin{cases} [1/p, +\infty], & \text{si } p \text{ es par,} \\ [-\infty, -1/p], & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

*En este caso, no es difícil ver que:*

$$\begin{aligned} \liminf A_p &= \{0\}, \\ \limsup A_p &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Esto significa que la sucesión  $(A_p)$  no converge en el sentido Kuratowski.*

**Ejemplo 1.35.** *Suponga que  $(x_p)$  es una sucesión en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,*

$$\lim x_p = x_0 \iff \{x_p\} \xrightarrow{K} \{x_0\}.$$

---

### 1.3. Métrica de Hausdorff sobre $K(\mathbb{R}^n)$

---

**Definición 1.36.** Sobre la clase  $K(\mathbb{R}^n)$  de subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir la siguiente métrica (llamada la métrica de Hausdorff):

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \varepsilon)\},$$

en donde

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\} \quad \text{y} \quad d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

**Observación 1.37.** Una definición equivalente para  $H$  es,

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}, \sup_{b \in B} \{d(b, A)\} \right\}.$$

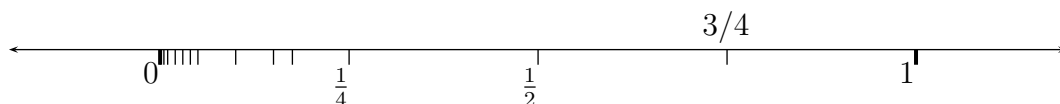
**Ejemplo 1.38.** Consideremos el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d_1)$  (ver ejemplo 1.2). Sean:  $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ,  $B = [0, 1]$ . Calculamos  $H(A, B)$ .

Para hallar  $H(A, B)$  debemos calcular  $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$  y  $\sup_{b \in B} \{d(b, A)\}$ .

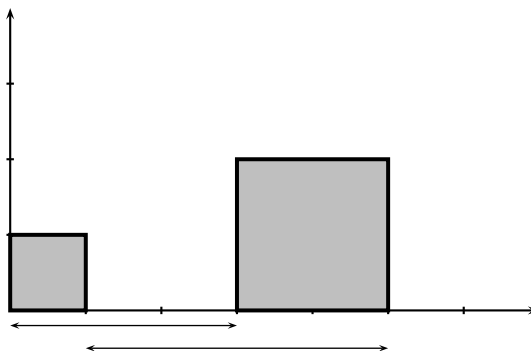
i) Como  $A \subset B$  entonces  $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = 0$ .

ii) Por otro lado,  $\sup_{b \in B} \{d(b, A)\} = \frac{1}{4}$ .

Por lo tanto se tiene que  $H(A, B) = \max\{0, 1/4\} = 1/4$ .



**Ejemplo 1.39.** Consideremos el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  (ver ejemplo 1.2). Sean:  $A = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $B = [3, 5] \times [0, 2]$ . Calculamos  $H(A, B)$ .



No es difícil ver que  $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = 3$  y  $\sup_{b \in B} \{d(b, A)\} = 4$ ; luego se tiene que,

$$H(A, B) = \text{máx}\{3, 4\} = 4.$$

**Definición 1.40.** Decimos que una sucesión  $(A_p)$  de compactos no vacíos converge a un compacto  $A \in K(\mathbb{R}^n)$  en la métrica de Hausdorff (notación:  $A_p \xrightarrow{H} A$ ), si  $H(A_p, A) \rightarrow 0$ , cuando  $p \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.41.**  $(K(\mathbb{R}^n), H)$  es un espacio métrico completo.

**Demostración.** Sea  $(A_p)$  una sucesión de Cauchy en  $(K(\mathbb{R}^n), H)$ . Probaremos que:

$$i) A = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i \geq p} A_i} \neq \emptyset,$$

$$ii) A_p \xrightarrow{H} A.$$

En efecto, sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $p_k$  tal que si  $p, q \geq p_k$ , se tiene  $H(A_p, A_q) < 2^{-k}\varepsilon$ . Sea  $(r_k)$  una sucesión estrictamente creciente en  $\mathbb{N}$  tal que  $r_k \geq p_k$ , para todo  $k$ .

Sea  $x_1 \in A_{r_1}$ . Supongamos ahora que hemos escogido  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tales que  $x_i \in A_{r_i}$  y, además  $d(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}\varepsilon$ , para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Entonces  $x_{k+1}$  es elegido en  $A_{r_{k+1}}$  de modo que se verifique  $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-(k+1)}\varepsilon$ .

Observemos que  $x_{k+1}$  existe, pues

$$d(x_k, A_{r_{k+1}}) \leq H(A_{r_k}, A_{r_{k+1}}) \leq 2^{-(k+1)}\varepsilon.$$

No es difícil ver que  $(x_k)$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$ , luego existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x_k \rightarrow x$ . Además, es claro que  $x \in A$ , lo que prueba *i*).

Por otra parte tenemos que

$$d(x, x_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_1) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \varepsilon.$$

Así, para todo  $r_1 \geq p_1$  y para todo  $x_1 \in A_{r_1}$ , podemos construir un  $x \in A$  tal que  $d(x, x_1) \leq \varepsilon$ . Es decir,  $A_{r_1} \subseteq N(A, \varepsilon)$ , para todo  $r_1 \geq p_1$ .

Mostraremos ahora que  $A \subseteq N(A_p, \varepsilon)$ , para todo  $p \geq p_1$ .

En efecto, sabemos que  $H(A_p, A_q) < \varepsilon/2$ , para todo  $p, q \geq p_1$ . Si  $x \in A$  entonces  $x \in \overline{\bigcup_{p \geq p_1} A_p}$ . Por lo tanto, existe  $q \geq p_1$  e  $y \in A_q$  con  $d(x, y) < \varepsilon/2$ . Finalmente, si  $p \geq p_1$ , tenemos que

$$d(x, A_p) \leq d(x, A_q) + d(A_q, A_p) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $A \subseteq N(A_p, \varepsilon)$ , para todo  $p \geq p_1$ .

Esto nos muestra que  $H(A_p, A) \rightarrow 0$ , cuando  $p \rightarrow \infty$ , lo que prueba *ii*).

Solo resta probar que  $A \in K(\mathbb{R}^n)$ .

Como  $A$  es una intersección de cerrados, entonces  $A$  es cerrado.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $H(A_p, A) < \varepsilon/2$  para todo  $p \geq p_0$ .

En particular, tenemos que  $A \subseteq N(A_{p_0}, \varepsilon/2)$ . Ahora bien, como  $A_{p_0}$  es compacto entonces es acotado, luego debe existir un conjunto finito  $F$  tal que  $A_{p_0} \subseteq N(F, \varepsilon/2)$ , lo que implica que  $A \subseteq N(F, \varepsilon)$  y, por lo tanto,  $A$  es también acotado.

Concluimos entonces que  $A$  es un conjunto compacto, lo que prueba el teorema.

□

**Teorema 1.42.** [7]  $(K(\mathbb{R}^n), H)$  es un espacio métrico separable.

*Demostración.* Sabemos que  $\mathbb{Q}^n$  es denso en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, sea  $\mathfrak{F}$  el conjunto de todos los conjuntos finitos de la forma  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ , con  $x_{i_k} \in \mathbb{Q}^n$ .

Entonces es claro que  $\mathfrak{F}$  es un subconjunto enumerable de  $K(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora bien, sea  $A \in K(\mathbb{R}^n)$  y  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $A$  es un conjunto compacto, entonces es acotado, de modo que existen  $y_{i_1}, \dots, y_{i_p}$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $A \subseteq N(\{y_{i_1}, \dots, y_{i_p}\}, \varepsilon/2)$ . Por la densidad de  $\mathbb{Q}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  podemos hallar elementos  $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$  en  $\mathbb{Q}^n$  tales que  $d(x_{i_k}, y_{i_k}) < \varepsilon/2$ , para todo  $k = 1, \dots, p$ . Entonces es claro que  $A \subseteq N(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}, \varepsilon)$ .

Por último, podemos suponer también que  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\} \subseteq N(A, \varepsilon)$ , pues en caso contrario debe existir  $x_0 \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$  tal que  $d(x_0, A) > \varepsilon$ , lo que implicaría  $A \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$ . En tal caso, el conjunto  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\} \setminus \{x_0\}$  sigue siendo finito y posee aún la propiedad de que  $A \subseteq N(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\} \setminus \{x_0\}, \varepsilon)$ .

Esto nos muestra que  $H(A, \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}) \leq \varepsilon$ , lo que prueba que  $\mathfrak{F}$  es denso en  $K(\mathbb{R}^n)$ , completando la demostración del teorema.

□

**Ejemplo 1.43.** No es difícil ver que si  $(x_p)$  es una sucesión en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\lim x_p = x_0 \iff \{x_p\} \xrightarrow{H} \{x_0\}.$$

**Ejemplo 1.44.** En  $\mathbb{R}$  considere la siguiente sucesión de compactos:

$$A_p = \begin{cases} \{0, 1/p\}, & \text{si } p \text{ es par,} \\ \{0, p\}, & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces, por una parte tenemos que

$$\liminf A_p = \limsup A_p = \{0\},$$

es decir,

$$\lim A_p = \{0\}.$$

Sin embargo, puede verificarse fácilmente que  $H(A_p, \{0\}) \not\rightarrow 0$ .

En consecuencia  $(A_p)$  no converge a  $\{0\}$  en la métrica de Hausdorff.

De este último ejemplo podemos concluir que la convergencia en el sentido de Kuratowski y la convergencia inducida por la métrica de Hausdorff sobre  $K(\mathbb{R}^n)$  no son equivalentes.

No obstante, se prueba el siguiente importante resultado (ver [4], [7]).

**Teorema 1.45.** Sea  $A_p$  una sucesión en  $K(\mathbb{R}^n)$  y supóngase que existe  $K \in K(\mathbb{R}^n)$  tal que  $A_p \subseteq K$ , para todo  $p$ . Entonces,

$$A_p \xrightarrow{K} A \iff A_p \xrightarrow{H} A.$$

Recordemos que en tal caso

$$A = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i \geq p} A_i} \neq \emptyset,$$

lo que confirma que cuando el límite existe, ese límite es un conjunto cerrado.

Observemos que las condiciones del Teorema 1.45 no son satisfechas por la sucesión analizada en el Ejemplo 1.44.

**Teorema 1.46.** Sea  $X \in K(\mathbb{R}^n)$  y consideremos el espacio

$$K(X) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) \mid A \subseteq X\}.$$

Entonces  $K(X)$  es compacto en  $K(\mathbb{R}^n)$ .

Otras propiedades de  $H$  sobre  $K(\mathbb{R}^n)$  son las siguientes (ver [2], [7]).

**Proposición 1.47.** Para cualesquiera  $A, B, C, D \in K(\mathbb{R}^n)$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se tiene que:

- i)  $H(\lambda A, \lambda B) = \lambda H(A, B)$  (homogeneidad);
- ii)  $H(A + C, B + C) = H(A, B)$  (invariancia por traslación);
- iii)  $H(\text{co}A, \text{co}B) \leq H(A, B)$ ;
- iv)  $H(A + B, C + D) \leq H(A, C) + H(B, D)$ .

---

## 1.4. Espacios de conjuntos convexos

---

### 1.4.1. El espacio $KC(\mathbb{R}^n)$

Un subespacio de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  bastante interesante para nuestro estudio lo constituye la clase

$$KC(\mathbb{R}^n) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) \mid A \text{ convexo}\}$$

de subconjuntos compactos-convexos de  $\mathbb{R}^n$ , los cuales tienen importantes aplicaciones, especialmente en el campo de la teoría de optimización (ver [16]).

Una propiedad topológica importante de este espacio es la siguiente:

**Teorema 1.48.**  $(KC(\mathbb{R}^n), H)$  es un subespacio cerrado de  $(K(\mathbb{R}^n), H)$ .

**Demostración.** Sea  $A_p$  una sucesión en  $KC(\mathbb{R}^n)$  convergiendo a  $A \in K(\mathbb{R}^n)$ . Entonces tenemos que  $H(A, coA) \leq H(A, A_p) + H(A_p, coA)$ , para todo  $p$ .

Por otra parte  $H(A_p, coA) = H(coA_p, coA) \leq H(A_p, A)$ , es decir,

$$H(A, coA) \leq 2H(A_p, A), \quad \forall p.$$

Como  $H(A_p, A) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , obtenemos que  $A = coA$ .

□

El siguiente resultado de compacidad, es conocido como el Teorema de Selección de Blaschke.

**Teorema 1.49.** Si  $X \in K(\mathbb{R}^n)$  y  $(A_p) \subseteq X$  es una sucesión en  $KC(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe una subsucesión  $(A_{p_i})$  convergente en  $KC(\mathbb{R}^n)$ .

**Demostración.** Por Teorema 1.46 sabemos que  $K(X)$  es compacto, y por lo tanto  $(A_p)$  debe poseer una subsucesión  $(A_{p_i})$  convergente en  $K(X) \subseteq K(\mathbb{R}^n)$ .

Más aún, por Teorema 1.48 tenemos que si  $A = \lim A_{p_i}$ , entonces  $A$  debe ser un subconjunto convexo de  $X$ .

□

---

---

## CAPÍTULO 2

---

### Espacios de conjuntos difusos

La noción de conjuntos difusos, introducida por Zadeh [20] en 1965, extiende aquella noción de conjunto clásico en el sentido de que la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto deja de ser una relación dicotómica, esto es, que para un subconjunto  $A$  de un conjunto universal  $X$ , dado un elemento  $x \in X$ , tenemos apenas dos posibilidades, a saber,  $x \in A$  ó  $x \notin A$ . Por ejemplo, sabemos que el número 9 pertenece al conjunto de los números impares y que el número 2 no pertenece a este mismo conjunto. No obstante, podemos discordar en relación al hecho de si el número 10 pertenece o no al conjunto de los números naturales “pequeños”. En este caso la respuesta no es objetiva. El grado de pertenencia dependerá del tipo de problema al cual estemos haciendo referencia. Ejemplos como este hacen parte de las innumerables situaciones en las cuales el significado de pertenencia no está definido, y por tanto no sabemos decir si un determinado elemento pertenece o no a un conjunto dado.

La idea de Zadeh fue flexibilizar la pertenencia de elementos a los conjuntos creando la noción de “grado de pertenencia”, y así, un elemento puede pertenecer parcialmente a un conjunto dado. Volviendo al conjunto de los números naturales “pequeños”, podemos decir que el número 1 tiene un grado de pertenencia mayor que el grado de pertenencia del número 10 al conjunto. Para modelar matemáticamente un conjunto, Zadeh introdujo el concepto de *conjunto difuso*.

El principal objetivo de este capítulo será introducir los fundamentos teóricos de la Teoría de conjuntos difusos, definición y ejemplos de conjuntos difusos, conexiones entre conjuntos clásicos y conjuntos difusos, operaciones, propiedades y representación de estos conjuntos, entre otros aspectos.

---

## 2.1. Conjuntos difusos

---

Hay varias formas mediante las cuales un conjunto clásico  $A$  puede ser descrito dentro de un conjunto universal  $X$ ,  $X \neq \emptyset$ , dado, a saber:

- Un conjunto  $A$  puede ser descrito por extensión, esto es, listando todos sus elementos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

- Un conjunto  $A$  también puede ser descrito por comprensión, esto es, a través de una propiedad  $P(x)$  común a todos los elementos del conjunto:

$$A = \{x \in X \mid P(x)\}.$$

- Y por último, un conjunto  $A$  puede ser descrito mediante la función característica, definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Podemos notar que, en el último caso, el objetivo de la función característica de un subconjunto  $A$  de  $X$  es indicar si un elemento  $x \in X$  pertenece o no al conjunto  $A$  dependiendo de si la imagen es 0 ó 1; así, la función característica describe completamente el conjunto  $A$ .

Para obtener la formalización matemática de un conjunto difuso, nos basamos en una generalización de la función característica de un conjunto.

**Definición 2.1.** (*Conjunto difuso*). Un conjunto difuso  $u$  sobre un conjunto universal  $X$ ,  $X \neq \emptyset$ , es cualquier aplicación  $u : X \longrightarrow [0, 1]$ , o bien, puede identificarse un tal  $u$  como cualquier subconjunto de  $X \times [0, 1]$  (i.e., de la forma  $\{(x, u(x)) : x \in X\}$ ).

En este contexto, si  $x \in X$ , entonces  $u(x)$  representa el grado de pertenencia del elemento  $x$  al conjunto difuso  $u$ ; así,  $u(x) = 0$  significa no pertenencia,  $0 < u(x) < 1$  significa pertenencia parcial y  $u(x) = 1$  significa pertenencia total.

Denotaremos por  $\mathcal{F}(X)$  a la clase de todos los conjuntos difusos sobre  $X$ , es decir:

$$\mathcal{F}(X) = \{u \mid u : X \longrightarrow [0, 1]\}.$$

Notemos que la definición de conjunto difuso fue obtenida simplemente ampliando el recorrido de la función característica. Así pues, todo conjunto en el sentido corriente es

también un conjunto difuso, en el cual la función de pertenencia es la función característica. Los conjuntos ordinarios merecen un nombre especial. En inglés, por ejemplo, se los llama de manera convencional “conjuntos nítidos” (*crisp sets*) En español no hay tal convención, así que aquí los llamaremos sencillamente conjuntos *clásicos*.

El conjunto vacío coincide con la función nula, y el universo coincide con la función constante 1.

**Ejemplo 2.2.** *Supongamos que nos interesa representar el conjunto difuso de los números reales cercanos al cero. Podemos definir una posible función de pertenencia para el conjunto difuso de números reales cerca a cero “0” como:*

$$u(x) = \frac{1}{1 + 10x^2}$$

*El gráfico de esta función esta representado en la siguiente figura.*

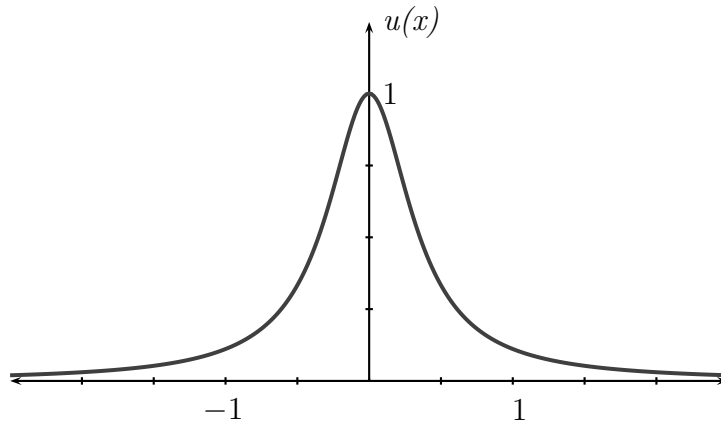


Fig. 2. Función de pertenencia del conjunto difuso de los números reales cerca a cero.

*Usando esta función, nosotros podemos determinar el grado de pertenencia de cada número real de este conjunto difuso. Por ejemplo, el número 3 tiene un valor asignado de 0,01 y el número 1 tiene un valor de 0,09.*

Es claro que nosotros podríamos obtener otra función que nos represente el conjunto de números muy cercanos al cero. Una posible función sería:

$$u(x) = \left( \frac{1}{1 + 10x^2} \right)^2.$$

La selección de la función de pertenencia depende de factores que están relacionados con el contexto del problema a ser estudiado.

**Ejemplo 2.3.** Consideremos ahora tres conjuntos difusos definidos dentro de un conjunto universal finito que consiste de siete niveles de educación:

- 0- Sin educación.
- 1- Primaria.
- 2- Secundaria.
- 3- Dos años de universidad.
- 4- Título universitario.
- 5- Título de maestría.
- 6- Título de doctorado.

Las funciones de pertenencia de los tres conjuntos difusos, procuran abarcar los conceptos de personas poco educadas; educadas y altamente educadas, las cuales son definidas en la siguiente figura por los símbolos,  $\circ$ ,  $\bullet$ , y  $\square$ , respectivamente. Así, por ejemplo, una persona que tiene un título universitario pero no un título más alto, es visto, de acuerdo con estas definiciones, como educado al valor de 0,8 y altamente educado al valor de 0,5.

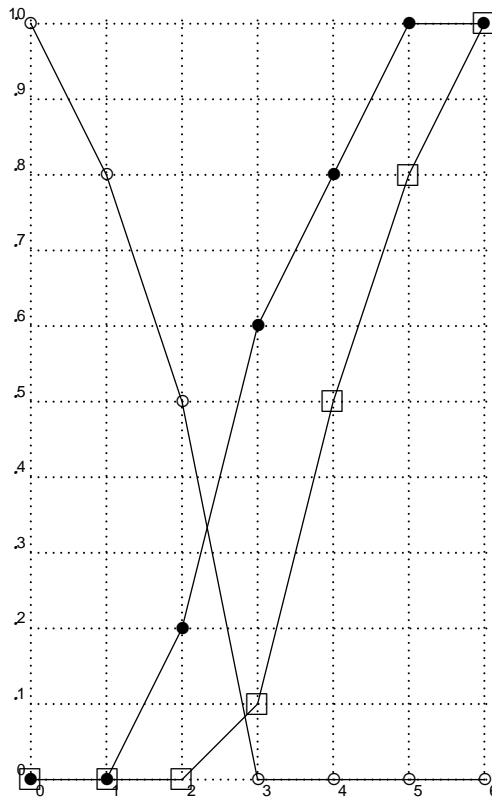


Fig. 3. Ejemplos de conjuntos difusos expresando los conceptos de personas poco educadas ( $\circ$ ), educadas ( $\bullet$ ) y altamente educadas ( $\square$ ).

---

## 2.2. Niveles de un conjunto difuso

---

Uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría de conjuntos difusos es el concepto de nivel de un conjunto difuso.

**Definición 2.4.** (Niveles de un conjunto difuso sobre  $X$ )

Sea  $u : X \longrightarrow [0, 1]$  y  $\alpha \in (0, 1]$ . Definimos el  $\alpha$ -nivel de  $u$  como el conjunto:

$$L_\alpha u = \{x \in X \mid u(x) \geq \alpha\}.$$

Denotaremos por  $\{u > \alpha\}$  el conjunto  $\{x \in X \mid u(x) > \alpha\}$ .

**Definición 2.5.** (Soporte de un conjunto difuso)

La clausura del conjunto de todos los  $x \in X$  tales que su valor de pertenencia es mayor que cero se llamará el soporte de  $u$ , y lo denotaremos por

$$L_0 u = \overline{\{x \in X \mid u(x) > 0\}}.$$

**Definición 2.6.** (Conjunto difuso normal)

Un conjunto difuso es llamado normal si  $\sup_{x \in X} u(x) = 1$ .

La altura de un conjunto difuso puede ser vista como el supremo de los  $\alpha$  para los cuales  $L_\alpha u \neq \emptyset$ .  $L_\alpha u \neq \emptyset$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  es equivalente a  $u(x) = 1$  para algún  $x \in X$ .

**Proposición 2.7.** La familia de niveles  $\{L_\alpha u \mid \alpha \in [0, 1]\}$  de un conjunto difuso  $u$  verifica las siguientes propiedades:

i)  $L_0 u \supseteq L_\alpha u \supseteq L_\beta u$  para cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .

ii) Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots \leq \alpha$  (i.e.,  $\alpha_n \nearrow \alpha$ ), entonces

$$L_\alpha u = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u.$$

iii)  $u = v \Leftrightarrow L_\alpha u = L_\alpha v$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

iv) La relación:

$$u \subseteq v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x), \text{ para todo } x \in X,$$

se cumple si y sólo si

$$L_\alpha u \subseteq L_\alpha v, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Así, la relación  $\subseteq$  determina un orden parcial sobre  $\mathcal{F}(X)$ .

***Demostración.***

- i) Su verificación se desprende de la definición de nivel de un conjunto difuso.
- ii) Como  $\alpha_n \nearrow \alpha$ , entonces  $\alpha_n < \alpha$ ; luego por definición de nivel,  $L_\alpha u \subseteq L_{\alpha_n} u$ , para todo  $\alpha_n$ . Por lo tanto

$$L_\alpha u \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u.$$

Ahora, con respecto a la otra contención, sea  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u$  y tomemos cualquier  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $n_0$  tal que  $\alpha - \varepsilon < \alpha_n$ , para todo  $n > n_0$ , por lo tanto  $x \in L_{\alpha - \varepsilon} u$ , ( $\alpha - \varepsilon < \alpha$ ), lo cual significa que  $u(x) \geq \alpha - \varepsilon$ .

Puesto que  $\varepsilon$  es un número arbitrario positivo, si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos que  $u(x) \geq \alpha$ . Entonces  $x \in L_\alpha u$ , y así,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u \subseteq L_\alpha u.$$

- iii) Sean  $u, v \in \mathcal{F}(X)$ ; aplicando la definición de nivel se tiene que:

$$L_\alpha u = \{x \in X \mid u(x) \geq \alpha\},$$

$$L_\alpha v = \{x \in X \mid v(x) \geq \alpha\}.$$

Como  $u = v$ , entonces  $u(x) = v(x)$  para todo  $x \in X$ ; por lo tanto,  $L_\alpha u = L_\alpha v$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . De la misma forma se obtiene la otra implicación.

- iv) ( $\Rightarrow$ : Necesidad).

Supongamos que existe  $\alpha_0 \in [0, 1]$  tal que  $L_{\alpha_0} u \not\subseteq L_{\alpha_0} v$ ; entonces existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_0 \in L_{\alpha_0} u$  y  $x_0 \notin L_{\alpha_0} v$ . Luego  $u(x_0) \geq \alpha_0$  y  $v(x_0) < \alpha_0$ . Por lo tanto,  $v(x_0) < u(x_0)$ , lo cual contradice que  $u \subseteq v$ .

( $\Leftarrow$ : Suficiencia).

Supongamos que  $u \not\subseteq v$ ; entonces existe  $x_0 \in X$  tal que  $u(x_0) > v(x_0)$ . Ahora sea  $\alpha = u(x_0)$ ; entonces  $x_0 \in L_\alpha u$  y  $x_0 \notin L_\alpha v$ , lo cual demuestra que  $L_\alpha u \not\subseteq L_\alpha v$  no se satisface para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

□

Una pregunta interesante es la siguiente: Dada una familia  $(N_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  de subconjuntos no vacíos de  $X$ , ¿existe un conjunto difuso  $u : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $L_\alpha u = N_\alpha$ , para todo  $\alpha$ ?

La respuesta a este interrogante la da el Teorema de Representación de Negoita y Ralescu, cuya versión general es la siguiente:

**Teorema 2.8.** [14] Sea  $X$  un conjunto y  $(N_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  una familia de subconjuntos de  $X$  tales que:

- i)  $N_0 = X$ ;
- ii) Si  $\alpha \leq \beta$ , entonces  $N_\beta \subseteq N_\alpha$ ;
- iii) Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$ , entonces  $N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$ .

Entonces la función  $u : X \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in N_\alpha\}$$

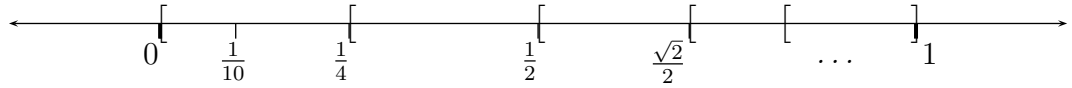
tiene la propiedad de que  $L_\alpha u = N_\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

□

Ilustremos el anterior teorema aplicándolo a un ejemplo concreto.

**Ejemplo 2.9.** Sean  $X = [0, 1]$  y  $(N_\alpha)_{\alpha \in [0,1]} = [\alpha, 1]$ ; entonces

$N_0 = [0, 1]$ ,  $N_{\frac{1}{4}} = [1/4, 1]$ ,  $N_{\frac{1}{2}} = [1/2, 1]$ ,  $N_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = [\sqrt{2}/2, 1]$ ,  $\dots$ , vienen dados por la siguiente figura:



- i)  $N_0 = [0, 1] = X$ .
- ii) Sea  $\alpha \leq \beta$ ; entonces  $[\beta, 1] \subseteq [\alpha, 1]$ . Por lo tanto,  $N_\beta \subseteq N_\alpha$ .
- iii) Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$ , deducimos que  $N_\alpha \subseteq N_{\alpha_p}$  para todo  $p=1, 2, 3, \dots$ ; esto implica que  $N_\alpha \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$ .  
 Ahora, sea  $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$ . Luego  $x \in N_{\alpha_p}$  para todo  $p=1, 2, 3, \dots$ .  
 Supongamos que  $x \notin N_\alpha$ ; entonces  $x < \alpha$ , y como  $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$ , existe  $\alpha_{p_0}$  tal que  $x < \alpha_{p_0} < \alpha$ , de donde concluimos que  $x \notin N_{\alpha_{p_0}}$ , lo cual es una contradicción.  
 Así,  $x \in N_\alpha$ , de modo que  $\bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p} \subseteq N_\alpha$ . Usando estos dos resultados obtenemos

$$N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}.$$

Entonces la función  $u : X \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in N_\alpha\}$$

tiene la propiedad de que  $L_\alpha u = N_\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Por ejemplo,  $N_{\frac{e}{3}} = L_{\frac{e}{3}}$ .

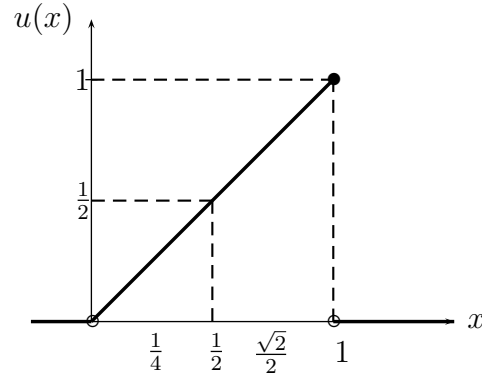


Fig. 4. Ilustración del Teorema 2.8.

---

## 2.3. Conjunto difuso convexo

---

Una propiedad importante de la teoría de conjuntos difusos definidos sobre  $\mathbb{R}^n$  es su convexidad. Esta propiedad es vista como una generalización de la convexidad en los conjuntos clásicos. El concepto de convexidad es muy importante para estudios cuantitativos y cualitativos en el campo de la investigación y de la aplicación matemática. (ver [3]).

**Definición 2.10.** *Un conjunto difuso  $u$  es convexo si y sólo si el conjunto de los  $\alpha$ -niveles es un conjunto convexo para cada  $\alpha \in (0, 1]$ .*

**Ejemplo 2.11.** *En el ejemplo, ilustramos un conjunto difuso que no es normal y es convexo. Dos de los  $\alpha$ -niveles mostrados en la figura son claramente convexos en el sentido clásico, y por tanto otro  $\alpha$ -nivel es también convexo.*

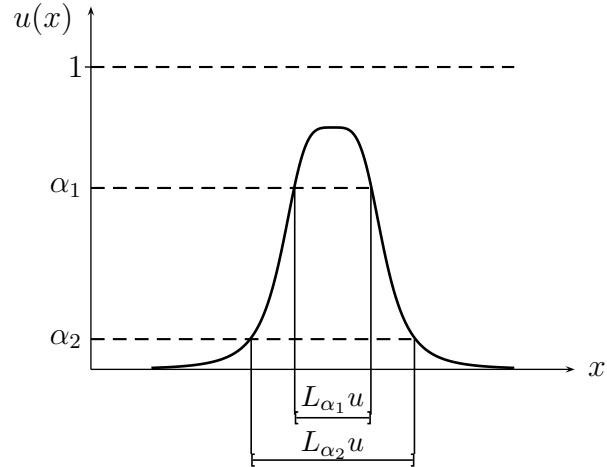


Fig. 5. Conjunto difuso convexo.

**Ejemplo 2.12.** *La falta de la convexidad puede ser denotada identificando algunos de sus  $\alpha$ -niveles ( $\alpha > 0$ ) que no sean convexos, como el descrito en la siguiente figura.*

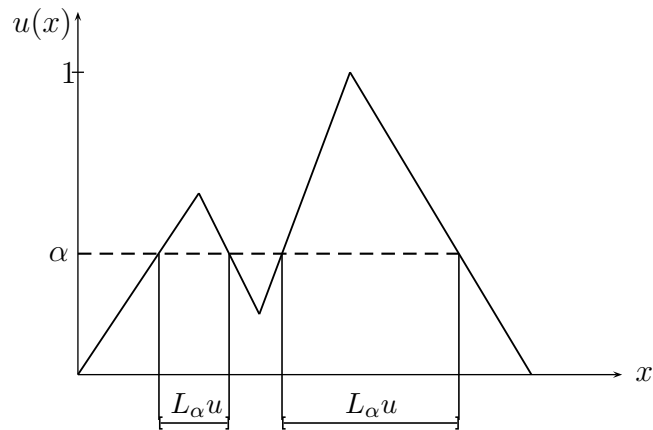


Fig. 6. Conjunto difuso normal que no es convexo.

Para evitar confusiones, notemos que la definición de convexidad para conjuntos difusos no significa que la función de pertenencia de un conjunto difuso convexo sea una función convexa. De hecho, las funciones de pertenencia de conjuntos difusos convexos son funciones que pueden ser, de acuerdo a las definiciones estándar, cóncavas o convexas.

Probaremos ahora, un teorema que nos proporcionará una formulación alternativa para los conjuntos difusos convexos. Por simplicidad, restringiremos el teorema a conjuntos difusos en  $\mathbb{R}$ , los cuales son de gran interés en la siguiente sección.

**Teorema 2.13.** *Un conjunto difuso  $u$  de  $\mathbb{R}$  es convexo si y sólo si*

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[u(x_1), u(x_2)]$$

*para cualesquiera  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .*

***Demostración.***

- i) Supongamos que  $u$  es convexo y sea  $\alpha = u(x_1) \leq u(x_2)$ . Luego,  $x_1, x_2 \in L_\alpha u$  y además, por la convexidad de  $u$  tenemos que  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in L_\alpha u$  para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ . Consecuentemente,

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha = u(x_1) = \text{mín}[u(x_1), u(x_2)].$$

- ii) Supongamos que  $u$  satisface  $u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \text{mín}[u(x_1), u(x_2)]$ . Necesitamos probar que para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $L_\alpha u$  es convexo. Sean  $x_1, x_2 \in L_\alpha u$  (es decir,  $u(x_1) \geq \alpha, u(x_2) \geq \alpha$ ), y sea cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \text{mín}[u(x_1), u(x_2)] \geq \text{mín}(\alpha, \alpha) = \alpha,$$

es decir,  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in L_\alpha u$ . Por consiguiente,  $L_\alpha u$  es convexo para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ . Por lo tanto,  $u$  es convexo.

□

**Ejemplo 2.14.**

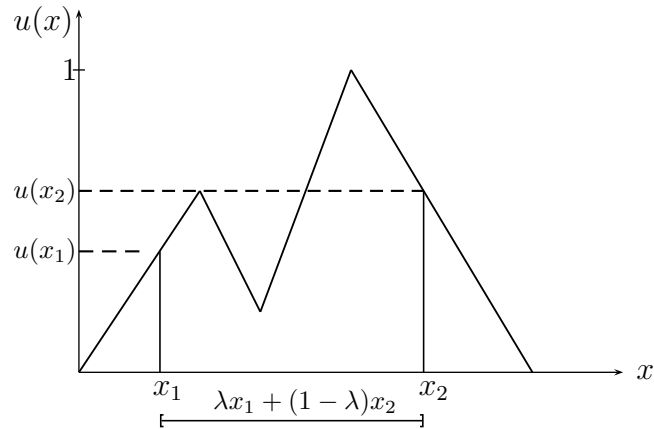


Fig. 7. Conjunto difuso no convexo. Ilustración relativa al Teorema 2.13.

---

## 2.4. Números difusos

---

El concepto de número difuso viene motivado por el hecho de que muchos fenómenos no pueden ser caracterizados por números “precisos”. De un modo general podemos decir que, en un problema concreto, muchos números que allí aparecen son idealizaciones de

afirmaciones imprecisas envolviendo valores numéricos. Por ejemplo, cuando medimos la altura de un individuo, lo que obtenemos es un valor numérico cargado de imprecisiones. Tales imprecisiones pueden ser causadas por los instrumentos de medida, por los individuos que están midiendo, por el individuo que está siendo medido, etc. Finalmente optamos por un valor preciso (un número real) “ $a$ ” para indicar la altura. No obstante, sería más prudente decir que la altura es “entorno de  $a$ ”. En este caso, indicamos la expresión “entorno de  $a$ ” por un conjunto difuso  $A$  cuyo dominio es el conjunto de los números reales. También es razonable esperar que  $u(a) = 1$  (siendo  $u$  la función de pertenencia del conjunto difuso  $A$ ).

En medio de los diferentes tipos de conjuntos difusos, unos que tienen especial importancia son los conjuntos difusos que están definidos sobre el conjunto de los números reales, importancia que es debida al deseo de querer calcular cantidades imprecisas. Para esto, es necesario crear objetos que generalizan los números reales y los cuales se denominan números difusos.

**Definición 2.15.** *Un conjunto difuso  $u$  es llamado número difuso, cuando el universo donde está definido es el conjunto de los números reales, esto es,*

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

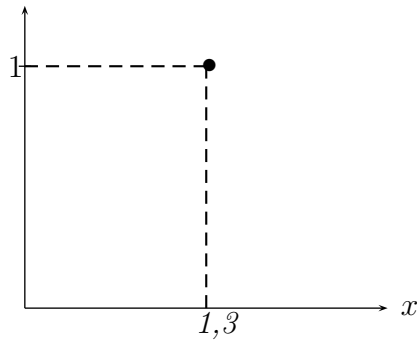
*y además satisface las siguientes condiciones:*

- i)  $u$  debe ser un conjunto difuso normal;*
- ii)  $L_\alpha u$  debe ser un intervalo cerrado, para cada  $\alpha \in (0, 1]$ ;*
- iii)  $L_0 u$  debe ser acotado.*

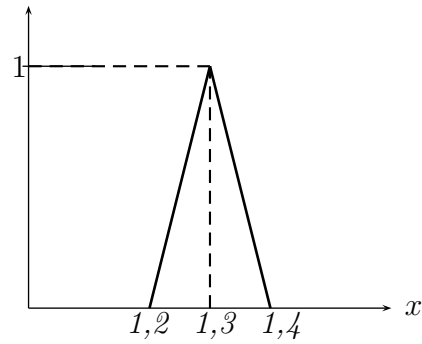
El conjunto difuso debe ser normal, puesto que nuestra concepción de un conjunto de “números reales cerca a  $a$ ” es satisfecha totalmente por  $a$  mismo, por lo tanto, el grado de pertenencia de  $a$  en cualquier conjunto debe ser 1. El soporte acotado de un número difuso y todos sus  $\alpha$ -niveles para  $\alpha \neq 0$  deben ser intervalos cerrados para permitirnos definir operaciones aritméticas sobre números difusos en términos de las operaciones aritméticas estándar sobre intervalos cerrados.

Dado que los  $\alpha$ -niveles de cualquier número difuso deben ser intervalos cerrados para todo  $\alpha \in (0, 1]$ , cada número difuso es un conjunto difuso convexo.

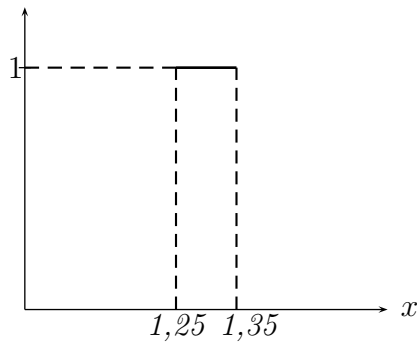
**Ejemplo 2.16.** *Casos especiales de números difusos incluyen números reales ordinarios e intervalos de números reales, como se ilustra a continuación, siendo (a) un número difuso dado por el número real ordinario 1,3; (b) un número difuso dado por el intervalo intervalo cerrado  $[1,25; 1,35]$ ; (c) un número difuso dado por medio de la proposición “cerca a 1,3”; y (d), un número difuso con una región plana (un intervalo difuso).*



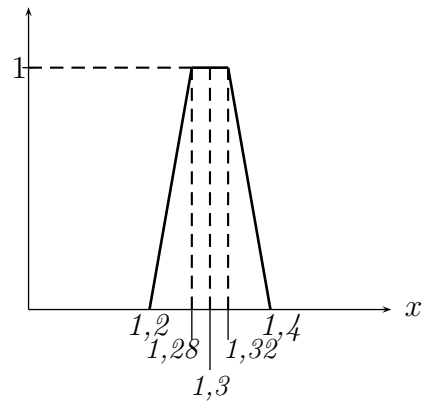
(a) Número difuso dado por el número real ordinario 1,3.



(c) Un número difuso dado por medio de la proposición “cerca a 1,3.”



(b) Número difuso dado por el intervalo cerrado  $[1,25; 1,35]$ .



(d) Un número difuso con una región plana (intervalo difuso).

Fig. 8. Ejemplos de números difusos.

Aunque las figuras de forma triangular y trapezoidal de las funciones de pertenencia mostradas en la figura anterior son usadas con mucha más frecuencia para representar números difusos, hay otras figuras que pueden ser utilizadas en diferentes aplicaciones. Además, las funciones de pertenencia de números difusos no necesariamente deben ser simétricas, como se ve en la figura dada a continuación:

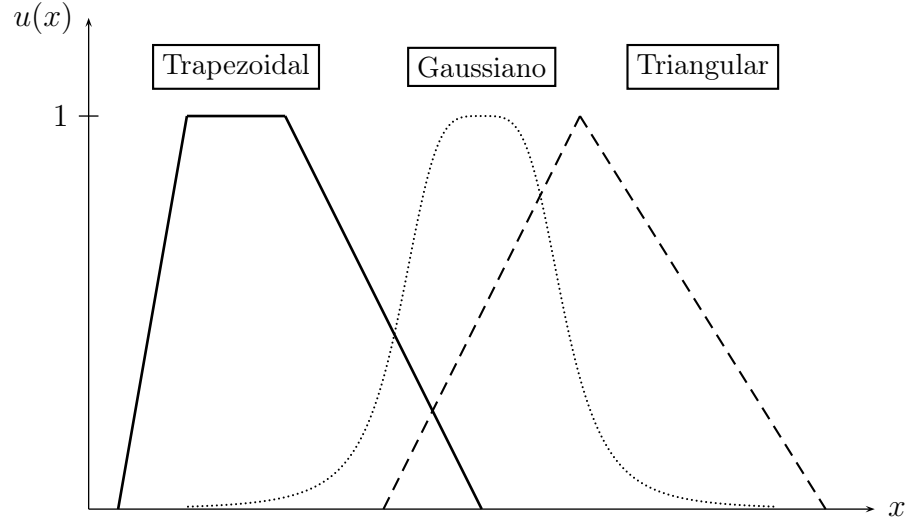


Fig. 9. Ejemplos de funciones de pertenencia de números difusos.

El siguiente teorema nos muestra que las funciones de pertenencia de números difusos pueden ser, en general, funciones definidas a trozos.

**Teorema 2.17.** *Sea  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Entonces,  $u$  es un número difuso si y sólo si existe un intervalo cerrado  $[a, b] \neq \emptyset$  tal que*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b], \\ l(x), & \text{si } x \in (-\infty, a), \\ r(x), & \text{si } x \in (b, \infty), \end{cases}$$

donde  $l(x)$  es una función de  $(-\infty, a)$  a  $[0, 1]$  que es creciente, continua por derecha, y  $l(x) = 0$  si  $x \in (-\infty, w_1)$ ;  $r(x)$  es una función de  $(b, \infty)$  a  $[0, 1]$  que es decreciente, continua por izquierda, y  $r(x) = 0$  si  $x \in (w_2, \infty)$ , donde  $w_1 \leq a$ ,  $w_2 \geq b \in \mathbb{R}$ .

### ***Demostración.***

( $\Rightarrow$ : Necesidad). Puesto que  $u$  es un número difuso,  $L_\alpha u$  es un intervalo cerrado para cada  $\alpha \in (0, 1]$ . Si  $\alpha = 1$ , entonces  $L_1 u$  es un intervalo no vacío, porque  $u$  es normal. Por consiguiente, existe una pareja  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $L_1 u = [a, b]$ , donde  $a \leq b$ . Esto es,  $u(x) = 1$  si  $x \in [a, b]$  y  $u(x) < 1$  si  $x \notin [a, b]$ . Ahora, sea  $l(x) = u(x)$  para cualquier  $x \in (-\infty, a)$ . Luego,  $0 \leq l(x) < 1$ , entonces  $0 \leq u(x) < 1$  para todo  $x \in (-\infty, a)$ .

Sea  $x \leq y < a$ ; luego

$$u(y) \geq \text{mín}[u(x), u(a)] = u(x)$$

por Teorema 2.13, puesto que  $u$  es convexo y  $u(a) = 1$ . Por lo tanto,  $l(y) \geq l(x)$ ; esto prueba que  $l$  es creciente.

Supongamos ahora que  $l(x)$  no es continua por la derecha. Esto significa que para algún  $x_0 \in (-\infty, a)$  existe una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \geq x_0$  para cualquier  $n$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = \alpha > l(x_0) = u(x_0).$$

Ahora,  $x_n \in L_\alpha u$  para cualquier  $n$  dado que  $L_\alpha u$  es un intervalo cerrado, por lo tanto, también  $x_0 \in L_\alpha u$ . Por consiguiente,  $l(x_0) = u(x_0) \geq \alpha$ , lo cual es una contradicción. Luego se tiene que  $l(x)$  es continua por derecha.

La prueba para la función  $r$  se demuestra de forma análoga a la de la función  $l$ .

Como  $u$  es un número difuso,  $L_0 u$  es acotado. Por lo tanto, existe una pareja  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = 0$  si  $x \in (-\infty, w_1) \cup (w_2, \infty)$ .

( $\Leftarrow$ : Suficiencia). Todo conjunto difuso  $u$  definido por el Teorema 2.17 es claramente normal, y su soporte  $L_0 u$  es acotado, puesto que  $L_0 u \subseteq [w_1, w_2]$ . Falta probar que  $L_\alpha u$  es un intervalo cerrado para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ .

Sean,

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \inf\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}, \\ y_\alpha &= \sup\{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\}, \end{aligned}$$

para cada  $\alpha \in (0, 1]$ . Necesitamos probar que  $L_\alpha u = [x_\alpha, y_\alpha]$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

Sea  $x_0 \in L_\alpha u$ , si  $x_0 < a$ ; luego  $l(x_0) = u(x_0) \geq \alpha$ . Esto es,  $x_0 \in \{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}$ , y consecuentemente,  $x_0 \geq \inf\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\} = x_\alpha$ .

Si  $x_0 > b$ , entonces  $r(x_0) = u(x_0) \geq \alpha$ . Esto es,  $x_0 \in \{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\}$  y, consecuentemente,  $x_0 \leq \sup\{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\} = y_\alpha$ . Claramente  $x_\alpha \leq a$  y  $y_\alpha \geq b$ ; por lo tanto  $[a, b] \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$ . Por consiguiente,  $x_0 \in [x_\alpha, y_\alpha]$ , luego tenemos que  $L_\alpha u \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$ . Debemos probar que  $x_\alpha, y_\alpha \in L_\alpha u$ .

Por la definición de  $x_\alpha$ , debe existir una sucesión  $\{x_n\}$  en  $\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\alpha$ , donde  $x_n \geq x_\alpha$  para cualquier  $n$ . Puesto que  $l$  es continua por derecha, tenemos

$$l(x_\alpha) = l\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(x_n) \geq \alpha.$$

Por lo tanto,  $x_\alpha \in L_\alpha u$ . De manera similar se demuestra que  $y_\alpha \in L_\alpha u$  y con esto terminamos de demostrar el teorema.

□

La implicación del Teorema 2.17 nos permite mostrar que todo número difuso puede ser representado de la forma allí descrita. En general, esta forma nos permite definir números difusos a manera de trozos, como lo ilustramos a continuación.

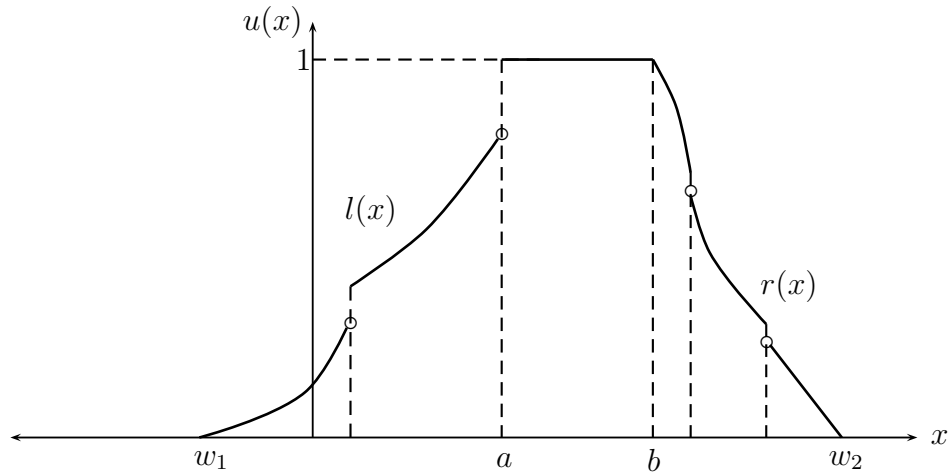


Fig. 10. Un número difuso  $u$  expresado por el Teorema 2.17.

**Ejemplo 2.18.** Sea  $u$  un número difuso con la siguiente función de pertenencia

$$u(x) = \begin{cases} l(x), & \text{si } x \in [0, 6), \\ 1, & \text{si } x = 6, \\ r(x), & \text{si } x \in (6, 14], \\ 0, & \text{encualquier otra parte,} \end{cases}$$

donde

$$l(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{6}\right)^2, & \text{si } x \in [0, 4), \\ \left(\frac{x}{6}\right)^{1/2}, & \text{si } x \in [4, 6), \end{cases} \quad r(x) = \begin{cases} \left(\frac{12-x}{6}\right)^{1/2}, & \text{si } x \in (6, 9], \\ 0,4, & \text{si } x \in (9, 12], \\ -0,2(x-14), & \text{si } x \in (12, 14]. \end{cases}$$

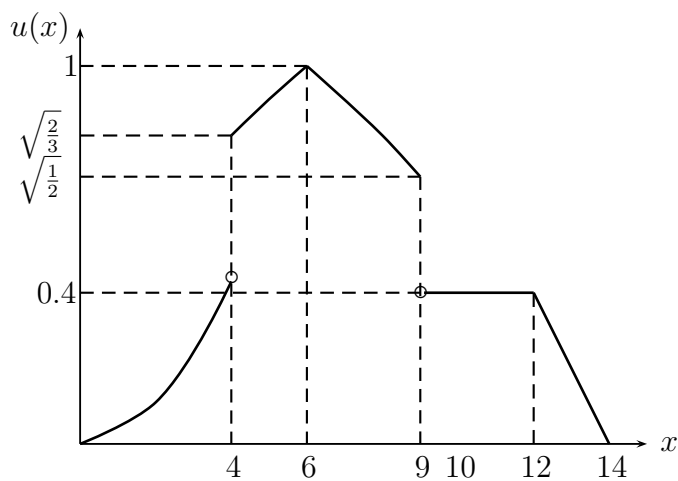


Fig. 11. Un número difuso cuya función de pertenencia es discontinua.

Luego, el  $\alpha$ -nivel de  $u$ , para cada  $\alpha \in (0, 1]$  es

$$L_\alpha u = \begin{cases} \left[ 6\sqrt{\alpha}, 14 - \frac{\alpha}{0,2} \right], & \text{si } \alpha \in [0; 0,4], \\ \left[ 6\sqrt{\alpha}, 9 \right], & \text{si } \alpha \in (0, 4; \frac{4}{9}), \\ \left[ 4, 9 \right], & \text{si } \alpha \in \left[ \frac{4}{9}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right], \\ \left[ 4, 12 - 6\alpha^2 \right], & \text{si } \alpha \in \left( \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right], \\ \left[ 6\alpha^2, 12 - 6\alpha^2 \right], & \text{si } \alpha \in \left( \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 \right]. \end{cases}$$

## 2.5. Operaciones de conjuntos difusos

### 2.5.1. Operaciones básicas

Las tres operaciones básicas en conjuntos clásicos, complemento, intersección y unión, pueden ser generalizadas al contexto difuso, de la siguiente manera:

- **Complemento de un conjunto difuso:** El complemento de un conjunto difuso es definido por una nueva función de pertenencia que está expresada por

$$u^c(x) = 1 - u(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Unión de conjuntos difusos:** La unión de conjuntos difusos definidos sobre el mismo universo  $X$  es un nuevo conjunto difuso con una función de pertenencia que representa el máximo grado de inclusión de un elemento en relación con los dos conjuntos dados. La nueva función está determinada por:

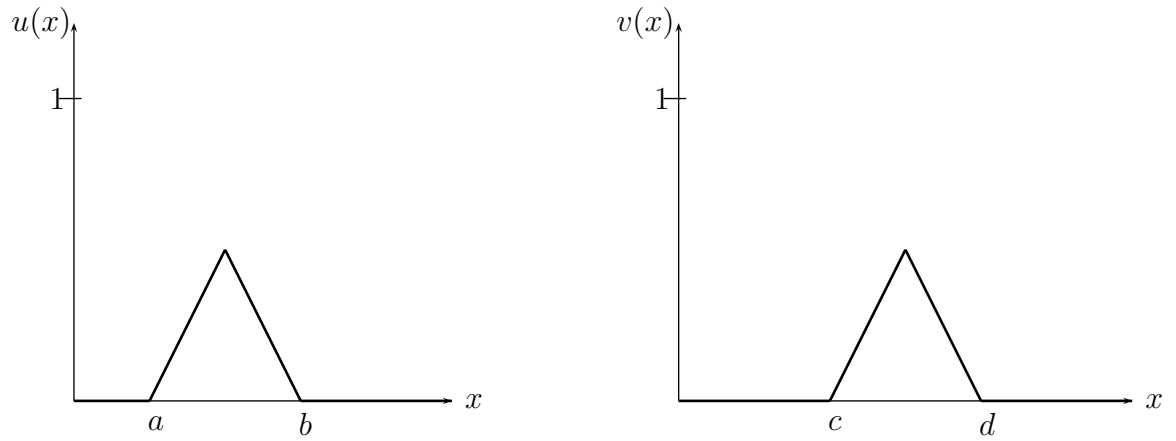
$$(u \cup v)(x) = \text{máx}[ u(x), v(x) ], \quad \forall x \in X.$$

- **Intersección de conjuntos difusos:** La intersección de conjuntos difusos definida sobre el mismo universo  $X$  es un nuevo conjunto difuso con una función de pertenencia que representa el mínimo grado de inclusión de un elemento en relación con los dos conjuntos dados. La nueva función está determinada por:

$$(u \cap v)(x) = \text{mín}[ u(x), v(x) ], \quad \forall x \in X.$$

En el siguiente ejemplo se ilustran gráficamente las operaciones entre conjuntos difusos.

**Ejemplo 2.19.** Sean  $u$  y  $v$  dos conjuntos difusos escogidos arbitrariamente.



Luego la unión, intersección y el complemento de  $u, v$  son dadas por:

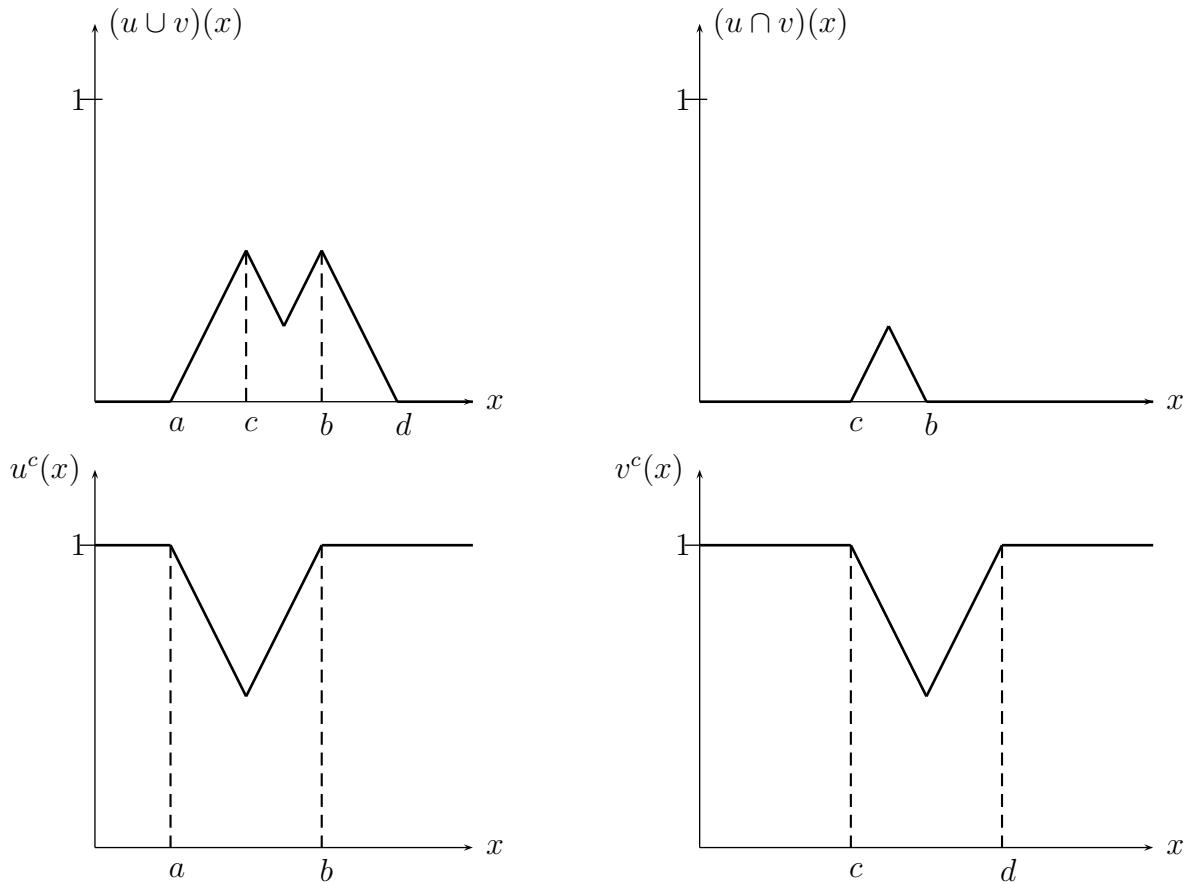


Fig. 12. Ilustración de operaciones básicas sobre conjuntos difusos.

## 2.5.2. Propiedades de conjuntos difusos

A continuación serán dadas las operaciones básicas entre conjuntos difusos, que son similares a las de la teoría de conjuntos clásicos.

Sean  $A, B, C$  conjuntos difusos; entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}A &= (A^c)^c, \\A \cup B &= B \cup A, \\A \cap B &= B \cap A, \\(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\A \cup A &= A, \\A \cap A &= A, \\A \cup (A \cap B) &= A, \\A \cap (A \cup B) &= A, \\(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c, \\(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c.\end{aligned}$$

Como ya se mencionó, las propiedades descritas anteriormente se cumplen para conjuntos clásicos. Una diferencia entre conjuntos difusos y conjuntos clásicos radica en que los conjuntos difusos no cumplen la Ley de contradicción y la Ley de la media inclusión, esto es,  $A \cap A^c = \emptyset$  y  $A \cup A^c = X$ , respectivamente.

Para verificar que los conjuntos difusos no cumplen la Ley de contradicción observamos que, si  $x \in A \cap A^c$ , entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\min(A(x), A(x)^c) &= 0, \\ \min(A(x), 1 - A(x)) &= 0.\end{aligned}$$

Sin embargo, para que esta igualdad no se cumpla basta tomar un  $x$  tal que  $A(x)$  pertenezca al intervalo  $(0,1)$ .

---

## 2.6. Representación de conjuntos difusos

---

Como ya se mencionó, el concepto de nivel juega un papel importante en la teoría de conjuntos difusos, y su importancia radica, entre otras cosas, en la posibilidad de

representar conjuntos difusos. Lo que pretendemos en esta sección es exponer cómo cada conjunto difuso puede ser representado en términos de todos sus niveles. Explícitamente esto será dado mediante el Teorema de Descomposición de conjuntos difusos, presentado a continuación.

**Teorema 2.20.** (*Teorema de Descomposición*) Para todo  $A \in \mathcal{F}(X)$ , se tiene que

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_{\alpha}A,$$

en donde  $\alpha L_{\alpha}A$  es definida por  $\alpha \cdot \chi_{L_{\alpha}A}$  (aquí  $\chi_{L_{\alpha}A}$  es la función característica del  $\alpha$ -nivel de  $A$ ).

**Demostración.** Sean  $x \in X$  y  $a = A(x)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_{\alpha}A \right) (x) &:= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_{\alpha}A(x) \\ &= \max \left[ \sup_{\alpha \in [0,a]} \alpha L_{\alpha}A(x), \sup_{\alpha \in (a,1]} \alpha L_{\alpha}A(x) \right]. \end{aligned}$$

Para cada  $\alpha \in [0, a]$ , tenemos que  $a \geq \alpha$ , y como  $A(x) = a$ , entonces  $A(x) \geq \alpha$ ; por lo tanto,  $L_{\alpha}A(x) = 1$ , y así  $\alpha L_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot 1 = \alpha$ . Para cada  $\alpha \in (a, 1]$  tenemos que  $a < \alpha$ , luego  $A(x) < \alpha$ , y así  $L_{\alpha}A(x) = 0$ ; por lo tanto,  $\alpha L_{\alpha}A(x) = 0$ . Consecuentemente,

$$\left( \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_{\alpha}A \right) (x) = \sup_{\alpha \in [0,a]} \alpha = a = A(x).$$

□

**Ejemplo 2.21.** Sea  $A$  un conjunto difuso con la siguiente función de pertenencia

$$A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \in [1, 2], \\ 3 - x, & \text{si } x \in [2, 3], \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$

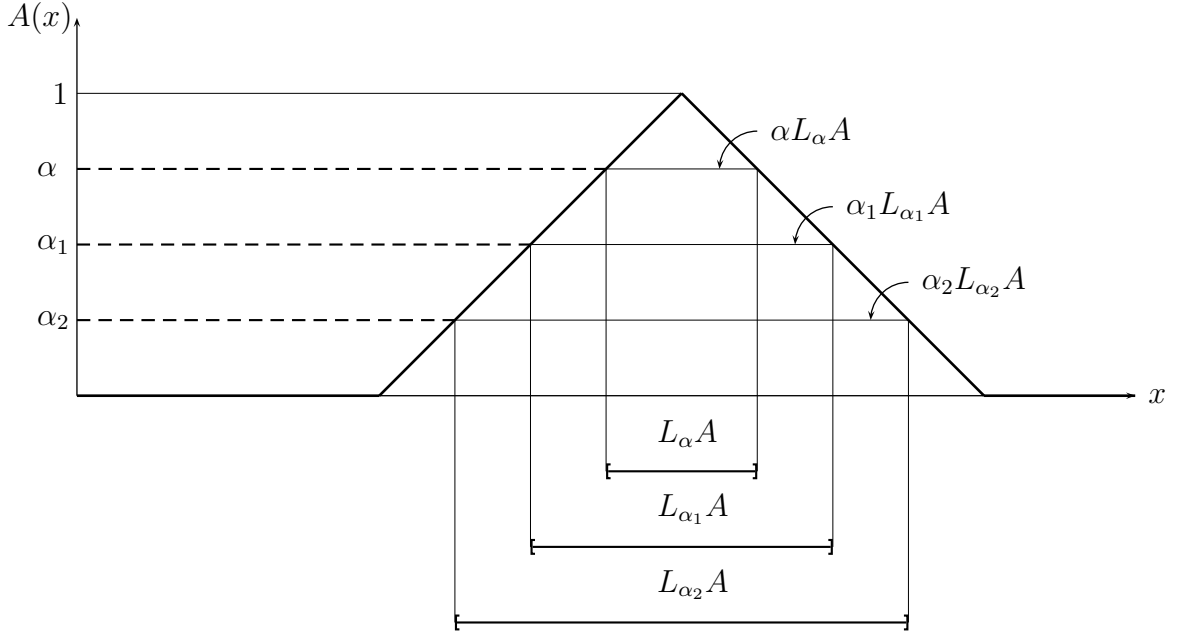


Fig. 13. Ilustración del Teorema 2.20.

El  $\alpha$ -nivel de  $A$ , para cada  $\alpha \in (0, 1]$  es el intervalo

$$L_\alpha A = [\alpha + 1, 3 - \alpha],$$

y por lo tanto el conjunto  $\alpha L_\alpha A$  está definido por la función de pertenencia

$$\alpha L_\alpha A = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in [\alpha + 1, 3 - \alpha], \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$

Así, de acuerdo con el Teorema de Descomposición, la unión de todos los  $\alpha L_\alpha A$  es igual al conjunto  $A$ .

---

## 2.7. Operaciones algebraicas sobre $\mathcal{F}(X)$

---

Es claro que si sumamos dos elementos  $u, v \in \mathcal{F}(X)$  de manera corriente, puede ser que no obtengamos un elemento de  $\mathcal{F}(X)$ ; esto es, puede existir un  $x \in X$  tal que

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0, 1].$$

La solución a este problema pasa por el llamado **Principio de Extensión** introducido por Zadeh (ver [13]). Si vamos a extender relaciones entre variables no-difusas a variables difusas, el Principio de Extensión nos dice cómo determinar la función de pertenencia del nuevo conjunto.

### 2.7.1. Principio de Extensión

Para introducir este principio discutiremos un caso especial utilizado en la teoría clásica. Dada una función  $f : X \rightarrow Y$  y un subconjunto clásico  $A$  de  $X$ , tenemos que  $f(A) = \{y : f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$  es un subconjunto de  $Y$ . Representando este conjunto a través de su función característica tenemos que

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in f(A), \\ 0, & \text{si } y \notin f(A); \end{cases}$$

podemos ver que

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{s \in f^{-1}(y)} \chi_A(s), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada  $y \in Y$ .

Podemos generalizar esta técnica para conjuntos difusos, tornando así el caso anterior en uno particular. Está es la “motivación” del principio de extensión de Zadeh.

Así, la función  $f : X \rightarrow Y$  puede ser extendida al contexto difuso como

$$\bar{f} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y),$$

donde  $\bar{f}$  es definida como

$$\bar{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada  $y \in Y$ .

**Ejemplo 2.22.** Supongamos que  $X = X_1 \times X_2$ , y considérese la función  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ . Entonces ella puede ser extendida al contexto difuso como

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) &\longrightarrow \mathcal{F}(Y) \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \bar{f}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

donde  $\bar{f}(u_1, u_2)$  es dada por:

$$\bar{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\{u_1(x_1), u_2(x_2)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada  $y \in Y$ , siendo  $f^{-1}(y)$  el conjunto de todos los puntos  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$  tales que  $f(x_1, x_2) = y$ .

Así, si suponemos que  $X_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $X_2 = \{-2, 2\}$ , y los conjuntos  $u_1$  y  $u_2$  son caracterizados por la función de pertenencia que aparece en las columnas segunda y cuarta de la tabla de abajo, podemos hallar la función de pertenencia para el conjunto difuso que está asociada con la función  $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ .

$x_1$	$u_1(x_1)$	$x_2$	$u_2(x_2)$	$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$	$\bar{f}(u_1, u_2)(y)$
-1	0,5	-2	0,4	-1	$\text{máx}\{0,4;0,4\} = 0,4$
-1	0,5	2	1	3	$\text{máx}\{0,5;0,9\} = 0,9$
0	0,1	-2	0,4	-2	$\text{máx}\{0,1\} = 0,1$
0	0,1	2	1	2	$\text{máx}\{0,1\} = 0,1$
1	0,9	-2	0,4	-1	$\text{máx}\{0,4;0,4\} = 0,4$
1	0,9	2	1	3	$\text{máx}\{0,5;0,9\} = 0,9$

Los valores resultantes al evaluar  $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$  son  $V = \{-2, -1, 2, 3\}$ . Hay dos parejas,  $(-1, -2)$  y  $(1, -2)$ , que tienen el mismo valor de  $y = -1$ , y también hay dos parejas,  $(-1, 2)$  y  $(1, 2)$ , con el mismo valor de  $y = 3$ .

Para estos dos conjuntos el máximo grado de pertenencia está dado por el Principio de Extensión; por ejemplo, para calcular  $\bar{f}(u_1, u_2)(y)$  para  $y = -1$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(u_1, u_2)(-1) &= \text{máx} [\text{mín}\{u_1(-1), u_2(-2)\} \quad , \quad \text{mín}\{u_1(1), u_2(-2)\}] \\
 &= \text{máx} [\text{mín}(0,5;0,4) \quad , \quad \text{mín}(0,9;0,4)] \\
 &= \text{máx} [0,4;0,4] \\
 &= 0,4.
 \end{aligned}$$

La definición de adición de conjuntos difusos y la multiplicación de un conjunto difuso por escalar sobre  $\mathcal{F}(X)$  puede hacerse mediante este principio de extensión, y además, se requiere que el espacio posea una estructura lineal.

Consideremos el caso particular  $X = \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.23.** Adición y producto por escalar en  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Si consideramos  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ . Entonces sobre ella se induce, mediante el Principio de extensión, la operación de adición sobre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  como

$$(u + v)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} \text{mín}\{u(x_1), v(x_2)\}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Análogamente, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \{0\}$  y  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , entonces considerando la aplicación

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
 f(x) &= \lambda x,
 \end{aligned}$$

y usando el principio de extensión, ella induce el producto  $\lambda u$  sobre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  como

$$(\lambda u)(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

De la definición anterior tenemos que  $u + v$  y  $\lambda u$  pertenecen a  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Una pregunta interesante de plantear es la siguiente: ¿Cómo son los  $\alpha$ -niveles de  $u + v$  y  $\lambda u$ ? Este interrogante lo aclararemos en el transcurso de la monografía, después de introducir algunos subespacios especiales de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

### 2.7.2. Operaciones aritméticas sobre números difusos

La aritmética difusa está basada en dos propiedades de los números difusos:

- i) Todo conjunto difuso, y por lo tanto cualquier número difuso, puede ser representado de manera única en términos de sus  $\alpha$ -niveles (ver Sección 2.6);
- ii) Los  $\alpha$ -niveles de cada número difuso son intervalos cerrados de números reales para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

Estas propiedades nos facilitan definir operaciones aritméticas sobre números difusos en términos de operaciones aritméticas sobre sus  $\alpha$ -niveles (es decir, operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados).

Un método empleado para desarrollar la aritmética difusa es utilizar el principio de extensión de Zadeh (Sección 2.7.1), por medio del cual las operaciones sobre números reales son extendidas a operaciones sobre números difusos. Asumamos en esta sección que los números difusos son representados por funciones continuas.

Sean  $u, v$  números difusos y sea  $*$  cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas básicas: adición  $+$ , substracción  $-$ , multiplicación  $\cdot$ , y división  $/$ . Luego, definimos un conjunto difuso sobre  $\mathbb{R}$ ,  $u * v$ , y definimos sus  $\alpha$ -niveles como:

$$L_\alpha(u * v) = L_\alpha u * L_\alpha v$$

para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ . (Cuando  $*$  = división, debemos recordar que  $0 \notin L_\alpha v$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .) Debido al Teorema 2.20,  $u * v$  puede ser expresado como

$$u * v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_\alpha(u * v).$$

Dado que  $L_\alpha(u * v)$  es un intervalo cerrado para cada  $\alpha \in (0, 1]$  y que  $u$  y  $v$  son números difusos,  $u * v$  es también un número difuso.

Ahora, usando el principio de extensión, las operaciones aritméticas sobre números reales se extienden a números difusos así:

$$(u * v)(z) = \sup_{z=x*y} \text{mín}\{u(x), v(y)\}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Más específicamente,

$$(u + v)(z) = \sup_{z=x+y} \text{mín}\{u(x), v(y)\},$$

$$(u - v)(z) = \sup_{z=x-y} \text{mín}\{u(x), v(y)\},$$

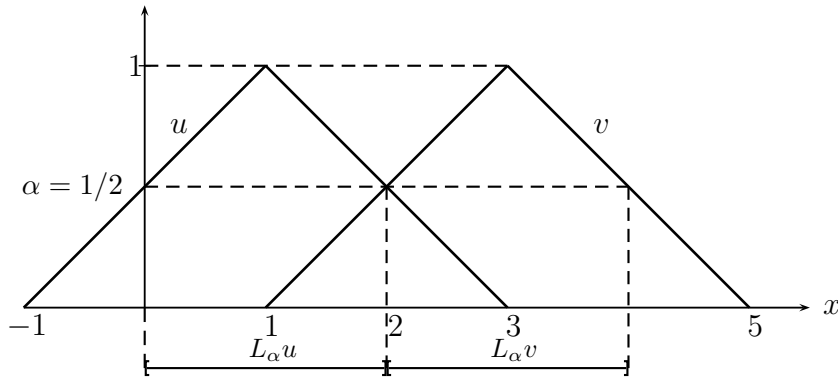
$$(u \cdot v)(z) = \sup_{z=x \cdot y} \text{mín}\{u(x), v(y)\},$$

$$(u/v)(z) = \sup_{z=x/y} \text{mín}\{u(x), v(y)\}.$$

También es importante aclarar que  $u * v$  definida por (2.1) es un conjunto difuso sobre  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.24.** Consideremos dos números difusos triangulares  $u$  y  $v$  definidos de la siguiente forma:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -1 \text{ y } x > 3, \\ (x+1)/2, & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ (3-x)/2, & \text{si } 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x > 3, \\ (x-1)/2, & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ (5-x)/2, & \text{si } 3 < x \leq 5. \end{cases}$$



Luego sus  $\alpha$ -niveles son:

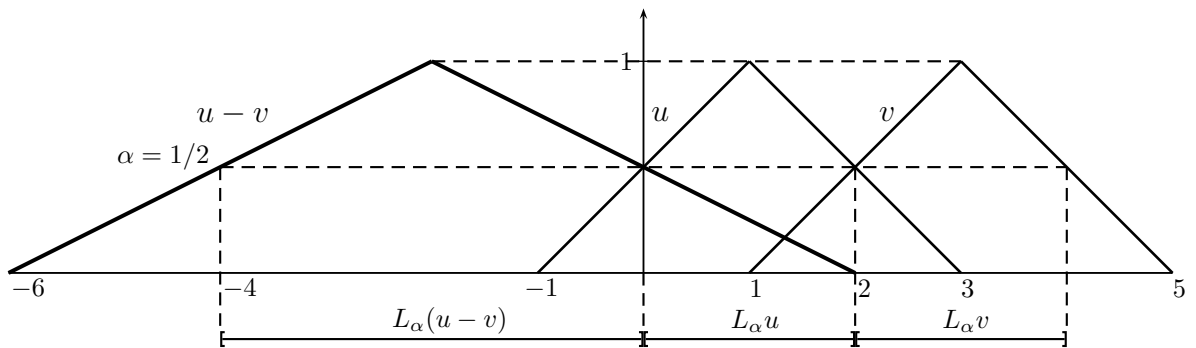
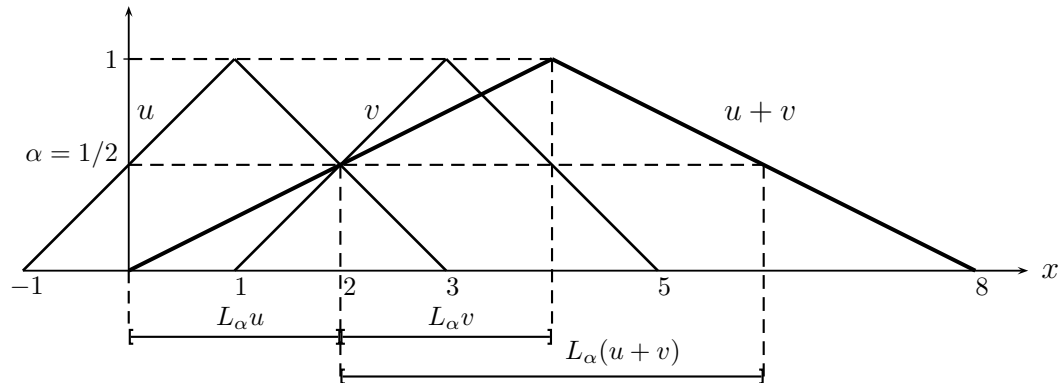
$$L_\alpha u = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha],$$

$$L_\alpha v = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

Recordemos que las operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados nos dan como resultado otro intervalo cerrado. Las cuatro operaciones sobre intervalos cerrados son definidas como:

$$\begin{aligned}
 [a, b] + [d, e] &= [a + d, b + e], \\
 [a, b] - [d, e] &= [a - e, b - d], \\
 [a, b] \cdot [d, e] &= [\text{mín}(ad, ae, bd, be), \text{máx}(ad, ae, bd, be)], \\
 [a, b] / [d, e] &= [a, b] \cdot [1/e, 1/d], \quad 0 \notin [d, e], \\
 &= [\text{mín}(a/d, a/e, b/d, b/e), \text{máx}(a/d, a/e, b/d, b/e)].
 \end{aligned}$$

Los gráficos de las operaciones suma, resta, multiplicación y división de estos números difusos están dados a continuación y respectivamente:



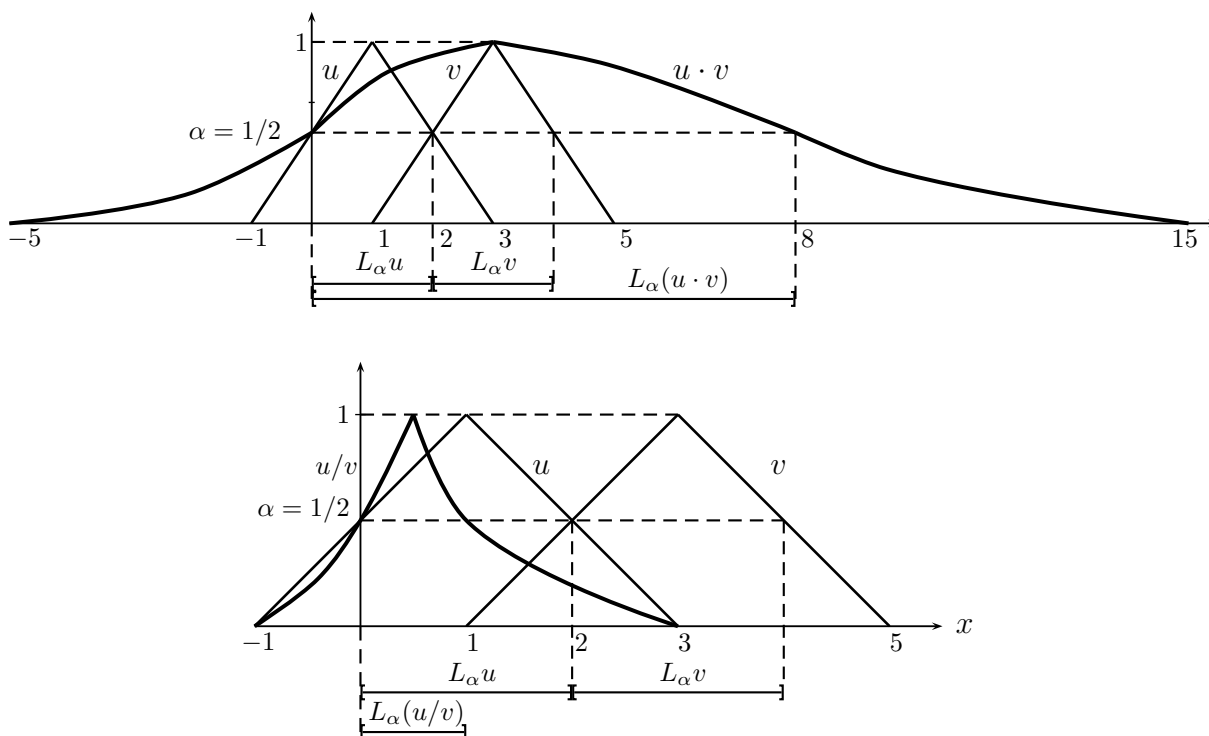


Fig. 14. Ilustración de las operaciones aritméticas sobre números difusos.

---

## 2.8. Relaciones difusas

---

Los estudios de asociaciones, relaciones o interacciones entre los elementos de diversas clases son de gran interés en el análisis y comprensión de muchos fenómenos del mundo real. Matemáticamente, el concepto de relación se formaliza a partir de la teoría de conjuntos. Una relación clásica describe una interrelación entre dos o más objetos  $y$ , siendo un conjunto, es representada por su función característica. Una relación de amistad entre dos personas, por ejemplo, designada como *amigos* considera que, en las relaciones humanas o alguien es su amigo o no lo es. Por otro lado, una relación de *amistad* difusa entre dos personas puede considerar un grado de amistad entre ellas. Siendo así, dos o más individuos pueden estar relacionados con diferentes grados de amistad.

Podemos decir entonces que una relación será difusa cuando optamos por la teoría de conjuntos difusos, y será clásica cuando optamos por la teoría de conjuntos clásicos para conceptualizar una relación en estudio. ¿Cuál de los modelos adoptar, dentro de estos dos? Esto depende del fenómeno estudiado. Aclaremos que la teoría difusa tiene mayor robustez, en el sentido de que ella incluye a la teoría clásica de conjuntos.

Recordemos que  $X \times Y$  denota el producto cartesiano de dos conjuntos  $X, Y$ ; esto es,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

Una relación entre conjuntos clásicos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es un subconjunto del producto cartesiano. Esta se denota por  $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Así,

$$R(X_1, X_2, \dots, X_n) \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n.$$

Como la relación  $R$  es un subconjunto del producto cartesiano, entonces ella puede ser representada por su función característica  $\chi_R$ . Así,

$$\chi_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R, \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R. \end{cases}$$

**Definición 2.25.** *Una relación difusa  $R$  sobre  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  es cualquier subconjunto difuso del producto cartesiano  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ . Si un producto cartesiano está formado por apenas dos conjuntos,  $X_1 \times X_2$ , la relación es llamada difusa binaria sobre  $X_1 \times X_2$ .*

La principal ventaja por la selección de la relación difusa es que una relación clásica indica apenas si hay o no relación entre dos objetos, en cuanto una relación difusa, además de indicar si existe o no relación, indica también el grado de esa relación.

**Ejemplo 2.26.** *Sea  $R$  una relación difusa entre los conjuntos  $X = \{\text{New York}, \text{París}\}$  y  $Y = \{\text{Londres}, \text{New York}, \text{Tokio}\}$ , las cuales representan el concepto de “muy distante”. Esta relación puede ser representada por una matriz así,*

$$\begin{pmatrix} & \text{New York} & \text{París} \\ \text{Londres} & 0.6 & 0.3 \\ \text{New York} & 0 & 0.7 \\ \text{Tokio} & 1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

---

## 2.9. El espacio $\mathcal{K}^n$

---

Consideramos nuevamente el espacio base  $X$  como siendo  $\mathbb{R}^n$ . Un subespacio de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  particularmente importante es el espacio de conjuntos difusos-compactos. Ellos han sido utilizados por diferentes autores en los más diversos ámbitos, y para nosotros será el hábitat ideal para hablar, entre otras cosas, sobre convergencia de conjuntos difusos.

**Definición 2.27.** *Definimos el espacio  $\mathcal{K}^n$  de conjuntos difusos-compactos sobre  $\mathbb{R}^n$ , como el conjunto,*

$$\mathcal{K}^n = \{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \mid L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in [0, 1] \}.$$

Podemos definir una métrica sobre  $\mathcal{K}^n$  haciendo,

$$D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha v).$$

**Proposición 2.28.** *D es métrica en  $\mathcal{K}^n$ .*

*Demostración.*

i)  $D(u, u) = 0$ .

Sea  $u \in \mathcal{K}^n$ ; luego tenemos que

$$\begin{aligned} D(u, u) &= \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha u) \\ &= \sup_{\alpha > 0} \left\{ \max \left\{ \sup_{a \in L_\alpha u} d(a, L_\alpha u), \sup_{a \in L_\alpha u} d(a, L_\alpha u) \right\} \right\} \\ &= \sup_{\alpha > 0} \{ \max (0, 0) \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Sean  $u, v \in \mathcal{K}^n$ . Queremos determinar que, si  $u \neq v$  entonces  $D(u, v) > 0$ .

Sea  $D(u, v) = d(a, b)$  para algún  $a \in L_\alpha u$  y  $b \in L_\alpha v$ ; usando la compacidad de  $L_\alpha u, L_\alpha v$ , tenemos que  $0 \leq D(u, v) < \infty$ . Si  $u \neq v$ , entonces  $L_\alpha u \neq L_\alpha v$ , y podemos suponer que  $a \in L_\alpha u$  y que  $a \notin L_\alpha v$ . Por consiguiente,

$$D(u, v) \geq \sup_{a \in L_\alpha u} d(a, L_\alpha v) > 0.$$

iii)  $D(u, v) = D(v, u)$ .

Sean  $u, v \in \mathcal{K}^n$ ; por lo tanto tenemos que  $D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha v)$ , y como  $H$  es la métrica de Hausdorff, entonces  $H(L_\alpha u, L_\alpha v) = H(L_\alpha v, L_\alpha u)$ . Lo que nos muestra que  $D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha v, L_\alpha u) = D(v, u)$ .

iv) Sean  $u, v, w \in \mathcal{K}^n$ . Mostremos que:

$$D(u, v) \leq D(u, w) + D(w, v).$$

$$\begin{aligned} D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha v) &\leq \sup_{\alpha > 0} \{ H(L_\alpha u, L_\alpha w) + H(L_\alpha w, L_\alpha v) \} \\ &\leq \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha w) + \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha w, L_\alpha v) \\ &\leq \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha w) + \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha v, L_\alpha w) \\ &\leq D(u, w) + D(v, w). \end{aligned}$$

□

Un resultado que nos será de mucha utilidad es la siguiente versión particular del Teorema de Representación de Negoita y Ralescu:

**Teorema 2.29.** [5] *Sea  $(N_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  una familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tales que:*

- i)  $N_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ ;
- ii) Si  $\alpha \leq \beta$ , entonces  $N_\beta \subseteq N_\alpha$ ;
- iii) Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$ , entonces  $N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$  (o, equivalentemente,  $H(N_{\alpha_p}, N_\alpha) \rightarrow 0$ , cuando  $\alpha_p \nearrow \alpha$ ).

Entonces la función  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin N_0, \\ \sup\{\alpha \mid x \in N_\alpha\}, & \text{si } x \in N_0, \end{cases}$$

es tal que  $L_\alpha u = N_\alpha$ , para todo  $\alpha \in (0, 1]$ , y  $L_0 u = \overline{\bigcup_{\alpha > 0} N_\alpha} \subseteq N_0$ .

## 2.10. Completitud y separabilidad de $(\mathcal{K}^n, D)$

Una de las propiedades fundamentales del espacio métrico  $(\mathcal{K}^n, D)$  es dada por el siguiente teorema.

**Teorema 2.30.** [14] *El espacio  $(\mathcal{K}^n, D)$  es completo.*

**Demostración.** Sea  $(u_p)$  una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{K}^n, D)$ . Entonces  $(L_\alpha u_p)$  es una sucesión de Cauchy en  $(K(\mathbb{R}^n), H)$ , para cada  $\alpha \in [0, 1]$ .

Como este espacio es completo, para cada  $\alpha \in [0, 1]$  existe  $K_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$H(L_\alpha u_p, K_\alpha) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty.$$

Denotemos la semimétrica de Hausdorff por  $H^*(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(B, \varepsilon)\}$ . Entonces,

$$H(A, B) = \max\{H^*(A, B), H^*(B, A)\}.$$

Mostraremos ahora que la familia  $(K_\alpha)$  verifica las condiciones de la versión particular del Teorema de Negoita y Ralescu (Teorema 2.29).

- i) La primera condición es inmediata (esto es,  $K_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ).

ii) Consideremos ahora  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} H^*(K_\beta, K_\alpha) &\leq H^*(K_\beta, L_\beta u_p) + H^*(L_\beta u_p, L_\alpha u_p) + H^*(L_\alpha u_p, K_\alpha) \\ &\leq H^*(K_\beta, L_\beta u_p) + H^*(L_\alpha u_p, K_\alpha) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que  $H^*(L_\beta u_p, L_\alpha u_p) = 0$ , ya que  $L_\beta u_p \subseteq L_\alpha u_p$ .

Por lo tanto tenemos que  $H^*(K_\beta, K_\alpha) = 0$ , y como  $K_\beta, K_\alpha$  son conjuntos compactos, tenemos que  $K_\beta \subseteq K_\alpha$ .

iii) Sea ahora  $(\alpha_p)$  una sucesión no decreciente en  $[0,1]$  y tal que  $\alpha_p \nearrow \alpha$ .

Por la Proposición 2.7 se deduce que  $K_\alpha \subseteq K_{\alpha_p}$  para  $p = 1, 2, 3, \dots$ , de donde obtenemos que  $K_\alpha \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{\alpha_p}$ .

Sea  $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{\alpha_p}$ . Luego,  $x \in K_{\alpha_p}$  para  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Entonces

$$\begin{aligned} H^*({x}, K_\alpha) &\leq H^*(K_{\alpha_p}, K_\alpha) \\ &\leq H^*(K_{\alpha_p}, L_{\alpha_p} u_m) + H^*(L_{\alpha_p} u_m, L_\alpha u_m) + H^*(L_\alpha u_m, K_\alpha) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

puesto que los términos primero y tercero convergen a cero cuando  $m \rightarrow \infty$ , mientras que el segundo término converge a cero cuando  $p \rightarrow \infty$  para cada  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Así,  $x \in K_\alpha$ , de modo que  $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{\alpha_p} \subseteq K_\alpha$ .

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos finalmente que

$$K_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{\alpha_p}.$$

Aplicando la versión particular del Teorema de Negoita y Ralescu (Teorema 2.29) tenemos que existe  $u \in \mathcal{K}^n$  tal que  $L_\alpha u = K_\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Más aún,

$$\begin{aligned} H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) &\leq H(L_\alpha u_p, L_\alpha u_m) + H(L_\alpha u_m, L_\alpha u) \\ &\leq D(u_p, u_m) + H(L_\alpha u_m, L_\alpha u) \\ &< \varepsilon + H(L_\alpha u_m, L_\alpha u) \end{aligned}$$

para todo  $p, m \geq n(\varepsilon)$ , puesto que  $(u_p)$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{K}^n, D)$ .

Tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$  obtenemos que  $H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) \leq \varepsilon$  para  $p \geq n(\varepsilon)$  uniformemente en  $\alpha \in [0, 1]$ , esto es  $D(u_p, u) \leq \varepsilon$ , para todo  $p \geq n(\varepsilon)$ .

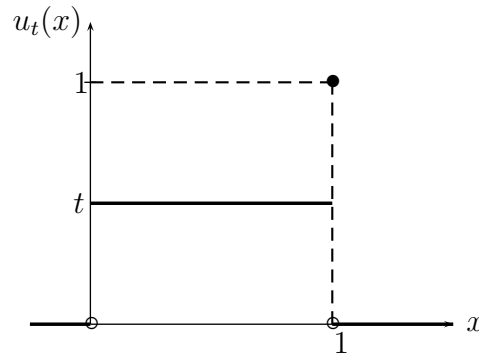
Por lo tanto, se concluye que  $u_p \rightarrow u$  en  $(\mathcal{K}^n, D)$ .

□

En cuanto a la separabilidad del espacio  $(\mathcal{K}^n, D)$ , la situación no es tan favorable, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.31.** Sea  $t \in (0, 1]$  y considérese la familia de funciones  $u_t : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definidas por

$$u_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [0, 1], \\ t, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



Observamos que  $L_0 u_t = [0, 1]$  para todo  $t$ , mientras que si  $\alpha \in (0, 1]$ , entonces

$$L_\alpha u_t(x) = \begin{cases} [0, 1], & \text{si } \alpha \in (0, t], \\ \{1\}, & \text{si } \alpha \in (t, 1]. \end{cases}$$

Luego tenemos que si  $t_1 \neq t_2$ , entonces  $D(u_{t_1}, u_{t_2}) = 1$ . Esto nos indica que el espacio  $(\mathcal{K}^n, D)$  no es separable.

No obstante, existen algunos importantes subespacios de  $(\mathcal{K}^n, D)$  que son completos y separables, como veremos más adelante (ver Sección 3.4).

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# Convergencia de conjuntos difusos

El objetivo principal de este capítulo es definir varios tipos de convergencia sobre el espacio  $\mathcal{K}^n$  de conjuntos difusos compactos sobre  $\mathbb{R}^n$ , y analizar sus interrelaciones.

Dentro de este contexto, presentaremos las nociones de *D-convergencia*, *L-convergencia*, *h-convergencia* y  $\Gamma$ -*convergencia*, para luego hacer un análisis comparativo entre ellas.

En este análisis, los subespacios  $\mathcal{K}_c^n$  de  $\mathcal{K}^n$  de conjuntos difusos-compactos, en los cuales la aplicación de nivel  $\alpha \in [0, 1] \rightarrow L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n)$  es continua, jugarán un papel relevante.

El estudio de la convergencia de conjuntos difusos y algunas de sus aplicaciones ha sido hecho por varios autores, incluyendo Greco, Moschen y Quelho [7], Kaleva [8], Kloeden [11] y Rojas-Medar y Román-Flores [18][19].

El análisis de Kloeden [11] fue hecho en el ámbito de los espacios localmente compactos, introduciendo la métrica  $h$  a través de la distancia de Hausdorff entre los sendografos de los conjuntos difusos. Allí se estudiarán algunas interesantes propiedades de la *h-convergencia* y sus relaciones con la *D-convergencia*. Posteriormente Kaleva [8], introduce la noción de *L-convergencia* y hace un estudio comparativo entre *D*, *L* y *h-convergencia*. Greco, Moschen y Quelho [7] comparan las convergencias anteriores con la  $\Gamma$ -*convergencia*.

Finalmente, Rojas y Román [18] consiguen resultados análogos a los de Greco [7], pero introduciendo la noción topológica de continuidad en nivel, mejorando de manera natural el trabajo sobre convergencia de conjuntos difusos.

Los resultados dados en este capítulo de la monografía son de gran importancia teórica para estudios posteriores, como por ejemplo, en el estudio de la integración difusa, problemas de optimización y control difuso.

---

### 3.1. $D, L, h$ y $\Gamma$ -convergencia sobre $\mathcal{K}^n$

---

Recordemos que

$$\mathcal{K}^n = \{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \mid L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n), \text{ para todo } \alpha \in [0, 1] \}.$$

Introduciremos ahora las convergencias anteriormente mencionadas sobre el espacio  $\mathcal{K}^n$ .

**Definición 3.1.** (*D-convergencia*)

Si  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ , decimos que  $u_p$  *D-converge* a  $u$  (notación:  $u_p \xrightarrow{D} u$ ), si  $D(u_p, u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

**Definición 3.2.** (*L-convergencia*)

Si  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ , decimos que  $u_p$  *converge en nivel* a  $u$  (notación:  $u_p \xrightarrow{L} u$ ), si  $H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

**Definición 3.3.** ( *$\Gamma$ -convergencia*)

Si  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ , decimos que  $u_p$   *$\Gamma$ -converge* a  $u$  (notación:  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$ ), si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{end}(u_p) = \text{end}(u),$$

es decir, si

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \text{end}(u_p) \subseteq \text{end}(u) \subseteq \liminf_{p \rightarrow \infty} \text{end}(u_p),$$

donde

$$\text{end}(u) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] \mid u(x) \geq \alpha\}$$

es el *endografo*<sup>1</sup> de  $u$ .

Kloeden[11] define la siguiente métrica sobre  $\mathcal{K}^n$ :

$$h(u, v) = H(\text{send}(u), \text{send}(v)),$$

donde

$$\text{send}(u) = (L_0 u \times [0, 1]) \cap \text{end}(u)$$

es el *sendografo*<sup>2</sup> de  $u$ .

---

<sup>1</sup>endo: prefijo en latín que significa dentro.

<sup>2</sup>Sendografo: abrev. Soporte del **endografo**

**Definición 3.4.** (*h-convergencia*)

Si  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ , decimos que  $u_p$  *h-converge* a  $u$  (notación:  $u_p \xrightarrow{h} u$ ), si  $h(u_p, u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

---

## 3.2. Comparaciones entre convergencias

---

Un resultado interesante dado por Greco [7], que da una caracterización para la  $\Gamma$ -convergencia en términos de conjuntos de nivel, es el siguiente:

**Proposición 3.5.** Si  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ , entonces  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$  si y solo si

$$\forall \alpha \in [0, 1] : \{u > \alpha\} \subseteq \liminf_{p \rightarrow \infty} L_\alpha u_p \subseteq \limsup_{p \rightarrow \infty} L_\alpha u_p \subseteq L_\alpha u.$$

Usando este resultado y las definiciones dadas, se obtiene que:

**Proposición 3.6.**

- i) *D-convergencia implica L-convergencia.*
- ii) *L-convergencia implica  $\Gamma$ -convergencia.*

**Demostración.**

- i) Sean  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ .

Como  $u_p \xrightarrow{D} u$ , entonces  $D(u_p, u) \rightarrow 0$ . Consecuentemente, por la definición de la métrica  $D$  tenemos que  $D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha v)$ , y así  $H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

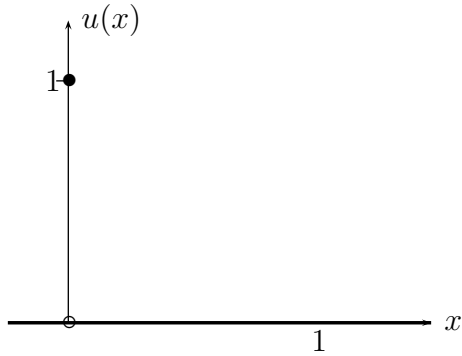
- ii) Como  $u_p \xrightarrow{L} u$ , entonces  $H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , para todo  $\alpha \in (0, 1]$ ; es decir,  $L_\alpha u_p \xrightarrow{H} L_\alpha u$ . Así, por el Teorema 1.45,  $L_\alpha u_p \xrightarrow{K} L_\alpha u$ , y por definición de convergencia de Kuratowski  $\liminf L_\alpha u_p = \limsup L_\alpha u_p = L_\alpha u$  cuando  $p \rightarrow \infty$ . Ahora, por la Proposición 1.31, tenemos que  $\liminf_{p \rightarrow \infty} L_\alpha u_p \subseteq \limsup_{p \rightarrow \infty} L_\alpha u_p \subseteq L_\alpha u$ ,

lo cual concluye que  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$ . □

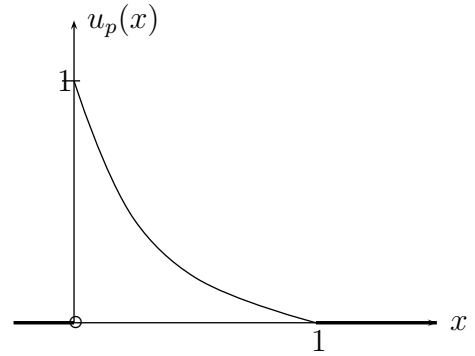
Las implicaciones recíprocas de la proposición anterior en general no son verdaderas, como veremos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.7.** Sean  $u_p, u \in \mathcal{K}^1$  definidas por:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$



$$u_p(x) = \begin{cases} (1-x)^p, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$



Notemos que para todo  $\alpha > 0$ ,  $L_\alpha u = 0$  y  $L_\alpha u_p = [0, 1 - \sqrt[p]{\alpha}]$ . Entonces

$$H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) = 1 - \sqrt[p]{\alpha} \rightarrow 0 \text{ cuando } p \rightarrow \infty, \text{ para todo } \alpha \in (0, 1].$$

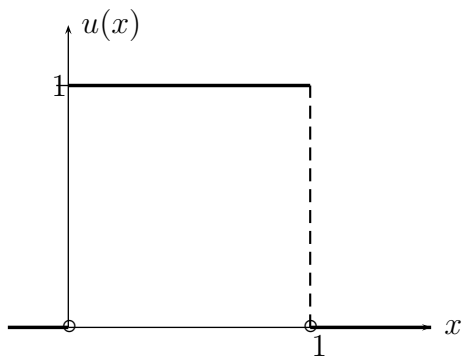
Concluimos entonces que  $u_p \xrightarrow{L} u$ . Sin embargo,

$$\sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) = 1, \text{ para todo } p \in \mathbb{N},$$

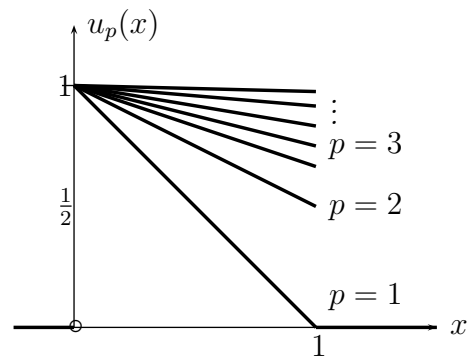
y consecuentemente  $u_p$  no converge a  $u$  en la métrica  $D$ .

**Ejemplo 3.8.** Sean  $u_p, u \in \mathcal{K}^1$  definidas por:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1], \end{cases}$$



$$u_p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{p}, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$



Notemos que  $u_p$   $\Gamma$ -converge a  $u$ . De otro lado observamos que  $L_1 u = [0, 1]$  y

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} L_1 u_p = \{0\},$$

luego  $u_p$  no converge en nivel a  $u$ .

---

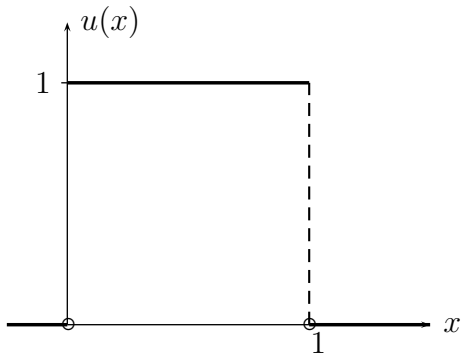
### 3.3. Relación con las convergencias clásicas

---

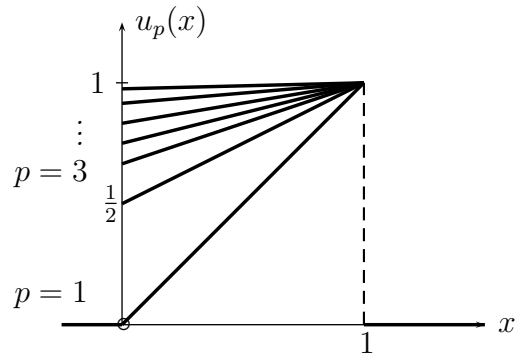
Es interesante notar que las convergencias definidas anteriormente no pueden ser, en general, comparadas con las convergencias en el sentido ordinario, como lo veremos en los próximos ejemplos.

**Ejemplo 3.9.** *Considérese las siguientes funciones:*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1], \end{cases}$$



$$u_p(x) = \begin{cases} \frac{x}{p} + 1 - \frac{1}{p}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$



Notemos que  $u_p \rightarrow u$  uniformemente, pero

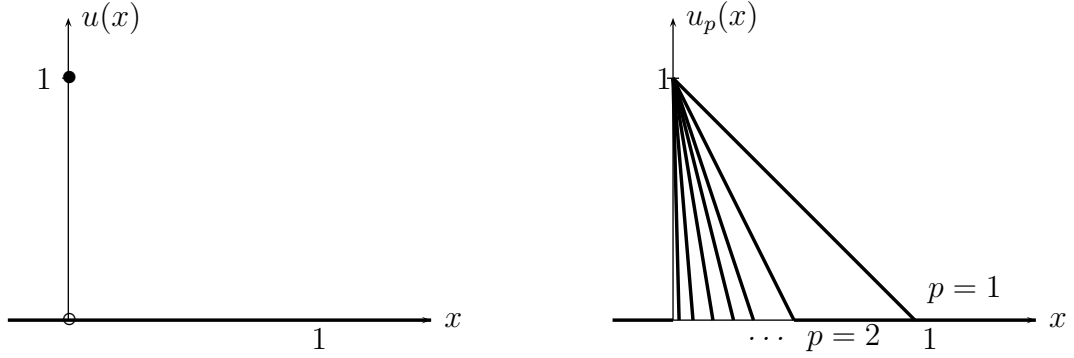
$$H(L_1 u_p, L_1 u) = H(\{1\}, [0, 1]) = 1, \text{ para todo } p = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,  $u_p$  no converge en nivel a  $u$ .

**Ejemplo 3.10.** Sean  $u_p, u \in \mathcal{K}^1$  definidas por:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

$$u_p(x) = \begin{cases} (1 - px), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Entonces,

$$\begin{aligned}
 D(u_p, u) &= \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) \\
 &= \sup_{\alpha > 0} H\left(\left[0, \frac{1}{p}(1 - \alpha)\right], \{0\}\right) \\
 &= \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{p}(1 - \alpha) \\
 &= \frac{1}{p} \rightarrow 0 \text{ cuando } p \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

De aquí que  $u_p \xrightarrow{D} u$ , pero  $u_p$  no converge uniformemente a  $u$ .

---

### 3.4. Equivalencias entre convergencias

---

Nuestra meta es ahora establecer condiciones que aseguren las implicaciones recíprocas en la Proposición 3.6. Iniciamos mencionando el siguiente resultado obtenido por Greco, Moschen y Quelho [7].

**Proposición 3.11.** Sean  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ ; entonces

$$u_p \xrightarrow{h} u \text{ si y sólo si } u_p \xrightarrow{\Gamma} u \text{ y } L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u.$$

Consideremos ahora el espacio de conjuntos difusos-compactos sobre  $\mathbb{R}^n$  con niveles continuos, es decir,

$$\mathcal{K}_c^n = \{u \in \mathcal{K}^n \mid \alpha \mapsto L_\alpha u \text{ continua}\}.$$

En realidad lo que deseamos demostrar es que las convergencias anteriormente definidas coinciden sobre el espacio  $\mathcal{K}_c^n$ . Para ello, necesitamos probar algunos lemas auxiliares.

**Lema 3.12.**  $u \in \mathcal{K}_c^n$  si y sólo si  $L_\alpha u = \overline{\{u > \alpha\}}$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ). Supongamos que  $u \in \mathcal{K}_c^n$ . Entonces queremos probar que

$$L_\alpha u = \overline{\{u > \alpha\}} \text{ para todo } \alpha \in (0, 1].$$

Supongamos que  $x_0 \in L_\alpha u$ , y sea  $(\alpha_p)$  una sucesión tal que  $\alpha_p \searrow \alpha$  (estrictamente).

De aquí tenemos que  $L_{\alpha_p} u \rightarrow L_\alpha u$ , ya que  $u \in \mathcal{K}_c^n$ . Podemos entonces elegir una sucesión  $(x_p)$  tal que  $x_p \in L_{\alpha_p} u$  para todo  $p$ , y  $x_p \rightarrow x_0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

Pero  $x_p \in L_{\alpha_p} u$  implica  $u(x_p) \geq \alpha_p > \alpha$  para todo  $p$ , es decir,  $(x_p) \subseteq \{u > \alpha\}$  y  $x_p \rightarrow x_0$ . Luego,  $x_0 \in \overline{\{u > \alpha\}}$ .

Para la inclusión reversa, claramente  $\overline{\{u > \alpha\}} \subseteq L_\alpha u$ .

( $\Leftarrow$ ). Supongamos ahora que  $L_\alpha u = \overline{\{u > \alpha\}}$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ . Deseamos probar entonces que  $u \in \mathcal{K}_c^n$ .

Probaremos primero la continuidad en los puntos 0 y 1.

En efecto, si  $\alpha_p \rightarrow 0$ , entonces es claro que  $\cup\{u \geq \alpha_p\} \subseteq L_0 u$ , de donde podemos concluir que  $\limsup\{u \geq \alpha_p\} \subseteq L_0 u$ .

Por otro lado,  $u(x) > 0$  implica que existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $u(x) \geq \alpha_p$ , para todo  $p \geq p_0$ . Así,  $x \in \{u \geq \alpha_p\}$  para todo  $p \geq p_0$ , y por lo tanto  $x \in \liminf_{p \rightarrow \infty} \{u \geq \alpha_p\}$ .

Consecuentemente,  $L_0 u \subseteq \liminf\{u \geq \alpha_p\}$ , es decir,

$$\alpha_p \rightarrow 0 \Rightarrow L_{\alpha_p} u \xrightarrow{H} L_0 u.$$

Si  $\alpha_p \rightarrow 1$  entonces  $L_1 u \subseteq \cap_{p \geq 1} \{u \geq \alpha_p\} \subseteq \liminf\{u \geq \alpha_p\}$ . Como

$$\limsup\{u \geq \alpha_p\} = \cap_{p \geq 1} \overline{\cup_{k \geq p} \{u \geq \alpha_k\}},$$

vemos que

$$x_0 \in \limsup\{u \geq \alpha_p\} \Rightarrow x_0 \in \overline{\cup_{k \geq p} \{u \geq \alpha_k\}}, \text{ para todo } p.$$

Ahora bien, si suponemos que  $u(x_0) < 1$ , entonces existen algún  $r > 0$  y algún  $q \in \mathbb{N}$  tales que

$$u(x_0) < r \leq \alpha_k \leq 1, \text{ para todo } k \geq q.$$

Claramente,  $\overline{\cup_{k \geq q} \{u \geq \alpha_k\}} \subseteq L_r u$ , de donde obtenemos que

$$x_0 \notin L_r u \Rightarrow x_0 \notin \overline{\cup_{k \geq q} \{u \geq \alpha_k\}} \Rightarrow x_0 \notin \limsup \{u \geq \alpha_p\}.$$

Esto nos muestra que si  $\alpha_p \rightarrow 1$ , entonces  $L_{\alpha_p} u \xrightarrow{H} L_1 u$ .

De las relaciones anteriores obtenemos la continuidad en nivel para los puntos 0 y 1.

Supongamos ahora que existe un punto de discontinuidad  $\alpha_0 \in (0, 1)$ .

Entonces existe  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha_p \rightarrow \alpha_0$  y hay una subsucesión  $(L_{\alpha_k} u)$  tal que

$$H(L_{\alpha_k} u, L_{\alpha_0} u) \geq \varepsilon, \text{ para todo } k.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $(\alpha_k)$  es monótona decreciente (ver nota al final de la demostración).

Si  $\alpha_k \searrow \alpha_0$ , tenemos que  $\alpha_k \geq \alpha_{k+1} \geq \dots \geq \alpha_0$ . Entonces

$$\cup_k L_{\alpha_k} u \subseteq \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\alpha_k} u \subseteq L_{\alpha_0} u.$$

Por otro lado, si  $u(x) > \alpha_0$  entonces  $u(x) > \alpha_k$  para todo  $k$  suficientemente grande. Así,  $\{u > \alpha_0\} \subseteq \lim_{p \rightarrow \infty} L_{\alpha_p} u$ , y deducimos por hipótesis que

$$\overline{\{u > \alpha\}} = L_{\alpha_0} u \subseteq \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\alpha_k} u.$$

Es decir,  $L_{\alpha_k} u \xrightarrow{K} L_{\alpha_0} u$ . Sin embargo como la convergencia se da dentro de un compacto (de hecho, tenemos que  $L_{\alpha_k} u \subseteq L_{\alpha_0} u$ , para todo  $k$ ) entonces el límite en el sentido de Kuratowski coincide con el límite en la métrica de Hausdorff (ver Teorema 1.45). Por lo tanto,  $L_{\alpha_k} u \xrightarrow{H} L_{\alpha_0} u$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Esto conduce a una contradicción, y la prueba está completa.

□

**Observación 3.13.** *En general, puede probarse que la aplicación de nivel  $\alpha \mapsto L_\alpha u$  es continua a izquierda cuando  $u \in \mathcal{K}^n$  (ver [14]).*

**Lema 3.14.** *Sean  $u_p \in \mathcal{K}^n$ ,  $u \in \mathcal{K}_c^n$ , con  $u_p \xrightarrow{L} u$  y  $L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u$ . Si  $\alpha_p \rightarrow \alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H(L_{\alpha_p} u_p, L_\alpha u) = 0.$$

**Demostración.** Combinaremos argumentos usados por Rojas, Bassanezi y Román [17], junto con una variante de argumentos usados por Kaleva[8]. Supongamos por

contradicción que  $H(L_{\alpha_p}u_p, L_\alpha u)$  no converge a cero. Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  y una subsucesión  $L_{\alpha_q}u_q$  tal que

$$H(L_{\alpha_q}u_q, L_\alpha u) \geq \varepsilon \text{ para todo } q.$$

Puesto que  $L_{\alpha_q}u_q \subseteq L_0u_q \xrightarrow{H} L_0u$ , podemos decir que  $L_{\alpha_q}u_q \subseteq \overline{B(L_0u, 1)}$  para valores suficientemente grandes de  $q$ .

De aquí, por el Teorema de Selección de Blaschke (Teorema 1.49),  $(L_{\alpha_q}u_q)$  contiene una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $(L_{\alpha_q}u_q)$  converge a un conjunto compacto  $K$  con  $H(K, L_\alpha u) \geq \varepsilon$ .

El resto de la demostración será dividida en dos casos:

Caso 1. Sea  $\alpha_p \nearrow \alpha$ .

Si  $\alpha = 0$ , entonces  $\alpha_p = 0$  para todo  $p$ , lo cual implica por hipótesis que

$$H(L_{\alpha_p}u_p, L_0u) = H(L_0u_p, L_0u) \rightarrow 0, \text{ cuando } p \rightarrow \infty.$$

Supongamos ahora que  $\alpha > 0$ .

Puesto que  $L_{\alpha_p}u_p \supseteq L_\alpha u_p$  para todo  $p$  y  $u_p \xrightarrow{L} u$ , es claro que

$$K = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_k} u_k} \supseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} L_\alpha u_k} = L_\alpha u. \quad (3.1)$$

Por otro lado, si  $x_0 \in K$ , entonces existe una sucesión  $(x_p)$  tal que  $x_p \in L_{\alpha_p}u_p$  para todo  $p$ , y  $x_p \rightarrow x_0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x_1 &\in L_{\alpha_1}u_1 \Rightarrow u_1(x_1) \geq \alpha_1, \\ x_2 &\in L_{\alpha_2}u_2 \Rightarrow u_2(x_2) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow x_2 \in L_{\alpha_1}u_2, \\ &\vdots \\ x_k &\in L_{\alpha_k}u_k \Rightarrow u_k(x_k) \geq \alpha_k \geq \alpha_{k-1} \geq \cdots \geq \alpha_1 \Rightarrow x_k \in L_{\alpha_1}u_k, \end{aligned}$$

y así en adelante.

Concluimos entonces que  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in L_{\alpha_1}u$ .

De la misma manera tenemos que

$$\begin{aligned} x_k &\in L_{\alpha_k}u_k \Rightarrow u_k(x_k) \geq \alpha_k, \\ x_{k+1} &\in L_{\alpha_{k+1}}u_{k+1} \Rightarrow u_{k+1}(x_{k+1}) \geq \alpha_{k+1} \geq \alpha_k \Rightarrow x_{k+1} \in L_{\alpha_k}u_{k+1}, \end{aligned}$$

y en general, para todo  $p > k$ , se tiene que

$$x_p \in L_{\alpha_p}u_p \Rightarrow u_p(x_p) \geq \alpha_p \geq \cdots \geq \alpha_k \Rightarrow x_p \in L_{\alpha_k}u_p.$$

Eligiendo arbitrariamente elementos

$$\bar{x}_1 \in L_{\alpha_k}u_1, \bar{x}_2 \in L_{\alpha_k}u_2, \dots, \bar{x}_{k-1} \in L_{\alpha_k}u_{k-1},$$

vemos que la sucesión  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$  converge a  $x_0$ , y concluimos que

$$x_0 \in \lim_{p \rightarrow \infty} L_{\alpha_k} u_p = L_{\alpha_k} u.$$

Por lo tanto,  $x_0 \in L_{\alpha_k} u$  para todo  $k$ . Como  $u \in \mathcal{K}_c^n$  (es decir, es continuo en nivel), podemos concluir que

$$x_0 \in \lim_{p \rightarrow \infty} L_{\alpha_k} u = L_{\alpha} u. \quad (3.2)$$

Finalmente, por (3.1) y (3.2) tenemos que  $K = L_{\alpha} u$ , lo cual es una contradicción.

Caso 2. Sea  $\alpha_p \searrow \alpha$ .

Si  $\alpha = 1$  para todo  $p$ ; entonces usando la hipótesis tenemos que

$$H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha} u) = H(L_1 u_p, L_1 u) \rightarrow 0, \text{ cuando } p \rightarrow \infty.$$

Supongamos ahora que  $\alpha < 1$ .

En este caso como  $L_{\alpha_k} u_k \subseteq L_{\alpha} u_k$  para todo  $k$ , deducimos que

$$K = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup L_{\alpha_k} u_k} \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup L_{\alpha} u_k} = L_{\alpha} u. \quad (3.3)$$

Por otra parte, si  $u(x_0) > \alpha$ , como  $\alpha_p \searrow \alpha$ , debe existir  $p_0$  tal que  $u(x_0) > \alpha_p$  para todo  $p \geq p_0$ ; es decir,  $x_0 \in L_{\alpha_p} u$  para todo  $p \geq p_0$ . De aquí deducimos que

$$x_0 \in L_{\alpha_p} u = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq n} L_{\alpha_p} u_k}, \quad p \geq p_0.$$

Como  $L_{\alpha_p} u_k \subseteq L_{\alpha_k} u_k$  para todo  $k \geq p$  y la sucesión  $(\overline{\bigcup_{k \geq n} L_{\alpha_k} u_k})$  es monótona decreciente, tenemos que

$$x_0 \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_p} u_p} = K.$$

Consecuentemente,  $\{u > \alpha\} \subseteq K$ . Por el Lema 3.12 obtenemos que

$$L_{\alpha} u = \overline{\{u > \alpha\}} \subseteq K. \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) concluimos que  $L_{\alpha} u = K$ , lo cual conduce a una contradicción.

Así en todos los casos obtenemos que

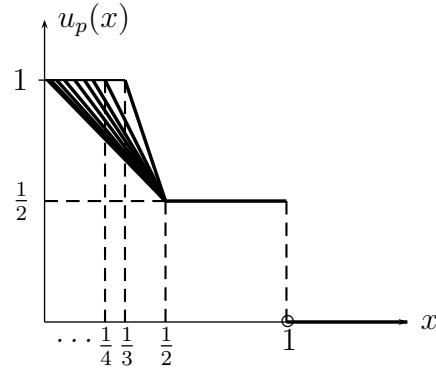
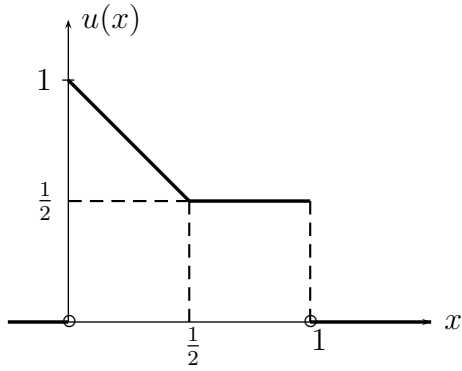
$$H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha} u) \rightarrow 0, \text{ cuando } p \rightarrow \infty,$$

y eso completa la demostración del Lema 3.14. □

El siguiente ejemplo nos mostrará que la hipótesis  $u \in \mathcal{K}_c^n$  en el lema anterior es absolutamente necesaria.

**Ejemplo 3.15.** Sean

$$u(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1/2, & \text{si } 1/2 < x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad u_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ 1 + \frac{p}{2-p}(x - 1/p), & \text{si } \frac{1}{p} < x \leq 1/2, \\ u(x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Consecuentemente, tenemos que

$$L_\alpha u = \begin{cases} [0, 1], & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ [0, 1 - \alpha], & \text{si } 1/2 < \alpha \leq 1/2; \end{cases} \quad L_\alpha u_p = \begin{cases} [0, 1], & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \left[0, \frac{2-p}{p}(\alpha - 1) + \frac{1}{p}\right], & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que  $u_p \xrightarrow{L} u$  y  $L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u$ .

Ahora, consideramos la sucesión  $\alpha_p = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^p}{p}$  para  $p \geq 3$ .

Entonces, tenemos que  $\alpha \rightarrow 1/2$  cuando  $p \rightarrow \infty$  y

$$H(L_{\alpha_p} u_p, L_{1/2} u) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_p \leq 1/2, \\ \alpha_p + \frac{1}{p}(1 - 2\alpha_p), & \text{si } 1/2 < \alpha_p \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que  $L_{\alpha_p} u_p$  no converge a  $L_{1/2} u$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

Estamos listos ahora para probar el principal resultado de esta sección.

**Teorema 3.16.** Sean  $u_p \in \mathcal{K}^n, u \in \mathcal{K}_c^n$ . Entonces las siguientes relaciones son equivalentes:

- i)  $u_p \xrightarrow{D} u$ ;
- ii)  $u_p \xrightarrow{L} u$  y  $L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u$ ;
- iii)  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$ ,  $L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u$  y  $L_1 u_p \xrightarrow{H} L_1 u$ ;
- iv)  $u_p \xrightarrow{h} u$  y  $L_1 u_p \xrightarrow{H} L_1 u$ .

**Demostración.**

$i) \Rightarrow ii)$

Por la Proposición 3.6 tenemos que

$$\text{si } u_p \xrightarrow{D} u, \text{ entonces } u_p \xrightarrow{L} u.$$

Ahora, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $p_0$  tal que

$$D(u_p, u) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u_p, L_\alpha u) < \varepsilon/3, \text{ para todo } p \geq p_0. \quad (3.5)$$

Consideremos una sucesión cualquiera  $\alpha_k \rightarrow 0$ . Entonces por el Lema 3.12 (ver demostración de este lema, en la parte de suficiencia), sabemos que  $L_{\alpha_k} u_p \xrightarrow{H} L_{\alpha_0} u_p$  y  $L_{\alpha_k} u \xrightarrow{H} L_{\alpha_0} u$ . Así,

$$H(L_{\alpha_k} u, L_0 u) < \varepsilon/3 \text{ y } H(L_{\alpha_k} u_p, L_0 u_p) < \varepsilon/3, \quad (3.6)$$

para  $k$  suficientemente grande. Luego, por (3.5) y (3.6) tenemos que

$$H(L_0 u_p, L_0 u) \leq H(L_0 u_p, L_{\alpha_k} u_p) + H(L_{\alpha_k} u_p, L_{\alpha_k} u) + H(L_{\alpha_k} u, L_0 u) < \varepsilon,$$

para  $k$  suficientemente grande.

Es decir,  $H(L_0 u_p, L_0 u) < \varepsilon$  para todo  $p \geq p_0$ , de donde concluimos la implicación.

$ii) \Rightarrow i)$

Para cada  $p \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\begin{aligned} f_p : [0, 1] &\longrightarrow [0, \infty) \\ f_p(\alpha) &= H(L_\alpha u_p, L_\alpha u). \end{aligned}$$

Mostraremos que  $f_p \rightarrow 0$  continuamente sobre  $[0, 1]$ .

Puesto que  $u \in \mathcal{K}_c^n$ , tenemos que

$$L_{\alpha_p} u \xrightarrow{H} L_{\alpha_0} u \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Así

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\alpha_p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha_p} u) \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} [H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha_0} u) + H(L_{\alpha_0} u, L_{\alpha_p} u)] \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha_0} u) + \lim_{p \rightarrow \infty} H(L_{\alpha_0} u, L_{\alpha_p} u) \\ &= 0 \quad (\text{por (3.7) y Lema 3.14.}) \end{aligned}$$

De tal suerte,  $f_p$  converge continuamente a cero sobre  $[0, 1]$  y, consecuentemente, por la compacidad de  $[0, 1]$  tenemos que  $f_p$  converge uniformemente a cero en  $[0, 1]$  (ver [18]).

Esto equivale a decir que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $p_0$  tal que  $|f_p(\alpha)| < \varepsilon$  para todo  $p \geq p_0$ , es decir,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} |f_p(\alpha)| = \sup_{\alpha \in [0,1]} H(L_{\alpha} u_p, L_{\alpha} u) < \varepsilon, \quad \text{para todo } p \geq p_0.$$

En otras palabras, tenemos que  $D(u_p, u) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

*ii)  $\Rightarrow$  iii)*

Es consecuencia de la Proposición 3.6.

*iii)  $\Rightarrow$  ii)*

Sea  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces, por la Proposición 3.5, tenemos que

$$\{u > \alpha\} \subseteq \liminf L_{\alpha} u_p \subseteq \limsup L_{\alpha} u_p \subseteq L_{\alpha} u.$$

Así, tomando las clausuras y usando el hecho de que tanto el límite superior como el inferior son conjuntos cerrados y el Lema 3.12 (recordemos que  $u \in \mathcal{K}_c^n$ ), tenemos que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{u_p \geq \alpha\} = \lim_{p \rightarrow \infty} L_{\alpha} u_p = L_{\alpha} u.$$

En consecuencia, puesto que la convergencia se da dentro de un conjunto compacto (ver Teorema 1.45), deducimos que

$$H(L_{\alpha_p} u_p, L_{\alpha} u) \rightarrow 0 \quad \text{para todo } \alpha \in (0, 1] \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty.$$

Esto muestra que  $u_p \xrightarrow{L} u$ .

*iii)  $\Leftrightarrow$  iv)*

Esto es consecuencia inmediata de la Proposición 3.11, y completa la demostración del Teorema.

□

**Observación 3.17.**

- a) *Recalcamos que en el Ejemplo 3.7,  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$  y  $u_p$  converge a  $u$  en nivel, pero la  $D$ -convergencia falla debido a que  $L_0u_p$  no converge a  $L_0u$  en la métrica  $H$ .*
- b) *En el Ejemplo 3.8,  $u_p, u \in \mathcal{K}^n$ ,  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$  y  $L_0u_p \xrightarrow{H} L_0u$ , pero la  $L$ -convergencia falla debido a que  $L_1u_p$  no converge a  $L_1u$  en la métrica  $H$ .*

**Proposición 3.18.**  *$(\mathcal{K}^n, h)$  es un espacio separable.*

**Demostración.** Es claro que si  $u \in \mathcal{K}^n$  entonces  $send(u) \in K(\mathbb{R}^{n+1})$ , de tal modo que la aplicación  $u \mapsto send(u)$  define una isometría del espacio métrico  $(\mathcal{K}^n, h)$  en el espacio  $(K(\mathbb{R}^{n+1}), H)$ .

Como este último es un espacio separable, entonces  $(\mathcal{K}^n, h)$  también es un espacio métrico separable.  $\square$

Recordemos que si  $u, v \in \mathcal{K}^n$ , entonces

$$h(u, v) = H(send(u), send(v)),$$

en donde

$$send(u) = (L_0u \times [0, 1]) \cap end(u)$$

es el sendografo de  $u$ , y

$$end(u) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] \mid u(x) \geq \alpha\}$$

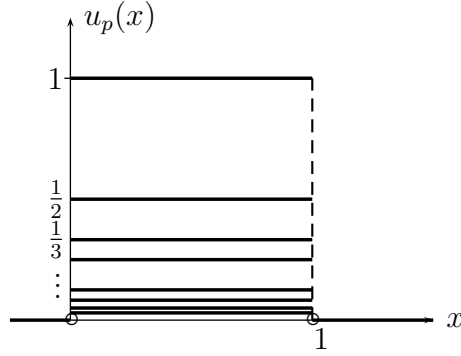
es el endografo de  $u$ .

En cuanto a la completitud de  $(\mathcal{K}^n, h)$ , la situación no es tan favorable, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.19.** *Definamos la sucesión*

$$u_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 1/p, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $p = 1, 2, \dots$ . Entonces  $(u_p)$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{K}^n, h)$ , la cual no es convergente sobre  $(\mathcal{K}^n, h)$ .



En efecto, tenemos que

$$h(u_p, u_q) = \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } p, q \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, si  $u_p \xrightarrow{h} u \in \mathcal{K}^n$ , entonces por el Teorema de Kloeden ([11], [15]) debe tenerse necesariamente que  $L_0 u_p \xrightarrow{H} L_0 u$ , y en consecuencia obtenemos que

$$L_0 u = [0, 1]. \quad (3.8)$$

Sin embargo, en este caso, observamos que  $(send(u_p))$  es una sucesión decreciente, y por lo tanto,

$$send(u_p) \xrightarrow{H} \bigcap_{p=1}^{\infty} send(u_p) = send(u),$$

de donde

$$send(u) = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \cup \{(0, y) \mid y \in [0, 1]\}.$$

Luego

$$u(0) = 1 \quad \text{y} \quad u(x) = 0 \quad \text{en otra parte.} \quad (3.9)$$

Por (3.8) y (3.9) vemos que  $L_0 u_p$  no puede converger en la métrica  $H$  a  $L_0 u$ .

Esto nos muestra que el espacio  $(\mathcal{K}^n, h)$  no es completo.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Aplicaciones

Las aplicaciones de la teoría de conjuntos difusos, a pesar de su corta historia, se han estado multiplicando y crecen a una tasa excepcional, ya que esta teoría es capaz de resolver problemas relacionados con la incertidumbre de la información o del conocimiento, proporcionando un método formal para la expresión del conocimiento en forma entendible y comprensible para las personas.

A diferencia de la lógica convencional tradicional, la teoría difusa fue extendida para abarcar el concepto de “parcialmente verdad” (valores entre lo “absolutamente cierto” y lo “absolutamente falso”), y por lo tanto escoger cuál es la mejor decisión después de “considerar” diferentes y posibles variables en conflicto. Esto hace que se pueda asegurar y casi garantizar un amplio campo de aplicaciones con un alto grado de interés. Entre otras podemos mencionar aplicaciones en el campo de las ingenierías mecánica, civil, industrial, etc.

---

### 4.1. Ingeniería mecánica

---

Uno de los principales problemas en ingeniería mecánica es realizar los procesos tales como fabricación o ensamblaje lo más exacto posible, de manera que al final del ciclo la imprecisión sea virtualmente eliminada. Es allí donde entra a trabajar la teoría de conjuntos difusos, en la cual las funciones de pertenencia son interpretadas como representaciones del ingeniero. En términos subjetivos, el ingeniero quizás exprese diferentes

dimensiones de diseño. Lo más apropiado es utilizar números difusos, representando descripciones tales como “cerca a 15 cm” o “más pequeños de 50 kg”.

Estas funciones de pertenencia de conjuntos difusos pueden representar características importantes, tanto físicas como químicas, entre otras; por ejemplo, funciones expresadas en términos de corrosión, expansión térmica, conductividad o algunas otras propiedades del material.

Entre las aplicaciones más concretas en este campo se destacan: el sistema de frenado del tren-bala en Japón, que permite que se detenga en estaciones con un margen de menos de 1 cm respecto a la posición previamente señalada; en el control de maquinaria de perforación de túneles y para el control de ascensores que mejoran la eficiencia de estos. También dentro del sector automovilístico existe gran número de patentes sobre sistemas de frenado ABS y en las cajas de cambios automáticas (Nissan).

---

## 4.2. Ingeniería civil

---

La ingeniería civil, en comparación con otras ingenierías, es diferente en el sentido de que las teorías disponibles nunca abarcan completamente la situación actual. Esto es, debido a que cada proyecto en ingeniería civil es único, y quizás nunca haya un cambio desde las pruebas hasta el prototipo, como en otras ingenierías. Es preciso recordar que el ingeniero trabaja con diferentes variables (incertidumbre), ya que los estándares de seguridad requeridos para las construcciones de ingeniería civil (tales como puentes, edificios, represas, etc.) son extremadamente altas.

Una clase importante de problemas en ingeniería civil para la cual la teoría de conjuntos difusos ha resultado útil es avalando o evaluando construcciones ya existentes. Ejemplos típicos de estos problemas son fatigas en estructuras metálicas, calidad de los pavimentos en autopistas, daños en edificios después de sismos o terremotos, mantenimiento de puentes, entre otras (ver [10], pág. 419-426).

---

## 4.3. Ingeniería industrial

---

En general, la ingeniería industrial es una disciplina interesada en los sistemas de diseño, operación y control, donde los componentes del proyecto son personas, maquinarias, materiales y dinero. Contrariamente a otras disciplinas, la ingeniería industrial no sólo trata de temas referidos a sistemas hechos por el hombre, sino también en temas como la ergonomía, economía y organización entre otros.

Dos áreas que han sido bien desarrolladas por la Teoría de conjuntos difusos que son directamente relevantes en la ingeniería industrial son el “control difuso” y la “toma de decisiones difusas”. Los conjuntos difusos son convenientes para estimar la vida de servicio de piezas y equipos bajo condiciones de operación. La información acerca de la vida de servicio de un equipo viene dada por el fabricante. Sin embargo, esta estimación no es razonablemente precisa. Una etiqueta típica para estimar la vida de servicio de algún equipo es: “Bajo condiciones normales de operación, la vida de servicio estimada del equipo está alrededor de  $x$  años”.

El término *bajo condiciones normales de operación* debe ser expresado convenientemente por una colección de conjuntos difusos, uno para cada característica operacional (variable). El término *alrededor de  $x$  años* es expresado por un número difuso, el cual se extiende alrededor de su punto máximo en  $x$ .

También dentro del apoyo a la toma de decisiones se ha utilizado para la búsqueda de campos críticos en la ejecución de proyectos y asesoramiento a la inversión.

---

## 4.4. Medicina

---

La imprecisión y la incertidumbre juega un papel importante dentro del campo de la medicina. Por esta razón se ha convertido en una de las áreas más importantes en la aplicación de la teoría de conjuntos difusos. Dentro de este campo, la incertidumbre se encuentra en los procesos de diagnóstico de enfermedades.

Una simple enfermedad puede manifestarse en formas diferentes, en diferentes tipos de pacientes y en etapas distintas. El médico generalmente reúne la información acerca del paciente por su historia clínica, exámenes físicos, exámenes de laboratorio y otros procedimientos como rayos-X o ultrasonidos. La información recolectada conlleva cierto grado de incertidumbre, ya sea exagerada, poco evaluada o incompleta, o en otros casos patológicamente confusa.

El deseo de mejorar y comprender los diagnósticos médicos ha inducido a modelar estos procesos, recientemente, con el uso de conjuntos difusos. Estos modelos varían en el grado para el cual tratan con diferentes aspectos en el diagnóstico médico, tales como síntomas, patrones en etapas diferentes de las enfermedades, diagnósticos preliminares y finales dentro del proceso mismo (ver [9], pág. 246-254).

Las aplicaciones de la teoría de conjuntos difusos en medicina no sólo se aplican en los diagnósticos médicos. Otras aplicaciones, por ejemplo, se encuentran en: miembros artificiales; sistemas auxiliares de navegación en lugares donde se encuentra visualmente obstaculizado; robots diseñados para asistir a pacientes; incorporación de sistemas expertos en el tratamiento de diabetes; toma de decisiones difusas para la determinación de terapias adecuadas; patrones de reconocimiento en el procesamiento para el

análisis de rayos-X; acupuntura; e incluso en el análisis de los ritmos cardiacos o de la arteriostenosis coronaria.

---

## 4.5. Otras aplicaciones

---

La teoría de conjuntos difusos ha entrado con fuerza en el sector comercial, sobre todo en la fabricación de electrodomésticos, como por ejemplo:

*Lavadoras Fuzzy*: que evalúan la carga y se ajustan por sí mismas (detergente necesario, temperatura del agua, tipo de ciclo de lavado), monitoreando continuamente el p.h. del agua de descarga, y por lo tanto la lavadora “sabe” cuándo está limpia la ropa y decide cuándo debe detenerse (patente LG).

*Televisores Fuzzy*: que automáticamente ajustan el contraste, brillo y tonalidades del color del televisor de acuerdo a la claridad del recinto (patente SONY).

*Cámaras Fotográficas Fuzzy*: las cuales analizan diferentes variables en conflicto, como lo son el color, ángulo, centro de gravedad, distancia, movimiento y reconocimiento de imágenes mejorando la calidad de la foto (patente Kodak).

*Neveras Fuzzy*: en las cuales los termostatos que poseen responden a combinaciones de temperatura, humedad, tiempos de cierre de las puertas (factores de confort); allí también se encuentran los aires acondicionados (patente LG).

Se fabrican con esta teoría aparatos como tostadores, hornos microondas, aspiradoras, fotocopiadoras; se utiliza además en el control del tráfico automovilístico, en el control de aparatos por medio de órdenes de voz, en el procesamiento de imágenes y en el reconocimiento de caracteres que identifican los números de los cheques bancarios.

---

## REFERENCIAS

- [1] BARTLE Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & sons, New York, 1996. ISBN 0-471-04222-6.
- [2] BASSANEZI R. & ROMÁN-FLORES H. “On the continuity of fuzzy entropies”. *Kybernetes*, 24 (4)(1995), 111-120.
- [3] CHEN Jye. & SYAU Yu-Ru. “Convexity and semicontinuity of fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(2004), 459-469.
- [4] DE GIORGI E. & FRANZONI T. “Su un tipo di convergenza variazionale”, *Atti Accad. Naz. Licei. Rend. cl Sc. Mat. Fis. Natur.* (8) 58 (1975), 842-850.
- [5] DIAMOND P. & KLOEDEN P. *Metric spaces of fuzzy sets: Theory and Applications*. World Scientific Pub., Singapore, 1993.
- [6] GRECO Gabriele. “Sendograph metric and relatively compact sets of fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(2006), 286-291.
- [7] GRECO G. & MOSCHEN M. & QUELHO E. “On the variational convergence of fuzzy sets” (artículo a aparecer).
- [8] KALEVA Osmo. “On the convergence of fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 17(1985), 53-65.
- [9] KLIR George J & FOLGER Tina A. *Fuzzy sets, uncertainty, and information*. Prentice Hall, New Jersey, 1988. ISBN 0-13-345984-5.
- [10] KLIR George J & YUANG Bo. *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1995. ISBN 0-13-101171-5.

- [11] KLOEDEN P.E. “Compact supported endographs and fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1980), 193-201.
- [12] LIMA Elon Lages. *Espaços métricos*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003. ISBN 85-244-0158-3.
- [13] MENDEL Jerry M. *Uncertain rule-based Fuzzy Logic Systems: Introduction and new directions*. Prentice Hall, New Jersey, 2001. ISBN 0-13-040969-3.
- [14] PURI M. & RALESCU Dan. “Fuzzy random variables”. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 114(1986), 409-422.
- [15] RAVI Kishore M.V.K. & PARVAIZ Mateen. “On supported endographs and fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 148(2004), 329-332.
- [16] ROJAS-MEDAR Marko. *Análisis Fuzzy Multívoco*, Universidad de Estadual de Campinas-SP, Brasil. Depto. de Matemáticas Aplicada IMECC, 2003.
- [17] ROJAS-MEDAR M. & BASSANEZI R & ROMÁN-FLORES H. “A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications”. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(1999), 263-269.
- [18] ROJAS-MEDAR M. & ROMÁN-FLORES H. “On the equivalence of convergences of fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1996), 217-224.
- [19] ROJAS M. & ROMÁN H. & FLORES A. On the variational convergence of fuzzy sets and its connections with level-convergences. Conference in “Tercera Conferencia Franco-Latinoamericana en Matemáticas aplicadas y Primera Escuela Chile - CEE en Optimización”, Santiago, Chile (1992).
- [20] ZADEH Lofti. “Fuzzy sets”, *Information & control*, 8(1965), 338-353.