

Un análisis documental de la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva histórico-epistemológica

Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Óscar Alirio Sánchez Suárez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciados en Matemáticas

Director

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A mis padres Norberto y Rosa Eva, quienes con su amor, sacrificio, paciencia y apoyo incondicional han estado siempre para mí. A mi hermanita Evaluna, por ser mi fuente de inspiración y motivación en los buenos y malos momentos. A mi hermano Arturo, por estar siempre dispuesto a ayudarme. Este logro es para y por ustedes, gracias por confiar y creer siempre en mis capacidades.

A mis familiares, amigos y compañeros por esos momentos llenos de risas, experiencias y anécdotas a lo largo de estos años. A todos los docentes que han sido parte de mi formación desde mi infancia hasta ahora, que con sus charlas me mostraron el camino y creyeron en mi potencial para ser profesional.

Un agradecimiento especial a mis compañeros de tesis, Óscar y Angie, por compartir este desafiante pero gratificante camino conmigo.

Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

A mis padres, Alirio y Rosmira, porque sin ellos definitivamente no estaría acá.

A mi familia, Diana, Damian, por ser ese apoyo y motivación en los momentos que más se necesitó.

A mis compañeros y amigos de la vida y universidad, sin ellos definitivamente no lo hubiera logrado (Andrei y Angie en especial por seguirme la idea en este proyecto).

A Leidy, por ser y estar.

Óscar Alirio Sánchez Suárez

A mis queridos padres, Willian y Nidia, por inspirarme a perseguir mis sueños. Les agradezco por su apoyo, comprensión, sacrificio y su constante aliento durante mi vida académica.

A mis hermanos, Jaider y Shayra, con quiénes he compartido momentos de triunfos y desafíos.

Ustedes y mis padres me motivan en la búsqueda de un futuro más brillante.

A mi pareja, Stiven, quien ha sido mi fuente de apoyo, motivación y mi compañero en cada paso de este camino.

Por último, Andrei, Óscar, Pedro y demás, quienes son mis amigos de la universidad, agradezco su compañía en los desafíos y largas jornadas de estudio, y por brindarme momentos

inolvidables en esta etapa única de mi vida.

Sin ustedes, este logro no habría sido posible.

Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Agradecimientos

Primeramente, a Dios y a la vida por permitirnos culminar cada etapa creativa de este proyecto.

A nuestras familias, por el apoyo y esfuerzo incondicional a lo largo de la carrera.

A nuestro director, el profe Luis Ángel, por haber asumido el reto de continuar este proyecto con paciencia y dedicación, aportando su experiencia y conocimiento como bases esenciales para el desarrollo de esta idea.

Al profesor Jairo Balaguera, por su valiosa contribución y confianza en el génesis de la propuesta para este seminario de investigación.

A los profesores que hicieron parte de nuestro proceso de formación como futuros docentes.

Finalmente, a nuestros compañeros y amigos, por su acompañamiento y apoyo durante estos años.

¡Muchas gracias a todos!

Andrei, Angie y Óscar.

Tabla de contenido

Introducción.....	12
1. Planteamiento y formulación del Problema.....	13
2. Justificación	16
3. Antecedentes.....	16
3.1 El concepto fracción como elemento dinamizador de la matemática en las culturas milenarias.....	17
3.2 Dificultades emergentes en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción.....	18
4. Objetivos.....	21
4.1 Objetivo General	21
4.2 Objetivos específicos.....	21
5. Marco Teórico.....	22
5.1 Diversas formas de interpretación del concepto fracción.....	22
5.1.1 Fracción como parte-todo	23
5.1.2 Fracción como cociente (división indicada)	23
5.1.3 Fracción como razón.....	24
5.1.4 Fracción como operador.....	24
5.1.5 Fracción como conteo.....	25
5.1.6 Fracción como medida.....	25
5.2 Obstáculos en la enseñanza de las fracciones	26
5.3 Dificultades en el aprendizaje de las fracciones	27

5.3.1 De ordenamiento.....	27
5.3.2 Al realizar operaciones	27
5.3.3 De reconocimiento de esquemas	28
5.3.4 Al comprender el adjetivo igual	28
5.3.5 En la gestión de equivalencia	28
5.3.6 Al detectar la unidad que generó la fracción.....	29
5.3.7 La equipartición de fracciones como error de enseñanza	29
5.4 La importancia de la historia como recurso didáctico	29
6. Metodología	30
6.1 Análisis documental	31
6.2 Ingeniería didáctica	39
7. Análisis de resultados	40
7.1 Análisis epistemológico.....	40
7.2 Análisis Cognitivo	45
7.2.1 En el ordenamiento	46
7.2.2 Al realizar operaciones	46
7.3 Análisis Didáctico	49
7.4 Resultados del análisis preliminar	61
8. Conclusiones	65
Referencias bibliográficas	68
Apéndice.....	75

Lista de Tablas

Tabla 1 Listado de documentos seleccionados para el análisis en las sesiones

32

Lista de figuras

Figura 1 Repartición hogazas de pan paso 1 (elaboración propia).	42
Figura 2 Repartición hogazas de pan paso 2 (elaboración propia).	42
Figura 3 Repartición hogazas de pan paso 3 (elaboración propia).	43
Figura 4 Representación gráfica	47
Figura 5 Libro todos a aprender 2.0	50
Figura 6 Situación de enseñanza	51
Figura 7 Definición	51
Figura 8 Tipos de ejercicios	52
Figura 9 Primera actividad	53
Figura 10 Fracción como parte todo	54
Figura 11 Situación inicial	55
Figura 12 Definición de fracción como razón	55
Figura 13 Situación de la cultura babilónica	56
Figura 14 Cultura egipcia	57
Figura 15 Solución	58
Figura 16 De lo simbólico a lo fraccionario	59
Figura 17 $7/20$ visto desde la repartición	60
Figura 18 Diferentes representaciones de la fracción "un cuarto ($1/4$)"	63

Lista de Apéndices

Apéndice A. Protocolo de la sesión 1 de seminario de investigación	75
Apéndice B. Protocolo de la sesión 2 de seminario de investigación	80
Apéndice C. Protocolo de la sesión 3 de seminario de investigación	85
Apéndice D. Protocolo de la sesión 4 de seminario de investigación	89
Apéndice E. Protocolo de la sesión 5 de seminario de investigación	93
Apéndice F. Protocolo de la sesión 6 de seminario de investigación	97

Resumen

Título: Un análisis documental de la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva histórico-epistemológica^{1*}

Autor: Angie Yadisel Ruiz Cristiano, Jefersson Andrei Cárdenas Tirado y Óscar Alirio Sánchez Suárez^{2**}

Palabras Clave: epistemología, historia de las matemáticas, razón, fracción, parte todo.

Descripción:

El presente documento constituye un estudio exploratorio de carácter cualitativo, el cual se centra en recopilar y analizar documentos relacionados con el uso de fracciones en cuatro culturas milenarias: egipcia, babilónica, china y griega. Además, se busca establecer conexiones entre estas culturas y las diferentes formas de interpretar las fracciones. También, se conceptualizan las diversas formas de interpretación de las fracciones, se describen las dificultades en su enseñanza y aprendizaje, y se destaca la importancia de utilizar la historia de las matemáticas como recurso didáctico.

Dado que se trata de un seminario, se considera fundamental moderar y discutir los contenidos temáticos encontrados en la bibliografía seleccionada. En términos metodológicos, se emplea la primera fase de la ingeniería didáctica como enfoque de investigación, lo que implica realizar un análisis preliminar desde tres dimensiones fundamentales: epistemológica, cognitiva y didáctica. Los resultados obtenidos a partir de este análisis se consolidan en reflexiones y recomendaciones orientadas a la creación del macroconcepto de fracción, utilizando la historia como eje transversal en la educación. Estas reflexiones y recomendaciones constituyen una guía para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, considerando su evolución histórica y las diferentes perspectivas de interpretación. Este estudio aporta una visión integral y enriquecedora para el abordaje de las fracciones en el contexto educativo.

^{1*} Trabajo de Grado

^{2**} Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: A documentary analysis of the teaching of fractions from a historical-epistemological perspective ^{3***}

Author: Angie Yadisel Ruiz Cristiano Jefersson Andrei Cárdenas Tirado y Óscar Alirio Sánchez Suárez ^{4****}

Keywords: epistemology, history of mathematics, ratio, fraction, part-whole.

Description:

This paper is an exploratory qualitative study, which focuses on collecting and analyzing documents related to the use of fractions in four ancient cultures: Egyptian, Babylonian, Chinese and Greek. In addition, it seeks to establish connections between these cultures and the different ways of interpreting fractions. It also conceptualizes the different ways of interpreting fractions, describes the difficulties in teaching and learning fractions, and highlights the importance of using the history of mathematics as a didactic resource.

Since this is a seminar, it is considered essential to moderate and discuss the thematic contents found in the selected bibliography. In methodological terms, the first phase of didactic engineering is used as a research approach, which implies carrying out a preliminary analysis from three fundamental dimensions: epistemological, cognitive and didactic. The results obtained from this analysis are consolidated in reflections and recommendations oriented to the creation of the macro-concept of fraction, using history as a transversal axis in education. These reflections and recommendations constitute a guide to improve the teaching and learning of fractions, considering their historical evolution and the different perspectives of interpretation. This research provides a comprehensive and enriching vision for the approach to fractions in the educational context.

^{3***} Degree Work

^{4****} Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in mathematics. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Master's degree in mathematics education.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas vista desde la perspectiva tanto del educador como del estudiante presenta una gran variedad de retos, estilos, propuestas y diseños en torno a cada uno de sus objetos de estudio. Particularmente, como se reporta en la literatura reciente, la enseñanza de las fracciones es uno los objetos matemáticos de gran dificultad a la hora de ser orientado y de ser aprendido.

Con el propósito de aportar ideas a esta problemática, el presente trabajo, en primera instancia realiza una contextualización de las fracciones, esta vista tanto a nivel conceptual, como a nivel histórico, partiendo desde las primeras apariciones y usos en la humanidad por parte de los egipcios, griegos, babilonios y chinos. A su vez, se estudia cómo estas primeras interpretaciones concebidas en la antigüedad, sienta de punto de partida para lo que posteriormente se considera en la enunciación de las diferentes nociones de la fracción, haciendo énfasis principalmente en el uso de las planteadas por Ríos, (2019): Fracción como parte-todo, como cociente (división indicada), como razón, como operador, como conteo, como medida.

Por otra parte, se orienta el estudio y análisis de los obstáculos de enseñanza que desencadenan dificultades en el aprendizaje de las fracciones, esto visto desde las perspectivas de diferentes teóricos y la aparición de estas dificultades en las propuestas realizadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) y Rincón & Fonseca (2021).

Luego, se describe la importancia del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas, cómo estas permiten que el estudiante no se quede únicamente con el aspecto “anecdótico” de ella, sino que extraiga de las misma elementos epistemológicos que permitan la construcción y apropiación de su propia noción de fracción, del uso y de cómo esta se transversaliza con concepciones previas y las modifica.

De acuerdo con la metodología utilizada para el análisis de las propuestas y los resultados obtenidos de los hallazgos del Seminario de Investigación, del cual es producto este documento, se realiza a través de un análisis preliminar desde las perspectivas epistemológica, cognitiva y didáctica, poniendo en consideración diferentes propuestas de enseñanza de las fracciones. Por ejemplo, la propuesta del MEN, a través del programa todos a aprender 2.0. También, distintas unidades didácticas, identificando allí las dificultades en la enseñanza de las fracciones, la carencia o el poco uso de la historia como un eje dinamizador, contextualizador y didáctico con el fin de enriquecer lo que previamente se ha planteado.

Por último, se destaca la diversidad de estilos, propuestas y diseños en la enseñanza de las matemáticas, centrándose específicamente en las fracciones. Se ha enfatizado la importancia de contextualizar las fracciones y comprender su evolución histórica, así como la necesidad de abordar los obstáculos de enseñanza y utilizar la historia como recurso pedagógico. Al considerar estos aspectos, se busca mejorar la enseñanza de las fracciones y promover un aprendizaje más efectivo y significativo para los estudiantes.

1. Planteamiento y formulación del Problema

Como contenido temático, los fraccionarios aparecen durante todo el proceso formativo en matemáticas, desde la básica primaria hasta la media vocacional. Sin embargo, el propósito es distinto para cada grado puesto que lo primordial es el desarrollo de competencias más que el contenido. Los reportes de las investigaciones en Educación Matemática dan cuenta de la persistencia de una enseñanza marcada por lo operacional con énfasis en lo algorítmico. Según Palenzuela (2017):

Si asistiésemos hoy en día a una clase de la asignatura de Matemáticas en Secundaria (sin hacer distinciones entre académicas y aplicadas), nos encontraríamos, por caso general, la misma estructura: explicación, ejercicios tipo, ejercicios aplicados a la vida real y poco más. (p. 6)

Según González (2013):

El hecho de que el aprendizaje haya sido abordado durante mucho tiempo desde una labor educativa conductista, en la que se trabajaba sobre mentes en blanco, a partir de conocimientos cero, ha generado que las estructuras de la enseñanza de las matemáticas se encuentren ligadas a prácticas pedagógicas completamente verticales, en las que predominan el uso de la memorización y la repetición y en donde las estrategias didácticas y la utilización de material concreto pasan a un segundo plano. (p. 17)

En el caso específico de las fracciones ha predominado la enseñanza de procedimientos y de operaciones renunciando a la conceptualización, se desconoce el significado de la fracción y es muy frecuente advertir en los estudiantes dificultades para ofrecer diversas interpretaciones del concepto fracción. También se identifican bloqueos al diferenciar la fracción como representación de un número y como número en sí misma, posiblemente por desconocimiento de su historia y su epistemología. D' Amore (2007) plantea que:

El desarrollo de la Matemática procede en diversas direcciones, pero no se puede negar que, en primera instancia y con gran fuerza, se asocie a la creación de conceptos; ahora bien, no se pueden crear conceptos sin delinearlos epistemológicamente, por tanto, queriendo o sin querer, quien reflexiona sobre el desarrollo de la Matemática debe necesariamente plantearse el problema de la naturaleza de los conceptos. (p. 36)

Así mismo, Gutiérrez (2019) afirma que:

El currículo no aprovecha su contenido histórico y epistemológico: Las distintas propuestas de reforma incentivadas por los gobiernos de turno para la enseñanza de la matemática a nivel del sector oficial en Colombia no han dado los frutos esperados. A pesar de sugerir cambios estructurales y sustanciales en la enseñanza, la práctica se mantiene igual (p. 14).

En torno a las observaciones y análisis compartidos por los académicos mencionados, se revela un panorama desafiante en la enseñanza de las fracciones. La desconexión entre la riqueza histórica, la evolución epistemológica y la práctica educativa actual ha dado lugar a un énfasis excesivo en los procedimientos operativos, pasando por alto la comprensión conceptual y la contextualización de los conceptos matemáticos. La presencia persistente de enfoques conductistas y memorísticos ha resultado en dificultades para los estudiantes al interpretar y aplicar las fracciones de manera versátil. En este sentido, explorar cómo las culturas milenarias concebían las fracciones ilustran los enfoques pedagógicos más enriquecedores y contextualizados, promoviendo una comprensión profunda que trascienda las operaciones para apreciar la riqueza conceptual y aplicativa de este objeto matemático.

Este trabajo tiene como objetivo, identificar en las cuatro principales culturas milenarias, algunos aspectos histórico-epistemológicos relacionados con las expresiones fraccionarias, estableciendo conexiones con las diferentes formas de interpretación reportadas por la educación matemática. Con el propósito de mejorar la enseñanza de las fracciones y de aportar una mirada desde sus orígenes y desde su epistemología en cada una de las cuatro culturas milenarias. Por tanto, se formula la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos histórico-epistemológicos del concepto de fracción pueden aportar para el mejoramiento de su enseñanza a nivel de básica primaria?

2. Justificación

La pertinencia de este trabajo se sustenta en la importancia de las fracciones en las matemáticas y en su enseñanza, las dificultades que enfrentan los estudiantes, la mejora de la práctica docente, la creación de recursos didácticos efectivos y la contribución al conocimiento académico. Al investigar y analizar la enseñanza de las fracciones, se busca promover un aprendizaje significativo y ayudar a los educadores a desarrollar estrategias más efectivas para enseñar este concepto.

Además, se considera que el estudio de la historia en la enseñanza de las fracciones es fundamental para promover una comprensión más profunda y contextualizada de este concepto matemático. Al conectar las fracciones con su origen histórico, es posible fomentar el desarrollo del pensamiento crítico y se enriquece el proceso de enseñanza-aprendizaje, considerando aspectos fundamentales como la importancia en el currículo, las dificultades de los estudiantes y la creación de recursos didácticos efectivos.

3. Antecedentes

En el currículo de las matemáticas, inexorablemente el estudiante debe enfrentar el concepto y el uso de las fracciones, en donde se destaca previamente dos aspectos puntuales como: el contexto histórico de dicho objeto matemático y a su vez las dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje.

3.1 El concepto fracción como elemento dinamizador de la matemática en las culturas milenarias

La aparición de las fracciones a nivel tanto histórico como epistemológico sigue siendo un misterio para los historiadores y aquellos interesados en su estudio, ya que no se tiene certeza del cuándo surgen ni en dónde lo hacen. Sin embargo, si se puede conjeturar y revisar históricamente por qué aparece en algunas de las importantes civilizaciones que han forjado la historia y las bases científicas de la humanidad. Entre ellas y como se muestra más adelante en este documento, las evidenciadas se encuentran a través de hallazgos arqueológicos donde se desarrollaron los egipcios, babilonios, chinos y griegos.

Ruiz (2013) presenta las fracciones en diferentes culturas antiguas entre las cuales destaca: egipcios, babilonios, griegos y chinos. En su trabajo señala que los egipcios consideraban común el uso de las fracciones en su diario vivir, ya que hacían parte de las prácticas comunes entre los sabios, gobernantes y artesanos de ese entonces. Se han descubierto diversos hallazgos arqueológicos que proporcionan información sobre las matemáticas en el antiguo Egipto, como la tablilla de Ajmim y el papiro de Rhind, también conocido como papiro de Ahmes. Este último, que se encuentra en el museo de Londres desde 1865, data del año 1650 a.C. Estos hallazgos, junto con tallados en piedras, inscripciones y calendarios, han proporcionado valiosa información adicional acerca de las prácticas matemáticas desarrolladas en el antiguo Egipto.

A través de los descubrimientos realizados, se ha revelado que en el antiguo Egipto una fracción se consideraba como la suma de diferentes fracciones unitarias. Estas fracciones unitarias se caracterizan por tener un numerador igual a la unidad y un denominador que representa un número entero positivo.

Por su parte, el conocimiento matemático babilónico ha sido revelado a través de excavaciones realizadas en el siglo XIX. Entre las numerosas tablillas descubiertas, alrededor de 300 se han identificado como tablillas matemáticas, de un total de 500.000 encontradas. Estas tablillas contienen una variedad de problemas matemáticos y abarcan diferentes períodos de la historia de Babilonia. Ortiz (2005) el análisis realizado a las tablillas evidencia que los babilonios presentaban un nivel avanzado en la realización de cálculos gracias al sistema numérico que manejaban. Además de varios problemas matemáticos y situaciones cotidianas de la época que permiten entender un poco cómo surgen las fracciones a partir de sus intereses astronómicos y metrológicos.

En lo que respecta a la cultura griega, se benefició de los aportes de los egipcios y de los babilonios; sin embargo, a los helenos se debe el carácter científico que adquiere el conocimiento matemático. Los helenos querían encontrar el porqué de cada afirmación y sentaron las bases para la axiomatización de las matemáticas, materializado en Los Elementos de Euclides. El primer sistema de numeración griego se desarrolló en Jonia alrededor del año 500 a.C. y presenta similitudes con el sistema hierático egipcio, dado que los números se representaban con letras, era aditivo y de base decimal.

Finalmente, la invención de las expresiones fraccionarias en China, se originan aproximadamente del 300 a.C., con el libro Chou Pei Suan Ching. Este libro está conformado por cálculos astronómicos donde inicialmente el uso de las fracciones surge debido a la necesidad de computar el calendario y la astronomía (González 2017).

3.2 Dificultades emergentes en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción

Martínez (2018) plantea tres obstáculos cognitivos originados en lo didáctico, epistemológico u ontogénico, los cuales están determinados entre el alumno, el profesor y el saber.

A nivel ontogénico, se encuentran las limitaciones neurofisiológicas al momento de enfrentarse a los medios y al conocimiento. Por su parte a nivel didáctico, se plantea que estas dificultades se encuentran ligadas a la naturaleza del conocimiento mismo, en donde la forma de presentar y gestionar la enseñanza da cabida a evidenciar la persistencia y la dificultad para promover la evolución del pensamiento del estudiante.

Finalmente, un obstáculo epistemológico representa una barrera cognitiva que limita la comprensión de conceptos complejos o abstractos. Estas barreras emergen de concepciones erróneas o interpretaciones inadecuadas, dificultando la asimilación del conocimiento.

Martínez también plantea que la educación es un proceso donde el individuo busca darse forma a sí mismo y parte del proceso es la interacción entre el maestro y un sistema educativo, donde cada uno de ellos adopta su rol en torno a dar las soluciones o brindar alternativas a los problemas que se puedan presentar en su propio contexto educativo y que, a nivel nacional, el principal “ambiente” de aprendizaje es la relación entre los maestros y el uso de los textos escolares, junto con los cuales provee al estudiante de algoritmos y definiciones para luego resolver un ejercicio particular o uno contextualizado, privándolos de enfrentarse a los 3 obstáculos anteriores y al inexistente uso de las situaciones didácticas.

Según el MEN en su documento referente a los “Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (EBCM)”, (MEN, 2006) en el apartado del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, denotan que la construcción del significado de número racionales (fraccionarios), está ligado a un proceso histórico epistemológico y, es entre los siglos XIV y XIX donde la enseñanza se centró en el componente aritmético de los números naturales para luego dar paso a los números racionales. Sin embargo, actualmente, con el uso de los sistemas de medidas se pueden conectar estos dos sistemas de numeración, de allí que uno de los estándares para primer-tercer grado

expresa que la descripción de situaciones de medición se realiza utilizando fracciones comunes. También, de cuarto a quinto grado es donde se centran la mayor parte en la enseñanza de los números racionales en los diferentes contextos (situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones).

En lo que respecta a los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2015) que corresponde a un referente nacional en la educación, estos proponen los aprendizajes estructurantes en cada grado y área en específica. Para el área de Matemáticas, en la educación primaria los estudiantes tienen un primer acercamiento a las fracciones en el grado tercero, donde estipulan que el estudiante es capaz de comparar cantidades o expresiones y representarlos numéricamente. Entonces, se espera que el alumno en este grado utilice las fracciones como método de comparación de dos cantidades, además que exprese la relación de “el todo” donde diferencia la relación de orden y equivalencia. En cuarto primaria, el niño reconoce las interpretaciones como parte todo, razón, cociente y operador de las fracciones. Además, explica los métodos que utiliza para representar, operar y estimar; a su vez, establece relaciones de orden (mayor o menor) entre números fraccionarios o decimales. Finalmente, en grado quinto dado que el estudiante conoce los fraccionarios y algunos de sus diferentes significados, entonces se espera que el individuo utilice los números racionales para resolver tareas asociadas a un contexto específico, donde se involucran las operaciones básicas (MEN, 2016).

Por otro lado, Pruzzo (2012) plantea que se ha limitado la construcción del concepto de fracción a comparar lo que se espera que el estudiante haya alcanzado, según los objetivos curriculares versus los desempeños reales de los mismos, dejando de lado el analizar los errores para conocer el pensamiento matemático.

Además, sugiere que una dificultad en la enseñanza está en los contextos limitados que se presentan dentro del aula de clase, por ello se plantea que las fracciones se deben presentar en diferentes situaciones, contextos y representaciones. En tanto que, distintas representaciones involucran variedad de conceptos donde la comprensión de la razón obedece a un proceso neurolingüístico que implica habilidades como interiorizar la inclusión de clases, identificación de la unidad, realizar divisiones y la noción de área ya que, detrás de cada una de las anteriores hay una operación matemática.

Finalmente, Pruzzo (2012), concluye que las dificultades del aprendizaje podrían radicar en dos aspectos fundamentales: la presentación global del concepto de fracción como una unidad que se reparte en varias partes de forma congruente y la presencia de configuraciones perceptivas que sustituyen a las acciones del alumno.

4. Objetivos

Los logros que se desean alcanzar mediante el proceso de análisis documental y de investigación apuntan a un objetivo general y tres objetivos específicos.

4.1 Objetivo General

Identificar algunos aspectos histórico-epistemológicos que determinan elementos didácticos para fortalecer el proceso de enseñanza de las fracciones a nivel de básica primaria.

4.2 Objetivos específicos

- 4.2.1 Elaborar un análisis documental de investigaciones relacionadas en el desarrollo del concepto fracción en las cuatro principales culturas milenarias: egipcia, griega, babilónica y china.

- 4.2.2 Consolidar un estudio bibliográfico de documentos que reporten investigaciones sobre las diferentes formas de interpretación del concepto fracción.
- 4.2.3 Sistematizar la información de las discusiones a partir de las intervenciones y de las exposiciones que sobre el estudio histórico-epistemológico del concepto fracción y de sus diversas formas de interpretación, se realicen durante el seminario de trabajo de grado.

5. Marco Teórico

Como se expuso en los antecedentes, el concepto de fracción se comienza a construir desde las fracciones unitarias en la cultura egipcia, de acuerdo con los registros que se tienen (Mataute, 2017). Estas fracciones facilitaban al hombre el pensamiento y abstracción de un primitivo concepto de fracción, que atendía a la necesidad básica de dividir un elemento en las partes necesarias (Alomoto, 2016). Desde entonces el concepto ha evolucionado hasta reconocer en él diferentes interpretaciones, contextos (prácticos y matemáticos), como se expone seguidamente.

Las fracciones según el MEN (2017), en su libro guía *Todos a aprender 2.0*, las definen como un número de la forma $\frac{a}{b}$ que representa una cantidad, donde a y b son números naturales y b es diferente de 0. A continuación, se discuten las distintas interpretaciones de este objeto matemático.

5.1 Diversas formas de interpretación del concepto fracción

Las dificultades que presentan la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones han dado lugar a múltiples trabajos que han encontrado cómo las fracciones son susceptibles a diversas

formas de interpretación, entre estos documentos se mencionan algunos de ellos los cuales brindan las orientaciones necesarias para los propósitos de esta investigación.

En Ríos (2019) se propone el estudio de las fracciones desde 6 posibles interpretaciones:

5.1.1 Fracción como parte-todo

Ríos (2019) propone que “La fracción bajo esta interpretación hace referencia a la relación entre un número determinado de partes, y todas las partes congruentes en que ha sido dividida la unidad. Podríamos decir también que la fracción es una parte del todo” (p.143).

En otras palabras, el “todo” al que se hace referencia es continuo, lo que deriva en que las partes en las que este se divide pertenecen al mismo objeto lo cual puede resultar incongruente en dos momentos como lo plantea Fandiño (2009). El primero en lo que se refiere al término igualdad, porque si se hace referencia únicamente al número no tendría comparación y el segundo en lo que refiere a la relación de equivalencia y es por lo que resulta en ambos casos necesario resaltar en forma explícita si es unidad continua o discreta. Según Obando (2003), esta interpretación puede ser definida como la relación cuantitativa entre una unidad (todo) y otra llamada parte, relación que implica directamente a un proceso de medición.

5.1.2 Fracción como cociente (división indicada)

Para Ríos (2019) “Esta noción hace referencia a repartir algo en partes equitativas, donde el resultado del reparto no es entero” (p. 143), lo cual al igual que los egipcios es una noción en sentido del reparto y es allí en donde para Llinares y Sánchez (1998) la fracción como cociente ha de tener como principios fundamentales que los estudiantes:

- Construyan sus propias operaciones a partir de algoritmos predeterminados que les permitan desarrollar estrategias resolutivas apropiándose del concepto.
- Desarrollen situaciones que impliquen dividir, ordenar y medir.
- Utilicen modelos de apoyo que sirvan de conexión entre ellas (nociones de reparto) y el trabajo numérico.

5.1.3 Fracción como razón

Cuando se comprende que la equivalencia en las fracciones es invariante con respecto a la relación entre cantidades, se percibe como esta mantiene la proporción en la cual se afecta la cantidad y no la relación. Según Flores (2010) citado por Hoyos (2018): “la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir, si se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como razón” (p. 37). Entonces, esto permite una comparación entre unidades y cantidades teniendo en cuenta la forma total o diferencia que presentan entre sí; se trata de la relación que existe entre dos números y las veces que uno está contenido en el otro, más no visto como un número (Ríos, 2019). Además, se considera que la noción de razón en el contexto de las proporciones es fundamental en el razonamiento, pues permite que los estudiantes comprendan otras interpretaciones de la razón como la geométrica y la aritmética.

5.1.4 Fracción como operador

Ocurre en el momento de la solución de una fracción cuando se ejecuta tanto la multiplicación como la división en la misma operación. Debido a que se indaga sobre cómo dar solución a un ejercicio o problema con estos dos procedimientos, con ello se muestra la

representación de la fracción como el resultado de una unidad. Según Bernard (1972) citado por Ríos (2019) expresa que la fracción como operador “puede ser interpretada como el orden de ejecución de dos operaciones (multiplicación y división) sobre una totalidad discreta” (p. 144), por ejemplo, si se quiere representar los $\frac{2}{3}$ de 12 que es igual a 8 se divide primero 12 entre 3 y luego se multiplica por 2.

5.1.5 Fracción como conteo

Ríos (2019) define esta interpretación como:

el proceso de contar una determinada cantidad de objetos consiste en establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los objetos y cada número natural, empezando por el número uno y continuando con los sucesores; la cantidad de objetos contados viene determinada por el último número natural que se asigne. La fracción, en estos términos, puede ser entendida como el número que resulta de contar una determinada cantidad de partes congruentes de una o varias totalidades. (pp. 144-145)

Por ejemplo, cuando se utiliza la recta numérica para representar la fracción. En dicha representación se asigna un punto de la recta a cada número fraccionario.

5.1.6 Fracción como medida

Ríos (2019) establece que la interpretación de la fracción como medida consiste en “determinar cuántas veces y/o qué cantidad de partes de una unidad patrón está contenida en lo que se desea medir. La fracción en este caso permite establecer exactamente las partes de la unidad patrón contenidas en lo que se mide” (p. 145).

Entonces, se usa la fracción para enunciar la cantidad de cierta magnitud conmensurable en relación con el tamaño de la unidad de medida considerada, donde se expresan cantidades que no corresponden con un múltiplo entero. Es decir, la fracción como medida se comprende de tal forma que para cualquier fraccionario a/b , la fracción se interpreta como a veces la fracción unitaria $1/b$ (FONDEF, 2019). Dado que la fracción surge de dividir en partes iguales b , donde se toman a unidades para representar la cantidad deseada, entonces la fracción expresa de manera exacta la cantidad numérica de la medida realizada.

5.2 Obstáculos en la enseñanza de las fracciones

En el proceso de enseñanza el error debe ser visto como parte del aprendizaje y no como fracaso; la superación de este, según Martínez (2018), pueden dificultar la apropiación del conocimiento en torno a diferentes causas como lo son el sistema de enseñanza, alumno-medio y didáctico (sistemas de interacción); donde Martínez (2018), Bachelard (1976), Brousseau (1989) y Tall-Vinner (1981) plantean la aparición de obstáculos cognitivos los cuales cuentan con diferentes orígenes, ontogénico, epistemológico y didáctico.

Martínez (2018) los define de la siguiente manera:

los obstáculos de origen ontogénico son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones neurofisiológicas del sujeto en el momento de su desarrollo: quien alcanza conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos. La Epistemología Genética evidencia etapas, acomodamientos y asimilaciones, que se asemejan a las etapas del desarrollo de los conceptos por las leyes de regulación que los hacen aparecer, y difieren de ellas por la naturaleza exacta de las limitaciones que determinan esas regulaciones. Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo en la forma de presentar y gestionar la enseñanza, son los obstáculos

ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él, se repiten en la historia, muestran su persistencia y dificultad para evolucionar, es decir los obstáculos en perspectiva de los planteamientos de Bachelard. (p.19)

Estos obstáculos serán tenidos en cuenta para el análisis preliminar que se discutirá más adelante.

5.3 Dificultades en el aprendizaje de las fracciones

En la búsqueda de dar respuesta a los obstáculos cognitivos, y en el proceso del desarrollo de estos, el profesor se ha de encontrar con dificultades en el aprendizaje de las fracciones entre las cuales Higuera (2022) plantea:

5.3.1 De ordenamiento

El estudiante erra en el posicionamiento de los números fraccionarios en la recta numérica porque este no ve tan claro, por ejemplo, que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$ ya que el estudiante podría pensar que como el 2 es menor que 3, este se posicionaría antes. Fandiño (2009) citado por Higuera (2022) sugiere como alternativa recurrir a las fracciones equivalentes para que el estudiante pueda comprender la relación entre los medios y los tercios para luego comparar el tamaño de $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$.

5.3.2 Al realizar operaciones

Diferentes documentos plantean que para la multiplicación de fracciones a los estudiantes les resulta más sencilla que la suma, debido a que este procedimiento solo requiere el producto entre numeradores y entre denominadores. En la adición y sustracción, surgen dificultades puesto

que el alumno imita el algoritmo de la multiplicación, sumando numeradores y denominadores entre sí.

5.3.3 De reconocimiento de esquemas

Cuando se trabaja cantidades continuas y discretas, los estudiantes analizan de manera similar su representación fraccionaria, como se puede evidenciar en los siguientes ejemplos. En primer lugar, se dibuja un rectángulo dividido en seis partes iguales y se sombrea dos de seis, el alumno asocia la parte sombreada como numerador y la restante como denominador (representación continua). Como segundo ejemplo, se grafica con diagrama de Venn lo equivalente a seis objetos, donde dos son tomados del total, en este caso el niño interpreta el problema como el ejercicio anterior. Finalmente, el autor menciona que este error es común para cantidades discretas.

5.3.4 Al comprender el adjetivo igual

Al representar figuras donde se dividen de distinta forma, pero sus unidades son iguales, el estudiante al analizarlas presenta dificultades en identificar que son lo mismo, dado que no es evidente la igualdad en tamaños de estas particiones.

5.3.5 En la gestión de equivalencia

Esta dificultad está presente donde la partición de la ilustración no corresponde al número que indica el denominador de determinado problema. Un ejemplo de esta dificultad se puede identificar cuando se plantea una figura de un cuadrado dividido en dos partes iguales, los estudiantes reconocen fácilmente lo que corresponde a $1/2$, sin embargo, si se replantea una

división en cuatro partes de la misma figura y se propone identificar $1/2$, genera un conflicto en el estudiante puesto que no es explícito el denominador en la representación.

5.3.6 Al detectar la unidad que generó la fracción

Murillo (2019) citado por Higuera (2022) expone que es más fácil para los estudiantes conocer la quinta parte de cien, que hallar el total de una cantidad donde “ $1/5$ ” es igual a 20.

5.3.7 La equipartición de fracciones como error de enseñanza

La equipartición implica dividir una cantidad o un objeto en partes iguales, esto permite que los estudiantes puedan visualizar e interpretar mejor cómo se forman las fracciones; las actividades donde requieren que los alumnos dividan, particionen y doblen, posibilita un desarrollo de la comprensión intuitiva que les facilita comparar, identificar y, sumar fracciones debido a que es un proceso sencillo de realizar.

5.4 La importancia de la historia como recurso didáctico

Gutiérrez (2019) menciona que la historia puede ser utilizada como un recurso didáctico para enseñar y aprender matemáticas, ya que bajo un enfoque histórico permite tener una amplia visión de los problemas y a su vez permear la enseñanza con la articulación e importancia de cada uno de los temas.

Sin embargo, utilizar este recurso en muchos casos se limita a presentar problemas modernos para evocar así personajes históricos y pretender con ello realizar la transversalización de la historia, desaprovechando así su verdadero potencial el cual se alcanza cuando el docente

aparte de conocer el contexto histórico del objeto matemático en cuestión logra su transposición didáctica al aula de clase.

De igual manera, Gutiérrez (2019), plantea que la historia como recurso didáctico permite comprender profundamente los problemas usando el contexto en el que aparecen, las ideas que surgen y los interrogantes que resuelven para crear el conocimiento.

Kline (1992) menciona que “la historia puede dar la perspectiva global del tema y relacionar las materias no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales del pensamiento matemático” (p. 16), lo que permite al maestro tomar decisiones curriculares de modo que se tenga en cuenta los sucesos históricos trascendentes que dieron origen a los conocimientos que quiere enseñar, sin repetir el suceso.

6. Metodología

Este seminario de investigación se desarrolló en dos fases. En primer lugar, se realiza un análisis documental basado en un enfoque cualitativo que, según Galeano y Vélez (2002), se basa en la revisión sistemática de artículos previos para identificar elementos histórico-epistemológicos que influyen en la enseñanza como una técnica que permite recopilar y analizar un grupo de materiales escritos con el objetivo de responder a preguntas específicas sobre el tema de investigación, este proceso incluye la búsqueda, selección, clasificación y análisis de estos materiales escritos Pinto y Gálvez (1996) citado por (Bermeo-Yaffar, Hernández & Tobón, 2016). En segundo lugar, considerando la primera fase de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, se desarrolla un análisis preliminar de una propuesta para la enseñanza de las fracciones, a partir de tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En consecuencia,

la integración de estas dos fases, que se exponen a continuación, serán el resultado de investigación.

6.1 Análisis documental

En esta fase se realiza una identificación, recogida y análisis de artículos publicados en bases de datos académicas, en el cual se tuvieron en cuenta las palabras claves como: “Historia y epistemología”, “Fracciones”, “Enseñanza”. Ahora, los criterios que se consideraron para la respectiva selección documental son los siguientes:

1. No se limitó el país de origen de los artículos, ya que las fracciones son un objeto matemático en el cual históricamente se han presentado dificultades en la enseñanza y aprendizaje.
2. No hubo restricción en el año de publicación de los artículos, dado que para esta investigación es necesario tener en cuenta diversos documentos que den cuenta de cómo surgieron las fracciones.
3. Los documentos seleccionados hacen parte de bases de datos académicas y por ello se componen de: artículos de revistas, proyectos, tesis y libros.
4. La selección de los documentos estuvo ligada a la contribución del problema de investigación. Y por ello, se realizó la **Tabla 1** donde incluye: nombre de artículo, autor y año de publicación, enlace WEB o DOI y aportes al problema de investigación.

Para conveniencia del desarrollo del seminario, la escogencia de los documentos presentados a continuación va encaminada en una primera parte a realizar un recorrido histórico del uso de las fracciones en cuatro civilizaciones importantes: egipcia, china, babilónica y griega. La selección de los primeros cuatro documentos del seminario tiene como fin documentar dicho uso en la época. A continuación, en aras de cumplir uno de los objetivos planteados se seleccionan

documentos que permitan identificar las diferentes formas de interpretación del concepto de fracción, para que gracias a los documentos restantes se puedan identificar algunos aspectos histórico-epistemológicos que determinan elementos didácticos para fortalecer el proceso de enseñanza de las fracciones a nivel de básica primaria.

El rol de cada participante en el seminario de investigación sobre el uso de fracciones a lo largo de la historia es fundamental para el éxito de la investigación y el aprendizaje de todos. El relator es el encargado de identificar, seleccionar y presentar la información, mientras que el correlator evalúa la exposición y hace aportes valorativos. Los participantes aprenden a trabajar en equipo y a dialogar, y el protocolante registra lo más importante de la sesión. Todos juntos trabajan para contribuir al fortalecimiento del proceso de enseñanza de las fracciones a nivel de básica primaria. Es importante mencionar que, se creó un cronograma donde se encuentran establecidos los roles de cada integrante y las respectivas sesiones.

Finalmente, se realiza un análisis con la información obtenida en cada sesión con el fin de constituir el informe final.

Tabla 1

Listado de documentos seleccionados para el análisis en las sesiones

Título del documento	Autor(es) Año	Enlace (web o DOI)	Aportes al problema
Las fracciones unitarias en la matemática del Antiguo Egipto	Héctor Horacio Gerván (2013)	//www.academia.edu/3663059/Las_fracciones_u nitarias_en_la	Ofrecen información sobre la organización económica y administrativa de las comunidades que cuidaban el

		<p>matem%C3%A1tica del Antiguo Egipto. En A.A.VV. eds. Epistemología y Historia de la Ciencia. Selección de trabajos de las XXIII Jornadas. Córdoba FFyH-UNC pp. 165-175</p>	<p>templo y la pirámide de Abusir, presentando listas de ingresos mensuales, registros contables y tablas de tareas del personal. El estudio destaca la importancia de las descomposiciones de la Tabla y sugiere que el uso de fracciones arbitrarias pudo simplificar los cálculos matemáticos en el Antiguo Egipto, aunque se reconoce que la interpretación de estos textos históricos siempre involucra conjeturas y suposiciones.</p>
<p>La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED</p>	<p>César Augusto Ruiz Cruz (2013)</p>	<p>https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/47142/01186860.2013.pdf?sequence=1</p>	<p>El autor propone una propuesta didáctica en educación básica definiendo las fracciones en su relación parte-todo y a su vez como cociente, todo esto a través de una serie de guías que apuntan también a la</p>

<p>Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad</p>	<p>Alejandro Ortiz (2005)</p>	<p>http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/134460</p>	<p>apropiación del concepto mismo de fracción. El autor dedica este documento a estudiar la matemática en la Antigüedad, el referente que se usa es de la Matemática pre- griega en específico la cultura babilónica que nos permite comprender cómo surge el concepto de fracción en esa civilización.</p>
<p>Rethinking history and epistemology in mathematics education</p>	<p>Fulvia Furinghetti (2020)</p>	<p>https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454</p>	<p>El artículo también describe algunas producciones de la comunidad de académicos establecidos oficialmente en 1976 como el grupo HPM (Historia y Pedagogía de las Matemáticas) que además están asociados a la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) donde elaboran materia prima para investigadores y docentes</p>

Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones	Vianca Bautista & Flor Rodríguez (2012)	<a href="http://funes.unia
ndes.edu.co/165
25/">http://funes.unia ndes.edu.co/165 25/	de matemáticas interesados en conocer el aporte de la historia en la educación.
Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza	Bruno D' Amore (2008)	<a href="https://rsddm.d
m.unibo.it/wp-
publications/200
8-damore-17/">https://rsddm.d m.unibo.it/wp- publications/200 8-damore-17/	Los investigadores estudian la noción de fracción en la educación básica, primaria, tomando como punto de partida la problematización de este saber desde una perspectiva histórica. Este artículo busca proporcionar una visión unificada de varios términos y conceptos difusos en la comunidad internacional de la didáctica de las matemáticas, restaurando su coherencia y explorando sus raíces históricas en dicha comunidad. Aunque estos términos se utilizan en diversas formas en

<p>Ingeniería Didáctica</p> <p>En Educación</p> <p>Matemática: Un</p> <p>Esquema Para La</p> <p>Investigación Y La</p> <p>Innovación En La</p> <p>Enseñanza Y El</p> <p>Aprendizaje De Las</p> <p>Matemáticas</p>	<p>Michèle Artigue</p> <p>(1995)</p>	<p>https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/40560/Ingenieria-didactica.pdf?sequence=2</p>	<p>la actualidad, muchos de ellos fueron introducidos originalmente por Guy Brousseau, quien se esforzó en sintetizarlos y redefinirlos de manera adecuada. Con el tiempo, estos términos han evolucionado y algunas de estas evoluciones afectan a temas clásicos; sin embargo, aquí se centra en el ejemplo del contrato didáctico.</p> <p>La ingeniería didáctica es una metodología de investigación que se enfoca en el diseño y desarrollo de situaciones de enseñanza de las matemáticas. Se basa en la idea de que la enseñanza de esta disciplina es un proceso complejo y dinámico, y busca analizar, diseñar y mejorar las prácticas pedagógicas. La ingeniería</p>
---	--------------------------------------	--	--

<p>Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas</p>	<p>Carlos Manuel Rincón Valderrama y Javier Fonseca Mora (2021)</p>	<p>http://repositorio.unimagdalena.edu.co/handle/123456789/5547</p>	<p>didáctica se centra en identificar los problemas de enseñanza-aprendizaje, proponer soluciones y evaluar su efectividad, con el objetivo de promover el progreso y la calidad de la enseñanza de las matemáticas.</p> <p>La tesis propone una unidad de enseñanza centrada en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas para mejorar la comprensión del concepto de fracción en estudiantes de quinto grado. La unidad consta de tres actividades que abordan situaciones cotidianas y contextos históricos relacionados con las fracciones. Se basa en las teorías de Pólya, Obando y otros, y se utiliza un enfoque</p>
---	---	--	--

History in
Mathematics
Education (Vol. 6).
Springer.

Fauvel, &
Maanen, J. van.
(2000)

<https://doi.org/10.1007/0-306-47220->

cualitativo con la metodología de investigación-acción. Se realizó una intervención con una muestra intencionada de 32 estudiantes, quienes se sometieron a una evaluación diagnóstica, una prueba de salida y una rúbrica de evaluación. Los resultados mostraron una mejora en el rendimiento de los estudiantes y un aumento en su competencia para comprender el concepto de fracción. En este libro se aborda a temática de la historia de las matemáticas desde la importancia en el currículo en diferentes países, las problemáticas multiculturales e interdisciplinarias, la formación de los docentes y el aporte a la comprensión de los estudiantes

			a nivel conceptual y epistemológico de la asignatura.
El mundo es matemático. Del Ábaco a la revolución digital. Algoritmos y Computación.	Torra, Vicenc (2011).	https://es.scribd.com/document/386923983/Del-abaco-a-la-revolucion-digital-Vicenc-Torra-pdf	Desarrolla el proceso evolutivo de los dispositivos de cálculo que surgieron en las culturas antiguas hasta la modernidad, el hilo conductor son los sistemas numéricos que surgían por necesidad en cada una de las civilizaciones.

Nota. Los documentos seleccionados se utilizaron para las discusiones de las sesiones del seminario de investigación. Fuente: elaboración propia.

6.2 Ingeniería didáctica

En la didáctica de las Matemáticas, una de las metodologías de investigación utilizadas es la ingeniería didáctica, la cual según Artigue (1995, p.36) “se caracteriza por ser un esquema basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza”. Además, plantea cuatro etapas de esta metodología: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori (Artigue, p.38).

De dichas etapas, se tendrá en cuenta el análisis preliminar, que se elabora a partir de tres dimensiones. Artigue (1995, p.40) las describe como sigue: “la dimensión epistemológica,

asociada a las características del saber en juego; la dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza; la dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza”. En este sentido, se tendrá en cuenta cómo ha evolucionado el concepto de fracción, su enseñanza y las dificultades cognitivas que los estudiantes presentan en el aprendizaje. A partir de este análisis y con base a referentes teóricos, se darán algunas recomendaciones orientadas al aprovechamiento de la historia como recurso didáctico para el aprendizaje de las fracciones en educación primaria.

7. Análisis de resultados

A continuación, se realizará un análisis preliminar donde se expondrán las tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica.

7.1 Análisis epistemológico

Definiciones:

Una fracción es un número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b pertenecen al conjunto de los números naturales (N) asumiendo que $N = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ con b diferente de 0 (Carrillo, 2012).

La fracción se percibe como una combinación de dos números enteros en lugar de ser considerada, como afirma la Matemática, un número único. En la historia, se la consideraba un número especial y, por esta razón, se le denominaba "número roto" o, posteriormente, "número quebrado". Sin embargo, a pesar de estas denominaciones, sigue siendo un solo número y no dos (Maza, 1999).

Silva (2005) citado por Carillo (2012) utiliza:

el término de fracción como una representación, es decir, una expresión que se escribe con numerador y denominador; un número racional, todo aquello que puede ser escrito en forma fraccionaria con numerador y denominador entero y también puede ser escrito en forma decimal (otra representación); así mismo, el número fraccionario es todo aquello que puede ser representado en forma de fracción (inclusive irracional o complejo). (pp. 20-21)

En la literatura existen múltiples interpretaciones de la fracción, donde Ríos (2019) las clasifica como: “parte todo, cociente o división indicada, razón, operador, conteo y medida”

Desarrollo histórico del concepto de fracción: La cultura egipcia concebía las fracciones como la suma de fracciones unitarias distintas, en las que el numerador era siempre la unidad y el denominador representaba un número entero positivo. Por ejemplo, $1/2$, $1/4$ y $1/7$ eran fracciones egipcias comunes. Aunque no se tiene constancia de una demostración formal por parte de los egipcios, se ha demostrado que cualquier número racional positivo puede expresarse como la suma de fracciones unitarias (egipcias).

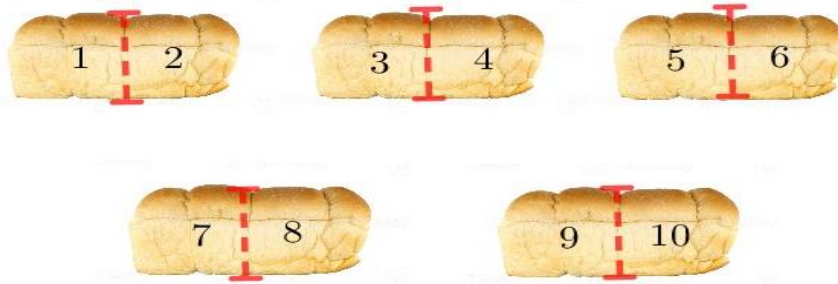
En esta cultura lo que conlleva a utilizar la noción de fracción, surge de dos necesidades básicas, la medición y la repartición, siendo esta última la más relevante en el desarrollo de los egipcios ya que al no existir el dinero, la gente recibía el pago en “especie” y gracias a las “listas de racionamiento”, el salario diario de un trabajador de la región podría calcularse en términos de hogazas de pan y jarros de cerveza, por ello, Maza Gómez (2009) citado por Gervan (2014) conjetura que “las fracciones nacieron dentro del contexto de reparto, y en él la fracción no es una categoría susceptible de ser generalizada” (p.325).

Lo anterior, puede ser entendido gracias a la solución a uno de los problemas encontrados en el papiro de Rhind, el cual cuestionaba de qué forma se podían “repartir 9 barras de pan entre

10 trabajadores". Ver **Figura 1**. Los egipcios dieron una respuesta a dicho problema, imponiendo la condición de que ninguna fracción se podía repetir.

Figura 1

Repartición hogazas de pan paso 1 (elaboración propia).



*5 hogazas de pan
divididas a la mitad
= 10 pedazos de pan*

Figura 2

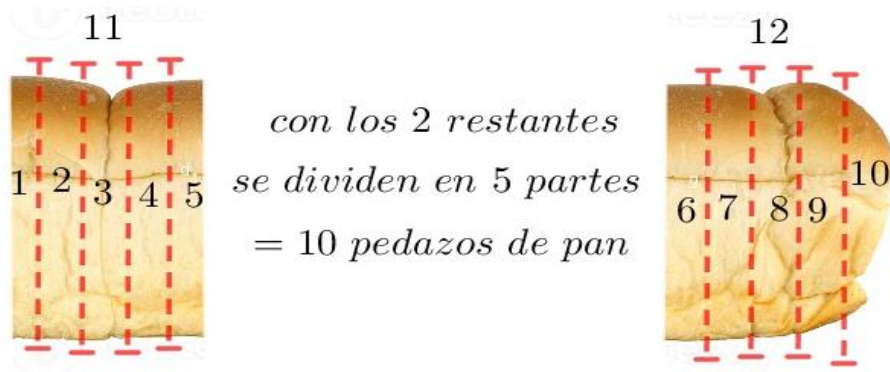
Repartición hogazas de pan paso 2 (elaboración propia).



*4 hogazas de pan restantes
divididas en 3 partes
resultan en 12 partes
tomamos 10 de ellas
= 10 pedazos de pan*

Figura 3

Repartición hogazas de pan paso 3 (elaboración propia).



Por tanto, a cada uno de los diez trabajadores le corresponde un pedazo de pan representado en la figura 1, uno de la figura 2 y otro pedazo de la figura 3.

Por su parte, gracias a los avances presentados por la cultura egipcia, los griegos empiezan a tener injerencia en el desarrollo del carácter científico del concepto de fracción, ya que estos buscaban justificar cada afirmación. Entonces descubrieron la necesidad de demostrar las propiedades a partir de la formulación de axiomas y es allí como cada una de las escuelas plantea su interpretación de las fracciones.

Tales de Mileto pudo calcular la altura de la pirámide de Keops de dos formas distintas, utilizó la comparación por cociente (fracción como razón) de magnitudes lineales para determinar la altura de la gran pirámide, como lo afirma Hull (1989):

Su conocimiento geométrico particular era escaso, aunque, de todos modos, mayor que el de los egipcios. Asombró precisamente a estos al calcular la altura de una pirámide comparando su sombra con la de un bastón. Sabía por tanto que los lados de triángulos semejantes son proporcionales, aunque no lo sean sus áreas. (p, 33)

La escuela pitagórica cuyo lema era “Todo es número” identificó la relación que existe entre la música y la matemática por medio de las expresiones fraccionarias, mostrando que la calidad de una nota musical y su tono están en relación directa con la frecuencia que, a su vez, depende de la longitud de cuerda que se estimule, como lo afirma Bronowski (1979):

Pitágoras, encontró una relación básica entre la armonía musical y la matemática. Una sola cuerda tensa, vibrando como un todo, produce una nota grave. Las notas con sonido armónico se producen en la cuerda al dividirla en un número preciso de segmentos: exactamente en dos partes, exactamente en tres partes, en cuatro partes iguales y así sucesivamente. (p, 63)

Por otro lado, diferentes historiadores infieren que en la cultura babilónica hubo un cambio del sistema decimal al sexagesimal ya sea por consideraciones astronómicas o por una combinación entre dos sistemas más primitivos, el decimal y el base seis, estas consideraciones llevadas a las fracciones resultan de los intereses en la metrología debido a que la magnitud de 60 permite representar con enteros fraccionamientos en dos, tres, cuatro, cinco, seis, diez, doce, quince, veinte o treinta partes iguales, es decir, diez subdivisiones enteras.

Existen evidencias de que las fracciones eran tratadas desde la noción parte-todo por parte de los babilónicos y no como división de la unidad en partes teniendo en cuenta la información de las tablillas, Ríos (2019) dice que “la fracción bajo esta interpretación hace referencia a la relación entre un número determinado de partes, y todas las partes congruentes en que ha sido dividida la unidad. Podríamos decir también que la fracción es una parte del todo” (p. 143). Es decir, en las fracciones el denominador es expresado en base 60 siempre y lo que varía es su potencia acorde al número que se quiere expresar.

A continuación, se observa que uno de los resultados importantes fue el cálculo encontrado en la tablilla YBC 7289 expresado como 1;24,52,10 que en notación moderna el número antes de la coma representa la parte entera y lo demás la parte decimal, es decir, $1 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1,41423$ que es un aproximado a $\sqrt{2}$ (Boyer y Merzbach, 2011).

Por otra parte, la utilización de las expresiones fraccionarias en la cultura china se refleja en el libro Chou Pei Suan Ching, que está conformado por cálculos astronómicos, propiedades del triángulo y operaciones matemáticas con fracciones, además es una conversación entre un ministro y su príncipe, donde se discuten problemas de reparto y de agrimensura (González, 2017).

La necesidad de las fracciones surge de la astronomía y el cálculo del calendario, esto se deduce a partir de la obra *El clásico de la aritmética de gnomon y las sendas circulares del cielo* que está compuesto por cálculos matemáticos complejos en fracciones, que dan cuenta que los chinos conocían las operaciones con fracciones mixtas donde hallaban el mínimo común denominador, y que para realizar dichos cálculos se cree que utilizaron las varillas de contar ya que no existe algún documento que explique el sistema que emplearon (Algarra, Borges, García, Hernández & Hernández, 2004).

Los chinos bajo la filosofía del Ying y el yang, que hace alusión a dos fuerzas opuestas, se referían al numerador como “hijo” y al denominador como “madre”, con el fin de facilitar las reglas y operaciones con las fracciones. Entonces, se puede inferir que en la antigua China adoptaron el significado de fracción como parte todo.

7.2 Análisis Cognitivo

Fandiño (2009) plantea que, al momento de dar una “definición” que pretenda ser definitiva sobre la fracción, la ambigüedad de esta hace que surjan las primeras confusiones, ya que carece del suficiente peso epistemológico para que soporte los varios significados que adquirirá este

objeto matemático a lo largo de su estudio, dando cabida a lo que define Fandiño, D'Amore, Marazzani y Sbaragli (2010) como dificultad, de modo que puede provocar limitaciones e impedimentos de carácter mental o emotivo en el estudiante, entre ellas:

7.2.1 En el ordenamiento

En cualquier nivel educativo los estudiantes presentan dificultad a la hora de ordenar las fracciones en cuanto a determinar cuál es mayor que la otra, de allí que se puede incurrir en el error al afirmar por ejemplo que $\frac{4}{7} < \frac{5}{6}$ ya que no se hace teniendo en cuenta que si se toma $\frac{4}{7}$ del mismo “todo” se obtiene menos, que si se toma $\frac{5}{6}$, para ello se recomienda hacer la transformación a dos fracciones equivalentes convenientes que permitan su comparación como lo serían $\frac{24}{42}$ y $\frac{35}{42}$ donde sí es posible hacer la afirmación de que $\frac{4}{7}$ estará antes que $\frac{5}{6}$ en la recta numérica (Fandiño, 2009).

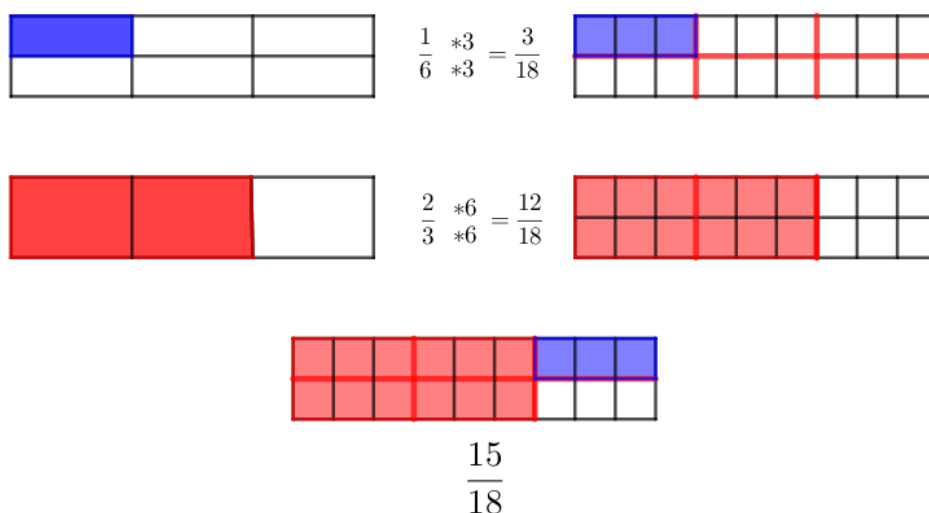
7.2.2 Al realizar operaciones

Es un hecho para la literatura que resulta dificultoso para los estudiantes realizar operaciones entre fracciones, en este caso particular la comparativa entre la suma y el producto, donde esta última se reduce al algoritmo de $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$ mientras que para el caso de la adición esta equivalencia no se cumple ya que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$. Por tanto, Fandiño (2009) propone que para la multiplicación se obtienen mejores resultados usar dicho algoritmo que si se observa de forma gráfica, alternativa que sí facilitaría la apropiación de la suma de fracciones así:

Fandiño (2009) proponiendo la idea de que para comparar dos fracciones, es necesaria la transformación de las mismas en dos fracciones equivalentes, hecho que reduce el problema a transformar las fracciones a dos homogéneas, donde la operabilidad de forma algorítmica se vería ejemplificada de la siguiente manera: $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$ que resulta equivalente a tener $\frac{3}{18} + \frac{12}{18}$; y para operar con ellas se remite al algoritmo de la suma de fracciones homogéneas donde $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, que si se direcciona a una de las interpretaciones de las fracciones se llegarías a “Parte-Todo”, debido a que al momento de homogeneizarlas, estas al tener un mismo denominador, comienzan a ser parte de un mismo “todo” donde su respectivo numerador es la porción del mismo, hecho que se puede ver gráficamente de la siguiente manera:

Figura 4

Representación gráfica



Pruzzo (2012), afirma que es necesario presentar a los estudiantes la fracciones desde todas las perspectivas e interpretaciones posibles, esto con el fin de que pueda concebir sus diferentes contextos y ser reconocida la fracción como un megaconcepto.

Si bien los descrito previamente subyace al alumno al contexto del reparto, se considera relevante que este se enfrente a otras interpretaciones como lo sería la apropiación de la fracción como razón, cociente, conteo y medida. Esta caracterización de las fracciones hace que cada vez sea más complejo la construcción de un concepto ya que como lo enuncia Pruzzo (2012), apoyada en Piaget y Vygotsky, el pensamiento verbal se fundamenta en generalizar los significados desde los conceptos más primitivos y abstractos en torno por ejemplo, a la noción de cantidad y es desde allí de donde se intuye que no es posible entender la complejidad del concepto desde un primer momento, sino que este se le logra a través del desarrollo del mismo.

Se considera que detrás de cada noción que el estudiante logra construir, se encuentra una operación, lo que conlleva a que este realice dicha construcción cuando:

descubre la constancia de la cantidad, pero además puede realizar dos operaciones y establecer la síntesis de ellas: la clasificación y la seriación. La inclusión de las partes en el todo implica que “los elementos aislados de una cantidad continúan siendo partes de la misma cantidad cualquiera sea la organización de las mismas” (Piaget, 1963). Y que esa cantidad permanece constante mientras se opera con las partes. La construcción de la fracción estaría requiriendo las mismas condiciones que las de la construcción del número natural (seriar- clasificar) pero a partir de su reconstrucción en un plano superior de organización, que contenga las características propias del número racional: por ejemplo, mientras que entre un número natural y el siguiente no hay otro número, entre un número racional y otro habría infinitos. Por eso, para construir el número fraccionario deberá poder realizar las dos operaciones, ordenar fracciones de mayor a menor (seriar) e incluir las partes en el todo (Pruzzo, 2007, p.70)

Finalmente, como se expondrá a continuación en el análisis didáctico, se concluye que “la enseñanza irrelevante, que no sigue las construcciones de los alumnos por la evaluación continua

y longitudinal, provoca lagunas de aprendizaje y errores conceptuales que pueden, por eso mismo, ser revertidos” (Pruzzo, 2012, p.9).

7.3 Análisis Didáctico

Para este análisis se utilizaron dos referentes, en primer lugar, el Ministerio de Educación Nacional que a través del programa *todos a aprender 2.0*, propone una guía para la implementación de situaciones de aprendizaje por parte de docentes. Esta se centra en la atención en los grados cuarto y quinto donde se estudia el concepto de fracción. En segundo lugar, se tuvo en cuenta una unidad didáctica que se fundamenta en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, esta hace parte de la tesis discutida en la sesión seis (apéndice 6), donde se analizan las actividades allí expuestas.

Se encuentra que, en un primer acercamiento al libro de texto, en la tabla de contenido no se identifican los objetos matemáticos a tratar, ya que denominan a cada unidad con un nombre que busca cautivar al lector, entonces el maestro debe remitirse a la descripción de la situación problema y objetivos de aprendizaje para reconocer el tema en cuestión. Ver **Figura 5**.

Figura 5

Libro todos a aprender 2.0



En este libro, se presenta la noción de fracción desde un primer momento a través de una actividad con material manipulativo para la introducción al centro de aprendizaje. Luego en las situaciones de enseñanza ver **Figura 6**, el estudiante interactúa con el objeto matemático de forma explícita.

Figura 6*Situación de enseñanza*

Centro 1 - ¡Es importante compartir! DURACIÓN: 20 MINUTOS

Enseñanza explícita

Tome una imagen de una barra de chocolate y pregunte a los estudiantes cómo hacer para compartirla entre 8 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad. Esta es una posible forma, puede haber otras.

Después de debatirlo con los estudiantes, es necesario concluir que se debe dividir o cortar la barra de chocolate en 8 partes de tamaños iguales.

Pregunte la cantidad de chocolate que recibirá cada persona.

Respuesta: $\frac{1 \text{ parte}}{8 \text{ partes}}$ o también 1 parte de 8 partes.

Vuelva al primer ejemplo en el cual cada amigo recibe una parte de las ocho partes totales de la barra de chocolate. La cantidad que cada uno recibe es representada por el numerador, y la cantidad total de las partes es representada por el denominador.

$\frac{1 \text{ numerador}}{8 \text{ denominador}}$



Luego de realizar las diferentes situaciones planteadas, se define la fracción a partir de un todo o de un conjunto de objetos. Ver **Figura 7**.

Figura 7*Definición***Fracciones**

Una **fracción** es un número de la forma $\frac{a}{b}$ que representa una cantidad, donde **a** y **b** son números naturales y b es diferente de 0.

$\frac{1}{8}$ —→ **Numerador:** Es el número de partes iguales que se toman.

$\frac{1}{8}$ —→ **Denominador:** Es el número de partes iguales en las que dividimos un todo (colección, objeto, figura, etc.).

Se sigue con diferentes tipos de ejercicios que se categorizan como: contextualizados, abiertos y numéricos. Ver **Figura 8**, los cuales tienen como objetivo que el estudiante interiorice la representación numérica, gráfica, verbal y finalmente identifique la utilidad en un contexto cotidiano.

Figura 8*Tipos de ejercicios*

A) Ejercicios contextualizados

1) Martín tiene un jardín. Quiere utilizar $\frac{6}{24}$ de su jardín para cultivar zanahorias (Z), $\frac{9}{24}$ de su jardín para cultivar tomates (T) y el resto para cultivar lechuga (L). ¿Qué parte del jardín corresponde al cultivo de lechugas?

C) Ejercicios numéricos

5) Une cada fracción con la expresión correspondiente.


$\frac{1}{3}$	• Dos quintos.
$\frac{2}{6}$	• Un medio.
$\frac{2}{5}$	• Un tercio.
$\frac{3}{4}$	• Tres cuartos.
$\frac{1}{2}$	• Dos sextos.

B) Ejercicios abiertos

3) Colorea la parte indicada del total:

a) $\frac{1}{2}$ de este rectángulo.

b) $\frac{2}{4}$ de este rectángulo.



En el libro de textos todos *a aprender 2.0* de los grados cuarto y quinto, al realizar una búsqueda en las actividades sugeridas, se observa que estas permiten desarrollar la apropiación del concepto de fracción a partir de procesos desde una aproximación sensorial, estructurada y contextualizada. Sin embargo, no se encontraron evidencias del uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico. Esto es coherente con el análisis realizado por Martínez (2018) quien llegó a resultados similares a partir de la revisión del mismo documento.

Ahora, se analizan las tres actividades propuestas por Rincón & Fonseca (2021) relativas a la enseñanza de las fracciones a través de la historia.

Este proyecto presenta como primera actividad, un cuento titulado “*los diseños del rey*” donde se evocan personajes históricos como eje central de las diferentes situaciones problema:

En la antigüedad existían reinos en los cuales había familias reales con grandes riquezas como castillos y monedas de oro, los cuales eran cuidados por soldados al servicio del rey.

El rey quería realizar un festín para celebrar el casamiento de su hija y para ello contaba con 42 soldados quienes serían los encargados de llevar la invitación a la alta nobleza de 4 reinos. Entonces pidió a uno de sus consejeros que repartiera a los soldados y los enviara a los reinos. El consejero envió al reino más lejano un tercio de los soldados, al reino que estaba al pasar el bosque embrujado envió a dos séptimos de sus más valientes soldados, al reino que estaba en la montaña envió tres catorceavos, y al reino más cercano envió los demás soldados. (pp. 128-129)

Conforme a la lectura realizada, el estudiante debe resolver dicha situación y responder a una serie de preguntas. Ver **Figura 9**, lo cual se considera que propicia en el alumno la concepción de fracción como repartición.

Figura 9

Primera actividad

¿Cuántos soldados deben ir para el reino más lejano?

¿Cuántos soldados deben ir el reino que está al pasar el bosque embrujado?

¿Cuántos soldados deben ir al reino de la montaña?

¿Cuántos soldados deben ir al reino más cercano?

Continúe usando los soldados y determine:

1. Toma 21 soldados y aparta de ahí tres séptimos. ¿Cuántos soldados le salieron? _____
2. Toma 18 soldados y aparta de ahí un sexto. ¿Cuántos soldados le salieron? _____
3. Toma 30 soldados y aparta de ahí cuatro séptimos. ¿Cuántos soldados le salieron? _____
¿lograste hacerlo? _____ ¿por qué? _____
4. Toma 12 soldados y aparta de ahí dos tercios. ¿Cuántos soldados le salieron? _____

Luego proponen una serie de situaciones, las cuales para su solución le recuerdan al estudiante la definición con el fin de favorecer la comprensión de fracción como parte todo. Ver

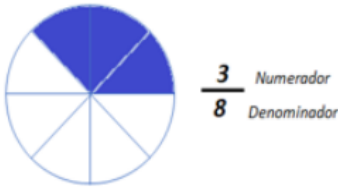
Figura 10.

Figura 10

Fracción como parte todo

¿Recuerdas que es una fracción? ¿Cómo se escribe una fracción?

Ten presente que: Una fracción se puede definir como la parte de un todo y usualmente se denotan por $\frac{a}{b}$ donde (*b se conoce como el denominador, que indica las partes en las que se divide la unidad y a representa el numerador que indica la cantidad de esas partes tomadas en consideración*)



En este caso la unidad se ha dividido en 8 partes y se han sombreado 3 luego la fracción que representa la parte sombreada es $\frac{3}{8}$

En la actividad dos denominada “la visita al zoológico”, presenta una estructura similar a la anterior, la cual plantea situaciones donde el estudiante debe utilizar material concreto para fortalecer la comprensión, interpretación y representación de las fracciones como razón y porcentaje. Ver **Figura 11**.

Figura 11*Situación inicial*

Las directivas del colegio han planeado una visita al Zoológico Los Ocarros. Al llegar al zoológico nos recibieron muy alegres, nos regalaron el mapa del lugar y nos dieron los siguientes datos:

El parque cuenta con 10 osos hormigueros, 4 osos perezosos, 14 monos araña, 6 monos titi. Hay en total 15 venados entre coliblancos y colorados, los cuales, al repartirlos, forman 3 grupos con partes iguales de cada tipo de venado.


Use las imágenes que se recortó del anexo que estaba al final de la guía y úselos para determinar los resultados de las siguientes preguntas: (Si no tiene el material, use pelotitas de papel, colores, lápices u otros elementos que tenga a la mano para representar los animales y poder trabajar)


1. ¿Cuántos grupos puede formar de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de osos hormigueros y de osos perezosos? _____
2. ¿Qué relación hay entre la cantidad de osos perezosos y osos hormigueros? _____
3. ¿Qué razón establece la cantidad de monos araña y monos titi? _____
4. ¿Qué razón establece la relación entre la cantidad de venados coliblancos y venados colorados? _____
5. ¿Cuántos venados colorados hay en el zoológico? _____
6. ¿Qué porcentaje de los monos, son monos araña? _____
7. ¿Qué porcentaje del total de los venados son venados coliblancos? _____

Luego de la problematización anterior, definen la fracción como razón en aras de favorecer esta concepción como la comparación entre dos cantidades. Ver **Figura 12**.

Figura 12*Definición de fracción como razón*

Aprendamos: la fracción como razón, es la fracción que se genera cuando se comparan cantidades de un mismo conjunto o una misma magnitud.





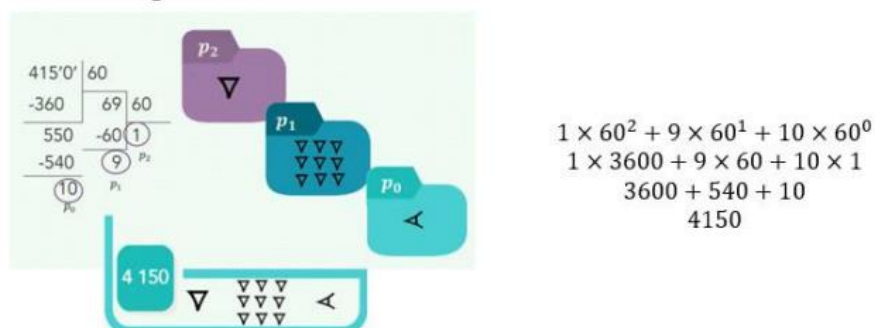
En este caso en cada corral hay 5 cebras por cada 8 animales, luego la fracción que representa esta razón es: $\frac{5}{8}$

Finalmente, en la actividad tres: “las fracciones en la historia”. El aprendizaje esperado para esta actividad es el reconocimiento de las diferentes interpretaciones de las fracciones trabajadas en las dos actividades anteriores. En un primer momento, realizan un recuento de las tres culturas más importantes en el desarrollo de las matemáticas en la antigüedad (la babilónica, la egipcia y la china), donde hablan de la representación y el sistema numérico utilizado en cada una, además, al final de cada historia les proponen una situación sobre escribir cierto número como se hacía en ese entonces, por ejemplo. Ver **Figura 13**.

Figura 13

Situación de la cultura babilónica

Los babilónicos usaban el símbolo de la unidad para representar los números hasta el 9, y para los números de 11 al 59 combinaban la espiga y el clavo. Para cifras mayores, usaban los mismos símbolos y formaban grupos u órdenes separados por un espacio. En el siguiente ejemplo le mostramos como hacían para escribir el número 4150 de nuestro sistema actual, al sistema cuneiforme sexagesimal



En su cuaderno de matemáticas, escriba en sistema cuneiforme los números 75, 186 y 4850

Posteriormente, proponen al estudiante uno de los problemas clásicos sobre repartición encontrado en el papiro de Rhind. Ver **Figura 14**.

Figura 14*Cultura egipcia*

Los egipcios trabajaban las fracciones con situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, uno de los problemas característicos es: ***“Repartir 2 panes entre 5 esclavos de tal manera que reciban la misma cantidad”.***

¿Cómo resolverías este problema?:

Ilustra gráficamente la solución.

Ahora bien, el autor desarrolla la anterior situación problema, de la siguiente manera:

Figura 15*Solución*

Segundo: Le dieron un pedazo a cada esclavo, es decir, repartieron 5 pedazos y sobró una parte



¿Represente de manera verbal, numérica la fracción de pan que se le ha dado hasta el momento a cada esclavo?

¿Qué fracción del pan sobró? _____

Tercero: El pedazo de pan que sobró, lo dividieron en 5 partes iguales, para darle una a cada esclavo. En su cuaderno haga el dibujo de este primer paso, ¿cómo le quedó?, si le quedo similar a la siguiente representación, muy bien



Escriba en forma verbal y numérica la fracción de pan que corresponde a cada uno de estos pedacitos: _____

De esa manera repartieron los 2 panes entre los 5 esclavos teniendo en cuenta que cada uno recibiera la misma cantidad.

Pero ¿Cuánto pan recibió cada uno? _____




Entonces, cada esclavo recibió: $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ lo cual los egipcios lo representan de manera gráfica así:



Durante el desarrollo se observa que el docente, guía la discusión de la solución mediante preguntas claves que propician la reflexión en los estudiantes, además favorece la comunicación, atención y crea un ambiente de aprendizaje. Ahora, se contempla la siguiente actividad:

Figura 16

De lo simbólico a lo fraccionario

Por ejemplo, la fracción común $\frac{7}{20}$ se representa así:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$

Hagamos la operación para verificar que es cierto: $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{5+2}{20} = \frac{7}{20}$

Pero si tenemos $\frac{7}{20}$ ¿cómo encontraríamos las fracciones unitarias equivalentes? No se preocupe vamos a encontrar la solución utilizando uno de los diferentes métodos que los matemáticos han encontrado en el transcurso de sus investigaciones en la historia.

Primero obtenemos los divisores del denominador, en este caso el 20, que son 1, 2, 4, 5, 10, 20.

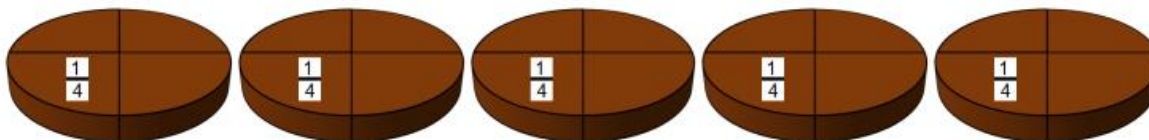
Luego, con esos divisores, buscamos dos números que sumados nos den el numerador de la fracción, es decir 7, esto sería 5 y 2. Ahora se deben escribir dos fracciones, donde los numeradores, son los dos divisores seleccionados, colocando primero el número mayor, y el denominador de las fracciones es el mismo 20.

Planteemos las nuevas fracciones $\frac{5}{20} + \frac{2}{20}$ ahora simplifiquemos las fracciones $\frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ **y estas serían las fracciones unitarias equivalentes a $\frac{7}{20}$.**

Para la solución de este ejemplo, realizan un empalme entre la historia y los algoritmos actuales, donde utilizan el sistema numérico de los egipcios sin un fundamento teórico que dé cuenta de las estrategias usadas en la época. Sin embargo, replantea la situación con base en el problema de la repartición de las hogazas de pan, con el propósito de dar una solución acorde al razonamiento de esta cultura. Ver **Figura 17**.

Figura 17*7/20 visto desde la repartición*

¿Pero, este método para qué lo usaban los egipcios en la vida cotidiana?, bueno, para resolver situaciones como la siguiente: repartir 7 panes entre 20 personas, lo cual ellos lo planteaban como $\frac{7}{20}$



5 panes lo repartían entre las 20 personas, dividían cada pan en 4 partes iguales, entonces a cada persona le tocaba $\frac{1}{4}$ pero sobran 2 panes. Entonces los dos panes que sobran lo dividían en las 20 personas, de donde cada pan se dividía en 10 pedazos iguales, por lo tanto, a cada persona le tocaba $\frac{1}{10}$ de pan más.



Al hacer esta repartición se logró que todas las personas comieran la misma cantidad de pan, es decir, $\frac{1}{4}$ *de un pan* + $\frac{1}{10}$ *de un pan*

Observemos gráficamente que $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$

Como resultado de esta revisión se tiene que, en un primer momento, es inexistente la historia en las actividades propuestas para el estudiante en el libro de texto *todos a aprender 2.0* propuesto por el MEN. Por otro lado, en la unidad didáctica propuesta por Rincón y Fonseca, traen a colación algunas culturas y sus sistemas de numeración, con base en ellas presentan una serie de actividades que recogen algunas interpretaciones sobre la fracción y proponen situaciones históricas para su desarrollo. En algunas de estas interpretan la utilización de la historia en el aula de clase, como la adaptación de problemas modernos donde evocan personajes ficticios. Según Furinghetti (2020), este hecho no corresponde a una enseñanza adecuada de las matemáticas desde

una mirada histórica dado que utilizar nombres o palabras antiguas no necesariamente garantiza un uso fundamentado de la historia. También, presentan situaciones antiguas que no ayudan a la comprensión del objeto matemático puesto que es necesario retomar el contexto, enunciar de otra manera y tomar decisiones en cuanto a rutas cognitivas que sean efectivas y eficientes en la enseñanza. Por último, se destaca el uso de las diferentes representaciones e interpretaciones de la fracción pues enriquece la experiencia de aprendizaje, fomenta la comprensión, le otorgan sentido y promueve el pensamiento matemático.

7.4 Resultados del análisis preliminar

De acuerdo con el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico, se considera que la propuesta del MEN es pertinente en el sentido de introducir el concepto de fracción, no desde una definición discursiva, sino a través de la construcción de un megaconcepto a partir de situaciones en las que emergen las distintas nociones de fracción. En tanto que, de acuerdo con la literatura, el orden en el cual se estudian es adecuado: iniciar desde el contexto de repartición, equivalencia y cociente en grado cuarto, y en quinto primaria se presenta como cociente, porcentaje y las operaciones básicas. Sin embargo, en grado cuarto se está planteando la fracción como cociente y se reduce a utilizar el algoritmo de la división para calcular la representación decimal, lo que genera una brecha epistemológica donde el estudiante no está construyendo sus propias operaciones y carece de una conexión entre las dos nociones que previamente se le han presentado (reparto-equivalencia).

¿Conviene entonces combinar las nociones de fracción en la enseñanza o es mejor concretar una y luego avanzar a otra? Para dar respuesta a este interrogante, se tiene en cuenta que, el uso simultáneo de diferentes nociones de fracción al inicio del estudio de las fracciones conlleva a confusiones conceptuales, sobrecarga cognitiva, inconsistencia en el lenguaje, deficiencia de

coherencia y falta de dominio. Es decir, los alumnos pueden malinterpretar las diferentes nociones, no establecer conexiones coherentes entre ellas, comunicar erróneamente las ideas y abrumarse. Sin embargo, luego de haber estudiado la noción de fracción como parte todo, se pueden incorporar tareas de las que emergen de manera natural combinaciones de esta y otras de equivalencia. Por ejemplo, en la actividad de Brousseau, Brousseau y Warfield (2014) donde se propone como tarea medir el espesor de una hoja de papel a partir del apilamiento de varias hojas del mismo grosor, la fracción está representada por una pareja ordenada de números, uno corresponde a la cantidad de hojas apiladas y otro al grosor de estas. Esta situación hace explícita la noción de equivalencia de fracciones, entendiendo que apilar distinto número de hojas implica un número distinto para el grosor total, de modo que el grosor de cada hoja se puede expresar mediante diferentes parejas de números. Adicionalmente, el problema de medir el grosor de una hoja conformada por dos hojas de grosores distintos implica la suma de fraccionarios. Situación que se puede tratar en el mismo contexto, a partir de la equivalencia de fracciones. Esto es, si cada uno de los dos tipos de hoja en cuestión tienen una pareja de números asociada a su grosor (una fracción), el problema se reduce a la búsqueda de una cantidad de hojas que se deben apilar para que se pueda conocer el grosor sin importar el tipo de papel (el mínimo común múltiplo).

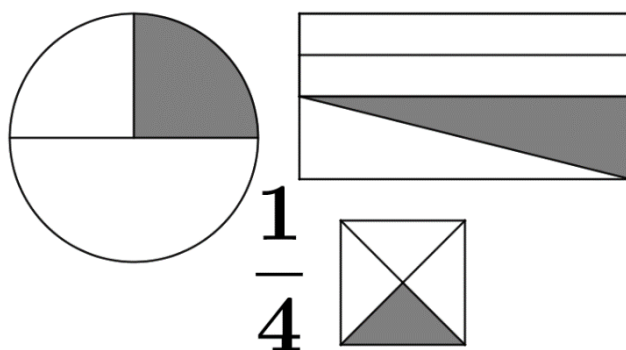
A continuación, se pueden plantear situaciones de reparto en las que se utilicen las fracciones egipcias como herramienta. Estas situaciones implican que el estudiante reparta una cantidad determinada de objetos divisibles en porciones arbitrarias entre un número específico de personas, con la condición de que ninguna persona reciba porciones repetidas. Por ejemplo, se puede proponer el reparto de 4 chocolatinas entre 5 personas en cantidades iguales, asegurándose de que cada estudiante no reciba la misma porción más de una vez. En este escenario, el alumno tiene la oportunidad de trabajar con fracciones egipcias, dividiendo la unidad y manipulando los

fraccionarios de manera que se cumpla la condición establecida en el problema. A medida que resuelve esta situación, el estudiante se dará cuenta de que a cada persona le corresponde la misma cantidad de porciones, que en conjunto son del mismo tamaño que las de los demás. Al analizar individualmente cada porción, también se percatará de que ninguna de ellas es del mismo tamaño que las demás. Desde un enfoque didáctico, el estudiante estará operando con fracciones unitarias de forma no algorítmica, similar a los procedimientos de reparto utilizados por los egipcios. Así mismo, la validación por parte del alumno se puede hacer en el mismo contexto de la situación de modo que no requiere de lenguaje matemático formal ni de validación externa como la del profesor.

La representación gráfica de las fracciones que se usan y el momento en que estas son utilizadas, juegan un rol importante en la percepción inicial del estudiante. Es pertinente que estas no se guen a una única representación en divisiones congruentes, en búsqueda de una comprensión independiente de la fracción que necesite ser representada. Esta puede hacerse desde diferentes formas y tamaños evitando así el sesgo de equipartición, por ejemplo:

Figura 18

Diferentes representaciones de la fracción "un cuarto (1/4)"



Con lo anteriormente ilustrado, también se permite introducir al estudiante la noción de fracción como medida, ya que puede ser visto como un problema de áreas en donde un fraccionario

que sea de la forma a/b , gráficamente se interpreta como dividir en partes iguales (de misma área, mas no iguales en forma) a b , para tomar a unidades con el fin de representar la cantidad requerida.

Por otra parte, teniendo en cuenta las ideas desarrolladas en las directrices, se identifica que el MEN en su propuesta curricular, carece de un enfoque histórico que, a nivel cognitivo, epistemológico y didáctico, limita al docente a la introducción de cada una de las nociones de fracción, debido a que su ausencia hace que este carezca de herramientas para la contextualización del alumno a situaciones problema que permitan el desarrollo del megaconcepto de fracción. Por ejemplo, sería en un principio introducir al concepto de fracción desde la noción de repartición a partir de situaciones problemas contextualizadas en las vicisitudes que los egipcios podían presentar en su época.

Es oportuno que evolucione el conocimiento del estudiante sobre el concepto de fracción, lo que implica presentar los diferentes contextos donde se manifiestan otras interpretaciones de este objeto matemático. Por ejemplo, la fracción vista como razón. Un uso de la historia para proponer actividades de clase consiste en plantear una actividad moderna a la cual se le puede dar respuesta usando métodos empleados en la antigüedad. Por ejemplo, hallar la altura de un edificio, esta puede ser solucionada con el método que Tales de Mileto usó para hallar la altura de las pirámides de Egipto. Es decir, el estudiante podría dar solución al problema realizando una comparación entre su altura y su sombra para aplicarla entre la sombra y la altura del edificio, debido a que estas independientemente de su tamaño siempre conservan la misma razón. Sin embargo, conviene que estas razones sean simples como uno a uno, dos a uno, tres a uno o tres a dos. Esta situación puede ser aprovechada para la introducción de la noción de fracción como razón y en los diferentes contextos donde esta puede ser encontrada.

Si bien las culturas china y babilónica también ofrecen aportes significativos a la comprensión de las fracciones a lo largo de la historia, es importante considerar la pertinencia de su inclusión al plantear actividades a estudiantes en los dos últimos grados de la educación primaria. Debido a que los educandos en este nivel todavía se encuentran en proceso de construcción del concepto de fracción y es posible que carezcan de las herramientas necesarias para abordar problemas que requieran el uso de las técnicas y métodos específicos empleados por las culturas china y babilónica, lo que garantiza una progresión adecuada en la enseñanza de las fracciones, partiendo de conceptos básicos y ampliando gradualmente su comprensión a medida que los estudiantes avanzan en su trayectoria educativa. Asimismo, se evita la frustración y se promueve un aprendizaje significativo al adaptar las actividades a las capacidades y necesidades de los estudiantes en su etapa de formación.

En conclusión, se considera que la historia en la educación matemática tiene dos usos, por un lado, proponer una situación histórica transpuesta didácticamente. Por otro, una situación en contexto moderno utilizando ciertas nociones epistemológicas que tuvieron el mismo sentido en la historia. Es decir, la recreación de situaciones históricas que permita a los estudiantes apreciar la relevancia y aplicaciones prácticas de los conceptos matemáticos en diferentes épocas, ampliando su comprensión y conectándola con la evolución de las matemáticas a lo largo del tiempo. También, al utilizar ciertas nociones epistemológicas presentes en la historia en situaciones contemporáneas, se fomenta una comprensión más profunda de los conceptos y se promueve el razonamiento matemático.

8. Conclusiones

El análisis documental presentó un desafío al momento de seleccionar los documentos que registraran el posible origen y uso de las fracciones en las culturas egipcia, griega, babilónica y

china, dado que la información reportada está limitada a hallazgos arqueológicos, papiros y traducciones, debido a que las fuentes históricas son fragmentos, en ocasiones ambiguos, que supedita los resultados a las interpretaciones de los investigadores y a reconstrucciones basadas en la evidencia disponible. Este hecho restringe las aproximaciones al objeto matemático en las culturas y su evolución.

El uso de la historia, pese a ser una herramienta útil para la enseñanza de las fracciones, su ejecución exitosa en el aula de clase presenta un desafío para el docente, debido a que el estudio de las fracciones visto desde la enseñanza presenta una serie de obstáculos cognitivos relacionados con el ámbito didáctico, epistemológico y ontogénico que afectan la interacción entre el estudiante, el profesor y el saber. Es decir, las limitaciones neurofisiológicas en el aprendizaje (ontogénicas), dificultades asociadas a la naturaleza del conocimiento y obstáculos en el desarrollo de los conceptos por parte del estudiante (epistemológicas). Reconocer y superar estos obstáculos es fundamental para mejorar la enseñanza de las matemáticas. En el caso de las fracciones, en el aprendizaje de este objeto matemático se desencadenan dificultades clasificadas como sigue: de ordenamiento, al realizar operaciones, de reconocimiento de esquemas, al comprender el adjetivo igual, en la gestión de equivalencia, al detectar la unidad que generó la fracción y la equipartición de fracciones como error de enseñanza.

La exploración del origen de las fracciones desde la cultura egipcia, griega, babilónica y china constituye un valioso enfoque epistemológico para su enseñanza. Al remontarse al contexto histórico y cultural en el que surgieron las fracciones, se brinda a los estudiantes la oportunidad de comprender las necesidades y desafíos que impulsaron el desarrollo de este objeto matemático. Esta perspectiva histórica promueve una comprensión más sólida y significativa de las fracciones, donde se deja a un lado la memorización de procedimientos y pueden relacionar las fracciones

como respuesta a situaciones cotidianas. También, suscitan un acercamiento a las diferentes aproximaciones y representaciones de las fracciones en las culturas, donde pueden distinguir las diversas interpretaciones de este concepto matemático.

La comprensión de las distintas interpretaciones del concepto de fracción enriquece el aprendizaje de las matemáticas dado que le permite al estudiante relacionar este objeto matemático a los contextos en que emerge. En lo que respecta a los textos propuestos por el currículo, se considera que son pertinentes las situaciones presentadas para abordar algunos significados de la fracción, pero es necesario una articulación de la historia como estrategia didáctica, ya que la incorporación de aspectos históricos promueve el aprendizaje significativo y fomenta el pensamiento crítico, teniendo en cuenta que desde la historia se pueden proponer situaciones históricas repensadas o utilizar nociones epistemológicas adaptadas a una situación moderna que tuvieron el mismo sentido en la historia.

El repensar la historia como eje de transversalización en la enseñanza de las matemáticas, implica que no es suficiente conocer la historia para que esta sea utilizada como herramienta dinamizadora entre el saber y el estudiante, esto significa articular el currículo, contexto del alumno, objetivo de la clase y la historia en un diálogo didáctico fundamentado, donde es necesario realizar una transposición didáctica que representa un desafío para el docente.

Referencias bibliográficas

Algarra, M. Borges, C. García, I. Hernández, V y Hernández B. (2004). Las Matemáticas Chinas.

Recuperado de: <https://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/papers/04historia.pdf>

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica.1

Bachelard, G. (1976). La formación del espíritu científico. 5 ed. México: Siglo Veintiuno, editores, S.A.

Bermeo-Yaffar, F., Hernández-Mosqueda, J. S., y Tobón-Tobón, S. (2016). Análisis documental de la v heurística mediante la cartografía conceptual. Ra Ximhai, 103–122. <https://doi.org/10.35197/rx.12.01.e3.2016.05.fb>

Bronowski, J. (1979). El ascenso del hombre. Fondo Educativo Latinoamericano, S. A. Colombia. Recuperado de: <http://www.dcne.ugto.mx/respaldo1/Contenido/MaterialDidactico/amezquita/Lecturas/El%20Ascenso%20del%20hombre.pdf>

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Constructions des savoirs, obstacles et conflits (pp. 41–64). Montreal: Agence d’Arc.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). The Adventure as Experienced by the Students. In Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment (pp. 9-125). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2715-1_1

Benjamin Boyer, C. & Merzbach, U. C. (2011). *A History of mathematics*. Wiley, Cop.

Carrillo Yalán, M. E. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/1547>

D' Amore, B. (2007). *El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria*. Cuadernos del Seminario en educación, n. 8. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D' Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática: análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Magisterio Editorial

Dunham, W (1992). *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Ediciones Pirámide, S. A. Madrid.

Euclides (2007). *Elementos I*. Biblioteca Gredos. RBA Coleccionables, S. A. Barcelona.

Euclides (2007). *Elementos II*. Biblioteca Gredos. RBA Coleccionables, S. A. Barcelona.

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. En L. A. Hernández Rebollar, J. A. Juárez López, & J. Slisko Ignjatov (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación (Volumen 1)* (pp. 25-38). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

FONDEF. (2017-2019). *Interpretaciones de fracciones*. Universidad de Chile.

- Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51, 967-994, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1565454
- Galeano, M., Vélez, R. (2002) Estado del arte sobre fuentes documentales en Investigación cualitativa. Medellín: Universidad de Antioquia. Centro de Investigaciones Sociales y Humanas.
- Gerván, H. H. (2014). Una propuesta de interpretación historiográfica de la matemática en el Antiguo Egipto. In IX Encuentro AFHIC/XXV Jornadas Epistemología e Historia de las Ciencias.
- Giménez, J. (1986). Una aproximación didáctica a las fracciones egipcias. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, 57-62.
- González, N. (2013). La epistemología de las matemáticas y su contribución al aprendizaje significativo en estudiantes de grado sexto. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/20362>
- González, N. (2017). Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones. Universidad Nacional de Colombia.
- González, V. Y., & Sismondi, S. R. (2021). Tres Civilizaciones. Tres Numeraciones. *Revista De Educación Matemática*, 25(1). Recuperado a partir de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10237>
- Gutiérrez, J (2019). La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría.

(Tesis de Maestría) Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Recuperado a partir de

<http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2019/177232.pdf>

Hawking, S. (2006). Dios creo los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia. Critica, S., L. Barcelona.

Higuera Tinoco, D. (2022). El aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria [Tesis de maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo].

Hoyos Franco, L. (2018). La fracción como razón: Una experiencia de aula en grado sexto [Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/11349/14288>

Hull, L. W. H. (1989). Historia y Filosofía de la Ciencia. Editorial Ariel. Barcelona, 1989.

Kline, M. (1992): El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol.1. Alianza Universidad, n.º 715, Madrid

Llinares, S., & Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. In XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (pp. 13-24)

Martínez Moreno, F. W. (2018). Dificultades en la enseñanza de las fracciones de educación básica: una mirada desde los organizadores del currículo y el análisis didáctico en la perspectiva de la formación de profesores [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/10893/14880>

Maza, Carlos (1999). Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de las fracciones, *Revista Suma* (31), Pp. 87-95

Metaute, M. (2017). Una propuesta de aprendizaje significativo para entender el concepto de fracción como parte del todo, con alumnos de sexto, del sector rural, en Amalfi [Tesis de pregrado, Universidad Cooperativa de Colombia]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/20.500.12494/7466>

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. (1998). Serie de Lineamientos Curriculares Matemáticas. https://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Recuperado de: https://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje Vol. 2. https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. (2017). Mallas de Aprendizaje. Documento para la implementación de los DBA. Recuperado de: https://drive.google.com/drive/folders/1iGh_ZOloPVoJRv-XunLfy0mGw-Zgwqrx

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), 157-182. <https://hdl.handle.net/10495/4657>

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad. Pontificia Universidad Católica del Perú.

<http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/134460>

Palenzuela, H. (2017). ¿Por qué incluir la historia de la matemática en el aula? (Tesis de Maestría) Universidad de Almería. Almería.

http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6028/14375_Helena%20Palenzuela%20Rodr%C3%ADguez%20%281%29.pdf?sequence=1

Pruzzo de Di Pego, V. (2007). Las tensas relaciones entre Didáctica y “las” Didácticas [Artículo]. Revista Praxis Educativa, 11 (XI), 83-94.

<https://repo.unlpam.edu.ar/bitstream/handle/unlpam/3026/n11a06dipego.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? Revista Pilquen, Sección Psicopedagogía, Año XIV, Nº 8.

Rincón Valderrama, C. M., & Fonseca Mora, J. (2021). Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas [Tesis de maestría, Universidad del Magdalena]. Repositorio Institucional Universidad del Magdalena.

Ríos, Yaneth (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 141-150). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ruiz Cruz, C. A. (2013). La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Stewart, I, (2016). Números Increíbles. Editorial Planeta. Bogotá.

Tall, D. & Vinner, S. *Educ Stud Math* (1981) 12: 151. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

Torra, Vicenc (2011). El mundo es matemático. Del Abaco a la revolución digital. Algoritmos y Computación. RBA Libros, S.A. (pp. 31-32). Barcelona.

Apéndice

Apéndice A. Protocolo de la sesión 1 de seminario de investigación

Seminario de Trabajo de Grado

Sesión: 1

Relator: Óscar Alirio Sánchez Suárez

Correlator: Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Protocolante: Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Documento: Las fracciones unitarias en la matemática del Antiguo Egipto, La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED

Fecha: 11 de abril 2023

Actividades a desarrollar:

1. Presentación del documento
2. Discusión y análisis
3. Conclusiones

Presentación del documento

Cuando se requiere realizar un aproximamiento epistemológico a un objeto matemático, en este caso las fracciones, es necesario primero concretar un recorrido a nivel histórico de cómo este de forma intuitiva y natural fue construido por diversas culturas a lo largo del desarrollo del conocimiento humano, es por ello que se han seleccionado las culturas pilares: griega, egipcia, babilónica y china; que en su haber científico y de construcción del conocimiento, plantean una forma de ver y entender el objeto matemático de estudio. En la primera sesión del seminario, la reflexión se centró en las dos primeras culturas, las cuales desarrollaron su acervo matemático a partir de situaciones cotidianas hasta lograr, cientos de años después, un nivel axiomático.

En primera instancia el relator propone la discusión, en el cual se expone cómo la cultura egipcia, respondiendo a las necesidades cotidianas y económicas, desarrollaron aritmética de las fracciones unitarias; atendiendo a dos necesidades: medir y repartir. Las evidencias de estos acontecimientos se sustentan en los hallazgos arqueológicos como los papiros de Abizur. El problema del reparto se encuentra en el papiro de Rhind, de modo que tuvo una relevancia importante para los egipcios. A partir de este problema, esta cultura logró formalizar y sistematizar el uso de la duplicación y desdoblamiento de fracciones para encontrar una descomposición de fracciones unitarias únicas.

En segunda instancia, se reflexiona sobre cómo la cultura griega extrae todos aquellos conocimientos surgidos por parte de los egipcios sobre las fracciones buscando a través de diferentes escuelas del pensamiento y sus representantes una axiomatización de este.

Discusión y análisis. Atendiendo a uno de los enfoques del seminario, es necesario definir un punto de partida en el cual podamos centrar la discusión en torno al cómo en la cultura griega y egipcia aparece y se hace uso del concepto de fracción. A su vez, qué se puede extraer tanto a nivel intuitivo como axiomático y el cómo en un aula de clase estas herramientas puedan resultar útiles en la construcción del conocimiento.

Inicialmente se tiene que las primeras apariciones se registran en el asentamiento del antiguo Egipto, donde por medio de diferentes documentos se deduce el uso de las fracciones en la cotidianidad de la civilización, de allí surge un primer interrogante con respecto a si ellos utilizaban las fracciones a modo práctico o por simple hobby matemático; lo cual luego de la revisión bibliográfica se podría afirmar que los egipcios si bien sentían un interés por el desarrollo matemático como una disciplina abstracta en la que encontraban un “hobby”, el desarrollo

matemático de su civilización, obedece más a la necesidad de atender a la practicidad de su uso cotidiano, donde la optimización de recursos y la repartición de los bienes, implicaban el uso de los números, las fracciones y, en general, un lenguaje matemático como el de la aritmética.

En cuanto a las fracciones, el principal interrogante gira en torno a la naturaleza de estas en la cultura egipcia. Actualmente, la fracción tiene muchos significados: comparación de dos magnitudes, medida, porcentaje, porción o parte de un todo, división de dos números enteros, etc. En varios de estos contextos la fracción está constituida por dos partes: numerador y denominador. Sin embargo, de acuerdo con las reflexiones hechas, consideramos que los egipcios consideraban la fracción como algo elemental, que no está constituida por otras partes más pequeñas; sino como la división de un todo en partes iguales, donde la cantidad de partes iguales se indicaba en lo que conocemos hoy como “denominador” de la fracción y el “numerador” tenía un sentido diacrítico.

Lo previamente establecido por los egipcios, se robustece con el aporte de los griegos ya que estos toman no solo parte de los desarrollos egipcios sino de otras culturas con las cuales buscan una axiomatización de las matemáticas, a través de cada una de sus escuelas.

Atendiendo a los planteamientos anteriores y la transposición que estos pueden llevar a cabo en un aula de clase, surge la inquietud del por qué se suele privar a los estudiantes de procedimientos matemáticos antiguos para dar solución a problemas modernos. Estas situaciones que emergen de la historia podrían resultar provechosas para los estudiantes, ya que estas tienen restricciones, que privilegian razonamientos particulares en contextos muy específicos cuyo sentido viene dado por una necesidad de nuestra cotidianidad. En este sentido, lo que podría resultar interesante de ello, no es su uso práctico sino cómo a través de la historia se permite que emerjan estrategias que dieron origen a estrategias, donde la validación se da en el contexto mismo

de la situación, donde el estudiante es quien construye sus nociones sobre el objeto matemático, sin que lo tratado en clase se quede solo en lo anecdótico sino también en lo constructivo del concepto, a partir de reflexiones epistemológicas previas bien fundamentadas.

Conclusión. De la discusión surgida a partir de las ideas expuestas sobre las civilizaciones egipcias y griegas, el cómo de allí podemos extraer ideas útiles en el desarrollo de una clase orientada al objeto matemático de las fracciones se llega a unas conclusiones las cuales son:

1. La fracción surge de necesidades que tenían estas civilizaciones para solucionar problemas de su entorno, nacen de necesidades diferentes y es por ello por lo que le dan un significado distinto.
2. La evolución del concepto de razón desde los egipcios hasta los griegos, entendiéndose que para los primeros la fracción era simplemente la partición de la unidad usando la razón a modo de reparto y es de allí de donde los griegos la consideran como una comparación de dos magnitudes, visto no solo del modo aritmético sino geométrico permitiendo la axiomatización del concepto.
3. Es necesario integrar la historia y epistemología para que la primera encuentre un sentido en la construcción del conocimiento en el aula de clase atendiendo a las necesidades del entorno

Referencias bibliográficas

Gerván, H. (2013). Las fracciones unitarias en la matemática del Antiguo Egipto. Epistemología e Historia de la Ciencia. *Selección de trabajos de las XXIII Jornadas*, 19, 165-175.
https://www.academia.edu/3663059/Las_fracciones_unitarias_en_la_matem%C3%A1tica_del_Antiguo_Egipto. En AA.VV. eds. Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección de trabajos de las XXIII Jornadas. Córdoba FFyH-UNC pp. 165-175

Ruiz Cruz, C. (2013). La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.

Apéndice B. Protocolo de la sesión 2 de seminario de investigación**Seminario de Trabajo de Grado****Sesión:** 2**Relator:** Jefersson Andrei Cárdenas Tirado**Correlator:** Angie Yadisel Ruiz Cristiano**Protocolante:** Óscar Alirio Sánchez Suárez**Documento:** A History of mathematics - La fracción como relación parte-todo y como cociente:
Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED**Fecha:** 20 de abril 2023**Actividades a desarrollar:**

1. Presentación del documento
2. Discusión y análisis
3. Conclusiones

Presentación del documento

Siguiendo con el análisis de aproximación epistemológica de las fracciones, en la primera parte de esta sesión se estudia la cultura babilónica (Mesopotamia), a partir del descubrimientos de tablillas en el siglo XIX, de las cuáles en 300 que están talladas en escritura cuneiforme, se hallan registros matemáticos de la época donde se evidencian problemas y operaciones algorítmicas propias de la civilización, de esto se rescata los posibles escenarios que llevaron al uso de diferentes métodos matemáticos, sin embargo, de las fracciones se ve poca evidencia de cómo surgen, luego los diferentes historiadores y especialistas toman postura haciendo referencia a que la astronomía fue la principal responsable de la implementación del sistema sexagesimal y las fracciones debido a la facilidad de representar grandes números con una escritura más corta.

La matemática china antigua se basó en dos sistemas de numeración; decimal posicional y la numeración de varillas. Aunque en algunas culturas no se reconocía el 0, en la cultura china, en el sistema numérico decimal posicional disponían de un símbolo para denotar el cero, pero se debía tener en cuenta que el cero solo se nombraba una vez si se encontraba en intermedio de dos números, sin importar la cantidad de ceros intermedios. A diferencia de la cultura babilónica, que no contaban con un símbolo que representara al número 0. Con respecto a la numeración de varillas, este fue un sistema que utilizaban los comerciantes que viajaban por el mundo; las varillas rojas (números positivos) representaban ganancias, las varillas negras (números negativos) representaban pérdidas. Con respecto a la representación del 0 en el sistema de varillas, el 0 no tenía notación con varillas, lo cual no significa que el 0 se representa como un espacio en blanco, significa que por ejemplo en el número 2039 no hay centenas. Ahora, la astronomía china evolucionó de manera independiente, se evidencia que ya conocían y operaban fracciones con distinto denominador con gran facilidad, expertos consideran que el sistema de numeración que utilizaron fue la numeración de varillas para el cálculo del calendario.

Discusión y análisis. La primera discusión que se lleva a cabo, relativa a la interpretación de las fracciones en el contexto moderno, es sobre las potencias de la base 60, es decir, que si en realidad los babilónicos tenían la noción de elevar la base 60^n donde n podía tomar los valores desde 0 a 59, la primera pregunta que surge es ¿Elevar un número a la 0 cuyo resultado siempre es 1 estaba definido? Claramente no hay evidencias que hayan documentado este hecho matemático, además de que no tenía noción y escritura del 0. También, analizamos de qué manera llegaban a representar el número 60^2 y de allí surgen algunos argumentos tales como, es posible que fuera por conteo donde al llegar al número 60 era una cuña vertical y si habían más por ejemplo 122, serían dos cuñas verticales un espacio y dos cuñas verticales nuevamente.

Luego $60^2 = 3600$, entonces 60 veces 60, donde a partir de lo anterior sin necesidad de contar esa cantidad de veces llegaron a esas cuentas, puesto que si tomamos este ejemplo en concreto (imagen 1) vemos como se posicionaban estos números de derecha izquierda, desde decenas hasta miles de unidades.

También se indagó sobre la tabla de recíprocos del 60 y cómo se estructura dándole un sentido en esa época intentando dar una interpretación a partir de lo dicho por el autor del documento, surgen la inquietud de si ellos tenían esta noción o simplemente se desglosó a partir de la multiplicación de número cuyo resultado era 60. Sin embargo, resulta curioso el hecho de que 8 multiplicado por 7,30 estuviese allí, sabiendo que 7,30 a nuestra base diez equivale a $7 \cdot 60 + 30 = 450$ y este valor multiplicado por 8 es 3600 o 60^2 , que es múltiplo de 60, además de que 7,30 en fracción es igual a $1/8$.

Ahora bien, las matemáticas cumplieron un rol importante en el momento de estudiar fenómenos en la astronomía los cuales se evidenciaron en las dos culturas. Históricamente la astronomía movilizó los cálculos que se hicieron del calendario, donde la cultura maya fue quién más se aproximó en cuánto a la duración del calendario solar, el cual era importante para las distintas civilizaciones ya que lo utilizaban para planear sus actividades, por ejemplo: cultivos, que asociaban a las épocas del año.

El calendario nace a partir de la observación astronómica, donde se descubren los ciclos lunares, ciclos solares, día y noche. Con respecto a la cultura China, lograron resultados en cuanto a aritmética con fracciones en el contexto de la astronomía, donde utilizaban fracciones mixtas y lograron un acercamiento significativo a la duración del calendario. Los chinos manejaban las operaciones de suma, resta, división y multiplicación de fracciones, donde también hay muestra de la simplificación de fracciones, búsqueda de denominadores comunes,

comparación de dos fracciones con distinto denominador. Los chinos para realizar dichos cálculos utilizaban las varillas de contar, sin embargo, se cree que abandonaron este sistema de numeración por la poca practicidad de cargar varillas, dando paso a la escritura. Finalmente, debido al lenguaje cuesta identificar como la cultura matemática china realizó estos procedimientos matemáticos.

Conclusiones. En primer lugar, las interpretaciones que hacen los historiadores y los diferentes autores sobre las tablillas, fragmentos en rollos y demás instrumentos que utilizaron las culturas para plasmar las ideas matemáticas, presentan un alto grado de dificultad puesto que a través del tiempo por situaciones como guerras, fenómenos naturales y deterioro de éstas, se ha perdido parte de la información y no es posible ser completamente fieles al cómo razonaban y el por qué usaban esos procedimientos. Además, en muchos casos, las interpretaciones encontradas son adaptadas a un lenguaje matemático moderno.

También, en lo que respecta a los distintos fenómenos astronómicos a lo largo del tiempo, la astronomía al ser una de las primeras ciencias practicada por las distintas culturas, originó la necesidad de utilizar las fracciones para dar solución a los problemas de la cotidianidad. Por ejemplo, la cultura china logró aproximar la duración del calendario con ayuda de las varillas de contar para dar solución a operaciones con fracciones no comunes.

Referencias bibliográficas

Carl Benjamin Boyer, & Merzbach, U. C. (2011). A History of mathematics. Wiley, Cop.

González, N. (2017). Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones. Universidad Nacional de Colombia.

Ortiz Fernández, A. (2005). Historia de la matemática (Vol. 1). Perú.

Ruiz, C. (2013). La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. Universidad Nacional de Colombia.

Apéndice C. Protocolo de la sesión 3 de seminario de investigación
Seminario de Trabajo de Grado

Sesión: 3

Relator: Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Correlator: Óscar Alirio Sánchez Suárez

Protocolante: Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Documento: Rethinking history and epistemology in mathematics education

Fecha: 02 de mayo 2023

Actividades a desarrollar:

1. Presentación del documento
2. Discusión y análisis
3. Conclusiones

Presentación del documento

Los educadores reconocen la influencia de la historia y epistemología en la enseñanza de las matemáticas. En este artículo, exponen los puntos de vista de distintos autores que dan cuenta de la importancia de su utilización en la educación. En primer lugar, cuenta de forma concisa las primeras discusiones y experimentos sobre la introducción de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

El artículo también describe algunas producciones de la comunidad de académicos establecidos oficialmente en 1976 como el grupo HPM (Historia y Pedagogía de las Matemáticas) que además están asociados a la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) donde elaboran materia prima para investigadores y docentes de matemáticas interesados en conocer el aporte de la historia en la educación.

Para la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de la historia es necesario en primer lugar, que el docente reconozca la utilidad de esta y por ende tenga una formación adecuada. Entonces, el artículo discute la relación entre la historia-profesores y cómo emplearla en la formación del profesorado. También nombra algunos recursos que disponen los docentes que pueden ser útiles para introducir un objeto matemático de estudio en el salón de clase.

Discusión y análisis. Los educadores consideran que la historia puede ser utilizada como un recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero, se ha interpretado erróneamente cómo emplearla en el aula de clase. En ocasiones, se comete el error de enseñar situaciones problemáticas que conllevaron en la historia a que autores las abandonaran, dado que no tienen en cuenta que se deben tratar situaciones que aporten desde otra perspectiva al aprendizaje del objeto matemático. También, en la educación se han limitado a enseñar historia, no se trata solamente de volver a mostrar lo que se hizo en esa época, se debe tomar como referencia, hacer una adaptación acorde a las circunstancias actuales y hacer de ella una herramienta para el desarrollo del conocimiento.

Otra problemática que se presenta al traer este recurso hoy en día, consiste en que se cree equivocadamente que enseñar problemas modernos, donde se evocan personajes históricos es suficiente para pensar que se está utilizando la historia y no es así. En los libros de texto, la presencia de la historia no asegura que haya una enseñanza adecuada de las matemáticas. Un problema que emerge en un contexto histórico se podría retomar y enunciar de otra manera, esto garantiza el uso de la historia, sin necesidad de evocar personajes ficticios. Entonces, es necesario que el docente la conozca para adaptarla y realice una transposición didáctica para poderla llevar al aula.

La historia muestra que hay una conexión entre la actualidad y los pormenores de lo que sucedió a lo largo de los años para llegar a la actualidad, en esta dirección se pueden encontrar elementos que permiten al docente tomar decisiones en cuanto a rutas cognitivas que sean fructíferas, efectivas y eficientes en la enseñanza.

En este recurso, hay elementos que le permiten al maestro tomar decisiones curriculares de modo que se tenga en cuenta los sucesos históricos trascendentes que dieron origen a los conocimientos que quiere enseñar, sin repetir el suceso. Se trata de una historia repensada, para ello es necesario un fundamento teórico que dé cuenta sobre las estrategias, metodologías y decisiones a tomar para afrontar el problema. Dentro de la misma historia emergen personas que han aportado ideas que además en conjunto de las teorías y constructos más robustos, permiten entender asimismo explicar, el fenómeno de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto al papel del maestro, es quien debe en primer lugar tener una concepción sobre la importancia de la historia. No es posible incentivar a los estudiantes si no existe una motivación en el docente sobre el estudio de la matemática a través de esta metodología. De hecho, uno de los problemas en la educación es captar la atención de los estudiantes, sin embargo, la enseñanza a través de la historia genera en el estudiante un interés por estudiar las matemáticas, al menos en un primer momento.

El pensar la historia para enseñar matemáticas tiene muchas problemáticas, ¿qué de la historia puede traer a colación el docente para enseñar fracciones?, ¿qué tipos de situaciones pueden favorecer la evolución de las ideas sobre determinado objeto matemático?, ¿por qué traer determinadas situaciones al aula o por qué no?, son preguntas que emergen de la necesidad de poner en funcionamiento una estrategia didáctica para enseñar las fracciones. Es por ello que, si el

educador decide utilizar este recurso debe desenvolverse lo suficiente, dado que el desconocimiento puede generar obstáculos epistemológicos.

Conclusión. El conocimiento que tenemos no es nuestro, es patrimonio cultural de la humanidad. Lo que tenemos hoy es el resultado de una lucha de mil años, la acumulación de hechos históricos que explican lo que somos hoy. La historia no se observa externamente dado que, la manera en que se utiliza para aprender da cuenta de la naturaleza del conocimiento debido a que ha permeado en lo que somos como educadores. Cada docente, es producto de una reflexión filosófica, cognitiva, epistemológica a lo largo del paso de los años que ha derivado en el currículo que tenemos hoy en día, lo cual está relacionado directamente con la historia. Si cada maestro utiliza este recurso para generar estrategias adecuadas en la educación, encuentra propósitos en la enseñanza de las matemáticas, lo cual es enriquecedor para la formación integral de cada maestro. Así mismo, el conocimiento matemático que tenemos, la forma como lo entendemos, lo usamos y el para que lo hacemos, es producto de una evolución histórica y entonces no podemos de ninguna manera desconocer la historia, su influencia en nuestra formación y en el aprendizaje de los estudiantes a los que vamos enseñar matemáticas.

Referencias bibliográficas

Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51, 967-994, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1565454

Apéndice D. Protocolo de la sesión 4 de seminario de investigación
Seminario de Trabajo de Grado

Sesión: 4

Relator: Óscar Alirio Sánchez Suárez

Correlator: Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Protocolante: Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Documento: Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza

Fecha: 11 de mayo 2023

Actividades a desarrollar:

1. Presentación del documento
2. Discusión y análisis
3. Conclusiones

Presentación del documento

"Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza" de Bruno D'Amore tiene como objetivo proporcionar una visión general de los diversos términos y conceptos utilizados en la comunidad internacional de enseñanza de matemáticas. El autor trata de restaurar la unidad de estos términos y conceptos, y encontrar sus raíces históricas para la integración en la sociedad, además, afirma que el objetivo es brindar una visión unificada de estos, relacionándolos con la enseñanza de las matemáticas. Aunque estos términos se utilizan hoy en día con diferentes significados, muchos de ellos han sido introducidos desde sus orígenes y han sido sintetizados y redefinidos ad hoc gracias al trabajo de Guy Brousseau, los cuales han evolucionado con el tiempo, algunos de ellos influyen en temas clásicos; aquí los autores se limitan a ejemplos de contratos de aprendizaje.

Discusión y análisis. Se planteó encontrar una teoría que orientara la aplicación de la historia y la epistemología en el aula, y este documento habla de la teoría de las situaciones didácticas. En los años 60, se produjo un punto de inflexión en la educación matemática. Esta disciplina comenzó a ser vista como un campo de investigación, basándose en la psicología y la pedagogía. Brousseau empezó a trabajar en el uso de la epistemología en la enseñanza de las matemáticas. Definió este concepto como un conjunto de creencias, saberes y conocimientos científicos que indican el conocimiento de una persona o grupo, cómo funciona, cómo se determina su validez, cómo se adquiere, cómo se enseña y cómo se utiliza. Aprendiendo de ello, desde el estudio psicológico cognitivo, el conocimiento se diferencia de los saberes, ya que los conocimientos se interiorizan y son propios de cada individuo, es decir, son inseparables, mientras que los saberes son sistemas de información a los que la mayoría de las personas pueden acceder, como obras de referencia, enciclopedias, diccionarios, etc.

Una de las grandes preguntas de la educación matemática es, ¿cómo construyo conocimiento que den cuenta de un saber que quiero enseñar? Planteamos que se hace a través de las investigaciones, luego en la teoría de las situaciones didácticas se hace a partir de la ingeniería didáctica, cuando pensamos en los diferentes medios para la enseñanza, es allí donde el estudiante al interactuar con este medio va a aprender, y desde la teoría de las situaciones didácticas se llama aprendizaje por adaptación.

La teoría de las situaciones didácticas (situaciones a-didácticas) busca definir las condiciones en las que los individuos son llevados a "hacer" matemáticas, usarlas o inventarlas, independientemente de las condiciones específicas de aprendizaje identificadas por el individuo o claramente identificadas por el profesor. Este caso examina la creación, organización y uso de problemas que conducen a la construcción de conceptos y teorías matemáticas. Un individuo con

características y conocimientos mínimos que permiten el desarrollo de un proceso determinado por la situación.

A partir del objetivo se discute sobre si podemos usar la construcción histórica de las matemáticas como un medio para que el estudiante adquiriera un conocimiento, es allí donde la historia en sí no puede, a menos que esta sea un medio modelado, sin embargo, podemos crear o modelar medios en las cuales el estudiante interactúa y con esto se pretende generar un conocimiento relacionado con un saber específico en este caso las fracciones nuestro objeto matemático de interés. Además, aclaramos que la historia es un conjunto de saberes que han evolucionado o en su defecto al quedarse obsoletos, son relegados, mostrando así un avance epistemológico y didáctico de los saberes matemáticos.

De lo anterior se plantea que los análisis de las secuencias didácticas se harán desde la teoría de las situaciones didácticas, enfocados en un análisis preliminar y posiblemente a priori, esto partiendo de un análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de las fracciones recurriendo a la historia.

Para tomar decisiones en el aula, los maestros utilizan conocimientos, métodos y creencias sobre las formas en que se busca, adquiere u organiza directa o indirectamente el conocimiento. Este bagaje epistemológico está inherentemente construido empíricamente en respuesta a las necesidades educativas. Por ejemplo, un profesor hizo a sus alumnos una pregunta que pensó que era similar a las preguntas que les había hecho antes, pero no tuvieron el éxito que esperaba. Quiere que sus alumnos reconozcan similitudes y utilicen las correcciones y explicaciones que proporciona para reproducir las mismas soluciones, esto con el fin de que puedan afrontar con éxito en nuevas situaciones.

Con base en lo anterior, las intervenciones que el docente debe realizar están ligadas a la experiencia en el aula, tienen que ser oportunas, precisas y que no incurran en afectar la creación y uso de saberes del estudiante, debido a que se supone que el conocimiento previo y el razonamiento son suficientes para que sea exitosa la resolución de los problemas planteados.

Conclusiones. Resulta importante que antes de sugerir una construcción epistemológica de un objeto matemático, el mismo maestro debe de haber pasado por el mismo proceso. La innovación en el aula, el no incurrir en errores y patrones pasados son la base en la cual el maestro sienta el hecho de crear medios en el aula con el cual pretenda que el alumnado llegué a objetivo.

La teoría de las situaciones didácticas podría ser uno de los medios idóneos con los cuales el maestro puede llegar a lo que requiere para la consecución de metas y construcciones de conocimiento de carácter epistemológico con ayuda de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza.

Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17(1), 87-106.

Apéndice E. Protocolo de la sesión 5 de seminario de investigación
Seminario de Trabajo de Grado

Sesión: 4

Relator: Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Correlator: Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Protocolante: Óscar Alirio Sánchez Suárez

Documento: Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33, 60.

Fecha: 11 de mayo 2023

Actividades a desarrollar:

4. Presentación del documento
5. Discusión y análisis
6. Conclusiones

Presentación del documento

La ingeniería didáctica en educación matemática, según Artigue, M. (1995), es una forma de trabajo de didáctico, que de una manera u otra se compara con el que un ingeniero realiza; idea que en los 80's relacionaba las investigaciones y las acciones de estas en la enseñanza, así como el papel que jugaba la correlación de propuestas didácticas y su investigación.

Por otro lado, plantea que hay que desprenderse de toda aquella relación que se establezca entre la investigación y la acción, lo que conlleva a que, de forma independiente, se resalte la importancia de la realización didáctica en torno a la práctica investigativa.

Seguidamente, plantea a la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación, identificando dos tipos: la micro y macro ingeniería, aspectos que permiten a la

ingeniería didáctica a un enfoque singular donde no se limita por sus objetivos sino por las características de su método investigativo.

La metodología consta de cuatro etapas: el análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la experimentación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

Finalmente, Artigue (1998), sugiere tres dimensiones del análisis preliminar, ligadas al proceso de construir una ingeniería didáctica:

- Epistemológica
- Cognitiva
- Didáctica

Discusión y análisis. Con el análisis de este documento presentado en la presente sesión, se busca orientar la metodología de investigación y sobre todo de análisis en la cual se orientará la discusión de los resultados obtenidos en el seminario y enfocados en las 2 sesiones posteriores a esta.

Se plantea el análisis metodológico desde la perspectiva de la ingeniería didáctica y en como esta nos ayudará a discutir la bibliografía seleccionadas sobre el enfoque y la enseñanza de las fracciones a partir de la propuesta didáctica tanto del Ministerio de Educación Nacional, como de algunas unidades didácticas enfocadas en la enseñanza de las fracciones y el uso de la historia implementado en estas.

Se considera pertinente hacer uso de la primera fase de la ingeniería didáctica, esto para enfocar la discusión y realizar un análisis preliminar desde las tres perspectivas anteriormente mencionadas: la epistemológica, cognitiva y didáctica.

- Dimensión epistemológica: Se orientará el análisis en identificar la naturaleza del conocimiento y el cómo se adquiere. Se considera relevante ya que permite la

comprensión de cómo le estudiante se apropia del conocimiento y cómo poder crear una propuesta que lo facilite; por su parte, los ingenieros didácticos deben considerar las teorías epistemológicas relevantes para seleccionar enfoques pedagógicos y estrategias instruccionales que promuevan la construcción activa y significativa del conocimiento por parte de los estudiantes.

- **Dimensión cognitiva:** Esta se refiere al estudio de los procesos mentales involucrados en el aprendizaje, nuevamente con el fin de diseñar estrategias que aprovechen estos procesos cognitivos. Lo cual implica seleccionar actividades y recursos que estimulen el desarrollo del conocimiento, así como también considerar las limitaciones y capacidades cognitivas de los estudiantes al establecer los objetivos y las demandas de la instrucción.
- **Dimensión didáctica:** se busca la identificación de los métodos y técnicas de enseñanza para diseñar estrategias instruccionales específicas que se ajusten a los objetivos de aprendizaje y características de los estudiantes. Esto implica seleccionar y organizar los contenidos de enseñanza de manera efectiva, emplear métodos de enseñanza adecuados, utilizar recursos y materiales didácticos relevantes, y evaluar el progreso y el logro de los estudiantes.

Conclusiones. En conclusión, la ingeniería didáctica es un enfoque sistemático y basado en evidencia para diseñar y desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos. La epistemología nos ayuda a comprender cómo los estudiantes construyen el conocimiento, lo cual es esencial para seleccionar estrategias pedagógicas que promuevan una construcción activa y significativa del conocimiento. La dimensión didáctica, por su parte, se centra en los métodos y

técnicas de enseñanza, siendo esencial para seleccionar, organizar y evaluar los contenidos de enseñanza, emplear métodos adecuados y utilizar recursos didácticos relevantes.

Estos conceptos respaldan el análisis preliminar en la ingeniería didáctica, proporcionando una base sólida para comprender las necesidades de los estudiantes, estructurar el contenido de enseñanza y adaptarlo a los recursos y restricciones del contexto educativo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica. 1

Apéndice F. Protocolo de la sesión 6 de seminario de investigación
Seminario de Trabajo de Grado

Sesión: 6

Relator: Jefersson Andrei Cárdenas Tirado

Correlator: Óscar Alirio Sánchez Suárez

Protocolante: Angie Yadisel Ruiz Cristiano

Documento: Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas.

Fecha: 30 de mayo 2023

Actividades a desarrollar:

1. Presentación del documento
2. Discusión y análisis
3. Conclusiones

Presentación del documento

El propósito principal de este proyecto de intervención consistió en desarrollar una unidad didáctica centrada en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas, con el fin de fomentar una comprensión del concepto de fracción en los estudiantes de quinto grado del Instituto Técnico Empresarial El Yopal. Se adoptó un enfoque metodológico mixto, combinando la investigación-acción para llevar a cabo un proyecto de intervención mediante la implementación de la unidad didáctica que abarcó contenidos relacionados con las fracciones.

Los resultados obtenidos indicaron que fue posible mejorar el rendimiento de los estudiantes, quienes demostraron una mayor competencia en la comprensión y comprensión del

concepto de fracción al leer los enunciados en lenguaje cotidiano, lo que les permitió comprenderlos y encontrar soluciones correctas.

Discusión y análisis. En la revisión de este documento, si bien cuenta con diferentes sustentos teóricos y conceptuales sobre la enseñanza, aprendizaje y dificultades presentes en la planeación y aplicación de una unidad didáctica sobre las fracciones. Nos centraremos en las tres actividades enfocadas en la resolución de problemas, donde utilizan la historia y epistemología como mediador del conocimiento.

En la primera actividad denominada *Los designios del rey*, presentan una situación problema contando una historia donde evocan personajes históricos como reyes, soldados, reinos, etc. y de acuerdo con la lectura realizada deben responder a una serie de preguntas encaminadas a reactivar sus saberes previos sobre la noción de fracción como parte-todo y posteriormente exponen su definición. Con respecto a ello, se evidencia una problemática existente que consiste en el uso inadecuado de la historia, donde la presencia de personajes históricos no garantiza la historia como un recurso en la enseñanza de las matemáticas.

En segundo lugar, en la actividad *la visita al zoológico* se espera que el estudiante interprete el concepto de razón y porcentaje, donde se rescata el uso de material concreto para fortalecer la comprensión, interpretación y representación de las fracciones para favorecer esta concepción como la comparación entre dos cantidades. Ahora, observamos que en la enseñanza de las matemáticas el uso de la historia como recurso didáctico, no implica su utilización de forma explícita dado que se pueden tomar situaciones históricas como referencia y adaptarlas a situaciones actuales acorde al entorno del estudiante.

Como tercera y última actividad, nombrada *las fracciones en la historia* busca integrar las nociones implicadas en las actividades anteriores. En primer lugar, realiza un recuento histórico

sobre las culturas babilónica, la egipcia y la china, donde traen a colación las distintas representaciones y sistemas de numeración para realizar unas actividades acordes a estas. Luego, proponen uno de los problemas clásicos sobre repartición encontrado en el papiro de Rhind el cual lo desarrollan desde una representación gráfica haciendo alusión a una posible solución de la época. Ahora, resulta interesante la propuesta de representar $7/20$ como una fracción unitaria, puesto que en un primer momento proporcionan una solución algorítmica donde utilizan el sistema numérico de los egipcios, pero sin un fundamento teórico acorde a las estrategias usadas en la época. Así mismo, muestran de manera gráfica una posible solución que corresponde a lo planteado en el papiro de Rhind, donde usan una situación histórica y la replantean a un contexto actual, en el cual está inmersa la epistemología del concepto de fracción.

Conclusiones. En el análisis de las actividades presentadas, podemos dar cuenta que, en un primer momento, aunque utilizan la historia para la planeación de estas, identificamos que el hecho de nombrar personajes de épocas antiguas no significa que se use la historia de manera adecuada, dado que deben repensarlas con el objetivo de contribuir al aprendizaje del objeto matemático desde otra perspectiva.

Por otro lado, es importante destacar que la epistemología juega un papel fundamental en las actividades académicas, ya que es a través de la comprensión del contexto histórico que los estudiantes pueden dar sentido a la noción de repartición y entender el concepto de fracción. Al abordar eventos históricos trascendentales relacionados con el objeto matemático, se logra evidenciar que surgieron como respuesta a una necesidad específica, y se busca adaptar este conocimiento al contexto actual, promoviendo así una comprensión más profunda y significativa.

En este sentido, se utiliza la historia desde dos enfoques. Por un lado, podemos replantear una situación histórica y, por otro, analizar esa misma situación en un contexto moderno, aplicando ciertas nociones epistemológicas que compartieron un sentido similar en la historia.

Referencias bibliográficas

Rincón Valderrama, C. M., & Fonseca Mora, J. (2021). Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas [Tesis de maestría, Universidad del Magdalena]. Repositorio Institucional Universidad del Magdalena.