Caracterización del razonamiento covariacional de estudiantes universitarios mediante la modelación de situaciones dinámicas con tecnologías digitales

Luis Fernando Muñoz Gutiérrez

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en educación matemática

Director:
Jorge Enrique Fiallo Leal
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2026

Dedicatoria

A quienes, con su ejemplo y su palabra, han contribuido a la construcción de la persona y del profesional que hoy soy.

A quienes cultivaron en mí el amor por comprender y compartir el mundo de las matemáticas.

Agradecimientos

Me siento profundamente agradecido con todas aquellas personas e instituciones que han contribuido de distintas maneras a lo largo de mi trayectoria personal y académica:

Agradezco a mi familia, por todo el cariño, el apoyo y la motivación brindada durante la realización de mis estudios.

A la Universidad Industrial de Santander, mi casa de estudios, por abrirme las puertas y permitirme hacer parte de una comunidad que trabaja arduamente en pro de la ciencia, la tecnología, la educación, la salud y el desarrollo social.

A mi director de tesis, Dr. Jorge Fiallo, por todas sus orientaciones y valiosos aportes durante el diseño y desarrollo de este trabajo de investigación, así como a mi formación como educador matemático.

A mis profesores de la maestría, Dra. Solange Roa, Dra. Sandra Parada, Dr. Jorge Fiallo, Dra. Edith Mendoza y Mgtr. Luis Ángel Pérez; por compartir sus conocimientos y experiencias desde el rigor como educadores matemáticos y desde su calidad humana, y por propiciar espacios de diálogo y discusión a través de los distintos seminarios.

A mis compañeros y amigos de la maestría: Jennifer, Sergio, Héctor, Álvaro y Sebastián, por todas las jornadas y experiencias compartidas, con ustedes el camino fue muy agradable.

A la profesional Claudia Garavito, por todo el apoyo brindado en la realización de trámites académicos y administrativos; y por recibirnos en su oficina con una actitud siempre amable y servicial.

A los jurados de esta tesis: Dr. Fernando Hitt y Dra. Edith Mendoza, por su revisión y observaciones tanto a la propuesta como al resultado final de este proyecto.

A todos ustedes, ¡muchas gracias!

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Apéndices

Resumen

Titulo: Caracterización del razonamiento covariacional de estudiantes universitarios mediante la modelación de situaciones dinámicas con tecnologías digitales[*]

Autor: Luis Fernando Muñoz Gutiérrez[**]

Palabras clave: Razonamiento covariacional, modelación, experimento de enseñanza

Descripción: La enseñanza del cálculo diferencial a nivel universitario enfrenta el desafío de promover una comprensión solida de conceptos como función y derivada, así como el desarrollo de habilidades para interpretar y modelar fenómenos de variación. Desde la educación matemática, el razonamiento covariacional y la modelación matemática se han propuesto como dos enfoques para alcanzar estos propósitos.

Este documento reporta una investigación que tuvo por objetivo caracterizar los comportamientos, asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional, que exhiben estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y la mediación de GeoGebra.

En este sentido, el estudio se sustentó teóricamente en el marco conceptual para el razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002), los tipos de variación mencionados en el objetivo y una conceptualización sobre la modelación matemática. La metodología fue de corte cualitativo y se orientó por la estrategia de investigación denominada experimento de enseñanza. Para ello, se diseñó, implementó y validó una secuencia de enseñanza, conformada por cinco talleres, cada uno de ellos enfocado en un tipo de variación y en un contexto o situación particular. La implementación se realizó con estudiantes universitarios que cursaban cálculo diferencial por primera vez.

Los resultados permitieron ampliar y enriquecer la caracterización de comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional, a través del uso de distintas representaciones semióticas. También, se incorporó una nueva acción mental, enfocada en la tendencia entre variables. Además, se presentó una estrecha relación entre las acciones mentales y las etapas del ciclo de modelación. La implementación de secuencia permitió evidenciar también avances en la interpretación de relaciones de cambio, su variación y en la comprensión pragmática de los conceptos del cálculo.

[*] Trabajo de Grado
[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

Title: Characterization of university Students' covariational reasoning through the modeling of dynamic situations using digital technologies*

Author: Luis Fernando Muñoz Gutiérrez**

Key words: Covariational reasoning, modeling, teaching experiment

Description: The teaching of differential calculus at the university level faces the challenge of fostering a solid understanding of concepts such as function and derivative, as well as the development of skills to interpret and model phenomena of variation. From the perspective of mathematics education, covariational reasoning and mathematical modeling have been proposed as two approaches to achieve these purposes.

This document reports a study aimed at characterizing the behaviors associated with the mental actions of covariational reasoning exhibited by students enrolled in a Differential Calculus course when studying direct and inverse, accelerated, convergent, cyclic, and stepwise variation through the modeling of problems based on experimentation and the mediation of GeoGebra.

In this sense, the study was theoretically grounded in the conceptual framework for covariational reasoning proposed by Carlson et al. (2002), the types of variation mentioned above, and a conceptualization of mathematical modeling. The methodology followed a qualitative approach and was guided by the research strategy known as a teaching experiment. To this end, a teaching sequence consisting of five workshops was designed, implemented, and validated, each focused on a particular type of variation within a specific context or situation. The implementation involved university students enrolled in differential calculus for the first time.

The results made it possible to broaden and enrich the characterization of behaviors associated with the mental actions of covariational reasoning through the use of different semiotic representations. A new mental action focused on the trend between variables was also identified. Furthermore, a close relationship was found between the mental actions and the stages of the modeling cycle. The implementation of the sequence also evidenced progress in the interpretation of relationships of change, their variation, and in the pragmatic understanding of calculus concepts.

---

* Master's Thesis

** Science Faculty. Mathematics school. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor in Didactics of Mathematics.

Presentación

La investigación aquí documentada tuvo como objetivo caracterizar los comportamientos, asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional, que exhiben estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y la mediación de GeoGebra. Para ofrecer una exposición completa y estructurada de la problemática, la contextualización, el proceso metodológico y los resultados obtenidos tras el estudio, el documento se organiza en siete capítulos, que se describen brevemente a continuación.

En el primer capítulo de este documento se aborda el planteamiento del problema en torno a algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, y la importancia de atender a dos enfoques didácticos que se han propuesto desde la investigación en educación matemática para mitigar dichas dificultades. Este capítulo finaliza con la pregunta y el objetivo de investigación.

En el segundo capítulo, se presentan algunos trabajos previos que se han realizado en la línea de didáctica del cálculo, en particular, sobre el proceso de modelación matemática, el razonamiento covariacional y variacional, el uso de las tecnologías digitales y algunos experimentos de enseñanza que se han propuesto en este mismo sentido.

En el tercer capítulo, se describen los principales elementos teóricos y conceptuales que dan sustento a la investigación. El primero, refiere al marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002); el segundo, hace referencia a los tipos de variación (Steen, 1998); y, finalmente, el tercero corresponde a una conceptualización sobre el proceso de modelación matemática desde la perspectiva de diversos autores, como Villa-Ochoa, 2007; Berrío et al., 2021; entre otros.

En el cuarto capítulo, se presenta el proceso metodológico que guía la propuesta de investigación. Allí, se describe la estrategia denominada *Experimento de enseñanza* y se explican sus principales componentes a la luz de esta propuesta.

En el quinto capítulo, se exponen los principales resultados de la investigación, que se organizan el cinco apartados: descripción de la secuencia de enseñanza diseñada para el estudio; comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional que han sido identificados tras la implementación de la secuencia; la propuesta de una nueva acción mental para el razonamiento covariacional; algunas reflexiones en torno a la estrecha relación existente entre el razonamiento covariacional y el proceso de modelación matemática; y, el refinamiento de la conjetura del experimento de enseñanza.

En el sexto capítulo, se presentan las principales conclusiones del estudio, donde se responde de manera puntual a la principal pregunta de investigación; se señalan otros resultados relevantes, producto de la intervención didáctica y que aportan a la disciplina; se reconocen algunos de los alcances y limitaciones del estudio; y, finalmente, se presentan algunas perspectivas de investigación.

En el séptimo capítulo se esbozan las referencias bibliográficas, donde se incluyen aquellas fuentes que ofrecieron un contexto relevante para el análisis y desarrollo de este estudio.

1. Introducción y planteamiento del problema

La literatura en educación matemática reporta que, aunque muchos estudiantes universitarios son capaces de realizar cálculos relacionados con limites, derivadas e integrales de manera mecánica y de resolver problemas estándar, a menudo no alcanzan una comprensión profunda de los conceptos y nociones fundamentales del cálculo (Trujillo et al., 2023). Así mismo, se ha señalado que muchos estudiantes enfrentan dificultades al abordar tareas que requieren los conceptos básicos de esta área de las matemáticas, es decir, también se les dificulta utilizar las nociones fundamentales del cálculo en situaciones que demandan su aplicación. En este sentido, Santos-Trigos et al. (2024) sostienen que es fundamental caracterizar estas dificultades y explorar alternativas que permitan a los estudiantes desarrollar un tipo de razonamiento adecuado, para abordar problemas relacionados con fenómenos de variación.

Lo propuesto anteriormente por Santos-Trigos et al. (2024) es un trabajo que se ha venido desarrollando desde hace décadas. Por ejemplo, Artigue (1995) al estudiar las dificultades evidenciadas en el aprendizaje del cálculo, realizó una agrupación en tres grandes categorías: aquellas asociadas con los objetos básicos (números reales, sucesiones, funciones); las asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite; y, aquellas asociadas a la ruptura entre los modos de pensar en álgebra y en cálculo.

Más recientemente, autores como Thompson y Carlson (2017) han reportado otras dificultades más específicas; por ejemplo, que “existe amplia evidencia de que los estudiantes no entienden que la pendiente es una tasa de cambio” (p. 464). Estos autores señalan que los estudiantes suelen tener una visión estática sobre situaciones dinámicas, lo cual influye al momento de representar cantidades en función de otras. Por su parte, Trujillo et al. (2023), reportaron que los estudiantes tienen dificultades de aprendizaje y generan nociones equivocadas (*misconceptions*, en inglés) del concepto de función en relación con: la definición, la interpretación o el significado, notación y expresión, representaciones, manejo y características. Los autores realizaron esta síntesis y clasificación a partir de una revisión bibliográfica.

Se ha señalado que muchas de estas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y del cálculo en particular, son producidas por la forma en que se presentan los contenidos a los estudiantes, puesto que se hace con un enfoque excesivo en el rigor teórico y una falta de énfasis en las aplicaciones prácticas. Por ello, Imaz y Moreno (2010) sostienen que "las dificultades de los estudiantes no provienen del Cálculo, sino de un currículum artificial que es el responsable de gran parte de los obstáculos" (p. 64).

En respuesta a esta problemática, la educación matemática sugiere, entre otros, los siguientes dos enfoques: abordar las nociones básicas del cálculo desde un enfoque covariacional; y, priorizar el desarrollo de habilidades asociadas a los procesos matemáticos, como la modelación y la resolución de problemas, utilizando estos procesos para construir nociones matemáticas.

Respecto al primer enfoque, Thompson y Carlson (2017) sostienen que las ideas de función y tasa de cambio implican variación y covariación. Al respecto, argumentan que estas formas de razonar son epistemológicamente necesarias para que estudiantes y profesores desarrollen nociones más sólidas sobre estos dos constructos matemáticos. Los autores señalan que el enfoque covariacional visibiliza de manera más clara las variables involucradas en un problema, así como sus relaciones de interdependencia; y, promueve la comprensión de la derivada como razón de cambio. Al respecto, Rodríguez (2021) señala que abordar problemas que involucren a la derivada como razón de cambio fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas del razonamiento covariacional asociadas a los procesos matemáticos de: comunicación, razonamiento, demostración, representación, y elaboración, ejercitación y comparación de procedimientos.

En este sentido, Thompson y Carlson (2017) proponen continuar realizando estudios investigativos sobre el enfoque covariacional, de modo que se aborden líneas como: beneficios potenciales del razonamiento covariacional para el razonamiento estructural de los estudiantes sobre las funciones, posibles obstáculos que podría crear el énfasis en la covariación; relaciones entre el razonamiento covariacional y el razonamiento sobre funciones a través de reglas de asignación; conexiones entre la conceptualización de funciones covariacionalmente por parte de los estudiantes y su conceptualización teóricamente establecida (es decir, dominio, rango, regla de asignación) entre otras.

Al estudiar cómo razonan los estudiantes cuando calculan e interpretan el límite de una función, Nava (2021) observó que los estudiantes muestran razonamientos del tipo algorítmico, estático, covariacional y dinámico. Mientras que el razonamiento algorítmico se basa en una serie de pasos y reglas predefinidas para calcular el límite, y el razonamiento estático puede inducir a pensar que el límite simplemente se obtiene al evaluar la función en un punto específico, el razonamiento covariacional ofrece una perspectiva más intuitiva y dinámica, es decir, ayuda a superar esa visión estática de la noción de límite. Este enfoque lleva a los estudiantes a observar simultáneamente cómo cambian tanto los valores de la función como los valores de la variable independiente a medida que esta se acerca a un punto de interés. Al centrarse en la relación entre estas dos cantidades, los estudiantes logran comprender el límite no como un valor puntual, sino como un proceso de aproximación continuo.

Martínez y García (2023) destacan la importancia del razonamiento covariacional en la resolución de problemas relacionados con la integral definida. De acuerdo con los autores, en este tipo de problemas, el razonamiento covariacional surge cuando se coordinan distintas variables: por ejemplo, en la aproximación del área, se relacionan el número de rectángulos con las áreas sumadas; mientras que, en los procesos de acumulación, se coordinan tres variables: el extremo superior del intervalo, la función que permite las acumulaciones y el valor de la acumulación. La evidencia sugiere que esta coordinación de variables es crucial, ya que a medida que los estudiantes avanzan en la resolución de problemas, su razonamiento evoluciona, lo que les permite alcanzar respuestas más precisas y completas. Sin embargo, los autores señalan que la investigación sobre este tema es aún limitada, por lo que se hace necesario profundizar en el estudio del impacto del razonamiento covariacional en el aprendizaje de la integral definida.

Carlson et al. (2002) propusieron el *marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional* que contempla las siguientes cinco acciones mentales: coordinación de variables, coordinación de la dirección de cambio, coordinación de la cantidad de cambio, coordinación de la razón de cambio promedio y coordinación de la razón de cambio instantánea. A cada acción mental se asocian diversos comportamientos externos que dan cuenta de que el estudiante razona con base en tal acción mental. En los elementos teóricos y conceptuales de esta investigación se profundiza en la descripción de este marco conceptual. En este punto, se presenta de manera breve para contextualizar la pregunta y el objetivo de investigación, los cuales buscan ampliar esta lista de comportamientos mediante el uso de diversas representaciones y la resolución de problemas enfocados en distintos tipos de variación.

Por otra parte, Johnson (2022) plantea que las tareas de enseñanza deberían reestructurarse en torno a las relaciones entre atributos, más que en los tipos de funciones, como es común en la enseñanza de las matemáticas. Tal enfoque permitiría a los estudiantes explorar las funciones desde la perspectiva covariacional, es decir, estudiar cómo las cantidades varían conjuntamente; en lugar de simplemente seguir una secuencia predeterminada de tipos de funciones (por ejemplo: lineal, luego cuadrática, luego exponencial, etc.). En este sentido, Steen (1998) promueve la idea de que los estudiantes deberían ser sensibles a los siguientes tipos de variación: directa, inversa, acelerada, desacelerada, convergente, cíclica y escalonada.

Respecto al segundo enfoque mencionado previamente, la modelación matemática se presenta como una estrategia didáctica que permite abordar conceptos matemáticos de manera práctica y contextualizada. Para Trigueros (2014) la modelación matemática es una herramienta que motiva y favorece el aprendizaje de las matemáticas, ya que cuando los estudiantes se involucran en la resolución del problema se responsabilizan de su proceso de aprendizaje. La autora sostiene además que, si este enfoque se aprovecha para generar discusiones y reflexiones, la modelación se convierte en un apoyo clave para construir nuevos conocimientos.

En esta misma línea de ideas, Niss (2012) reconoce que integrar actividades matemáticas en contextos fuera del ámbito matemático puede incrementar la motivación de ciertos estudiantes hacia el estudio de las matemáticas. Esta práctica no solo refuerza su formación conceptual, sino que también mejora su comprensión y les proporciona una experiencia significativa relacionada con la materia. De este modo, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pueden beneficiarse de las aplicaciones, los modelos y el proceso de modelación.

No obstante, la implementación de este segundo enfoque ha sido insuficiente, puesto que el tratamiento de la resolución de problemas en las escuelas a menudo resulta artificial y desconectado de situaciones reales. Villa-Ochoa y Jaramillo (2011) señalan que, a pesar de que en Colombia se ha propuesto incorporar el proceso de modelación en clase de matemáticas desde hace más de dos décadas, la implementación efectiva de este enfoque en las prácticas de los profesores ha sido limitada. Este no es un problema únicamente nacional, pues Kaiser y Maass (2007) sostienen que la enseñanza de las matemáticas sigue siendo tradicional en muchos países, con un énfasis en la teoría y la memorización, mientras que la aplicación y modelización tienen un papel secundario, pese a décadas de desarrollo de materiales didácticos innovadores.

Sumado a lo anterior, en muchas ocasiones, esta aproximación ignora aspectos clave del proceso de modelación matemática, como la identificación de la situación que se está modelando y la comprensión del origen de los datos utilizados. Por tanto, los estudiantes suelen abordar los problemas de forma mecánica, sin una verdadera conexión con el fenómeno subyacente. Para superar esta limitación, es fundamental incorporar la experimentación y la recolección de datos como una etapa central en el ciclo de modelación matemática. La experimentación no solo proporciona un contexto real y tangible, sino que también permite a los estudiantes entender el proceso de obtención de datos y cómo estos se relacionan con el modelo matemático. Este enfoque fortalece su capacidad para interpretar, validar y refinar modelos, transformando la matemática en una herramienta poderosa para entender y resolver problemas del mundo real. (Carreira y Baioa, 2011; Greefrath, Siller y Weitendorf, 2011).

Steen (1999) sostiene que, en la escuela los estudiantes suelen enfrentarse a problemas y ejercicios clásicos que vienen acompañados de información bien estructurada y completa, que los conduce a responder una pregunta a través de procedimientos simples y ya preestablecidos. No obstante, este enfoque puede resultar limitado, ya que fuera del ámbito escolar, la realidad es mucho más compleja e incierta. En la vida cotidiana, es común que los problemas no se presenten con todos los datos necesarios, o que la información esté desorganizada, requiriendo que se identifiquen, formulen y redefinan las preguntas adecuadamente antes de poder abordar su resolución.

Esta disparidad entre la formación matemática que ofrece la escuela y los desafíos del mundo real puede obstaculizar el desarrollo de habilidades necesarias para enfrentar situaciones desafiantes y tomar decisiones informadas en contextos más dinámicos y menos predecibles.

De manera particular, la Universidad Industrial de Santander (UIS) no ha sido ajena a toda la problemática anteriormente expuesta. En esta institución estudiantes de ciencias e ingeniería reciben formación en matemáticas, a través de cursos de cálculo y álgebra, aunque con un limitado enfoque práctico y contextualizado. La falta de incorporar el proceso de modelación matemática podría estar contribuyendo a una comprensión insuficiente de los conceptos básicos del cálculo diferencial, lo que subraya la importancia de investigar y replantear las metodologías de enseñanza en esta área.

La carente comprensión de los constructos matemáticos por parte de los estudiantes antes mencionados ha generado alta reprobación en el curso de cálculo I en la UIS, ante lo cual se han planteado estrategias como el “Curso de Precálculo” (*Curso de Inducción a la Formación Matemática*) Fiallo y Parada (2018). Este curso tiene como propósitos generar en los estudiantes nociones de cambio, variación, tendencia y aproximación; y, promover el desarrollo de habilidades asociadas a los procesos matemáticos con la mediación digital. El curso ha demostrado tener un impacto positivo en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes, pues se ha evidenciado que promueve el desarrollo de nociones básicas asociadas con los conceptos del cálculo de forma dinámica y práctica; además de desarrollar habilidades asociadas con la comunicación, representación, demostración y elaboración comparación y ejecución de procedimientos.

De ahí que surja la necesidad de proponer diseños didácticos que den continuidad a este proceso de formación inicial en un curso de cálculo, con los cuales los estudiantes desarrollen habilidades para reconocer diferentes tipos de variación, coordinen la interdependencia entre variables relacionadas y la forma en que cambian conjuntamente; y, continúen desarrollando habilidades asociadas a los procesos matemáticos, así como haciendo uso de las tecnologías digitales. Además, se hace necesario caracterizar el razonamiento de los estudiantes al desarrollar dichas actividades, con el fin de estudiar el impacto o efectividad de tales propuestas didácticas.

Como resultado de todo lo problematizado previamente, este trabajo de investigación se formula de manera puntual la pregunta ¿qué comportamientos, asociadas a las acciones mentales del razonamiento covariacional, exhiben los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y la mediación de GeoGebra? En correspondencia con este interrogante, se plantea como objetivo de investigación: caracterizar los comportamientos, asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional, que exhiben estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y la mediación de GeoGebra.

2. Antecedentes

En este capítulo se presentan algunos estudios previos que han sido relevantes para la investigación, contribuyendo de manera significativa a su contextualización, diseño y desarrollo. Dichos estudios abordan temas involucrados en el objetivo propuesto, como los experimentos de enseñanza, el razonamiento covariacional, la modelación matemática y el uso de tecnologías digitales. Es importante señalar que no se han organizado estos trabajos previos en líneas conceptuales o por temáticas definidas, puesto que estos abordan de manera conjunta las temáticas antes mencionadas. Esto resalta la relación y coherencia entre tales enfoques metodológicos, teóricos y conceptuales.

Castillo-Garsow (2010) en su tesis doctoral planteó un experimento de enseñanza sobre el razonamiento covariacional y el crecimiento exponencial. En su trabajo, el autor desarrolló el concepto de razonamiento covariacional centrándose en la idea de variación misma. El propósito de este experimento consistió en identificar las operaciones de razonamiento covariacional que los estudiantes utilizaron al resolver una serie de problemas; y las consecuencias de ese razonamiento en la matemática relacionada con el crecimiento exponencial.

El experimento de enseñanza le permitió al autor identificar dos formas diferentes de pensar sobre el cambio: cambio discreto y cambio continuo; y, cinco formas diferentes de entender el crecimiento exponencial: el exponencial geométrico, el exponencial compuesto, el exponencial del plano fase, el exponencial armónico y el exponencial estocástico. Respecto al primer hallazgo, Castillo-Garsow afirma que el cambio puede imaginarse de dos maneras diferentes: imaginando cambios que ya se han completado (discreto), o imaginando un cambio en progreso (continuo). La distinción clave entre las dos formas de razonamiento es si el cambio ocurre o no en tiempo experiencial, esto es la experiencia del paso del tiempo.

El trabajo de Castillo-Garsow permite apreciar que ya se han integrado el marco conceptual, basado en el estudio del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002), y el marco metodológico, centrado en el experimento de enseñanza, que guían el estudio que aquí se propone; lo que muestra la coherencia y viabilidad para continuar realizando investigaciones que incorporen dichos enfoques. Además, este antecedente sustenta la idea de estudiar la covariación desde la variación misma, justo como se realizó en esta investigación.

Por otra parte, Montero y Vargas (2022) presentaron un estudio fundamentado en la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) de Lesh y Doer (2003) y el Marco Conceptual del Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2002). Las tareas, denominadas bajo la PMM como *Model Eliciting Actvities* (MEA), pretendían promover el aprendizaje de la función exponencial a través de contextos cercanos y de interés para un grupo de estudiantes que cursan una asignatura relacionada con matemáticas aplicadas a los negocios.

Tras la implementación de diferentes MEAs, los autores identificaron, a partir de los modelos generados por los estudiantes, una evolución a través de los distintos niveles de razonamiento propuestos en el marco conceptual de Carlson et al. (2002). Así mismo, establecieron una relación entre el razonamiento covariacional y los ciclos de modelación, en el sentido en que este tipo de razonamiento desempeña un papel clave en dicho proceso matemático; ya que a medida que el razonamiento covariacional evoluciona, permite a los estudiantes construir modelos cada vez más sofisticados.

Por su parte, Márquez, Gaviria, y López (2019) realizaron una intervención didáctica con estudiantes de secundaria, a través de una secuencia de situaciones problema enfocadas en el concepto de función exponencial. Dicha secuencia pretendía promover el proceso de modelación matemática, y contenía, en particular, una situación de tipo experimental. Dentro de su discusión, los autores sugieren que el aprendizaje en matemáticas puede ser altamente efectivo al emplear situaciones experimentales en Ciencias Naturales, ya que la diversidad de fenómenos en este campo ofrece un rico contexto para el desarrollo de conceptos matemáticos.

Márquez et al. concluyen que sería interesante que futuras investigaciones se enfocaran en cuestiones como: ¿es posible mejorar la enseñanza y el aprendizaje a partir de situaciones problemas de tipo experimental? ¿Una intervención didáctica de este tipo mejora el nivel de competencia de los estudiantes? ¿Hay mejoramiento en el ambiente de aprendizaje de los estudiantes a través de este tipo de intervención?

A su vez, Gonzales (2022) analiza de qué manera el razonamiento cuantitativo y covariacional pueden promover la comprensión del cambio climático tanto en estudiantes como en profesores. En su análisis, destaca el papel del razonamiento cuantitativo para entender el balance energético como un sistema compuesto por varios elementos interrelacionados en términos de cantidades y sus relaciones. Asimismo, resalta el papel del razonamiento covariacional en la interpretación de la respuesta del balance energético frente al CO_2. De esta manera, analiza cómo los estudiantes pueden dar sentido a las matemáticas implicadas en la modelización del cambio climático.

Gonzales argumenta que abordar cuestiones sociocientíficas actuales, globales, complejas y cargadas políticamente, mediante el razonamiento cuantitativo y covariacional, puede ayudar a los ciudadanos a tomar decisiones informadas sobre cómo estos temas afectan sus vidas y a evaluar las afirmaciones presentadas en los medios de comunicación. Así, dichos tipos de razonamiento pueden jugar un papel clave en el desarrollo del pensamiento socialmente crítico, lo que sugiere otro foco para futuras investigaciones. Aunado a lo anterior, el autor plantea que el razonamiento cuantitativo y covariacional puede actuar como un vínculo entre la educación matemática y las ciencias, permitiendo la exploración de temas que requieren la integración de ambos campos del conocimiento.

En relación con la investigación que aquí se propone, los trabajos realizados por Montero y Vargas (2022); Márquez, Gaviria, y López (2019) y Gonzales (2022) muestran la pertinencia de integrar el razonamiento covariacional con la modelación, para fomentar el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos. Así mismo, estos trabajos proporcionan una conexión entre los elementos que conforman el marco conceptual de este trabajo, presentados en el capítulo 3.

En otro sentido, Harel (2013), basándose en la teoría constructivista de Piaget, plantea el concepto de necesidad intelectual, que hace referencia a cuando una tarea propuesta a una persona le genera un estado de perturbación, al ser irresoluble con su conocimiento; lo cual la impulsa a buscar nuevo conocimiento para resolverla. El autor propuso cinco categorías de necesidad intelectual: certeza, causalidad, computación, comunicación y estructura. Johnson (2022) integra una sexta categoría: la necesidad intelectual de relaciones, que consiste en una necesidad de explicar la manera en que funcionan juntos los elementos, como en un sistema.

Johnson (2022) basándose en los fundamentos teóricos del razonamiento cuantitativo y covariacional y en resultados empíricos de estudios realizados, propone cuatro facetas de una necesidad intelectual de relaciones: "atributos en una situación (¿Qué son las cosas?), mensurabilidad de los atributos (¿Cómo se pueden medir las cosas?), variación en los atributos (¿Cómo cambian las cosas?) y relaciones entre atributos (¿Cómo cambian las cosas juntas?)" (p. 24).

Johnson (2022) concluye que los investigadores y diseñadores tienen el rol de anticipar y abordar las necesidades intelectuales de los estudiantes, al diseñar tareas que fomenten su razonamiento cuantitativo y covariacional. También, que deben centrarse en crear situaciones que motiven a los estudiantes a establecer relaciones entre los atributos de una situación, así como evaluar críticamente tanto las tareas como el diseño de una investigación, evitando enfoques deficientes y limitados sobre la cognición de los estudiantes.

Desde otra perspectiva, Carreira y Baioa (2011) realizaron un estudio cuyo propósito fue discutir las rutas de modelado producidas por estudiantes de secundaria en un entorno de matemáticas experimentales, desde dos perspectivas teóricas: la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991) y la Perspectiva de Modelación y Modelos (PMM) de Lesh y Doerr (2003).

Las autoras analizaron cómo la experiencia práctica en situaciones que requieren el uso y manipulación de objetos para resolver problemas reales influye en el pensamiento y procesos de modelación de los estudiantes. Para ello, tienen en cuenta aspectos destacados en la literatura sobre educación matemática que indican que el uso de objetos tangibles y la experimentación en el aprendizaje matemático favorecen el desarrollo de actitudes investigativas y fortalecen la percepción de las matemáticas como una herramienta útil para interpretar situaciones cotidianas. Así mismo, este enfoque permite concretar ideas abstractas en contextos del mundo real, ofreciendo a los estudiantes un enfoque visual y práctico. Además, al explorar las propiedades y límites de los objetos manipulables, se facilita la conexión entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento, dado que los procesos mentales surgen a partir de la manipulación física de estos elementos.

Carreira y Baioa afirman que, tras implementar diversas actividades de modelación, los datos empíricos muestran que la mayoría de los estudiantes del grupo realizó un trabajo experimental intensivo con objetos reales, dedicando bastante tiempo a comprender la situación y analizarla en profundidad. También, la identificación de variables y sus relaciones avanzó de forma lenta, con un enfoque basado en ensayo y error mediante la manipulación del material concreto. Inicialmente, los estudiantes probaron reiteradamente un "modelo de", lo que implicó un paso del mundo real al mundo de los símbolos de forma iterativa. Posteriormente, los estudiantes pasaron a investigar un "modelo para", permitiendo así identificar rápidamente relaciones matemáticas y establecer un modelo que pudiera dar solución al problema.

Las autoras concluyen que tanto la teoría aplicada como los resultados previos sugieren que la actividad práctica y experimental permite a los estudiantes desarrollar una comprensión más profunda y cercana de la situación, incluidas las matemáticas implicadas. Así mismo, que “la experimentación con objetos concretos apoya la búsqueda de una solución al problema por parte de los estudiantes, en la medida en que sea posible realizar ensayos y pruebas consecutivos antes de una matematización más sólida.” (p. 219).

Dentro del objetivo de la presente investigación, se hace énfasis en la modelación planteada desde la experimentación, es decir, se concibe a la experimentación como una etapa crucial dentro del ciclo de modelación. Una de las principales motivaciones para plantear esta idea es la disparidad entre la formación matemática que ofrece la escuela y los desafíos del mundo real señalada por Steen (1998), que se mencionó en el capítulo 1 de este documento. Sin embargo, una motivación aún mayor son los resultados a favor del aprendizaje que se obtienen al incorporar este enfoque en la enseñanza de las matemáticas, como los que se señaló previamente con el trabajo de Carreira y Baioa (2011). Por esta razón, las actividades diseñadas en el marco de este trabajo ofrecieron a los estudiantes participantes en el estudio la oportunidad de experimentar y tomar datos en contextos diversos de las ciencias y la cotidianidad.

Por otra parte, Paoletti y Vishnubhotla (2022) critican que los currículos tradicionales de álgebra se centran en conceptos estáticos y abstractos, lo que limita el desarrollo del razonamiento dinámico y relacional en los estudiantes. En su lugar, los autores proponen que los estudiantes de secundaria comiencen razonando sobre cantidades que cambian dinámicamente, para construir relaciones covariacionales básicas. Este enfoque permite a los estudiantes utilizar diversas representaciones (gráficos, tablas y ecuaciones) para entender con mayor profundidad las relaciones funcionales, tanto lineales como no lineales.

Los resultados que presentan estos autores se basan en un estudio más amplio que incluye seis experimentos de enseñanza en pequeños grupos, siguiendo un enfoque de diseño. Su objetivo consistió en explorar cómo ayudar a los estudiantes a desarrollar ideas matemáticas a través del razonamiento variacional y covariacional. Dentro de dichas ideas se encuentra la de *pensamiento emergente*, el cual implica comprender un gráfico tanto como un trazo que se genera progresivamente, como la expresión simultánea de relaciones covariacionales.

Para que los estudiantes participen en esta forma de pensamiento, en las tareas se propone usar la herramienta "Traza" de GeoGebra, la cual permite que los estudiantes observen cómo el movimiento del punto refleja las magnitudes variables en cada eje, reforzando su comprensión de las relaciones funcionales. Según los autores, este enfoque dinámico no solo facilita la comprensión de patrones de crecimiento, sino que también mejora la capacidad de los alumnos para razonar sobre cambios simultáneos y coordinar múltiples representaciones.

Paoletti y Vishnubhotla (2022) concluyen que proporcionar a los estudiantes representaciones dinámicas de fenómenos que cambian suavemente es invaluable para su desarrollo de un razonamiento variacional y covariacional. Además, sugieren la necesidad de más investigaciones sobre cómo diseñar o adaptar secuencias didácticas como la que presentan para su implementación en entornos de clase más grandes al estudiado por los autores; por ejemplo, cursos con su totalidad de estudiantes.

En este mismo sentido, Greefrath et al. (2011) analizan el papel de las herramientas digitales en el ciclo de modelación. Los autores conciben a las tecnologías digitales como herramientas para experimentar, validar soluciones y como método de comunicación en la enseñanza de las matemáticas.

En su estudio, analizan varios problemas de modelación. En el primero, se modela el grado de concentración de alcohol en la sangre en términos del tiempo, tras consumir cierta cantidad de cerveza. Un primer enfoque en la solución del problema consiste en encontrar la expresión algebraica que modela la situación a partir de cálculos manuales, y utilizar alguna graficadora para representar dicho modelo. En este caso, la tecnología es utilizada únicamente para validar resultados, pues se están comparando gráficas para reconocer el modelo que mejor se ajusta al ejemplo dado. Otro enfoque en la solución de este problema consiste en utilizar una hoja de cálculo para construir una representación tabular de la situación a modelar, y a partir de ella encontrar diferentes modelos de regresión. En este caso, el papel de la tecnología es multifacético, puesto que se utiliza para validar, interpretar y experimentar el fenómeno.

Al discutir sobre el papel de la tecnología en el ciclo de modelación, Greefrath et al. sostienen que las herramientas tecnológicas son frecuentemente esenciales en este proceso matemático, ya que permiten resolver algunos problemas más rápidamente o incluso los simplifican, mientras que otros solo pueden abordarse con su uso. Allí, los autores exponen dos ejemplos que ilustran que la tecnología es útil para obtener y desarrollar una idea (a través de la simulación del problema) y para validar resultados (a partir de datos en bruto). En ambos ejemplos, se aprecia que la tecnología ayuda a simplificar la realidad a un modelo representativo de sí misma.

Greefrath et al. (2011) también abordan el papel de la tecnología en el proceso de evaluación. Al respecto, sostienen que “las tareas de examen que contienen un proceso de modelado completo en la mayoría de los casos no son posibles debido al factor de complejidad.” (p. 326). No obstante, al analizar una misma tarea evaluativa planteada de dos formas diferentes, una sin tecnología y la otra con tecnología, concluyen que la tarea propuesta con tecnología es más abierta, y el ciclo de modelación se desarrolla de manera más amplia.

Finalmente, los autores concluyen que la tecnología puede influir en cada etapa del ciclo de modelación. De este modo, “el mundo de la tecnología se relaciona con el mundo real y el mundo matemático" (p. 329). También, que la tecnología resulta crucial en el proceso de modelación tanto en su promoción como en su evaluación.

Ahora bien, estos trabajos de Paoletti y Vishnubhotla (2022) y Greefrath et al. (2011) ofrecen resultados sólidos sobre la pertinencia de incluir el uso de tecnologías digitales tanto en el proceso de modelación matemática, como en el fomento del desarrollo del pensamiento covariacional. Por este motivo, dentro del objetivo de este trabajo de investigación es crucial considerar el uso de tecnologías digitales, pues al pretenderse estudiar el razonamiento covariacional de los estudiantes a partir de la modelación de problemas, las tecnologías digitales juegan un papel crucial allí.

3. Fundamentación teórica y conceptual

En este capítulo se presentan los principales elementos teóricos y conceptuales que guiaron y fundamentaron esta investigación. El primero, refiere al marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional; el segundo, relacionado con el pensamiento variacional y los tipos de variación; y, finalmente, el tercero es una conceptualización sobre el proceso de modelación matemática.

3.1. Marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional

Carlson et al. (2002) propusieron el *marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional*, que permite analizar y caracterizar las diversas formas de pensamiento que exhiben los estudiantes al razonar sobre dos cantidades de varían simultáneamente. Los autores parten de la conjetura de Saldanha y Thompson (1998) acerca de que el razonamiento covariacional es evolutivo; e incluyeron la coordinación mental de las tasas de cambio promedio e instantánea de una cantidad con respecto a otra cantidad, a medida que varían los valores de las dos cantidades.

Desde este marco, se define el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.” Carlson et al. (2002, p. 4).

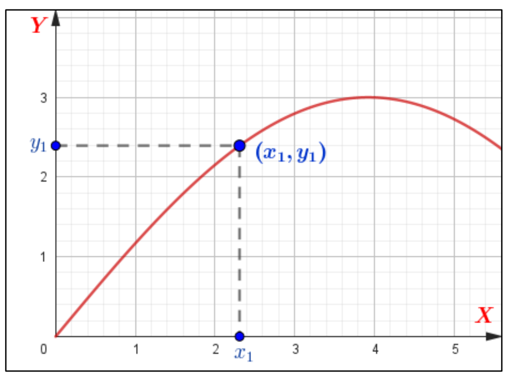
Así, este marco permite describir, analizar y validar la comprensión, acciones mentales y niveles de razonamiento exhibidas por estudiantes cuando se enfrentan a situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente. En este sentido, se definen cinco acciones mentales (AM) del razonamiento covariacional y a cada una de ellas se asocian ciertos comportamientos mostrados por los estudiantes al ejecutar o evocar dicha acción mental. En seguida, se describen tales acciones mentales y sus comportamientos asociados, en un contexto gráfico.

AM1. Coordinación de variables:

Esta acción metal consiste en la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. Algunos de los comportamientos asociados con esta acción mental consisten en designar los ejes del sistema de coordenadas cartesianas con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables; por ejemplo, expresar que "y cambia con cambios en x".

Figura 1

AM1: Coordinación de variables

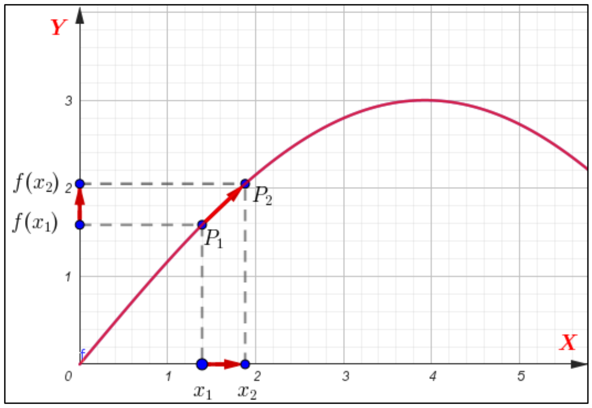


AM2. Coordinación de la dirección del cambio:

Esta acción mental consiste en coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. Algunos comportamientos asociados a esta AM en el contexto gráfico consisten en construir una línea recta creciente; o, verbalizar su consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada, a través de expresiones como "cuando una variable crece, la otra también".

Figura 2

AM2: Coordinación de la dirección de cambio

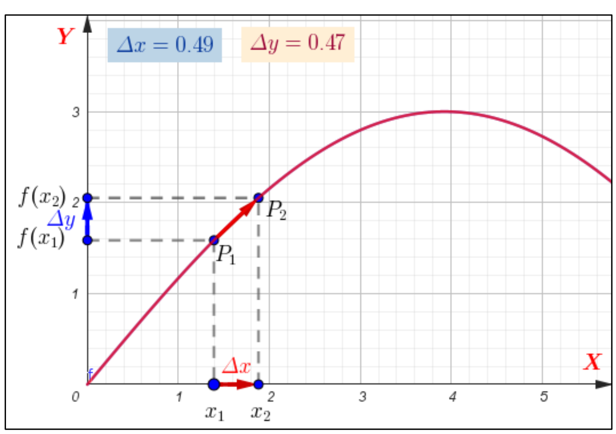


AM3. Coordinación de las cantidades de cambio:

Esta acción mental consiste en coordinar la cantidad de cambio Δy de una variable con los cambios en la otra variable x. Así, algunos comportamientos asociados a esta acción mental consisten en localizar puntos sobre la gráfica, construir rectas secantes, y verbalizar la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

Figura 3

AM3: Coordinación de las cantidades de cambio

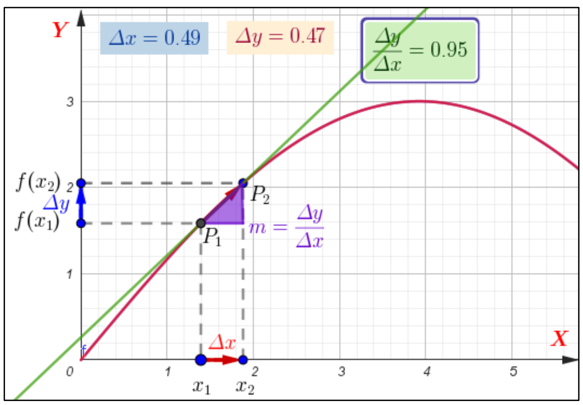


AM4. Coordinación de la razón de cambio promedio:

Esta acción mental consiste en coordinar la razón de cambio promedio de la función ($\Delta y/\Delta x$) con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada. Algunos comportamientos asociados a esta acción mental consisten en construir rectas secantes contiguas para el dominio; y, verbalizar la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes en el valor de entrada.

Figura 4

AM4: Coordinación de la razón de cambio promedio

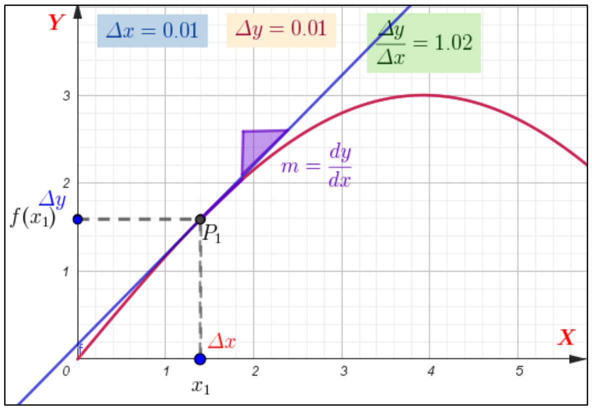


AM5. Coordinación de la razón de cambio instantánea:

Esta acción mental consiste en coordinar la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. Algunos comportamientos consisten en construir una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad; verbalizar la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función; y, expresar gráficamente los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades de manera adecuada.

Figura 5

AM5: Coordinación de la razón de cambio instantánea



El objetivo principal de este trabajo de investigación pretendió justamente ampliar la lista de comportamientos asociados a cada una de las acciones mentales, en situaciones que trasciendan al contexto gráfico, es decir, situaciones donde se requiera utilizar diferentes representaciones como verbal, tabular, gráfico, analítico, entre otras. Así mismo, caracterizar los comportamientos al abordar diferentes tipos de variación (directa e inversa, acelerada-desacelerada, convergente, cíclica y escalonada) en diferentes contextos de la vida real, de la ciencia o de la ingeniería en específico.

A partir de las cinco acciones mentales anteriormente descritas, Carlson et al. (2002) definen cinco niveles de razonamiento covariacional. Se dice que un nivel de razonamiento sustenta las acciones mentales asociadas a los niveles de razonamiento inferiores a él; lo que quiere decir que, si un estudiante se encuentra en un nivel n, sustenta las acciones mentales AMn, AM$(n-1)$, …, AM1.

Tabla 1

Niveles de razonamiento covariacional

Niveles	Descripción
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Nota. Tomado de Carlson et al. (2002)

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017) si se caracteriza a un estudiante en un nivel de razonamiento determinado es porque se está convencido de que el estudiante tiene la capacidad de razonar de forma confiable en distintos escenarios de la manera que implica dicho nivel, pero no puede razonar de manera confiable en niveles superiores. Es por esta razón que dicha caracterización debe ser cuidadosa.

Así mismo, Thompson y Carlson (2017) ofrecen un significado de función desde el enfoque covariacional, con el fin de realizar estudios desde una base común de significado.

> Una función, covariacionalmente, es una concepción de dos cantidades que varían simultáneamente de modo que existe una relación invariante entre sus valores que tiene la propiedad de que, en la concepción de la persona, cada valor de una cantidad determina exactamente un valor de la otra. (p. 444).

3.2. Diferentes tipos de variación

Steen (1998) sostiene que en la cultura cuantitativa es necesario razonar con conjuntos complejos de variables interrelacionadas y desarrollar una capacidad crítica para crear e interpretar métodos que cuantifiquen fenómenos, especialmente cuando no hay modelos preexistentes. Por ello, en palabras del mismo autor, es fundamental que los estudiantes analicen y exploren una variedad de situaciones que se centren en las relaciones entre variables, desarrollando así criterios que les permitan identificar y clasificar estas relaciones según su estructura.

El autor refiere al informe *Science for All Americans* de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, en el que se sugiere que los estudiantes deberían ser sensibles, al menos, a los siguientes tipos de relaciones entre variables.

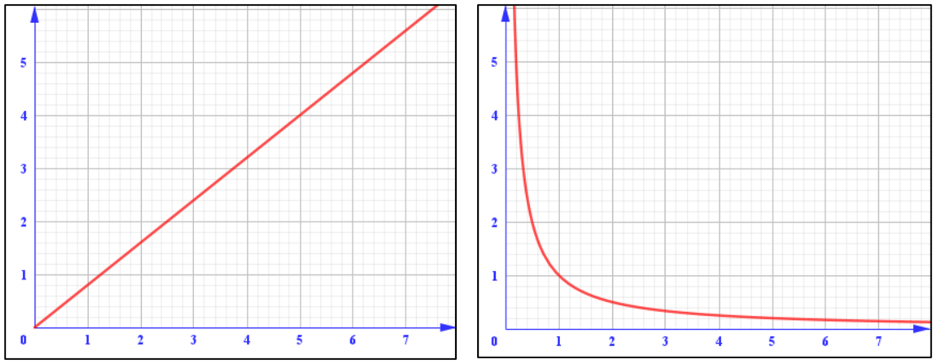
3.2.1. Variación directa e inversa

La variación directamente proporcional se da cuando a medida que una variable se incrementa, la otra también se incrementa, de modo que el cociente entre tales variables es siempre constante; es decir, una cantidad mantiene siempre la misma proporción con otra. Algebraicamente, este tipo de relación de interdependencia se representa mediante la igualdad $y = kx$, donde y y x son las variables directamente proporcionales y k la constante de proporcionalidad. Este tipo de interdependencia entre variables tiene la particularidad de que la razón de cambio entre ellas también es constante, al igual que el de las funciones de la forma $y = mx + b$. Sin embargo, se debe tener en cuenta que este último tipo de relación entre las variables x y y no es directamente proporcional, puesto que el producto entre ellas no es constante, es decir, no mantienen la misma proporción.

La variación inversamente proporcional se da cuando a medida que una variable crece, la otra decrece, y el producto entre ellas es constante. Esto significa que a medida que una cantidad aumenta, la otra disminuye en proporción. Algebraicamente, la interdependencia entre variables inversamente proporcionales se representa mediante la igualdad $y = \frac{k}{x}$, donde y y x son las variables involucradas y k la constante de proporcionalidad.

Figura 6

Representación gráfica de la variación directa y la variación inversa



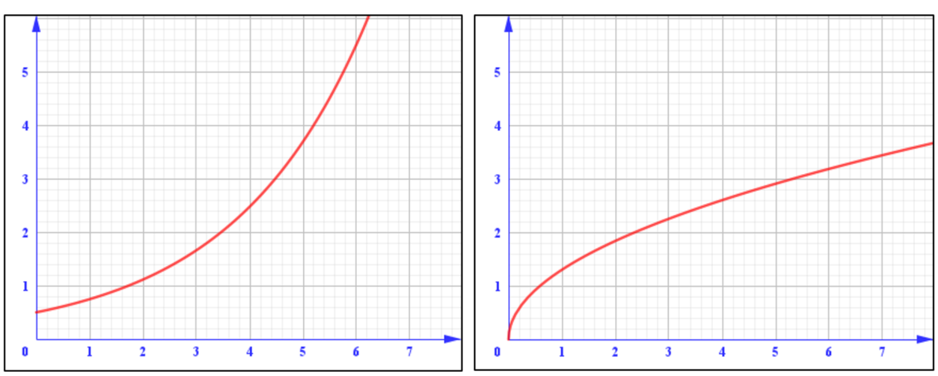
3.2.2. *Variación acelerada y desacelerada*

La variación acelerada se da cuando a medida que una variable se incrementa uniformemente, la segunda aumenta más y más rápido. Es decir, para cantidades de cambio uniformes en la primera variable, las cantidades de cambio correspondientes en la segunda variable son cada vez más grandes. Ejemplos de funciones que presentan este tipo de variación son las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = kx^2$, cuando $k > 0$ y $x > 0$.

Por otra parte, la variación desacelerada se da cuando a medida que una variable crece en cantidades uniformes, la otra también crece, pero en cantidades cada vez más pequeñas. Un ejemplo de función con este tipo de variación es $y = \sqrt{x}$.

Figura 7

Representación gráfica de la variación acelerada y desacelerada

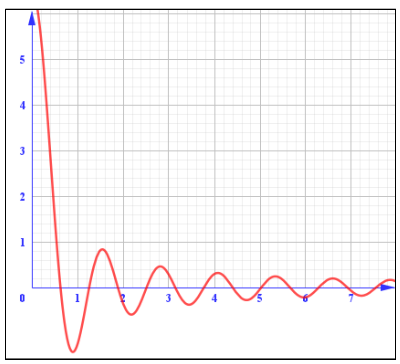


3.2.3. Variación convergente

Se da cuando a medida que una variable se incrementa sin límite, otra se aproxima a un valor límite. Es importante señalar que este tipo de variación también es desacelerada; sin embargo, la variación desacelerada no necesariamente es convergente. Ejemplos de funciones con este tipo de variación son $f(x) = \frac{k}{x}$, $g(x) = \frac{Senx}{x}$; y en general, aquellas en las que cuando la variable independiente tiende a infinito, la variable dependiente tiende a algún valor constante.

Figura 8

Representación gráfica de la variación convergente

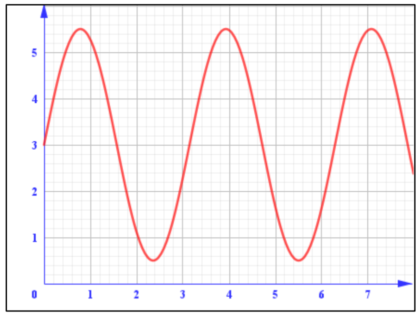


3.2.4. Variación cíclica

Se da cuando a medida que una variable incrementa uniformemente, una segunda incrementa y disminuye, manteniendo cierto ciclo que se repite. Ejemplo de funciones con este tipo de variación son las funciones trigonométricas $y = sen(x)$ y $y = cos(x)$. Es importante mencionar que la función $y = tan(x)$ también presenta variación cíclica, porque a medida que la variable de entrada incrementa, la de salida cambia, manteniendo ciclos repetidos.

Figura 9

Representación gráfica de la variación cíclica

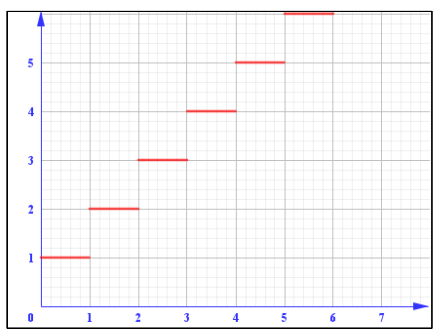


3.2.5. Variación escalonada

Se da cuando a medida que una variable se incrementa, la otra cambia a saltos. Como ejemplos de funciones con este tipo de variación podrían mencionarse a las funciones entero mayor $y = \lfloor x \rfloor$ y entero menor $y = \lceil x \rceil$, conocidas generalmente como función parte entera.

Figura 10

Representación gráfica de la variación escalonada



Steen (1998) menciona que, en la práctica, todas las variaciones observadas son una combinación de estos tipos básicos. Esto implica que los fenómenos variables rara vez se ajustan a un único patrón, sino que exhiben una dinámica compleja en la que múltiples modalidades de cambio interactúan y se superponen. En este sentido, Fiallo y Parada (2018) complementan esta perspectiva señalando que "este acercamiento a la variación involucra el concepto de función como la generalización de la interdependencia entre magnitudes variables" (p. 32). Es decir, la función actúa como un objeto matemático que permite describir y analizar cómo una variable cambia en relación con otra o con varias otras, estableciendo así una relación sistemática y cuantificable entre diferentes elementos. Este enfoque funcional es fundamental para comprender la naturaleza de la variación, ya que proporciona una herramienta para modelar las relaciones dinámicas presentes en múltiples contextos, desde fenómenos de la ciencia hasta sociales y económicos.

3.3. Proceso de modelación matemática

En este apartado se presentan la forma en que se conciben, dentro de esta investigación, algunos términos relacionados con el proceso de modelación. El primero de ellos es el concepto de *modelo matemático*, el cual consiste en un "conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir, y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación." (Villa-Ochoa, 2007, p. 67).

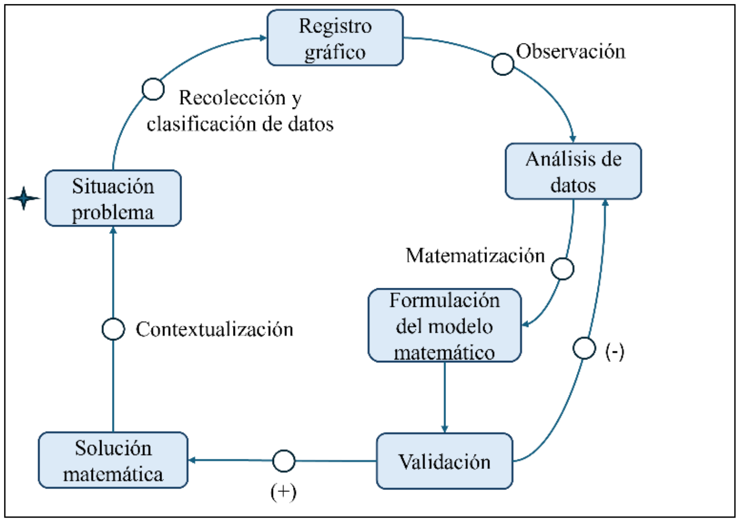
El proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real es lo que se conoce como *modelización*. Este proceso se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia, en el cual emerge el fenómeno o situación a modelar. Por tanto, el propósito del modelo es solucionar un problema científico o avanzar en una teoría científica. En este sentido, la modelización es concebida como una actividad científica, realizada por matemáticos aplicados o personas con formación en otras ciencias.

El proceso de modelización suele considerarse como un ciclo que sigue diferentes fases tales como: identificación del problema real, formulación del modelo matemático, producción de la solución o soluciones matemáticas a partir del modelo matemático, interpretación de las soluciones, evaluación de las soluciones en términos del entorno real y, si es necesario, revisión del modelo y realización de un nuevo ciclo. Finalmente, se elabora un informe con los resultados y el análisis del problema (Blum y Niss, 1991; Niss et al., 2007; como se cita en Carreira y Baioa, 2011). Existen diferentes interpretaciones y esquematizaciones de estas fases dentro de la literatura.

Como una adaptación de esta actividad científica en la enseñanza de las matemáticas surge el proceso de *modelación matemática*, que de acuerdo con Villa-Ochoa (2007) consiste en una resignificación de la modelización con fines educativos, pero que retoma su estructura como proceso. Por esta razón, varios investigadores en educación matemática han propuesto esquemas para representar los ciclos de modelación, teniendo en cuenta las fases del proceso de modelización antes mencionadas. A continuación, en la Figura 11, se hace referencia a un esquema propuesto por Berrío et al. (2021) que sistematiza este proceso matemático en seis fases, y entre cada una de ellas procesos intermedios que van emergiendo. En seguida, se describe en qué consiste cada fase en términos de los autores de este esquema.

Figura 11

Ciclo de modelación matemática



Nota. Tomado de Berrío et al. (2021).

La primera fase de este ciclo, denominada situación problema, emerge del contexto o entorno concreto de la realidad, que puede representarse y simularse de diferentes maneras. En esta etapa se desarrollan procesos como la interpretación del contexto o situación, lo que involucra el reconocimiento de las variables implicadas en la situación problema, así como la comprensión de sus relaciones, condiciones y posibles restricciones que afectan su comportamiento dentro del fenómeno observado.

Esta primera fase, al permitir simular el entorno o contexto de la situación problema, conduce a un proceso de experimentación y, recolección y clasificación de datos. Villa-Ochoa (2007) propone que una vez determinado el problema o fenómeno del mundo real, éste sea observado y sometido a un proceso de experimentación con el fin de profundizar en su interpretación y en la búsqueda de datos. La recolección de datos consiste en registrar mediciones y observaciones que serán esenciales para la construcción del modelo. Los datos recolectados ayudan a determinar qué aspectos del fenómeno son los más relevantes y cómo pueden ser representados matemáticamente. Por su parte, Berrío et al. (2021) señalan que la organización de los datos debe hacerse de la manera más entendible posible, para posteriormente representarlos de diversas maneras, y dar orden y estructura al proceso de modelación.

Así, en el proceso de modelación se sugiere incluir situaciones controladas, ya que esto permite a los estudiantes enfocarse en las variables más relevantes, evitando la interferencia de factores externos que dificulten su comprensión. De esta manera, se tendrá una experimentación más clara y precisa, ayudando a identificar las relaciones entre las variables que luego pueden ser modeladas matemáticamente de manera efectiva.

La segunda fase del ciclo de modelación consiste en representar los datos gráficamente para facilitar su análisis. Utilizando herramientas como diagramas de dispersión, se busca visualizar las relaciones entre las variables involucradas y obtener una interpretación geométrica del problema. Esta interpretación se apoya en un proceso de observación, en el que se vinculan los datos con posibles funciones matemáticas, con el propósito de formular hipótesis sobre cuál de ellas representa mejor dichos datos y el comportamiento de la situación experimentada.

La tercera fase consiste en el análisis de datos, en la que se procede a identificar una relación matemática entre las variables del problema, y así traducir tal situación del lenguaje común al lenguaje matemático, es decir, realizar la matematización del problema. Por ello, se espera que el estudiante asocie las variables y las representaciones gráficas con constantes o parámetros.

La cuarta fase consiste en la formulación del modelo matemático, donde se determina una expresión algebraica para la relación de interdependencia entre las variables. Sin embargo, teniendo en cuenta que un modelo matemático es aquel conjunto de símbolos y relaciones matemáticas para representar una situación, los datos recopilados en una tabla (representación tabular) y la gráfica realizada previamente, también son parte del modelo matemático. Por lo que en esta fase, el estudiante también debe relacionar tales representaciones entre ellas mismas, y como un modelo de una misma situación.

En la quinta fase, denominada fase de validación, se compara el modelo matemático con los datos reales y el comportamiento de las variables analizadas previamente. Si el modelo no refleja adecuadamente la realidad (validación negativa), es necesario revisar los datos experimentales o construir un nuevo modelo. En cambio, si el modelo logra aproximarse al comportamiento real (validación positiva), se considera útil para predecir el fenómeno en otros casos similares.

Finalmente, en la sexta fase, luego de validar positivamente el modelo, se interpreta desde un enfoque matemático. Posteriormente, el modelo se contextualiza dentro de la situación problema inicial y se le da uso para establecer predicciones futuras y dar solución a otros interrogantes dentro de la situación. Por tanto, se reconoce allí las limitaciones o potencialidades del modelo matemático encontrado.

Es importante señalar que el principal lente teórico para analizar los datos y alcanzar el objetivo de investigación fue el Marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002). Sin embargo, el análisis de datos permitió consolidar una relación estrecha entre los tres constructos presentados en este capítulo, es decir, entre el razonamiento covariacional, los tipos de variación y el ciclo de modelación matemática de Berrío et al. (2021); por lo que también se presentan resultados al respecto.

4. Método de la investigación

Esta investigación siguió una metodología de corte cualitativo; y se basó en la estrategia denominada *experimento de enseñanza* que, de acuerdo con Camargo (2021), "consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico." (p. 86).

Así, la conjetura, entendida como aquella inferencia que se formula a partir de pruebas incompletas o no concluyentes, es uno de los principales componentes del experimento de enseñanza; y, se basan en evidencias que se van obteniendo con fundamentos teóricos y empíricos, sobre la enseñanza y el aprendizaje, procedentes de la literatura de la educación matemática. (Molina, et al., 2011).

De acuerdo con Confrey y Lachance (2000), la conjetura alude a la manera en que se podrían estructurar, conceptualizar o enseñar los contenidos matemáticos con fines educativos; por ello, tiene dos dimensiones: una de contenido matemático, es decir, qué debe enseñarse; y otra pedagógica que corresponde al cómo debe enseñarse dicho contenido. La segunda dimensión, a partir de un marco conceptual, debe orientar al investigador sobre cómo debe estructurarse la clase, así como qué tipo de tareas o actividades, herramientas y recursos son esenciales para abordar el contenido en cuestión. Camargo (2021) aclara sobre esta componente del experimento que "no se busca simplemente probarla o descartarla, sino ir revisándola y reelaborándola a medida que el experimento está en marcha." (p. 90).

Por otra parte, en el experimento de enseñanza existen cuatro participantes principales: los investigadores que diseñan la secuencia didáctica y recopilan información; un profesor que ejecuta la secuencia; los investigadores observadores de la clase; y, los estudiantes, cuya cantidad puede ser controlada o incluso pueden participar en el experimento como actividad extracurricular (Camargo, 2021). Para efectos de esta investigación, el autor y su director cumplieron el rol de diseñadores y observadores del experimento. Los estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza fueron treinta y cinco integrantes de un curso de Cálculo I (cálculo diferencial) de la Universidad Industrial de Santander (UIS) y su profesor fue el autor principal de esta investigación.

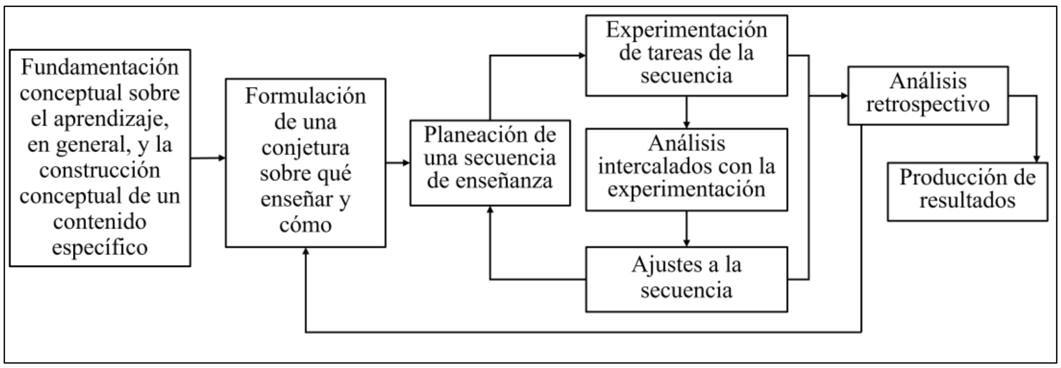
En este mismo sentido, es importante señalar que, a lo largo del desarrollo de este trabajo, se contó con el acompañamiento y apoyo de un equipo de profesores e investigadores, quienes contribuyeron críticamente al diseño, experimentación y análisis de la secuencia de enseñanza y de los resultados de su experimentación. Este equipo estableció un espacio de trabajo colaborativo que se sostuvo mediante reuniones semanales, en las cuales se socializaron los avances del experimento. Por tanto, la participación en este espacio de diálogo académico contribuyó de manera significativa al desarrollo de este estudio.

Respecto al escenario en el cual se lleva a cabo un experimento de enseñanza, Camargo (2021) sugiere que éste sea en un aula regular de clase, o en aulas acondicionadas. El experimento que aquí se reporta se realizó en un aula regular, a la que cada estudiante llevó, a todas las sesiones de trabajo, sus propios dispositivos tecnológicos, como tabletas, computadores portátiles o, teléfonos inteligentes.

Ahora, la investigación se desarrolló en cinco etapas, que se basaron, en el *plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza*, sugerido por Camargo (2021) y que se ejecuta mediante ciclos repetidos de diseño, experimentación y refinamiento de la conjetura del experimento. En la figura 8 se muestra una esquematización de dicho plan de ejecución y posteriormente se describe en qué consistió cada una de las cinco etapas desarrolladas.

Figura 12

Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza



Nota. Tomado de Camargo (2021).

4.1. Etapa I: Fundamentación teórica y conceptual

En esta primera etapa se llevó a cabo una revisión bibliográfica sobre trabajos de investigación que presenta resultados acerca del razonamiento covariacional, el proceso de modelación matemática y el uso de tecnologías en la enseñanza de los objetos fundamentales del Cálculo. El desarrollo de esta etapa consolidó una lista de antecedentes; determinó la construcción del marco conceptual; orientó, teórica y metodológicamente, el diseño de la secuencia de enseñanza; y, favoreció el reconocimiento de ciertas inferencias, para la formulación de la conjetura inicial del experimento.

4.2. Etapa II: Formulación de una conjetura del experimento de enseñanza

Aquí se formuló una primera versión de la conjetura del experimento, que se ajustó a lo largo de la planeación y experimentación de la secuencia de enseñanza, pues como se recalcó antes, su propósito no era solo probarla o descartarla, sino reelaborarla según los resultados que se iban obteniendo.

Como conjetura inicial del experimento se planteó la siguiente: *la integración de actividades de modelación matemática, planteadas desde la experimentación y mediadas por tecnologías digitales, permite a los estudiantes de cálculo diferencial evolucionar a través de los distintos niveles de razonamiento covariacional, lo que a su vez promueve la construcción de modelos matemáticos cada vez más refinados, sobre fenómenos donde se presentan distintos tipos de variación*.

En esta conjetura, el contenido matemático corresponde a aquellas nociones teóricas y conceptuales que involucra el razonamiento covariacional; tales como, patrones, relaciones, cambio, aproximación, tendencia, dirección, tasas de cambio promedio, tasas de cambio instantánea, variación directa e inversa, acelerada, cíclica, convergente y escalonada, entre otros.

Por otra parte, respecto al cómo enseñar dicho contenido matemático, la conjetura del experimento planteó que fuera a través del proceso de modelación matemática; la experimentación y la toma de datos en distintos escenarios; y, el uso de tecnologías digitales, en particular, el uso del software de matemática interactiva GeoGebra. Así mismo, en esta dimensión de la conjetura, se tuvieron en cuenta las ideas teóricas y metodológicas, propuestas en Fiallo y Parada (2018) y Rodríguez (2020) para el desarrollo de habilidades de los procesos de resolución de problemas, representación, comunicación, planteamiento, ejecución y comparación de procedimientos, razonamiento y demostración.

4.3. Etapa III: Planeación de la secuencia de enseñanza

Basada en la conjetura del experimento, esta etapa implicó el diseño detallado de la secuencia de enseñanza, incluyendo la organización de las clases, las tareas propuestas, las herramientas tecnológicas y otros recursos necesarios para cada situación abordada. Para ello, se realizó, en primer lugar, una búsqueda y selección de escenarios y/o situaciones propias de la vida real o de la ciencia, en las que emergen los tipos de variación y que permiten poner en acción las diferentes etapas de los ciclos de modelación referidos en el marco conceptual. Los resultados de esta etapa se presentan como un primer producto de esta investigación en el capítulo 5.

4.4. Etapa IV: Experimentación de la secuencia

Esta etapa consistió en implementar en el aula la secuencia de enseñanza planeada, con la participación de los estudiantes y el profesor. Para el desarrollo de cada taller se requirió de cuatro horas de clase, donde el investigador principal tomó notas de campo sobre el desarrollo de las clases, las interacciones de los estudiantes y de sus comportamientos referentes al razonamiento covariacional. Para la recolección de datos, se contó con un dispositivo para grabar audio en aquellos fragmentos de la clase relevantes, en términos del objetivo de la investigación. También, se utilizó el *aula virtual de GeoGebra (AVG)* para presentar los talleres a los estudiantes y guardar allí sus producciones. Los datos emergentes en esta etapa permitieron dar respuesta a la pregunta y objetivo de investigación, así como refinar la conjetura del experimento.

4.5. Etapa V: Análisis retrospectivo y producción de resultados

La última etapa estuvo enfocada en analizar los datos obtenidos durante la experimentación. Camargo (2021) sugiere que este análisis se realice guiado por la conjetura del experimento. Esta misma autora sostiene que el análisis retrospectivo tiene como objetivo situar los eventos de la clase dentro de un marco conceptual más amplio, con el fin de posicionar el experimento como un ejemplo representativo de otros similares.

Así, el análisis de datos se hizo teniendo en cuenta el marco conceptual de Carlson et al. (2002), para caracterizar los comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional; los tipos de variación promovidos por Steen (1998); y, el Ciclo de modelación de Berrío et al. (2021). Como principal resultado, fue posible enriquecer estos constructos de la educación matemática, así como establecer articulaciones sólidas entre ellos.

Para la selección y sistematización de los datos, se adoptó un enfoque basado en la relevancia analítica de las producciones de los estudiantes en relación con la pregunta de investigación, priorizando el contenido y las características de las respuestas sobre la identificación de casos particulares. En este sentido, la selección de los datos no estuvo orientada por la elección de estudiantes específicos, sino por la identificación de producciones que emergieron como significativas en función de su potencial para aportar elementos clave al análisis.

5. Resultados

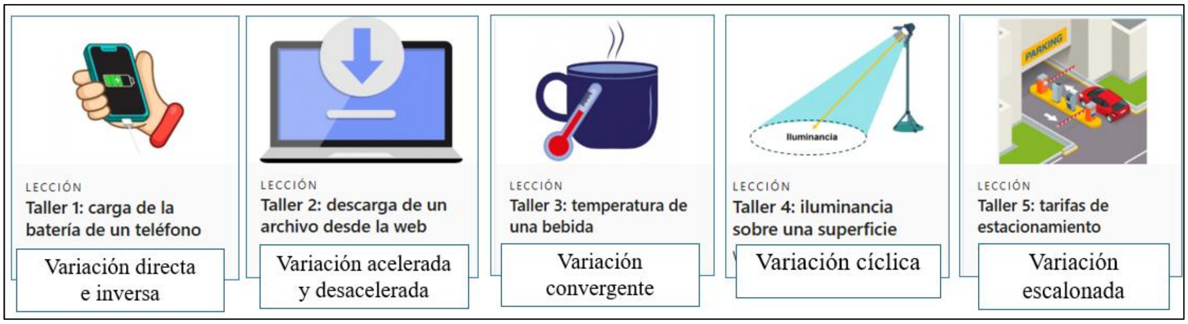
En este capítulo se exponen los resultados principales de la investigación. En primer lugar, se describe la secuencia de enseñanza diseñada e implementada. Luego, se presenta la caracterización de los comportamientos asociados a las acciones mentales implicadas en el razonamiento covariacional, esto principalmente responde al objetivo de la investigación. Seguidamente, se propone una ampliación del marco conceptual del razonamiento covariacional, evidenciando la necesidad de incorporar una nueva acción mental. Después, se establece una articulación entre dichas acciones mentales y el ciclo de modelación. Finalmente, se reflexiona sobre la puesta en escena y transformación de la conjetura planteada en el experimento de enseñanza.

5.1. Descripción de la secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza está constituida por una serie de cinco talleres, cada uno de ellos enfocado en un tipo de variación y en un contexto o situación específica. Así, el primer taller aborda la variación directa e inversa, en el contexto de la carga de la batería de un teléfono; el segundo aborda la variación acelerada y desacelerada, en el contexto de la descarga de un archivo desde la web; el tercero aborda la variación convergente en el contexto de la temperatura de una bebida caliente; el cuarto aborda la variación cíclica en el contexto de la iluminancia sobre una superficie; y, finalmente, el quinto aborda la variación escalonada en el contexto de las tarifas de estacionamiento. En la siguiente figura se esquematiza dicha organización de la secuencia.

Figura 13

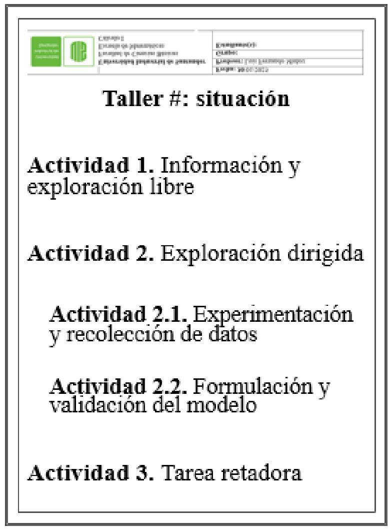
Estructura de la secuencia de enseñanza



Por otra parte, cada taller se desarrolla siguiendo una estructura que integra las fases del ciclo de modelación de Berrío et al. (2021) junto con la organización propuesta por Fiallo y Parada (2018) para los talleres de un curso de precálculo, que contempla las fases de información y exploración libre; socialización de resultados; exploración dirigida; explicación; y una tarea retadora. De este modo, inicialmente, los estudiantes encuentran una actividad de información y exploración libre, la cual les permite conocer el contexto o situación que van a abordar; algunos datos importantes, como los instrumentos de medición requeridos para las magnitudes involucradas, las unidades de medida, entre otros. La segunda actividad, que es de exploración dirigida, se divide en dos partes, una en la que se realiza la experimentación y la toma de datos de la situación abordada, y otra en la que formulan y validan el modelo matemático propuesto por los mismos estudiantes. Principalmente allí se plantean preguntas para que los estudiantes exhiban, de forma más explícita, comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional. Finalmente, la tercera actividad, denominada tarea retadora, está enfocada en la resolución de un nuevo problema a partir de lo aprendido en el taller. Allí, se espera además que, con la ayuda del profesor, el estudiante logre conceptualizar el tipo de variación en el cual está enfocado el taller, así como las características covariacionales asociadas.

Figura 14

Estructura de cada taller que compone la secuencia de enseñanza



Taller #: situación

Actividad 1. Información y exploración libre

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Experimentación y recolección de datos

Actividad 2.2. Formulación y validación del modelo

Actividad 3. Tarea retadora

A continuación, se presenta cada uno de los talleres que conforman la secuencia de enseñanza. Es importante mencionar que a medida que se implementó el experimento de enseñanza, se realizó un análisis intercalado con las experimentaciones, lo que permitió ajustar cada actividad, y refinar algunos aspectos de los futuros talleres que, por la experiencia con los estudiantes, se podía predecir que resultarían ambiguas, poco claras, etc. Así mismo, como lo indica la metodología de esta investigación, se fue refinando la conjetura del experimento de enseñanza.

5.1.1. Descripción del taller 1

El primer taller explora la variación directa e inversa mediante la modelación de la carga de la batería de un teléfono móvil. La actividad de *información y exploración libre* plantea a los estudiantes cierta información básica y preguntas sobre el funcionamiento de las baterías y el proceso de carga de las mismas.

Por tanto, se espera que los estudiantes descubran y comprendan que la capacidad de almacenamiento de las baterías recargables se expresa en miliamperios-hora mAh o amperios-hora (Ah), dependiendo del tamaño y uso del dispositivo. También, que las baterías están compuestas por tres partes fundamentales: el ánodo (polo negativo), el cátodo (polo positivo) y el electrolito (conductor). Los estudiantes pueden encontrar que en las baterías de litio, que son las más utilizadas actualmente, el ánodo suele estar hecho de grafito, mientras que el cátodo está formado por compuestos metálicos que contienen litio, como el óxido de litio-cobalto o el óxido de litio-níquel-manganeso-cobalto. También, pueden reconocer que el electrolito, por su parte, es una solución de sales de litio disueltas en solventes orgánicos, cuya función es permitir el paso de los iones de litio entre ambos electrodos. Los estudiantes pueden explorar que estos materiales determinan factores clave como la densidad energética, la velocidad de carga y descarga, la durabilidad y la estabilidad térmica de la batería.

Así mismo, se orienta a los estudiantes para que exploren que el proceso de carga de una batería se realiza mediante un proceso llamado oxidación reducción; en el cual el ánodo se encarga de la oxidación y libera electrones, mientras que el cátodo es el receptor de esos electrones a través de la reacción de reducción. Así mismo, pueden encontrar que el electrolito es un material que actúa como puente, permitiendo el paso de iones (átomos con carga) entre los dos electrodos para completar el circuito y así generar la corriente eléctrica utilizable.

Esta información, aunque de carácter técnico, e incluso científico, permite comprender de manera integral el mecanismo subyacente en el proceso de carga de baterías. Esto facilita una mejor comprensión del contexto del problema planteado y proporciona una base sólida para explicarlo con mayor precisión y claridad. Además, con esta actividad, se desarrolla la primera fase del ciclo de modelación de Berrío et al. (2021) que consiste en conocer y explorar el contexto de la situación problema.

Para culminar esta actividad inicial, se propone a los estudiantes que compartan y discutan sus respuestas con sus compañeros y el profesor, formulando conclusiones que servirán de base para el desarrollo del taller. Esta última tarea se propone en diferentes momentos de toda la secuencia de enseñanza, ya que, como indican Fiallo y Parada (2018), esto promueve el desarrollo de habilidades comunicativas, pues el intercambio de ideas entre los estudiantes y su análisis reflexivo fortalecen su capacidad para argumentar, y para cuestionar y comprender las ideas de los demás.

Figura 15

Actividad de información y exploración libre del taller 1

Taller 1: carga de la batería del teléfono

Actividad 1. Información y exploración libre

Las baterías recargables son un componente esencial en los dispositivos electrónicos modernos, especialmente en los teléfonos móviles, que utilizamos a diario. La carga y descarga de una batería son procesos fundamentales que involucran reacciones químicas complejas, influenciadas por factores como la calidad del material, el uso cotidiano y las condiciones externas. Entender cómo funcionan las baterías, analizar el comportamiento de su carga, y qué aspectos determinan su rendimiento es crucial no solo para prolongar su vida útil, sino también para tomar decisiones informadas al elegir dispositivos. A continuación, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué unidades de medida se utilizan para expresar la capacidad de una batería?
b) ¿De qué materiales están compuestas las baterías? ¿cómo almacenan energía? ¿Cómo funciona el proceso de carga de un teléfono?
c) ¿Cómo se mide el porcentaje de carga de una batería? ¿Qué significa realmente que un dispositivo tenga "50% de carga"?
d) Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

Luego, en la primera parte de la exploración dirigida, se propone la experimentación y recolección de datos, en la cual se lleva a cabo el experimento de carga del teléfono, así como un registro tabular y gráfico de los datos emergentes en dicha situación. Para ello, se debe contar con un teléfono móvil completamente descargado y, tras conectarlo a una fuente de energía, registrar el tiempo transcurrido junto con el porcentaje de carga en intervalos determinados. Posteriormente, organizan la información en una tabla y elaboran un bosquejo gráfico que represente el comportamiento de la carga en función del tiempo; esto último con el fin de que los estudiantes empiecen a exhibir comportamientos propios de razonamiento covariacional. Con esta actividad, se desarrollan las fases *recolección y clasificación de datos* y *registro gráfico*, del ciclo de modelación propuesto por Berrío et al. (2021).

Figura 16

Actividad de recolección y análisis de datos del taller 1

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

a) Realiza el siguiente experimento: deja descargar tu teléfono hasta el 0%; luego, conéctalo a una fuente de energía e inmediatamente, con otro teléfono, empieza a cronometrar el tiempo.

b) En una tabla, registra al menos diez valores sobre el porcentaje de carga del teléfono en relación con el tiempo.

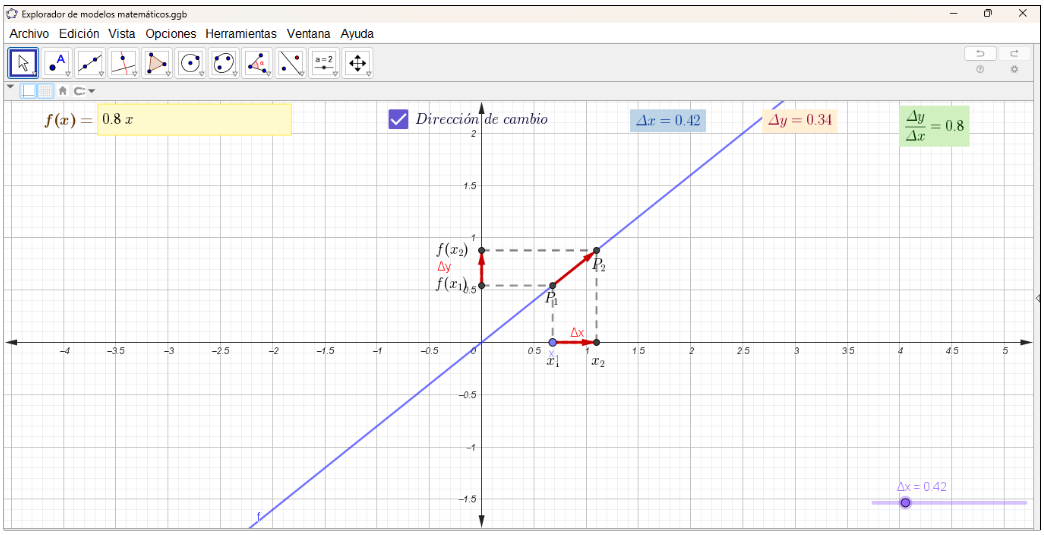
c) Realiza un bosquejo de la gráfica que representa de mejor manera el fenómeno de la carga del teléfono en relación con el tiempo. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente

d) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

La segunda parte de la exploración dirigida, denominada formulación y validación del modelo, tiene por objetivo que los estudiantes formulen el modelo matemático a través de diferentes representaciones (tabular, gráfica, algebraica) con el uso de la herramienta *Análisis de regresión de dos variables* de la hoja de cálculo de GeoGebra. Luego, se orienta a los estudiantes para que interpreten dicho modelo a través de un applet programado en GeoGebra, de modo que, realicen su validación desde un enfoque covariacional.

Figura 17

Applet de GeoGebra para explorar modelos matemáticos



Es decir, se presenta el applet como una herramienta para que los estudiantes observen e interpreten la asignación de variables a los ejes del plano cartesiano, la dirección de cambio de las variables y de la función en general, las cantidades de cambio y la razón entre dichas cantidades de cambio. Todo esto orientado por una serie de preguntas. Por ejemplo, la pregunta b) de esta actividad pretende que lo estudiantes manifiesten de manera explícita el reconocimiento de las variables de la situación y las posibles relaciones de interdependencia que se pueden establecer entre ellas. Como señalan Castro y Forero (2019), un comportamiento asociado a la AM1 consiste en identificar qué cambia en el problema y qué relaciones de dependencia existen entre tales variables.

Figura 18

Actividad de formulación y validación del modelo del taller 1

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar el modelo que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica** tu elección

b) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Qué valores puede tomar cada una de ellas? ¿existe una relación de interdependencia entre ellas? **¿por qué?**

c) ¿Cómo se comportan los valores del porcentaje de carga con respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta

d) Describe la dirección de cambio de la variable independiente, de la variable dependiente y de la función f en general.

e) Compara la gráfica que bosquejaste en el ítem *c* de la actividad 2.1 y describe sus similitudes o diferencias.

f) ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica, la gráfica y la tabla? ¿Qué representan? **Justifica** tus respuestas.

g) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2.

h) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy en los diferentes intervalos de igual amplitud Δx. Escribe las expresiones algebraicas con las que se calculan estos valores. **Explica** tu respuesta

i) ¿Qué valores toma el cociente (razón) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores de x_1? ¿por qué? ¿Qué representa dicho cociente?

j) Halla la pendiente de la recta que representa a la función $f(x)$ ¿Qué representa dicha pendiente? ¿Qué relación tiene con el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? **Explica** tu respuesta.

k) ¿Cuál es la velocidad de carga del teléfono? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta y la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Describe la velocidad de la carga del teléfono de manera general. **Justifica** tus respuestas.

l) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

El taller finaliza con la actividad 3, tarea retadora, en la que se propone a los estudiantes una nueva situación, con el objetivo de institucionalizar sus ideas matemáticas adquiridas hasta el momento sobre la variación directa e inversa. Se proponen diferentes preguntas, con el fin de que los estudiantes consoliden sus conocimientos sobre cuándo dos variables son directa e inversamente proporcionales y cuándo no; así como las características principales sobre la variación que presentan dichas relaciones. Además, se espera que los estudiantes puedan describir tales tipos de variación a partir de su dirección de cambio, las cantidades de cambio y la razón entre tales cantidades de cambio. Finalmente, se pide a los estudiantes que escriban una conclusión general sobre sus aprendizajes adquiridos con la realización del taller.

Figura 19

Tarea retadora del taller 1

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y responde las preguntas a continuación:

$$f(x) = 3x; \qquad g(x) = 5x + 3; \qquad h(x) = \frac{3}{x}$$

a) Describe la variación que presenta cada una de las tres funciones. ¿Cómo se llaman estos tipos de variación? **Explica**

b) ¿Qué sucede cuando se dividen los valores de $f(x)$ entre los valores de x correspondientes? **¿Por qué?**

c) ¿Qué sucede cuando se multiplican los valores de $h(x)$ entre los valores de x correspondientes? **¿Por qué?**

d) ¿Podría decirse que la función g representa una relación entre variables directamente proporcionales? **¿Por qué?**

e) ¿Qué diferencias o similitudes puedes establecer entre cada una de las funciones? **Explica**

f) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

5.1.2. Descripción del taller 2

El segundo taller estuvo enfocado en el estudio de la variación acelerada y desacelerada, a través de la modelación de la descarga de un archivo desde la web. En la primera actividad, de información y exploración libre, se proponen preguntas para que los estudiantes descubran que las unidades de medida de los archivos digitales incluyen bytes, kilobytes, megabytes y gigabytes; identifiquen que la velocidad de descarga está influida por factores como el ancho de banda de la conexión, la capacidad del servidor y la congestión de la red; comprendan que la velocidad promedio corresponde a una razón entre el tamaño del archivo y el tiempo de descarga; y, conozcan que el almacenamiento y la transferencia de datos en la nube se realizan mediante servidores remotos que permiten el acceso, sincronización y resguardo de la información.

Figura 20

Actividad de información y exploración libre del taller 2

Taller 2: descarga de un archivo

Actividad 1. Información y exploración libre

En la era digital, la transferencia de información se ha convertido en una necesidad cotidiana que conecta personas, negocios y sistemas en todo el mundo. Descargar un archivo desde la web es un proceso común que permite acceder a datos, programas y recursos desde cualquier lugar. Este proceso está regido por diversos factores, como la velocidad de la conexión a internet, el tamaño del archivo y la eficiencia de los protocolos de transferencia. A continuación, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué unidades de medida se utilizan para medir el tamaño de los archivos electrónicos?
b) ¿Qué factores influyen en la velocidad de descarga de un archivo desde internet?
c) Si se conoce el tamaño del archivo y el tiempo de descarga, ¿cómo podríamos determinar la velocidad promedio de descarga?
d) Cuando subimos un archivo a la nube o lo transferimos a otro dispositivo por medio de internet, ¿dónde se almacenan realmente esos datos? ¿Cómo viajan desde nuestro dispositivo hasta su destino y qué procesos ocurren en el camino?
e) Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

Luego, se propone la actividad de recolección y análisis de datos, en la que los estudiantes tienen que acceder a una página web (*https://fernando-uis.github.io/arch/DownloadSimulator.html)* que simula la descarga de un archivo desde internet. A partir de dicho simulador, los estudiantes realizan el experimento de descarga de un archivo y la toma de datos con distintos valores numéricos para las variables tiempo y tamaño descargado del archivo. También, realizan un primer registro gráfico de los datos. La barra verde que muestra el tamaño del archivo descargado se incluyó dentro de la programación de la página web con la intensión de que los estudiantes puedan apreciar de manera visual la velocidad de descarga del archivo; y, a partir de ello, tengan información sobre el tipo de variación que presenta esta situación.

Figura 21

Actividad de recolección y análisis de datos del taller 2

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

a) En el siguiente enlace se presenta la simulación de descarga de un archivo desde la web. Ábrelo y explora la situación. https://fernando-uis.github.io/arch/DownloadSimulator.html

b) En una tabla, registra al menos diez datos del tamaño del archivo descargado en relación con el tiempo.

c) Realiza el bosquejo de la gráfica que represente de mejor manera los datos recolectados previamente. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente

Posteriormente, se presenta a los estudiantes la actividad 2.2. con la que se espera que exploren diferentes modelos matemáticos, para representar la situación abordada; a partir de preguntas orientadoras y el uso de GeoGebra. También, se presentan de manera explícita los conceptos de recta secante y recta tangente, así como el valor de sus pendientes. Estos conceptos se invisibilizaron en cierta medida en el taller anterior, ya que la recta tangente a la gráfica de una función lineal coincide con la representación gráfica de la función misma, al igual que con cualquier recta secante entre dos puntos de la función. Así, la variación directa puede obstaculizar que los estudiantes comprendan el sentido de aproximación a la recta tangente por medio de la recta secante; por lo que estudiar funciones con variación acelerada y desacelerada permiten hacer más visibles y significativas estas nociones, dada la curvatura de sus representaciones gráficas.

Figura 22

Actividad de formulación y validación del modelo del taller 2

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajusta a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Qué valores puede tomar cada una de ellas? ¿existe una relación de interdependencia entre ellas? **¿por qué?**

c) ¿Cómo se comportan los valores del tamaño del archivo con respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta

d) Compara la gráfica que bosquejaste en el ítem c de la actividad 2.1 y describe sus similitudes o diferencias.

e) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2.

f) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy para diferentes intervalos con la misma amplitud Δx.

g) ¿Qué relación encuentras entre el signo de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la dirección de cambio de la función?

h) ¿Qué valores toma la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alrededor del punto más bajo de la función? ¿A qué tiende la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x_1 tiende a infinito?

i) Traza una recta que pase por los puntos P_1 y P_2. Luego, con la herramienta *Tangentes,* dibuja la recta tangente a la curva en el punto P_1. Qué sucede con estas dos rectas a medida que Δx tiende a cero?

j) Con la herramienta *Pendiente* mide las pendientes de las dos rectas dibujadas anteriormente. Completa la siguiente tabla para diferentes valores de x_1 y con $\Delta x = 0.05$.

x_1	**Pendiente de la recta tangente**	**Pendiente de la recta secante**	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

k) ¿Qué observas entre los valores de la segunda, tercer y cuarta columna de la tabla anterior? Escribe una expresión algebraica que te permita calcular la pendiente de la recta tangente a función en el punto P_1 a partir de los resultados anteriores. **Explica y justifica** ampliamente tus respuestas.

l) ¿Cómo es el comportamiento de la recta tangente y de su pendiente a medida que x tiende a infinito? **Justifica** tu respuesta.

m) ¿Aproximadamente con qué rapidez cambia el tamaño del archivo alrededor de los 10 segundos? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta tangente? Describe la velocidad de descarga del archivo de manera general. **Justifica** tus respuestas.

n) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

En la tarea retadora, se espera que los estudiantes puedan caracterizar la variación de tres funciones diferentes, en términos de su dirección de cambio, su razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, entre otros aspectos. Al explorar, por medio del applet presentado en la figura 5, la variación de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = Ln(x)$ los estudiantes descubren que, a pesar de que todas ellas son crecientes, la razón de cambio de las funciones g y h se hace más pequeña, a medida que la variable de entrada se hace más grande; mientras que la razón de cambio de la función f se hace cada vez más grande. En otras palabras, logran diferenciar, caracterizar y conceptualizar la variación acelerada y desacelerada de las funciones.

Figura 23

Actividad retadora del taller 2

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y responde las preguntas a continuación:

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = Ln(x)$$

a) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada función? **¿Por qué?**

b) Analiza la dirección de cambio y la razón de cambio promedio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ para cada una de las funciones. A Partir de lo anterior, describe cómo varía cada función y compara sus diferencias y similitudes. **Explica ampliamente**

c) De acuerdo con lo explorado en la pregunta anterior, ¿qué nombre recibe cada tipo de variación que presentan las funciones? **Explica ampliamente**

d) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

5.1.3. Descripción del taller 3

El tercer taller se centró en el estudio de la variación convergente, a partir de la modelación de dos situaciones relacionadas con el descenso de la temperatura de un cuerpo u objeto, las cuales implican implícitamente la ley de enfriamiento de Newton. En la actividad de información y exploración libre se espera que los estudiantes comprendan el concepto de temperatura, así como sus principales unidades de medida, como grados Celsius y Fahrenheit. También, se exploran diferentes instrumentos de medida según el contexto (industrial, científico, culinario, etc.) incluyendo termómetros digitales, de mercurio, infrarrojos, termopares y pirómetros, junto con una exploración básica de su funcionamiento. Así mismo, se incluye una pregunta para que los estudiantes reflexionen sobre un aspecto cotidiano, identificar el momento adecuado para consumir una bebida; esto con el fin de observar si, de manera espontánea, recurren a nociones o herramientas matemáticas en su pensamiento.

Figura 24

Actividad de información y exploración libre del taller 3

Taller 3: Ley de enfriamiento de Newton

Actividad 1. Información y exploración libre

La temperatura es una medida que nos permite saber qué tan caliente o frío está un objeto o un ambiente. Surgió como una necesidad para entender y controlar los cambios que ocurren en nuestro entorno, como el clima, la cocción de los alimentos o el funcionamiento de máquinas. Medir la temperatura ha permitido comprender y controlar estos fenómenos, estableciendo escalas y métodos que garantizan precisión y uniformidad, fundamentales para el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la vida diaria. A continuación, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué unidades de medida conoces para expresar la temperatura? ¿cuál es la más utilizada y por qué crees que es así?

b) ¿Qué instrumentos conoces para la medición de la temperatura?

c) ¿De qué manera podrías predecir el momento en el cual tu café está a la temperatura ideal para tomarlo?

d) Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

La siguiente es la actividad 2.1, de exploración dirigida, en la que se propone a los estudiantes la observación de un experimento realizado por el profesor, quien calentará una bebida hasta alcanzar una temperatura considerable y luego la dejará enfriar a temperatura ambiente. Debido a los posibles riesgos asociados con el manejo de líquidos calientes, se sugiere que el profesor sea quien lleve a cabo el experimento, mientras que la toma de datos (tiempo y temperatura en intervalos regulares) se realice colectivamente. A partir de las observaciones, se espera que cada estudiante elabore un bosquejo de la gráfica que represente la covariación entre la temperatura y el tiempo, explicando detalladamente el procedimiento seguido y los resultados obtenidos.

Figura 25

Actividad de recolección y análisis de datos del taller 3

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

a) A continuación, el profesor realizará un experimento en el que calentará una bebida hasta alcanzar una temperatura elevada y luego la dejará enfriar. Observa con atención y registra el tiempo transcurrido y la temperatura de la bebida cada vez que se realice una medición.

b) Realiza el bosquejo de la gráfica que represente de mejor manera la situación anterior. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente

c) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Posteriormente, se propone a los estudiantes la actividad de formulación y validación del modelo, donde se les orienta para que exploren diferentes modelos en GeoGebra y establezcan criterios para la postulación del más adecuado. A diferencia de los dos talleres anteriores, ya no se les interroga por separado sobre aspectos como el comportamiento y la dirección de cambio de las variables, las cantidades de cambio o la razón de cambio promedio. En su lugar, se les solicita una descripción global y detallada del modelo matemático en términos de estos aspectos, lo cual promueve un análisis e interpretación del modelo desde una perspectiva covariacional.

Figura 26

Actividad de formulación y validación del modelo del taller 3

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) ¿Qué representa cada punto punto (x, y) sobre la gráfica?

c) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem a de la actividad 2.2.

d) Escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático encontrado anteriormente, en términos de las variables involucradas, el comportamiento de dichas variables, la dirección de cambio de cada una de las variables y de la función en general, el comportamiento de las cantidades de cambio, el comportamiento de la razón de cambio promedio, entre otros aspectos.

e) Describe ampliamente el comportamiento de las rectas tangente y secante, y el de cada una de sus pendientes a lo largo del dominio. Explica la relación existente entre ambas rectas, así como la información que ofrecen acerca del comportamiento de la función en general.

f) Explica cómo sería el comportamiento de la velocidad de enfriamiento de la bebida a lo largo del tiempo; representa gráficamente esta situación.

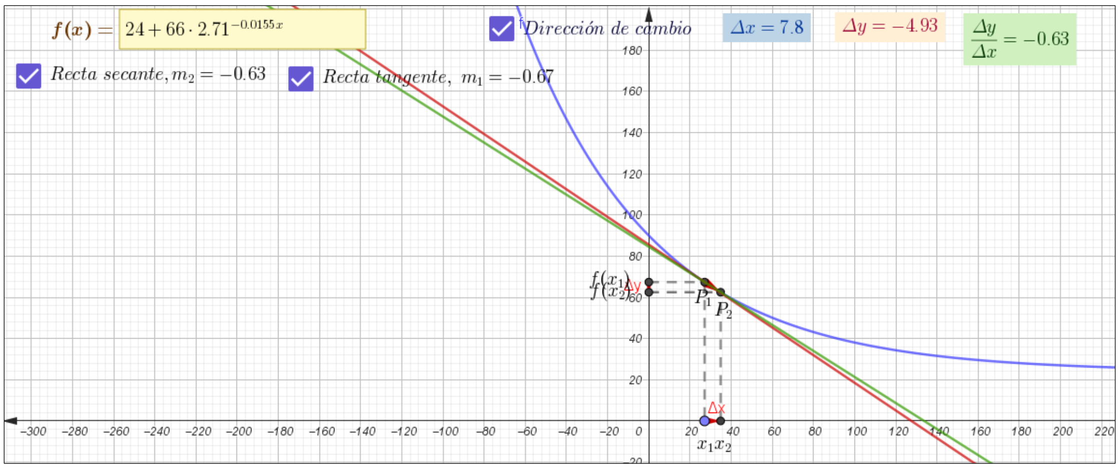
g) ¿En qué instante la bebida tendrá una temperatura ideal para tomarla? **Explica** tu respuesta.

h) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Otra diferencia de este taller con respecto al anterior es que se omitieron las tareas de construcción de las rectas secantes y tangentes, así como la medición de sus pendientes con las herramientas de GeoGebra. En su lugar, estos objetos han sido incluidas en una nueva versión del applet para explorar los modelos matemáticos, con el fin de optimizar el tiempo y centrar la atención en la interpretación del modelo, dado que los estudiantes ya conocieron su construcción en el taller anterior. Estos nuevos objetos se pueden ocultar o visibilizar por medio de dos botones incluidos en el applet. A partir de estos elementos, se espera que describan detalladamente el comportamiento de dichas rectas, la variación de sus pendientes a lo largo del dominio y la relación entre ambas, así como su relación con el comportamiento general de la función y la velocidad de enfriamiento de la bebida.

Figura 27

Versión ajustada del applet para explorar modelos



En la tarea retadora se presenta explícitamente la ley de enfriamiento de Newton como modelo matemático ya establecido para describir la temperatura de un objeto en función del tiempo. A partir de esta ley y una situación en el contexto forense, los estudiantes deben aplicar el modelo para calcular parámetros, interpretar su significado y comparar esta expresión algebraica con la obtenida previamente en la situación de la bebida caliente. Así, se busca que reconozcan la relación entre el modelo teórico y el encontrado empíricamente, consolidando su comprensión del mismo.

Figura 28

Tarea retadora del taller 3

Actividad 3. Tarea retadora

Si un objeto o cuerpo con temperatura inicial T_0 se coloca en un medio que mantiene su temperatura constante T_m, la *ley de enfriamiento de Newton* establece que la temperatura T del objeto en el instante t está dada por $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$. A partir de esta información, desarrolla los siguientes ítems.

a) Un agente forense llega a una escena del crimen y encuentra un cuerpo en el piso de una habitación. Seguidamente, procede a medir la temperatura ambiente y la temperatura del cadáver, obteniendo valores de 22,8°C y 35°C respectivamente. 10 minutos después, volvió a medir la temperatura del cadáver y encontró que era de 32°C. Encuentra un modelo matemático que te permita expresar la temperatura en función del tiempo para la situación dada. **Explica** tu procedimiento

b) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la defunción de la persona hasta el momento en que llegó el agente forense?

c) Describe ampliamente el modelo encontrado, en términos de su dirección de cambio, su variación, su pertinencia para el problema, etc.

d) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

5.1.4. Descripción del taller 4

El cuarto taller abordó el estudio de la variación cíclica a través de la modelación de una situación que reproduce el comportamiento de la iluminancia en un simulador de lámpara intermitente, es decir, una lámpara que se enciende y se apaga de manera repetitiva en intervalos regulares de tiempo. El concepto de iluminancia ($lux = lumens/m^2$) puede llegar a confundirse con otros conceptos como luminancia ($candelas/m^2$), intensidad luminosa ($candelas$) y flujo luminoso ($lumens$). Por ello, es importante que, en primera instancia, los estudiantes se familiaricen con el concepto y su presencia en la cotidianidad, conozcan que su principal unidad de medida es $lux = lumens/m^2$; y, que algunos instrumentos para su medición son el luxómetro y el fotómetro. Las preguntas orientadoras de la actividad 1 han sido diseñadas con ese propósito.

Figura 29

Actividad de información y exploración libre del taller 4

Taller 4: Iluminancia

Actividad 1. Información y exploración libre

La *iluminancia* es una medida que cuantifica la cantidad de luz que incide en una superficie por unidad de área, indicando "qué tan fuerte es la luz" que llega a una superficie. A continuación, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué instrumentos son utilizados para medir la iluminancia?

b) ¿Qué unidades se emplean para medir la iluminancia?

c) Para diseñar ambientes visualmente cómodos, es necesario tener en cuenta la intensidad de luz presente en tales lugares, ya que un nivel alto puede causar fatiga visual y deslumbramiento. ¿Cuáles son los niveles de iluminancia recomendados para ambientes visualmente cómodos?

d) Discute tus respuestas con el profesor y los demás compañeros. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

En la actividad de recolección y análisis de datos se propone el experimento con el simulador antes mencionado. Para ello, los estudiantes deben acceder al enlace *https://fernando-uis.github.io/Calculus/FlashingLampSimulator.html*, donde encontrarán una "lámpara" programada para funcionar mediante la emisión de luz desde la pantalla del computador. El simulador utiliza cambios controlados en el color y brillo de la pantalla para simular el parpadeo de una lámpara. Este comportamiento se ha obtenido mediante un código de programación que manipula dinámicamente el contenido visual de la pantalla, a través del entorno de desarrollo web *HTML*. No se requiere hardware adicional, ya que todo el efecto se genera a través del dispositivo de salida visual (monitor).

Para recolectar los datos, se sugiere el uso de un cronómetro y un luxómetro. Sin embargo, dado que estos instrumentos suelen estar disponibles solo en laboratorios de física avanzada, se recomienda utilizar, para fines didácticos, la aplicación *Lux Meter* como alternativa accesible en el aula. *Lux Meter* es una aplicación profesional para medir la intensidad luminosa y calcular la exposición adecuada en fotografía, cine, jardinería y diseño de iluminación. Utiliza el sensor de luz del dispositivo y las cámaras frontal o trasera para ofrecer mediciones precisas en tiempo real. La aplicación es también precisa y confiable, pues ha sido precalibrada para coincidir con tres fotómetros profesionales, con función de calibración incorporada para ajustes específicos del dispositivo.

Figura 30

Actividad de recolección y análisis de datos del taller 4

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

a) En el siguiente enlace se presenta la simulación de una lámpara intermitente. Ábrelo y explora la situación *https://fernando-uis.github.io/Calculus/FlashingLampSimulator.html*

b) Utiliza un luxómetro y un cronómetro para medir cómo cambia la iluminancia con el tiempo en el simulador anterior. Registra al menos 15 valores en una tabla.

c) Realiza el bosquejo de una gráfica que represente de mejor manera la situación anterior. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

Luego, se desarrolla la actividad de formulación y validación del modelo como se ha hecho en los talleres anteriores, usando la hoja de cálculo de GeoGebra y la herramienta análisis de regresión de dos variables. Dado el comportamiento cíclico que presenta la interdependencia entre las variables involucradas en esta situación, en esta misma actividad se incluye la pregunta *c)* que orienta al estudiante a analizar los puntos máximos y mínimos del modelo matemático a partir de la razón de cambio promedio, y, por tanto, a través de la coordinación de las cantidades de cambio, para diferentes valores en la variable de entrada.

Figura 31

Actividad formulación y validación del modelo del taller 4

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) En el siguiente applet, introduce en la barra de entrada la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem a de la actividad 2.2. Luego, escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático, en términos de las variables involucradas, el comportamiento de dichas variables, la dirección de cambio de cada una de las variables y de la función en general, el comportamiento de las cantidades de cambio Δy y Δx, el comportamiento de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a lo largo del dominio, entre otros aspectos.

c) ¿En qué instantes x_1 se presenta la mayor y la menor iluminancia y qué valores toma la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en dichos instantes x_1, si $\Delta x = 0.05$? **Explica** ampliamente.

d) Discute tus respuestas con el profesor y los demás compañeros. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

En la tarea retadora, se propone a los estudiantes interpretar y describir, en términos covariacionales, las funciones coseno y tangente, pues, en la actividad anterior, han descrito una función en términos del seno, que ofrece GeoGebra como modelo para la situación de la iluminancia. Con esta actividad se espera analizar y conceptualizar el carácter cíclico que presentan estas funciones, desde un enfoque covariacional. Para ello, se propone que hagan uso del applet para explorar los modelos matemáticos.

Figura 32

Tarea retadora del taller 4

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y desarrolla los ítems a continuación:

$$f(x) = Cos(x) \qquad g(x) = Tan(x)$$

a) Realiza una descripción de cada función, teniendo en cuenta su dominio, rango, dirección de cambio, la razón de cambio promedio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ y variación. **Explica ampliamente**

b) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

5.1.5. Descripción del taller 5

El taller 5, último de la secuencia de enseñanza, se centra en el estudio de la variación escalonada a través de una situación sobre tarifas de estacionamiento, en un centro comercial de la ciudad de Bucaramanga. Por ello, para iniciar el taller, en la actividad de información y exploración libre se presenta a los estudiantes un simulador de un cajero automático o máquina expendedora de tiquetes (*https://fernando-uis.github.io/Sim/ParkingTicket.html*), cuya función es emitir un recibo con la información del horario de entrada y el costo a pagar por el estacionamiento de un vehículo. Con esta actividad se busca que los estudiantes reconozcan las diferentes situaciones que pueden presentarse al pagar una tarifa de estacionamiento, y cómo esta varía dependiendo de factores como el horario, día de la semana, descuentos por consumos en el centro comercial, tipo de vehículo (automóvil o motocicleta), entre otros.

Figura 33

Actividad de información y exploración libre del taller 5

Taller 5: tarifa de estacionamiento

Actividad 1. Información y exploración libre

En el *Centro Comercial Cacique,* en Bucaramanga, se presta el servicio de parqueadero a sus clientes, para facilitar la movilidad de los visitantes mientras realizan sus compras, disfrutan de la oferta gastronómica o participan en actividades de entretenimiento dentro del centro comercial.

a) Abre el siguiente enlace y describe lo que observas allí: *https://fernando-uis.github.io/Sim/ParkingTicket.html*.

b) ¿Qué factores influyen en el costo de estacionamiento de un vehículo en el centro comercial? Explica

c) Escribe una conclusión en la que expliques cómo funcionan las tarifas de estacionamiento en un parqueadero de manera general.

d) Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. Escribe tus conclusiones.

En la actividad 2.1, al igual que en los demás talleres, se propone a los estudiantes realizar un registro de datos. Sin embargo, en esta ocasión los datos no se obtendrán de un experimento, sino a partir de información proporcionada en una cartelera sobre los distintos costos de estacionamiento. Se ha seleccionado un caso para la tarifa de estacionamiento de entre varias opciones disponibles. Así, en lugar de realizar mediciones de variables como en los talleres anteriores, los estudiantes deberán interpretar la información suministrada y realizar cálculos numéricos para realizar el registro tabular de los datos.

Figura 34

Actividad de recolección y análisis de datos del taller 5

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

Dentro del parqueadero del *Centro Comercial Cacique* se encuentran carteles como el que se proporciona a continuación. A partir de la información de la cartelera, desarrolla los dos siguientes ítems:

Tarifas de cobro de estacionamiento

1. Estadía inferior a 15 minutos no genera cobro de estacionamiento
2. Para motocicletas, valor de hora o fracción $1.500 de lunes a jueves. De viernes a domingo y festivos valor hora o fracción $1.800
3. Para carros, valor de hora o fracción $2.900 de lunes a jueves. De viernes a domingo y festivos valor hora o fracción $3.300
4. Por compras iguales o superiores a $50.000 en los establecimientos de comercio *Falabella* y *Éxito* se conceden dos horas de estacionamiento gratuitas no acumulables. Cine Colombia regala 4 horas de estacionamiento por entrar a ver una película.
5. Valor por noche de estacionamiento $54.000
6. El parqueadero para bicicletas es gratuito.

Cacique
el centro comercial

a) Realiza un bosquejo de la gráfica que represente la tarifa de estacionamiento para el caso en que el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tiendas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

b) Registra en una tabla al menos diez datos sobre el costo de estacionamiento para el caso anterior, es decir, cuando el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tiendas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

En la actividad de formulación y validación de modelos, se orienta a los estudiantes a representar algebraicamente la situación planteada, pero, a diferencia de los talleres anteriores, no se utilizará la herramienta *Análisis de regresión de dos variables* de GeoGebra. En su lugar, se espera que los estudiantes realicen dicha representación a partir de sus propios razonamientos y cálculos, utilizando lápiz y papel. Lo anterior se debe a que GeoGebra no ofrece modelos matemáticos para representar la variación escalonada. No obstante, es posible que los estudiantes no estén familiarizados con la notación de la función parte entera, como la función techo o la función piso, por lo que se espera que los definan a través de funciones por partes, en intervalos de tiempo. Por ello, este podría ser un buen momento para introducir y explicar estas notaciones en la clase. Además, orienta a los estudiantes a que describan sus modelos matemáticos desde el enfoque covariacional.

Figura 35

Actividad de formulación y validación del modelo del taller 5

2.2. Formulación y validación del modelo

a) Representa algebraicamente la interdependencia entre el costo de estacionamiento y el tiempo para el caso considerado anteriormente, es decir, cuando el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tientas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

b) En el applet *Explorador de modelos* introduce en la barra de entrada la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2. Luego, escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático.

c) ¿A qué tiende la función cuando el tiempo se aproxima a cada valor entero? **Justifica** tu respuesta.

d) ¿A qué tiende la función cuando el tiempo tiende a infinito? **Justifica** tu respuesta.

e) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Finalmente, en la actividad 3 se plantea como tarea retadora a los estudiantes encontrar un nuevo modelo matemático, en el mismo contexto, pero para otro caso de tarifa de estacionamiento. En ella se espera que, a través de la resolución de un problema, utilicen lo aprendido, ejerciten el uso de la notación parte entera y demás conocimientos conceptuales y procedimentales adquiridos con el desarrollo de este taller.

Figura 36

Tarea retadora del taller 5

Actividad 3. Tarea retadora

Teniendo en cuenta la cartelera expuesta en el parqueadero del *Centro Comercial Cacique*, considera el caso en el que el vehículo es un carro que se estacionó un miércoles y su propietario ha hecho compras superiores a $50.000 dentro del almacén *Éxito*.

a) ¿Cuánto deberá pagar el propietario por el estacionamiento de su vehículo, si estuvo parqueado 2 horas? ¿Si estuvo parqueado 3 horas? ¿Si estuvo parqueado 5 horas? **Explica** tus respuestas.

b) Encuentra un modelo matemático que represente la situación considerada anteriormente. Descríbelo teniendo en cuenta el tipo de variación y demás características. **Explica** tu respuesta.

5.2. Caracterización de comportamientos asociados a las acciones mentales

El principal objetivo de este trabajo de investigación consistió en caracterizar los comportamientos, asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional, que exhiben estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y con la mediación de GeoGebra.

Con el propósito de generar información y, a partir de ella, seleccionar los datos necesarios para alcanzar el objetivo planteado, se implementó la secuencia de enseñanza previamente descrita. Cada taller requirió cuatro horas de clase para su desarrollo. En un principio, se había previsto realizar el experimento de enseñanza en un aula equipada con tecnología. No obstante, al no disponer de dichos recursos, este se llevó a cabo en un aula convencional que solo contaba con un par de televisores y un computador para el profesor. Debido a esta limitación, cada estudiante tuvo que utilizar su propio dispositivo, como tabletas, computadores portátiles o, incluso, teléfonos inteligentes. Esta situación evidencia una fortaleza del presente trabajo: se demuestra que es posible incorporar recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, en un aula regular y superar obstáculos como la ausencia de una sala de cómputo en la institución.

A continuación, se describen e ilustran algunos de los comportamientos más comunes entre los estudiantes al desarrollar la secuencia de enseñanza y que están asociadas a las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional propuestas por Carlson et al. (2002). Estos resultados se obtuvieron tras realizar un análisis retrospectivo de tales experiencias.

5.2.1. Comportamientos asociados a AM1

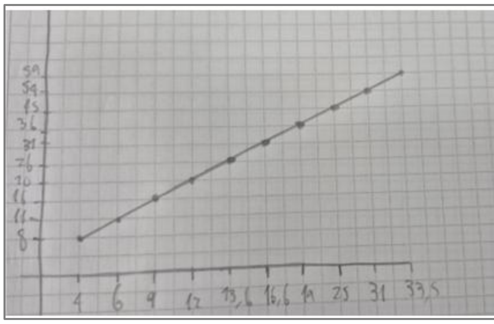
A través del análisis de las respuestas y de los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes, al elaborar e interpretar los distintos modelos matemáticos en cada situación, se puede identificar que la totalidad de los participantes manifestó algún comportamiento propio de AM1. En términos de los niveles de razonamiento, podría afirmarse que todos los estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza alcanzaron el nivel 1.

Por ejemplo, al abordar la variación directa e inversa, en el contexto de la carga del teléfono, taller 1, al realizar manualmente un registro gráfico que representa la carga de la batería del teléfono en función del tiempo, se observa que los estudiantes identificaron las variables involucradas en la situación (tiempo y porcentaje de carga) y asignaron los ejes del plano cartesiano a dichas variables. Por otra parte, otros estudiantes realizaron el bosquejo de la gráfica sin asignar las variables a los ejes; sin embargo, al preguntarles sobre las variables involucradas en el problema, las identificaron y les asignaron de forma explícita las etiquetas x e y, además determinaron una relación de interdependencia entre ellas.

Por tanto, aunque algunos estudiantes no señalen de forma explícita las variables en la gráfica, no significa que no coordinen el valor de una variable con los cambios en la otra. La figura 37 es un ejemplo de lo expresado anteriormente. Sobre este mismo particular, Castro y Forero (2019) indican que "la designación de los ejes se puede dar de manera rutinaria o algorítmica y no implica la comprensión de las representaciones gráficas. Las indicaciones verbales de la coordinación pueden dar información al respecto.” (p. 24). Esto es justo lo que se observa con el ejemplo de la figura 37.

Figura 37

Identificación de variables y relación de interdependencia



“Las magnitudes variables son el tiempo de carga (x) y el porcentaje de carga (y). Efectivamente existe una relación de interdependencia ya que siempre que el tiempo de carga aumenta, también lo hará el porcentaje de carga.”

En este mismo contexto, como se observa en la siguiente figura, la asignación de los ejes del plano cartesiano a las variables no fue la misma para todos los estudiantes. Sin embargo, aunque los estudiantes podían tomar cualquiera de las dos variables como independiente, lo más común, tal vez por el contexto del problema, fue tomar como variable independiente al tiempo y como variable dependiente al porcentaje de carga.

Figura 38

Asignación invertida de ejes a las variables

Al comparar las dos gráficas puedo observar que las dos son lineales solo que las variables del bosquejo que realicé están invertidas, es decir en mi bosquejo el porcentaje esta en el eje x y el tiempo en el eje y, mientras que en la grafica encontrada en la actividad 2.2 el tiempo está en el eje x y el porcentaje en el eje y.

Así mismo, otros comportamientos asociados a la AM1, al estudiar la variación directe e inversa, consistieron en expresar la relación entre las variables, indicando que cuando una aumenta, la otra también lo hace. Algunos estudiantes reconocieron que los datos no siguen un patrón exacto, mientras que otros expresaron que las variables son directamente proporcionales. Sin embargo, como se muestra en la figura 39, los argumentos de los estudiantes para afirmar que las variables son directamente proporcionales se basaron únicamente en la dirección de cambio y no tuvieron en cuenta la constante que debe dar la razón entre las variables. De ahí la importancia de hacer explícitas más adelante las condiciones para que dos variables sean directamente proporcionales.

Lo anterior ocurrió cuando los estudiantes intentaron establecer la relación de interdependencia entre las variables de forma algebraica ($y = f(x)$), pero al no encontrar un patrón exacto, no determinaron dicha expresión por sí mismos, sino que la determinaron luego por medio de la herramienta *Análisis de regresión de dos variables* en GeoGebra.

Figura 39

Verbalización de relación de proporcionalidad

> Los valores del porcentajes de carga y del tiempo, según la tabla que se registro durante el experimento nos deja ver que existe una relación directamente proporcional, en la cual si una variable aumenta la otra también lo hará, por lo cual al transcurrir mayor tiempo el porcentaje de carga aumentara; aunque no lo hace de manera constante si aumenta de manera directa.

En este mismo sentido, al estudiar la variación acelerada y desacelerada en el contexto de la descarga de un archivo, taller 2, los estudiantes expresaron, mediante representaciones tabulares o pares ordenados, que cada valor de una variable (tiempo) determina exactamente un valor de la otra (tamaño del archivo), acompañado de declaraciones que confirman tal reconocimiento. Lo anterior se relaciona con la noción covariacional de función, propuesta por Thompson y Carlson (2017) y que fue presentada en el marco conceptual de este trabajo.

Figura 40

Coordinación de variables mediante pares ordenados y tablas

(segundos,MB descargados)
(0,0)
(5 , 3.3)
(7 , 5.8)
(10.6 , 13.1)
(15 , 29.7)
(17 , 41.1)
(24.4 , 108.9)
(35.9 , 324)
(36.2 , 333.2)
(39.3 , 424)
(41 , 479.2)
En cada segundo se produce una porción del archivo diferente

Tiempo (s)	Tamaño (MB)
0	0
3.5	2
5	3.3
9.6	10.5
12	17.3
15.6	32.7
19.9	61.9
26.5	136.3
31	212.8
36.6	344.9
40	447.7

La tabla permite ver que en cada segundo se ha descargado determinada parte (tamaño) del archivo, por lo que ahora hay que buscar una regularidad entre esos datos

En la variación acelerada y desacelerada, los estudiantes también expresaron verbalmente la existencia de una relación de interdependencia (o simplemente dependencia) entre las variables del problema. De esta manera, los estudiantes reconocen que los cambios producidos en el tiempo (o tamaño de descarga) afectan a los valores de la otra variable. En particular, la figura 49 se muestra que un estudiante reconoce que los cambios en una variable no solo dependen de la otra, sino que, en un sentido matemático, ambas se afectan mutuamente; contrario a muchos estudiantes que expresa únicamente una relación de dependencia, en la que una variable varía en función de la otra, sin evidenciar una influencia recíproca.

Figura 41

Verbalización de la interdependencia entre variables

Las magnitudes variables son el tiempo de descarga y el tamaño de archivo descargado, ambas pueden tomar valores reales positivos incluyendo al 0, pero el tamaño solo puede tomar valores hasta 500, estas variables tienen una relación de interdependencia pues a mayor tiempo también aumenta el tamaño del archivo descargado y viceversa.

Por otra parte, al abordar la variación convergente, en el taller 3, la mayoría de estudiantes reconoció, de forma más explícita, que un punto sobre la gráfica del modelo matemático encontrado es una manifestación de la variación simultánea de ambas cantidades, tiempo y temperatura. Algunos estudiantes explicaron que las coordenadas (*x, y*) expresan una regularidad entre los valores de ambas variables, donde cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*. Cabe mencionar que este comportamiento se hizo más explícito acá por una pregunta que lo evocó directamente.

Figura 42

Coordinación de variables mediante pares ordenados

b) ¿Qué representa cada punto (x, y) en el modelo encontrado anteriormente?

Aa π

En el modelo encontrado anteriormente, el punto x, también conocido como la abcisa, representa el tiempo, que es la variable independiente. Por otro lado, el punto y, también conocido como la ordenada, representa la temperatura en grados Celsius, que es la variable dependiente. Esto significa que la temperatura es el resultado o la consecuencia de la variable independiente, en este caso, el tiempo. La coordenada (x,y) es la representación gráfica de la co-relación entre estas dos variables, mostrando así, cómo la temperatura cambia en función del tiempo. En otras palabras, cada punto en el modelo representa una medida específica de temperatura en un momento determinado, lo que permite visualizar y analizar la relación entre el tiempo y la temperatura.

En cambio, en el mismo taller 3, otros estudiantes se limitaron a expresar que "*x*" representa el tiempo, mientras "*y*" la temperatura, pero no hicieron explícito lo que representa el punto en sí. Es decir, verbalizaron lo que representa cada una de las componentes del punto, pero no lo que representa el punto en sí mismo. Este tipo de comportamientos permiten ver que los estudiantes asignas los ejes del plano cartesiano a cada una de las variables, pero no indica claramente si el estudiante comprende la correlación que existe entre ellas.

Como se señaló antes en términos de Castro y Forero (2019) asignar los ejes puede hacerse de forma mecánica o siguiendo un procedimiento, sin que esto signifique necesariamente que se comprenden las representaciones gráficas. Estos autores señalan que puede darse el caso en que el estudiante "logre verbalizar aspectos que reconocen por el tratamiento algorítmico de la representación gráfica o aspectos que visualizan y que tienen un sentido local en la representación, pero que no implican una comprensión global sobre las variables y sus correlaciones.” (p. 25).

Figura 43

Reconocimiento de variables sin coordinación explícita

b) ¿Qué representa cada punto (x, y) en el modelo encontrado anteriormente?

Aa π El tiempo(x) y la temperatura (y)

En el estudio de la variación cíclica, en el taller 4, los estudiantes relacionaron las variables (iluminancia y tiempo) por medio de una expresión analítica que les permitiera representar dicho comportamiento. En la siguiente figura, el estudiante analiza, en primer lugar, el comportamiento de las variables por aparte, pero reconoce que éstas están interrelacionadas, y expresa dicha relación mediante una función sinusoidal.

Figura 44

Coordinación de variables mediante representación analítica

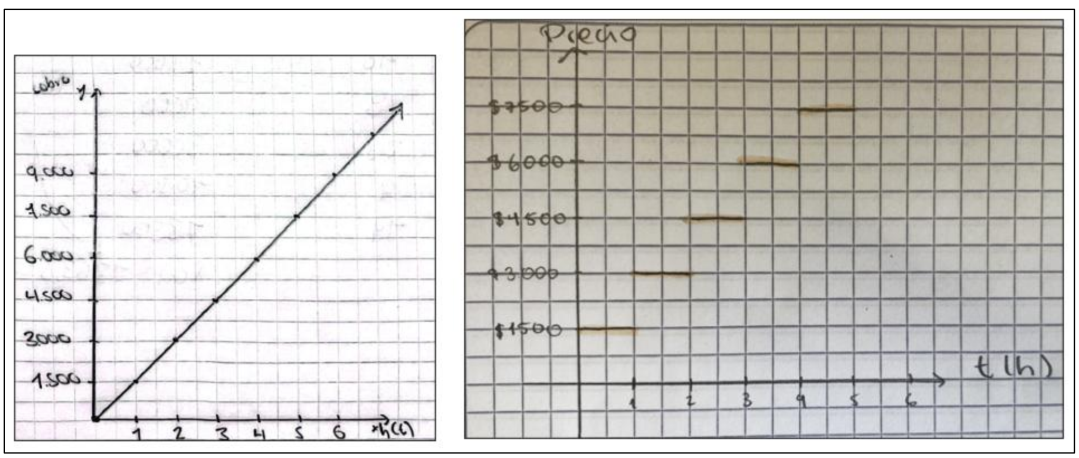
Las variables mantienen aproximadamente la siguiente relación y= 1586.23+1466.3982 sen(0.4001x - 2.5032), donde la variable x representa el tiempo que transcurre mientras la iluminancia va oscilando y la variable y representa los valores de la iluminancia. Primero observando el simulador de lámpara note que la iluminancia aumentaba hasta un punto y luego empezaba a bajar hasta un punto y volvía a aumentar cíclicamente, entonces necesitaba una función que repitiera los valores cíclicamente. Analizando todos los modelos de geogebra, me di cuanta que el único modelo que cumplía la condición de repetirse cíclicamente era el del seno.

El comportamiento de verbalizar la coordinación de las variables, al igual que en los demás talleres, se repite en el taller 4. Por ejemplo, algunos estudiantes expresaron que “la relación entre estas variables es periódica, *lo que significa que la iluminancia cambia de manera cíclica con el tiempo,* aumentando y disminuyendo de forma repetitiva.” Se ha escrito en cursiva la parte más crucial que permite determinar esta verbalización como un comportamiento como propio de AM1.

En el Taller 5, al estudiar la variación escalonada en el contexto de las tarifas de estacionamiento, los estudiantes manifestaron una incipiente coordinación entre las variables involucradas. No obstante, enfrentaron dificultades al intentar representar de manera sólida la relación de interdependencia entre dichas variables. Por ejemplo, algunos estudiantes identificaron correctamente que la variable de salida (el costo del estacionamiento) solo podía asumir valores enteros, lo cual no es coherente con una representación lineal continua. En contraste, otros no advirtieron esta restricción y asumieron de forma imprecisa que dicha variable podía tomar cualquier valor real.

Figura 45

Coordinación de variables en la variación escalonada



Asimismo, algunos estudiantes utilizaron funciones definidas por partes para representar algebraicamente la relación entre las variables (figura 46). Pese a ello, el uso de la notación de la función parte entera, así como su conceptualización, requirió ser abordado e institucionalizado posteriormente mediante orientaciones del profesor. Esto sugiere que dicha notación no emerge de manera natural o espontánea, aunque los estudiantes sí tienen nociones intuitivas relacionadas con este tipo de función. Por ello, este contexto o situación generó la necesidad de herramientas semióticas para representar dicha relación, tales como notaciones $f(x) = \lceil x \rceil$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ y una gráfica escalonada.

Figura 46

Representación emergente para la variación escalonada

Respuesta

Si trabajamos con el eje x en horas y el eje y como el costo en pesos colombianos comenzamos a tomar las condiciones que nos plantea el problema, tenemos que
el intervalo de 0≤t<0.25 (15 minutos), f(x) =0
el intervalo de 0.25 ≤t<1 , f(x)= 1500
a partir de 1≤t<2, f(x)= 3000
y así sucesivamente por cada hora que pase
Como ya se menciono anteriormente, las condiciones de estacionamiento las proporciona una maquina del centro comercial, en donde al pasar un segundo mas del valor del tiempo exigido se empezara a cobrar el precio base del estacionamiento, en otras palabras, la función se verá como unas escaleras tomado valores constantes entre los intervalos dichos anteriormente.

Figura 47

Representación lineal para la variación escalonada

f(x)=1500X
se toma un valor fijo por hora y como el valor de costo de una motocicleta es constante se puede asumir eso. La ecuación indica que el costo crece lineal respecto al tiempo . además, parte desde el origen con pendiente de 15000, indicando un aumento constante por cada hora

Desde la perspectiva de Hitt y Quiroz (2017), las representaciones intuitivas que emergen durante la modelación de situaciones no rutinarias reflejan cómo los estudiantes comienzan a construir significados antes de llegar a formas institucionalizadas. En esta investigación, los intentos por representar la variación escalonada evidencian una comprensión incipiente que, aunque alejada de la notación estandarizada, dio lugar a funciones definidas por partes. La intervención docente y el intercambio entre pares fueron clave para transformar estas representaciones iniciales, favoreciendo un tránsito hacia una comprensión más formal y compartida del fenómeno estudiado.

A modo de síntesis, los comportamientos asociados a AM1 en las diferentes situaciones abordadas, consistieron en: reconocer las variables involucradas en cada situación y expresar, a través de diferentes representaciones, las relaciones de interdependencia que se podía establecer entre ellas; verbalizar, de forma oral o escrita, es decir, por medio del lenguaje natural, la coordinación de las variables; reconocer un punto en el plano cartesiano como la manifestación de la variación simultánea de ambas cantidades, explicando que sus coordenadas (x, y) expresan una regularidad entre los valores de las variables, donde cada valor de x determina exactamente un valor de y; expresar, a partir de representaciones tabulares, que cada valor de una variable determina exactamente un valor de la otra; y, utilizar el lenguaje algebraico para expresar la relación de interdependencia entre las variables ($f(x) = y$).

A partir de los datos recolectados, se puede inferir que los comportamientos asociados a AM1 no difieren al abordar los diferentes tipos de variación en los diversos contextos propuestos; por el contrario, se observa una tendencia a repetir comportamientos similares. Por tanto, no se puede establecer diferencias notables entre los comportamientos asociados a AM1 en los diferentes tipos de variación y contextos.

5.2.2. Comportamientos asociados a AM2

De manera similar a lo observado en AM1, todos los estudiantes evidenciaron comportamientos propios de AM2, lo que indica que también alcanzaron el nivel 2 de razonamiento covariacional. No obstante, a diferencia de AM1, dichos comportamientos no se manifestaron de forma similar en los distintos tipos de variación. Los datos revelan diferencias significativas entre ellos, lo que sugiere que la demanda cognitiva varía según el tipo de variación considerado, o la situación problema abordada. Aun así, ciertos comportamientos característicos de AM2 se repitieron en la mayoría de los talleres, lo que refleja patrones comunes en el abordaje de las situaciones.

En el estudio de la variación directa e inversa, algunos estudiantes identificaron y describieron, primero, la dirección de cambio de cada una de las variables por aparte. Luego, determinaron la dirección de cambio de la correlación entre ellas, reconociendo que dicha dirección depende de la dirección de cambio de las variables individualmente. Este comportamiento se puede observar en la figura 48, cuando un estudiante describe el modelo que representa la carga del teléfono en función del tiempo.

Figura 48

Verbalización de la dirección de cambio

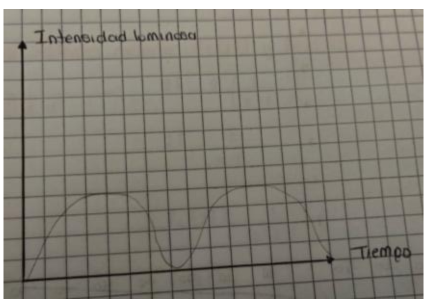
> Debemos tener en cuenta que la función general actúa con base a la variable independiente y la variable dependiente, es decir, que estas dos variables están afectando de forma directa a la función. En todas las variables podemos observar la similitud que se tienen entre ellas mismas y es que están actuando de una forma creciente. En otras palabras, la variable independiente es creciente va de izquierda a derecha, y de la dependiente es creciente yendo de abajo hacia arriba por lo tanto la función general es creciente

Así mismo, la mayoría de los estudiantes verbalizó su conciencia sobre la dirección de cambio mediante expresiones del tipo "el porcentaje de carga aumenta, a medida que el tiempo también aumenta". Este comportamiento se asocia tanto a AM1 como a AM2, puesto que no solo se está verbalizando que "*mientras una variable cambia la otra también*", sino que además se está expresando que "*si una variable aumenta la otra también lo hará*". De acuerdo con Carlson et al. (2002), este tipo de expresiones da indicios de que el estudiante reconoce que los cambios en una de las variables, en este caso el tiempo, afectan la dirección del cambio en la otra variable, es decir, en el porcentaje de carga.

De modo general, a partir de la interpretación gráfica y de la situación experimentada para el estudio de cada tipo de variación, los estudiantes identificaron y describieron si la variable de salida aumenta, disminuye o se mantiene constante, a medida que la variable de entrada cambia. Por ejemplo, en la situación de la iluminancia, los estudiantes identificaron que a medida que transcurría el tiempo, el brillo reflejado por la lámpara sobre una superficie aumentaba y disminuía de forma cíclica, por lo que allí, la dirección de la variable tiempo siempre estaba en aumento, mientras que la dirección de cambio de la iluminancia estaba de arriba hacia abajo y viceversa, cada cierto tiempo. Esto se reflejó luego en sus expresiones gráficas.

Figura 49

Coordinación de la dirección de cambio desde la experimentación

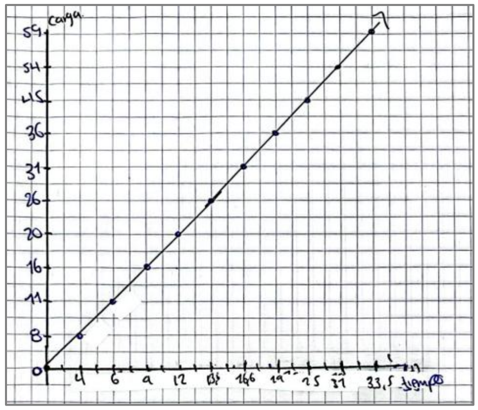
<table>
<tr><th>Representación gráfica</th><th>Descripción dada por el estudiante</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Al encender la lámpara, el luxómetro indicaba que la iluminancia aumentaba y disminuía, por eso hice una gráfica como esa.

</td></tr>
</table>

Otro comportamiento observado entre los estudiantes y que da cuenta de AM2, consistió en construir una representación gráfica que muestra la relación entre las variables, asegurándose de que la dirección del cambio de la variable de salida corresponda con los cambios en la variable de entrada. Es decir, construyeron una gráfica que muestra el comportamiento creciente, decreciente o constante, según sea el caso. En la figura 50, se puede observar la coordinación de la dirección de cambio a partir de una representación gráfica, para el problema de la carga del teléfono.

Figura 50

Coordinación de la dirección de cambio mediante representación gráfica



Aunado a lo anterior, algunos estudiantes reconocieron o señalaron la dirección del cambio de la función a partir de su representación algebraica. Como se mostrará a en seguida, este es un comportamiento que difiere según el tipo de variación. Por ejemplo, al modelar el porcentaje de carga de la batería en función de tiempo, la totalidad de estudiantes encontró una expresión de la forma $y = mx + b$, con $m > 0$, es decir, una recta con pendiente positiva. Sin embargo, como se muestra en el siguiente diálogo, solo algunos de ellos dieron cuenta de una coordinación de la dirección de cambio, a partir de la interpretación de dicha expresión algebraica.

Investigador: *En esta pregunta [seña la pregunta d de la actividad 2.2, del taller 1] solo has escrito "creciente" pero me gustaría que ampliaras un poco más tu respuesta, que explicaras, justificaras.*

Estudiante: *Profe, yo puse que la función es creciente porque el coeficiente de la x es positivo y por tanto sube [haciendo referencia a la variable porcentaje de carga] a medida que la x crece. ¿Escribo eso?*

Investigador: *Bueno, ese podría ser tu argumento. Pero ¿qué tiene que ver el coeficiente de la x con lo que dices? Explica eso en tu respuesta.*

Este comportamiento de expresar la dirección de cambio de la función, a partir de su expresión algebraica, se presentó explícitamente solo al abordar la variación directa. En otro tipo de variaciones, como la acelerada y la cíclica, la mayoría de los estudiantes encontró modelos de la forma $A(t) = at^2 + bt + c$, donde $A(t)$ es el tamaño del archivo y t el tiempo; y, $I(t) = a + bsen(t + c)$, donde $I(t)$ es la Iluminancia y t el tiempo. Con base en dichas expresiones, los estudiantes intentaron expresar la dirección de cambio; sin embargo, no lo hicieron de forma precisa o completa. Por ejemplo, para el modelo $A(t)$ reconocían que era una parábola cóncava hacia arriba, y, por tanto, que decrece y luego crece; pero no señalaron en qué intervalos se da exactamente tales comportamientos. De igual manera, para el modelo $I(t)$ los estudiantes señalaron que este crece y decrece de forma periódica, por ser una expresión en términos del seno, pero tampoco indicaron en qué intervalos ocurre tales comportamientos.

Figura 51

Evidencia de AM2 a partir de la expresión algebraica

De la expresión
$f(x) = 0.3793x^2 - 4.7578x + 12.623$
podemos decir que es una función cuadrática, por tanto es una parábola. Como el coeficiente de x^2 es positivo entonces la parábola abre hacia arriba esto indica que la función primero crece y luego decrece pero no se sabe de forma exacta en donde lo hace. Eso quiere decir que mientras la x aumenta, la y disminuye hasta cierto punto y luego crece

Del modelo
$y = 1586.23 + 1466.39\ \mathrm{Sen}(0.41\ x - 2.5)$
Se puede decir que [...] la dirección de las variables y la función en si se describen de la siguiente manera: la variable x, presenta una dirección hacia la derecha, por lo que indica que la función mantiene un movimiento creciente en cuanto a la variable x, la variable y presenta un cambio de dirección cada vez que alcanza su punto máximo y mínimo, es decir, la variable y crecerá hasta alcanzar su cresta (punto máximo de la función), para así luego decrecer hasta alcanzar su valle (punto más bajo de la función) [...]

En cambio, para la variación convergente y escalonada, los estudiantes determinaron modelos de la forma $T(t) = a + b \cdot e^{-kt}$, donde $T(t)$ es la temperatura de la bebida caliente y t el tiempo; y, $C(t) = a[\![x + b]\!] + c$, donde $C(t)$ es el costo de estacionamiento y t el tiempo. Pero para estos casos, no se observó que algún estudiante determinara la dirección de cambio a partir de dichas expresiones.

Las regularidades observadas anteriormente pueden deberse a la complejidad de los diferentes modelos matemáticos y, por tanto, a la demanda cognitiva que exige su interpretación. Zhao y Guo (2025) analizan la complejidad de expresiones matemáticas en términos de su composición sintáctica, esto es, operador (función), operando y regla de combinación. Los autores sostienen que una mayor complejidad en las expresiones se asocia a una mayor profundidad conceptual. Entre más operadores, operandos y reglas de combinación, mayor es el esfuerzo para interpretar una expresión analítica por parte de los estudiantes.

Por otra parte, un hallazgo relevante relacionado con las habilidades de modelación, influidas por AM2, se refiere a cómo los estudiantes ajustan el modelo obtenido al contexto del problema. En particular, al utilizar el *análisis de regresión de dos variables* en GeoGebra, los estudiantes generaron modelos funcionales definidos para todos los números reales. Por ello, algunos interpretaron la dirección de cambio considerando la función en su dominio completo, sin distinguir entre el comportamiento global del modelo y su pertinencia contextual.

En contraste, otros estudiantes demostraron una mayor influencia de su razonamiento covariacional, en particular de AM2, en su proceso de modelación, al identificar que solo un tramo del modelo se ajustaba adecuadamente al fenómeno descrito en el problema. Así, acotaron el dominio de la función a la porción que mantiene una dirección de cambio coherente con la situación planteada. La figura 52 ilustra cómo un estudiante realiza esta distinción en el contexto del problema sobre la descarga de un archivo.

Figura 52

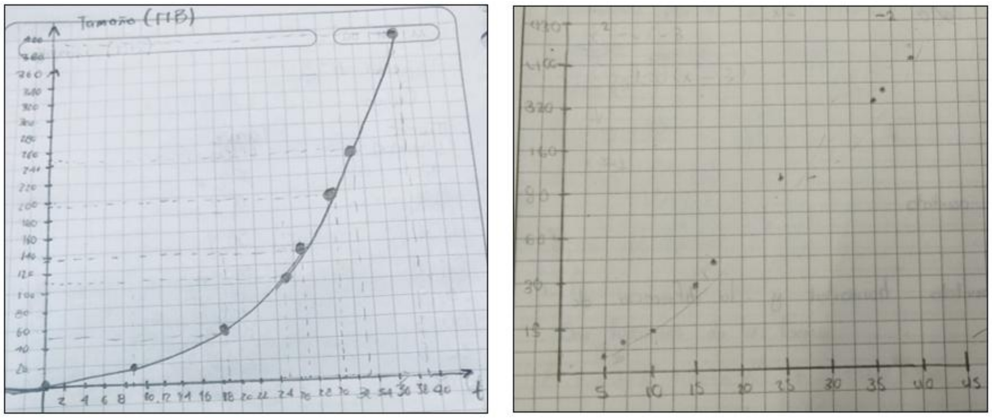
Influencia de AM2 en la validación de modelos

> En mi opinión, el modelo matemático que mejor se ajusta a los datos y a la situación es el polinómico de grado 2, con el eje X como tiempo y el eje Y como tamaño del archivo se observa que a medida que el tiempo avanza, el tamaño aumenta y a mayor tiempo más rápidamente aumenta el tamaño. Ademas la variable x siempre crece lo cual tiene sentido porque es el tiempo pero en algunas partes la variable Y decrece y luego crece esto por que es una parabola que abre hacia arriba. Para ser coherentes con el problema me quedo solo con la parte creciente

A su vez, algunos estudiantes identificaron la dirección de cambio de la función a partir de la ubicación de ciertos pares ordenados, provenientes de la tabla de datos, en el plano cartesiano. En estos casos, el trazo de la gráfica no fue un dibujo libre guiado únicamente por intuiciones generales, sino que parece estar condicionado por la disposición espacial de los puntos previamente ubicados. Este comportamiento se repitió en otros talleres, con los mismos estudiantes, lo cual sugiere que la deducción de la dirección de cambio puede estar mediada por la información implícita en la representación gráfica discreta, más que por una coordinación activa entre los cambios de las variables. En contraste, se observaron otros casos en los que los estudiantes se limitaron a ubicar puntos sin representar la continuidad de la función, ni señalar su dirección de cambio. Esto dificulta inferir, a partir de su representación gráfica, su nivel de consciencia sobre cómo varía la función en el dominio considerado.

Figura 53

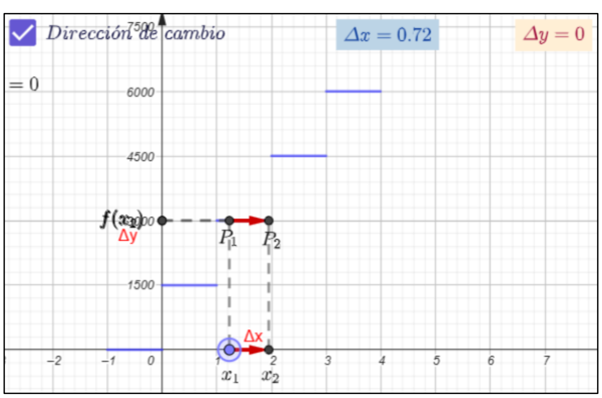
Evidencias de AM2 influenciada por la disposición espacial de puntos



Para el caso de la variación escalonada, al interpretar la gráfica que representa la interdependencia entre el tiempo y la tarifa de estacionamiento, los estudiantes tuvieron dificultad para coordinar la dirección de cambio. A partir de la interpretación de la situación y de los datos tabulados, los estudiantes reconocían que el costo por estacionar un auto aumentaba, entre más tiempo estuviera estacionado un vehículo, pero en la representación gráfica, el costo permanecía constante en ciertos intervalos, lo cual los confundió. Finalmente, caracterizaron la dirección de cambio de estas funciones como constantes y crecientes al mismo tiempo.

Figura 54

Dificultad asociada a AM2 en la variación escalonada

Modelo	Descripción dada por el estudiante
	*Esta gráfica es muy extraña porque se ve que es constante pero al mismo tiempo creciente. Lo que si es claro es que la variable tiempo siempre está creciendo. Pero de acuerdo con la tabla y el contexto el precio siempre tiende a incrementar pero no de manera regular sino a saltos, como en una escalera. En conclusión la función es creciente pero a saltos cada cierto tramo.*

Desde otra perspectiva, hubo estudiantes que reconocieron la dirección de cambio de las variables a partir de la tabla de datos. Por ejemplo, en el problema de la temperatura de la bebida, el registro tabular mostraba datos numéricos en los que, a pesar de que el tiempo aumentaba, los valores de la temperatura parecían que esta permanecía constante. Sin embargo, los estudiantes reconocieron a partir de sus registros tabulares que, de manera general, la temperatura tiende a decrecer, y, por tanto, la función es decreciente o descendente.

Figura 55

Evidencias de AM2 a partir de la representación tabular

Según los datos presentados en la tabla, podemos ver que la temperatura va disminuyendo conforme pasa el tiempo así que yo realicé una función decreciente que empieza desde 90°C que es la temperatura en la que se encuentra la bebida y a medida que pasa el tiempo esta temperatura va disminuyendo

Finalmente, la mayoría de los estudiantes, como se observa en el siguiente diálogo, reconocieron la consistencia en la dirección del cambio entre diversas representaciones (situación problema, tabla, gráfica y expresión algebraica). En todos los casos analizados, los estudiantes afirmaron que las diferentes representaciones reflejaban la misma dirección, evitando discrepancias como, por ejemplo, reconocer que las variables eran crecientes en el contexto del problema, pero la representación gráfica contradijera esta observación. No obstante, se reconoce que, en otros escenarios, podrían presentarse situaciones en las que se den tales discrepancias.

Investigador: *Bueno, entonces ¿qué pueden decir finalmente de la dirección de cambio de la función?*

Estudiante: *Profe, no cabe duda que la dirección de las variables y de su correlación es siempre creciente. En el experimento, los datos recolectados, la gráfica y la ecuación apuntan a que si el*

	tiempo crece el tamaño del archivo descargado es cada vez mayor, o sea, también crece.
Investigador:	*Bien, es decir, se puede ver la misma dirección de cambio para esta situación en todas sus representaciones.*
Estudiante:	*Exactamente, profe.*

A modo de síntesis, los comportamientos asociados a AM2 en las diferentes situaciones abordadas, consistieron en: identificar y describir si la variable de salida aumenta, disminuye o se mantiene constante, a medida que la variable de entrada cambia; construir una representación gráfica que muestre la relación entre las variables, asegurándose de que la dirección del cambio de la variable de salida corresponda con los cambios en la variable de entrada; coordinar la dirección del cambio a partir de la representación algebraica, según el tipo de variación; señar la dirección a partir de la ubicación espacial de ciertos puntos en el plano cartesiano; y, explicar la consistencia entre las diferentes representaciones (verbal, tabular, gráfica y analítica) asegurando que todas reflejen la misma dirección de cambio.

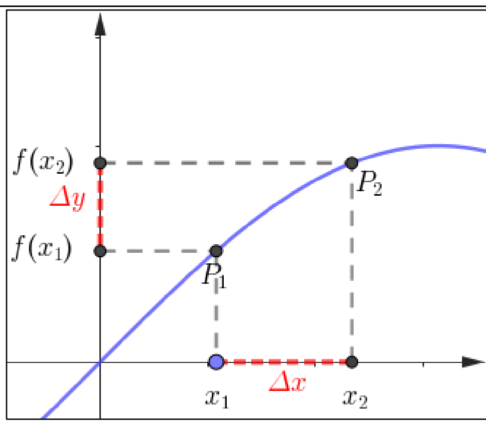
5.2.3. Comportamientos asociados a AM3

A diferencia de los resultados obtenidos para AM1 y AM2, el análisis de los datos del experimento de enseñanza muestra que no todos los estudiantes exhibieron comportamientos característicos de AM3. En consecuencia, no todos alcanzaron el nivel 3 de razonamiento covariacional. Es decir, mientras que todos los participantes fueron capaces de reconocer y representar el cambio, solo algunos lograron medir o cuantificar ese cambio de forma adecuada. Esto es razonable porque las acciones mentales a partir de la tercera implican mayor demanda cognitiva a los estudiantes y, por lo tanto, les resulta más desafiante**.** Además, con la acción mental 3, los estudiantes comienzan a caracterizar los distintos tipos de variación, lo que llevó a que sus comportamientos muestren matices específicos dependiendo del tipo de variación que estaban abordando.

En los diferentes talleres, se observó que inicialmente los estudiantes coordinaban la cantidad de cambio de la variable de entrada (x), con la cantidad de cambio en la variable de salida (y), al identificar que cada intervalo de amplitud Δx determina exactamente un intervalo de amplitud Δy. En otras palabras, los estudiantes reconocieron que para un intervalo $[x_1, x_2]$ de amplitud $\Delta x = x_2 - x_1$, le corresponde un intervalo $[y_1, y_2]$ de amplitud $\Delta y = y_2 - y_1$, de modo que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Es importante mencionar que tales observaciones las hicieron en la etapa de validación del modelo matemático a través del applet de la figura 27; por lo que la mediación digital jugó un papel crucial en tales observaciones.

Figura 56

Coordinación de las cantidades de cambio

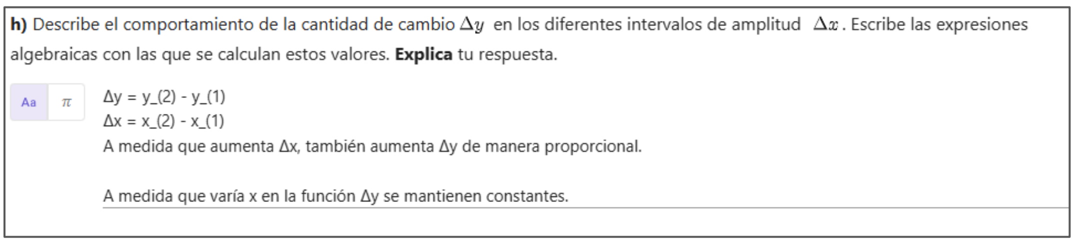


"Al arrastrar el punto x_1 a lo largo del eje x es decir cuando el tiempo toma distintos valores, se puede ver cada intervalo de longitud Δx está correlacionado con un intervalo en la iluminancia de longitud Δy"

En este mismo sentido, es importante señalar que los estudiantes reconocieron la forma en que se calcula algebraicamente estas cantidades de cambio. Además, al controlar el valor Δx a través del deslizador, observaron que cambios producidos en esta cantidad generan cambios en la cantidad Δy. Para el caso de la variación directa, cuya representación gráfica es una recta, reconocieron que las diferentes cantidades de cambio son directamente proporcionales entre sí. Específicamente, señalaron que el comportamiento de la cantidad de cambio en la variable de salida se mantiene constante a lo largo del dominio, siempre que la cantidad de cambio en la variable de entrada se mantenga constante. En algunos casos, estas descripciones se dieron de manera sintetizada y simbólica (ver figura 57), mientras en otros casos de manera más discursiva (ver figura 58).

Figura 57

Cálculo de las cantidades de cambio


h) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy en los diferentes intervalos de amplitud Δx. Escribe las expresiones algebraicas con las que se calculan estos valores. **Explica** tu respuesta.

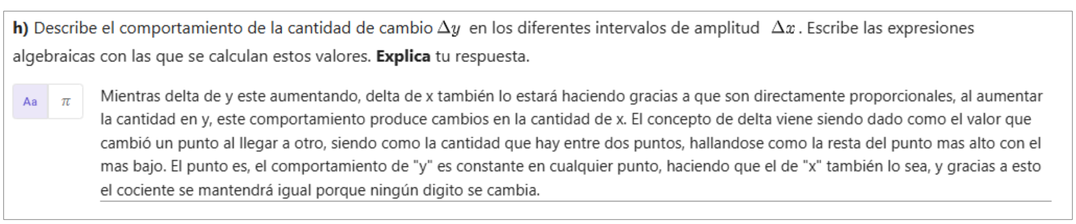
Aa π

Δy = y_(2) - y_(1)
Δx = x_(2) - x_(1)
A medida que aumenta Δx, también aumenta Δy de manera proporcional.

A medida que varía x en la función Δy se mantienen constantes.

Figura 58

Verbalización de la coordinación de las cantidades de cambio


h) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy en los diferentes intervalos de amplitud Δx. Escribe las expresiones algebraicas con las que se calculan estos valores. **Explica** tu respuesta.

Aa π

Mientras delta de y este aumentando, delta de x también lo estará haciendo gracias a que son directamente proporcionales, al aumentar la cantidad en y, este comportamiento produce cambios en la cantidad de x. El concepto de delta viene siendo dado como el valor que cambió un punto al llegar a otro, siendo como la cantidad que hay entre dos puntos, hallandose como la resta del punto mas alto con el mas bajo. El punto es, el comportamiento de "y" es constante en cualquier punto, haciendo que el de "x" también lo sea, y gracias a esto el cociente se mantendrá igual porque ningún digito se cambia.

Un comportamiento consecuente de lo anterior consistió en comparar diferencias Δy en los valores de salida al realizar incrementos constantes Δx en la variable de entrada; y, a partir de ello, expresar el comportamiento de la cantidad de cambio en la variable de salida, señalando si es constante, aumenta o disminuye a lo largo del dominio. Por ejemplo, en la variación acelerada, cuando se les preguntó a los estudiantes explícitamente por el comportamiento de las cantidades de cambio en las variables, la mayoría de ellos expresó que la cantidad de cambio en la variable de salida no se mantiene constante al considerar incrementos uniformes en la variable de entrada. Al interactuar con el applet explorador de modelos, observaron que, al tomar intervalos de igual amplitud en la variable de entrada, la cantidad de cambio en la variable de salida era progresivamente mayor, es decir, aumentaba.

Figura 59

Deducción del patrón de las cantidades de cambio

f) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy para diferentes intervalos con la misma amplitud Δx.

Con Δx=2

Δy(0-2 Δx)=1.24
Δy(2-4 Δx)=1.49
Δy(4-6 Δx)=2.08
Δy(6-8 Δx)=2.96
Δy(8-10 Δx)=4.19

Por cada aumento en los números de los intervalos la diferencia entre Δy y el anterior Δy es mayor (Ejemplo: Δy(2-4 Δx)- Δy(0-2)= 0.25 ; Δy(4-6 Δx)- Δy(2-4 Δx)=0.59)

Figura 60

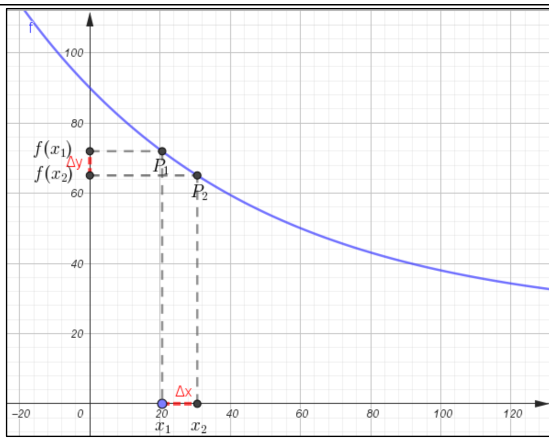
Verbalización del patrón de las cantidades de cambio

La cantidad de cambio delta de y tiene un comportamiento variable para diferentes intervalos con la misma amplitud Ax. En algunos intervalos, delta de y presenta un cambio más pronunciado, mientras que en otros intervalos, el cambio es gradual. Toma valores al ser decreciente en negativo y al tornarse en una función creciente adquiere valores positivos respecto al eje de las y. A medida que x se hace más grande, para diferentes intervalos de igual amplitud delta x delta y se vuelve más grande

Por otra parte, los datos revelan que los estudiantes coordinaron el signo de las cantidades de cambio con la dirección de cada una de las variables. Por ejemplo, en la situación de la temperatura de la bebida, determinaron que el valor Δt es siempre positivo, puesto que la variable tiempo es creciente; es decir, $t_2 > t_1$ y así, $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. En cambio, como la variable temperatura es siempre decreciente, es decir, $T_2 < T_1$, entonces $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$; esto es ΔT es siempre negativo. Este comportamiento lo repitieron algunos estudiantes en los demás talleres.

Figura 61

Coordinación del signo de las cantidades de cambio con la dirección de cambio



"Δt es positivo porque como el tiempo está aumentando entonces a un valor mayor le estoy quitando uno menor. Sin embargo ΔT es negativo siempre porque la temperatura está disminuyendo o sea a un valor menor le estoy quitando uno mayor"

En este sentido, Castro y Forero (2019) indican que puede ocurrir que las cantidades de cambio no siempre se expresen junto con la dirección del cambio. Estos autores plantean dos posibilidades al respecto: "estudiantes que alcanzan la AM3 una vez desarrollada la AM2 y estudiantes que muestran comportamientos sobre la AM3 aún sin haber desarrollado la AM2" (p. 26). Estos comportamientos se hicieron visibles entre las producciones de los participantes de este estudio. Para el primer caso, podría plantearse como ejemplo el caso de la figura anterior.

Para el segundo caso, es decir, estudiantes que muestran comportamientos sobre la AM3 aún sin posiblemente haber desarrollado la AM2, en la situación de la descarga del archivo, algunos estudiantes, como el de la figura 62, dieron cuenta de una coordinación incipiente entre las cantidades de cambio, pero no asociaron sus signos con la dirección de cambio de la función.

Figura 62

Comportamiento de AM3 sin posible desarrollo de AM2

f) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy para diferentes intervalos con la misma amplitud Δx.

Aa π

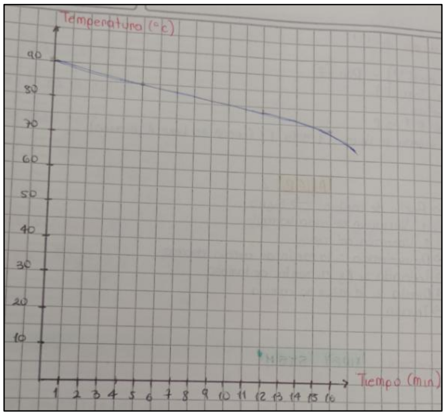
Estas cantidades toman diferentes valores. Δx depende del deslizador y Δy depende de Δx. En ambos casos las cantidades toman valores positivos tal vez porque son distancias y estas siempre son positivas. A medida que tomo intevalos de igual amplitud en el tiempo puedo ver que sus intervalos correspondientes son cada vez mas grande lo cual tiene sentido porque la barra de descarga mostraba que el tamaño del archivo era más rápido cada vez

A su vez, los estudiantes utilizaron representaciones tabulares para calcular las diferencias entre valores no consecutivos de la variable de entrada y de sus respectivas imágenes en la variable de salida, analizando cómo varían estas diferencias y si se mantiene una relación constante o no entre ellas. Los estudiantes que hicieron este tipo de análisis, utilizaron tales resultados para construir con lápiz y papel una representación gráfica para los datos recopilados o para la situación dinámica abordada.

Como caso concreto, en la situación de la temperatura de la bebida, la siguiente estudiante calculó implícitamente las cantidades de cambio Δt (para el tiempo) y ΔT (para la temperatura) en dos intervalos con distinta amplitud, para comparar cómo varía la temperatura entre dos lapsos de tiempo no consecutivos. Este comportamiento es propio de la AM3, ya que la estudiante evalúa cómo cambian conjuntamente las dos variables a través de distintos intervalos, reconociendo que la cantidad del cambio en la temperatura depende del intervalo de tiempo considerado. Al afirmar que "no muestra la misma variación", la estudiante ofrece evidencia de que ha percibido la variabilidad de las cantidades de cambio, es decir, que la función decrece, pero no lo hace a una tasa constante. Esto le permitió descartar una relación entre las variables de tipo lineal.

Figura 63

Influencia de AM3 en la representación gráfica



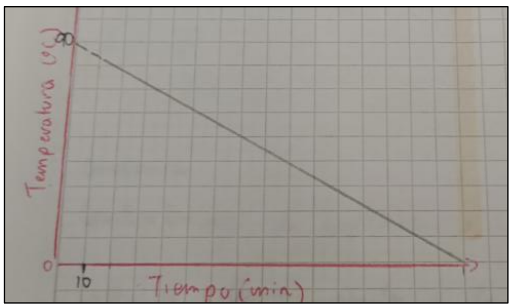
"Yo hice una gráfica descendente pero no inversamente proporcional, ya que al observar los datos, observo que hay algunos en los que la razón no es constante. Por ejemplo, cuando el tiempo es 3 y 5 minutos, la temperatura es 87 y 85,08 grados Celsius, respectivamente, pero al analizar cuando el tiempo es 8,3 y 9,2 minutos, la temperatura es 82,06 y 90,95 grados Celsius, lo que no muestra la misma variación del intervalo anteriormente mencionado. Por ello simplemente la hice decreciente sin ser constante."

A diferencia del caso anterior, la siguiente estudiante manifestó comportamientos similares en términos de focalizarse en las cantidades de cambio entre variables a partir de la representación tabular, pero sus decisiones y resultados fueron diferentes. En su análisis, seleccionó dos intervalos consecutivos de igual amplitud en la variable de entrada ($\Delta t = 3$), con lo cual mantuvo constante la cantidad de cambio en el tiempo. Al observar las correspondientes variaciones en la temperatura ($\Delta T = 3$ *y* $\Delta T = 2$), estableció una comparación que la llevó a afirmar que, en promedio, la temperatura desciende un grado Celsius por minuto. Lo anterior, la motivó a representar la situación mediante una gráfica lineal, lo cual parece un comportamiento prematuro o apresurado, en tanto que no consideró otros intervalos del dominio que podrían haber revelado que la cantidad de cambio en la temperatura no es constante, sino que disminuye significativamente, lo que es consistente con un patrón de variación no lineal.

En este sentido, aunque la estudiante muestra un avance importante en términos de *coordinación de cantidades de cambio*, su análisis es un tanto local y no logra generalizar correctamente el comportamiento global de la relación entre las variables. Este caso pone de manifiesto la necesidad de promover en los estudiantes la comparación sistemática de cantidades de cambio en distintos tramos del dominio de una función, como base para establecer con mayor precisión la naturaleza de la variación.

Figura 64

Influencia incipiente de AM3 en la representación gráfica



"Mi gráfica fue una línea decreciente porque, según los datos, la temperatura del café disminuye de manera constante con el tiempo. Por ejemplo, al inicio (t = 0), la temperatura es de 90°C; después de 3 minutos, baja a 87°C; y tras 5 minutos, llega a 85°C. Esto indica que, en promedio, la temperatura disminuye aproximadamente 1°C por minuto. Sin embargo, este descenso no será indefinido, ya que el café eventualmente alcanzará la temperatura ambiente, momento en el cual dejará de enfriarse."

Otro comportamiento consistió en reconocer y coordinar las cantidades a partir de la situación misma, por medio de la experimentación. Este comportamiento se hizo mayormente explícito en el taller 2, al utilizar el simulador de la descarga del archivo. A partir de la experimentación, algunos estudiantes verbalizaron su consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida (tamaño del archivo) mientras consideraban cambios en el valor de entrada (tiempo). En la siguiente explicación, un estudiante hace referencia al simulador, en el que, se incluyó una barra verde que indicaba visualmente el tamaño del archivo descargado, con el propósito de facilitar la percepción de la velocidad de descarga. A partir de esa visualización, el estudiante imaginó al tiempo aumentando en cantidades iguales, mientras observaba que la segunda variable aumenta en cantidades cada vez más grandes.

Figura 65

Simulador de la descarga de un archivo desde la web

Figura 66

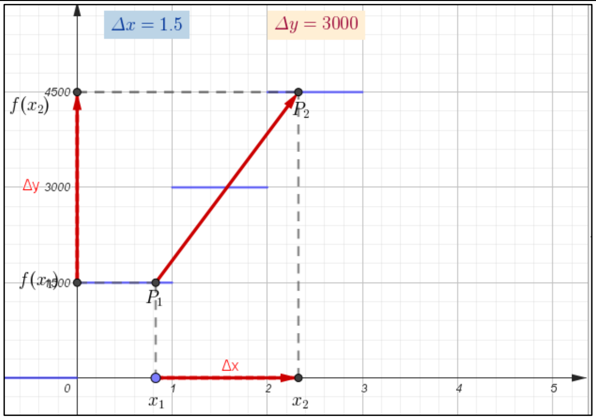
Evidencia de AM3 a partir de la experimentación

> El modelo matemático que mejor se ajusta a los datos es el polinomial de grado 2 con ecuación y= 0,379x^2 - 4,7547xn + 12,6301. Elegí este modelo porque teniendo en cuenta como se descargó el archivo en el link que nos mostró el profesor, empieza su descarga de una manera lenta pero ya luego empieza a descargarse rápidamente, lo cual hace que este modelo sea el más lógico a pesar de que no pase por exactamente todos lo datos.

En el estudio de la variación escalonada, dada la naturaleza de este tipo de variación, se identificó un comportamiento de AM3 que no se había observado en los talleres anteriores. En los modelos matemáticos con variación escalonada, algunos estudiantes calcularon las cantidades de cambio sin considerar los puntos de discontinuidad de la función. Como resultado, determinaron valores de Δx mayores a la amplitud del intervalo en el que la función se mantiene continua. Este tipo de situaciones tiene sus consecuencias más adelante en el estudio de las razones de cambio promedio y razón cambio instantáneo, es decir, en el estudio de la derivabilidad de una función. Por ello, esta situación se aprovechó para consolidar las condiciones suficientes y necesarias para derivar una función.

Figura 67

Cálculo de cantidades de cambio sin considerar la continuidad



"Cuando Δx=1,5 y se arrastra el valor x_1 a lo largo del eje x, el Δy a veces toma el valor de 1500 y otras veces el valor de 3000. Sin embargo, cuando $\Delta x = 0{,}5$ la cantidad Δy a veces toma el valor de 0 y otras veces vale 1500. Esto depende de si los puntos P1 y P2 están sobre el mismo escalón o no"

A modo de síntesis, los comportamientos asociados a AM3 en las diferentes situaciones abordadas, consistieron en: coordinar la cantidad de cambio de la variable de entrada (x), con la cantidad de cambio en la variable de salida (y), identificando que cada intervalo de amplitud Δx determina exactamente un intervalo de amplitud Δy; comparar diferencias Δy en los valores de salida al realizar incrementos constantes Δx en la variable de entrada, y, a partir de ello, expresar el comportamiento de la cantidad de cambio en la variable de salida, señalando si es constante, aumenta o disminuye a lo largo del dominio; coordinar el signo de las cantidades de cambio con la dirección de cada una de las variables; utilizar representaciones tabulares para calcular diferencias entre valores no consecutivos de la variable de entrada y de sus respectivas imágenes en la variable de salida, analizando cómo varían estas diferencias y si se mantiene una relación constante o no entre ellas; y, reconocer y coordinar las cantidades a partir de la situación misma, por medio de la experimentación, es decir, a través de la representación verbal de una función.

5.2.4. Comportamientos asociados a AM4

Como consecuencia de que no todos los estudiantes manifestaron comportamientos propios de AM3, se observa en los datos que no todos exhibieron comportamientos de AM4; y, por tanto, no todos alcanzaron el nivel 4 de razonamiento covariacional. En consonancia con lo propuesto por Carlson et al. (2002), se constata que al razonar en AM4, los estudiantes involucran a las acciones mentales previas, lo cual implicó una mayor demanda cognitiva. Los datos permitieron identificar que la gama de comportamientos asociados a AM4 es más amplia en comparación con las acciones mentales anteriores, lo que sugiere una mayor diversidad en las formas de razonamiento. Asimismo, es importante señalar que, al igual que en las acciones mentales anteriores, los comportamientos de los estudiantes al razonar en AM4 se repitieron al abordar los distintos tipos de variación, pero con matices un tanto notables. Esto refuerza la idea de que la naturaleza de la variación influye significativamente en la manifestación de estas acciones mentales.

Así, un primer comportamiento propio de AM4 observado consistió en explicar cómo la razón de cambio promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se relaciona con los incrementos uniformes de la variable de entrada y de salida; es decir, reconocer que la razón de cambio promedio resulta de comparar, mediante un cociente, las cantidades de cambio de la variable de entrada y de la variable de salida. Este comportamiento se hizo explícito, al preguntarle directamente a los estudiantes sobre este particular, ya fuera dentro de las preguntas estructuradas en los talleres o dentro de los diálogos en la clase. Por ejemplo, en el estudio de la variación acelerada, el profesor-investigador hizo énfasis en la razón de cambio promedio, y planteó una pregunta a la clase que permitió que emergiera el comportamiento anteriormente descrito.

Investigador:	*¿Qué valores toma el cociente* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *a medida que* x_1 *toma diferentes valores? ¿Qué representa ese cociente?*
Estudiante:	*Profe, cuando* x_1 *se encuentra cerca del origen, el cociente toma valores pequeños, pero a medida que se hace más grande [refiriéndose a* x_1*] el cociente también se hace más grande. Esa fracción representa [piensa en silencio durante algunos segundos] eso resulta de tomar la variación que*

> *existe entre los datos del tamaño del archivo y dividirla entre la variación que hay entre los valores del tiempo; entonces representa la variación simultanea entre las dos variables.*

A su vez, los estudiantes explicaron cómo la razón de cambio promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ refleja el comportamiento general de la función en un intervalo específico, o para todo el dominio; relacionando la constancia o variabilidad de la razón de cambio promedio, con el comportamiento de la función. En particular, para el caso de la variación directa, representada por una recta en el plano, los estudiantes destacaron la constancia de la razón de cambio entre las variables y relacionaron este aspecto con la forma lineal de la función. Allí, reconocieron que al calcular el cociente entre los cambios en las variables, se obtiene un valor invariante que corresponde a la pendiente de la recta, lo que indica que la tasa de variación se mantiene constante sin importar el intervalo considerado. Otros estudiantes expresaron que todas las razones establecidas entre las cantidades de cambio Δy y su correspondiente Δx son proporcionales.

Figura 68

Descripción del comportamiento de la función mediante AM4

i) ¿Qué valores toma el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores de x_1 ? ¿por qué? ¿Qué representa dicho cociente?

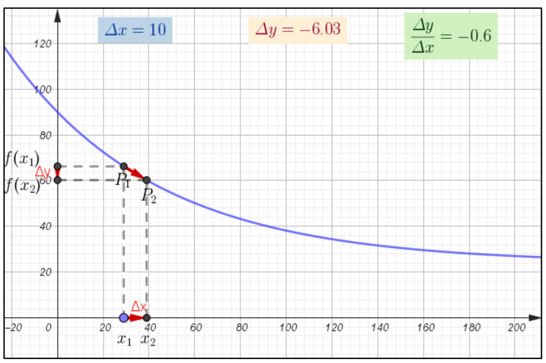
Aa π

El único valor que toma dicho cociente para diferentes valores de x sub 1 es 1.76. Esto se debe a que el cociente mencionado corresponde a la inclinación o pendiente de la función, una inclinación que en el caso de las funciones lineales es igual sin importar los diferentes valores que tome la variable independiente o el intervalo que se analice. Complemento: es la razón de cambio promedio de la función.

Similar al comportamiento anterior, los estudiantes compararon varias razones de cambio promedio en intervalos consecutivos del dominio y reconocieron su tendencia. En el estudio de la variación convergente y desacelerada, los estudiantes señalaron que los valores de la razón de cambio tienden a cero, a medida que la variable de entrada crece. Sin embargo, solo algunos estudiantes reconocieron la diferencia entre la desaceleración y la convergencia. De ahí que, estos últimos estudiantes, a través de la razón de cambio promedio, establecieron que la variación convergente implica la variación desacelerada, pero la variación desacelerada no necesariamente implica la variación convergente. Así, las funciones con este último tipo de variación cumplen una característica adicional, su tendencia a un valor límite.

Figura 69

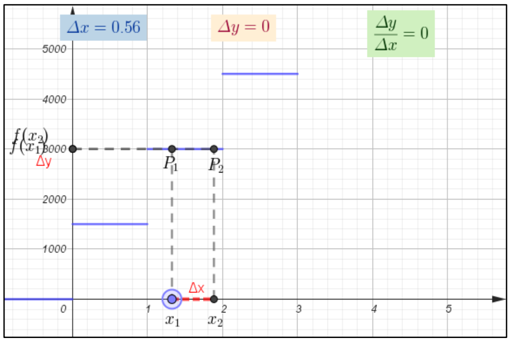
Caracterización de la variación mediante AM4

Exploración gráfica del modelo	Explicación del estudiante
	*"Acá se puede ver algo similar a cuando se estudió la función* $y = \sqrt{x}$ *y es que a medida que* x_1 *tiende a infinito, la razón* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tiende a cero. Entonces estas dos funciones son similares porque son desaceleradas solo que esta última tiene algo diferente y es que parece que se vuelve constante"*

Por otra parte, los estudiantes señalaron que la razón de cambio tiende a cero alrededor de puntos máximos, puntos mínimos y puntos de inflexión de la función; y que es exactamente cero cuando la función es constante. Por ejemplo, en el estudio de la variación escalonada, los estudiantes reconocieron que en los intervalos donde la función es continua, la razón de cambio vale cero, lo cual indica que la cantidad de cambio de la variable de salida vale cero; así, el costo de estacionamiento no varía en tales intervalos. No obstante, como se mencionó en los resultados de AM3, algunos estudiantes establecieron razones de cambio en intervalos donde la función no es continua, lo cual los condujo a errores en la descripción de la razón de cambio para estas funciones.

Figura 70

Verbalización de la razón de cambio promedio en la variación escalonada

Exploración gráfica del modelo	Explicación del estudiante
	*“La razón de cambio siempre vale cero, debido a que el valor de Δy siempre es cero. Entonces, cuando se plantea la división, el resultado de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es siempre cero. Esto lo que me indica es que el costo de estacionamiento no va a cambiar hasta que pase la siguiente hora.”*

Paralelamente, algunos estudiantes, como el de la figura 71, identificaron a partir de la expresión algebraica, si su razón de cambio promedio se mantiene constante o varía en diferentes intervalos, estableciendo una relación entre la variabilidad de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y el tipo de función (lineal o no lineal). Este comportamiento fue exhibido principalmente en el estudio de la variación directa. Lo anterior sugiere que estos estudiantes han establecido una relación entre la expresión algebraica y la constancia de la razón de cambio, entendiendo que en una función de la forma $y = mx + b$, el coeficiente m representa la razón de cambio promedio, es decir, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Figura 71

Evidencia de AM4 a partir de la representación algebraica

i) ¿Qué valores toma el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores de x_1 ? ¿por qué? ¿Qué representa dicho cociente?

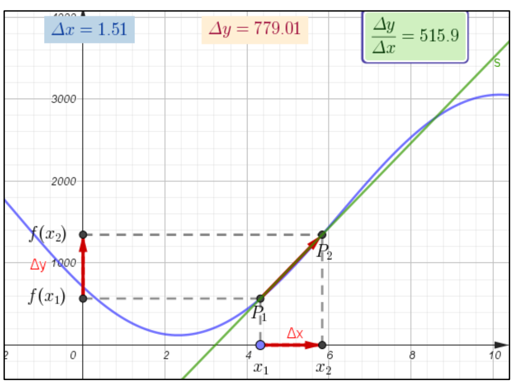
Aa π

La función y=0.8x es lineal lo que significa que el cambio es constante y en una función lineal, el cociente siempre es igual a la pendiente
Qué representa dicho cociente representa el cambio promedio de la función en cualquier intervalo. Nos dice que por cada unidad que aumenta x, y aumenta 0.8

Por otra parte, los estudiantes analizaron el signo de la razón de cambio promedio al comparar los incrementos en la variable de entrada y los cambios en la variable de salida, identificando si la razón de cambio es positiva o negativa y explicando cómo este signo determina la dirección de cambio de la función en el intervalo considerado. Por ejemplo, en el caso de la variación cíclica, los estudiantes pudieron observar que a medida que la función crece o decrece, el signo de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positivo o negativo. De esta manera, establecieron que en los intervalos donde la función crece, la razón es positiva, y donde la función decrece, la razón es negativa. Así, establecieron que el signo de la razón de cambio promedio ofrece información sobre el comportamiento creciente o decreciente de una función.

Figura 72

Coordinación de la razón de cambio promedio y su signo algebraico

Exploración en el applet	Descripción del estudiante
	*"Cuando los valores de la iluminancia están aumentando, o sea, cuando la función crece, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positiva; pero cuando los valores de la iluminancia están decreciendo, el signo de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es negativo. En conclusión, el signo de la razón de cambio me dice si la función está aumentando o disminuyendo."*

En este mismo sentido, algunos estudiantes expresaron que el signo de la razón de cambio promedio está determinado por el signo de la cantidad de cambio en la variable de salida, Δy. Argumentaron que, aunque la razón de cambio promedio se calcula a partir de las variaciones en ambas variables, su signo depende exclusivamente del cambio en la variable de salida, dado que la variable de entrada siempre aumenta, por lo que su incremento es positivo. En cambio, la variable de salida puede aumentar o disminuir, por lo que su cambio puede ser positivo o negativo. A continuación, se presenta el caso de un estudiante que, en el contexto de la variación cíclica, explica cómo Δy puede tomar valores positivos o negativos y cómo esto afecta a la razón de cambio promedio.

Figura 73

Coordinación del signo de la razón de cambio promedio con las cantidades de cambio

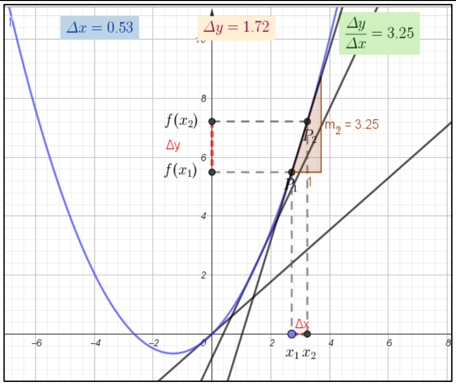
> Esa razón está determinada por las cantidades de cambio en tre las dos variables. Sin embargo delta de y es el que determina el signo de la razón, y este este es igual a f(X2)-f(X1) por lo tanto si f(x1) < f(x2) la función es creciente y por tanto delta de y es positivo pero si f(x1) > f(x2) la función es decreciente y por tanto delta de y es negativo.

Otro comportamiento asociado a AM4 consistió en construir rectas secantes contiguas sobre la representación gráfica, y relacionar la razón de cambio promedio con la pendiente de dichas rectas. En este sentido, los estudiantes reconocieron cómo cambia la inclinación de la recta secante con respecto al eje *x* así como la razón de cambio, en diferentes intervalos de la variable de entrada.

Figura 74

Construcción de rectas secantes y su relación con la razón de cambio promedio

Exploración gráfica del modelo	Explicaciones del estudiante



"Al poner diferentes rectas que pasan por dos puntos de la función y calcular su pendiente con las herramientas de geogebra, se puede ver que este valor coincide con el de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Entonces yo puedo concluir que la pendiente de la recta es igual a ese cociente. Esto lo constaté deslizando el valor de x_1 a lo largo del eje x con lo que obtuve varias rectas secantes y sus pendientes."

Así mismo, se evidenciaron comportamientos desde un enfoque más numérico que gráfico. Estos comportamientos están en relación con las ideas de Castro y Forero (2019), quienes señalan que una forma de razonar en la AM4 consiste en que los estudiantes calculan la diferencia entre los extremos de un intervalo en la variable de entrada y la diferencia entre los extremos del intervalo correspondiente en la variable de salida, y a partir de estas diferencias establecen una razón de cambio obteniendo un cociente que, de acuerdo con los autores, "es considerado como un valor representativo de la relación entre el cambio de la variable dependiente y el cambio variable independiente" (p. 27).

En la figura 75, se aprecia cómo un estudiante razona de la manera descrita anteriormente, en el contexto de la variación acelerada; y tras determinar la razón de cambio promedio en cada intervalo, encuentra un patrón entre dichos valores, para generalizar su comportamiento. El modelo de este estudiante fue $f(t) = 0.0065t^3 - 0.0072x^2 + 0.4164x + 0.1211$.

Figura 75

Establecimiento de la razón de cambio promedio a partir del cálculo de diferencias

m) ¿Aproximadamente con qué rapidez cambia el tamaño del archivo alrededor de los 10 segundos? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta tangente? Describe la velocidad de descarga del archivo de manera general. **Justifica** tus respuestas.

Aa π

La velocidad de descarga de manera general tiende a aumentar. Por ejemplo si calculamos la velocidad de descarga en el intervalo (1,3) o sea del segundo 1 al 3 tendríamos que es de 0.94/2=0.47 Mb/s. Pero si calculamos la velocidad de descarga del intervalo (3, 5) tendríamos 1.36/2=0.68Mb/s. En el intervalos (5,7) la velocidad es 2.09/2=1.04Mb/s. Si seguimos calculando la velocidad asi para diferentes intervalos entonces vemos que está aumentando.

Además, en la figura anterior se logra evidenciar que el estudiante asocia el valor de la razón de cambio promedio con la velocidad de cambio, por lo que también generaliza el comportamiento de la velocidad de descarga del archivo, asumiendo este problema por intervalos de igual amplitud. Por tanto, este es otro comportamiento de AM4, que podría describirse como asociar la razón de cambio promedio de la función con la noción de velocidad promedio.

En este mismo sentido, otra forma de razonar en la AM4, señalada por Castro y Forero (2019), consiste en dividir un intervalo en subintervalos uniformes; luego, se calcula la razón de cambio de cada subintervalo y se toma el promedio de estas razones como un valor representativo de las razones de cambio locales. Sin embargo, en la implementación de la secuencia de enseñanza, no se evidenció de forma explícita esta forma de razonar entre los participantes.

A modo de síntesis, los comportamientos asociados a AM4 en las diferentes situaciones abordadas, consistieron en: reconocer que la razón de cambio promedio resulta de comparar, mediante un cociente, las cantidades de cambio de la variable de entrada y de la variable de salida; comparar diferentes razones de cambio promedio en intervalos consecutivos del dominio y determinar su comportamiento tendencial; señalar que la razón de cambio tiende a cero alrededor de puntos máximos, puntos mínimos y puntos de inflexión de la función; y que es exactamente cero cuando la función es constante; identificar a partir de la expresión algebraica de una función, si su razón de cambio promedio se mantiene constante o varía en diferentes intervalos, estableciendo una relación entre la variabilidad de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y el tipo de función (lineal o no lineal); coordinar el signo de la razón de cambio con la dirección de cambio de la función; expresar que el signo de la razón de cambio promedio está determinado por el signo de la cantidad de cambio en la variable de salida; construir rectas secantes contiguas sobre la representación gráfica, y relacionar la razón de cambio promedio con la pendiente de dichas rectas; calcular numéricamente la diferencia entre los extremos de un intervalo en la variable de entrada y la diferencia entre los extremos del intervalo correspondiente en la variable de salida, y a partir de ello, encontrar un patrón para la razón de cambio; y, asociar la razón de cambio promedio de la función con la noción de velocidad promedio.

5.2.5. Comportamientos asociados a AM5

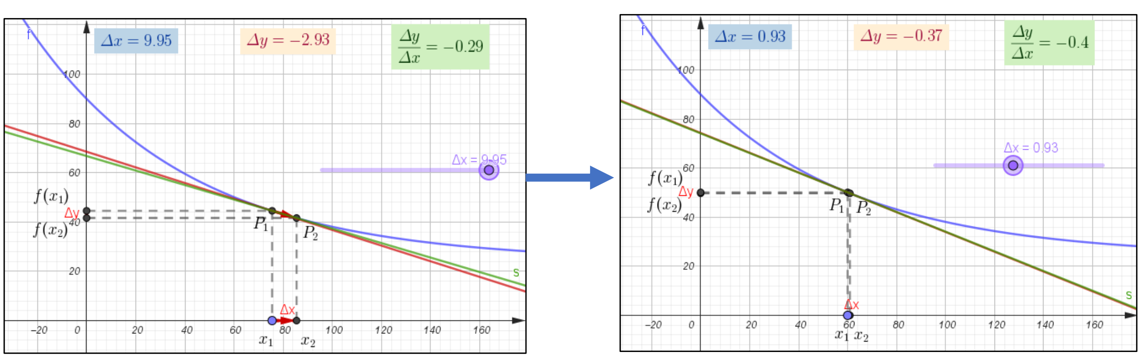
En lo que respecta a AM5, los datos muestran que el grupo de estudiantes que evidenció comportamientos propios de esta acción mental fue aún más reducido que los de AM4, lo que indica que menos estudiantes alcanzaron el nivel 5 de razonamiento covariacional. Esta acción mental supone un nivel más avanzado de pensamiento, que requiere no solo la interiorización de las acciones mentales previas, sino también la capacidad de imaginar y razonar sobre cambios infinitesimales en contextos dinámicos. Coordinar la razón de cambio instantánea implica un refinamiento de la razón de cambio promedio, por lo que los comportamientos observados en AM5 presentan matices similares a los de AM4.

Un comportamiento sustentado por AM5 identificado consistió en comprender que la razón de cambio promedio, construida sobre el razonamiento exhibido en AM4, conduce a la razón de cambio instantánea, al considerar cantidades de cambio Δx cada vez más y más pequeñas. Sin embargo, este comportamiento de los estudiantes no emergió de manera totalmente natural, sino que fue mediado por la exploración de sus modelos matemáticos en el applet de GeoGebra, y por las preguntas orientadoras del taller y del profesor dentro de la clase. Por ejemplo, en el estudio de la variación convergente, los estudiantes señalaron que al considerar cantidades en el tiempo cada vez más pequeñas, las cantidades de la temperatura también eran cada vez más pequeñas. También, que los dos puntos P_1 y P_2 considerados sobre la curva se acercan cada vez más, por lo que la recta secante tiende a coincidir con la recta tangente. En AM4 los estudiantes habían determinado que la razón de cambio promedio representaba la pendiente de la recta secante, por tanto, como consecuencia de este primer comportamiento de AM5, los estudiantes también asociaron la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente.

Figura 76

Deducción de la razón de cambio instantánea a partir de refinamientos de la razón de cambio promedio

Exploración gráfica del modelo:



Explicación del estudiante:

"Cuando arrastro el valor morado [haciendo referencia al deslizador para controlar Δx] *hacia la izquierda, el Δx toma valores más y más pequeños. Entonces las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 se acercan cada vez más, o sea que los puntos tienden a ser uno solo, o sea, el mismo y por tanto la recta roja que es la secante empieza a coincidir con la recta*

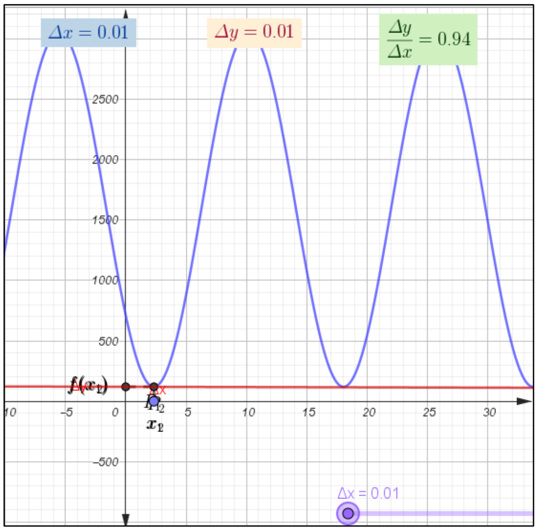
verde que es la tangente. También logro ver que la razón $\Delta y/\Delta x$ que es la pendiente de la recta secante, cambia de valores. Entonces como las rectas tienden a ser cada vez más iguales, eso quiere decir que la razón $\Delta y/\Delta x$ describe cada vez más la pendiente de la recta tangente"

Como continuación en esta línea de razonamiento, en el que se asoció la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente, los estudiantes interpretaron el significado de la razón de cambio instantánea nula, esto es, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, al explorar aquellos puntos donde la recta tangente se vuelve totalmente horizontal; y, por tanto, su pendiente es cero. A partir de ello, establecieron una relación entre este hecho y los posibles valores máximos o mínimos de la variable de salida. En el estudio de la variación cíclica, los estudiantes encontraron que las ordenadas, es decir, los niveles de iluminancia tienen múltiples valores máximos y mínimos. En el applet de GeoGebra, al arrastrar el punto de x_1 hasta el valor del tiempo que produce un valor máximo o mínimo en la iluminancia, los estudiantes notaron que la recta tangente se volvía totalmente paralela al eje x; y, por tanto, su pendiente era cero. A su vez, notaron que el cociente $\Delta y/\Delta x$, cuando $\Delta x = 0{,}01$, tomaba valores muy cercanos a cero, lo cual les resultaba coherente con la pendiente de la tangente.

A partir de esta exploración, los estudiantes generalizaron esta característica para todas las funciones que presentan valores máximos o mínimos locales. Es importante mencionar que este comportamiento ya se había presentado previamente en el estudio de la variación acelerada, al explorar modelos de la forma $y = ax^2 + bx + c$. No obstante, en la variación cíclica se analizó un modelo senoidal que tenía infinitos puntos máximos y mínimos, lo que permitió a los estudiantes convencerse más de este hecho matemático y plantear la generalidad.

Figura 77

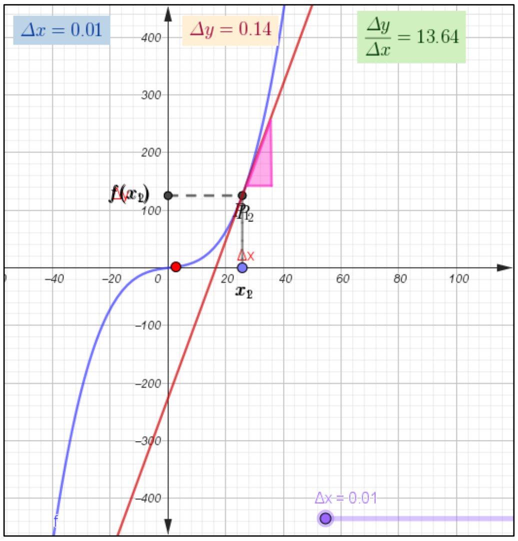
Coordinación de la razón de cambio nula con puntos máximos y mínimos

Exploración con el applet	Explicación del estudiante
	*"se puede ver que cuando me acerco a los puntos más altos o los más bajos de la curva, la tangente se vuelve muy horizontal, eso sucede siempre en esos puntos. Además, la pendiente allí es cero, porque no tiene inclinación con el eje x. Eso quiere decir que la razón de cambio instantánea también vale cero en esos puntos, y la razón promedio también es casi cero"*

Aunado a lo anterior, algunos estudiantes identificaron y marcaron puntos de inflexión en una gráfica, explicando cómo en estos puntos la razón de cambio instantánea pasa de aumentar a disminuir o viceversa. En el estudio de la variación acelerada, algunos estudiantes propusieron modelos polinómicos de grado 3, con un punto de inflexión. Al explorar el modelo $y = 0{,}0068x^3 - 0{,}0101x^2 + 0{,}6154x - 0{,}2221$, un estudiante notó que alrededor de cierto punto, el comportamiento de la razón de cambio pasaba de ser decreciente a creciente, a pesar de que la función era siempre creciente. Naturalmente, el estudiante no se refirió a este punto como un punto de inflexión; sin embargo, sí reconoció la regularidad de ocurre allí. Posteriormente, este descubrimiento se aprovechó para conceptualizar el punto de inflexión y, por tanto, la concavidad.

Figura 78

Coordinación de la razón de cambio instantánea con puntos de inflexión

<table>
<tr><th>Exploración</th><th>Explicación</th></tr>
<tr><td>
</td><td>"Esta función es siempre creciente, pero hay algo peculiar y es que su razón de cambio instantánea no siempre es creciente. Hay un punto cerca al origen que marca una diferencia. Cuando voy de infinito negativo a cero, la razón de cambio se hace pequeña, pero luego de cero a infinito empieza a crecer. No estoy muy seguro de qué signifique eso, pero sí es como una particularidad que me llama la atención"</td></tr>
</table>

Como resultado de lo anteriormente descrito, luego de socializar y validar los descubrimientos informales de los estudiantes sobre el punto de inflexión e introducir la noción de concavidad, los estudiantes relacionaron la concavidad de la gráfica con el comportamiento de la razón de cambio, indicando que una concavidad hacia arriba corresponde a una razón de cambio creciente y una concavidad hacia abajo a una razón de cambio decreciente.

Este tipo de observaciones refleja cómo los estudiantes, de forma intuitiva y con la mediación digital, pueden comenzar a generalizar patrones de cambio dentro de ciertas funciones, y cómo la formalización de estas observaciones a través de socializaciones en clase, como la realizada sobre la relación entre el punto de inflexión y la razón de cambio, puede ayudarles a consolidar conceptos abstractos que pueden parecer desconectados al principio.

Investigador: *Explícame esa regularidad que dijiste hace un momento alrededor del punto de inflexión, ¿qué es lo que notas?*

Estudiante: *Yo me di cuenta de que al lado izquierdo del punto, la curva como que se aplasta al subir, la tangente se vuelve casi horizontal y la pendiente va como bajando. Pero después del punto, ya la curva se va parando más derechita, como que sube más rápido, y la pendiente va creciendo. Entonces, aunque siempre sube, no sube igual: antes del punto sube más lento y después sube más rápido. Es como si la forma de la curva cambiara de estilo a un lado y al otro.*

Investigador: *Muy bien. Eso es justo en lo que consiste la concavidad de la función. Trata de escribir esas ideas que acabas de decirme en un párrafo y explica con tus palabras la noción de concavidad.*

Así mismo, los estudiantes asociaron la pendiente de la recta tangente con la velocidad instantánea a la cuál cambia una función en un punto específico. El siguiente diálogo entre el investigador y el estudiante muestra cómo este último verbaliza dicha relación, en el contexto de la variación acelerada.

Investigador: *Hace poco mencionaste la pendiente de la recta tangente. Explícame qué te indica ese valor.*

Estudiante: *La pendiente de la recta tangente representa la tasa de cambio en ese punto. Si la pendiente es alta, significa que el archivo se está descargando rápidamente en ese instante y viceversa.*

Investigador: *¿Cómo lo supiste?*

Estudiante: *Pues vimos que la razón de cambio [refiriéndose a* $\Delta y/\Delta x$*] representaba la velocidad en un intervalo y ahora cuando ese intervalo se aproxima a ser un punto [es decir, cuando* Δx *tiende a cero] entonces esa razón, que se aproxima a la pendiente de la recta tangente, debe representar la velocidad en el punto, o al menos de forma aproximada, ¿no? y entre más inclinada esté la recta, mayor va a ser su pendiente.*

No obstante, se observaron casos en los que hay una combinación entre saberes memorizados e interpretaciones dadas en el momento. A los estudiantes con estos comportamientos, se les interrogó sobre sus procedimientos y explicaciones, pero no mostraron una comprensión profunda sobre lo que expresaban en términos de derivadas. Es decir, estos estudiantes no concebían la velocidad como una razón entre las cantidades de cambio, provenientes de AM3 y AM4, sino como un valor que se obtiene aplicando una fórmula o algoritmo, con una comprensión limitada al resultado numérico, sin establecer conexiones con la interpretación geométrica, ni con la idea de movimiento o variación en el contexto abordado.

Figura 79

Cálculo de velocidad instantánea de forma algorítmica

m) ¿Aproximadamente con qué rapidez cambia el tamaño del archivo alrededor de los 10 segundos? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta tangente? Describe la velocidad de descarga del archivo de manera general. **Justifica** tus respuestas.

Aa π

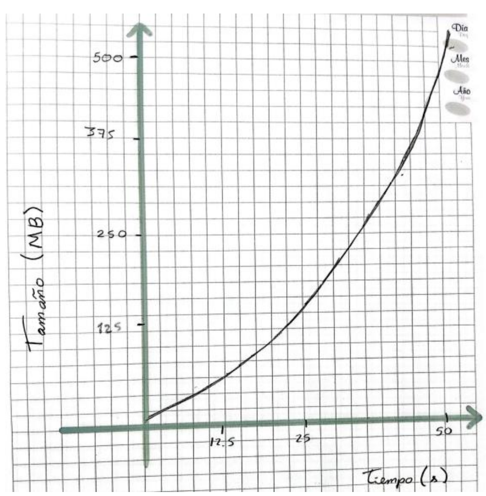
Para determinar la rapidez con la que cambia el tamaño del archivo alrededor de los 10 segundos, se debe calcular la pendiente de la recta tangente en ese punto, lo que equivale a evaluar la derivada de la función en x igual a 10 Si la pendiente en ese punto es positiva y creciente, significa que la velocidad de descarga está aumentando a medida que pasa el tiempo.la velocidad de descarga del archivo no es constante, sino que tiende a aumentar con el tiempo, lo que indica que el archivo se descarga más rápido en los últimos segundos que

Dentro de los comportamientos anteriormente descritos, se encuentra implícito un comportamiento que consiste en utilizar rectas tangentes para analizar la razón de cambio instantánea en distintos puntos de la función, observando cómo cambia su pendiente a lo largo del dominio. Es decir, los estudiantes reconocen que una recta tangente aporta información sobre la variabilidad de la función misma en tanto que su pendiente refleja la rapidez con la que cambia el valor de salida respecto al valor de entrada en un punto específico.

Por otra parte, algunos estudiantes demostraron haber razonado con AM5 a partir de la construcción o bosquejo de una gráfica consistente con la razón de cambio instantánea de la función, asegurándose de que reflejara con precisión la variabilidad en la rapidez del crecimiento o decrecimiento, los cambios de concavidad y la presencia de puntos de inflexión. Junto a tales representaciones gráficas, los estudiantes explicaron verbalmente cómo la razón de cambio instantánea varía a lo largo del dominio, describiendo en qué intervalos aumenta o disminuye.

Figura 80

Influencia de AM5 en la representación gráfica

Representación gráfica	**Explicación del estudiante**
	*A medida que pasa el tiempo, el tamaño del archivo no aumenta de manera constante, sino que su velocidad de aumento se acelera. En otras palabras, en un principio, el tamaño del archivo aumenta lentamente, pero a medida que avanza el tiempo, el ritmo de aumento se vuelve más rápido. La forma curva de la función indica que la relación entre el tamaño del archivo y el tiempo no es lineal, sino que se acelera a medida que pasa el tiempo. Esto se debe a que la velocidad de transferencia de datos aumenta con el tiempo, lo que permite que más datos se transfieran en un período de tiempo determinado. En resumen, el tamaño del archivo aumenta de manera no lineal con respecto al tiempo, debido a la aceleración de la velocidad de transferencia de datos.*

Como se mencionó en un apartado previo, en el estudio de la variación directa, las nociones de recta secante y recta tangente se invisibilizaron, dada la naturaleza de su representación gráfica. Por ello, una vez emergieron estas nociones en talleres posteriores, se invitó a los estudiantes a reflexionar sobre el sentido de las rectas secante y tangente desde la variación directa. También, en el estudio de la variación escalonada, se analizaron los puntos de una gráfica donde es posible, o no, determinar la razón de cambio instantánea. Allí, se analizó la continuidad y la suavidad de las funciones desde un enfoque gráfico y se exploró qué sucedía con las cantidades de cambio y razones de cambio sobre dichos puntos. En este sentido, estos dos tipos de variación no ofrecen un escenario para que emerjan más fluidamente todos los comportamientos asociados a AM5 aquí descritos, pero sí permiten reflexionar sobre estos dos últimos aspectos que son fundamentales al estudiar la razón de cambio instantánea.

A modo de síntesis, los comportamientos asociados a AM5 en las diferentes situaciones abordadas, consistieron en: comprender que la razón de cambio promedio conduce a la razón de cambio instantánea, al considerar cantidades de cambio Δx cada vez más y más pequeñas; asociar la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente; interpretar la razón de cambio instantánea nula y asociarla con valores máximos y mínimos; identificar y marcar puntos de inflexión en una gráfica, explicando cómo en estos puntos la razón de cambio instantánea pasa de aumentar a disminuir o viceversa; relacionar la concavidad de la gráfica con el comportamiento de la razón de cambio, indicando que una concavidad hacia arriba corresponde a una razón de cambio creciente y una concavidad hacia abajo a una razón de cambio decreciente; asociar la pendiente de la recta tangente con la velocidad instantánea a la cuál cambia una función en un punto específico; utilizar rectas tangentes para analizar la razón de cambio instantánea en distintos puntos de la función; construir una gráfica consistente con la razón de cambio instantánea de la función, asegurándose de que refleje con precisión la variabilidad en la rapidez del crecimiento o decrecimiento, los cambios de concavidad y la presencia de puntos de inflexión, puntos máximos y mínimos, entre otras características.

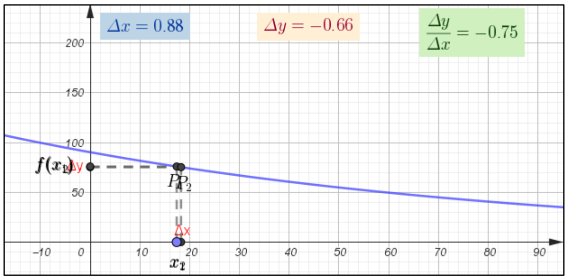
5.3. Propuesta de una nueva acción mental

El marco conceptual de Carlson et al. (2002) no contempla explícitamente la idea de límite funcional como comportamiento de una variable (dependiente) cuando la otra (independiente) se aproxima a cierto valor o al infinito. Por el contrario, implica una concepción de límite de forma implícita al trascender de la AM4 a la AM5, a medida que se considera la cantidad de cambio en la variable de entrada cada vez más pequeña, es decir, a medida que esta tiende a cero.

Sin embargo, los resultados de esta investigación sugieren que hay relaciones funcionales que se comprenden mejor si el estudiante puede razonar sobre el comportamiento *asintótico* o *tendencial* de las variables. Esa capacidad no está completamente cubierta por las cinco acciones mentales que propone el marco conceptual. Investigaciones previas, como la de Carlson et al. (2002), han reportado que, en situaciones donde la interdependencia entre variables se representa mediante curvas crecientes, algunos estudiantes dibujan rectas crecientes; estos son indicios de AM1 y AM2, pero no de AM3, AM4 y AM5. Algo similar se logró constatar con los resultados presentados en esta investigación, cuando en la situación de variación convergente, algunos estudiantes construyeron e interpretaron representaciones gráficas decrecientes y desaceleradas, omitiendo otras características como la convergencia hacia un valor límite. Es decir, allí los estudiantes mostraron comportamientos asociados con AM1 hasta AM5, pero omitieron una característica clave que es la convergencia.

Figura 81

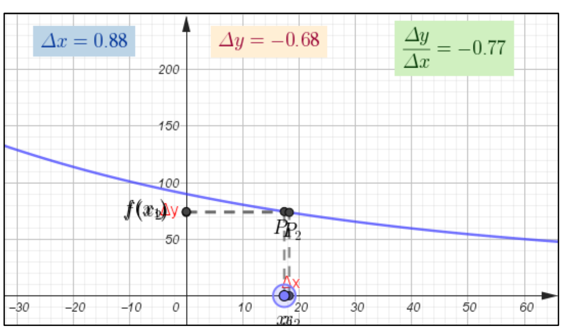
Interpretación equivocada de la variación convergente

Exploración gráfica	Explicación del estudiante
	*"El modelo obtenido tiene dirección decreciente porque la temperatura es cada vez más baja o sea se va hacia menos infinito con el pasar del tiempo. Eso significa que la bebida estará más y más fría hasta que su temperatura sea negativa. Sin embargo el cambio de temperatura es cada vez más lento."*

Por el contrario, al abordar este mismo tipo de variación, otros estudiantes dedujeron que la variación convergente implica la variación desacelerada, pero lo recíproco no necesariamente se cumple. Estos estudiantes reconocieron que a medida que transcurría el tiempo, la temperatura de la bebida decrecía de forma desacelerada, porque para diferentes cantidades de tiempo, las cantidades de temperatura correspondientes eran cada vez más pequeñas. Además, notaron una diferencia respecto a la variación acelerada, que consistió en la tendencia hacia un valor constante. Allí, los estudiantes empezaron a coordinar la tendencia de la variable de salida, a medida que consideraban cambios en la variable de entrada.

Figura 82

Coordinación de la tendencia entre las variables

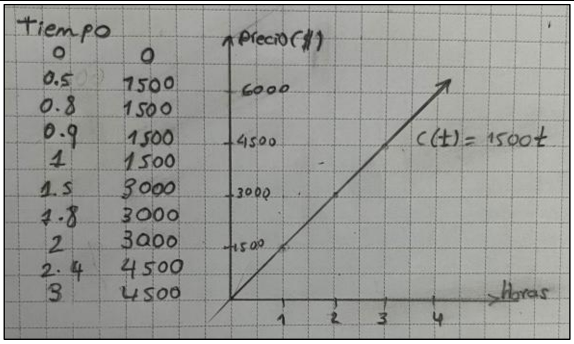
Exploración gráfica	Explicación del estudiante
	*"Esta función es desacelerada porque vemos que el Δy es cada vez más pequeño a medida que x_1 se va para el infinito. Es lo mismo que sucedía cuando analizamos la función $y = \sqrt{x}$ solo que hay una diferencia. La función $\sqrt{x}$ crecía desaceleradamente pero sin tender a ser constante en cambio el modelo que estamos analizando sí tiende a un valor constante"*

Por su parte, el estudio de la variación escalonada también evocó de manera explícita la noción de límite. Cuando los estudiantes representaron gráficamente la interdependencia entre el tiempo y el costo de estacionamiento, se presentaron dos tipos de gráficas: una recta continua y otra en forma escalonada. Respecto a la representación algebraica, también surgieron principalmente dos tipos: una expresión de la forma $c(t) = 1500t$ y una función a trozos definida por intervalos de tiempo así: $c(t) = (1500, si\ 0 < t \leq 1;\ 3000, si\ 1 < t \leq 2; \dots;\ 1500n,\ si\ (n-1) < t \leq n)$.

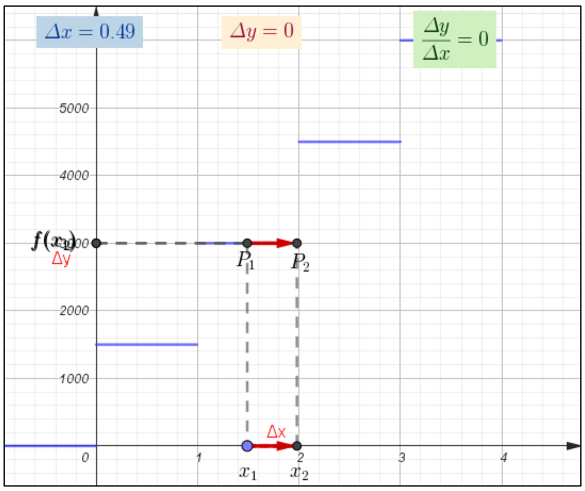
Una situación similar a la anterior ya había sido reportada por Fiallo y Parada (2018), ante lo cual, los autores propusieron a los estudiantes analizar la tendencia de la función, cuando la variable independiente se aproxima a cada valor entero. De esta manera, los autores sugieren que los estudiantes evidencian la inexistencia del límite en cada valor entero y su consecuente discontinuidad. Esta idea fue considerada en el diseño del taller 5 del experimento de enseñanza, lo cual contribuyó a la construcción e interpretación de modelos escalonados por parte de los estudiantes, y les permitió esclarecer el comportamiento tendencial de las funciones. A continuación, se muestra cómo un estudiante transita de un modelo a otro al analizar su tendencia.

Figura 83

Evolución en la comprensión de la variación escalonada al analizar la tendencia entre las variables



"A partir de la tabla se puede concluir que la función es $c(t) = 1500t$ y por tanto su gráfica es una línea recta. Eso tiene lógica porque el costo aumenta de manera proporcional, o sea 1500 cada hora."



"Inicialmente mi ecuación era $c(t) = 1500t$ y grafiqué una línea recta con esa ecuación. Pero ahora que reviso la tabla de datos me doy cuenta de que cuando el tiempo se acerca a cada hora entera por arriba o por abajo el costo permanece constante pero en diferentes valores. Eso es coherente al analizar la representación gráfica con geogebra porque me doy cuenta que los valores del costo tienden a valores diferentes cuando el tiempo se acerca a valores enteros por la derecha y por la izquierda"

Estas evidencias empíricas reflejan una forma particular de razonamiento que va más allá de simplemente identificar la dirección del cambio, pero que aún no involucra una coordinación cuantitativa precisa del cambio en ambas variables. Por ello, surge una propuesta que podría complementar el marco conceptual del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002) que consiste en incorporar una nueva acción mental, entre AM2 y AM3, que contemple de forma explícita la noción de límite desde un enfoque de tendencia.

Villa Ochoa (2012) plantea la necesidad de investigar sobre las acciones mentales involucradas en el tránsito entre la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, y analizar el papel que juega la noción de límite allí. En la presente investigación, a partir de los datos empíricos emergentes en el experimento de enseñanza, se considera que tales acciones mentales se manifiestan previamente a AM4 y AM5, y se evidencian al estudiar la tendencia de la función en sí misma, es decir, al estudiar la noción de límite de una función.

Otra razón para incorporar una nueva acción mental que consista en la coordinación de la tendencia de variables se basa en que esta acción mental intermedia podría promover más adelante el tránsito de AM4 a AM5; puesto que la razón de cambio instantánea se basa en la idea del límite del cociente diferencial, es decir, en la tendencia de la razón de cambio promedio cuando las cantidades de cambio tienden a cero (Villa-Ochoa et al., 2018). Por tanto, allí surgiría la coordinación entre la tendencia de la razón de cambio instantánea y la cantidad de cambio en la variable independiente (Δx). Así, resultaría beneficioso haber consolidado previamente una noción más explícita de límite o tendencia.

La propuesta de pensar el límite como una tendencia observable, coordinada entre variables, es fiel a la filosofía general del marco conceptual del razonamiento covariacional, que privilegia lo intuitivo y dinámico.

Dado que los niveles de razonamiento covariacional están definidos en función de las acciones mentales, incluir una nueva acción mental implicaría redefinir dichos niveles de razonamiento, y, por tanto, darle un orden a las acciones mentales, donde se ubique esta nueva que se propone. A continuación, se propone tal organización de las acciones mentales.

Tabla 2

Reformulación de las acciones mentales del marco conceptual para el razonamiento covariacional

Acción mental (AM)	Descripción
AM1: Coordinación de variables	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.

AM2: Coordinación de la dirección de cambio	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3: Coordinación de la tendencia de variables	Coordinar la tendencia de la variable dependiente con respecto a la tendencia de la variable independiente, al considerar valores que se aproximan a un punto determinado (finito o infinito).
AM4: Coordinación de la cantidad de cambio	Coordinación de la cantidad de cambio de la variable de salida (Δy) con la cantidad de cambio en la variable de entrada (Δx).
AM5: Coordinación de la razón de cambio promedio	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
AM6: Coordinación de la razón de cambio instantáneo	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Por supuesto, surge la necesidad de caracterizar los comportamientos asociados a esta nueva acción mental. Desde los datos recopilados en esta investigación, algunos comportamientos consistieron en: anticipar y describir hacia qué valor se aproxima la variable dependiente cuando la variable independiente se aproxima a un valor específico, sin necesidad de que se alcance; reconocer puntos críticos de las funciones, como asíntotas, discontinuidades, o puntos de acumulación, y ser capaz de describir cómo las variables se comportan a medida que la variable independiente se aproxima a dichos puntos; comparar el comportamiento de funciones continuas y discontinuas, señalando cómo las tendencias de las variables varían según se aproximan a un punto, ya sea de forma continua o con saltos o asíntotas; y, construir una representación gráfica que sea coherente con la tendencia de las variables. Sería interesante que en futuras investigaciones se explore, valide y amplíe esta lista de comportamientos.

Ubicar esta nueva acción como la tercera en la jerarquía responde a la naturaleza cognitiva de los procesos involucrados. A diferencia de la acción mental 3, que requiere una coordinación explícita de cantidades de cambio, la coordinación de la tendencia de variables exige que el estudiante anticipe o reconozca la forma global del comportamiento convergente o asintótico, sin necesidad de razonar aún sobre magnitudes de variación específicas. Esto implica una evolución respecto a las primeras dos acciones, pues el estudiante ya no solo percibe que las variables cambian de manera interdependiente y en qué dirección, sino que comienza a identificar *cómo* se comportan a medida que cambian, especialmente cuando se aproximan a un valor límite. La omisión de esta tendencia en las representaciones gráficas de los estudiantes sugiere la incorporación de una acción mental intermedia antes de cuantificar el cambio, es decir, antes de AM3. Así, el orden propuesto no es arbitrario, sino que responde a una necesidad empíricamente constatada y conceptualmente coherente dentro de la progresión cognitiva del razonamiento covariacional.

Ahora, al preguntarse cuál es la diferencia entre la dirección de cambio y la tendencia del cambio, podría aclararse de la siguiente manera. La dirección de cambio de una variable dependiente y con respecto a una variable independiente x, se refiere a si y aumenta, disminuye o se mantiene constante cuando x cambia en un intervalo dado. Esto se asocia con el signo de la razón de cambio así: función creciente (razón de cambio positiva), función decreciente (razón de cambio negativa), función constante (razón de cambio nula). La dirección de cambio describe la orientación del cambio, no su intensidad ni su destino.

Por otra parte, se entiende la tendencia del cambio como la anticipación de valores límite o comportamientos asintóticos. Es decir, la tendencia del cambio se refiere a qué valor tiende la variable dependiente cuando la variable independiente tiende a un valor (finito o infinito) dado, es decir, cuál es su destino. Por tanto, esta idea está más asociada a la noción de límite.

Ahora, la intensidad de cambio se refiere a las cantidades de cambio, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea, es decir, a la medición de dicho cambio. Por tanto, las primeras acciones mentales no miden el cambio, solo lo describen en términos de la orientación y destino, mientras las últimas tres sí miden o cuantifican el cambio. Esto refuerza el argumento de que la nueva acción mental propuesta sería coherente, no contradictoria, con el espíritu del marco.

5.4. Articulación entre el razonamiento covariacional y el ciclo de modelación

La puesta en escena de la unidad de enseñanza diseñada en este trabajo de investigación también permitió realizar algunas reflexiones sobre la forma en que se relacionan los dos enfoques teóricos abordados aquí: la modelación matemática y el marco conceptual para el razonamiento covariacional. A partir de ello, se reportan algunos resultados como sigue.

Se identificó que las acciones mentales del razonamiento covariacional no se manifiestan de manera aislada en una fase particular del ciclo de modelación, sino que emergen de forma dinámica y recursiva a lo largo de varias fases de este proceso matemático. Es decir, en cada fase del proceso de modelación, pueden manifestarse cada una de las acciones mentales, pero no del mismo modo o con la misma intensidad.

Por ejemplo, durante las primeras fases, cuando los estudiantes se enfrentan a la situación problema y posteriormente realizan la experimentación y la recolección, clasificación y registro gráfico de datos, predominan AM1 y AM2; pues los estudiantes se centran en reconocer qué variables cambian, las relaciones de interdependencia que se pueden establecer entre ellas, y el comportamiento constante, creciente o decreciente en dichas relaciones. Dentro de los datos recopilados, se puede observar que la totalidad de los estudiantes realizó manualmente un registro gráfico, en cada una de las situaciones abordadas, en el que se manifestaba la interdependencia entre las variables y una dirección de cambio adecuada, pero no siempre con las cantidades y razones de cambio apropiadas.

Sin embargo, en otros casos, también se pueden evidenciar las demás acciones mentales en estas primeras fases del ciclo. Por ejemplo, en la variación acelerada, mientras realizaban la experimentación de la situación de la descarga de un archivo, los estudiantes reconocieron que la descarga era cada vez más rápida, a medida que transcurría el tiempo, lo cual es un comportamiento relacionado con AM3 Y AM4. Así mismo, algunos estudiantes realizaron un primer registro gráfico con las cantidades y razones de cambio de la forma más apropiada posible.

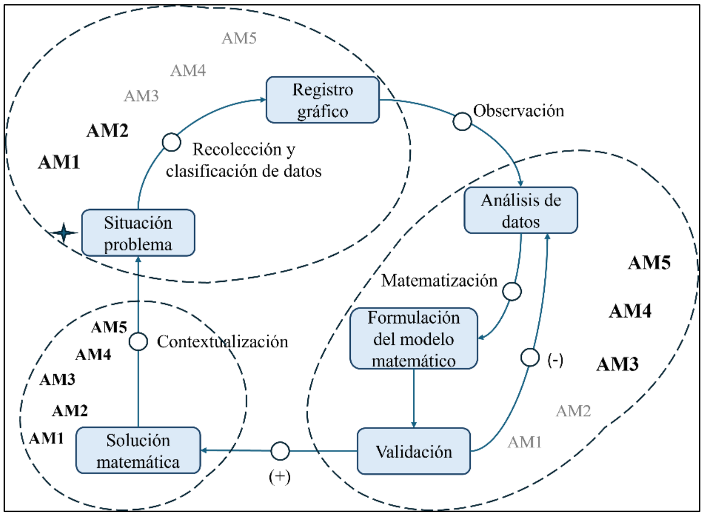
Ahora, en las fases de análisis de datos y formulación y validación del modelo matemático, aparecen con mayor fuerza AM3, AM4 y AM5 al calcular, comparar y coordinar razones de cambio promedio, así como al vincularlas con la pendiente de secantes en intervalos uniformes o no uniformes. Inicialmente, para la mayoría de los estudiantes resultó sencillo pensar en un modelo con la dirección de cambio adecuada, pero no con las cantidades de cambio correspondientes. Por ello, al validar dichos modelos, su atención se centró en evaluar y ajustar las cantidades y razones de cambio, más que en las relaciones entre variables y su dirección de cambio; pues asumían que estas características ya habían sido suplidas previamente.

Por ejemplo, en la variación convergente, el comportamiento de la temperatura en función del tiempo se representaba mediante una curva decreciente y convergente; sin embargo, algunos estudiantes construyeron representaciones mediante una recta decreciente. Por ello, al validar la forma en la que estaban covariando las magnitudes, en términos de las cantidades y razones de cambio, los estudiantes asumían que las relaciones de interdependencia y la dirección de cambio estaban correctos, pero necesitaban refinar sus modelos en términos de la variación, es decir, en la medida del cambio. Es así como en estas fases del ciclo de modelación, aparecían con mayor fuerza AM3, AM4 y AM5.

En la fase final, los estudiantes contextualizaban el modelo dentro de la situación problema inicial, lo describían y lo utilizaban para establecer predicciones futuras y dar solución a otros interrogantes dentro de la situación. Allí, se comunicaban mediante la terminología que involucran las cinco acciones mentales y lo reinterpretaban a la luz de estas. Por ejemplo, al abordar la variación cíclica, los estudiantes hicieron descripciones de sus modelos como las siguientes: *el modelo expresa que a medida que el tiempo crece, la iluminancia decrece y crece periódicamente (AM1 y AM2); el cambio en la iluminancia no es igual a lo largo del tiempo (AM3); la velocidad promedio a la que cambia la iluminancia no es constante (AM4); y, cada vez que los valores de la iluminancia se acercan a un valor máximo o mínimo esta cambia con menos rapidez (AM5).*

Figura 84

Articulación entre el ciclo de modelación y las acciones mentales



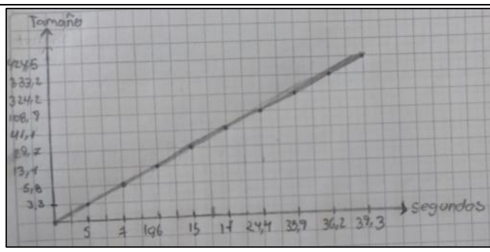
Estos resultados, esquematizados en la figura anterior, permiten concluir que las acciones mentales cumplen un rol transversal en el ciclo de modelación, pero no de manera homogénea: ciertas fases demandan de forma más intensa acciones particulares, mientras que otras fases las activan de forma implícita. Así, no puede establecerse una correspondencia rígida o estricta “AM–fase”, sino un entrelazamiento flexible y recursivo.

En consecuencia, la relación entre acciones mentales y fases de modelación no es lineal, sino procesual, recursiva y situada: los estudiantes pueden regresar a fases previas del ciclo y, en ese tránsito, reactivar o profundizar distintas acciones mentales según el tipo de variación y las representaciones disponibles. La modelación no solo promueve, sino que demanda activamente el razonamiento covariacional, porque las decisiones sobre los modelos (validación, refinamiento, interpretación) se sostienen en comparaciones de variaciones y razones de cambio.

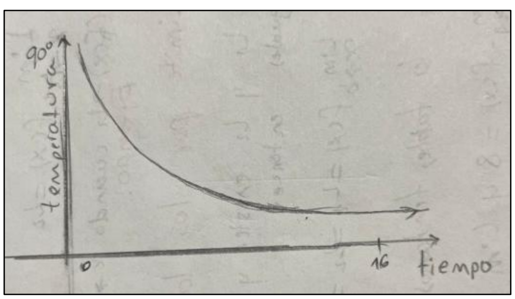
La evolución del razonamiento covariacional puede observarse en la medida en que los estudiantes atraviesan múltiples ciclos de modelación, es decir, a medida que tienen abordar nuevas situaciones para desarrollar nuevamente el ciclo. El siguiente es el caso de un estudiante que, en el estudio de la variación acelerada, demostró con certeza comportamientos de AM2, pero sus comportamientos respecto a AM3, AM4 y AM5 fueron limitados. Posteriormente, al modelar la situación de la variación convergente, demostró con mayor certeza comportamientos de AM3. Luego, en el estudio de la variación cíclica mostró con mayor fluidez comportamientos de AM4 y AM5. A continuación, se muestra brevemente algunas de las evidencias que permiten rastrear tal evolución.

Figura 85

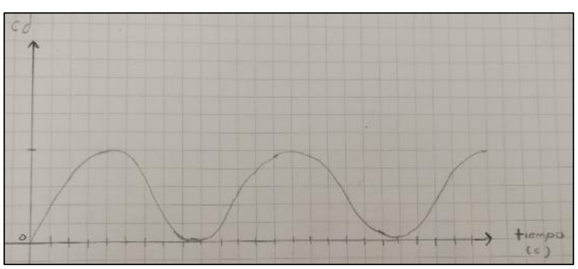
Evolución del razonamiento covariacional al realizar diferentes ciclos de modelación



"Hice la gráfica de esta manera porque es claro que cuando el tiempo aumenta se tiene más tamaño de archivo descargado. O sea, que a más tiempo, más archivo" [AM1 y AM2]



"En el experimento realizado se pudo observar que a medida que el tiempo pasa la temperatura disminuye, pero no lo hace de manera constante por lo que la gráfica no puede ser lineal" [AM1, AM2, AM3]



"Cuando se usó la fuente de luz se veía que el brillo aumentaba y disminuía con el paso del tiempo. [AM1 y AM2] *Sin embargo, la iluminancia no cambiaba de forma similar* [AM3] *sino que a veces era más rápida y a veces más lenta"* [AM4 y AM5]

Por el contrario, hubo casos en que los estudiantes, en términos de niveles de razonamiento, en algún taller daban indicios de estar en N3, pero en talleres posteriores, solo daban indicios con total certeza de alcanzar el N2. Así, cada vez que los estudiantes modelaron un problema nuevo, se apreciaron diferencias significativas en su razonamiento covariacional.

Como se definió en el marco conceptual, se concibe en este estudio un modelo matemático, en términos de Villa-Ochoa (2007), como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir, y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación. Así, las diferentes representaciones (gráficas, verbales, algebraicas) de la noción de función hacen parte de un modelo matemático. A partir de los datos, es posible inferir que las distintas representaciones también pueden activar diferentes acciones mentales. Por ejemplo, al utilizar la representación algebraica, solo en la variación directa y cíclica, se pudo observar que los estudiantes deducían con fluidez la dirección de cambio (AM2), mientras que en los demás tipos de variación no se evidenció este comportamiento. También, para todos los tipos de variación abordados, al utilizar la representación tabular, los estudiantes determinaron la dirección de cambio (AM2) y compararon datos consecutivos para determinar cantidades de cambio (AM3).

Los resultados de Montero y Vargas (2022) mencionados en los antecedentes de este documento sobre la relación entre el razonamiento covariacional y la modelación pueden corroborarse con este estudio. La modelación matemática y el razonamiento covariacional se potencian mutuamente en un proceso de desarrollo recíproco. Por un lado, al enfrentar situaciones que requieren modelar fenómenos del mundo real, los estudiantes se ven impulsados a identificar y coordinar cantidades que varían conjuntamente, y la forma en la que lo hacen, lo que favorece la activación y refinamiento de acciones mentales propias del razonamiento covariacional.

Por otro lado, a medida que este tipo de razonamiento se fortalece, los estudiantes adquieren una mayor capacidad para construir modelos matemáticos más precisos, coherentes y funcionales, que les permiten representar, predecir, explicar o resolver con mayor profundidad los problemas que enfrentan. Esta interacción dinámica entre ambos procesos enriquece tanto la comprensión matemática como las competencias para aplicar las matemáticas en contextos diversos.

5.5. Refinamiento de la conjetura del experimento

La conjetura inicial del experimento planteaba que la integración de actividades de modelación matemática, diseñadas desde la experimentación y mediadas por tecnologías digitales, permitiría a los estudiantes de cálculo diferencial avanzar progresivamente a través de los distintos niveles de razonamiento covariacional, promoviendo la construcción de modelos matemáticos cada vez más refinados sobre fenómenos asociados a diversos tipos de variación.

Tras la experimentación de la unidad de enseñanza, se puede explicar con mayor amplitud algunos aspectos relacionados con sus dos dimensiones: el qué enseñar y el cómo enseñarlo. Respecto al qué enseñar, se explicó antes que la conjetura alude a aquellas nociones teóricas y conceptuales que involucra el razonamiento covariacional; tales como, patrones, relaciones, cambio, aproximación, tendencia, dirección, tasas de cambio promedio, tasas de cambio instantánea, y los tipos de variación. Durante la experimentación, emergió la necesidad de otras nociones fundamentales, como puntos de inflexión, concavidad, límites, puntos máximos y mínimos, continuidad, derivabilidad, suavidad de una función, rectas secante y tangente, asíntotas, entre otras.

Cabe aclarar que no se pretende ser exhaustivo en la enumeración de todas las nociones relacionadas con el razonamiento covariacional, sino más bien señalar aquellas que son particularmente relevantes y necesarias para la implementación efectiva de la secuencia de enseñanza. El propósito de este reconocimiento es hacer explícitas estas nociones clave para que los profesores e investigadores que decidan implementar esta secuencia en el aula puedan anticipar y abordar adecuadamente conceptos fundamentales que podrían surgir durante el proceso. Reconocer estas nociones de manera anticipada no solo facilita la implementación, sino que también enriquece la comprensión y la capacidad de los estudiantes para abordar problemas matemáticos que involucren la covariación.

Ahora, respecto al cómo enseñar los contenidos matemáticos, la conjetura del experimento planteó inicialmente que fuera a través del proceso de modelación matemática; la experimentación y la toma de datos en distintos escenarios; y, el uso de tecnologías digitales, en particular, el uso del software de matemática interactiva GeoGebra. Sin embargo, tras la experimentación de la secuencia, es posible ampliar esta dimensión de la conjetura.

A lo largo del experimento, la conjetura se reafirmó en cuanto al potencial de la experimentación y el uso de GeoGebra para promover el desarrollo del razonamiento covariacional. Sin embargo, una observación clave durante el experimento es que la secuencia de enseñanza por sí sola no asegura con éxito el desarrollo del razonamiento covariacional, ni el desarrollo del proceso de modelación. Es fundamental el acompañamiento y las orientaciones del profesor, quien juega un papel crucial en promover otros procesos dentro del aula, tales como la socialización e institucionalización de ideas, y el control sobre las experimentaciones realizadas. En este sentido, el proceso de modelación debe ser guiado cuidadosamente y los escenarios deben estar bien estructurados y controlados. Esta intervención del profesor permite que los estudiantes se concentren en situaciones específicas, facilitando el control de la producción de modelos y evitando posibles desviaciones.

Aunque las actividades fueron diseñadas de forma controlada, algunos aspectos del experimento presentaron dificultades. Por ejemplo, las imprecisiones en la toma de datos o variables no consideradas, generó imprecisiones en las producciones de los estudiantes. Si las actividades no hubieran sido diseñadas con tal cuidado, los resultados podrían haber sido aún más dispares y difíciles de manejar.

La tecnología, aunque facilita la visualización y agiliza el tránsito de ideas, debe ser instrumentada por el profesor para cuestionar la fiabilidad de los resultados y para ayudar a los estudiantes a comprender cómo se obtienen esos resultados. La intervención del profesor es clave para garantizar que los estudiantes no solo se limiten a ver los resultados en la pantalla, sino que desarrollen una comprensión profunda de lo observado allí, además de explicar y justificar sus observaciones con fundamentos matemáticos, más allá de los cálculos y resultados obtenidos a través de la tecnología. El MEN (2004) establece que, al explorar las matemáticas en entornos dinámicos, se debe tener en cuenta como principios o consignas que enmarcan este proceso *dudar de lo que se ve* y *ver más de lo que se ve.*

De este modo, la conjetura inicial se mantuvo en su núcleo, la modelación matemática, mediada con tecnologías digitales, como vía para promover el desarrollo del razonamiento covariacional. No obstante, las consideraciones iniciales en sus dos dimensiones fueron enriquecidas tras la implementación del siguiente modo: En la dimensión del qué enseñar, se amplió el conjunto de nociones necesarias para acompañar el desarrollo del razonamiento covariacional, incorporando conceptos fundamentales que, si bien no fueron previstos inicialmente, emergieron como indispensables durante la implementación. En la dimensión del cómo enseñar, se hizo evidente que el diseño de actividades debe ir acompañado de una mediación del profesor activa e intencionada. Es indispensable un andamiaje didáctico que oriente, encauce y profundice las acciones de los estudiantes, articulando lo empírico con lo teórico, y favoreciendo la construcción progresiva de modelos matemáticos significativos.

Así, la conjetura se reformula reconociendo que el desarrollo del razonamiento covariacional no depende únicamente de los recursos o metodologías utilizados, sino de la forma en que estos son integrados y mediados dentro de un entorno didáctico cuidadosamente estructurado. En consecuencia, la reelaboración de esta componente del experimento de enseñanza termina basándose, como indican Molina, et al. (2011), en evidencias obtenidas con fundamentos teóricos y empíricos.

6. Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales conclusiones de la investigación reportada en este documento. En primer lugar, se responde a la principal pregunta de investigación; luego, se señalan otros resultados relevantes que aportan a la disciplina y que son producto de la intervención didáctica; seguidamente, se reconocen algunos de los alcances y limitaciones del estudio; y, finalmente, se presentan algunas perspectivas de investigación.

Así, respecto a la pregunta de investigación planteada, a saber: ¿qué comportamientos, asociadas a las acciones mentales del razonamiento covariacional, exhiben los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, cuando estudian la variación directa e inversa, acelerada, convergente, cíclica y escalonada a través de la modelación de problemas desde la experimentación y la mediación de GeoGebra? los resultados muestran que estos comportamientos no se presentaron de manera uniforme al abordar los distintos tipos de variación o situaciones problema. En algunos casos, el tipo de variación o situación influyó en el uso de las diferentes representaciones (tabular, analítica, gráfica) para describir la covariación entre las variables del problema; y, por tanto, en su forma de razonar covariacionalmente.

Así mismo, se presentaron casos de estudiantes que sustentaron las acciones mentales de un determinado nivel de razonamiento al abordar un tipo de variación, pero en actividades posteriores sustentaban acciones mentales de otro nivel, no necesariamente superior. Este hecho sugiere que, en lugar de una progresión lineal, el razonamiento covariacional podría evolucionar, estancarse o incluso retroceder según el tipo de variación o problema abordado. Por lo tanto, la caracterización de los estudiantes únicamente en términos de niveles de razonamiento puede resultar limitada, ya que estos niveles son dinámicos y dependen del tipo de problema o variación en cuestión.

Adicionalmente, al analizar los datos se observó la necesidad de integral al *marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional* de Carlson et al. (2002) una nueva acción mental que contemple de manera más explícita o directa la noción de límite de una función. Esta nueva acción mental surgió al observar que hay estudiantes que, a pesar de que coordinan la dirección y las razones de cambio, omiten otras características que tienen que ver con la tendencia entre las variables. Además, hacer visible esta nueva acción mental podría promover más adelante el tránsito de AM4 a AM5; puesto que la razón de cambio instantánea se basa en la idea del límite del cociente diferencial.

A continuación, se presentan los comportamientos asociados a cada acción mental, los cuales incluyen tanto hallazgos originales de esta investigación como comportamientos previamente documentados en la literatura y corroborados mediante los datos recolectados, lo que permite dar una respuesta directa a la pregunta de investigación:

Tabla 3

Caracterización de los comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional

Acción mental (AM)	**Comportamientos asociados**
AM1. Coordinación de variables	Reconocer las variables involucradas en cada situación y expresar, a través de diferentes representaciones, las relaciones de interdependencia que se pueden establecer entre ellas; verbalizar, de forma oral o escrita, por medio del lenguaje natural, la coordinación de las variables; reconocer un punto en el plano cartesiano como la manifestación de la variación simultánea de ambas cantidades, explicando que sus coordenadas (x, y) expresan una regularidad entre los valores

	de las variables, donde cada valor de x determina exactamente un valor de y; expresar, a partir de representaciones tabulares, que cada valor de una variable determina exactamente un valor de la otra; y, utilizar el lenguaje algebraico para expresar la relación de interdependencia entre las variables ($f(x) = y$).
AM2. Coordinación de la dirección de cambio	Identificar y describir si la variable de salida aumenta, disminuye o se mantiene constante, a medida que la variable de entrada cambia; construir una representación gráfica que muestre la relación entre las variables, asegurándose de que la dirección del cambio de la variable de salida corresponda con los cambios en la variable de entrada; coordinar la dirección del cambio a partir de la representación algebraica, según el tipo de variación; señar la dirección a partir de la ubicación espacial de ciertos puntos en el plano cartesiano; y, explicar la consistencia entre las diferentes representaciones (verbal, tabular, gráfica y analítica) asegurando que todas reflejen la misma dirección de cambio.
AM3. Coordinación de la tendencia de cambio	Anticipar y describir hacia qué valor se aproxima la variable dependiente cuando la variable independiente se aproxima a un valor específico, sin necesidad de que se alcance; reconocer puntos críticos de las funciones, como asíntotas, discontinuidades, o puntos de acumulación, y ser capaz de describir cómo las variables se comportan a medida que la variable independiente se aproxima a dichos puntos; comparar el comportamiento de funciones continuas y discontinuas, señalando cómo las tendencias de las variables varían según se aproximan a un punto, ya sea de forma continua o con saltos o asíntotas; y, construir una representación gráfica que sea coherente con la tendencia de las variables.
AM4. Coordinación de las cantidades de cambio	Coordinar la cantidad de cambio de la variable de entrada (x), con la cantidad de cambio en la variable de salida (y), identificando que cada intervalo de amplitud Δx determina exactamente un intervalo de amplitud Δy; comparar diferencias Δy en los valores de salida al realizar incrementos constantes Δx en la variable de entrada, y, a partir de ello, expresar el comportamiento de la cantidad de cambio en la variable de salida, señalando si es constante, aumenta o disminuye a lo largo del dominio; coordinar el signo de las cantidades de cambio con la dirección de cada una de las variables; utilizar representaciones tabulares para calcular

	diferencias entre valores no consecutivos de la variable de entrada y de sus respectivas imágenes en la variable de salida, analizando cómo varían estas diferencias y si se mantiene una relación constante o no entre ellas; y, reconocer y coordinar las cantidades a partir de la situación misma, por medio de la experimentación, es decir, a través de la representación verbal de una función.
AM5. Coordinación de la razón de cambio promedio	Reconocer que la razón de cambio promedio resulta de comparar, mediante un cociente, las cantidades de cambio de la variable de entrada y de la variable de salida; comparar diferentes razones de cambio promedio en intervalos consecutivos del dominio y determinar su comportamiento tendencial; señalar que la razón de cambio tiende a cero alrededor de puntos máximos, puntos mínimos y puntos de inflexión de la función; y que es exactamente cero cuando la función es constante; identificar a partir de la expresión algebraica de una función, si su razón de cambio promedio se mantiene constante o varía en diferentes intervalos, estableciendo una relación entre la variabilidad de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y el tipo de función (lineal o no lineal); coordinar el signo de la razón de cambio con la dirección de cambio de la función; expresar que el signo de la razón de cambio promedio está determinado por el signo de la cantidad de cambio en la variable de salida; construir rectas secantes contiguas sobre la representación gráfica, y relacionar la razón de cambio promedio con la pendiente de dichas rectas; calcular numéricamente la diferencia entre los extremos de un intervalo en la variable de entrada y la diferencia entre los extremos del intervalo correspondiente en la variable de salida, y a partir de ello, encontrar un patrón para la razón de cambio; y, asociar la razón de cambio promedio de la función con la noción de velocidad promedio.
AM6. Coordinación de la razón de cambio instantánea	Comprender que la razón de cambio promedio conduce a la razón de cambio instantánea, al considerar cantidades de cambio Δx cada vez más y más pequeñas; asociar la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente; interpretar la razón de cambio instantánea nula y asociarla con valores máximos y mínimos; identificar y marcar puntos de inflexión en una gráfica, explicando cómo en estos puntos la razón de cambio instantánea pasa de aumentar a disminuir o

> viceversa; relacionar la concavidad de la gráfica con el comportamiento de la razón de cambio, indicando que una concavidad hacia arriba corresponde a una razón de cambio creciente y una concavidad hacia abajo a una razón de cambio decreciente; asociar la pendiente de la recta tangente con la velocidad instantánea a la cuál cambia una función en un punto específico; utilizar rectas tangentes para analizar la razón de cambio instantánea en distintos puntos de la función; construir una gráfica consistente con la razón de cambio instantánea de la función, asegurándose de que refleje con precisión la variabilidad en la rapidez del crecimiento o decrecimiento, los cambios de concavidad y la presencia de puntos de inflexión, puntos máximos y mínimos, entre otras características.

Ahora, el análisis de datos también permitió plantear otros resultados que no corresponden directamente a la pregunta de investigación, pero que son relevantes para la línea de investigación aquí abordada, en tanto que integra dos constructos conceptuales: la modelación matemática y el razonamiento covariacional. Al respecto, se concluye que existe una relación estrecha entre cada etapa del ciclo de modelación y la activación de cada una de las acciones mentales. Se identificó que las acciones mentales cumplen un rol transversal en el ciclo de modelación, pero no de manera homogénea: ciertas fases demandan de forma más intensa acciones particulares, mientras que otras fases las activan de forma implícita. De esta manera, no puede establecerse una correspondencia rígida o estricta “AM–fase”, sino un entrelazamiento flexible y recursivo.

En las dos primeras fases del ciclo, esto es, en la situación problema y en el registro gráfico, así como en el proceso intermedio de experimentación y recolección de datos, cobran más fuerza las dos primeras acciones mentales (AM1 y AM2). En las fases de análisis de datos, formulación y validación de modelos, así como en los procesos intermedios, aparecen con mayor fuerza AM3, AM4 y AM5. Finalmente, en la etapa de solución matemática y contextualización, las cinco acciones mentales aparecen con la misma intensidad. La justificación y explicación de estos resultados se encuentra en el apartado 5.4.

Es importante señalar que implementar la modelación como estrategia didáctica en el aula, particularmente en la enseñanza del cálculo, implicó para el profesor el afrontar diversos retos. Uno de los principales fue incorporar herramientas digitales en un contexto con recursos limitados, lo que llevó a promover el uso de recursos digitales personales de los estudiantes dentro del aula regular. Además, fue necesario diseñar cuidadosamente las situaciones experimentales, no solo para fomentar el razonamiento covariacional, sino también para garantizar la seguridad de los estudiantes (como en el caso del experimento que involucró agua caliente) y mantener el foco en la actividad matemática. La planificación rigurosa incluyó prever posibles desvíos en la dinámica de clase, seleccionar o programar simuladores adecuados y gestionar la recolección de datos reales con instrumentos como termómetros o luxómetros. Estos desafíos pusieron de manifiesto el rol del profesor como mediador, gestor de recursos y diseñador de experiencias que articulan lo experimental con lo matemático.

Respecto al experimento de enseñanza como estrategia de investigación, se puede confirmar su potencial para realizar estudios en la disciplina. Esta estrategia, además de orientar el estudio de manera sistemática, genera diversos resultados, tanto para la práctica docente, como para el desarrollo teórico y conceptual de la disciplina. En este caso, el experimento posibilitó el diseño y refinamiento de una secuencia de enseñanza para abordar las nociones básicas del cálculo desde un enfoque covariacional y de la modelación. Además, fomentó la obtención de los resultados teórico-conceptuales mencionados anteriormente.

También, dentro del experimento de enseñanza se planteó una conjetura que fue refinada y que puede orientar el proceso de enseñanza del cálculo diferencial, en tanto que contempla sus contenidos básicos y la forma en que pueden ser enseñados tales contenidos.

Se reconocen algunos alcances y limitaciones de la investigación de corte teórico, siendo una de las principales, la omisión de constructos recientes sobre el razonamiento covariacional, como el *razonamiento continuo suave* y *el razonamiento discontinuo (a trozos*). También se reconocen limitaciones de corte metodológico relacionadas con el diseño de la secuencia de enseñanza. A pesar del esfuerzo por ofrecer situaciones contextualizadas y prácticas para los estudiantes, se pudo haber considerado la inclusión de contextos o tareas más vinculados a sus futuras prácticas profesionales. Ahora, dado que el estudio se realizó con una población de 35 estudiantes de un programa de ingeniería, mientras cursaban por primera vez un cuso de cálculo diferencial a nivel universitario, es importante considerar que los resultados obtenidos tienen un carácter localizado y específico a este grupo en particular. Esto limita la generalización de los hallazgos a otros contextos educativos o a estudiantes de diferentes carreras o niveles.

Finalmente, se presentan algunas posibles líneas de investigación que podrían contribuir al desarrollo y la profundización de los hallazgos obtenidos en este estudio. En primer lugar, es fundamental validar y confirmar la propuesta de la nueva acción mental sugerida en este trabajo, así como los comportamientos asociados a ella. Esta validación permitiría fortalecer la base teórica y empírica del enfoque planteado. Asimismo, se propone ampliar el marco conceptual del razonamiento covariacional al contemplar una acción mental centrada en la noción de integral definida. Otro aspecto relevante es la posibilidad de diseñar tareas que simulen situaciones propias de las futuras prácticas profesionales de los estudiantes, esto fortalecería la implementación de la modelación matemática a nivel universitario. Para ello, sería necesario llevar a cabo estudios más amplios desde un enfoque etnográfico, que permita explorar las prácticas profesionales de ingenieros, científicos, economistas y otros usuarios de las matemáticas. En relación con las limitaciones de la población estudiada, resulta interesante replicar este estudio en otros programas universitarios donde los estudiantes reciban formación matemática, así como en diferentes niveles educativos, como un curso de precálculo o incluso con estudiantes que ya hayan aprobado el curso de cálculo.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en la Educación Matemática* (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Berrío, J., Peña, Z. y Torrenegra, M. (2021). Desarrollo del proceso de modelación matemática en licenciados en formación. *Revista Interamericana de Investigación Educación y Pedagogía* RIIEP, 14(1), 79-101.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Editorial Universidad de Antioquia.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 5, 352-378.

Carreira, S & Baioa, A. (2011). Students' Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 211-220). *Netherlands: Springer.*

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. [Tesis doctoral] Arizona State University, Tempe.

Castro, L. y Forero, C. (2019). *Razonamiento covariacional con tecnologías digitales, un camino hacia el cálculo*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Drijvers, P., & Sinclair, N. (2023). The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM–Mathematics Education*, 56(2), 239-248.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por Geogebra.* Ediciones UIS.

Gonzales, D. (2022). Applying Quantitative and Covariational Reasoning to Think About Systems: The Example of Climate Change. En G. Akar, İ. Zembat, S. Arslan, & P. Thompson (Eds.), *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (pp. 281–313). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_11

Greefrath, G., Siller, H. S., & Weitendorf, J. (2011). Modelling considering the influence of technology. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 315-329). *Netherlands: Springer.*

Harel, G. (2013). Intellectual need. En K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). Nueva York: Springer.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Hitt, F., y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista colombiana de educación*, (73), 151-175.

Ímaz, C., Moreno. L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo: las trampas del rigor*. Trillas. México.

Johnson, H. (2022). An intellectual need for relationships: Engendering students' quantitative and covariational reasoning. En G. Akar, İ. Zembat, S. Arslan, & P. Thompson (Eds.), *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (pp. 17–34). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_2

Kaiser, G. & Maass, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom – Problems and opportunities. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). New York: Springer.

Márquez, C., Gaviria, C. y López, Y. (2019). Evaluación del desarrollo de competencias a partir de la modelación matemática. *Revista Ingenierías USBMed*, 10(2), 8-15.

Martínez-Miraval, M. A. y García-Rodríguez, M. L. (2023). El razonamiento covariacional y su papel en el estudio de la integral definida desde la resolución de problemas. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted*, (54), 154-171. https://doi.org/10.17227/ted.num54-16602

MEN. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, Colombia.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias,* 29(1), 75-88.

Montero Moguel, L. E., y Vargas Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248.

Moreno, L. (2014). *Educación Matemática: del signo al píxel.* Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Nava, F. (2021). *Razonamientos relacionados con el concepto de límite de una función de estudiantes de ingeniería.* [Tesis de maestría]. Cinvestav, México.

Niss, M. (2012). Models and Modelling in Mathematics Education. *EMS Newsletter*. 86, 49-52.

Paoletti, T., & Vishnubhotla, M. (2022). Constructing covariational relationships and distinguishing nonlinear and linear relationships. En G. Akar, İ. Zembat, S. Arslan, & P. Thompson (Eds.), *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (pp. 133–167). Springer International Publishing.

Rodríguez, C. (2020). *La Comprensión de la Derivada como Razón de Cambio: Habilidades Cognitivas Vinculadas al Estudio Covariacional*. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a dynamic geometry system. *ZDM–Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6

Steen, L. (1998). La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Revista Educación Matemática,* 26(1), 207-226.

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M.J., Pérez-Pascual, M.A. (2023). Learning Difficulties with the Concept of Function in Maths: A Literature Review. *Education Sciences*, 13(5), 495. https://doi.org/10.3390/educsci13050495

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Revista TecnoLogicas*, 19, 63-86.

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, J., y Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. Alexandria: *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180.

Villa-Ochoa, J. y Jaramillo, C. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 701-712). *Netherlands: Springer.*

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25. https://doi.org/10.17227/ted.num31-1646

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa., J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Zhao, S., & Guo, Y. (2022). The Complexity of Mathematical Expressions in Mathematics Textbooks. En C. Qi, L. Fan, J. Liu, Q. Liu, L. Dong (Eds.), *Recent Advances in Mathematics Textbook Research and Development* (pp. 341-347). Springer.

Apéndices

Apéndice A. Enlace a cada uno de los talleres de la secuencia de enseñanza en formato libro de GeoGebra

- Libro Taller 1: https://www.geogebra.org/m/pkdsqew6

- Libro Taller 2: https://www.geogebra.org/m/xfmbj7am

- Libro Taller 3: https://www.geogebra.org/m/hkzrmbqb

- Libro Taller 4: https://www.geogebra.org/m/gjf6enpm

- Libro Taller 5: https://www.geogebra.org/m/dewdrgsm

Apéndice B. Talleres de la secuencia de enseñanza en formato de hoja de trabajo

Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Cálculo I	**Fecha:** **Profesor:** **Grupo:** **Estudiante(s):**

Taller 1: carga de la batería de un teléfono

Actividad 1. Información y exploración libre

Las baterías recargables son un componente esencial en los dispositivos electrónicos modernos, especialmente en los teléfonos móviles que utilizamos a diario. La carga y descarga de una batería son procesos fundamentales que involucran reacciones químicas complejas, influenciadas por factores como la calidad del material, el uso cotidiano y las condiciones externas**.** Entender cómo funcionan las baterías, analizar el comportamiento de su carga, y qué aspectos determinan su rendimiento es crucial no solo para prolongar su vida útil, sino también para tomar decisiones informadas al elegir dispositivos. A continuación, responde las siguientes preguntas:

- **a)** ¿Qué unidades de medida se utilizan para expresar la capacidad de una batería?
- **b)** ¿De qué materiales están compuestas las baterías? ¿cómo almacenan energía? ¿Cómo funciona el proceso de carga de un teléfono?
- **c)** ¿Cómo se mide el porcentaje de carga de una batería? ¿Qué significa realmente que un dispositivo tenga "50% de carga"?
- **d)** Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

- **a)** Realiza el siguiente experimento: deja descargar tu teléfono hasta el 0%; luego, conéctalo a una fuente de energía e inmediatamente, con otro teléfono, empieza a cronometrar el tiempo.
- **b)** En una tabla, registra al menos diez valores sobre el porcentaje de carga del teléfono en relación con el tiempo.
- **c)** Realiza un bosquejo de la gráfica que representa de mejor manera el fenómeno de la carga del teléfono en relación con el tiempo. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente
- **d)** Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar el modelo que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica** tu elección

b) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Qué valores puede tomar cada una de ellas? ¿existe una relación de interdependencia entre ellas? **¿por qué?**

c) ¿Cómo se comportan los valores del porcentaje de carga con respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta

d) Describe la dirección de cambio de la variable independiente, de la variable dependiente y de la función f en general.

e) Compara la gráfica que bosquejaste en el ítem *c* de la actividad 2.1 con la gráfica encontrada en el ítem a de la actividad 2.2, y describe ampliamente sus similitudes o diferencias.

f) ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica, la gráfica y la tabla? ¿Qué representan? **Justifica** tus respuestas.

g) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2.

h) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy en los diferentes intervalos de igual amplitud Δx. Escribe las expresiones algebraicas con las que se calculan estos valores. **Explica** tu respuesta

i) ¿Qué valores toma el cociente (razón) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores de x_1? ¿por qué? ¿Qué representa dicho cociente?

j) Halla la pendiente de la recta que representa a la función $f(x)$ ¿Qué representa dicha pendiente? ¿Qué relación tiene con el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? **Explica** tu respuesta.

k) ¿Cuál es la velocidad de carga del teléfono? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta y la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Describe la velocidad de la carga del teléfono de manera general. **Justifica** tus respuestas.

l) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y responde las preguntas a continuación:

$$f(x) = 3x; \qquad g(x) = 5x + 3; \qquad h(x) = \frac{3}{x}$$

a) Describe la variación que presenta cada una de las tres funciones. ¿Cómo se llaman estos tipos de variación? **Explica**

b) ¿Qué sucede cuando se dividen los valores de $f(x)$ entre los valores de x correspondientes? **¿Por qué?**

c) ¿Qué sucede cuando se multiplican los valores de $h(x)$ entre los valores de x correspondientes? **¿Por qué?**

d) ¿Podría decirse que la función g representa una relación entre variables directamente proporcionales? **¿Por qué?**

e) ¿Qué diferencias o similitudes puedes establecer entre cada una de las funciones? **Explica**

f) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Cálculo I	**Fecha:** **Profesor:** **Grupo:** **Estudiante(s):**

Taller 2: descarga de un archivo de internet

Actividad 1. Información y exploración libre

En la era digital, la transferencia de información se ha convertido en una necesidad cotidiana que conecta personas, negocios y sistemas en todo el mundo. Descargar un archivo desde la web es un proceso común que permite acceder a datos, programas y recursos desde cualquier lugar. Este proceso está regido por diversos factores, como la velocidad de la conexión a internet, el tamaño del archivo y la eficiencia de los protocolos de transferencia. A continuación, responde las siguientes preguntas:

- **a)** ¿Qué unidades de medida se utilizan para medir el tamaño de los archivos electrónicos?
- **b)** ¿Qué factores influyen en la velocidad de descarga de un archivo desde internet?
- **c)** Si se conoce el tamaño del archivo y el tiempo de descarga, ¿cómo podríamos determinar la velocidad promedio de descarga?
- **d)** Cuando subimos un archivo a la nube o lo transferimos a otro dispositivo por medio de internet, ¿dónde se almacenan realmente esos datos? ¿Cómo viajan desde nuestro dispositivo hasta su destino y qué procesos ocurren en el camino?
- **e)** Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

- **a)** En el siguiente enlace se presenta la simulación de descarga de un archivo desde una página de internet. Ábrelo y explora la situación. https://fernando-uis.github.io/arch/DownloadSimulator.html
- **b)** En una tabla, registra al menos diez datos del tamaño del archivo descargado en relación con el tiempo.
- **c)** Realiza el bosquejo de la gráfica que representa de mejor manera los datos recolectados previamente. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajusta a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Qué valores puede tomar cada una de ellas? ¿existe una relación de interdependencia entre ellas? **¿por qué?**

c) ¿Cómo se comportan los valores del tamaño del archivo con respecto al tiempo? **Explica** tu respuesta

d) Compara la gráfica que bosquejaste en el ítem c de la actividad 2.1 y describe sus similitudes o diferencias.

e) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2.

f) Describe el comportamiento de la cantidad de cambio Δy para diferentes intervalos con la misma amplitud Δx.

g) ¿Qué relación encuentras entre el signo de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la dirección de cambio de la función?

h) ¿Qué valores toma la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alrededor del punto más bajo de la función? ¿A qué tiende la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x_1 tiende a infinito?

i) En el applet de GeoGebra, activa las opciones *Recta secante* y *Recta tangente.* ¿Qué sucede con estas dos rectas, y sus pendientes m_1 y m_2, a medida que Δx tiende a cero? Completa la siguiente tabla para diferentes valores de x_1 y con $\Delta x = 0.05$.

x_1	**Pendiente de la recta tangente**	**Pendiente de la recta secante**	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

j) ¿Qué observas entre los valores de la segunda, tercer y cuarta columna de la tabla anterior? A partir de los resultados anteriores, escribe dos expresiones algebraicas que te permitan calcular la pendiente de la recta secante y de la recta tangente a la función en el punto P_1. **Explica y justifica** ampliamente tus respuestas.

k) ¿Cómo es el comportamiento de la recta tangente y de su pendiente a medida que x tiende a infinito? **Justifica** tu respuesta.

l) ¿Aproximadamente con qué rapidez cambia el tamaño del archivo alrededor de los 10 segundos? ¿qué relación tiene este valor con el de la pendiente de la recta tangente? Describe la velocidad de descarga del archivo de manera general. **Justifica** tus respuestas.

m) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y responde las preguntas a continuación:

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = Ln(x)$$

a) ¿Cuál es el dominio y el rango de cada función? **¿Por qué?**

b) Analiza la dirección de cambio y la razón de cambio promedio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ para cada una de las funciones. A Partir de lo anterior, describe cómo varía cada función y compara sus diferencias y similitudes. **Explica ampliamente**

c) De acuerdo con lo explorado en la pregunta anterior, ¿qué nombre recibe cada tipo de variación que presentan las funciones? **Explica ampliamente**

d) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Cálculo I	**Fecha:** **Profesor:** Luis Fernando Muñoz **Grupo:** **Estudiante(s):**

Taller 3: Temperatura de una bebida caliente

Actividad 1. Información y exploración libre

La temperatura es una medida que nos permite saber qué tan caliente o frío está un objeto o un ambiente. Surgió como una necesidad para entender y controlar los cambios que ocurren en nuestro entorno, como el clima, la cocción de los alimentos o el funcionamiento de máquinas. Medir la temperatura ha permitido comprender y controlar estos fenómenos, estableciendo escalas y métodos que garantizan precisión y uniformidad, fundamentales para el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la vida diaria. A continuación, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué unidades de medida conoces para expresar la temperatura? ¿cuál es la más utilizada y por qué crees que es así?

b) ¿Qué instrumentos conoces para la medición de la temperatura?

c) ¿De qué manera podrías predecir el momento en el cual tu café está a la temperatura ideal para tomarlo?

d) Discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

a) A continuación, el profesor realizará un experimento en el que calentará una bebida hasta alcanzar una temperatura elevada y luego la dejará enfriar. Observa con atención y registra el tiempo transcurrido y la temperatura de la bebida cada vez que se realice una medición.

b) Realiza el bosquejo de la gráfica que represente de mejor manera la situación anterior. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente

c) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

2.2. Formulación y validación del modelo

a) En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) ¿Qué representa cada punto punto (x, y) sobre la gráfica?

c) Abre el archivo *Explorador de modelos* y en la barra de entrada introduce la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2.

d) Escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático encontrado anteriormente, en términos de las variables involucradas, el comportamiento de dichas variables, la dirección de cambio de cada una de las variables y de la función en general, el comportamiento de las cantidades de cambio, el comportamiento de la razón de cambio promedio, entre otros aspectos.

e) Describe ampliamente el comportamiento de las rectas tangente y secante, y el de cada una de sus pendientes a lo largo del dominio. Explica la relación existente entre ambas rectas, así como la información que ofrecen acerca del comportamiento de la función en general.

f) Explica cómo sería el comportamiento de la velocidad de enfriamiento de la bebida a lo largo del tiempo; representa gráficamente esta situación.

g) ¿En qué instante la bebida tendrá una temperatura ideal para tomarla? **Explica** tu respuesta.

h) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 3. Tarea retadora

Si un objeto o cuerpo con temperatura inicial T_0 se coloca en un medio que mantiene su temperatura constante T_m, la *ley de enfriamiento de Newton* establece que la temperatura T del objeto en el instante t está dada por $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$. A partir de esta información, desarrolla los siguientes ítems.

a) Un agente forense llega a una escena del crimen y encuentra un cuerpo en el piso de una habitación. Seguidamente, procede a medir la temperatura ambiente y la temperatura del cadáver, obteniendo valores de 22,8°C y 35°C respectivamente. 10 minutos después, volvió a medir la temperatura del cadáver y encontró que era de 32°C. Encuentra un modelo matemático que te permita expresar la temperatura en función del tiempo para la situación dada. **Explica** tu procedimiento

b) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la defunción de la persona hasta el momento en que llegó el agente forense?

c) Describe ampliamente el modelo encontrado, en términos de su dirección de cambio, su variación, su pertinencia para el problema, etc.

d) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Cálculo I	**Fecha:** **Profesor:** Luis Fernando Muñoz **Grupo:** **Estudiante(s):**

Taller 4: Iluminancia

Actividad 1. Información y exploración libre

La *iluminancia* es una medida que cuantifica la cantidad de luz que incide en una superficie por unidad de área, indicando "qué tan fuerte es la luz" que llega a una superficie. A continuación, responde las siguientes preguntas:

- **a)** ¿Qué instrumentos son utilizados para medir la iluminancia?
- **b)** ¿Qué unidades se emplean para medir la iluminancia?
- **c)** Para diseñar ambientes visualmente cómodos, es necesario tener en cuenta la intensidad de luz presente en tales lugares, ya que un nivel alto puede causar fatiga visual y deslumbramiento. ¿Cuáles son los niveles de iluminancia recomendados para ambientes visualmente cómodos?
- **d)** Discute tus respuestas con el profesor y los demás compañeros. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

- ***a)*** En el siguiente enlace se presenta la simulación de una lámpara intermitente. Ábrelo y explora la situación *https://fernando-uis.github.io/Calculus/FlashingLampSimulator.html*
- **b)** Utiliza un luxómetro y un cronómetro para medir cómo cambia la iluminancia con el tiempo en el simulador anterior. Registra al menos 15 valores en una tabla.
- **c)** Realiza el bosquejo de una gráfica que represente de mejor manera la situación anterior. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

2.2. Formulación y validación del modelo

- **a)** En la hoja de cálculo de GeoGebra, registra los datos que recopilaste en la actividad anterior. Luego, utiliza la herramienta *Análisis de Regresión de dos variables* para encontrar la función que mejor se ajuste a los datos. ¿Cuál es el modelo matemático que mejor se ajusta? **Justifica tu elección**

b) En el siguiente applet, introduce en la barra de entrada la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2. Luego, escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático, en términos de las variables involucradas, el comportamiento de dichas variables, la dirección de cambio de cada una de las variables y de la función en general, el comportamiento de las cantidades de cambio Δy y Δx, el comportamiento de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a lo largo del dominio, entre otros aspectos.

c) ¿En qué instantes x_1 se presenta la mayor y la menor iluminancia y qué valores toma la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en dichos instantes x_1, si $\Delta x = 0.05$? **Explica** ampliamente.

d) Discute tus respuestas con el profesor y los demás compañeros. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3. Tarea retadora

Considera las siguientes funciones y desarrolla los ítems a continuación:

$$f(x) = Cos(x) \qquad g(x) = Tan(x)$$

a) Realiza una descripción de cada función, teniendo en cuenta su dominio, rango, dirección de cambio, la razón de cambio promedio $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ y variación. **Explica ampliamente**

b) Escribe una conclusión general que sintetice los principales aprendizajes adquiridos con la realización de este taller.

<table>
<tr><td rowspan="4">Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Cálculo I</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Profesor: Luis Fernando Muñoz</td></tr>
<tr><td>Grupo:</td></tr>
<tr><td>Estudiante(s):</td></tr>
</table>

Taller 5: tarifa de estacionamiento

Actividad 1. Información y exploración libre

En el *Centro Comercial Cacique,* en Bucaramanga, se presta el servicio de parqueadero a sus clientes, para facilitar la movilidad de los visitantes mientras realizan sus compras, disfrutan de la oferta gastronómica o participan en actividades de entretenimiento dentro del centro comercial.

a) Abre el siguiente enlace y describe lo que observas allí: https://fernando-uis.github.io/Sim/ParkingTicket.html.

b) ¿Qué factores influyen en el costo de estacionamiento de un vehículo en el centro comercial? Explica

c) Escribe una conclusión en la que expliques cómo funcionan las tarifas de estacionamiento en un parqueadero de manera general.

d) Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. Escribe tus conclusiones.

Actividad 2. Exploración dirigida

Actividad 2.1. Recolección y análisis de datos

Dentro del parqueadero del *Centro Comercial Cacique* se encuentran carteles como el que se proporciona a continuación. A partir de la información de la cartelera, desarrolla los dos siguientes ítems:

Tarifas de cobro de estacionamiento

1. Estadía inferior a 15 minutos no genera cobro de estacionamiento
2. Para motocicletas, valor de hora o fracción $1.500 de lunes a jueves. De viernes a domingo y festivos valor hora o fracción $1.800
3. Para carros, valor de hora o fracción $2.900 de lunes a jueves. De viernes a domingo y festivos valor hora o fracción $3.300
4. Por compras iguales o superiores a $50.000 en los establecimientos de comercio *Falabella* y *Éxito* se conceden dos horas de estacionamiento gratuitas no acumulables. Cine Colombia regala 4 horas de estacionamiento por entrar a ver una película.
5. Valor por noche de estacionamiento $54.000
6. El parqueadero para bicicletas es gratuito.

Cacique
el centro comercial

a) Realiza un bosquejo de la gráfica que represente la tarifa de estacionamiento para el caso en que el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tiendas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

b) Registra en una tabla al menos diez datos sobre el costo de estacionamiento para el caso anterior, es decir, cuando el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tiendas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

2.2. Formulación y validación del modelo

a) Representa algebraicamente la interdependencia entre el costo de estacionamiento y el tiempo para el caso considerado anteriormente, es decir, cuando el vehículo es una motocicleta que estuvo estacionada un martes y no consumió nada dentro de las tientas que ofrecen descuento de parqueadero. **Explica** tu procedimiento y resultados ampliamente.

b) En el applet *Explorador de modelos* introduce en la barra de entrada la expresión algebraica del modelo matemático encontrado en el ítem *a* de la actividad 2.2. Luego, escribe un párrafo en el que describas detalladamente el modelo matemático.

c) ¿A qué tiende la función cuando el tiempo se aproxima a cada valor entero? **Justifica** tu respuesta.

d) ¿A qué tiende la función cuando el tiempo tiende a infinito? **Justifica** tu respuesta.

e) Discute tus resultados con tus compañeros y el profesor. Escribe tus conclusiones.

Actividad 3. Tarea retadora

Teniendo en cuenta la cartelera expuesta en el parqueadero del *Centro Comercial Cacique*, considera el caso en el que el vehículo es un carro que se estacionó un miércoles y su propietario ha hecho compras superiores a $50.000 dentro del almacén *Éxito*.

a) ¿Cuánto deberá pagar el propietario por el estacionamiento de su vehículo, si estuvo parqueado 2 horas? ¿Si estuvo parqueado 3 horas? ¿Si estuvo parqueado 5 horas? **Explica** tus respuestas.

b) Encuentra un modelo matemático que represente la situación considerada anteriormente. Descríbelo teniendo en cuenta el tipo de variación y demás características. **Explica** tu respuesta.