Proceso Comunicativo en Matemáticas de Estudiantes de Primer Nivel Universitario: Aproximaciones Desde un Curso de Precálculo

Jenny Mayerly Gómez Cortés

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Directora:

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2018

Dedicatoria

A Dios porque ha estado conmigo en cada paso que doy, cuidándome y dándome fortaleza para continuar, porque sin el nada de esto hubiera sido posible.

A mis padres Gonzalo Gómez y Amada Cortés, pilares fundamentales en mi vida, con mucho amor y cariño les dedico todo mi esfuerzo, se merecen esto y mucho más.

A Dúwamg Alexis Prada Marín, mi gran amor, por ser mi compañero inseparable de cada día, quien me apoyó y alentó para continuar, cuando parecía que me iba a rendir, gracias por su amor incondicional.

A mis abuelitos por todas sus enseñanzas.

A mi sobrina Nico y a mi sobrino Javi a quienes adoro, por que llenan de alegría cada día de mi vida.

A mi querida hermana Andrea Gómez por ser mi apoyo en todo momento.

A todos aquellos que no creyeron en mí, a aquellos que esperaban mi fracaso, a aquellos que nunca esperaban que lograra terminar la maestría, a todos los que supusieron que no lo lograría, a todos ellos les dedico esta tesis.

Agradecimientos

A mi universidad, gracias por haberme permitido formarme y en ella, gracias a todas personas que fueron participes de este proceso.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi ejemplo a seguir, la profe Sandra Evely Parada Rico, por brindarme su apoyo cuando lo necesité, por haber confiado en mí y haberme animado a la elaboración de esta tesis. No fue sencillo el camino, pero gracias a sus aportes, a su apoyo incondicional, a su amor, a su inmensa bondad, a su dedicación, a sus consejos y paciencia con la que cada día se preocupaba por mi avance y desarrollo de esta tesis, fue posible lograr esta meta. Le estaré eternamente agradecida. Gracias por ser mi madre académica.

A las estudiantes de Precálculo Jennifer y Laura que participaron en esta investigación, sin ustedes esto no sería posible.

A los profesores Jorge Fiallo, Sandra Parada, Solange Roa y Sterling Castañeda por todas las enseñanzas recibidas en este proceso de formación como investigadora.

A mis evaluadores María del Carmen Olvera y Jorge Enrique Fiallo quienes durante todo el proceso me aportaron observaciones y sugerencias que me permitieron presentar este documento sólido y enriquecido.

A Nelson Javier Rueda, Camila Prada y Andrea Gómez, quienes me han apoyado en este proceso con sus valiosos aportes.

A los profesores de Precálculo Patricia y Daniel por permitirme la toma de datos.

A todos ustedes ¡Gracias!

Tabla de contenido

Introducción *13*

1. Aspectos orientadores, planteamiento y antecedentes de la investigación *16*

1.1 Contexto y problemática de la investigación 16

1.2 Revisión bibliográfica y antecedentes 22
1.2.1 Pensamiento Matemático Avanzado: PMA 22
1.2.2 Pensamiento matemático avanzado en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo 25
1.2.3 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional: 26
1.2.4 Algunas investigaciones sobre procesos de comunicación en matemáticas 29
1.2.5 Resolución de problemas usando la tecnología: una mirada desde la didáctica del cálculo 38

2. Aspectos teóricos y conceptuales *42*

2.1 ¿Cómo entendemos las habilidades? 43

2.2 Pensamiento variacional 44

2.3 Proceso de comunicación 48
2.3.1 Formas de comunicación 51
2.3.2 Habilidades comunicativas del pensamiento variacional 55
a) Habilidad para interpretar 55
b) Habilidad para explicar 57
c) Habilidad para justificar 58

2.4 Tipos de enunciados presentes en los talleres de precálculo 59
2.4.1 Enunciados en lenguaje verbal 59
2.4.2 Enunciados con representación gráfica o pictórica 60
2.4.3 Enunciados en lenguaje matemático 60
2.4.1 Enunciados presentados con tecnología digital 61

3. Metodología *62*

3.1 Fase 1: caracterización de las actividades del curso de precálculo 63
Análisis a priori de las actividades del curso de precálculo 64
a) Actividad Uno: Números y operaciones 64
b) Actividad Dos: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos 66
c) Actividad Tres: Razones trigonométricas en el plano 68
d) Actividad Cuatro: Matemáticas y Realidad 73
e) Actividad Cinco: Interdependencia entre variables 74
f) Actividad Seis: Transformaciones de funciones 76
g) Actividad Siete: Caja sin Tapa 80

3.2 Fase 2: trabajo de campo 83
3.2.1 Selección de las actividades del curso de precálculo 83
3.2.2 Selección del grupo de precálculo donde se desarrolló la investigación 85
3.2.3 Selección de los casos de estudio 85
3.2.4 Instrumentos para la recolección de datos 88

3.3 Fase 3: análisis de los datos 88

3.4 Fase 4: caracterización de las habilidades comunicativas 89

4. Habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación *89*

4.1 Habilidad para interpretar la variación 90
4.1.1 Interpretación de enunciados en lenguaje verbal 91
4.1.2 Interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica 103
4.1.3 Interpretación de enunciados en lenguaje matemático 111
4.1.4 Interpretación de Enunciados presentados con tecnología digital: 113

4.2 Habilidad para explicar la variación 115
4.2.1 Explicación de enunciados en lenguaje verbal 116
4.2.2 Explicación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica 120
4.2.3 Explicación de enunciados en lenguaje matemático 121
4.2.4 Explicación de enunciados presentados con tecnología digital: 122

4.3 Habilidad para justificar la variación 123
4.3.1 Justificación de enunciados en lenguaje verbal 124
4.3.2 Justificación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica 131
4.3.3 Justificación de enunciados en lenguaje matemático 133
4.3.4 Justificación de enunciados presentados con tecnología digital: 135

5. Conclusiones *136*

5.1 Habilidades comunicativas durante la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación 137
5.1.1 Habilidad Interpretativa 137
5.1.2 Habilidad Explicativa 139
5.1.3 Habilidad Justificativa 141

5.2 Reflexiones acerca del curso de precálculo y las habilidades para comunicar el cambio y la variación 143

5. 3 Perspectivas de investigación 144

Referencias Bibliográficas *146*

Índice de ilustraciones

Figura 1 Estructura general del proyecto curricular de la UIS. Fuente: Parada (2016) 18
Figura 2 Estructura metodológica de la Investigación 63
Figura 3 Situación planteada en la Actividad 1 del curso. 65
Figura 4 Representación digital con la que se realiza la Actividad 2 del curso. 66
Figura 5 Representación digital de la situación planteada en la actividad 2. 67
Figura 6 Situación presentada en la Actividad 1. 69
Figura 7 Representación digital de la situación planteada en la actividad 3 del curso 70
Figura 8 Representación digital con la que se realiza parte de la actividad 3 71
Figura 9 Representación digital con la cual se desarrolla la actividad 4 72
Figura 10 Representación en el lenguaje natural de una situación contextualizada 73
Figura 11 Representación digital de la situación de las cuerdas vibrantes 74
Figura 12 Representación digital con la cual inicia la actividad 5 del curso 75
Figura 13 Actividad de relacionar funciones de forma algebraica con la gráfica planteada en la actividad 5 del curso 76
Figura 14 Planteamiento de la Actividad 6.1 del curso. 77
Figura 15 Representación digital para realizar la Actividad 6.2 del curso. 77
Figura 16 Representación digital para la Actividad 6.3 del curso. 79
Figura 17 Enunciado a partir del cual se desarrolla la actividad 13 del curso 80
Figura 18 Representación digital de la situación planteada en la actividad 13 81
Figura 19 Situación contextualizada presentada en la Actividad 4. 91
Figura 20 Cálculo del número de tomas durante los diez días. 92
Figura 21 Cálculo erróneo del porcentaje del medicamento a los diez días. 92
Figura 22 Interpretación errónea del enunciado de la Actividad 4. 93
Figura 23 Cálculo del 40% del medicamento que queda en el organismo. 94
Figura 24Cálculos realizados para las primeras tomas del medicamento. 94
Figura 25 Cálculo realizado por Laura para los tres primeros días del medicamento. 95
Figura 26 Enunciado de la primera actividad del taller Funciones y Realidad. 96
Figura 27 Interpretación realizada por Jennifer 96
Figura 28 Representación algebraica dada por Jennifer. 97
Figura 29 Construcción de las representaciones de la interdependencia entre las magnitudes. 97
Figura 30 Enunciado del primer problema de la actividad Área Máxima. 98
Figura 31 Interpretación del enunciado realizado por Jennifer. 98
Figura 32 Interpretación del problema realizada por Laura. 99
Figura 33 Enunciado de la actividad 1 del taller Caja sin Tapa 100
Figura 34 Interpretación inicial de Jennifer. 100
Figura 35 Traducción del lenguaje natural al gráfico. 101
Figura 36 Cálculo del volumen para diferentes valores. 101

Figura 37Cálculo del perímetro. 102
Figura 38 Bosquejo del problema. 102
Figura 39 Enunciado de la actividad q del taller Números y Operaciones. 104
Figura 40 Respuestas para los interrogantes respecto a los puntos cercanos a la operación descrita. 104
Figura 41 Respuestas a los interrogantes dado por Laura. 106
Figura 42 Actividad de interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica. 107
Figura 43 Respuesta a la interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica. 108
Figura 44 Respuesta a la actividad de interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica dada por Laura. 110
Figura 45 Enunciado de la actividad 1 del taller 111
Figura 46 Respuesta dada por Jennifer a la actividad de enunciados en lenguaje matemático. 112
Figura 47Respuesta dada por Jennifer 112
Figura 48 Gráfica que modela el comportamiento del problema planteado. 113
Figura 49 Representación digital presentada en la Actividad de Área Máxima. 113
Figura 50 Preguntas de la representación digital de la actividad de Área Máxima. 114
Figura 51Repuesta a los interrogantes respecto a las magnitudes que varían y no varían. 114
Figura 52 Respuesta a de que magnitud variable depende el área del rectángulo. 115
Figura 53 Respuesta suministrada por Laura al literal b. 115
Figura 54 Explicación del problema del medicamento. 117
Figura 55 Bosquejo del problema 119
Figura 56Representación gráfica del problema del Toyota Corolla 122
Figura 57 Fórmula hallada por Jennifer que modela el problema. 126
Figura 58 Fórmula hallada por Laura para modelar el problema del medicamento 126
Figura 59 Gráfica de Laura en la cual modela la situación. 127
Figura 60 Funciones que le permiten a Jennifer modelar el problema. 128
Figura 61Procedimiento de Jennifer para justificar el área máxima 129
Figura 62Representación de Jennifer del problema del software. 129
Figura 63 Procedimiento de ensayo y error para obtener la caja de mayor volumen. 130
Figura 64 Justificación del problema haciendo uso de la fórmula del volumen en función de la altura. 131
Figura 65Asignación de valores cercanos al punto solicitado. 131
Figura 66Asignación de valores aproximados a los puntos dados. 132
Figura 67Orden de las funciones del problema de menor a mayor. 133
Figura 68Representación de los datos dados en el problema. 134
Figura 69Función que modela el problema. 134
Figura 70Representación digital del enunciado. 135

Índice de tablas

Tabla 1 Competencias Matemáticas _____ *54*
Tabla 2 Actividades del curso de Precálculo _____ *64*
Tabla 3 Medidas de la caja para la Actividad 1. _____ *81*

RESUMEN

TÍTULO: PROCESO COMUNICATIVO EN MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE PRIMER NIVEL UNIVERSITARIO: APROXIMACIONES DESDE UN CURSO DE PRECÁLCULO[*]

AUTOR: JENNY MAYERLY GÓMEZ CORTÉS[**]

PALABRAS CLAVE: HABILIDADES COMUNICATIVAS, PENSAMIENTO VARIACIONAL, ENUNCIADOS EN MATEMÁTICAS, CURSO DE PRE-CÁLCULO, TECNOLOGÍAS DIGITALES, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESCRIPCIÓN:

En este documento presentamos los resultados de una investigación de corte fenomenológico experimental. El contexto de la investigación fue un curso de Inducción a la formación matemática universitaria (conocido como curso de precálculo), el cual se desarrolla en la Universidad Industrial de Santander como una alternativa curricular preventiva para atender la problemática del bajo rendimiento de los estudiantes en la asignatura Cálculo I. Dicho curso, tiene como objetivo promover actividades que potencien el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes admitidos a las carreras de ciencias e ingenierías.

La investigación tuvo como objetivo principal caracterizar habilidades comunicativas emergentes durante la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales en el curso de pre-cálculo con estudiantes de primer nivel universitario de la UIS. Inicialmente y teniendo en cuenta las actividades que se desarrollaron en el curso, se plantearon tres habilidades comunicativas a priori: i) habilidad para interpretar, ii) la habilidad para explicar y iii) la habilidad para justificar. Dichas habilidades se constituyeron en las categorías de análisis de los resultados de la experimentación.

El trabajo experimental se llevó a cabo durante un semestre académico en el que se video-grabaron dos casos de estudio y se recogieron sus producciones escritas. Se caracterizaron las tres habilidades planteadas a priori y se desarrolló un marco conceptual en el que se identifican cuatro tipos de enunciados presentes en los talleres de precálculo: i) enunciados en lenguaje verbal, ii) enunciados con representación gráfica o pictórica, iii) enunciados en lenguaje matemático y iv) enunciados presentados con tecnología digital.

La caracterización de las habilidades se planteó a partir de una lista de descriptores, con los cuales se da cuenta de una acción específica que permita evaluar el desarrollo de cada una de las habilidades, específicamente asociadas al pensamiento variacional. La investigación permitió verificar que el planteamiento de las actividades del curso de precálculo favorecen el desarrollo de las habilidades comunicativas asociadas al pensamiento variacional y además que, el contar con dichas habilidades permite un mejor desempeño en la comprensión de los objetos matemáticos así como en la resolución de problemas, en este caso específico del cálculo diferencial.

[*]Proyecto de grado

[**]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dra. Sandra Evely Parada Rico

ABSTRACT

TITLE: COMMUNICATIVE PROCESS IN MATHEMATICS OF STUDENTS OF FIRST UNIVERSITY LEVEL: APPROACHES FROM A COURSE OF PRE-CALCULUS *

AUTHOR: JENNY MAYERLY GÓMEZ CORTÉS**

KEYWORDS: COMMUNICATIVE SKILLS, VARIATIONAL THINKING, MATHEMATICAL STATEMENTS, PRECALCULUS COURSE, DIGITAL TECHNOLOGIES, PROBLEM SOLVING.

DESCRIPTION:

In this document we present the results of an experimental phenomenological research. The context of the research was an induction course for university mathematics training (known as pre-calculus course), which is developed at the Industrial University of Santander as a preventive curricular alternative to address the problem of low student performance in the Subject Calculus I. This course aims to promote activities that promote the development of variational thinking of students admitted to science and engineering careers.

The main objective of the research was to characterize emerging communication skills during the resolution of problems related to the phenomenon of variation mediated by digital technologies in the pre-calculus course with first level university students of the UIS. Initially and taking into account the activities that were developed in the course, three communication skills a priori were raised: i) ability to interpret, ii) the ability to explain and iii) the ability to justify. These skills were constituted in the categories of analysis of the results of the experimentation.

The experimental work was carried out during an academic semester in which two case studies were videotaped and their written productions were collected. The three a priori skills were characterized and a conceptual framework was developed in which four types of statements present in pre-calculus workshops were identified: i) statements in verbal language, ii) statements with graphic or pictorial representation, iii) statements in mathematical language and iv) statements presented with digital technology.

The characterization of the skills was based on a list of descriptors, with which a specific action is reported that allows evaluating the development of each of the skills, specifically associated with variational thinking. The investigation allowed to verify that the approach of the precalculus course activities favor the development of the communicative abilities associated to the variational thinking and also that, having these skills allows a better performance in the understanding of the mathematical objects as well as in the resolution of problems, in this specific case of differential calculus.

*Grade work.

**Faculty of Sciences. School of Mathematics PhD. Sandra Evely Parada Rico

Introducción

Las universidades comprometidas con la excelencia académica de su institución, revisan permanentemente sus procesos académicos. Actualmente éstas se están centrando la atención en el desempeño de los estudiantes en los primeros niveles de formación, ya que estos definen el proceso académico de todo el programa, incluso su permanencia en la universidad. El ingreso a las universidades estatales colombianas tiene como requisito principal la obtención de puntajes destacados en las pruebas de Estado (Pruebas Saber 11), sin embargo, la alta deserción y repitencia de las diversas asignaturas, específicamente las relacionadas con matemáticas en los programas de ingenierías y ciencias, evidencian que un importante número de estudiantes necesita fortalecer sus competencias básicas para alcanzar las metas previstas.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente y con lo expresado en los documentos del currículo matemático tanto a nivel internacional como a nivel nacional, Fiallo y Parada (2014) proponen que, además de los contenidos, se deben desarrollar procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, la representación, la comunicación y las conexiones, para que la mediación docente no se siga centrando en el aprendizaje de contenidos y algoritmos para la solución de ejercicios. En general, las tareas de conectar diferentes representaciones de un concepto, no han sido consideradas como parte fundamental en la construcción del conocimiento matemático, por parte de los actores implicados.

El proceso de comunicación, especialmente permite fortalecer el aprendizaje de las matemáticas, pues facilita aprender a aprender y expresar lo que se está construyendo

cognitivamente, así mismo, a que el alumno no sea sólo un receptor sino que además construya significados y discursos que se van validando paso a paso en colectivo y con el apoyo del profesor.

Este proceso es uno de los ejes fundamentales en el desarrollo de la actividad académica, debido a la necesidad de garantizar lo comunicado por parte del docente en pro del análisis y razonamiento de sus estudiantes. El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA) conducido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2006), define la competencia matemática como "la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones" (p.50) lo cual apoya lo anteriormente expuesto.

La comunicación apoya el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, dibujan, utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagrama, escriben y usan símbolos matemáticos. Además de esto, como lo mencionan los estándares del NCTM (2000) la comunicación oral y escrita en matemáticas puede dar oportunidades a los alumnos para pensar a través de los problemas, formular explicaciones, probar un vocabulario o notación nueva, experimentar formas de argumentación, justificar conjeturas, criticar justificaciones y reflexionar sobre su propia comprensión y sobre las ideas de otros. La habilidad de los estudiantes para leer, escribir, escuchar, pensar y comunicar sobre los problemas, desarrollará su comprensión y profundización de las matemáticas.

No obstante, el docente desempeña un papel importante en el desarrollo comunicativo de sus estudiantes, ya que tiene que depurar sus técnicas de escucha, de formulación de preguntas y de paráfrasis, tanto para dirigir el curso del aprendizaje como para proporcionar modelos de

diálogo. Las preguntas bien formuladas pueden, a la vez, provocar, ampliar y desafiar el pensamiento de los alumnos, y dar al profesor una oportunidad para evaluar la comprensión de estos, de modo que cuando se enseñan y modelizan estrategias de comunicación, los estudiantes, con el tiempo empezarán a adoptar técnicas de escucha, paráfrasis e interrogatorio en sus conversaciones matemáticas como se expresa en los estándares del NCTM (2000).

Así, teniendo en cuenta las ideas anteriores, a través de esta investigación, se muestra un estudio en el que se analizan las habilidades comunicativas que emergen de la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación mediados por tecnologías digitales, los cuales podrían llegar a disminuir la problemática presentada. Dicha problemática inspira la investigación que aquí reportamos. Por ello, este documento se ha organizado de la siguiente manera:

Capítulo uno. Aspectos orientadores, planteamiento y antecedentes de la investigación. En esta sección se presenta el contexto donde surge la problemática de esta investigación, en el cual se dejan de forma explícita la pregunta y el objetivo que la fundamentan. Asimismo se presentan los antecedentes de la investigación organizados por los aspectos bajo estudio: Pensamiento matemático avanzado, investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional, investigaciones sobre los procesos de comunicación en matemáticas y resolución de problemas usando tecnología.

Capítulo dos. Aspectos teóricos y conceptuales. En esta sección se presentan los aspectos teóricos mostrados de manera detallada, sobre los cuales sustentamos la investigación en cuanto a pensamiento variacional, comunicación, proceso de comunicación, habilidades y habilidades comunicativas.

Capítulo tres. Metodología. Se presenta la metodología empleada para la obtención de los datos; así mismo las técnicas e instrumentos usados para la recolección de los datos; finalmente, aparecen los casos de estudio y la técnica utilizada para el análisis de los datos.

Capítulo cuatro. Caracterización de las habilidades comunicativas. En esta sección presentamos los resultados del análisis de los datos en relación a la caracterización de las habilidades comunicativas obtenidas por los estudiantes que participaron en el curso de precálculo.

Conclusiones. En este apartado se sintetizan los hallazgos de la caracterización de las habilidades comunicativas que hemos encontrado desde lo teórico y que hemos ratificado con los datos recolectados.

1. Aspectos orientadores, planteamiento y antecedentes de la investigación

Este capítulo está compuesto por dos grandes apartados: i) el contexto en el cual se desarrolló la investigación, y, ii) los antecedentes de los elementos orientadores como son: el Pensamiento Matemático Avanzado, el Pensamiento Variacional, el Proceso de Comunicación y la Resolución de Problemas usando la Tecnología. Estos aspectos nos permitieron formular la pregunta y el objetivo de la investigación.

1.1 Contexto y problemática de la investigación

Los cursos de cálculo en las diferentes instituciones de educación superior se han caracterizado por ser los que mayor dificultad causan en los estudiantes de nuevo ingreso, y

como lo expresan Dávila, Flores, García y Valencia (2008) esto puede deberse, entre otras causas, a que ellos no cuentan con pre-saberes lo suficientemente sólidos que les permita comprender los conceptos fundamentales que se les presentan en ese curso.

Es por esto que, la mediación docente es uno de los procesos que mayor interés debe causar en profesores e investigadores comprometidos con el mejoramiento del quehacer pedagógico, mediante el análisis continuo, basado en la reflexión y con la generación de estrategias que conlleven a identificar problemáticas y las posibles soluciones a éstas. Estos análisis y estrategias se crean a partir de la continua preocupación, desde el rol del estudiante en su proceso de aprendizaje y evaluativo inherente a la condición de aprendiz, y trascendiendo al docente, como mediador de dicho proceso formativo.

Este tipo de preocupaciones no han sido ajenas al Ministerio de Educación Nacional de Colombia, quien ha creado el Sistema de Prevención de la Deserción en Educación Superior (SPADIES), el cual permite identificar el riesgo para cada estudiante, mediante el seguimiento a sus condiciones económicas, académicas, familiares e institucionales. De esta manera, posibilita el desarrollo de acciones tempranas para promover la retención estudiantil.

Para afrontar la problemática antes descrita, en la Universidad Industrial de Santander (UIS), se han desarrollado diferentes estrategias. La Escuela de Matemáticas con el apoyo de la Vicerrectoría Académica ha ejecutado el proyecto "*una estructura curricular para atender la problemática de cálculo I en la UIS"*, propuesta planteada por Parada (2012) la cual contiene tanto alternativas remediales como preventivas. En la Figura 1 se muestra un esquema de todo lo que comprende dicho proyecto, el cual se implementó desde el 2012 y es precisamente desde la implementación de este proyecto y desde algunas de las actividades que se desprende la investigación que aquí reportamos.

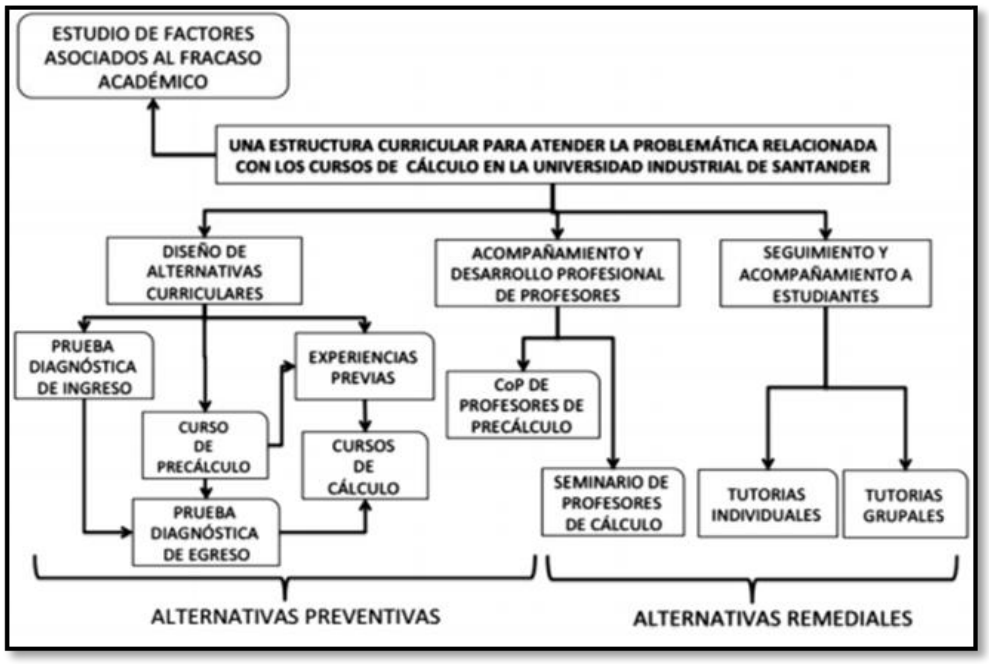


Figura 1 Estructura general del proyecto curricular de la UIS. Fuente: Parada (2016)

Este proyecto se realiza bajo tres ejes fundamentales, entre ellos, está el diseño de alternativas curriculares, que son: una prueba diagnóstica de ingreso y un curso de Precálculo. Se ofrece este curso desde el primer semestre del año 2013, el cual hasta el momento se ha desarrollado en diez oportunidades. Este curso está dirigido a los estudiantes que ingresan a programas de las Facultades de Ciencias e Ingenierías. Para el curso se seleccionan alrededor de 300 estudiantes que han tenido un puntaje entre 30,01 y 70,00 en las preguntas del núcleo común en una escala de 0 a 100 puntos en el Área de Matemáticas de las Pruebas Saber 11.

El curso en mención, no es de corte tradicional, por el contrario enfatiza en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software GeoGebra. Tiene como propósito principal, aportar herramientas para desarrollar en estudiantes de primer nivel universitario su "pensamiento variacional", con el fin de favorecer en ellos un nivel matemático pertinente para las exigencias del curso de Cálculo Diferencial (Fiallo & Parada, 2014).

El curso se soporta bajo tres fases, la primera dedica un espacio al diseño de actividades, en el cual se promueve un proceso activo de resolución de problemas, como lo enuncian los autores antes citados. Ellos exponen que el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones y el uso de tecnología son claves para la producción de aprendizajes significativos alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo: la variación y la acumulación. Dentro de este diseño se contemplaron criterios básicos para las actividades tales como contextualizar el estudio del cálculo problematizando los contenidos, generar espacios donde los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de resolución de problemas y utilizar las herramientas tecnológicas apropiadas (GeoGebra), como apoyo a estos procesos.

Respecto a la componente didáctica para el diseño de estas actividades, se generaron cinco pautas en las cuales se enfatiza como primera etapa, una actividad de exploración libre por parte del estudiante basado en sus pre-saberes, seguidamente una etapa de socialización de los resultados en la cual se promueve la identificación de debilidades y fortalezas, además de errores y aciertos en búsqueda de una solución válida al problema que se planteó. Una tercera etapa en la que se genera un acompañamiento o exploración dirigida mediante el uso de tecnologías digitales, cuya finalidad es la conexión de los conceptos que se trabajaron y sus representaciones. Para evidenciar este proceso, en la cuarta etapa, los estudiantes nuevamente socializan sus respuestas y el docente se apropia del rol de generador de debate para lograr la construcción del conocimiento como objetivo de esta actividad, y finalizando, como quinta etapa, es necesaria una actividad complementaria que permita observar no solo la técnica utilizada para la actividad sino además la apropiación del concepto estudiado.

Para la segunda fase es el desarrollo del curso, como lo dicen Fiallo y Parada (2014) ésta se lleva a cabo durante 14 sesiones de trabajo diario de cuatro horas, con 10 grupos de aproximadamente 30 estudiantes cada uno. Cada sesión se desarrolla en una sala de informática, en la cual el estudiante trabaja en forma individual o en parejas sin que el profesor resuelva el problema. El rol del profesor consiste en orientar las inquietudes en cuanto a la comprensión del problema, planteamiento de preguntas, el uso del software y promover la participación y la discusión sobre las soluciones, conceptos, generalizaciones y conclusiones, para posteriormente fortalecer el conocimiento.

Finalmente la tercera fase del curso de precálculo, integra la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje, acorde a la metodología de aplicación. Se considera la evaluación como un proceso permanente de observación. Esta observación directa está basada en la comunicación de justificaciones orales o gráficas de los estudiantes, sobre las situaciones problema planteadas en cada sesión de trabajo. Se tienen unos indicadores en cuenta que son:

- Modela diversas situaciones de cambio a través de funciones y expresa dichas funciones inicialmente en palabras y luego simbólicamente, representándolas en forma gráfica, tabular y mediante expresiones algebraicas.
- Representa y analiza funciones utilizando tablas, expresiones orales, expresiones algebraicas, ecuaciones y gráficas y se hacen traducciones entre estas representaciones.
- Formula conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa y usa la calculadora para comprender dicho comportamiento.
- Interpreta gráficos que describen diversas situaciones.
- Analiza tablas y gráficas para descubrir patrones, hace predicciones e identifica propiedades y relaciones. (Fiallo & Parada, 2014, p.69).

A partir de la creación del curso de Precálculo, sumado con otras estrategias curriculares tanto preventivas como remediales, la UIS ha aportado a la disminución en la reprobación de la asignatura de Cálculo Diferencial. Ahora, como parte del análisis cualitativo respecto a los efectos generados por este curso, será de interés observar el impacto cognitivo que se ha logrado en los estudiantes mediante el curso de precálculo, para lo cual se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué habilidades comunicativas emergen durante la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales en el curso de precálculo en estudiantes de primer nivel universitario de la Universidad Industrial de Santander?

Acorde con la pregunta planteada, la investigación a realizarse tiene como objetivo: *Caracterizar habilidades comunicativas emergentes durante la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales en el curso de precálculo con estudiantes de primer nivel universitario de la UIS.*

Para el logro del objetivo planteado se han revisado algunos referentes bibliográficos como son la resolución de problemas mediados por un software, pensamiento variacional y proceso de comunicación. De dicha revisión se presenta el siguiente apartado con aquellos documentos que han influenciado en el diseño de la investigación que aquí se reporta.

1.2 Revisión bibliográfica y antecedentes

Para el desarrollo de la investigación que aquí reportamos, realizamos una revisión de la literatura en torno a algunos aspectos que consideramos podían ayudar a establecer la dirección de la misma. Los aspectos se han dividido en los siguientes cuatro apartados:

i) Pensamiento Matemático Avanzado

ii) Algunas investigaciones sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional

iii) Algunas investigaciones sobre el proceso de comunicación en matemáticas

iv) Resolución de problemas usando la tecnología

1.2.1 Pensamiento Matemático Avanzado: PMA

Preguntas naturales que pueden surgir como ¿qué entendemos por Pensamiento Matemático Avanzado? ¿Qué diferencia hay con el Pensamiento Matemático Elemental? ¿Se utiliza el Pensamiento Matemático Avanzado para temas exclusivos de la educación superior?, ¿Es posible saber cuándo es elemental o avanzado? Son cuestiones que surgen cuando nos hablan del PMA. Responder a estas preguntas implica explicitar sobre el término Avanzado. Tal y como lo expresa Mason (1996) es relativo, y por lo tanto cada matemático, de acuerdo con su experiencia, lo usa para modificar su concepción personal de lo que es “normal” o “elemental”.

Hace unos años los problemas investigados en la educación matemática tenían que ver sólo con los conceptos básicos de las matemáticas, los cuales eran enseñados en la primaria y se relacionaba con el pensamiento matemático elemental, pero de unos años a la fecha, se decidió ampliar los problemas que eran investigados tanto para los últimos años del bachillerato como para los primeros cursos en la universidad, y estos se relacionaban con el Pensamiento Matemático Avanzado.

El estudio cognitivo del PMA se inició y desarrolló alrededor del año 1980, tiempo en el cual se realizó una recopilación de los trabajos de los investigadores más representativos que estaban trabajando con el pensamiento matemático avanzado, llevando por título Advanced Mathematical Thinking, editado por David Tall en 1991, con la colaboración de otros investigadores.

En el PMA los principales temas de discusión son estándares para el primer y segundo año de universidad: funciones, límites, integrales. Pero, estos temas simplemente son tomados como ejemplos, y las ideas y las observaciones realizadas son aplicadas al aprendizaje de las matemáticas no sólo en estos niveles iniciales sino en todos. El interés por estos temas, según Azcarate (1996), se explican por la tendencia de los últimos años en Didáctica de la Matemática donde se considera cada vez más la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y no como la simple adquisición de competencias y habilidades. Así, Dreyfus (1991) expresa que comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante ya que es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales.

Dentro del PMA están implicados unos procesos cognitivos entre los cuales se destacan analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar; y unos procesos cognitivos con componente psicológica como son abstraer, representar, conceptualizar, inducir y visualizar. En otras palabras, el PMA consiste en una larga lista de procesos en interacción (Belmonte, 2009). Azcarate y Camacho (2003), cuando se refieren a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, piensan en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente, lo cual especifican así:

> No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemático tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, se pueden mencionar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. (p.136).

Las diferentes investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta, como lo dicen Azcarate y Camacho (2003), que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

Distintos autores del PMA han señalado un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático; entre estas están el concepto de límite y los procesos infinitos, los cuales intervienen en los conceptos básicos de derivadas e integrales; otro de los conceptos que presentan dificultades son los que tienen que ver con el estudio de las funciones, el concepto de infinito, etc. Con base en lo anterior, se han desarrollado diferentes investigaciones en el marco del Pensamiento Matemático Avanzado, en las cuales se distinguen los fenómenos de enseñanza que tienen por sujeto de estudio al profesor y los fenómenos de aprendizaje que tienen por sujeto de estudio a los estudiantes.

1.2.2 Pensamiento matemático avanzado en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo

El papel que desempeñan los docentes dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo es fundamental, Artigue (1995) menciona que se les puede enseñar a los estudiantes a desarrollar algunos procedimientos algorítmicos y a mecanizar la solución de algunos problemas estándar, pero se encuentran grandes dificultades para que ellos alcancen una comprensión satisfactoria de las ideas centrales de este campo de las matemáticas. Esta problemática ha llevado a que se realicen investigaciones didácticas en cuanto a las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas, no solo a nivel de la secundaria sino también a nivel universitario.

Artigue (1998) clasifica las dificultades en el aprendizaje del cálculo en tres categorías: la primera corresponde a las dificultades ligadas a la complejidad de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo, otra categoría concierne a las dificultades ligadas a la conceptualización y la formalización de la noción de límite, que es la noción central del campo y finalmente las dificultades ligadas a las rupturas necesarias con modos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Sobre el concepto de derivada, Rojas (2008) expone algunos tipos de dificultades en su enseñanza y su aprendizaje, una de las dificultades por mencionar es que los estudiantes tienen la idea de tangencia a una curva, como la recta que toca a la curva sin cortarla pero si es vista como el resultado de llevar al límite rectas secantes va a generar dificultad en los estudiantes.

En otro estudio realizado por Rojas (2009), se centraron en cómo las formas comunicacionales del profesor afectan las posibilidades de participación, a través del análisis discursivo de sus contribuciones a la discusión de aula. Ya con estos resultados quieren ahondar

en los resultados teórico-metodológicos proponiendo un instrumento que le permita describir e interpretar el grado de apertura comunicacional del discurso del profesor.

En una investigación de Hitt (1996) se reporta una experimentación ejecutada con profesores de la enseñanza media. Esta se realizó con un total de nueve profesores a los cuales se les pidió que diseñaran una clase, el tema era libre, pero una de las condiciones era que no podían utilizar notas o libros. Dos de los profesores escogieron los temas de funciones y límites, temas que están relacionados con el cálculo, sin embargo, estos profesores dejaron en evidencia dificultades y algunos vacíos conceptuales, los cuales Hitt asocia a una enseñanza del cálculo la cual es desarrollada teniendo solo en cuenta los aspectos algebraicos sin prestar atención a las diferentes formas de representaciones, lo cual conlleva a dificultades en la comprensión del cálculo.

1.2.3 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional:

El trabajo realizado por Vrancken, Engler, Giampieri y Müller (2014) incorpora algunos resultados obtenidos al investigar cómo favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de primer año de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina. En este trabajo se presenta una secuencia de actividades en la que se analizan aspectos variacionales del concepto de función y se dan a conocer los resultados de su implementación. Se centra la atención en la forma en que el estudio de procesos de variación permite construir acercamientos significativos para la comprensión y el uso de las funciones como modelos de situaciones de cambio.

El propósito de estas actividades es llevar a los alumnos a identificar y comprender las funciones en situaciones de cambio, que al resolver estas actividades puedan dar respuesta a tres preguntas:

- ¿Qué cambia en la situación planteada?
- ¿Cómo cambia?
- ¿Cuánto cambia?

Esto implica la identificación de las variables involucradas en las distintas situaciones y su relación entre ellas, la coordinación de los cambios de una variable con los cambios de la otra variable y la cuantificación de esos cambios. Se observa que su desarrollo favoreció el surgimiento de argumentos variacionales, partiendo de los conocimientos que los alumnos manejan desde sus experiencias previas.

Como conclusiones los autores manifiestan que del análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes se detectaron distintas dificultades en todas las actividades propuestas. Por ejemplo, se observaron problemas para identificar las variables que intervienen en una situación, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, interpretar el comportamiento de la gráfica de una función y obtener la gráfica de una función que modele un fenómeno. Se considera que todas estas dificultades están asociadas, entre otros factores, al tratamiento dado al concepto de función durante su formación previa. Los alumnos piensan en una función más como una correspondencia entre dos conjuntos, una fórmula y no como una relación entre cantidades variables.

Por otro lado, diversos estudios muestran que los profesores parecen no haber desarrollado un pensamiento variacional, ya que no recurren a ideas variacionales para resolver actividades que las requieren. Uno de estos estudios es el desarrollado por Caballero y Cantoral

(2013) el cual forma parte de un proyecto macro de investigación que tiene como objetivo identificar las causas que originan las dificultades en los profesores de bachillerato para desarrollar un pensamiento variacional.

La hipótesis indica que el pensamiento de los profesores los lleva a centrar su atención en reproducir una acción, aplicar una propiedad o regla para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que originan ese resultado. Para el logro de los objetivos se realiza una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, y con base en ello, se aplica un diseño de actividades a profesores para observar la forma en que abordan una situación de variación, analizando las dificultades que surgen y las causas que las generan.

Por otro lado, se considera que el hecho de inventar problemas es una actividad intelectual así como una forma eficaz de aprender matemáticas. Lupiáñez, Cañadas, Molina, Palabrea y Más (2011) consideran que cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático. Esto hace que la formulación de problemas aporte grandes beneficios a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Todo ello lleva a proponer que se potencie su trabajo en el aula. Para ello, estos autores recomiendan que los profesores de matemáticas proporcionen abundantes y variadas oportunidades a sus estudiantes tanto para aprender a resolver problemas, como a inventar o plantear problemas en diferentes situaciones.

1.2.4 Algunas investigaciones sobre procesos de comunicación en matemáticas

En esta sección se presenta una revisión bibliográfica de algunos trabajos que se han realizado sobre el proceso de comunicación en matemáticas, para ello, se han clasificado los trabajos más significativos hasta el momento a nivel internacional, nacional y local.

La revisión bibliográfica nos lleva a encontrar como referente a Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990). Este libro se centra en cómo la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje puede ser mejorado mediante el desarrollo de enfoques más poderosos para conectar el pensamiento y las matemáticas. Los autores, proponen cambiar las perspectivas sobre lo que significa aprender y hacer matemáticas y explora cómo estas perspectivas pueden ser incorporadas en la enseñanza de las matemáticas de la escuela secundaria.

Silver, Kilpatrick y Schlesinger, muestran una visión de las matemáticas como emergente de la actividad individual y social, más que de libros de texto y hojas de trabajo. El alumno es representado como alguien que construye activamente el significado en vez de recibirlo pasivamente. Así mismo, hacen énfasis en que la comunicación (discusión, debate, grabación y escritura), estimula y descubre el aprendizaje y el pensamiento de los estudiantes y conduce a una comprensión más profunda tanto por los profesores como por los estudiantes. Posteriormente, discuten sobre el papel de los maestros para fomentar una mayor investigación y comunicación mediante la reflexión sobre problemas y situaciones comunes. Finalmente, exponen algunos consejos prácticos sobre cómo transformar el aula de matemáticas en un lugar donde se espera que los estudiantes no sólo asimilen y usen las matemáticas, sino que también produzcan y piensen en ellas.

Silver, Smith y Nelson (1991) exponen un proyecto llamado QUASAR que fue lanzado en otoño de 1989 como una demostración de que era factible y responsable implementar

programas de instrucción que fomentaran la adquisición del pensamiento matemático y las habilidades de razonamiento por parte de los estudiantes. En este proyecto se discuten las formas de práctica docente que actualmente caracterizan la educación matemática en Estados Unidos. Se hace caso en que la práctica de la instrucción de las matemáticas necesita ser reformada inventando formas de instrucción que desarrollan mayor comprensión del estudiante, combinando habilidades básicas con pensamiento y razonamiento de alto nivel y alientan la comunicación abierta entre estudiantes y sus maestros sobre ideas matemáticas. En este proyecto se pretende aumentar el acceso de todos los estudiantes a la instrucción de matemáticas de alta calidad que les desafía a pensar y razonar y no simplemente memorizar y repetir.

Tal y como lo mencionan Silver, Kilpatrick y Schlesinger (1990) citado por Silver, Smith y Nelson (1991) dentro de las comunidades, la necesidad de comunicación es evidente. Dentro de las comunidades matemáticas, la comunicación en forma de discusión, la argumentación, la prueba y la justificación, es natural. En estas comunidades, se espera que los estudiantes no sólo escuchen, sino también aprendan a hablar de matemáticas así mismos, ya que hablar de observaciones y compartir explicaciones, verificaciones y generalizaciones le brinda la oportunidad a los estudiantes de ver, escuchar, debatir y evaluar explicaciones y justificaciones matemáticas.

En los grupos cooperativos, los estudiantes tienen la oportunidad de comunicar sus ideas con otros estudiantes, y también la oportunidad de escuchar las ideas de sus compañeros. Los maestros participantes del proyecto expresan que en estas comunidades en el aula, es aceptable el criticar las ideas de alguien, pero esa crítica no es a la persona, sino a la idea que está expresando, también esperan que los estudiantes tomen riesgos para expresar sus ideas

abiertamente en clase, para hacer presentaciones de sus soluciones y su razonamiento, y hacer preguntas al grupo si no se comprende la presentación de otro estudiante.

Como comentario final Silver, Smith y Nelson expresan que se hace hincapié en la comprensión, la cual se fomenta a través de la comunicación oral y escrita de las ideas y la participación activa de los estudiantes. En sus aulas muchos profesores han creado comunidades de práctica colaborativa donde el pensamiento y el razonamiento son valorados y donde ser capaz de explicar su forma de pensar y justificar su razonamiento son procesos que se consideran igual de importantes como llegar a una solución correcta.

Otro trabajo es el desarrollado por Arreguín, Alfaro y Ramírez (2012) que se realizó con una población de 1845 estudiantes que cursaban secundaria en una escuela pública de San Luis de Potosí en México. Se llevó a cabo un estudio de casos con tres equipos, cada uno conformado con cuatro estudiantes. Los investigadores pretendían desarrollar las competencias en los estudiantes, en especial las competencias matemáticas, dado que éstas son un punto débil para el sistema educativo mexicano.

En esta investigación se evidencia lo importante que es, que los estudiantes desarrollen las diferentes competencias matemáticas entre las que se tienen, pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear, resolver problemas, entre otras. Esta investigación está orientada a desarrollar las competencias de planteamiento y resolución de problemas, argumentación y comunicación con apoyo de la técnica de aprendizaje basado en proyectos; esta técnica involucra conocimientos y habilidades a través de un proceso de investigación que gira en torno a preguntas y tareas llegando a proporcionar un entorno para que los alumnos experimenten y aumenten su capacidad en la resolución de problemas, la investigación y la comunicación. Las

actividades desarrolladas pueden ser individuales o en grupo, que están relacionadas con el aprender a aprender juntos.

Con el diseño de los problemas planteados a los estudiantes, Arreguín, Alfaro y Ramírez, exponen que los resultados obtenidos en cuanto al planteamiento y resolución de problemas representó una dificultad en todos los grupos, principalmente en la escritura, lo cual representó la necesidad de la intervención del docente para orientar las ideas. En cuanto a la argumentación convencieron a los compañeros de la veracidad de sus soluciones, y finalmente en la comunicación utilizaron un lenguaje oral y escrito con claridad y fluidez para dar respuesta a su problema por medio de diálogos, reflexión, escritura. Con estas actividades se hace importante que los estudiantes trabajen el problema, hablen, discutan, y expliquen las soluciones ya que la comunicación es un factor muy importante para la capacidad de resolver problemas.

Las actividades basadas en proyectos desarrolladas implicaron reflexiones constructivas, para plantear y replantear colaborativamente de manera conjunta el procedimiento utilizado, procesos que contribuyeron en el desarrollo de las habilidades comunicativas como hablar, escribir, escuchar a los demás ayudando a los estudiantes a organizar y consolidar su pensamiento matemático favoreciendo con ello el desarrollo de la competencia comunicativa.

Por otro lado, el ensayo de Castillo (2011), surge después de presentar su tesis doctoral titulada el desarrollo del razonamiento lógico matemático y el desempeño escolar en educación media superior, en la cual como uno de los resultados obtenidos y menos esperado fue una clara problemática de comunicación entre los diferentes actores de la educación (docentes y alumnos), durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por esto que, en este ensayo, Castillo se hace una serie de preguntas, como por ejemplo: ¿Es la comunicación un factor de aprendizaje de las matemáticas?, ¿cuáles son las barreras de la comunicación en el aula?, ¿cómo lograr una

comunicación eficiente y eficaz en el aula y finalmente, ¿es la comunicación elemento suficiente para la comprensión?

Como conclusiones, Castillo llega a qué se puede afirmar que para lograr el aprendizaje, el alumno de matemáticas, deberá comprender y procesar los saberes que brinda la información científica a través de una eficiente y eficaz comunicación de dos vías (flujo y reflujo), con el docente, que le permita el intercambio de ideas y conceptos. Finalmente, aclara que la comunicación es solo uno de los múltiples factores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, todos ellos son "eslabones" que forman parte de un todo complejo, en donde el todo no es sólo la suma de las partes, sino que el todo tiene cualidades que no se encontrarían en las partes.

En el artículo desarrollado por Rigo, Rojano y Pluvinage (2011) se exponen los resultados parciales de un estudio centrado en el análisis del papel que juega el convencimiento en la construcción del conocimiento matemático que se da en el aula. Esta investigación es en forma cualitativa y se desarrolla a través de un estudio longitudinal con una duración de dos años, se realiza con una profesora de sexto grado de primaria de una escuela pública de la ciudad de México. La selección de esta profesora se hizo a partir de un estudio piloto, a su tendencia de promover entre sus alumnos la justificación de los enunciados matemáticos que surgen en clase. Los autores tenían como objetivo el descubrir y describir la racionalidad o razonabilidad que prevalece en un aula de clase ordinaria sin llegar a privilegiar algún tipo de argumento o sin desconocer otro.

Ramírez (2009) realizó un trabajo en la Universidad Autónoma de Barcelona la cual tenía por objetivos: i) indagar sobre las creencias acerca de la competencia comunicativa que tenían algunos profesores de matemáticas de secundaria en Cataluña, ii) conocer lo que pensaban los

profesores sobre la incorporación de la competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas y finalmente, iii) conocer las estrategias metodológicas que los profesores dicen que usan en el aula que permiten a sus estudiantes desarrollar la competencia comunicativa en matemáticas.

Esta investigación fue desarrollada en Cataluña con la participación de 24 profesores de matemáticas que ejercen en Educación Secundaria pertenecientes a trece Institutos. Para la obtención de los datos se aplicó un cuestionario abierto con nueve preguntas relacionadas con el papel que cumple el profesorado en el desarrollo de la Competencia de Comunicación en Matemáticas. En este estudio los datos obtenidos fueron analizados con base en métodos cualitativos, específicamente confrontándolos con una serie de categorías de análisis establecidas desde la teoría previamente estudiada sobre Competencias Matemáticas y particularmente sobre la Competencia de Comunicación. Las aportaciones más relevantes de esta investigación tienen que ver con lo que entienden los profesores participantes por desarrollar la Competencia de Comunicación en Matemáticas y las estrategias que utilizan para promover su desarrollo, encontrando que en la mayoría de los casos los aportes hechos por los profesores participantes están muy cercanos a lo planteado en la literatura existente sobre la Competencia de Comunicación en Matemáticas.

Otro trabajo es el consignado por Faustino, Gutiérrez y Rodríguez (2010) que particulariza la investigación en los futuros profesionales del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática quienes tienen entre sus limitaciones el escaso desarrollo de la competencia comunicativa en todos los contextos: ante el quehacer matemático ya sea de forma oral sobre una temática matemática dada, expresan muchas veces que saben qué decir pero no cómo decirlo, y ante la tarea de argumentar no encuentran las palabras adecuadas dado que su

vocabulario matemático es limitado y su comprensión es escasa. La constatación de las diferentes dificultades referidas a la habilidad de escuchar y fundamentar en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática que presentan futuros profesionales es lo que justifica su investigación.

Finalmente el artículo desarrollado por Rojas (2009), pretende ahondar en los resultados teórico-metodológicos de una investigación previa en la cual se habían centrado en cómo las formas comunicacionales del profesor afectan estas posibilidades de participación, a través del análisis discursivo de sus contribuciones a la discusión de aula, proponiendo un instrumento que permita describir e interpretar el grado de apertura comunicacional del discurso del profesor. Como conclusión de su estudio enfatiza que se debe tener en cuenta que los profesores son los agentes claves en la implicación de los estudiantes en los procesos de aprendizaje y construcción de conocimiento. Considera que si a los estudiantes se les permite contribuir con argumentaciones de sus propias ideas en relación al tema tratado, se estará propiciando un aprendizaje reflexivo y generador de competencias. La tarea final es poder gestionar las situaciones comunicativas para que los estudiantes puedan desarrollarlas en el corto, mediano y largo plazo.

A nivel Nacional el artículo realizado por Beltrán, Caro, Fernández y Rozo (2013) muestra los resultados de un proyecto de campo, el cual fue realizado mediante la utilización de una metodología de estudio de caso, en las estrategias utilizadas en los procesos de comunicación frente a la relación estudiante-docente de la clase de matemáticas en grado quinto, a partir de unos instrumentos de investigación diseñados, entre los cuales se encuentran las entrevistas semi estructuradas y las encuestas, estas fueron realizadas tanto a profesores como a estudiantes. Beltrán, Caro, Fernández y Rozo concluyen que la comunicación en el aula de

matemáticas en algunos casos se encontró regida por modelos pedagógicos tradicionalistas, donde se identificaba al profesor como el artífice de todo conocimiento, ya que principalmente se encargaba de exponer el tema, ejemplificar, ejercitar y evaluar de forma sumativa, careciendo de una metodología de comunicación, ignorando las necesidades e intereses de los estudiantes.

También, encontramos el trabajo realizado por Jiménez y Pineda (2012) el cual presenta algunas ideas relacionadas con la argumentación y la comunicación en la clase de matemáticas, con el propósito de mostrar la importancia que tiene el desarrollo de la argumentación en un ambiente centrado en las estrategias de comunicación, tales como trabajo en grupo, donde el lenguaje se asume como una práctica social que favorece la reflexión y el diálogo continuo entre docentes y estudiantes, y la comunicación como un proceso de interacción social, en el cual se tiene en cuenta al otro y lo que éste dice. Además, se destaca que el lenguaje es un aspecto que influye en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, que está directamente ligado con la comunicación, y que muchas veces no se maneja de la forma más apropiada en el aula de clase, pues no se tiene en cuenta que el lenguaje del docente es distinto al del estudiante: sin embargo, esto depende de la idea que se tenga de comunicación.

Igualmente presentamos el trabajo realizado por Jiménez, Suárez y Galindo (2010), el cual desarrolla aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza en la clase de matemáticas, teniendo como foco central la comunicación, entendida como un proceso de interacción social en el que se favorecen la negociación de significados, el consenso, el diálogo y el debate, acciones mediante las cuales se alcanzan procesos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático, como la conjeturación y la argumentación. También, se analizan diferentes estrategias que permiten convertir el aula de clase en un ambiente vivo de interacciones, donde el sujeto se dota de significado en su interrelación con la cultura del grupo;

dichas estrategias se basan en el uso de espacios para el trabajo en grupo, en el debate y la confrontación de interpretaciones y narrativas, y en los cuestionamientos permanentes del profesor.

A nivel Local el trabajo realizado por Suarez y Rojas (2013) el cual tuvo el objetivo de posibilitar experiencias que permitan valorar las competencias comunicativas en estudiantes de grado once y analizar como dichas competencias influyen en sus procesos de resolución de problemas, específicamente los relacionados con el pensamiento algebraico. El diseño de actividades y el trabajo con los estudiantes, facilitaron un avance en el desarrollo de dichas habilidades en los estudiantes, donde reconocieron la importancia de la traducción de expresiones en sus diferentes representaciones para la resolución de problemas. Las autoras caracterizan las habilidades para dar una descripción del proceso de comunicación.

Otro trabajo es el realizado por Barajas (2009) cuyos objetivos eran la elaboración de una metodología (en la cual el sentido de los apuntes favoreciera la formación de conceptos y los procesos de anotación) y analizar el proceso de construcción del concepto de proporcionalidad a través de los apuntes de los estudiantes del Colegio Príncipe San Carlos (sede B- Colorados). En este trabajo se considera que el apunte y la escritura son dos elementos interrelacionados lo cual se podrá palpar en el análisis dado que se enfatizó en el apunte en cuanto a la caracterización de la escritura misma. Como apunte final comenta que a los estudiantes se les exige en clase de matemáticas saber escribir pero poco atendemos a este compromiso social que tenemos todos los profesores en la enseñanza del uso del lenguaje como ente favorecedor del aprendizaje.

Finalmente el trabajo realizado por Parada (2005) cuyo objetivo era plantear y analizar la producción de textos como alternativa para evaluar en Matemática. La producción de textos, en este trabajo, se refiere a la creación de textos matemáticos en los que, de la manera más explícita

y clara, se plasme a través de los recursos literarios (cuentos, fábulas, copla, etc.) un concepto determinado. La producción de textos se constituye así como un instrumento facilitador de comunicación y expresión de un aprendizaje significativo fortalecido en la valoración formativa que esta experiencia permite desarrollar. Una de sus reflexiones finales que tiene que ver con la comunicación es que la comunicación verbal y escrita es parte esencial del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas porque permite argumentar con sentido lógico, lo cual favorece el discurso matemático y desarrolla estructuras del sistema lingüístico que permiten la comprensión.

De acuerdo a las investigaciones revisadas sobre el proceso de comunicación en matemáticas es evidente que es importante desarrollar este en el aula de clases, ya que como lo expresa el MEN (1998) la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas, por tal motivo se debe propiciar un ambiente en el aula de clases de tal forma que se genere el espacio para la discusión de las ideas permitiendo que los estudiantes puedan realizar sus conjeturas, puedan argumentar la forma de resolver un problema y sobre todo sean capaces de expresar en forma oral y convencer a sus compañeros el cómo consiguió llegar a la solución del problema.

1.2.5 Resolución de problemas usando la tecnología: una mirada desde la didáctica del cálculo

Algunos estudios han mostrado que el uso de herramientas tecnológicas o el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas puede ayudar en la conceptualización de problemas u objetos matemáticos, pero por el hecho de utilizar la tecnología en el aula de clases

no le garantiza al profesor que los estudiantes la utilicen en beneficio para el aprendizaje, en particular en la Resolución de Problemas. Todo depende del tipo de actividad en la que se pretenda utilizar la tecnología, la forma en que se diseñe la actividad y principalmente el uso que los estudiantes hagan de ella, son algunos de los factores que influyen en los resultados obtenidos al emplear la tecnología.

En el contexto Internacional se tiene la investigación realizada por Villarreal (2005) en la cual presenta un estudio realizado a partir de un cuestionario tomado a profesores de matemática de niveles secundarios -grados 9 a 12- del sistema educacional chileno, referente al uso de estrategias de resolución de problemas y las tecnologías digitales. Adicionalmente presentan los resultados de observaciones realizadas a clases, en la cual un profesor con sus alumnos trabajaron en la sala de computación, haciendo uso de materiales que proponían problemas para que los alumnos los desarrollaran.

Los principales resultados presentan la alta valoración que tienen los profesores por el uso de la estrategia de resolución de problemas y las tecnologías digitales, sin embargo, esta valoración no se ve reflejada en el uso que los profesores hacen de ella, como apoyo al trabajo de la estrategia didáctica en estudio. Esta investigación permitió ver el escaso uso de los alumnos sobre estrategias de resolución de problemas.

Otra referencia internacional es la de Williner (2014). Este artículo reporta algunos resultados de una investigación realizada sobre habilidades matemáticas ligadas al Cálculo Diferencial y el uso de tecnología. Fue desarrollada en la Universidad Nacional de La Matanza (Argentina) en programas de Ingeniería, más específicamente en la cátedra de Análisis Matemático I. La indagación surge de la necesidad de conocer el desarrollo de habilidades

matemáticas de los alumnos cuando trabajan con actividades diseñadas y lo hacen con software matemático y sin uso del mismo, cuyos contenidos se refieren al tema Derivada.

El artículo plantea la necesidad profesional de manejar un software específico de Matemática. La Matemática es una herramienta fundamental en la resolución de problemas y cálculos por lo que, en esta era tecnológica, es obligación enseñar a los estudiantes a usar un recurso tecnológico que les facilite su tarea siempre y cuando se tenga acceso a estos recursos.

Una de las investigaciones realizadas a nivel nacional es la de Gamboa (2007) que tiene como propósito mostrar cómo el uso de la tecnología ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, siempre que este proceso sea bien dirigido por el profesor. Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes, por ejemplo “lápiz y papel”, sería difíciles de obtener.

Como conclusión el autor menciona que el uso de la tecnología en la resolución de problemas, les permite a los estudiantes desarrollar conductas como:

- búsqueda de relaciones entre los elementos de las representaciones, con el propósito de identificar la solución de los problemas,
- elaboración de conjeturas a partir de los datos observados en las distintas representaciones realizadas en cada una de las herramientas tecnológicas,
- generalización de los resultados a casos generales, a partir de las soluciones obtenidas al trabajar con las herramientas tecnológicas,
- elaboración de conexiones entre los resultados obtenidos y otros contenidos matemáticos,

- comprobación de los resultados obtenidos en un proceso de resolución, mediante la elaboración de otro diferente.

De igual forma, el proceso de resolución de problemas con el uso de la tecnología se ve enriquecido pues permite a los estudiantes:

i) Realizar el análisis de casos particulares de los problemas a trabajar. Basados en estos casos particulares, los alumnos pueden conjeturar sobre la solución para el caso general
ii) Facilitar la observación de los fenómenos presentes en cada uno de los problemas, lo que requiere de todo un análisis donde el uso de la tecnología juega un importante papel
iii) Generar una serie de valores y representaciones, en los cuales se basa el análisis para hallar la solución del problema.

Finalmente, hace unas recomendaciones para el uso de la tecnología en el salón de clases, en donde expresa que la implementación de la tecnología en el salón exige al profesor planificar cuidadosamente las actividades con las cuales va a trabajar y que este esté preparados para resultados inesperados. El profesor no debe usar la tecnología como sustituto de las operaciones fundamentales. El estudiante debe estar en capacidad de cuestionar el resultado que obtenga al trabajar con la tecnología, pues debe basarse en sus conocimientos matemáticos. Y por último, tanto profesor como alumno deben ser conscientes que la tecnología es un refuerzo al trabajo a lápiz y papel el cual ofrece nuevas posibilidades de exploración.

Las investigaciones reportadas aquí hasta el momento apuntan o señalan algunas causas centrales de nuestro problema de investigación, que tienen que ver con el tipo de enseñanza que estamos acostumbrados a que se imparta en las instituciones educativas, como lo es la enseñanza

tradicional en la que el único emisor del conocimiento es el profesor y el tipo de enseñanza tradicional que se maneja en las clases de cálculo, donde predomina el aprendizaje de algoritmos. Ahora, en el apartado de resolución de problemas usando la tecnología, nos damos cuenta que el cálculo se puede desarrollar llevando al aula de clases las tecnologías digitales como un complemento al trabajo que se realiza a lápiz y papel, haciendo de esta manera que ellas se conviertan en un mediador en la resolución de problemas. El uso de las tecnologías digitales permite otras posibilidades de exploración y de cuestionamiento constante por parte de los estudiantes, por ejemplo, si los resultados obtenidos con este medio son realmente los correctos o si se puede llegar a la generalización a partir de los resultados obtenidos con el uso de la tecnología.

De continuarse desarrollando los procesos de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, de manera tradicional, podría aumentar el alto índice de la deserción escolar, y lo más lamentable, el rechazo hacia las asignaturas de las matemáticas. Por lo anterior, resulta necesario mejorar estos aspectos, por esto se propone como estrategia la utilización de la tecnología, como medio para alcanzar aprendizajes significativos.

2. Aspectos teóricos y conceptuales

Esta investigación requiere de la conceptualización de ciertos elementos importantes como son las habilidades, habilidades comunicativas, el pensamiento variacional y el proceso de comunicación, los cuales van a estar relacionados en la caracterización de las habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómeno de

variación mediados por tecnologías digitales en el curso de precálculo con estudiantes de primer nivel universitario de la UIS.

2.1 ¿Cómo entendemos las habilidades?

Como se ha mencionado en apartados anteriores, lo que se pretende con esta investigación es la caracterización de habilidades comunicativas, lo cual hace necesario definir lo que se entiende por habilidad para luego definir las habilidades comunicativas. Para lograr lo anterior, debemos recurrir en primera instancia a buscar las definiciones que se le han dado no solo desde la Educación Matemática sino desde otros campos que están relacionados con él.

La palabra habilidad proviene del término latino *habilitas* y se refiere al talento, la pericia o la aptitud para desarrollar alguna tarea. La persona hábil, por lo tanto, logra realizar algo con éxito gracias a su destreza. Williner (2014) cita en su artículo, que de acuerdo al diccionario de la Lengua Española, y tomando las acepciones en el marco de la investigación, expresa las siguientes definiciones:

- Habilidad: capacidad y disposición para algo o cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza.
- Capacidad: aptitud, talento, cualidad que dispone a alguien para el buen ejercicio de algo.
- Destreza: Habilidad, arte, primor o propiedad con que se hace algo.
- Competencia: Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado. (p. 103-104).

Otra definición es la proporcionada por Petrovski (1980) en la cual dice que “una habilidad constituye un sistema complejo de operaciones necesarias para la regulación de la

actividad" (p.76). Por su parte, Álvarez (1990) define las habilidades en el plano didáctico como: "Las acciones que el estudiante realiza al interactuar con el objeto de estudio con el fin de transformarlo, humanizarlo." (p. 71).

Finalmente para efectos de nuestra investigación vamos a tomar la definición de habilidad dada por Rueda como "el conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica" (Rueda, 2016, p. 57).

2.2 Pensamiento variacional

El pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento; por esta razón, el MEN recomienda que desde la Educación Básica Primaria se deben construir "distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico" (MEN, 2006, p. 66).

El pensamiento variacional se desarrolla en relación con otros tipos de pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y probabilístico, a través de la modelación de procesos de situaciones naturales. Diferentes autores han aportado en la definición del pensamiento variacional como por ejemplo, Vasco (citado por Sánchez, 2013), afirma que

> el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal

> manera que varíen conjuntamente en forma semejante a los patrones de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

Para Posada (citado por Sánchez, 2013) el pensamiento variacional pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes contextos en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Considera que desde el punto de vista matemático existe una relación directa con los otros pensamientos, pues la variación se encarga fundamentalmente de la modelación matemática, que consiste en el reemplazo del objeto cognitivo por su imagen matemática, la cual implementada en algoritmos lógico-numéricos permite, estudiar las cualidades del proceso original.

De igual manera, Cantoral (2013), expresa que para la formación del concepto de variación se deben integrar distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos. Además de una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación.

En Colombia, en los Estándares Curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.
>
> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir, desde la Educación Básica Primaria, distintos caminos y acercamientos significativos para la

> comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Lo anterior confirma que este tipo de pensamiento tiene un papel preponderante en la resolución de problemas que están apoyados en el estudio de la variación y el cambio. Esta definición dada en los Estándares Curriculares de Matemáticas basa el énfasis en la resolución de problemas que comprenden el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; lo cual implica pensar de forma dinámica, relacionando variables y magnitudes a través de diversos modelos, tal como lo dice Vasco (2003).

Es importante traer a consideración algunos aportes dados por Vasco (2003), en cuánto a lo que no es el pensamiento variacional y a lo que sí es: En cuanto a lo que no es, él argumenta lo siguiente: “El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes. Pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas”. (p. 5). En lo que sí es, expresa:

> El pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones. El principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. (Vasco, 2003, p. 7).

En relación a cómo se desarrolla el pensamiento variacional, se explicita a través del aporte del autor en mención de los anteriores párrafos, quien considera que se da con la relación de múltiples pensamientos:

- Con el pensamiento numérico, si se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos, como la variación de los números cuadrados; con los intentos de captar patrones numéricos que se repiten.
- Con el pensamiento espacial, o mejor espacio-temporal, si se acentúan los movimientos, las transformaciones y los cambios, no las figuras estáticas y sus nombres y propiedades y se fija la atención en las variaciones implícitas en ese pensamiento espacio-temporal.
- Con el pensamiento métrico en cuanto a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de las magnitudes, medición inicial a numérica de esas cantidades, ordenación de las mismas y medición numérica.
- Con el pensamiento proporcional tradicional, las representaciones gestuales, representaciones de máquinas y circuitos, reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares (a través del PC o calculadoras graficadoras), entre otros.

En la investigación que aquí se está reportando, nos acogemos a la caracterización de Pensamiento Variacional aportada por Vasco (2003). Así mismo, pretendemos a continuación articular dichas posturas del Ministerio de Educación en los Estándares Curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) con la descripción del proceso comunicativo en matemáticas, siendo éste el foco fundamental del trabajo.

2.3 Proceso de comunicación

Como se mencionó al inicio de este apartado, esta investigación requiere conceptualizar los elementos necesarios que estarán relacionados con la caracterización de las habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales. Para lo anterior es necesario conocer qué se entiende por comunicación.

Diferentes posturas se han propuesto al respecto, a continuación mostraremos algunos aspectos relevantes de estas posturas.

El Consejo Nacional de Profesores en Matemáticas (NCTM) plantea que la comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática (Thales, 2003), además, que ésta es un camino para compartir y aclarar las ideas. La comunicación como proceso ayuda a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, ya sea de forma oral o escrita, ellos aprenden a ser claros y convincentes. Debido a que las matemáticas se expresan con frecuencia mediante símbolos, la comunicación oral y escrita de las ideas matemáticas no es siempre reconocida como una parte importante de la educación matemática.

Otra definición de comunicación es la dada por Ramírez (2009) que expresa que el proceso de comunicación apoya el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, dibujan, utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos.

Por su parte el MEN (1998) plantea que los estudiantes están comunicando matemáticas cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones. También alude que en las actividades que realizan los seres humanos es primordial e indispensable tener habilidad para comunicarse, ya sea porque se necesita hacer alguna observación, realizar una pregunta, promover una argumentación que no solo sea convincente para sí mismo sino para los demás, ya que como lo planteaba el NCTM (2000) los alumnos deberían ser capaces de explicar los métodos que han empleado en la solución de un problema, aprender a explicar sus respuestas y a explicar el por qué. El escuchar las explicaciones de las demás personas da la oportunidad de desarrollar la comprensión. De lo anterior se considera el proceso de comunicación como uno de los procesos más importantes en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Ahora bien, en cuanto al proceso de comunicación, se cita lo que proponen los Estándares Curriculares de Matemáticas, que se expresa de la siguiente manera:

> A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos (MEN, 2006, p.54).

Por su parte, Moya (2016) expresa que en el proceso de comunicación, se ejercita principalmente escuchar, leer y el descifrar otros tipos de textos, para lo que es necesario el conocimiento de lenguajes verbales y no verbales.

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Así como lo expresa Duval si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, se puede decir que el curso de precálculo no es ajeno a este proceso de comunicación, ya que los estudiantes al estar enfrentados a la resolución de un problema necesitan comunicar sus ideas e inquietudes del problema planteado, relacionado con la variación y el cambio cuando se tratan los diferentes conceptos tales como funciones, límites y derivadas. Tal como lo expresa los NTCM el proceso de resolver problemas con otros alumnos es beneficioso. Con frecuencia, un estudiante que tiene una manera de ver un problema puede sacar provecho de los puntos de vista de otro, que puede revelar un aspecto diferente al problema.

2.3.1 Formas de comunicación

Algunas investigaciones como la reportada por Jiménez (2013) han identificado algunas formas de comunicación en un salón de clases de matemáticas, las cuales denominaron simple o instrumental y social o participativa.

La comunicación simple o instrumental según Habemas (2000) citado por Jiménez (2013), la comunicación matemática está centrada en el profesor como ser racional autosuficiente, en donde saber es sinónimo de conocer objetos. Es una comunicación unidireccional, donde las estrategias educativas hacen ver las matemáticas como un cuerpo estático de conocimiento, que primero es interpretado por el profesor y luego es llevado a los alumnos quienes reciben la información de forma pasiva. La anterior descripción es la que hace Thomson citado por Jiménez (2013) para una clase tradicional.

Otros autores como Brendefur y Frykholm (2000) citado por Jiménez (2013) hacen una descripción de una clase típica, donde los profesores dominan las discusiones, exponen, hacen preguntas cerradas y permiten pocas oportunidades para que los alumnos comuniquen sus estrategias, ideas y pensamientos la cual el autor identifica como el tipo de comunicación simple o instrumental.

En la comunicación social o participativa según Bishop (2005) citado por Jiménez (2013) la comunicación matemática está centrada en el reconocimiento mutuo, del otro, del "sujeto social" en poner algo en común, en establecer significado a través de la negociación. En este tipo de comunicación el saber es sinónimo de "consenso" entre sujetos, y aprender se puede identificar con la metáfora "*aprender–como–participación*" tal y como lo expresa Sfard (2002) citado por Jiménez (2013). Esta es una comunicación multidireccional, donde los saberes se manifiestan como "algo subjetivo" mediado por la comunicación y su validez y racionalidad se

explica por la argumentación y los acuerdos entre alumnos y profesor, participantes en el acto comunicativo.

Tanto en la comunicación simple o instrumental como en la social o participativa existen algunos patrones de comunicación los cuales fueron denominados para la simple como tradicional y activismo y para la social como interaccionista, colectivista e investigativa por el autor.

El patrón tradicional es aquel donde el profesor encarna la autoridad de la escuela, de la clase y de las matemáticas con un carácter impersonal y atemporal de la misma según lo expresado por (Brousseau, 1986; Brendefur & Frykholm, 2000; Valero y Skovsmose, 2012) citado por Jiménez (2013) y se caracteriza por exponer los contenidos en el tablero y a partir de lo cual espera que sus alumnos aprendan ya que lo ve como un problema individual y lleva a pensar, según el autor, a que la matemática es así por naturaleza.

En el patrón activismo el autor retoma lo expresado por Voig (1995); Sierpinska (1995); Brendefur y Frykholm (2000); Wood (2003) y Nilsen et al., (2008). En el cual el profesor es guía y lo más importante es la actividad de los alumnos. Hay intercambio de información entre el profesor y los alumnos sólo para buscar la interacción entre los contenidos y las habilidades cognitivas del alumno.

En el patrón interaccionista que hace parte de la comunicación social los significados se constituyen en las interacciones de los participantes en clase.

En el colectivista el cual está basado en las teorías socio-culturales, el aprendizaje se ve como un proceso donde el aprendiz se hace partícipe de actividades específicas, como nexos comunicativos y la cognición es el resultado de esas relaciones como lo expresan Sfard, (2002),

Bauersfeld (1995), Genovard y Gotzens (1993), Sierpinska (1995), Wood (2003) Meneses (2004) citados por Jiménez (2013).

Finalmente, en el enfoque investigativo como lo expresan Cobb, Perlwitz y Wnderwoor-Gregg (1998), Voigt (1995), Brendefur y Frykholm (2000); Meneses (2004) citados por Jiménez (2013), el profesor y los alumnos crean una micro cultura del salón de clase, hay un ambiente de indagación matemática en una comunidad que aprende.

En cuanto a las formas de comunicación anteriormente descritas es posible clasificar el curso de precálculo dentro de una comunicación social o participativa, ya que no es una clase tradicional donde el profesor es el que se encarga de exponer los contenidos y los estudiantes agentes pasivos que solo reciben la información.

Los Estándares Curriculares de Matemáticas en cuanto a lo que significa ser matemáticamente competente expresan que:

> Significa formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, lo cual requiere de un análisis de la situación, de establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas (MEN, 2006, p. 51).

Por su parte Niss (2002) define la competencia matemática como “la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel”. Este autor identifica ocho competencias

matemáticas que clasifica en dos grupos: el primer grupo tiene que ver con la capacidad de preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas, y el segundo grupo con la capacidad de hacer frente y gestionar el lenguaje matemático y sus herramientas. Estas competencias, centradas en lo que las personas pueden hacer, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos.

Primer Grupo Preguntar y responder dentro de y con las matemáticas	Segundo Grupo Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
Dominio de modos de pensamiento matemático Planteamiento y resolución de problemas matemáticos Análisis y construcción de modelo Razonamiento matemático	Representación de entidades matemáticas Manejo de símbolos matemáticos y formalismos Comunicación en, con y acerca de las matemáticas Uso de recursos y herramientas

Tabla 1 Competencias Matemáticas

Fuente: Citado en la pirámide de la educación matemática. Ángel Alsina (2010). Universidad de Girona.

De acuerdo a lo que se plantea en la *Tabla 1*, Alsina (2010), expresa que ser matemáticamente competente implica:

- Pensar matemáticamente: construir conocimiento matemático en situaciones donde tenga sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer.

- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.
- Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas, planificar y desarrollar estrategias de resolución y validar soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) e instrumentos (calculadoras y tecnologías de la información, de dibujo y medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

2.3.2 Habilidades comunicativas del pensamiento variacional

En esta investigación damos continuidad al trabajo realizado por Rojas, Suárez y Parada (2014), en el cual se identifican algunas habilidades comunicativas, específicamente asociadas al pensamiento variacional. Dichas habilidades han sido exploradas desde un curso experimental de precálculo y han sido reportadas en Parada (2016), Parada, Conde y Fiallo (2016) y en Fiallo y Parada (en prensa). Por ello, presumimos aquí, que las habilidades del pensamiento variacional pueden ser: habilidad para interpretar, habilidad para explicar y habilidad para justificar.

a) Habilidad para interpretar

La Real Academia Española, RAE, define interpretar como explicar o declarar el sentido de algo, y principalmente el de un texto. El ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la

Educación Superior), expone que el proceso de interpretación en el plano matemático, hace referencia a las acciones que realiza una persona, con el propósito de comprender una situación en un contexto específico. La interpretación implica dar cuenta del sentido de un texto, de una proposición, de un problema, de un evento o de una gráfica, mapa, esquema o simbología propia de la disciplina objeto de la evaluación, e involucra acciones tales como:

- Identificar las variables involucradas en una situación problema y sus relaciones.
- Describir el estado, las interacciones o dinámica de un sistema, en términos de gráficos o simbólicos.
- Traducir información de un sistema de información a otro.
- Plantear conclusiones válidas a partir de un conjunto de datos o eventos.

Por su parte, Santos (2007) menciona que la interpretación de problemas es una etapa fundamental ya que en esta se encuentran las estrategias que ayudan a representar y entender sus condiciones, respondiendo a interrogantes como: ¿cuál es la información del problema? ¿Cuál es la incógnita? Y ¿Cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?

De igual forma, Moya (2016) expresa que la competencia interpretativa está basada en capacidades para la comprensión de la información con base en los sistemas simbólicos y a partir de la captación del sentido de los textos, mapas, esquemas, mensajes por los diferentes medios, interpretación de textos virtuales y demás material, para la formulación de teorías o la reconstrucción del conocimiento.

Finalmente, tomamos la definición dada por Suarez y Rojas (2013) en donde indican que la habilidad interpretativa “es la capacidad del estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático); así como la de entender

o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio". (p. 11).

b) Habilidad para explicar

Según la RAE, explicación es una declaración o exposición de cualquier materia, doctrina o texto con palabras claras o ejemplos, para que se haga más perceptible. Al respecto, los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) plantean que los alumnos deberían ser capaces de explicar los métodos que han empleado en la solución de un problema, aprender a explicar sus respuestas y a explicar por qué. Además, escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión. Las explicaciones de los niños serán en su propio lenguaje y, con frecuencia, se presentarán verbalmente o mediante objetos; mientras que en los niveles medios y en Secundaria, las explicaciones deberían llegar a ser cada vez más rigurosas matemáticamente (Thales, 2003).

Ahora, Duval (1999) por explicación expresa que es aquella parte del discurso que tiende a hacer comprender una noción, idea, hecho, objeto o fenómeno, pero que van más allá de su descripción, ya que tratan de encontrar las causas que los provocan o permiten entenderlos. La explicación no sólo consiste en una actividad reflexiva en relación con otra, sino que también es un medio explícito del que disponen el profesor y el estudiante para unir o enlazar las ideas. Además, ofrece una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno, resultado o comportamiento.

Por tanto, Reséndiz (2009) señala que la explicación establece uno de los medios que se utiliza en el aula de clases para llegar a comprender o dar sentido a un problema; lo cual hace que se convierta en el objeto de una comunicación, debate o discusión.

En este trabajo asumiremos la definición dada por Suarez y Rojas (2013) en la cual la habilidad explicativa es descrita como la aptitud que tiene un estudiante para exponer la descripción del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando el porqué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento.

c) Habilidad para justificar

El MEN (1998) plantea que los estudiantes deben justificar las diferentes estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de los problemas, por lo que es importante propiciar una atmósfera en la cual se estimule a los estudiantes a explorar, comprobar, y aplicar ideas, lo que implica que los profesores deben escuchar con atención a sus estudiantes, orientar el desarrollo de sus ideas por medio de preguntas, para que se posibilite la comprensión de las ideas abstractas. En el aula toda afirmación hecha tanto por el profesor o por los estudiantes, deben estar abiertas a posibles preguntas y reelaboraciones por parte de los demás.

Por su parte, Jorba **(**1998, pág. 48**)** establece que justificar es "producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los conocimientos objeto de la tesis".

Rigo, Rojano y Pluvinage (2011) utilizan el término justificación para hacer referencia a todo tipo de recursos argumentativos que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él. Una justificación suele tener dos propósitos:

- Epistemológico, el cual consiste en explicar o fundamentar una verdad matemática,

- Psicológico, que consiste en que el interlocutor consiga algún aprendizaje.

Finalmente, la definición dada por Suarez y Rojas (2013) en donde expresan que es la capacidad que tiene un estudiante para sustentar una idea, explicar el porqué de un proceso, aceptar o refutar una conclusión por medio de razones relevantes como la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo.

Uno de los resultados principales de la investigación es presentar descriptores propios de cada una de las habilidades antes citadas; descriptores asociados específicamente al pensamiento variacional.

2.4 Tipos de enunciados presentes en los talleres de precálculo

Chevellard (1991), afirma que la actividad matemática tiene una relación particular con el lenguaje. Por ello, la manera como los profesores y los libros plantean los problemas requieren de gran cuidado para lograr el objetivo de aprendizaje esperado. Es preciso, por ello promover actividad matemática mediante enunciados precisos. Al respecto, Godino (2003) realza el papel relevante del lenguaje como sistemas de signos mediadores entre los estímulos del contexto y las respuestas del sujeto. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

Dado que las habilidades del proceso comunicativo, en la investigación que aquí se reporta, se analizan desde el planteamiento de las actividades de un curso de precálculo, se hizo necesario caracterizar los tipos de enunciados que se plantean en los talleres de dicho curso, así:

2.4.1 Enunciados en lenguaje verbal

El lenguaje verbal, según Molina (2014) refiere al lenguaje cotidiano, ya sea en forma oral o escrita, incluyendo terminología específica tal como la propia del lenguaje matemático

académico. Mediante la presentación de enunciados en lenguaje natural se espera que el estudiante tenga la necesidad de traducir las expresiones verbales en otras expresiones que le permitan representar, comprender y resolver un problema.

2.4.2 Enunciados con representación gráfica o pictórica

Una representación gráfica, permiten la representación de fenómenos o de datos. Representaciones mediante recursos visuales (líneas, vectores, superficies, símbolos, esquemas o dibujos) mediante los cuales se expresa visualmente una relación matemática. Las gráficas cartesianas representan un conjunto de puntos que se plasman y sirven para analizar el comportamiento de un proceso o un conjunto de elementos o signos que permiten la interpretación de un fenómeno. La representación gráfica permite establecer valores que no se han obtenido experimentalmente sino mediante la interpolación (lectura entre puntos) y la extrapolación (valores fuera del intervalo experimental). Mediante enunciados de este tipo se espera que el estudiante haga interpretaciones, de explicaciones o justificaciones asociadas a fenómenos de cambio y variación.

2.4.3 Enunciados en lenguaje matemático

Parada (2009) menciona que las matemáticas como la mayoría de las ciencias tiene un lenguaje propio, el cual da claridad a los objetos matemáticos para comunicarlos de manera clara y precisa. Los símbolos y términos matemáticos tienen un significado determinado para favorecer la comprensión. Ortega y Ortega (2002) citados por Parada (2009), exponen que el lenguaje matemático está compuesto por dos aspectos distintos pero interrelacionados: la simbología utilizada en matemáticas y, por otro lado, la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. La simbología matemática está repleta de caracteres gráficos (∀, ∃,

$\Leftrightarrow, \cong, \nearrow, \in, \subset, \neq, +, \%, <, \Pi, \Sigma, \neq, \cup, \surd$,...), que son como las "palabras" de un idioma. Estos símbolos se deben conocer para interpretar lo que se quiere decir con ellos, al tiempo que se van a utilizar para expresar lo que se quiera decir. Todos los símbolos son necesarios para la perfecta construcción de ideas, de manera que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente, aunque sea gráficamente parecido, cambiaría totalmente el significado. Es decir, todas y cada una de las "palabras" matemáticas tienen un significado concreto. En el lenguaje matemático, intervienen los términos, expresiones, notaciones, y gráficos). Chevallard, Bosch y Gascón (1997) mencionan que otros objetos más complejos son los sistemas conceptuales, teorías, etc. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco se podría avanzar en el trabajo matemático si no tuviera la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

> En los talleres del curso de precálculo, varias de las actividades se plantean mediante expresiones algebraicas, numéricas, tabulares, etc., en las cuales se plantea una situación de la que se espera que los estudiantes usen para interpretar, explicar o justificar el cambio y la variación.

2.4.1 Enunciados presentados con tecnología digital

Santos (2001) citado por Fiallo y Parada (en prensa), expresa que la utilización de herramientas computacionales permite que los estudiantes "manipulen la matemática", de manera que la manejen por sus propiedades, a diferencia de los bosquejos o figuras que se hacen con lápiz y papel. Los estudiantes pueden manipular parte de las configuraciones y ver los cambios o invariantes, donde la observación de los invariantes en una representación es fundamental, para desarrollar conjeturas y en el proceso de argumentación de dichas conjeturas por parte de los alumnos. Los estudiantes, haciendo uso de recursos que facilitan las

representaciones dinámicas, pueden visualizar el comportamiento de la situación y resolver el problema en forma experimental, donde los alumnos atienden directamente al significado de las representaciones y pueden desarrollar un sentido dinámico de la "variación continua", la cual es una de las ideas fundamentales de la matemática (ibíd.). Por tanto, los enunciados mediante representación digital se consideran enunciados dinámicos en los procesos cognitivos de los estudiantes debido a su influencia sobre el significado del objeto matemático de estudio.

3. Metodología

En este capítulo describimos el diseño metodológico de la investigación, la cual es de corte fenomenológico y de tipo experimental. Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa la cual nos permitió acercarnos de manera más fehaciente a las diferentes formas de pensamiento variacional de los estudiantes, con el fin de poder caracterizar sus habilidades, específicamente del proceso comunicativo: objeto de esta investigación.

Aquí se describen las fases del proceso de investigación, los instrumentos utilizados para la recolección de datos, el número de casos de estudios y las actividades realizadas durante el curso de precálculo en las cuales se evidenciaron las habilidades comunicativas en los estudiantes. A continuación se describen las cuatro fases en las que fue estructurado el proceso de investigación (*Figura 2*).

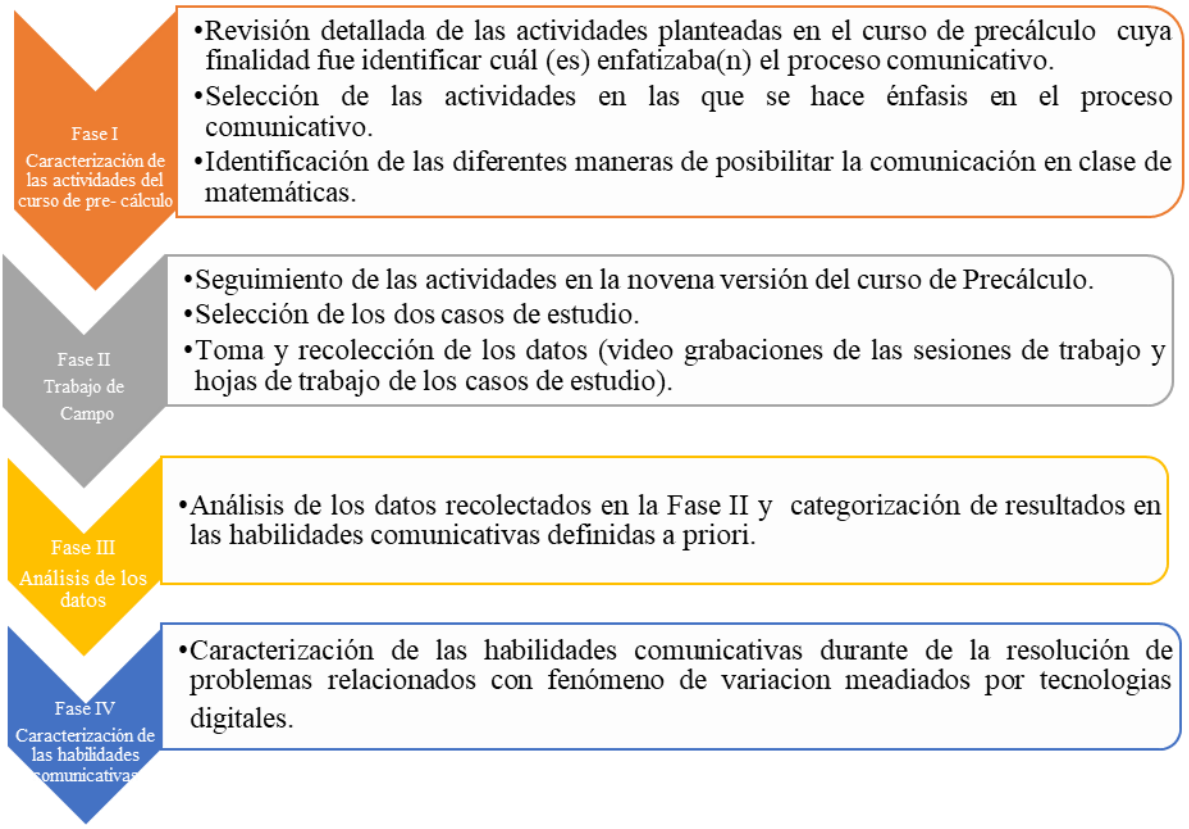


Figura 2 Estructura metodológica de la Investigación

3.1 Fase 1: caracterización de las actividades del curso de precálculo

En esta etapa se revisó detalladamente cada una de las actividades planteadas en cada sesión del curso de precálculo con la finalidad de identificar en cuáles actividades se potenciaba o se desarrollaban más las habilidades comunicativas por parte de los estudiantes.

A partir de ello se decidió cuáles actividades se iban a trabajar con el fin de hacerlo más preciso y enfocado a las habilidades que se querían observar. En la *Tabla 2* se presentan cada una de las actividades que fueron contempladas en el curso de precálculo de donde se tomaron las que iban a ser parte del estudio.

N°	Nombre de la actividad	N°	Nombre de la actividad
1	Números y operaciones	**8**	Funciones y Realidad
2	Razones trigonométricas para triángulos rectángulos	**9**	Funciones y Realidad II
3	Razones trigonométricas en el plano	**10**	Viaje en el ventilador
4	Matemáticas y Realidad	**11**	Recipientes
5	Interdependencia entre variables	**12**	Área máxima
6	Transformaciones de funciones	**13**	Caja sin tapa
7	Análisis de información	**14**	Razones de cambio

Tabla 2 Actividades del curso de Precálculo

A continuación se presenta un análisis de algunas de las actividades que se desarrollaron en la novena versión del curso, en el cual se tuvo en cuenta tanto las competencias de hablar, escribir, leer y escuchar como las habilidades a priori definidas por Suarez y Rojas (2013).

Análisis a priori de las actividades del curso de precálculo

Para este trabajo de investigación fue de gran importancia revisar cada una de las actividades cuya finalidad era detectar aquellas actividades en las que se encontraba presente el proceso de comunicación, durante este proceso hallamos que, en todas las actividades de las situaciones contextualizadas en el curso de precálculo, estaba presente el proceso de comunicación, por lo cual decidimos que nos enfocaríamos en algunas de las actividades las cuales nos aportaran información valiosa para la caracterización de las habilidades comunicativas que emergen de la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación mediados con tecnologías digitales para el estudio de la presente investigación.

a) Actividad Uno: Números y operaciones

La actividad 1 inicia con una recta numérica como se ve en la *Figura 3*, en la cual se encuentran ubicados una serie de puntos, los cuales representan un número de esta recta y se

plantean preguntas en las cuales se espera que los estudiantes hagan estimaciones del resultado y de la posición que ocupará dicho punto y que tengan en cuenta las diferencias que se presentan cuando se hacen algunas operaciones con números negativos y números entre cero y uno. Luego de este trabajo a lápiz y papel se procede a que los estudiantes comuniquen sus resultados en los cuales se establecen diferentes opiniones con respecto a la solución de las preguntas. Se espera que el estudiante justifique qué lo llevó a dar dicha respuesta.

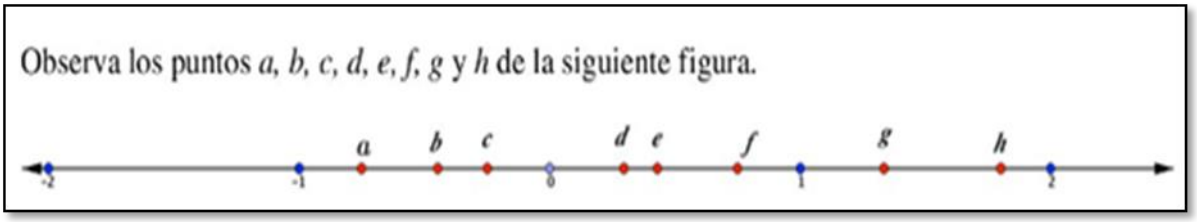


Figura 3 Situación planteada en la Actividad 1 del curso.

Para la actividad 2 se le presenta al estudiante una representación digital en GeoGebra (*Figura 4*), en la cual encontramos dos deslizadores uno para los valores de a y otro para los de b, y tres vectores a, b y ab que están ubicados sobre la recta real, estos cambian de color de acuerdo a su posición: si están entre menos uno y uno serán de color azul, los mayores que uno serán de color rojo y si son menores que menos uno aparecerán en color verde. Se espera que el estudiante pueda dar respuesta a las preguntas con las condiciones dadas mediante la exploración con el software.

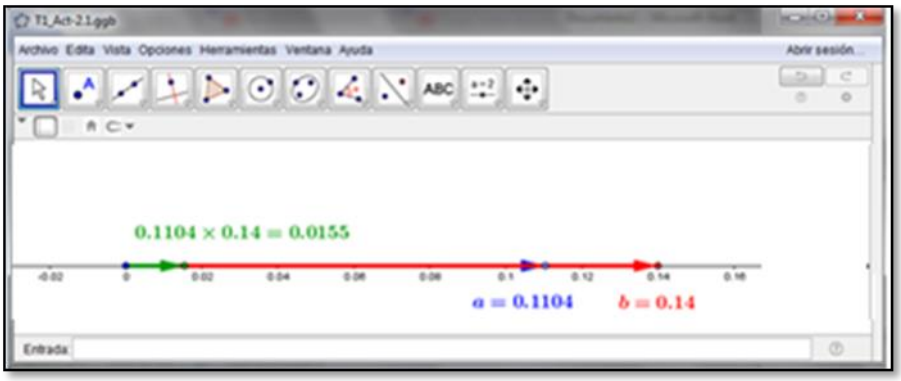


Figura 4 Representación digital con la que se realiza la Actividad 2 del curso.

En las siguientes actividades nuevamente se les presenta una construcción en GeoGebra en las cuales se encontrarán unos deslizadores que los estudiantes van a explorar con la finalidad de dar respuesta a una serie de preguntas planteadas, por ejemplo, ¿qué sucede con el valor de $a.b$ si $0 < a < 1$ y $0 < b$?, respuestas que serán luego compartidas con todos los compañeros de clase en donde se generará un debate en el cual unos estarán a favor y otros en contra de las respuestas dadas por los compañeros.

b) Actividad Dos: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos

Esta actividad inicia con dos ejercicios que se deben resolver a lápiz y papel en los cuales se le suministran algunos datos con la finalidad que los estudiantes reconozcan la necesidad de aprender nuevos conceptos para la resolución de problemas de triángulos rectángulos. Se espera que los estudiantes lleguen a concluir o a generalizar que cuando entre los datos hay una longitud o medida específica de un lado, la solución es un único triangulo rectángulo que cumple las condiciones dadas y cuando los datos incluyen relaciones entre lados hay infinitas soluciones diferentes. Ahora, cuando los datos sólo incluyen medidas de ángulos, hay infinidad de triángulos rectángulos que cumple las condiciones. Al terminar de responder los

cuestionamientos iniciales los estudiantes pasan a socializar sus respuestas dando las justificaciones que los llevaron a dar éstas. Para las actividades dos y tres se trabaja con la construcción realizada en GeoGebra como lo muestra la *Figura 5*.

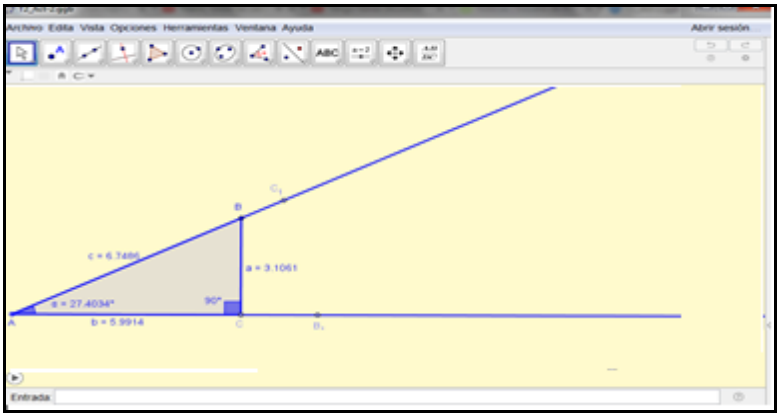


Figura 5 Representación digital de la situación planteada en la actividad 2.

En este archivo (*Figura 5*) se hallan las razones trigonométricas, las cuales cuando se mueve una de las semirrectas se puede observar la variación de las razones trigonométricas, visualizar las variaciones de los ángulos α y β, las variaciones de los lados del triángulo, de los lados cuando se arrastra el vértice *C*, dejando invariantes las razones trigonométricas y los ángulos, permitiendo visualizar los triángulos semejantes al triángulo *ABC*. Se espera que el estudiante entre en el estudio de las razones trigonométricas a través de la exploración de las medidas de los lados y de los ángulos del triángulo rectángulo. Además de identificar las propiedades de las razones y sus valores de variación, se espera que al final puedan concluir que seno y cosecante, coseno y secante, y tangente y cotangente son recíprocas.

En el ejercicio 3 se pide mostrar el ángulo β para calcular y relacionar las razones trigonométricas de este ángulo del triángulo rectángulo a través de la exploración. Luego, se espera que los estudiantes encuentren y demuestren las primeras relaciones y propiedades entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios. La importancia de que los

estudiantes encuentren las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios del triángulo rectángulo, es que en la práctica, se encuentran situaciones en las que es conveniente o necesario combinar razones trigonométricas de ambos ángulos del triángulo para obtener la solución. En esta actividad se espera que las justificaciones iníciales de los estudiantes sean aún empíricas basadas en los datos que observan en el computador.

Como actividad final se plantean dos preguntas de aplicación de los conocimientos y lenguaje nuevo con el fin que los estudiantes comprendan la importancia del nuevo conocimiento adquirido en la solución de las actividades anteriores. Se espera que los estudiantes se den cuenta de que tangente es igual al cociente entre el seno y el coseno y que la cotangente es la inversa.

c) Actividad Tres: Razones trigonométricas en el plano

Como actividad inicial se plantean dos preguntas para responder a lápiz y papel, las cuales consisten en extender las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo al plano cartesiano. Para ello se presentan dos igualdades (Figura 6) en donde se hace necesario pensar en el seno y coseno de un ángulo negativo si α se reemplaza por un ángulo entre 0° y 90° en la que el estudiante debe decidir si son verdaderas o falsas, en caso de ser verdadera se debe realizar la demostración y si es falso debe proporcionar un contraejemplo. Se espera que los estudiantes sólo lleguen a realizar ejemplos en los cuales se cumpla la igualdad con lo que pretenden demostrar, ya que no conocen las definiciones de las razones trigonométricas en el plano.

¿Es verdad que $cos(\alpha) = sen(\alpha - 90)$ y que $sen(\alpha) = cos(\alpha - 90)$ para todo ángulo α entre 0º y 360º? si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo

Figura 6 Situación presentada en la Actividad 1.

Para la actividad 2 se les brinda una representación digital en GeoGebra (

Figura 7) en la cual se definen las razones trigonométricas y se brinda información de los conceptos a trabajar. Se les pide a los estudiantes que exploren y busquen relaciones existentes en la representación.

En la representación al mover el punto *P* sobre la circunferencia, se puede observar la variación de las coordenadas del punto (x,y) y de las razones trigonométricas, las cuales se encuentran diferenciadas por colores que ayudan a identificarlas y distinguirlas entre ellas. También se ve el triángulo formado por el eje de las *x*, el lado final del ángulo y la perpendicular al eje *x* que pasa por el punto *P*. En la construcción se destacan las relaciones geométricas, numéricas, algebraicas y analíticas con colores asociados a las razones trigonométricas. Se espera que estas ayudas visuales les permitan a los estudiantes identificar y conectar las diferentes relaciones de los conceptos involucrados.

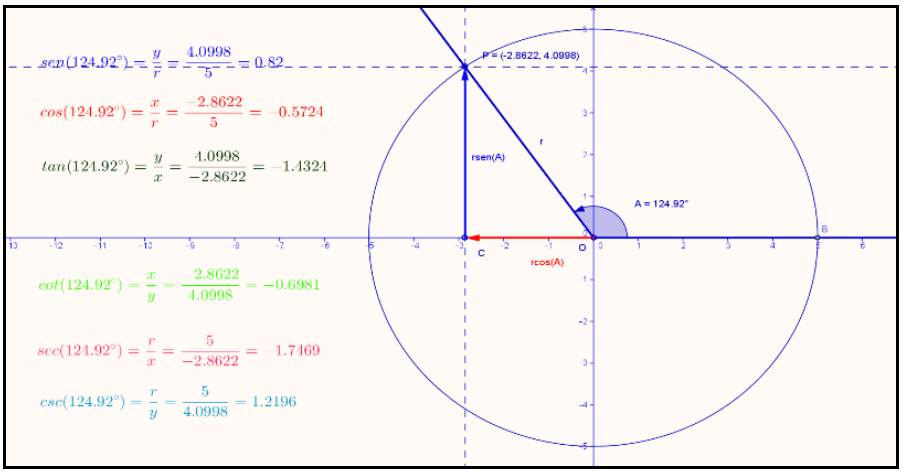


Figura 7 Representación digital de la situación planteada en la actividad 3 del curso

Se pretende que los estudiantes analicen los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano y las restricciones respectivas para las razones tangente, cotangente, secante y cosecante. Sabemos que no va ser tarea fácil para aquellos estudiantes que analizando sólo algunos casos observen las características que tiene cada razón trigonométrica y lleguen a conjeturar inmediatamente acerca de cuáles valores toman las razones, por lo cual son necesarias preguntas bien formuladas por parte del profesor lo cual lleve a los estudiantes a observar lo que se pretende. Resueltas las preguntas se procede a que los estudiantes compartan sus análisis y resultados encontrados con todos los compañeros. Se espera que esta socialización genere una especie de debate donde cada estudiante defiende su resultado y convence o se deja convencer de lo hallado con argumentos válidos.

Como una siguiente actividad se presenta un archivo en GeoGebra (*Figura 8*) para que los estudiantes analicen las relaciones existentes entre un ángulo α y –α. Se espera que los estudiantes lleguen a encontrar que $sen(A) = -sen(-A)$, por la relación existente (inversos aditivos) entre las ordenadas de los puntos P y P', también deben encontrar la relación $cos(A) = cos(-A)$ por la relación entre las abscisas de los puntos P y P'.

Otra expectativa de la actividad es que las justificaciones de los estudiantes van a ser de tipo visual o numérico, puesto que es lo observado en el computador. Por ello, se debe ayudar al estudiante a que explique lo observado usando argumentos teóricos basados en el análisis de las relaciones entre las coordenadas P y P'. También se espera que encuentren la relación de congruencia entre los triángulos rectángulos formados entre el eje positivo de las x, el lado final del ángulo y la recta perpendicular que pasa por P y P'.

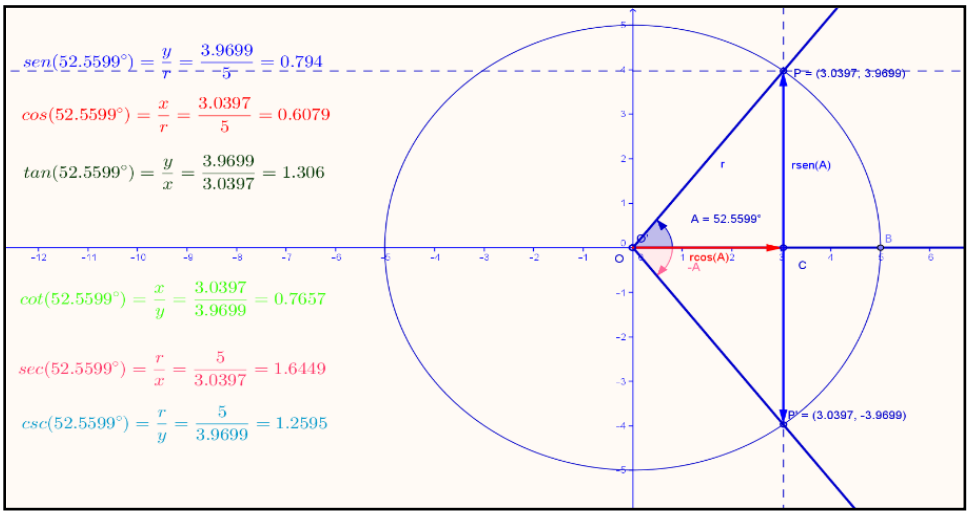


Figura 8 Representación digital con la que se realiza parte de la actividad 3

En la actividad 4 hacemos uso de una representación digital en GeoGebra como se puede observar en la *Figura 9* en la cual se visualiza los ángulos α, α-90 y 90 –α para que los estudiantes analicen las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de los tres ángulos acudiendo a las características observadas.

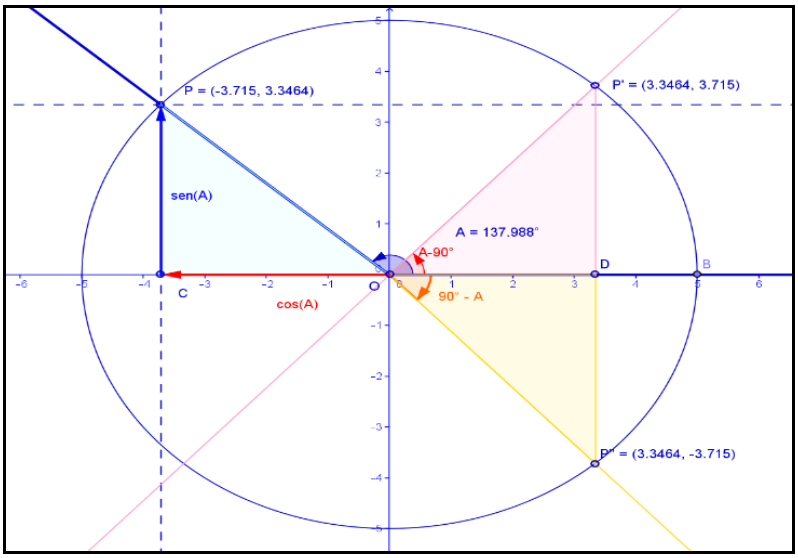


Figura 9 Representación digital con la cual se desarrolla la actividad 4

Se espera que los estudiantes, planteen y demuestren que $sen(A) = cos(A - 90)$, $cos(A) = -sen(A - 90)$ y $tan(A) = -cot(A - 90)$. También como expectativa se tiene que los estudiantes identifiquen los triángulos congruentes en la circunferencia y que verifiquen los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentre. Algunos estudiantes se darán cuenta en poco tiempo de esta estrategia general, mientras que otros estudiantes tardarán en relacionar unos casos con otros.

Como actividad final se le plantea al estudiante una serie de preguntas que debe llegar a resolver sin la ayuda de una calculadora o de GeoGebra con el fin de comprobar si lo trabajado anteriormente quedó claro. Se espera que el estudiante justifique las respuestas basado en los conocimientos adquiridos anteriormente.

d) Actividad Cuatro: Matemáticas y Realidad

Esta actividad inicia con un problema contextualizado (*Figura 10*) que se encuentra escrito con un lenguaje natural, en el cual se le hace dos preguntas al estudiante con el fin de que determine qué es lo que está pasando a medida que se toma el medicamento para finalmente llegar a generalizar el comportamiento que tiene la magnitud que varía conforme el tiempo pasa.

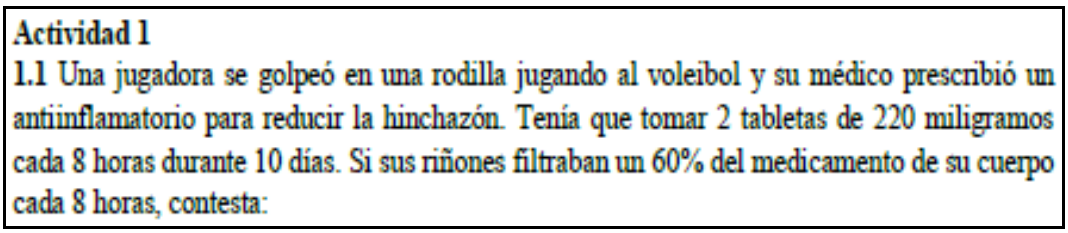

Actividad 1
1.1 Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

Figura 10 Representación en el lenguaje natural de una situación contextualizada

Para el desarrollo de esta actividad se procura que el estudiante pueda pasar del lenguaje natural a realizar una representación en la cual consigne lo que va sucediendo cuando transcurre cierta cantidad de días con la cantidad de medicamento en el cuerpo y finalmente pueda llegar a describir de forma general el problema al transcurrir el tiempo utilizando para esto cualquiera de las diferentes representaciones (gráfica, algebraica o en el lenguaje natural).

Terminada esta actividad se les pide a los estudiantes que muestren y comuniquen a sus compañeros los resultados obtenidos para observar las diferentes formas de abordar el problema sin que en este momento el profesor sea quien tenga la última palabra en cuanto a la correcta solución.

Posteriormente, se les presenta a los estudiantes un archivo de GeoGebra en el cual se encuentra una representación digital de la actividad de la jugadora con el cual el estudiante podrá verificar los resultados obtenidos en la actividad anterior. Terminada la interacción con el software y la comparación de la respuesta obtenida anteriormente se procede nuevamente a la

intervención de los estudiantes para que sean ellos los encargados de comunicar si la solución dada era la adecuada, o qué pasaron por alto, qué les impidió llegar a la respuesta correcta, algunas veces son preconceptos que traen errados y hasta que no los manipulan y trabajan con ellos no se convencen de lo contrario.

La siguiente parte de la actividad es la llamada Cuerdas vibrantes (*Figura 11*) en donde se explora una situación en la cual las magnitudes que aparecen son inversamente proporcionales y se les pide expresar qué pasa si se continúa fraccionando a la mitad la longitud de la cuerda original y cuál es la relación que existe entre las variables. Como en toda actividad se les pide a los estudiantes que comuniquen y compartan los resultados obtenidos de la solución de las preguntas anteriores.

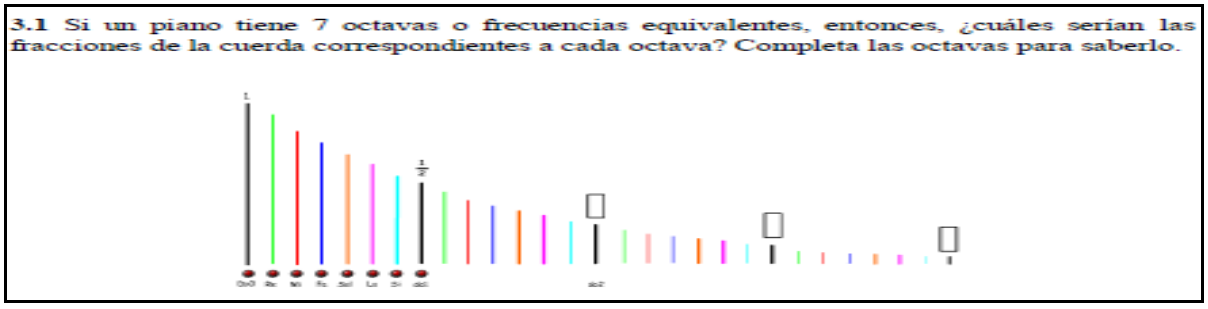


Figura 11 Representación digital de la situación de las cuerdas vibrantes

e) Actividad Cinco: Interdependencia entre variables

Esta actividad no inicia como las anteriores en las cuales se empezaba trabajando con lápiz y papel, inicia con un archivo digital en GeoGebra (*Figura 12*) en el cual se muestran dos puntos A y P, donde P depende del movimiento realizado por A, se le pide al estudiante hacer uso de los comandos Rastro y Lugar Geométrico en el punto P cuando varia el punto A para que halle la diferencia entre Rastro y Lugar Geométrico, qué relación existe entre la ordenada y la

abscisa y encuentre una expresión algebraica que modele lo anterior. Se espera que los estudiantes expresen esta relación en un lenguaje natural. Posteriormente se le pide al estudiante hacer uso de la expresión algebraica que encontró para que junto con el software pueda utilizar las diferentes representaciones que ofrece GeoGebra para que comunique de forma escrita la relación existente entre la gráfica, la expresión algebraica, el rastro, el lugar geométrico y la tabla.

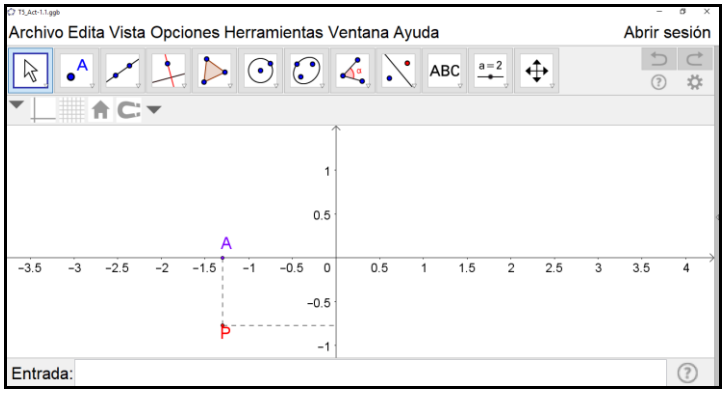


Figura 12 Representación digital con la cual inicia la actividad 5 del curso

Resueltas las nueve preguntas por parte de los estudiantes se procede a que los estudiantes comuniquen y compartan sus resultados con todos los compañeros y que se genere un espacio para el debate de las ideas presentadas por cada uno. Dado que hasta el momento para los estudiantes es difícil escribir una justificación de manera correcta, lo cual se evidencia al momento de comunicar sus respuestas, todos los resultados obtenidos al desarrollar las actividades deben quedar consignados en la hoja de trabajo.

Para la actividad dos se les presenta un nuevo archivo similar al anterior para que por medio de la manipulación del software den respuesta a una serie de preguntas donde se les presenta de forma explícita el objeto función dado que en la actividad anterior se hizo dicho reconocimiento del objeto. En esta actividad se trabaja el reconocimiento de las variables

independientes, las variables dependientes, el dominio, recorrido. En la siguiente actividad deben responder nuevamente las preguntas realizadas en la actividad uno, se torna un poco repetitiva la actividad pero en algunos estudiantes se evidencia que no es aún claro cuando pasamos a la parte de comunicar y compartir los resultados.

Como actividad final se le presenta al estudiante la *Figura 13* que tiene la representación de cuatro funciones en la cual se le pide relacionar cada una de las gráficas con la función que corresponde justificando de forma escrita su selección.

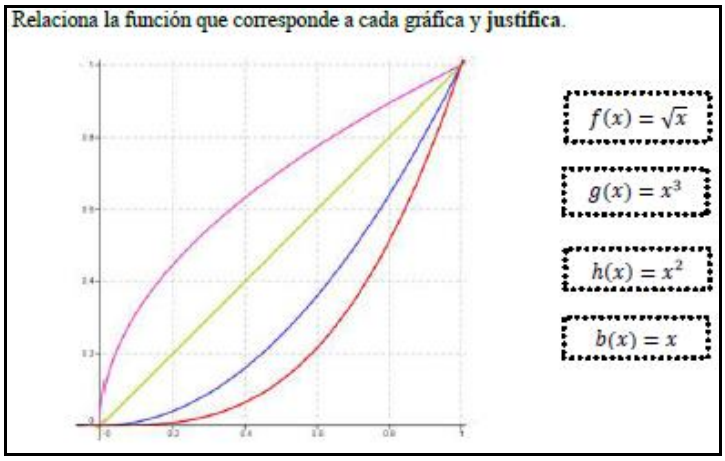


Figura 13 Actividad de relacionar funciones de forma algebraica con la gráfica planteada en la actividad 5 del curso

f) Actividad Seis: Transformaciones de funciones

Como actividad inicial de transformaciones de funciones se presenta al estudiante un primer punto en el que la función se encuentra en el registro algebraico y debe presentar gráficamente la función (Figura 14).

Actividad 1

1.1 En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$. **Explica** tu procedimiento.

1.2 **Discute** con tus compañeros y el profesor tu trabajo.

Figura 14 Planteamiento de la Actividad 6.1 del curso.

Una vez elaborada la actividad uno que es a lápiz y papel se le presenta al estudiante la actividad dos en la que se hace uso de una representación digital en GeoGebra, en la cual el estudiante puede modificar tanto la función que desea graficar como las variaciones que desee realizarle a la función (Figura 15).

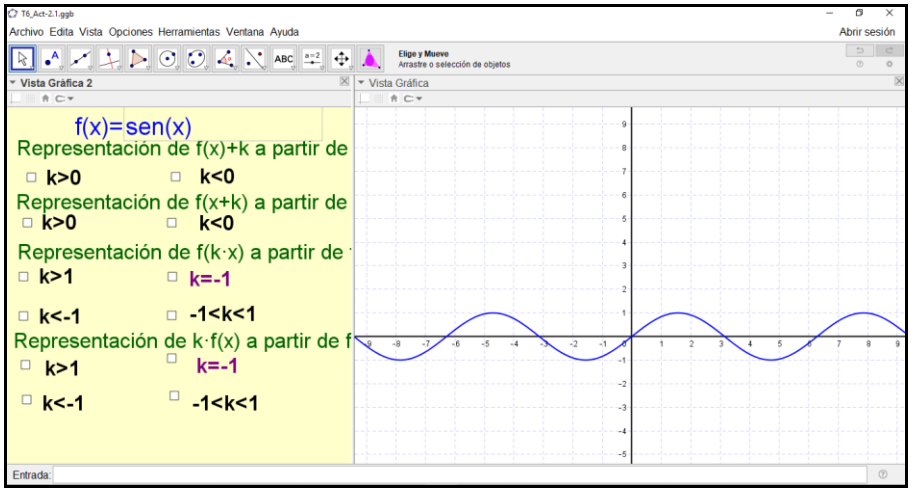


Figura 15 Representación digital para realizar la Actividad 6.2 del curso.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante pueda ir marcando cada opción que se le presenta a la izquierda de la gráfica y vea que transformación esta le aplica a la función. La idea es que el estudiante al usar cada opción observe el comportamiento y luego proceda a desmarcar cada cuadricula después de trabajarla, para que de esta forma pueda escoger otra y realizar el procedimiento nuevamente para ver las diferentes transformaciones que puede sufrir una función. La recomendación es que no se tengan todas las gráficas de la funciones al tiempo para

así poder observar el comportamiento de cada una de ellas y que los estudiantes puedan verlas por separado, para que así logren ver con claridad cómo cambia la gráfica de la función al aplicar dicha transformación.

La finalidad del primer acercamiento es que los estudiantes logren visualizar las diferentes transformaciones a las que se pueden someter las funciones de acuerdo al manejo que se le dé a una constante diferente de cero. Al abrir el archivo nos encontramos con la función $f(x) = sen(x)$, para la cual, el estudiante observará el cambio que tendrá la gráfica de acuerdo a cada opción proporcionada por el archivo de GeoGebra.

Las transformaciones que se quiere estudiar en esta actividad son: las traslaciones, reflejos, las expansiones y las compresiones. Por su parte las traslaciones son transformaciones que cambian la posición de la gráfica de una función, es decir, la gráfica de una función se traslada hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda. Las traslaciones son consideradas transformaciones rígidas.

La reflexión se puede decir que es una imagen especular de la gráfica alrededor del eje coordenado respectivo. Así, Para graficar $y = -f(x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x lo cual corresponde a una Reflexión Vertical y para graficar $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y que sería una Reflexión horizontal.

Ahora, las expansiones y compresiones son consideradas transformaciones no rígidas que cambian el largo o el ancho de la gráfica de una función. Para las expansiones y compresiones verticales tenemos que para graficar $y = af(x)$ se debe tener en cuenta si $a > 1$, la gráfica

de $y = f(x)$ se expande verticalmente por un factor a, es decir, se alarga la función y si $0 < a < 1$, la gráfica de y=f(x) se comprime verticalmente por un factor a, es decir, se encoge.

Para las expansiones y compresiones horizontales tenemos que para graficar $y = f(bx)$ vemos si $b > 1$, la gráfica de $y = f(x)$se comprime horizontalmente por el factor $1/b$, es decir, se encoge y si $0 < b < 1$, la gráfica de $y = f(x)$ se expande horizontalmente por el factor de $1/b$, es decir, se alarga.

Para la actividad tres se le presenta al estudiante otra representación digital en GeoGebra (Figura 16) donde aparecen dos columnas con las diferentes transformaciones una para las transformaciones horizontales y otra para las verticales en la cual el estudiante va seleccionando y observando qué transformación fue la que le ocurrió a la gráfica, es decir, si la gráfica se desplazó hacia arriba, abajo, a la derecha a la izquierda, si se alargó o se encogió, etc.

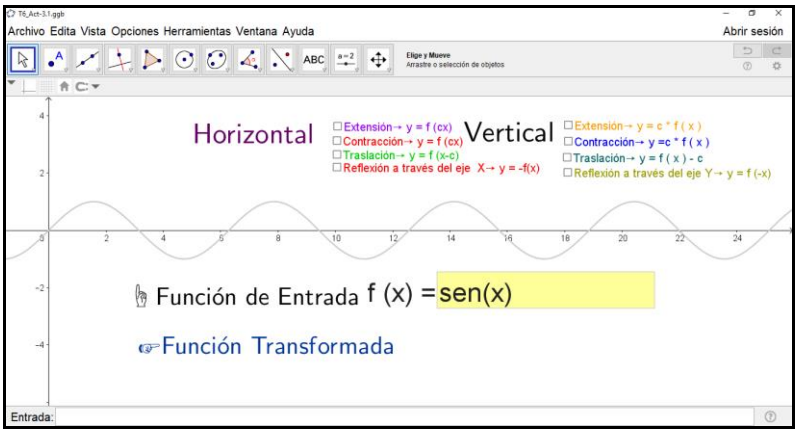


Figura 16 Representación digital para la Actividad 6.3 del curso.

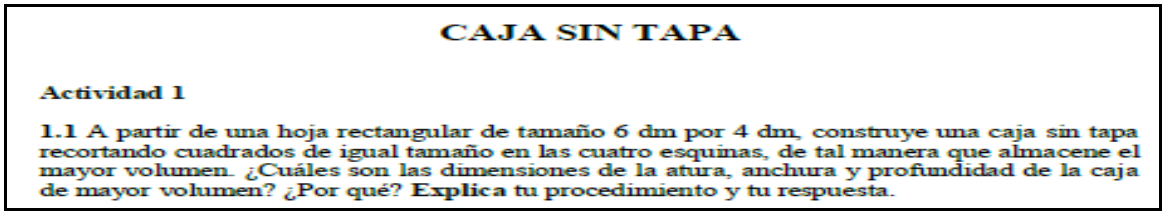
Finalmente, para la actividad cuatro no se presenta una representación digital al estudiante si no que se le pide abrir GeoGebra y en la barra de entrada escribir la función $f(x) = x^2$ y en vista gráfica escribir el punto (-3,4). La finalidad de esta actividad es que el

estudiante aplique alguna de las transformaciones trabajadas en las actividades anteriores con el fin de que la función pase por el punto dado y así pueda escribir la expresión algebraica que le represente la función con la respectiva transformación. Para concluir se le pide al estudiante que compruebe si su expresión algebraica obtenida en el inciso anterior realmente puede obtener el punto dado.

Con esta actividad se busca consolidar lo que se trabajó en las actividades anteriores y que el docente pueda intervenir para repasar algunos elementos de la parábola, tales como: eje, vértice, raíces, foco, etc. los cuales serían de gran provecho para los estudiantes.

g) Actividad Siete: Caja sin Tapa

Se inicia esta actividad 1 como se muestra en el enunciado de la Figura 17.



CAJA SIN TAPA

Actividad 1

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

Figura 17 Enunciado a partir del cual se desarrolla la actividad 13 del curso

Para el desarrollo de esta actividad es necesario que los estudiantes lleven a clase una cartulina con las medidas solicitadas y además otros materiales que sirvan para la construcción de dicha caja como lo es tijeras, pegamento, cinta, reglas entre otros.

En esta parte se espera que los estudiantes trabajen solos y se den cuenta que a pesar de que todos cuentan con una cartulina de igual medida van a obtener diferentes cajas.

Ya teniendo todas las cajas construidas se procede a realizar la *Tabla 3* en la que se consignen todas las medidas de las cajas para buscar cual es la caja de mayor volumen construida. La tabla puede realizarse como la siguiente

Estudiante	***Largo***	***Ancho***	***Alto***	***Volumen***

Tabla 3 Medidas de la caja para la Actividad 1.

Al ir construyendo dicha tabla los estudiantes irán explicando sus procedimientos o las elecciones que hicieron para realizar su caja.

Se espera que los estudiantes sepan interpretar lo que se pide en la actividad, por tal motivo el profesor no puede hacer intervenciones ante el proceder del estudiante, lo que se debe hacer es llevar al estudiante a que escriba el porqué de sus procedimientos.

Terminada esta parte se procede a que los estudiantes abran la representación digital (*Figura 18*) de la actividad anterior en la cual se van a poder manipular algunas de las magnitudes que se encuentran implicadas en el problema, como se muestra en la figura siguiente

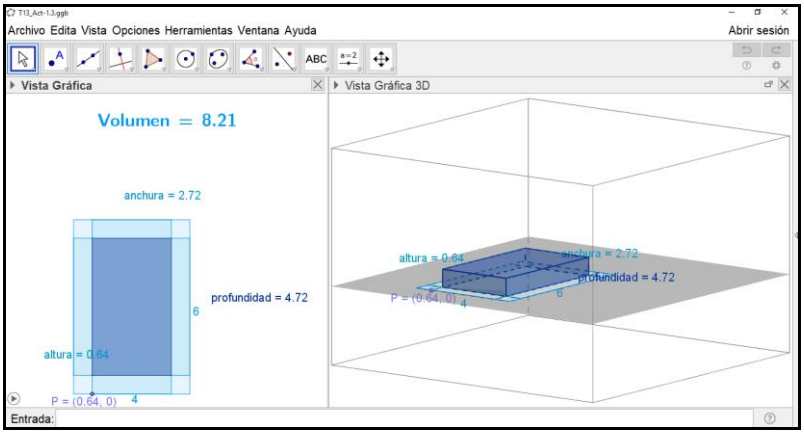


Figura 18 Representación digital de la situación planteada en la actividad 13

Para esta actividad se le pide a los estudiantes que expresen cuáles magnitudes varían y cuáles no, de qué variables depende el volumen de la caja, qué valores puede tomar la altura, anchura, profundidad y volumen de la caja, también la relación que existe entre estas magnitudes; ya contestadas estas preguntas se hace una última en la cual deben expresar cuáles son las dimensiones de la altura, la achura y profundidad de la caja que hacen que el volumen de la caja sea mayor.

Se espera que el estudiante identifique los elementos que varían, es decir, las tres medidas de la caja, las cuales dependen de las dimensiones del cuadrado que se recorte. De igual forma que identifique que también varía el volumen de la caja.

Para la siguiente actividad se presenta otro archivo que tiene nuevamente la representación gráfica y se hace uso de algunos comandos que ofrece GeoGebra para trabajar la pendiente. Se usa GeoGebra con el fin de que el estudiante pueda afianzar sus conocimientos y pueda superar algunas concepciones por medio del software, como por ejemplo, considerar que a mayor altura de la caja mayor volumen.

De acuerdo al manejo que tenga el estudiante del software llegará a responder las preguntas empleando ya sea una tabla, un gráfico, una expresión algebraica. Con la variedad de estrategias que ofrece el software, promueve en los estudiantes las diversas formas de comunicación.

Terminada la parte de las preguntas se pasa a que los estudiantes compartan sus resultados expresando sus respectivas justificaciones, demostraciones que plasmaron en su cuaderno de trabajo.

3.2 Fase 2: trabajo de campo

Esta fase consiste en la recolección y sistematización de los datos de la siguiente manera: la primera parte correspondió a la toma de datos que se basa en la videograbación de cada una de las sesiones del curso, centrando la atención en dos estudiantes, a los cuales se les pidió sus soluciones escritas y se captaron sus expresiones orales y gestuales que pueden dar cuenta de sus habilidades comunicativas. La segunda parte fue la transcripción de todas las grabaciones de las sesiones del curso, y finalmente se realizó la categorización de las habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales en estudiantes de primer ingreso. De manera más detallada a continuación se presentan los procesos realizados durante el trabajo de campo:

3.2.1 Selección de las actividades del curso de precálculo

A partir de las descripciones de las actividades dadas al inicio de este capítulo decidimos que aunque todas las actividades aportarían valiosa información para la caracterización de las habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas mediados con tecnologías digitales, serían tomadas ocho actividades en las cuales nos enfocaríamos para la recopilación de la información tanto de las producciones escritas como de las video grabaciones de los estudiantes para la evidencias de la investigación que aquí reportamos. Dichos talleres son los siguientes de los cuales se tomaron las actividades realizadas a lápiz y papel y las que tenían una representación digital.

- Taller 1: Números y Operaciones
- Taller 4: Sucesiones

- Taller 5: Interdependencia entre variables
- Taller 7: Análisis de datos
- Taller 8: Funciones y Realidad I
- Taller 9: Funciones y Realidad II
- Taller 12: Área máxima
- Taller 13: Caja sin tapa

Se escogieron estos ocho talleres con el fin de dar cuenta de las habilidades comunicativas de los estudiantes, pero para esto necesitamos comprobar el proceso del estudiante por lo cual tomamos algunas de las actividades, tomando como actividad inicial la número 1, con el fin de mostrar cómo llegó el estudiante al curso y finalizando con la actividad 13 para evidenciar de esta forma las habilidades comunicativas emergentes durante el curso.

Las actividades fueron escogidas teniendo en cuenta que las actividades se desarrollaran en primera instancia a lápiz y papel y luego con el uso del software con el fin de presentar de qué forma emergen mejor las habilidades comunicativas o si por el contrario se da de igual forma en los dos casos.

Consideramos que al transcurrir el tiempo en el desarrollo del curso los estudiantes van fortaleciendo sus conocimientos y de igual manera van potenciando sus habilidades como resultado de la práctica, de manera que las actividades escogidas de esta forma puedan evidenciar de manera más fehaciente las habilidades esperadas.

3.2.2 Selección del grupo de precálculo donde se desarrolló la investigación

El trabajo de campo para la investigación que aquí reportamos se realizó en el primer curso de precálculo del año 2017 que se llevó a cabo del 13 de febrero al 3 de marzo del año 2017. Como ya se ha mencionado en apartados anteriores, el curso de precálculo está dirigido a estudiantes de primer ingreso que obtuvieron un puntaje bajo en las pruebas SABER 11 en matemáticas realizadas por el ICFES y que ingresaron a las carreras de Ingenierías como a las carreras que pertenecen a la Facultad de ciencias de la Universidad Industrial de Santander.

Los grupos del curso de precálculo fueron organizados de acuerdo a los puntajes obtenidos en las pruebas Saber 11, de manera que los estudiantes que conformaban cada grupo tenían puntajes similares en las pruebas.

El grupo seleccionado tenía inscritos 26 estudiantes de los cuales sólo siete pertenecían a la escuela de matemáticas a los programas de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas y el resto a las diferentes ingenierías ofrecidas en la universidad.

3.2.3 Selección de los casos de estudio

Una vez seleccionado el grupo en el cual se haría la recolección de los datos, se procedió a escoger un grupo de estudiantes en los cuales se centró nuestra atención para la realización de las videograbaciones y la recolección de sus producciones escritas, para con estas evidencias presentar su desarrollo tanto en las actividades desarrolladas con lápiz y papel y las actividades desarrolladas en GeoGebra.

Para la elección del grupo de estudiantes se tuvo en cuenta aquellos estudiantes que en la primera sesión participaron de forma voluntaria, esto porque los estudiantes en las primeras

intervenciones son un poco penosos para compartir sus ideas en cuanto a cómo llegaron a resolver el problema planteado, dado que los estudiantes en algunas ocasiones no participan por miedo a cometer errores delante de los demás, por pena, porque no están familiarizados con la metodología del curso o porque no tienen claro pre saberes necesarios para el desarrollo de las actividades.

Es necesario aclarar que no se tuvo en cuenta lo correcto o incorrecto de su intervención en la solución de los problemas, tampoco la forma de expresarse en público ni el correcto o incorrecto uso del lenguaje para expresar sus ideas en la clase de matemáticas.

La metodología del curso consistió inicialmente en un trabajo individual por parte del estudiante, pero cuando los estudiantes entraran en confianza con la metodología esto les ayuda a facilitar el desarrollo de las actividades y al proceso que estamos trabajando en esta investigación: el proceso de comunicación.

Para esta investigación los casos de estudio fueron dos estudiantes: Laura y Jennifer las cuales no presentaron inconveniente con las grabaciones a su proceso durante el curso de precálculo.

Caso de estudio 1: Jennifer

Es una estudiante de 16 años que ingresa al programa de Ingeniería Química de la Universidad Industrial de Santander, es egresada del colegio Nuestra Señora del Pilar que es de carácter público de la ciudad de Bucaramanga, al llegar al curso tenía como expectativa afianzar los conocimientos que traía del colegio y familiarizarse con la universidad para que al empezar el semestre ya fuese más fácil.

Jennifer en la primera actividad mostró cierta facilidad para comunicar sus ideas aunque no utilizara un lenguaje matemático durante sus intervenciones. Es una estudiante que considera tener buenas bases en el conocimiento matemático, no obstante en algunas actividades expresaba que había cosas que desconocía.

Es una estudiante que se caracterizó por la habilidad que tiene para expresar sus ideas en público y defenderlas con argumentos, la facilidad para desarrollar las actividades en su libreta de apuntes, de tal forma que esta libreta se convirtió en una fuente valiosa en cuanto a la cantidad de datos que se pudieron conseguir de allí.

Caso de estudio 2: Laura

Es una estudiante de 16 años que ingresa al programa de Ingeniería Metalúrgica de la Universidad Industrial de Santander, es egresada del Colegio Cooperativo Comfenalco de carácter privado de la ciudad de Bucaramanga.

Laura al igual que Jennifer tiene gran facilidad para expresarse en público aunque en sus inicios no utilizaba el lenguaje matemático en sus argumentaciones. Es una estudiante muy pasiva a la hora de resolver las actividades, y esto se evidenciaba en el desarrollo de sus producciones escritas ya que son en algunos casos muy cortas pero la mayoría de veces concisas. En ocasiones realizaba preguntas interesantes que algunas veces le daba rumbo a los debates que se generaban en el aula.

3.2.4 Instrumentos para la recolección de datos

La toma de datos para la investigación fue realizada mediante dos instrumentos: las videograbaciones y las producciones escritas desarrolladas por los estudiantes como se había expresado al inicio de este capítulo.

El primer instrumento fueron las videograbaciones en las cuales se grabaron todas las sesiones del primer curso de precálculo de 2017 por medio de cámaras instaladas en el aula donde se desarrolló el curso. Estas videograbaciones se enfocaron básicamente en los casos de estudio ya seleccionados aunque las intervenciones de los compañeros también forman parte de este material. Concluidas las videograbaciones se procedió a la transcripción de ellas.

Como segundo instrumento tenemos las producciones escritas de los estudiantes. En el primer día se les pidió a los estudiantes un bloc o cuaderno en donde iban a consignar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas en el curso tanto las que se desarrollaban a lápiz y papel como las desarrolladas mediante el uso del software. Las producciones escritas por parte de los estudiantes al finalizar cada sesión fueron recogidas.

3.3 Fase 3: análisis de los datos

En esta etapa se caracterizan las habilidades comunicativas descritas en el segundo capítulo de este documento. Dichas habilidades fueron tomadas como categorías a priori y éstas se relacionaron con los fenómenos de variación propuestos en los talleres antes descritos, en los cuales se plantea la mediación de las tecnologías digitales. Dicha categorización será analizada a

través de los casos de estudio. Para esto realizaremos el proceso de triangulación de los datos encontrados, el marco conceptual y algunos referentes teóricos.

3.4 Fase 4: caracterización de las habilidades comunicativas

Teniendo en cuenta el proceso metodológico evidenciado en las fases anteriores, los casos de estudio y los instrumentos para la recolección de los datos se termina por mostrar la caracterización de las habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación mediados por tecnologías digitales en estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Industrial de Santander como respuesta a nuestro objetivo propuesto.

Como parte final del proceso descrito se hizo un reporte de los resultados obtenidos en la investigación, con el fin de contribuir al desarrollo de la línea de investigación en Didáctica del Cálculo. Se espera que al final del proceso se pueda contar con elementos teóricos que permita describir los procesos comunicativos con los que ingresan los estudiantes a la universidad y con ellos plantear alternativas didácticas de atención a los estudiantes de primer nivel.

4. Habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación

En este cuarto capítulo se presentan resultados del análisis de datos, los cuales fueron descritos en el apartado 3.2.4: las videograbaciones y las producciones escritas desarrolladas por los estudiantes en cada una de las sesiones del curso. En algunos de los apartados hemos tomado,

a modo de comparación, las actividades desarrolladas a lápiz y papel con las actividades desarrolladas con el software GeoGebra con la finalidad de observar con cuál de estos dos tipos de actividades emergen las habilidades comunicativas o si por el contrario las dos emanan las habilidades comunicativas de igual forma.

Se han tomado las cuatro habilidades comunicativas descritas en el capítulo II de marco conceptual como categorías para el análisis. Las categorías se presentan en orden lineal y se muestran evidencias de cada uno de los casos de estudio y se presentan algunas evidencias de acciones realizadas por cada uno de ellos tanto en las actividades realizadas a lápiz y papel como con el apoyo de la tecnología.

Este capítulo lo hemos estructurado en el siguiente orden: habilidades comunicativas entre las que se encuentran la habilidad para interpretar, habilidad para explicar y habilidad para justificar.

4.1 Habilidad para interpretar la variación

Como expresamos en la sección anterior la habilidad interpretativa se entiende como la capacidad que tiene el estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en un lenguaje matemático); así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas, diagramas, o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio.

Esta sección se ha estructurado teniendo en cuenta la interpretación de los enunciados en lenguaje verbal, seguido de la interpretación de enunciados mediante representación gráfica o

pictórica, interpretación de enunciados en lenguaje matemático y, finalmente la interpretación de enunciados haciendo uso del software.

4.1.1 Interpretación de enunciados en lenguaje verbal

Iniciaremos presentando un análisis sobre algunas de las actividades que se proponen en el curso de precálculo y las acciones que surgieron con los casos de estudio y que pueden dar cuenta de la interpretación de enunciados en lenguaje verbal. Se recupera a continuación una instrucción del taller de Matemáticas y Realidad (el cual se presentó en el apartado 3.1.1.4), la primera actividad del taller propone lo que se muestra en la Figura 19.

FILTRACIÓN DE MEDICAMENTO

Actividad 1

1.1 Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

a) ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.
b) ¿Y si hubiera tomado la medicina durante un año? **Justifica** tu respuesta.
c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? **Justifica** tu respuesta.

Figura 19 Situación contextualizada presentada en la Actividad 4.

Aunque la actividad propuesta apunta a identificar estrategias de solución, como puede ser realizar una tabla, en la cual se registren en una columna las tomas del medicamento y, en otra el valor al final de la filtración en cada toma. El reconocimiento de un patrón está implícito en el desarrollo de la actividad y puede ser clave para que la actividad de filtración del

medicamento se lleve a cabo de manera adecuada o no. A continuación se presenta lo que Jennifer realizó con el fin de obtener las respuestas de acuerdo a lo solicitado en la actividad:

Jennifer inicia estableciendo una razón de las horas del día con el lapso de tiempo para la toma del medicamento. Por ello, ella dice que este debe ser tomado 3 veces al día y cómo debe ser suministrado durante 10 días, esto genera que se debe consumir el medicamento 30 veces como lo indica la Figura 20.

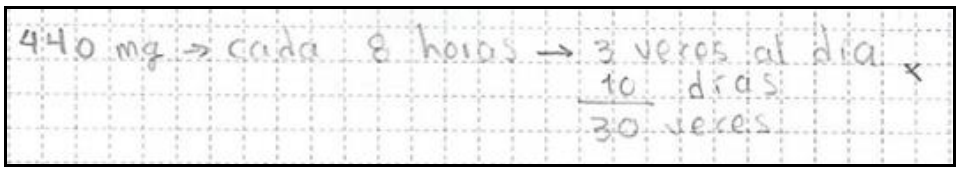


Figura 20 Cálculo del número de tomas durante los diez días.

Lo anterior da muestra de una interpretación errónea de la información dada ya que dice que se filtraba un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, ella lo tomó como si cada toma fuese una primera. Es decir, que en su cuerpo no había ningún residuo del medicamento. En las cuentas Jennifer da a entender que por cada toma consume un 40% del medicamento, y que por ser éste suministrado tres veces al día, diariamente estaría consumiendo un 120% del medicamento. Además, ella considera que al ser suministrado por 10 días, al final la jugadora habría consumido un 1200% del medicamento (ver Figura 21).

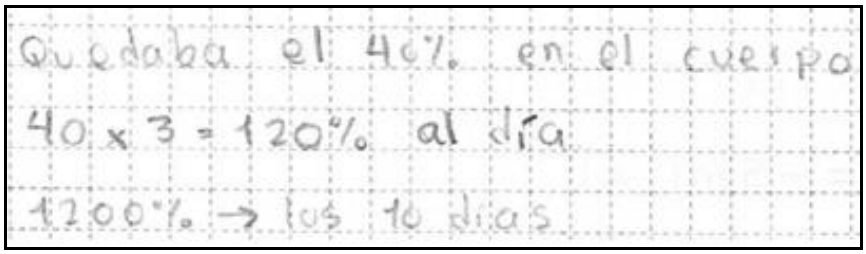


Figura 21 Cálculo erróneo del porcentaje del medicamento a los diez días.

Después Jennifer calcula que son 440 mg en cada toma y como en los 10 días serían 30 tomas, entonces expresa que serían 13.200 mg al cabo de los 10 días. Posterior a esto calcula el 1200% de 440, pero esto muestra una vez más su nivel de interpretación. Nuevamente ella calcula el 1200% que corresponde a los 10 días pero lo hace de 440 mg que corresponden a una sola toma como observamos en la Figura 22.

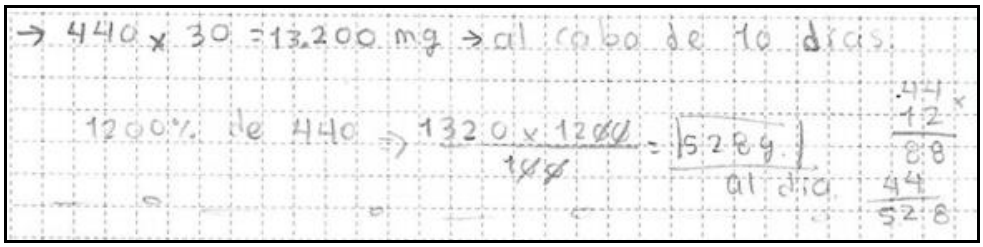


Figura 22 Interpretación errónea del enunciado de la Actividad 4.

Luego de obtener estos valores mediante la selección de una representación numérica Jennifer no se queda allí y empieza a cuestionarse si esa representación escogida le permite solucionar los interrogantes presentados, y si estos valores obtenidos son los resultados esperados. En vista de que estos valores no le parecen correctos, ella opta por buscar otra manera de llegar a la solución y es ahí donde comienza nuevamente los cálculos intentando sacar las cuentas por cada toma y es en este momento donde muestra una clara interpretación del problema planteado como se muestra a continuación (Figura 23).

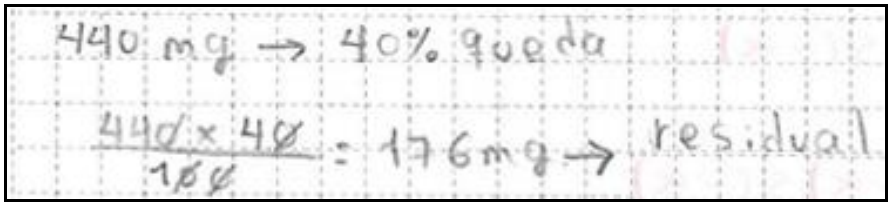


Figura 23 Cálculo del 40% del medicamento que queda en el organismo.

En este momento ella muestra una interpretación del problema con lo cual no sólo puede llegar a dar una correcta solución si no que puede llegar a dar una representación algebraica que describa el comportamiento de la cantidad de medicamento en el cuerpo a partir de los cálculos realizados para cada toma como vemos en la Figura 24.

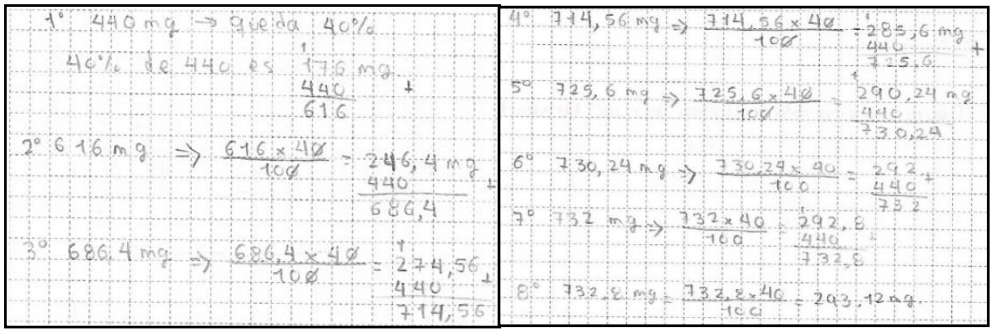


Figura 24Cálculos realizados para las primeras tomas del medicamento.

Podemos inferir a partir de lo expresado por Jennifer que hace una interpretación de los datos suministrados en el problema lo cual le permite llegar a una expresión algebraica la cual modela el problema. Por su parte, al realizar el análisis al transcurrir el tiempo en el suministro del medicamento esto le permite conjeturar respecto a la expresión algebraica encontrada, pero dicha expresión no es hallada de inmediato sino es el resultado de un proceso en el cual tuvo que observar e interpretar el comportamiento en cada toma.

Laura por su parte intenta dar solución al problema de una manera similar a la realizada por Jennifer, obteniendo valores para una cantidad de días y tomas específicos obteniendo de esta manera una representación numérica como se puede observar en la Figura 25.

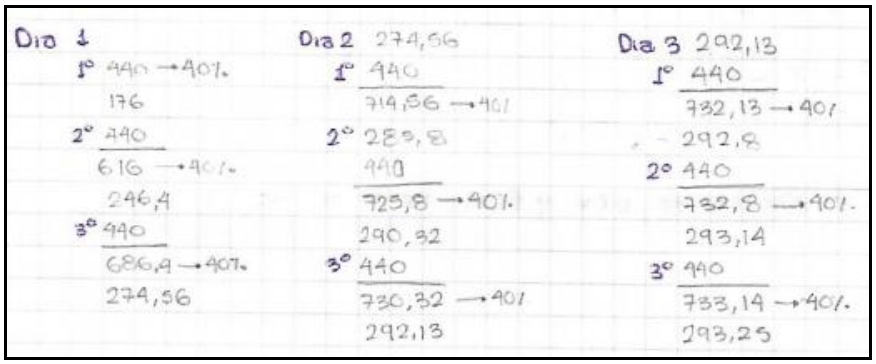


Figura 25 Cálculo realizado por Laura para los tres primeros días del medicamento.

Laura a diferencia de Jennifer inicia con un análisis diario apropiado, en el cual consigna la cantidad en miligramos consumidos en cada toma, además del residuo que queda de éste. Luego, ella tiene en cuenta este residuo para volver a calcular el 40% en la siguiente toma, lo cual le va a generar una serie de datos numéricos con los cuales va a poder resolver el problema e incluso plantear una representación algebraica para dar respuesta a los interrogantes del problema. En Laura se evidencia una interpretación adecuada del problema lo cual le conlleva a una resolución adecuada del mismo.

Cabe exaltar que aunque la interpretación inicial de Jennifer no fue la correcta, la revisión de sus razonamientos escritos le permitió cuestionar los resultados y volver a reinterpretar los datos suministrados en el enunciado del problema para dar una correcta solución.

Aunque en los estándares nacionales de matemáticas MEN (2006) y en los estándares del THALES (2003) se plantea que los estudiantes que van a iniciar sus estudios superiores deberían llegar con un buen nivel de interpretación de problemas, en la experimentación realizada en este estudio se puede ver que no es así. No obstante, este tipo de actividades permiten que poco a poco vayan adquiriendo esta habilidad.

Una segunda actividad en la que se exige, en los estudiantes, la interpretación de enunciados en lenguaje verbal es la primera del taller "Funciones y Realidad" (ver Figura 26).

1.1 En Bucaramanga, en un *minutero* de telefonía celular se cobra $100 por minuto o fracción.

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 1:01 *min*, 2:99 *min*, 4:00 *min*, 5:36 *min*, 9:5 *min*, 23:485 *min*, 1 *h*15*min*32*seg*?

b) Halla la función que representa la interdependencia entre el costo de la llamada y el tiempo.

Figura 26 Enunciado de la primera actividad del taller Funciones y Realidad.

En esta actividad se propone que el estudiante haga conversión de unidades de tiempo, así: 2:99 min al tiempo que usualmente manejamos, es decir, 1 minuto equivale a 60 segundos y de ahí la conversión para saber el valor a pagar. Al respecto, a continuación se muestra la interpretación realizada por Jennifer en el desarrollo de esta actividad:

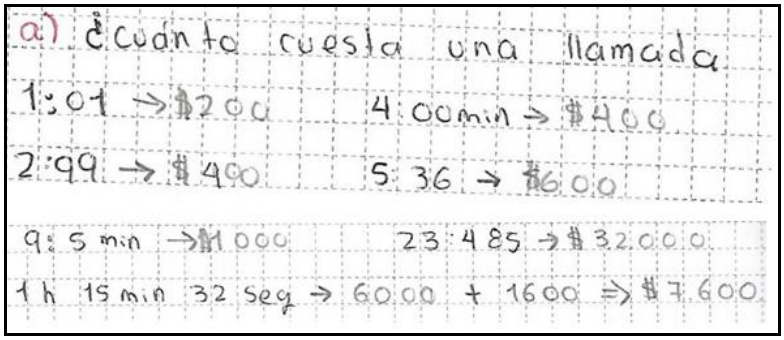


Figura 27 Interpretación realizada por Jennifer

En la Figura 27 vemos la interpretación de la estudiante Jennifer al problema, quien nos permite ver su comprensión del enunciado, pues este problema es del contexto lo cual facilita su interpretación. Se observa que la estudiante usa la conversión de unidades para así poder dar respuesta al valor que se debe cancelar por el tiempo gastado en el teléfono celular.

La buena interpretación le permite a Jennifer pasar a una representación algebraica que describe el costo de los minutos a celular (Figura 28).

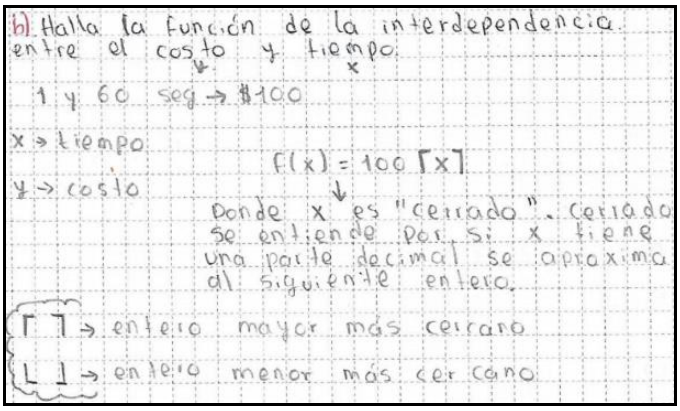


Figura 28 Representación algebraica dada por Jennifer.

Por su parte Laura va un poco más allá de la solución dada por Jennifer, puesto que por un lado realiza la representación en el registro gráfico y por otro, construye una representación algebraica a partir de algunos valores que obtenidos en la solución del literal a (Ver Figura 29). En general, las dos estudiantes hacen una clara interpretación del problema independientemente del registro utilizado para dar respuesta, lo cual se convierte en un punto a favor ya que no dependen de un único registro para llegar a solucionar los problemas.

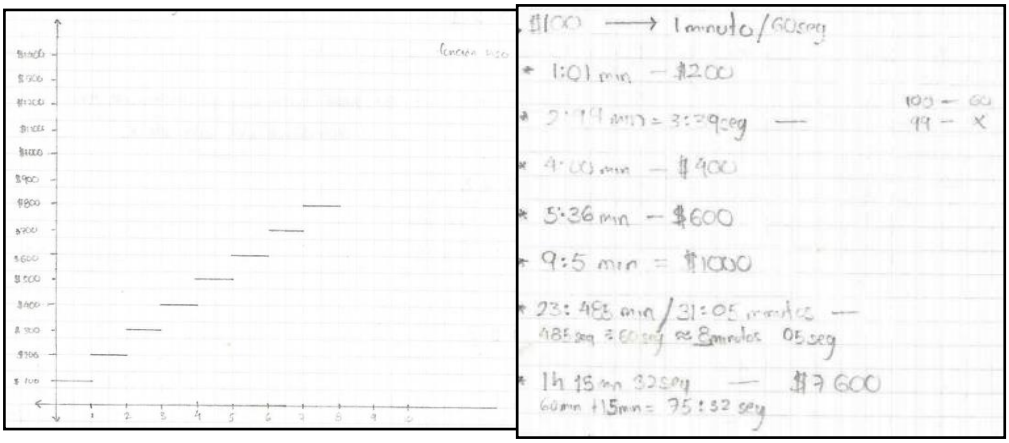


Figura 29 Construcción de las representaciones de la interdependencia entre las magnitudes.

Existen otras actividades que dan cuenta de la interpretación de enunciados en lenguaje verbal como lo son aquellas actividades en que el estudiante debe determinar para un problema específico, cuáles son las magnitudes que se encuentran involucradas en la situación y poder establecer la relación que existe entre ellas. Problemas de este tipo encontramos en la actividad 1 del taller de área máxima la cual se presentó en el apartado (3.1.1.7) donde se presenta el siguiente enunciado mostrado en la Figura 30.

1.1 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. **Explica** y **justifica** tu respuesta en la hoja de trabajo.

Figura 30 Enunciado del primer problema de la actividad Área

Jennifer muestra evidencia, en la Figura 31 de una buena interpretación del problema planteado. Allí, ella hace es un bosquejo del rectángulo, seguido del reconocimiento que el perímetro es dos veces la base más dos veces la altura y finalmente relaciona lo dado en el problema. Es decir, los catorce metros que son el perímetro los reemplaza en la fórmula del perímetro, que escribió para con esto llegar a una ecuación la cual le permitiría llegar a la respuesta.

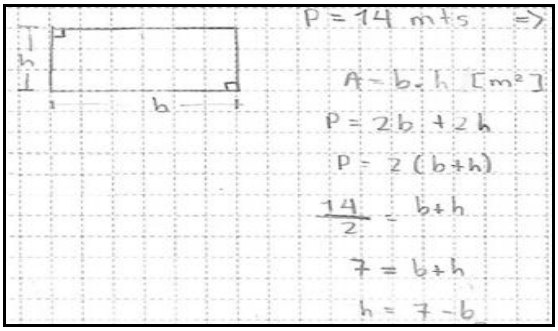


Figura 31 Interpretación del enunciado realizado por Jennifer.

Al igual que Jennifer, Laura hace una correcta interpretación del enunciado pero da un poco más, respecto a que llega a conjeturar acerca de los cuadrados y los rectángulos cosa que no se le pedía en el problema pero que era necesario a la hora de llegar a la solución del problema. Ella inicia describiendo una de las propiedades que tiene los rectángulos y es que al ser un rectángulo tienen los lados paralelos y estos van a ser de igual medida por lo que hace la operación de 14/2 = 7 y luego, busca dos números que sumados den 7 pero que al multiplicarlos se obtenga como resultado la mayor área posible. Hasta el momento todo iba bien, pero Laura comete un error y es que sólo está tomando en cuenta los números naturales y no los números decimales, pero luego ese detalle lo contempla para no llegar a una respuesta equivocada, ya que como se evidencia en la Figura 32, se muestra ella se cuestiona si es por ejemplo 3,49 el número cómo sería el área.

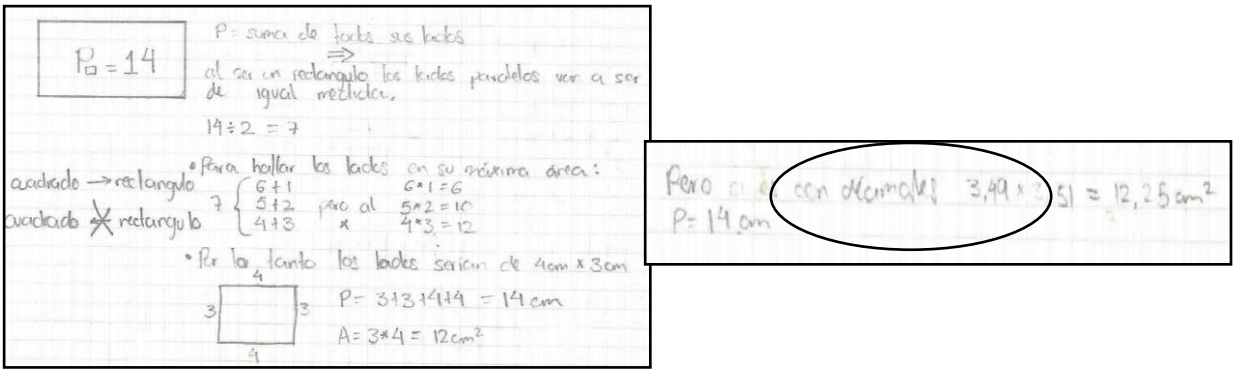


Figura 32 Interpretación del problema realizada por Laura.

Otra de las actividades que dan cuenta de la interpretación de enunciados en lenguaje verbal es la que encontramos en la actividad uno de la Caja sin Tapa, retomamos el enunciado como lo muestra la Figura 33.

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

Figura 33 Enunciado de la actividad 1 del taller Caja sin Tapa

En la Figura 34 vemos la interpretación inicial de la estudiante Jennifer a la actividad, quien nos deja ver su primera interpretación en cuanto al tamaño de la hoja rectangular, ya que lo común es utilizar medidas como centímetros, metros, kilómetros y no unidades como la expuesta aquí que es en decímetros. En esta parte vemos la correcta conversión de unidades que la estudiante hace.

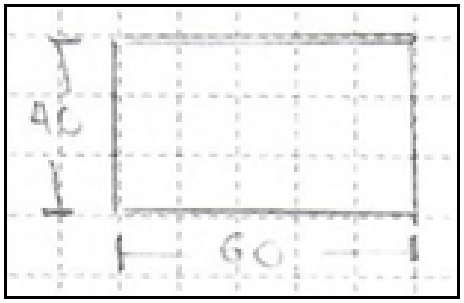


Figura 34 Interpretación inicial de Jennifer.

Un segundo momento, es una representación en su cuaderno de lo que le dice la actividad. Jennifer está mostrando (Figura 35) una correcta traducción del lenguaje natural al lenguaje gráfico, lo que le permite dar una solución cercana a la acertada. Como lo expresan González y Paniagua (2011) en una situación problema que se encuentra enunciada en un lenguaje natural, la persona requiere de una interpretación o de una lectura comprensiva que revierta en una traducción del problema a un lenguaje simbólico o matemático que conlleven a su correcta solución.

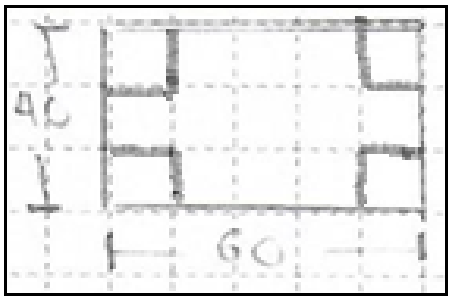


Figura 35 Traducción del lenguaje natural al gráfico.

En la Figura 35 vemos que ella dibuja un rectángulo el cual simula la hoja rectangular en la cual plasma un cuadrado en cada esquina. Ella hace esto, dado que tiene en cuenta que la caja que va a construir debe almacenar el mayor volumen, pero da cuenta que no sabe qué medidas debe tener el cuadrado para que esto ocurra. Ella está operando a ensayo y error, es decir, toma las medidas y mediante la fórmula de volumen reemplaza los valores y de este modo obtiene varios volúmenes y se queda con el que mayor volumen arrojó los intentos que realizó (Figura 36).

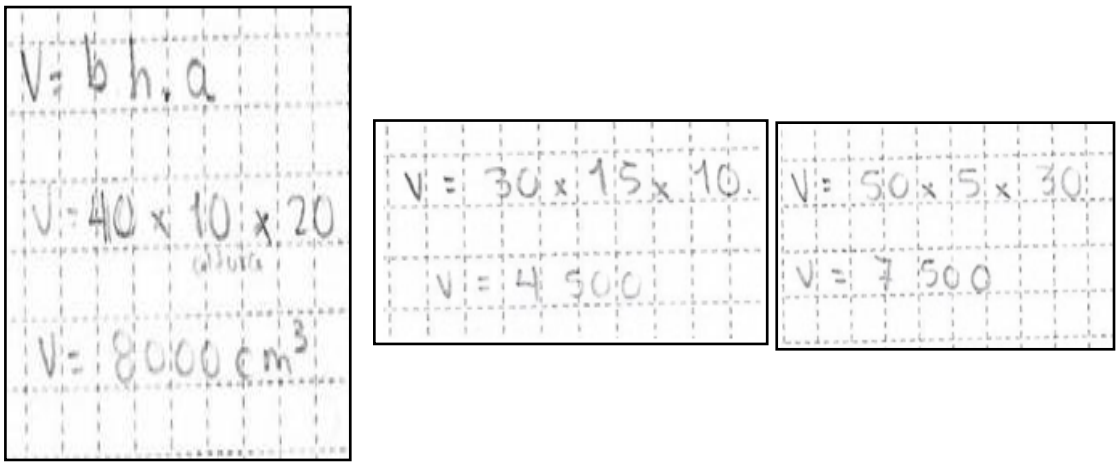


Figura 36 Cálculo del volumen para diferentes valores.

También observamos en la Figura 37 que ella utiliza la fórmula del perímetro para hallar el área en función de una variable, pero esto se debe, dado que en la actividad anterior se le pedía hallar el perímetro a un rectángulo. Jennifer evidencia que lo trabajado en las actividades anteriores no se dejó a un lado ya que hizo uso de la fórmula del perímetro sin que allí lo estuvieran preguntando.

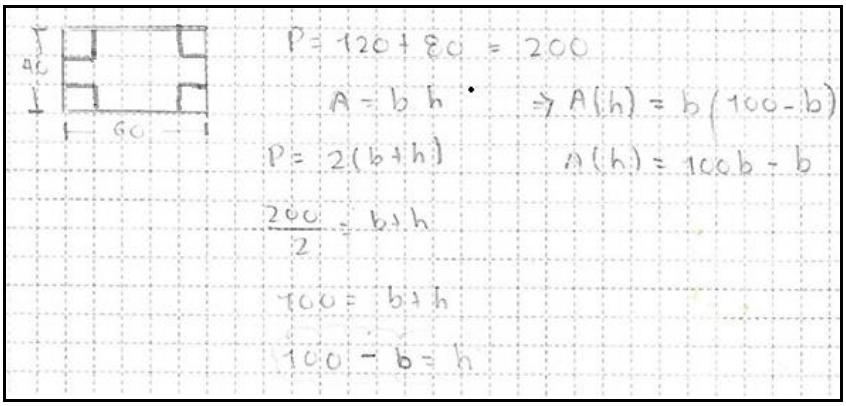


Figura 37Cálculo del perímetro.

Por su parte Laura antes de iniciar la construcción de su caja hace un bosquejo de lo que el problema le estaba pidiendo, como se muestra en la Figura 38.

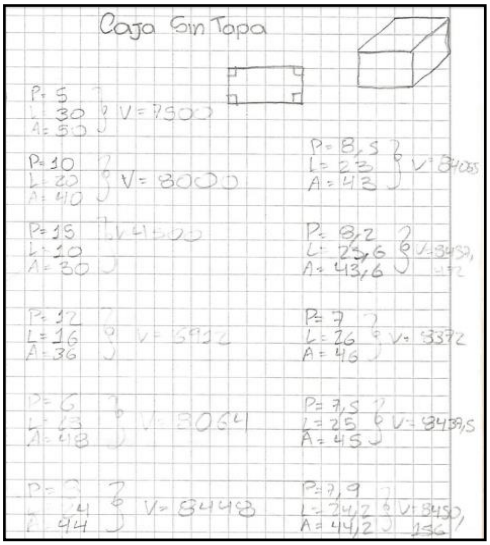


Figura 38 Bosquejo del problema.

Ella inicia haciendo el dibujo del papel con el cual va a construir la caja y evidencia que comprendió el enunciado, dado que esboza los cuatro cuadros en las esquinas los cuales debe quitar para la construcción de la caja sin tapa tal y como lo pedía el problema. Terminado esto continúa dando algunos valores a la altura, la anchura y la profundidad con el fin de obtener la caja de mayor volumen. Observamos en la figura algunos de los valores asignados a estas variables, y es de notar que no solo toma valores enteros si no que hace uso de valores decimales con el fin de llegar a obtener la caja solicitada. Laura a diferencia de Jennifer hizo cuentas a ensayo y error y no hizo uso de la fórmula del volumen para obtener una ecuación la cual le permitiera obtener, sin tanto reemplazo, el valor que haría que la caja fuese de mayor volumen. Cual sea el método utilizado es válido para dar cuenta de su acertada interpretación del problema.

4.1.2 Interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica

Para estos enunciados empezamos analizando los datos emergentes del taller 1 de Números y Operaciones. Esta actividad empieza con una figura en la cual muestra la recta numérica en el intervalo [-2,2] y en este se ubican unos puntos que han sido llamados por las letras a, b, c, d, e, f, g, h, luego, se les pide responder seis preguntas como lo muestra la Figura 39.

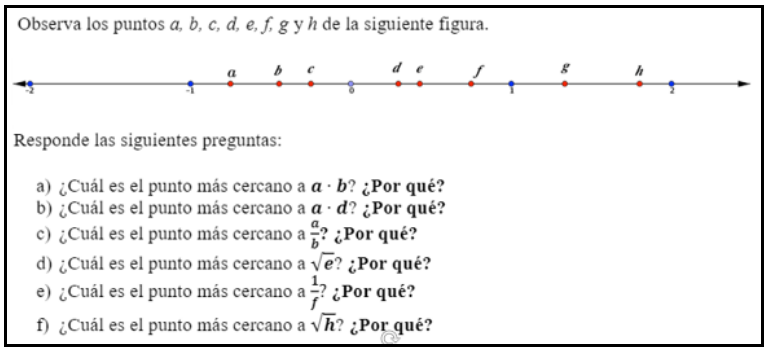


Figura 39 Enunciado de la actividad q del taller Números y Operaciones.

Para nuestro primer caso de estudio, vemos en la que Jennifer muestra una interpretación de la gráfica, dado que para esto ella le asigna valores numéricos aproximados a los puntos dados (a, b, c, d, e, f, g, h) de tal forma que al operarlos como indicaba la pregunta podía dar una respuesta a los incisos de esta actividad.

Jennifer no muestra un gran manejo de las propiedades de los números que están entre [0,1] ya que, como lo muestra la Figura 40, ella da justificaciones a partir del ejemplo numérico que tomó, más no de las propiedades de los números.

Como lo indica la habilidad de interpretar Jennifer demuestra la capacidad para comprender y dar sentido al problema planteado mediante la asignación de valores cercanos a los puntos, esto lo hace midiendo la distancia que hay entre el 0 y el 1 y pues por aproximación divide esto en 10 partes y asigna los valores aproximados como vemos en la Figura 40, con las que se da respuesta a las seis preguntas.

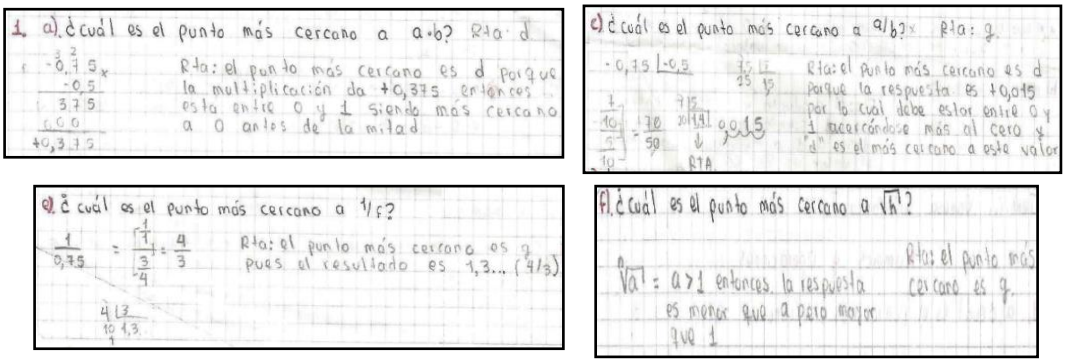


Figura 40 Respuestas para los interrogantes respecto a los puntos cercanos a la operación descrita.

Por su parte Laura hizo un procedimiento similar en el cual estimaba los valores para responder a las preguntas, haciendo uso implícito de algunas de las propiedades de los números, esto se evidencia cuando la profesora le solicita socializar sus respuestas y este es el dialogo entre ellas:

- Profesora: Laura ¿cuál es el punto más cercano a $a.b$?

- Laura: Profe para mí el punto más cercano a $a.b$ es el d

- Profesora: ¿Por qué dices que es el d y no otro punto?

- Laura: mmm cómo lo explico… pues profe es el d porque he descartado algunos puntos.

- Profesora: ¿cómo es eso que has descartado algunos puntos?

- Laura: he descartado algunos puntos porque nosotros sabemos del colegio la ley de los signos.

- Profesora: ¿alguien ha escuchado lo de la ley de los signos que nos comenta Laura?

- Laura: profe esa ley recuerdo que consiste en que si multiplico dos números con igual signo, es decir, o los dos positivos o los dos negativos el resultado va a ser positivo y en cambio sí multiplico dos números con signos contrarios, es decir, uno negativo y el otro positivo este resultado va ser negativo. Por lo tanto, para responder la a, tenemos que los puntos a y b se encuentran entre cero y menos uno, es decir, los dos números son negativos, por lo tanto, al multiplicarlos esto me va a dar como resultado un numero positivo, por ello, queda descartado el a, b y c.

- Profesora: Bueno Laura has descartado algunos puntos pero te quedan cinco posibles respuestas.

- Profesora: ¿Cómo sabes cuál de esas es la respuesta?

- Laura: ah bueno profe, para seguir descartando entre los otros puntos, me di cuenta por ensayo y error que si yo multiplico dos números entre cero y uno el resultado también me va a quedar

entre cero y uno, por lo tanto queda descartado los puntos g y h, recuerdo que mi profesor del colegio un día me hablo de algunas propiedades que cumplían los números me imagino que una de estas es la que acabo de hacer a ensayo y error.

- Profesora: Laura te quedan tres posibles respuestas.

- Laura: Profe ahí si utilizo lo que hice en el cuaderno, dar un valor estimado al punto a y al punto b y realizo la multiplicación y me doy cuenta que este valor estará más cercano al cero y el que está más cerca es el punto d.

- Profesora: y para las demás preguntas qué hiciste?

- Laura: profe hice algo similar a lo anterior para responder a la a.

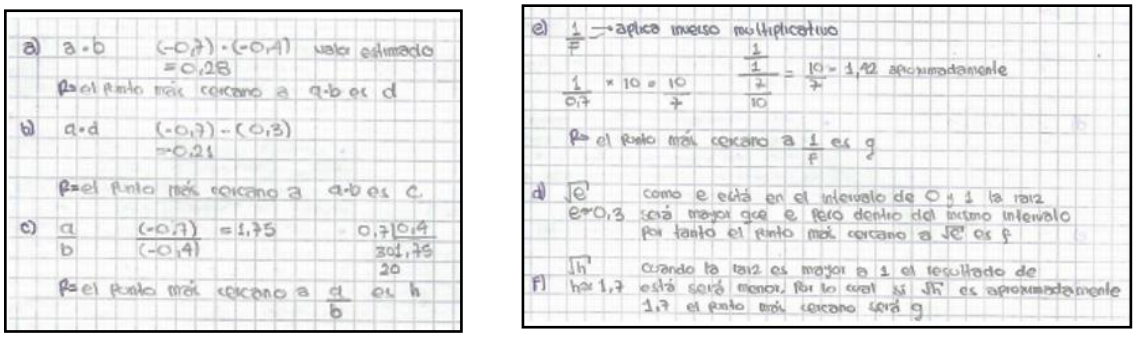


Figura 41 Respuestas a los interrogantes dado por Laura.

De acuerdo a lo expresado por Laura, podemos asegurar que hace uso de unos conocimientos previos para dar respuesta al problema, pero para esto hizo uso de su capacidad interpretativa, además, fue capaz de llegar a conjeturar en la solución del problema con algo que recordaba muy poco pero que, con ensayo y error, pudo hacerla (Figura 41).

Una segunda actividad que se ha considerado en la interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica es la que se muestra en la Figura 42.

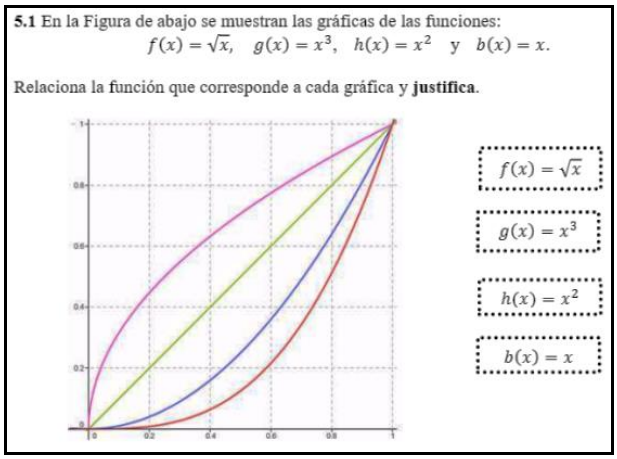


Figura 42 Actividad de interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica.

En esta actividad Jennifer muestra un alto nivel de interpretación, como lo vemos en la Figura 43 ya que ella analiza tanto la representación gráfica como la representación algebraica de las cuatro funciones. Es decir, ella manifiesta que a simple vista sabe la respuesta de dos funciones, la primera, que la función $h(x) = x$ es la representación verde puesto que esta es una función lineal, donde los valores de x e y van a ser iguales $(x = y)$, la segunda, expresa que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es la gráfica de color lila porque es la única que aparece hacia abajo tal y como lo hicimos ahorita en la actividad y para las funciones restantes $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^2$ en las representaciones gráficas se tiene un comportamiento similar en la gráfica lo cual le hace mirar detenidamente los ejes y se da cuenta que estos van de (0,1) y que por las propiedades de los números en estos intervalos a medida que el exponente es más grande, al evaluarlo en la función, este valor va a ser más pequeño, por lo tanto, la gráfica roja es la que corresponde a $g(x) = x^3$.

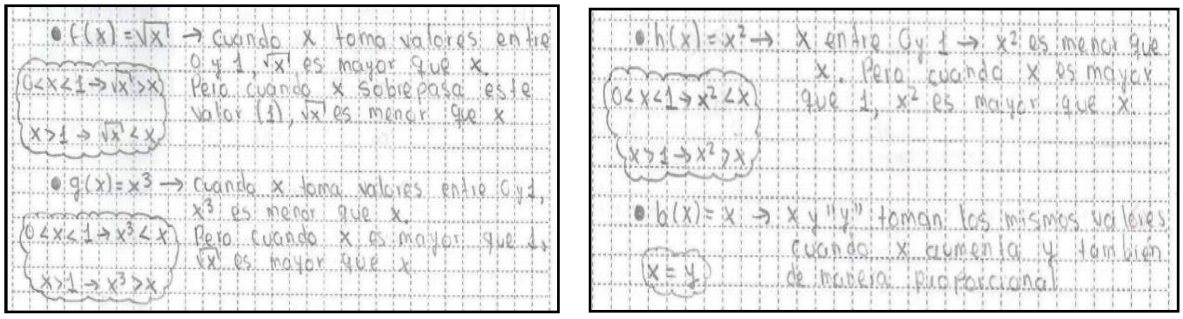


Figura 43 Respuesta a la interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica.

A partir de la explicación dada por Jennifer a sus compañeros se puede evidenciar su alto nivel de interpretación. Ella logró relacionar la actividad con una propuesta en un taller anterior, en el cual se presentó la función $\sqrt{x}$ lo cual le facilitó la tarea asignada. Aquí ella mostró destreza para determinar cuáles son las representaciones gráficas de las funciones tanto cúbica como cuadrada sin necesidad de llegar a buscar otro método. Es decir, no necesitó de una acción auxiliar para determinar cuál grafica correspondía a cada función sino que hizo uso de las propiedades de los números en el intervalo (0,1).

Por su parte, Laura hace una interpretación similar a la expuesta por Jennifer. A continuación una parte del dialogo entre Laura y la Profesora en la socialización de esta actividad:

- Profesora: Laura ¿cuál es la solución a la actividad?
- Laura: profesora por descarte ya sé dos de esas funciones. Bueno, por descarte no; sino por cosas que recuerdo del colegio.
- Profesora: ¿qué cosas recuerdas?

- Laura: por ejemplo, yo sé que la gráfica amarilla es la que corresponde a la función $b(x) = x$ que es una función lineal, porque cada valor que toma x va ser el mismo que me da en y y en la gráfica podemos observar este comportamiento.
- Laura: ahora la única función que va hacia abajo es la función lila, por lo tanto, esa es la que corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x}$ pues según lo que vimos en la actividad anterior.
- Profesora: y las otras dos funciones cómo sabes cuál es cuál?
- Laura: pues las dos según la gráfica tienen un comportamiento similar, toca es mirar cómo es el comportamiento de cada una, es decir, cómo es su crecimiento de acuerdo a los valores que le asigne, por ejemplo una función es elevada a la dos y la otra es a la tres, por lo tanto, debo mirar el comportamiento de los exponentes para poder decidir…. Pero no encuentro diferencia.

Se puede inferir a partir de la socialización, que existe una interpretación y relación de la parte gráfica con la parte algebraica por parte de Laura, ya que las dos primeras funciones que asoció corresponden a la expresión algebraica que asignó. Ahora, en cuanto a las dos funciones que le falta, Laura debe recurrir a observar que comportamiento tienen los exponentes, es decir, debe recurrir a realizar otra acción para poder escoger la función que corresponde con la parte algebraica.

Luego, Laura se da cuenta de los ejes que tiene la gráfica y que estas gráficas están dibujadas en el intervalo (0,1), y recordó lo que realizó en la primera actividad en la cual trabajó algunas propiedades de los números en este intervalo, y finalmente asigna algunos

valores para así poder asociar las dos gráficas con la parte algebraica de la mejor manera como lo muestra la Figura 44.

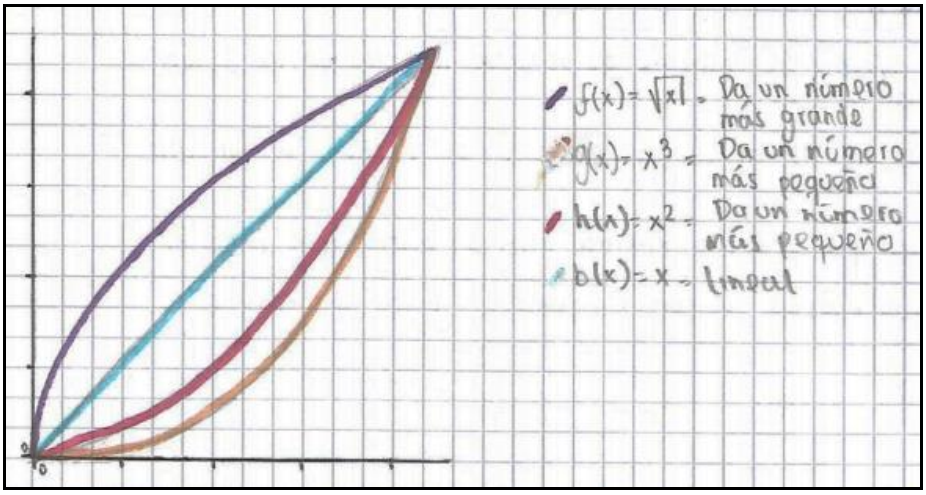


Figura 44 Respuesta a la actividad de interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica dada por Laura.

La actividad matemática mostrada anteriormente por cada uno de los casos de estudio nos permite ver un comportamiento particular en términos de la interpretación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica. Dicha habilidad se pone de manifiesto cuando la tarea de interpretación la realizan en términos de algunas propiedades de los números en el intervalo (0,1).

Como se puede observar en las justificaciones dadas por Jennifer y Laura, ellas tienen un nivel de interpretación y de asociación el cual les permite decidir entre las diferentes funciones mostradas. Sin embargo, es de resaltar que existe mayor complejidad cuando se trataba de la función cubica y la función cuadrática, ya que implicó que los estudiantes realizaran asignaciones de algunos valores numéricos, los cuales le ayudarían a decidir la respuesta correcta, pero esto también hace parte de la interpretación.

4.1.3 Interpretación de enunciados en lenguaje matemático

Para la interpretación de enunciados en lenguaje matemático, se inició con la actividad 1 del taller Análisis de datos. El enunciado de esta actividad la podemos observar en la Figura 45.

Actividad 1

1.1 La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo.

a) ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.
b) ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.
c) Realiza un gráfico con la información suministrada en la tabla anterior.
d) ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.

Figura 45 Enunciado de la actividad 1 del taller

En esta primera actividad seleccionada para la interpretación de enunciados en lenguaje matemático observamos que Jennifer para llegar a responder las dos primeras preguntas expresaba que trató de buscar qué valor se le debía sumar al anterior para encontrar el siguiente consumo, pero se dio cuenta, que en todos el valor que debía sumar era diferente, lo cual no le pudo facilitar la tarea, pero siguió en la búsqueda de la respuesta, hasta que se detuvo a tratar de interpretar los datos que le estaban suministrando y se dio cuenta que existía un patrón, el cual consistía en un incremento aproximado de una décima con respecto a la anterior, es decir, si el consumo para 13 kilómetros es de 1,43 litros, para 14 kilómetros el consumo aproximado sería de 1,5 y así con los demás kilómetros lo cual le ayudó a responder las dos primeras preguntas.

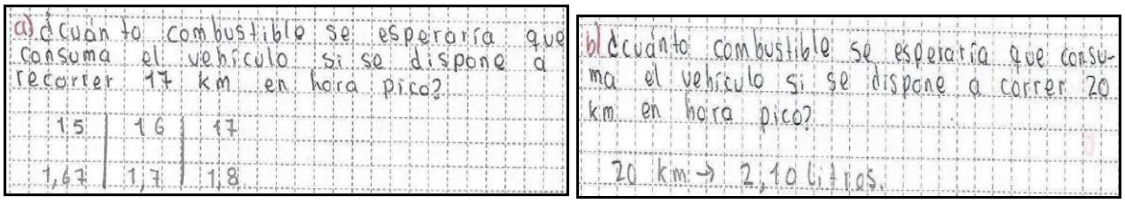


Figura 46 Respuesta dada por Jennifer a la actividad de enunciados en lenguaje matemático.

Ahora para seguir con la actividad y contestar ¿cuándo el auto recorra x kilómetros cuánto combustible gastaría? Jennifer utiliza el patrón hallado para con esto tener una función que le permita modelar el problema y así poder evaluar x kilómetros (Figura 46).

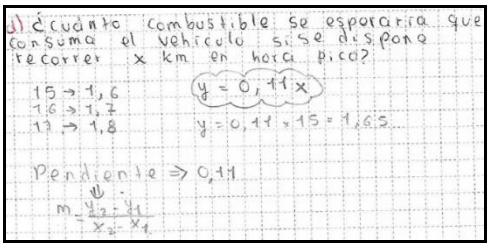


Figura 47Respuesta dada por Jennifer

Laura por su parte, en su primer intento por interpretar los datos, realiza una regla de tres para de esta forma poder hallar el valor para cuando se recorrían 17 km, pero hay algo interesante en su hoja de trabajo, y es que ella escribe que el valor sería 1,89 pero aclara que esto se daría si la variable fuera constante, con lo anterior, Laura evidencia su nivel interpretativo del problema. Sin embargo, en su afán por tratar de justificar su respuesta recurre a la gráfica que hizo para estimar la respuesta a las preguntas planteadas, y se basaba en que de acuerdo a la gráfica el valor aproximado esperado sería tal, pero no había un procedimiento que justificara esto de fondo (Figura 48).

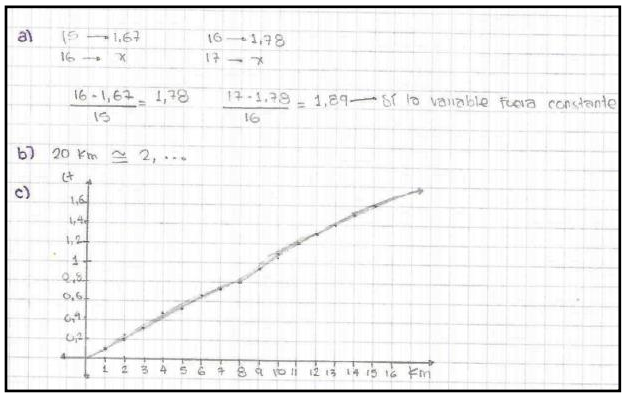


Figura 48 Gráfica que modela el comportamiento del problema planteado.

4.1.4 Interpretación de Enunciados presentados con tecnología digital:

Para la interpretación de enunciados mediante representación digital hay actividades en el curso de precálculo que pueden dar cuenta de esto, estas actividades requieren que los estudiantes con ayuda del software puedan dar solución al problema planteado.

Una primera actividad es la que tiene el taller de área máxima en la cual el estudiante debe determinar para el problema planteado, cuáles son las magnitudes que se encuentran en el problema y de ellas poder decir, cuáles tienen variación y cuáles permanecen constantes. En la Figura 49 se presenta la representación digital de la actividad.

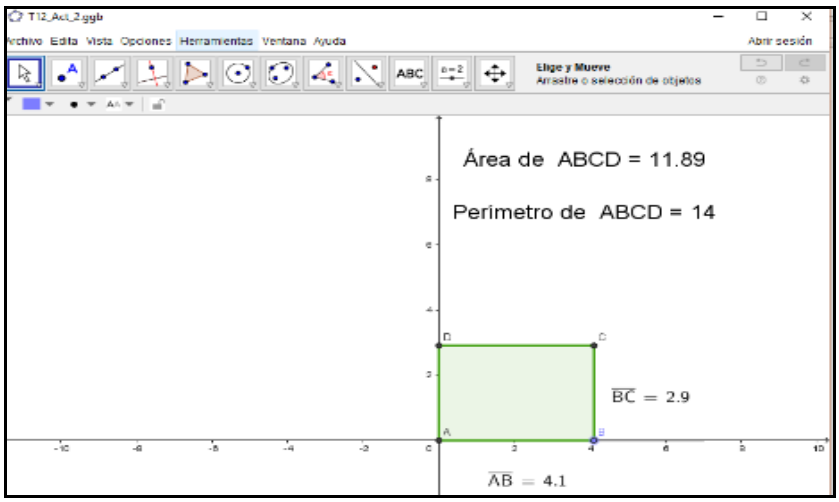


Figura 49 Representación digital presentada en la Actividad de Área Máxima.

A partir de esta representación el estudiante debe contestar las siguientes preguntas como se muestra en la Figura 50.

a) ¿Cuáles magnitudes varían? ¿Cuáles magnitudes no varían? **Explica** tu respuesta.
b) ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? **¿Por qué?**
c) ¿Qué valores puede tomar la base? **¿Por qué?**
d) ¿Qué valores puede tomar la altura? **¿Por qué?**
e) ¿Qué valores puede tomar el área? **¿Por qué?**
f) ¿Qué relación hay entre la base y la altura? **¿Por qué?**
g) Expresa la altura en función de la base. **Explica** tu respuesta.
h) Expresa el área en función de la base. **Explica** tu respuesta.
i) ¿Cuáles son las dimensiones de la base y de la altura del rectángulo de mayor área? **¿Por qué?**

Figura 50 Preguntas de la representación digital de la actividad de Área Máxima.

Para contestar a estos interrogantes es necesario que los estudiantes puedan interpretar por medio de la representación digital las magnitudes que intervienen en el problema y determinar cuáles de estas varían.

A continuación podemos observar las respuestas proporcionadas por nuestros casos de estudio para la primera pregunta.

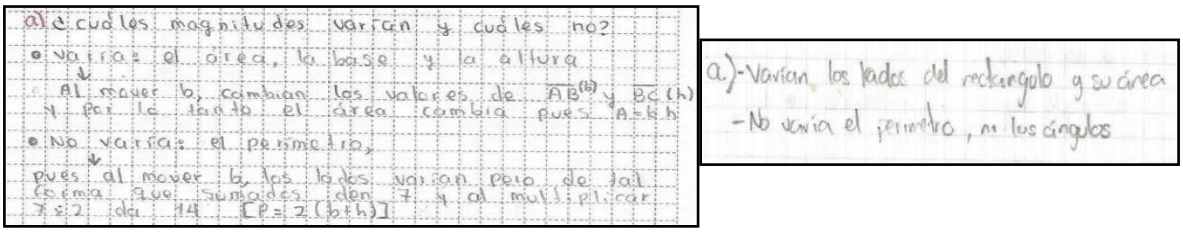


Figura 51Repuesta a los interrogantes respecto a las magnitudes que varían y no varían.

De acuerdo a las respuestas proporcionadas por Jennifer y Laura concluimos que existe interpretación en cuanto a las magnitudes presentes en la situación, lo cual se da gracias a que la representación digital manipulada les permite visualizar de mejor manera los objetos cambiantes

y los objetos estables presentes en el gráfico presentado, situación que no se presenta de la misma forma si la representación fuese estática. En la Figura 52 encontramos la respuesta proporcionada a la pregunta b.

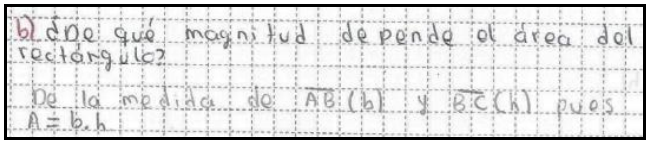


Figura 52 Respuesta a de que magnitud variable depende el área del rectángulo.

Jennifer expresa que el área del rectángulo depende del valor de los segmentos AB y BC, de acuerdo a lo expresado en la respuesta al literal b, además expresa la relación existente entre los valores de los segmentos y el área que estaba determinando. Laura por su parte expresa su respuesta como se observa en la Figura 53.

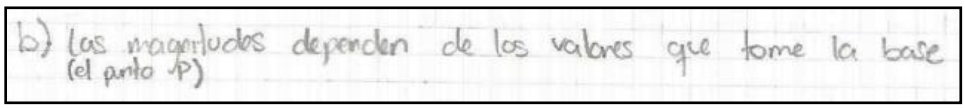


Figura 53 Respuesta suministrada por Laura al literal b.

Algo valioso que encontramos en esta actividad es que los estudiantes interpretan el problema planteado con la ayuda del software y pueden dar cuenta no sólo de las magnitudes que intervienen en la situación planteada si no que pueden expresar cuales de ellas son variables y cuales permanecen constantes.

4.2 Habilidad para explicar la variación

A partir de la revisión de la literatura y de la comparación de ésta con los datos recogidos en el primer curso de precálculo del 2017, encontramos que el desarrollo de esta habilidad puede ayudar a fortalecer las competencias comunicativas y puede llegar a aportar en la construcción de aprendizajes matemáticos.

En Thales (2003) se plantea que cuando a un estudiante se le solicita dar una explicación o escuchar las explicaciones de los compañeros sobre un objeto matemático de estudio, este tiene más posibilidades de comprender el objeto de estudio.

Por su parte, Schoenfeld (1992) plantea que los estudiantes deben de dar un poco más que describir simplemente sus algoritmos para llegar a la solución de un problema y lo que se debe hacer es brindarles la oportunidad para que expliquen las estrategias que van a usar para las soluciones y expresar por qué las han seleccionado.

Esta sección como la anterior la hemos estructurado teniendo en cuenta en este caso la explicación de los enunciados en lenguaje verbal, seguido de los enunciados mediante representación gráfica o pictórica, de enunciados en lenguaje matemático y finalmente la explicación de enunciados haciendo uso del software.

4.2.1 Explicación de enunciados en lenguaje verbal

Continuamos presentando un análisis sobre algunas de las actividades que se proponen en el curso de precálculo y las acciones que surgieron con los casos de estudio y que pueden dar cuenta de la explicación de enunciados en lenguaje verbal. Para la actividad de la filtración del medicamento veíamos en la habilidad interpretativa cómo Jennifer estableció una razón de las horas del día con el lapso de tiempo para la toma del medicamento, y realizaba para cada día las cuentas del porcentaje de medicamento que queda en el cuerpo de la jugadora teniendo en cuenta el residuo que éste iba dejando.

Podemos inferir a partir de lo realizado y expresado por Jennifer, que hace una buena explicación del enunciado del problema, pues lo pone en palabras más sencillas con el fin de dar cuenta de los datos suministrados por el problema. Ella interpreta los datos de tal forma que esto

le permite explicar de una forma más clara lo que el problema plantea e inicia la explicación del proceso que allí está realizando como lo muestra la Figura 54.

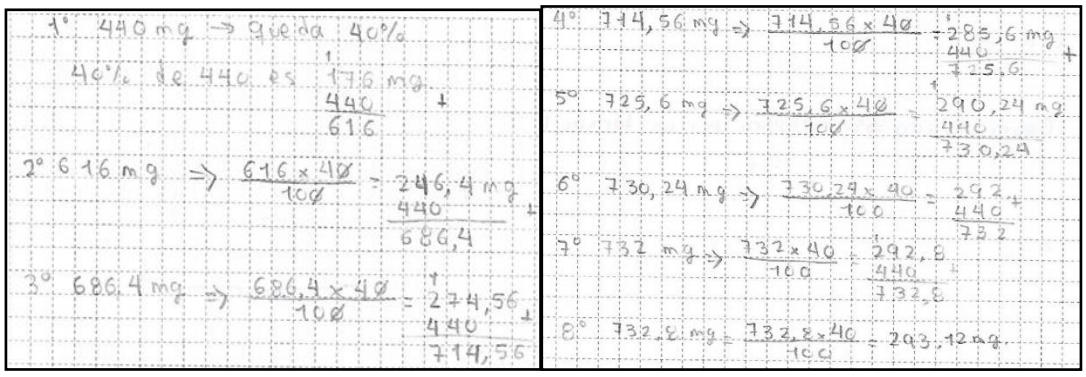


Figura 54 Explicación del problema del medicamento.

Jennifer explica que debe ir paso a paso y que no puede llegar a sacar el porcentaje de todos los mg del medicamento que se tomaría la jugadora en los 10 días, puesto que debe tener en cuenta el residuo que éste deja en el cuerpo, cosa que en un principio no había tenido en cuenta.

De la explicación de Jennifer podemos decir, que pone el problema en palabras más claras para explicarles a sus compañeros su procedimiento, explicó que debía hacer las cuentas paso a paso, es decir, toma a toma, porque si miraban el enunciado del problema este decía que en el cuerpo iba quedando cierto porcentaje el cual debía tenerse en cuenta al momento de la siguiente toma y así con las 28 tomas restantes.

En Laura vemos que, al igual que Jennifer, da una clara explicación en cuanto a lo que el problema le está pidiendo, y lo que debe hacer para resolverlo.

Una segunda actividad en la que se exige por parte de los estudiantes la explicación de enunciados en lenguaje verbal es la primera del taller de Funciones y Realidad en la cual el

problema es el de un minutero de telefonía celular en el cual se le pregunta cuánto cuesta una llamada con diferentes duraciones.

En esta actividad el estudiante explica que se tienen unas unidades de tiempo que no son las convencionales, por lo cual debe hacer una conversión de la forma como es presentada la información para luego, si dar el costo de la llamada, por ejemplo, vemos que se les pide el valor de 2:99 min.

Jennifer al igual que Laura en esta actividad expresa que un minuto equivale a 60 segundos y usan esto para determinar, por ejemplo, cuánto vale 2:99 min.

Cuando el estudiante hace uso de su experiencia para la solución de problemas, asociando esta solución con un pre saber o con una situación vivenciada por él, la habilidad de interpretación y de explicación se desarrolla de una manera natural.

Existen otras actividades que dan cuenta de la explicación de enunciados en lenguaje verbal como lo son aquellas actividades en que el estudiante debe determinar, para un problema específico, cuáles son las magnitudes que se encuentran involucradas en la situación y poder establecer la relación que existe entre ellas. Problemas de este tipo encontramos en la actividad 1 del taller de área máxima, en el cual se proporcionaba el valor del perímetro de un rectángulo y se debía encontrar las dimensiones de este cuadrilátero de tal forma que su área fuese la máxima posible.

Como veíamos en la habilidad para interpretar tanto Jennifer como Laura evidenciaron una buena interpretación del problema planteado. Ahora para la habilidad explicativa observamos que utilizan la fórmula del perímetro para explicar que para encontrar el área se debe

usar esta fórmula y reemplazar el valor del perímetro que ya es conocido; además, traducen el problema y lo expresan por medio de un dibujo lo cual permite que el enunciado sea más entendible.

Otra de las actividades que dan cuenta de la interpretación de enunciados en lenguaje verbal es la que encontramos en la actividad uno de la Caja sin Tapa.

Una primera explicación que da Jennifer es que la medida de la hoja no se encuentra en las unidades que están acostumbradas a manejar, por lo tanto, debían hacer uso de la conversión de unidades, para así pasar de decímetros a centímetros y trabajar en las unidades más usadas para efectos de los cálculos que la actividad requería.

Luego vemos cómo Jennifer convierte eso que estaba en un lenguaje natural a un lenguaje gráfico, en el cual hace que el problema sea más entendible para ella y sus compañeros. Al hacer la socialización del problema Jennifer expresa que debió recurrir a sus pre saberes para poder poner el problema en palabras más claras para su respectiva solución.

Por su parte Laura antes de iniciar la construcción de su caja hace un bosquejo de lo que el problema le estaba pidiendo, como se muestra en la Figura 55.

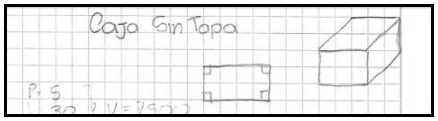


Figura 55 Bosquejo del problema

Ella inicia haciendo el dibujo del papel con el cual va a construir la caja y esboza los cuatro cuadros en las esquinas los cuales debe quitar para la construcción de la caja sin tapa tal y como lo pedía el problema.

4.2.2 Explicación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica

Para los enunciados mediante representación gráfica o pictórica seguimos analizando los datos emergentes del taller 1 de Números y Operaciones. Esta actividad muestra en Jennifer su habilidad explicativa dado que ella asigna valores de tal forma que esto le ayude a poner el problema en un lenguaje más claro, dado que no se tienen valores. Los estudiantes en esta clase de problemas, sin leerlos, ya dicen que no son capaces de resolverlos, pero Jennifer muestra que esto no es impedimento para llegar a explicarlo en palabras más sencillas o como ella lo realiza por medio de ejemplos numéricos.

Jennifer toma la recta numérica la divide en 10 partes iguales y por medio de esto puede asignar los valores cercanos a estos puntos, y es aquí donde muestra una explicación al problema el cual, por medio de ejemplos, llega a resolver sin recurrir a las propiedades de los números.

Por su parte Laura cuando socializa las respuestas entabla una conversación con la profesora en la cual es capaz de explicarle a ella y a todos sus compañeros el problema y la forma de resolverlo. Vemos en el dialogo de Laura como en base a sus pre saberes es capaz de explicar la solución al problema. Es de resaltar que Laura por medio del ensayo y error fue capaz de obtener ciertas propiedades que cumplen los números entre cero y uno. Laura a diferencia de Jennifer uso sus pre saberes y, cuando había descartado varias opciones de respuesta, su siguiente paso fue asignarle valores numéricos para resolver el problema, pero antes hizo uso de lo que recordaba.

Una segunda actividad que se ha considerado en la explicación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica es la actividad en la que se muestran cuatro gráficas y el estudiante debe asociar con su representación algebraica. Como veíamos en la habilidad anterior

Jennifer usa las actividades que ha realizado con el fin de poder interpretar el problema, pero adicional a esto, se muestra la gran habilidad para explicar por medio de problemas ya trabajados la destreza para asociar lo trabajado con lo que nuevo que se está proponiendo. Jennifer parte de sus conceptos previos para realizar la primera y segunda asociación de la gráfica con su parte algebraica, lo explica utilizando la gráfica presentada con las propiedades de esas funciones. Para las funciones restantes expone que la gráfica para esas dos funciones es similar, se debe detener a mirar el comportamiento de la gráfica en el intervalo en el cual se encuentra graficada la función. Es allí donde expresa que a medida que el exponente en estas funciones es mayor, el valor de la función evaluado en ese intervalo será menor.

A partir de lo expuesto por Jennifer a sus compañeros se puede evidenciar su habilidad explicativa y la forma como recurre a problemas ya trabajados para darle solución al problema planteado. Laura hace una explicación similar a la expuesta por Jennifer exponiendo su solución a los compañeros, expresando que para asociar el registro gráfico con el registro algebraico empieza por descartar las funciones que ya conocía haciendo uso de sus presaberes, sin embargo, al momento de asociar la función cuadrática y la función cubica no encuentra diferencias que le permitan hacer de forma correcta el procedimiento.

La actividad matemática mostrada anteriormente por cada uno de los casos de estudio nos permite ver un comportamiento particular en términos de la explicación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica.

4.2.3 Explicación de enunciados en lenguaje matemático

En el problema del vehículo Toyota Corolla el cual recorre Bogotá en horas pico, observamos que Jennifer después de intentar buscar un patrón el cual le pudiera simular la

situación, explicó que trataba de hallar esto para encontrar una función que modelara el comportamiento, pero, esto no le resultó tan fácil, porque el comportamiento de los datos no eran el mismo, aunque observó que tenía un incremento más o menos de una décima cada kilómetro, y ya con esto pudo estimar los valores que le estaban solicitando. Laura trataba de explicar el problema haciendo algunos cálculos numéricos en los cuales pretendía encontrar el patrón de los datos, pero esto no le funcionó, así que optó por utilizar la estrategia de graficar los datos y utilizar esta grafica para estimar los valores pedidos como se ve en la Figura 56.

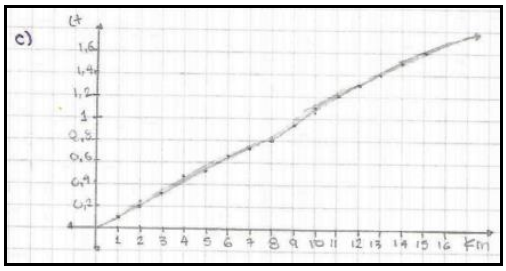


Figura 56Representación gráfica del problema del Toyota Corolla

Laura hizo una estimación de acuerdo a lo hallado y explicó que esto se debía a que la función que modelaría el problema no es una función lineal porque en la gráfica se puede observar que la línea recta no pasa por todos los puntos.

4.2.4 Explicación de enunciados presentados con tecnología digital:

Para la explicación de enunciados mediante representación digital hay actividades en el curso de precálculo que dan cuenta de esto, estas actividades requieren que los estudiantes con ayuda del software puedan dar solución al problema planteado.

Una primera actividad es la que tiene el taller de área máxima en la cual el estudiante debe determinar para el problema planteado, cuáles son las magnitudes que se encuentran en el problema y de ellas, poder decir, cuáles tienen variación y cuáles permanecen constantes.

A partir de la representación gráfica el estudiante debe contestar las siguientes preguntas como por ejemplo ¿cuáles magnitudes son las que varían? ¿Cuáles no? ¿Qué valores puede tomar la base, la altura y el área? Para contestar a estos interrogantes es necesario que los estudiantes puedan explicar de forma oral o escrita por medio de la representación digital las magnitudes que intervienen en el problema y determinar cuáles de estas varían.

Tanto Laura como Jennifer tratan de expresar lo que observan en la representación digital al mover el punto. De acuerdo a esto concluimos que se desarrolla la habilidad explicativa por parte de las estudiantes gracias a las representaciones digitales en cuanto a las magnitudes presentes en la situación.

Algo valioso que encontramos en esta actividad es que los estudiantes explican el problema planteado gracias a que el software le permite tener una representación digital manipulable, que a diferencia de la representación estática le facilita el proceso de visualización, de manera que pueden dar cuenta no sólo de las magnitudes que intervienen en la situación planteada si no que pueden expresar cuáles de ellas son variables y cuáles permanecen constantes y que valores pueden tomar.

4.3 Habilidad para justificar la variación

Diferentes autores han coincido en lo que significan las habilidades comunicativas del pensamiento variacional. Dentro de estas habilidades encontramos la habilidad justificativa la cual, como lo expresan Durango, Parra, Toro y Zapata (2010), hace referencia a las actividades y

procesos en los que los estudiantes emplean argumentos matemáticos para poder validar los enunciados.

Observamos que diferentes autores coinciden cuando se dice que la justificación es observable en acciones las cuales están encaminadas a aclarar, dar razones y desarrollar ideas de una forma coherente con el contexto. Esta habilidad exige por su parte dar cuenta de un saber fundamentado en razones las cuales deben ser coherentes.

Podemos decir, que es la capacidad que tienen los estudiantes para llegar a sustentar una idea, aceptar o refutar una conclusión por medio de razones relevantes haciendo uso de proposiciones, realizando procedimientos, llegando a utilizar contraejemplos como medio de justificación o simplemente explicando el porqué de un proceso.

En esta sección las evidencias asociadas a las habilidades justificativas las hemos organizado teniendo en cuenta los diferentes tipos de enunciados.

En esta parte damos continuidad a las actividades escogidas en las dos habilidades anteriores, para que de esta forma poder seguir mostrando las evidencias de los casos de estudio que dan cuenta de la habilidad justificativa.

4.3.1 Justificación de enunciados en lenguaje verbal

Partimos de la actividad de la filtración del medicamento de la jugadora, donde veíamos como Jennifer explicaba el enunciado a sus compañeros. Para la habilidad de justificación de los enunciados en lenguaje verbal, vemos dos procedimientos realizados por Jennifer, en el cual refuta su primera respuesta, ya que analizó el resultado obtenido con los datos proporcionados por el problema y observó una irregularidad en sus cuentas, cosa que la hizo empezar nuevamente a realizar los cálculos y poder observar en lo que había fallado al omitir el

porcentaje de residuo que dejaba el medicamento en el cuerpo. Ya con este nuevo resultado, Jennifer justifica a sus compañeros, tratando de obtener con todos los datos que cada toma generaba, una fórmula que le pudiera simplificar la tarea y así poder tener la cantidad de medicamento si la jugadora decidiera tomarlo por más días.

En Laura vemos que, al igual que Jennifer, ofrece una clara justificación en cuanto a lo que el problema le está pidiendo, y lo que debe hacer para resolverlo. A diferencia de Jennifer, Laura consigue la fórmula de manera más rápida y la comprueba con los datos que había obtenido para los diez primeros días a lo cual expresa que la fórmula hallada le permite por medio de razones relevantes llegar a la solución y que por tanto acepta la conclusión a la cual pudo llegar.

En la actividad de la filtración del medicamento de la jugadora, veíamos como Jennifer explicaba el enunciado a sus compañeros. En esta parte podemos ver acciones realizadas por Jennifer, en la cual refuta su primera respuesta, ya que analizó el resultado obtenido con los datos proporcionados por el problema y observó una irregularidad en sus operaciones, luego empezó nuevamente a realizar los cálculos, observar en lo que había fallado al omitir el porcentaje de residuo que dejaba el medicamento en el cuerpo. Ya con este nuevo resultado, Jennifer argumenta a sus compañeros mediante una fórmula que le representó el problema que estaba desarrollando como lo vemos en la Figura 57.

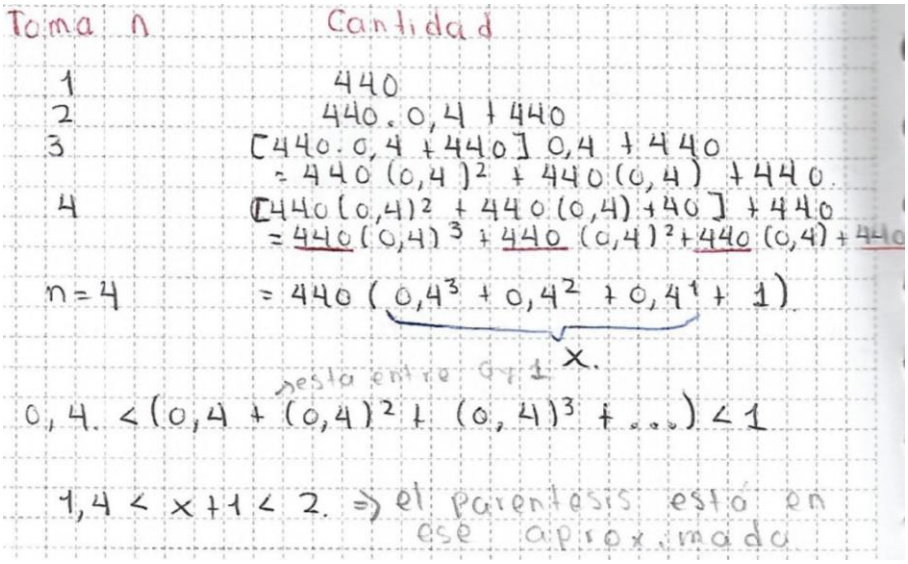


Figura 57 Fórmula hallada por Jennifer que modela el problema.

Laura por su parte consigue la fórmula de manera más rápida y la comprueba con los datos que había obtenido para los diez primeros días a lo cual argumenta que por medio la fórmula hallada puede simular el problema que se le había presentado, cosa que en un principio no le fue posible encontrar dado la complejidad para asociar los datos en uno que quedaran de forma más condensada como se evidencia en la Figura 58.

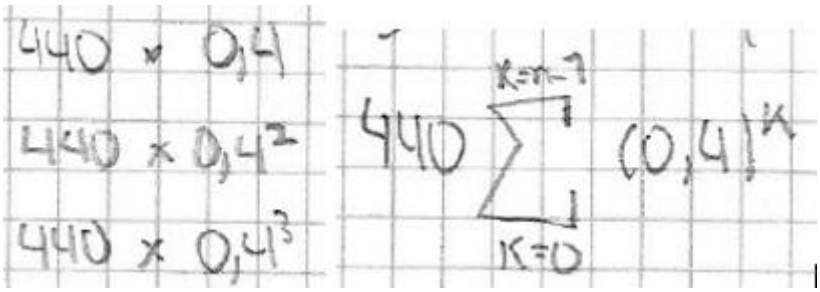


Figura 58 Fórmula hallada por Laura para modelar el problema del medicamento

Una segunda actividad en la que se evidencia la justificación de enunciados en lenguaje verbal es la primera del taller de Funciones y Realidad en la cual el problema es el de un

minutero de telefonía celular en el cual se le pregunta cuánto cuesta una llamada con diferentes duraciones.

Las dos estudiantes expresan que un minuto equivale a 60 segundos y usan este procedimiento para explicar el porqué del proceso, además, vemos que Laura realiza una gráfica en la cual puede observar el valor que debe cancelar dependiendo de los minutos que requiera.

Jennifer justificó este tipo de problema con dos funciones que le permitieron modelar el problema, las cuales fueron la función piso y la función techo como se muestra en la Figura 59.

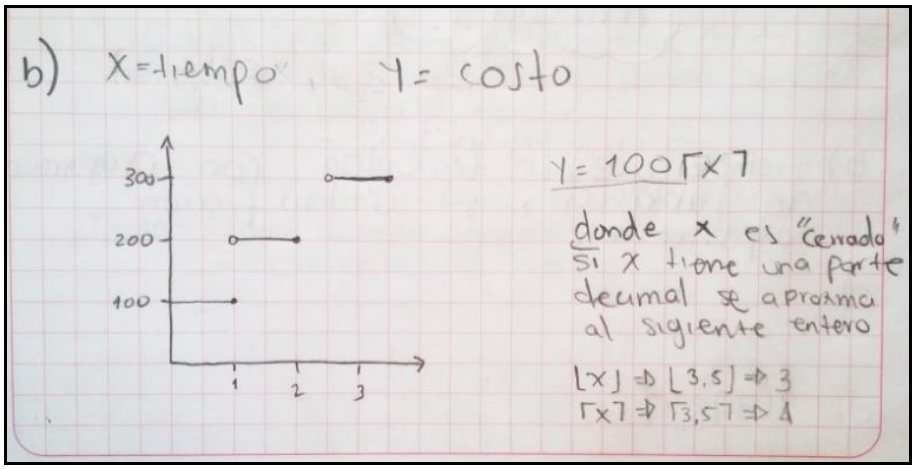


Figura 59 Gráfica de Laura en la cual modela la situación.

En la primera actividad del taller de Funciones y Realidad las estudiantes por medio de acciones con los datos y de las diferentes representaciones que pudieron obtener de los datos, llegaron a justificar este tipo de problemas con dos funciones que simulan muy bien el problema, la función piso y la función techo ver Figura 60.

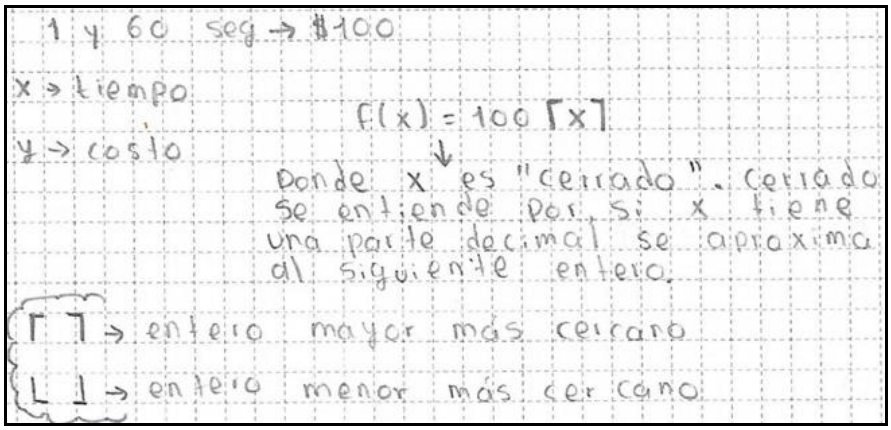


Figura 60 Funciones que le permiten a Jennifer modelar el problema.

Las dos estudiantes expresan que por medio de la gráfica se puede observar el comportamiento del cobro del valor de los minutos, los cuales pasaron del registro gráfico al registro algebraico hallando la función que lo modelara.

Otra actividad de este tipo que encontramos es en la actividad 1 del taller de área máxima, en la cual tanto Jennifer como Laura evidenciaron una buena justificación del problema planteado. Ellas utilizan la fórmula del perímetro para justificar que para encontrar el área se debe usar esta fórmula y reemplazar el valor del perímetro que ya es conocido, Figura 61 , para así encontrar las dimensiones que tenga el área máxima. Las dos estudiantes llegan a cuestionarse si es un rectángulo o un cuadrado el que mayor área va a tener, y para llegar a esta conclusión utilizan la fórmula del perímetro y procedimientos algorítmicos correctos aun cuando la falencia se encuentra en la definición correcta de rectángulo y cuadrado.

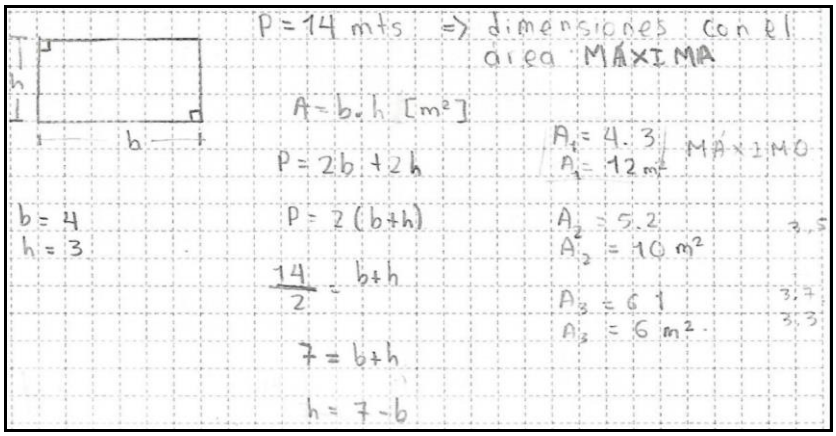


Figura 61Procedimiento de Jennifer para justificar el área máxima

En la actividad del área máxima, Jennifer hace uso de la fórmula del área para justificar que el cuadrilátero de mayor área era el cuadrado, haciendo uso no solamente del lenguaje matemático sino de las propiedades de los cuadriláteros en general y la definición correcta de cuadrado y de rectángulo (todo cuadrado es un rectángulo), también hace uso del software GeoGebra en el cual ubica el punto máximo el cual representa el tamaño que tiene el cuadrilátero que posee el área máxima como se muestra en la Figura 62.

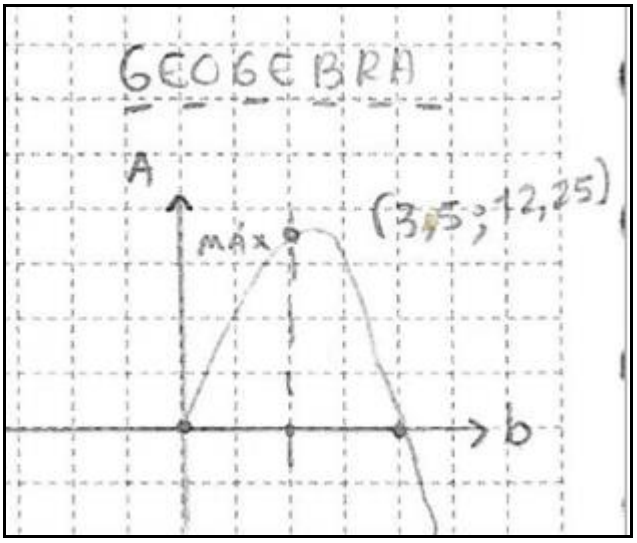


Figura 62Representación de Jennifer del problema del software.

Una actividad final que también nos permite observar la justificación de enunciados en lenguaje verbal es la actividad de la caja sin tapa. Aquí las justificaciones expuestas son muy válidas tanto para Jennifer como para Laura. Las dos recurren a esbozar lo planteado en el problema, luego hacen uso de la fórmula del volumen con el fin de asignarle unos valores a las dimensiones y con esto a ensayo y error tratar de buscar los valores que les generen la caja de mayor volumen con las condiciones dadas como se muestra en la figura Figura 63.

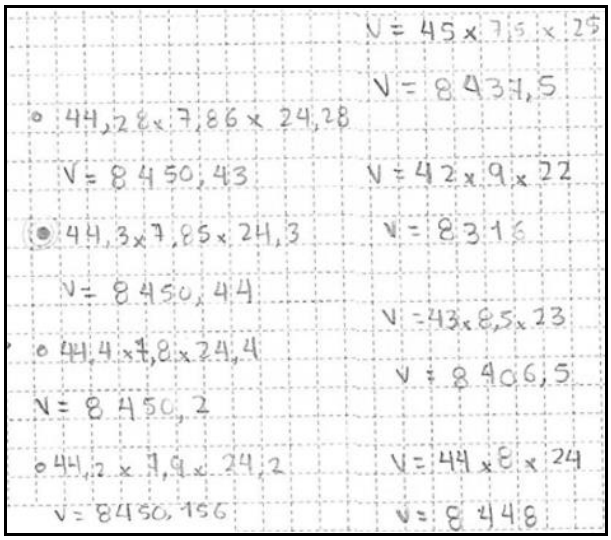


Figura 63 Procedimiento de ensayo y error para obtener la caja de mayor volumen.

En la actividad final de la caja sin tapa Laura y Jennifer justifican su solución al problema por medio del uso apropiado de la fórmula del volumen, en la cual expresaron que valores podía tomar la altura, anchura y profundidad de acuerdo a las indicaciones del problema. Por medio de la fórmula y reemplazando en ella sabían desde qué y hasta que valores se podían tomar para obtener la caja de mayor volumen (Ver Figura 64).

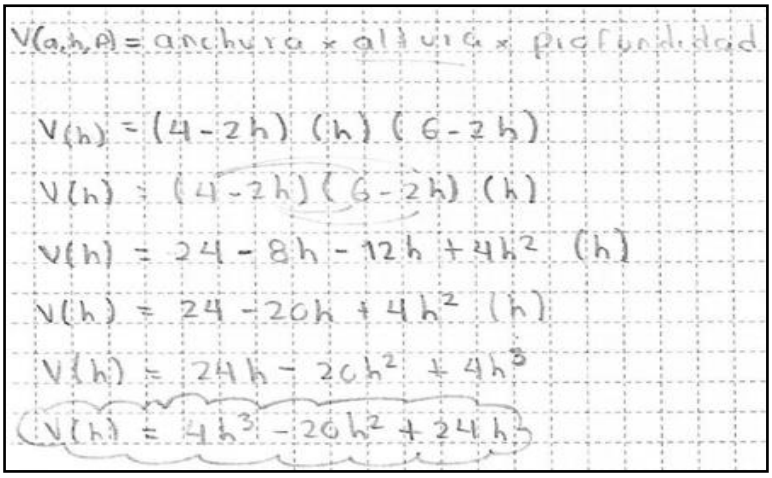


Figura 64 Justificación del problema haciendo uso de la fórmula del volumen en función de la altura.

4.3.2 Justificación de enunciados mediante representación gráfica o pictórica

En la justificación observamos el taller de Números y Operaciones. En esta actividad Jennifer recurre a sus pre saberes para tratar de justificar los pasos que está realizando, ya que asigna valores a los diferentes puntos, para con este procedimiento llegar a dar respuesta a los interrogantes de la actividad.

Jennifer asigna valores cercanos a estos puntos, y es aquí donde muestra una justificación al problema, ya que expresa que si toma por ejemplo, dos números a la izquierda del cero y los multiplica, estos automáticamente van a dar positivo teniendo en cuenta la ley de los signos. De esta manera la estudiante hace ya uso de justificaciones teniendo en cuenta la teoría en matemáticas como se muestra en la Figura 65.

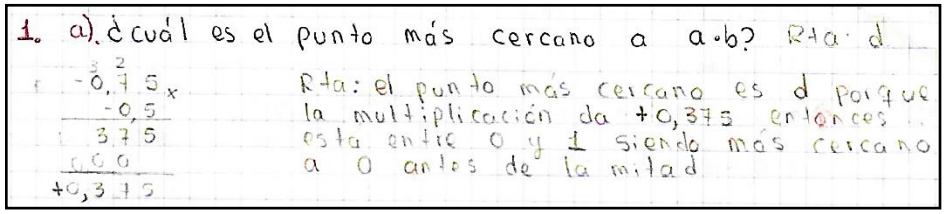


Figura 65Asignación de valores cercanos al punto solicitado.

Por su parte Laura por medio del ensayo y error fue capaz de obtener ciertas propiedades que cumplen los números entre cero y uno, las cuales después de la socialización con los compañeros le quedaron claras como se muestra en la Figura 66.

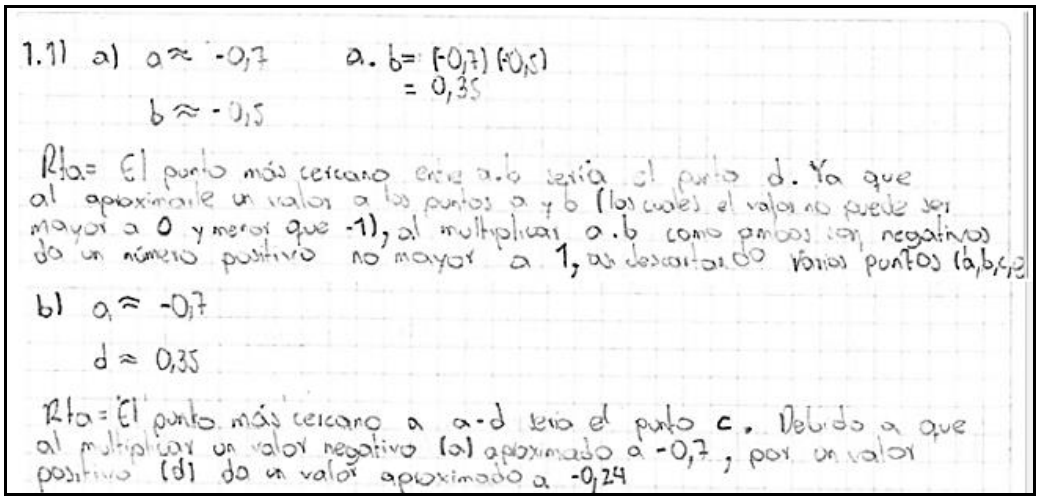


Figura 66Asignación de valores aproximados a los puntos dados.

En la actividad de las gráficas donde se debe escoger la función que las representa algebraicamente, Jennifer evidencia su habilidad justificativa, ya que dice que éstas las obtiene por medio de las actividades ya resueltas las cuales le quedaron claras en cuanto a cómo diferenciar las funciones. Aunque en su cuaderno deja ver que realiza algunos procedimientos para enlazar la gráfica con su respectiva representación algebraica, expresa que éstas cumplen algunas propiedades, por ejemplo, la función de la raíz cuadrada de x solamente se pueden tomar los valores positivos porque en los reales no está definida una raíz negativa.

A partir de lo expuesto por Jennifer a sus compañeros se puede evidenciar su habilidad justificativa y la forma como recurre a problemas ya trabajados para darle solución al problema. Laura hace una justificación similar a la expuesta por Jennifer. Laura expone su solución a todos los compañeros a los cuales les dice que empieza por descartar las funciones que ya conocía, ya

que hace uso de sus pre saberes adquiridos en el colegio, y le quedan la gráfica de la función cúbica y cuadrática a lo cual expresa que no le encuentra aún la diferencia, también muestra el orden de las funciones de menor a mayor como se muestra en Figura 67.

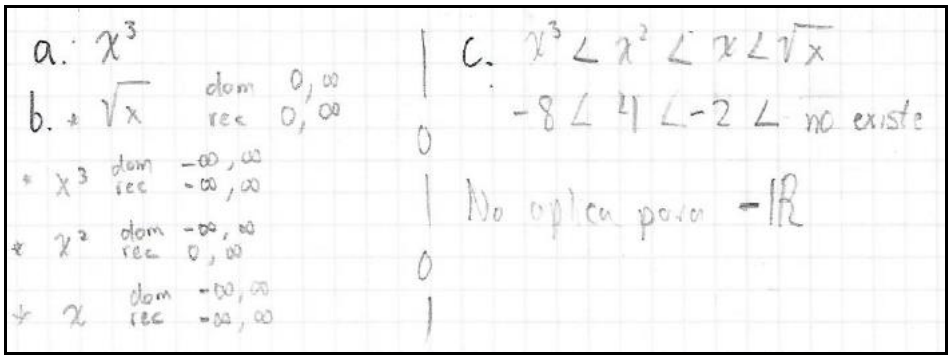


Figura 67Orden de las funciones del problema de menor a mayor.

4.3.3 Justificación de enunciados en lenguaje matemático

En el problema del vehículo Toyota Corolla el cual recorre Bogotá en horas pico, observamos que Jennifer finalmente observó que los datos tenían un incremento más o menos similar cada kilómetro, y ya con esto estimó los valores que le estaban solicitando. Laura utilizó la estrategia de graficar los datos y utilizando la gráfica pudo mostrar los valores solicitados. Ella hizo una estimación de acuerdo a lo hallado y justificó que los datos no le eran muy exactos ya que como se podía observar en la gráfica, la línea que unía todos los puntos no correspondía a una función lineal porque no todos los puntos estaban allí como se muestra la Figura 68.

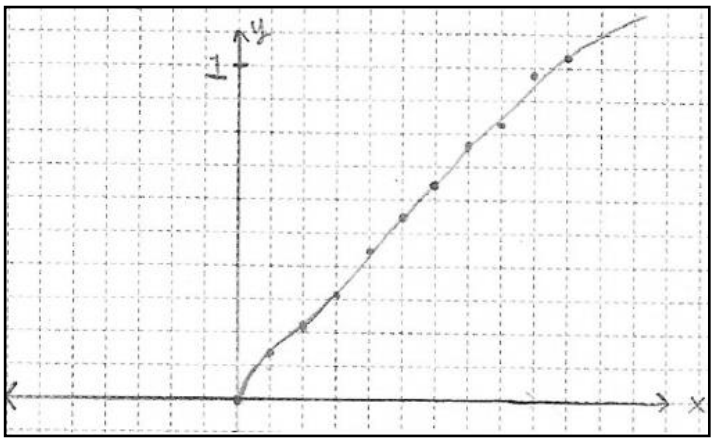


Figura 68Representación de los datos dados en el problema.

En el problema del vehículo Toyota Corolla el cual recorre Bogotá en horas pico, observamos que Jennifer finalmente obtuvo una función que modela el problema y por medio de esta justifica su solución. Laura utilizando la gráfica pudo comprobarle a sus compañeros que los valores que tenía como resultado eran los correctos. Ella hizo una estimación de acuerdo a lo hallado como se muestra en la Figura 69.

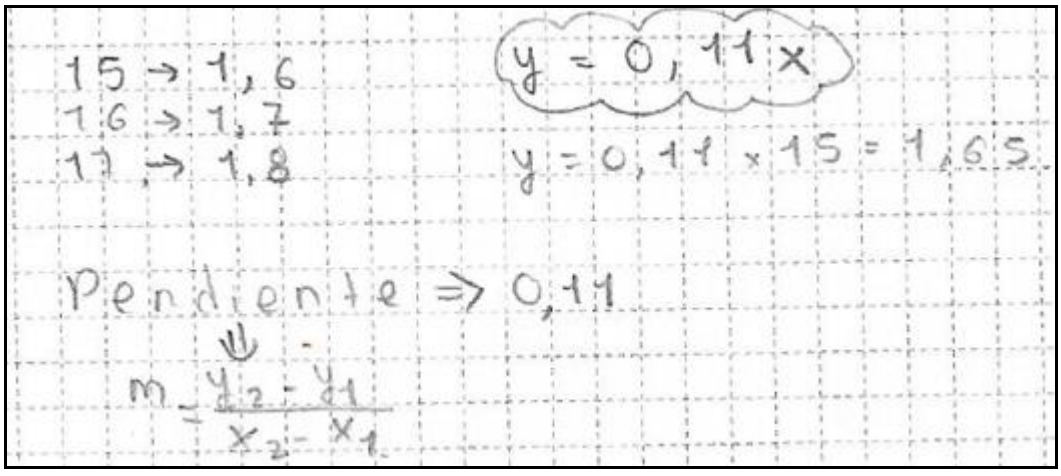


Figura 69Función que modela el problema.

4.3.4 Justificación de enunciados presentados con tecnología digital:

Para la justificación de enunciados mediante representación digital hay actividades que ayudan a evidenciar esto, ya que estas actividades requieren que los estudiantes con ayuda del software puedan dar solución al problema planteado.

Una primera actividad es la que tiene el taller de área máxima en la cual el estudiante debe determinar cuáles son las magnitudes que tienen variación y cuáles permanecen constantes.

A partir de la representación gráfica (Figura 70) el estudiante debe contestar preguntas como por ejemplo, ¿Qué valores puede tomar la base, la altura y el área? Para contestar a estos interrogantes es necesario que los estudiantes puedan justificar de forma oral o escrita por medio de la representación digital las magnitudes que intervienen en el problema y determinar cuáles de estas varían.

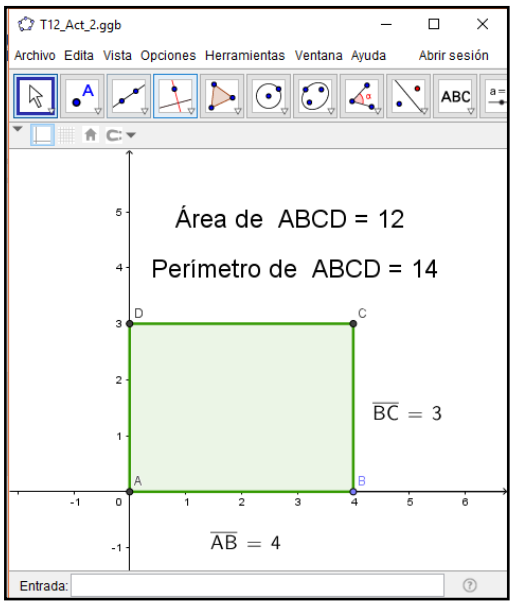


Figura 70Representación digital del enunciado.

Tanto Laura como Jennifer tratan de justificar lo que se puede visualizar en la representación digital al mover el punto. En este caso, la representación digital muestra directamente las magnitudes cambiantes y aquellas que permanecen estables con el solo hecho

de manipular un punto de la representación. De acuerdo a esto concluimos que se desarrolla la habilidad justificativa por parte de las estudiantes gracias a las representaciones digitales en cuanto a las magnitudes presentes en la situación, pues se hace un ejercicio de asociación entre lo visual que permite la representación digital y lo oral en términos de la habilidad comunicativa.

5. Conclusiones

Para dar respuesta al objetivo de *caracterizar habilidades comunicativas emergentes de la resolución de problemas relacionados con fenómeno de variación mediados por tecnologías digitales en el curso de precálculo con estudiantes de primer nivel universitario de la UIS,* hemos considerado a lo largo del documento las actividades que se realizan en el curso de precálculo dirigido a estudiantes que ingresan a las carreras de Ingenierías y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander.

La presentación de las conclusiones la realizaremos en tres secciones en las cuales explicitaremos: i) La caracterización de las habilidades que hemos encontrado desde el punto de vista teórico el cual hemos corroborado a partir de los datos, ii) Reflexiones acerca del curso de precálculo relacionadas con el desarrollo de habilidades comunicativas a partir de las actividades que allí se realizan, iii) perspectivas de investigación.

5.1 Habilidades comunicativas durante la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación

A partir de la presente investigación la cual es de tipo fenomenológico experimental y de los resultados encontrados, podemos caracterizar las habilidades comunicativas durante la resolución de problemas relacionados con los fenómenos de variación mediante la explicitación de las habilidades a priori que surgieron a través del análisis de los datos que se realizó para cada una de las habilidades que se plantearon en el apartado 2.3.

La caracterización de las habilidades se plantea a partir de una lista de descriptores, con los cuales se da cuenta de una acción específica que permita evaluar el desarrollo de cada una de las habilidades, específicamente asociadas al pensamiento variacional. En la segunda parte presentamos reflexiones sobre cómo el curso de precálculo mediante las actividades que propone, favorece el proceso comunicativo por parte de los estudiantes.

5.1.1 Habilidad Interpretativa

Tanto las observaciones de las videograbaciones, como las producciones escritas de los estudiantes caso de estudio nos han permitido identificar a la habilidad interpretativa como una de las habilidades que pueden potenciarse mediante el curso de precálculo; dicha habilidad se puede observar en los siguientes comportamientos:

- Identificar patrones que permitan predecir comportamientos variacionales específicos.
- Determinar valores particulares para la relación que se establece entre dos magnitudes relacionadas.

- Determinar el comportamiento global de la relación que se establece entre dos magnitudes relacionadas.
- Determinar el cambio que se produce en una magnitud al variar otra magnitud que esté relacionada con ella.
- Determinar la variación entre dos magnitudes relacionadas.

En particular, para los objetos matemáticos mencionados en esta sección de conclusiones podemos mencionar acciones un poco más específicas que dan cuenta de la habilidad de interpretar:

- Interpreta la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente.
- Interpreta la derivada de una función como la razón de cambio entre dos magnitudes que varían.
- Interpreta la derivada de una función como otra función.
- Infiere valores de tendencia mediante aproximaciones numéricas
- Infiere valores de tendencia mediante el uso de gráficas.
- Infiere el comportamiento de un gráfico a partir de valores ya plasmados del mismo.
- Determina los puntos máximos y mínimos de una representación gráfica de una función.

Teniendo en cuenta que los procesos en matemáticas se encuentran interrelacionados, podríamos concluir que la habilidad para interpretar es una habilidad inherente a cualquiera de los procesos en matemáticas. Es decir, la interpretación debe desarrollarse ya sea que el proceso matemático en el que estemos inmersos sea el de comunicación, el de demostración, el de representación, etc.

La habilidad interpretativa tal y como lo hemos señalado antes, es una habilidad que se trabaja en todos los talleres del curso de precálculo. Se espera que los estudiantes lleguen a expresar una respuesta sustentada, es decir, que hagan uso del lenguaje matemático y de elementos teóricos como son una proposición, un teorema entre otros, de manera que para llegar a lograr esto, se debe hacer una correcta interpretación de todas las formas como se presentan las actividades ya sea con enunciados en lenguaje verbal, pictóricos, algebraicos o con ayuda del software.

La habilidad para interpretar enunciados en lenguaje verbal, pictóricos, algebraicos o con ayuda del software, es planteada como parte fundamental de las habilidades comunicativas en matemáticas, ya que se constituye en una posibilidad que nos permite favorecer la resolución de problemas.

Los estudiantes desarrollan la habilidad para interpretar enunciados en lenguaje verbal cuando están en capacidad de identificar las condiciones del problema, las incógnitas, los datos presentes en el enunciado como los datos que no se encuentran de forma explícita. Esto influye de tal manera que le permiten llegar a la solución de los problemas, aclarando que los presaberes matemáticos juegan un papel importante ya que van de la mano para poder resolver los problemas favorablemente, porque un estudiante que interprete de forma correcta un enunciado pero que no cuenta con los presaberes necesarios no logra tener la solución.

5.1.2 Habilidad Explicativa

La habilidad interpretativa y la explicativa son habilidades independientes en las habilidades comunicativas pero se encuentran complementadas entre sí. Por ejemplo, hay casos en que los estudiantes expresan una interpretación de forma errónea pero esto no les impide que lleguen a dar una explicación del problema. Cuando esto ocurre, le permite al estudiante que

está ofreciendo la explicación tomar de sus compañeros ideas que lo lleven a corregir su mala interpretación. Finalmente, encontramos el caso en que una buena explicación proviene de una buena interpretación por parte del estudiante, porque cuando este comprende lo que el problema enuncia, el estudiante organiza sus ideas de tal forma que se evidencia a la hora de su explicación.

En el desarrollo de la habilidad explicativa es importante que los estudiantes constantemente estén comunicando a sus compañeros los procesos que están desarrollando ya que esto permite a los sujetos involucrados en la comunicación comprender el objeto matemático de estudio, además que pueden emitir un juicio de sus planteamientos si estos están de forma correcta o incorrecta y llegar a corregir los errores ya que estos también ayudan al aprendizaje.

A continuación mencionaremos solo algunos ejemplos de acciones que caracterizan esta habilidad en términos de los objetos involucrados en las situaciones de cambio y variación trabajadas en el curso. Esas acciones serían:

- Expresar en lenguaje natural la relación existente entre dos o más magnitudes que varían.
- Expresar en lenguaje natural la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir del registro tabular.
- Expresar en lenguaje natural la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir de su expresión algebraica.
- Construir una representación gráfica a partir de un enunciado en lenguaje natural de una situación funcional

- Realizar una tabla que presente la relación existente entre dos o más magnitudes que varían, ya sea una tabulación numérica o simbólica.
- Utilizar el movimiento de las manos o del cuerpo para modelar el comportamiento de dos o más magnitudes que varían.
- Realizar la gráfica de una función a partir del registro tabular de la misma.
- Realizar una gráfica que dé cuenta de la variación de dos o más magnitudes, ya sea con una gráfica en el plano cartesiano, un gráfico estático o una representación digital.

Las explicaciones pueden llegar a constituirse como una herramienta para la comprensión ya que como lo expresa Duval (1999) una explicación ofrece una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno o resultado. En Thales (2003) se plantea que cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. Escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión.

5.1.3 Habilidad Justificativa

Thales (2003) se plantea que los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente, cuando hay desacuerdo, llegarán a una mejor comprensión matemática a medida que intentan convencer a sus compañeros sobre los diferentes puntos de vista.

En esta habilidad el proceso para aprender a escribir matemáticamente es similar al aprendizaje de la escritura de cualquier tipo. Este proceso se gana mediante la práctica con la orientación de un experto. Cuando los alumnos practican la comunicación deberían expresarse

con más claridad y coherencia y, también, adquirir y reconocer los distintos estilos matemáticos de dialogo y justificación. A través de las etapas, sus justificaciones deberían llegar a ser cada vez más completos y los estudiantes deben estar en capacidad de establecer las propiedades utilizadas para apoyar sus justificaciones.

Esta investigación permitió identificar a la habilidad justificativa como una de las habilidades que pueden potenciarse mediante las actividades del curso de precálculo; esto mediante la experimentación y exploración de situaciones que impliquen el cambio y variación. Como se mencionó anteriormente, la justificación es observable en acciones encausadas en la evidencia coherente de ideas. Algunas de las acciones identificadas para esta habilidad son:

- Realizar una gráfica que dé cuenta de la variación de dos o más magnitudes, ya sea esta una gráfica en el plano cartesiano, un gráfico estático o una representación digital.
- Utilizar el movimiento de las manos o del cuerpo para modelar el comportamiento de dos o más magnitudes que varían.
- Realizar la gráfica de una función a partir del registro tabular de la misma
- Determinar una expresión algebraica a partir de un enunciado en lenguaje natural de una situación funcional
- Construir una representación gráfica a partir de un enunciado en lenguaje natural o matemático de una situación funcional.
- Construir una tabla de valores a partir de una expresión algebraica.
- Expresar en lenguaje verbal o matemático la relación existente entre dos o más magnitudes que varían.

- Expresar en lenguaje verbal o matemático la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir del registro tabular o de su expresión algebraica.
- Realizar una tabla que presente la relación existente entre dos o más magnitudes que varían, ya sea una tabulación numérica o simbólica.
- Expresar en lenguaje verbal o matemático justificaciones del problema planteado.
- Hacer uso apropiado del lenguaje matemático en la resolución de problemas.

5.2 Reflexiones acerca del curso de precálculo y las habilidades para comunicar el cambio y la variación

Durante el desarrollo del curso de precálculo se posibilitan diversas actividades con las cuales se pretende favorecer el desarrollo de habilidades comunicativas por parte de los estudiantes.

La investigación dio cuenta que las habilidades que se identificaron como categorías a priori: la interpretativa, la explicativa, la justificativa y la argumentativa; se van desarrollando paralelamente en la medida que éstas se solicitan en la actividad matemática, la clase. Esto es, cuando se le pide a un estudiante interpretar un enunciado (ya sea verbal, algebraico, pictórico o con el uso del software) y se le pide que explique cómo lo entendió, se está favoreciendo tanto lo interpretativo como lo explicativo, porque además de entenderlo para sí mismo tiene que elaborar una producción que le permita comunicarlo a su profesor y a sus compañeros, a fin de recibir una retroalimentación del problema. Así mismo, cuando se le solicita al estudiante que justifique una respuesta, éste por medio de diferentes representaciones da a conocer sus razones de porqué llegó a esa respuesta, inicialmente sus justificaciones pueden usar someramente el lenguaje matemático, el cual a través de la interacción con los demás se puede ir formalizando

hasta convertirse en un argumento sólido que le permita validar no solo sus respuestas sino las de los demás.

De igual forma podemos dar cuenta que las actividades desarrolladas en el curso de precálculo, tanto las de lápiz y papel como las actividades que hacen uso de la tecnología favorecen el desarrollo de las habilidades comunicativas en los estudiantes. Las actividades desarrolladas usando la tecnología les permiten a los estudiantes visualizar un fenómeno variacional. Es decir, identificar que magnitudes varían, cuales permanecen constantes, si se aumenta o se disminuye, la relación entre magnitudes, entre otras. El software favorece la interpretación por parte de los estudiantes, de los datos que el problema le está suministrando, para luego poder explicarlo y ponerlo en palabras más sencillas para él y sus compañeros. Posterior a esto, logra justificar sus algoritmos por medio de ejemplos, utilizando el lenguaje cotidiano o el lenguaje matemático formal.

No cabe duda, que los cursos de Cálculo necesitan favorecer la actividad matemática que implique la comunicación, esto con el fin de favorecer la evaluación formativa de los aprendizajes, pues es por medio de la comunicación cómo podemos revisar el nivel de comprensión de los objetos matemáticos de estudio construidos por cada estudiante. Y a partir de ese proceso de comunicación y retroalimentación, ir corrigiendo y dando más herramientas para formalizar deducciones y transitar con mayor facilidad de las justificaciones verbales a los argumentos formales con el uso del lenguaje matemático.

5. 3 Perspectivas de investigación

Reconocemos que en este trabajo se pudo profundizar más sobre el desarrollo de cada una de las habilidades asociadas a objetos matemáticos específicos del Cálculo diferencial. Por ello,

sigue abierta la inquietud de como favorecer la comprensión por ejemplo del límite de una función en un punto, esto a través de la proposición de actividades que exijan la argumentación por parte de los estudiantes.

Se seguirá promoviendo la investigación del proceso comunicativo en la actividad matemática, especialmente del nivel superior, con el fin de encontrar más alternativas de apoyo para la comprensión de las matemáticas de este nivel.

Referencias Bibliográficas

Alsina, À. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Graó. (pp. 93-138).

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*. Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa. 1 (1), 40-55.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol X N° 2, 135-149.

Azcárate, C. (1998). *Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 1 (2), pp. 235-243.

Barajas, C. (2015). *Elaboración, Comparación y Ejercitación de Procedimientos: Una mirada desde la Resolución de Problemas que implican Fenómenos de Variación*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Botello, I. C. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Universidad Industrial de Santander, escuela de matemáticas. Tesis de maestría en educación matemática. Bucaramanga.

Belmonte, J.L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Universidad de Salamanca, Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de la Ciencias Experimentales. Tesis doctoral. Salamanca.

Caballero, P. y Cantoral, U. (2013). *El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26, pp. 1585-1593. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*. Sociedad Thales, España. 42, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, Ricardo. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* México: Secretaría de Educación Pública.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité Mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: ICE/Horsori.

Dávila, G. Flores, R. García, M. Valencia, M. (2008). *Fundamentos del cálculo.* Sonora: Editorial Garabatos.

Espinosa, A. J., & Bohórquez, L. M. P. (2015). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. EDUCACIÓN Y CIENCIA, (16).

Faustino, Gutiérrez y Rodríguez. (S/F). Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática.

Fiallo, J. & Parada, S. (2014). *Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional*. Revista Científica. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. 20, 56-71. ISSN 0124-2253

Fiallo, J., & Parada, S. (En prensa). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

González, M. Paniagua, C. (2011). Interpretación de problemas matemáticos I. Decanatura de Ciencias. Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín.

Hitt, F. (2005). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds*).* Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. México.

Imbernon, F. (S/F). *La profesión docente en el nuevo contexto educativo*. II seminario internacional Relfido (Red Europea y Latinoamericana de Formación e Innovación Docente. Universidad de Barcelona.

Lupiáñez, J., Cañadas, M., Molina, M., Palarea, M. y Maz, A. (2011). *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación*. Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas.* Colombia. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN. (2013). *Destacados Históricos, Estadísticas 2013*. En Cruzar la meta. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-article-343426.html

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17(3), pp. 559-579. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/6498/1/Gac173molina.pdf

Montes de Oca, N. (2002). Una propuesta didáctica para el desarrollo de la habilidad argumentar en el lenguaje de la Matemática en la asignatura Geometría I, en la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Computación

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project. Roskilde: Roskilde University.

OECD (2014). Skills for Life: Student Performance in Problem Solving. PISA 2012 Results, vol. VI. Paris: OECD. http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm.

Parada, S. (2009) Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases. Tesis de maestría. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2012). Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. *Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga*.

Parada, S. (2016). *Una estructura curricular para Cálculo Diferencial: alternativa y objeto de estudio.* Revista enseñanza del Cálculo. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F. ISSN: 2007-4107.

Parada, S., Conde, A. y Fiallo, J. (2016). *Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación*. Bolema- Mathematics Education Bulletin V: 30, No. 56, pp.1031-1051. ISSN 1980-4415.

Ramírez, A.M. (2009). *La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria*. Universidad Autónoma de Barcelona, facultad de ciencias de la educación. Cataluña.

Ramos, M. G., Sánchez, W., & Huapaya, E. (2014). Argumentación lógica como herramienta para la formación ciudadana en estudiantes de 3ro de secundaria: una propuesta didáctica.

Ramos, R. Jiménez, R. (2014). *Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante.* Revista El Cálculo y su enseñanza. 105-124.

Rico, L. (2006). *La competencia matemática en Pisa*. Proyecto PISA/OCDE. Madrid: Fundación Santillana.

Rueda, N. (2014). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación.* Propuesta de maestría aprobada no publicada. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación.* Universidad Industrial de Santander, escuela de matemáticas. Tesis de maestría en educación matemática. Bucaramanga.

Sánchez, Arturo. (2013). *Características y elementos del pensamiento variacional y su correspondencia con la prueba Saber 11*. Universidad del Valle.

Silver, E. A., (1990). *Thinking through Mathematics: Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms.* The Thinking Series. College Board Publications, Box 886, New York, NY 10101-0886.

Suárez, S. R. & Rojas, S. J. (2013). *Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad*. Trabajo de grado. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Thales, S. A. E. M. (2003). Principios y estándares para la Educación Matemática. Sevilla, SAEM Thales.

Vasco, Carlos E. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Universidad del Valle. In Anais electrónicos do CIAEM–Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Blumenau. (Vol. 9).

Vicerrectoría Académica. (2011). *Diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander*. Documento interno no publicado de la Vicerrectoría Académica de la UIS, Bucaramanga.

Vrancken, S. Engler, A. Giampieri, M. & Müller, D. (2014). *Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades*. Matemática, Educación e Internet, 15(1), 1-20. Recuperado de: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V15_N1_2014/RevistaDigital_Vrancken_V15_n1_2014/index.html

Williner, Betina. (2014). *Habilidades matemáticas referidas al concepto de derivada y uso de tecnología.* Revista Didáctica de Matemáticas. Volumen 87. pp. 101-124.