TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EN INECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO

JOSÉ WILLIAM RAMÍREZ APONTE

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA
EN INECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO

JOSÉ WILLIAM RAMÍREZ APONTE

Profesor Director
Magda Briggitte Villamil Rodríguez
Licenciada en Matemáticas

Profesor Codirector
Edilberto Reyes González
Magíster en Matemáticas

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de
Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

A mis padres José y Álix,
por su infinito apoyo, amor y colaboración.
A mi esposa Briggitte
Por su amor y comprensión.
A mi hermoso país: Colombia

AGRADECIMIENTOS

A nuestros queridos estudiantes Maribel, Jeisson, Pablo y Diego protagonistas de este trabajo, quienes con su responsabilidad y colaboración dieron sentido a esta investigación.

A la Fundación Universitaria Los Libertadores y al profesor Marcos Alejo Sandoval, por darme la oportunidad de realizar este trabajo en la institución y acercarme a la labor de docente.

A los profesores de la Universidad Industrial de Santander que me brindaron su conocimiento y fueron partícipes en la creación del mío.

Al profesor Edilberto Reyes por su colaboración y apoyo.

A mis amigos Diego, José, Milton y Ricardo.

A todos aquellos que forman parte de mi vida, a quienes me han apoyado y a quienes creen en mí.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO:

TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EN INECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO♦

AUTOR:

JOSÉ WILLIAM RAMÍREZ APONTE♦♦

PALABRAS CLAVES:

Investigación en Educación Matemática, Inecuaciones, Valor Absoluto, Pedagogía Crítica.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO:

El propósito de esta investigación es responder a la pregunta ¿Cómo es la relación que se establece entre el análisis individual y colectivo de las tareas de investigación matemática que desarrollan los estudiantes –que están en primer semestre de ingeniería- y la comprensión de significados de Inecuaciones y Valor Absoluto? Así, el objetivo planteado para orientar este estudio es indagar y reflexionar sobre las relaciones que se establecen entre el análisis individual y colectivo de tareas de investigación matemática que desarrollan los estudiantes –que están en primer semestre de ingeniería- y la comprensión de significados matemáticos de Inecuaciones y Valor Absoluto.

Investigar en el aula de clase, es dotar a los alumnos de herramientas teóricas para que puedan desempeñar un buen papel en la búsqueda de conocimientos. El alumno estará motivado a conocer lo que él no sabe; por medio de un estudio analítico de los conceptos matemáticos. Las tareas de investigación Matemática pueden ser un buen proceso de construcción de conocimiento, donde los estudiantes transformen la manera de estudiar matemáticas y cambien la visión que tienen de ellas.

El método de investigación utilizado para el desarrollo de esta investigación es el estudio de casos cualitativo desde un abordaje fenomenológico, fundamentado en los aportes de estudios desarrollados en el campo de investigación matemática en el aula.

♦ Trabajo de Grado.

♦♦ Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Licenciatura en Matemáticas – Director: VILLAMIL RODRÍGUEZ, Magda Briggitte; Licenciada en Matemática – Codirector: REYES GONZÁLEZ, Edilberto; Magíster en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE

TASKS OF MATHEMATICAL INVESTIGATION IN INEQUATIONS AND ABSOLUTE VALUE[♦]

AUTHOR

JOSÉ WILLIAM RAMÍREZ APONTE[♦♦]

KEY WORDS

Research in Mathematical Education, Inequations, Absolute Value, Critical Pedagogy.

DESCRIPTION OR CONTENT:

The purpose of this research is to solve the question ¿How is the relationship settled between the individual and collective analysis of the tasks of mathematical investigation that are develop by the students - who are in first engineering semester - and the understanding of mathematical meanings of Inequations and Absolute Value? Thus, the objective that conducts this study is, to investigate and to analyze the relationship settled between the individual and collective analysis of the tasks of mathematical investigation that are develop by the students —who are in first engineering semester — and the understanding of mathematical meanings of Inequations and Absolute Value.

To investigate in the classroom, is to give to the students the theoretical tools so that they can make a good part in the search of knowledge. The student will be motivated to know what he doesn't know; by an analytic study of the mathematical concepts. The tasks of Mathematical investigation can be a good process of construction of the knowledge, where the students transform the way to study mathematics and change the vision that they have of them.

The previous method used for the research developed is the qualitative cases, with phenomenological approach, based on several contributions of mathematical investigation studies.

[♦] Graduation Work.

[♦♦] Science Faculty - Mathematics School - Degree in Mathematics - Director: VILLAMIL RODRÍGUEZ, Magda Briggitte; graduate in Mathematics. - Co-director: REYES GONZÁLEZ, Edilberto; Master in Mathematics.

"También esta noche, Tierra,
permaneciste firme.
Y renaces de nuevo a mi alrededor.
Y alientas otra vez en mí
la aspiración de luchar sin descanso
por una altísima existencia"[1]

[1] Goethe. Citado por Zuleta (2007)

PRESENTACIÓN

Durante mi práctica en el Servicio Social Educativo I pude darme cuenta de la enorme responsabilidad que significa ser docente de Matemáticas, un docente comprometido con la formación de estudiantes hacia el conocimiento y el análisis, que más que impartir un conocimiento matemático, es capaz de crear análisis crítico del conocimiento, a la vez que influye para que los alumnos tengan la necesidad de pensar y de contextualizar los conceptos matemáticos. Durante esta primera práctica tuve experiencias acertadas, pero también pasé por momentos en los cuales estuve errado, pero en los que aprendí gracias a la reflexión.

Esta práctica de Servicio Social Educativo I, la realicé en el Instituto La Libertad, con niños que cursaban Cuarto grado de Educación Básica Primaria. Esta escuela se encuentra ubicada en el municipio de Bucaramanga, en la carrera 31 Nº 101-24 del barrio La Libertad, al sur de la ciudad y existen barrios como La Pedregosa, La Libertad, Diamante I, Caldas, entre otros, los cuales se benefician del trabajo de este Instituto. En general los estudiantes del Instituto La Libertad son hijos de empleados, obreros, celadores, carpinteros, auxiliares en diferentes ramas y conductores entre otros.

Mi trabajo con los estudiantes estuvo enfocado en la enseñanza del **mínimo común múltiplo y del máximo común divisor**, herramientas fundamentales para el estudio posterior de conceptos matemáticos. Durante el desarrollo de este trabajo, pude observar que los estudiantes estaban muy dispuestos al aprendizaje, aunque ellos tenían la concepción de que en la clase de matemáticas, el docente le daba la explicación de los procesos matemáticos que necesitaban para desarrollar un tema en particular y ellos a continuación, resolvían ejercicios muy parecidos a los que el docente utilizaba para explicar el tema para ser posteriormente evaluados de la misma forma.

La estrategia utilizada para enseñar los conceptos matemáticos ya mencionados, consistió en manipular herramientas –como el tablero de los “hermanos y los primos”- buscando que los estudiantes aprendieran los conceptos matemáticos mediante preguntas que salían a flote en el momento del desarrollo de la actividad.
La metodología utilizada en mi práctica cambió esa visión del estudio de las matemáticas en los estudiantes; ellos se aproximaron y se apropiaron de los conceptos fundamentales de **número primo, múltiplo de un número entero y divisor de un número**. De esta manera, los niños se sintieron protagonistas de su aprendizaje y aunque les exigía mucha más dedicación, los estudiantes estaban motivados y se esforzaban por realizar mejor las tareas propuestas.

A partir del éxito que obtuve en la práctica, medido por la motivación, el trabajo de los alumnos y la profundidad con que se generalizaron los significados de Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor, me di a la tarea de buscar trabajos de investigación de otros autores donde se utilizaran procesos de aprendizaje teniendo en cuenta el análisis que los estudiantes realizan para la conceptualización de la matemática.

Mediante diferentes charlas con otros licenciados en matemáticas y de lecturas recomendadas por ellos, empecé a observar que hay investigadores en Educación Matemática en el mundo, que han trabajado laboriosamente en esta perspectiva, como da Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) y que lo han llamado “Tareas de Investigación Matemática”.

Según Ponte (2003), en contextos de enseñanza, aprendizaje o formación, investigar no significa necesariamente lidiar con problemas en la frontera del conocimiento ni con problemas de gran dificultad. Significa, apenas, trabajar a partir de preguntas que nos interesen y que se presentan inicialmente confusas y que conseguimos clarificar y estudiar de modo organizado.

Bishop (2004), ve la enseñanza de las matemáticas en la clase como el control de la organización y la dinámica de la clase, para los propósitos de compartir y desarrollar el significado matemático y esta concepción le ha permitido enfocar el análisis en tres aspectos fundamentales como lo son: primero, **las actividades matemáticas**, aspecto con el que se busca enfatizar en el involucramiento del estudiante con las matemáticas y no la presentación del contenido por parte del profesor; a continuación de esto debe existir una **comunicación**, con la cual se busca enfatizar en el proceso de compartir significados; y por último, **la negociación**[2], aspecto en el que se busca enfatizar la asimetría de la relación profesor-alumno en el desarrollo de significados compartidos.

A raíz de la mejora de mi práctica como docente y de observar que podía existir una mayor apropiación del conocimiento matemático, fue de mi interés, trabajar en la construcción de significados matemáticos teniendo en cuenta este tipo de perspectiva lograda en mi Servicio Social Educativo II.

El interés en buscar que mis estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje mediante las tareas de investigación, me ha llevado a realizar la investigación en este campo; la investigación tiene en cuenta las bases teóricas de la Pedagogía Crítica y la dinámica intelectual de las Tareas de Investigación Matemática como perspectiva de aprendizaje. Dicho de otra forma, lo que busco en mis estudiantes por medio de este trabajo, es una actitud activa en el desarrollo de sus potencialidades matemáticas, así como la formación de personas capaces de analizar mejor, de comprender más conscientemente y de mejorar la motivación por su aprendizaje.

[2] Si se acepta que la comunicación tiene que ver con compartir significados, entonces la negociación es una interacción dirigida por metas, en la que los participantes buscan alcanzarlas. Este constructo entonces captura el necesario desequilibrio del poder implícito en la relación enseñanza aprendizaje, pero lo describe en forma tal que podemos ver alternativas a la simple imposición del conocimiento de parte del poderoso profesor. Bishop (2004)

Mi Servicio Social Educativo II fue realizado en la Fundación Universitaria Los Libertadores ubicada en la ciudad de Bogotá D.C[3]. Esta investigación fue elaborada con estudiantes de esta institución que cursaban el primer semestre en Ingeniería Aeronáutica e Industrial.

Estudiantes Matemáticas 0

El tema abordado para desarrollar las Tareas de Investigación Matemática fue el de Inecuaciones y Valor Absoluto en la materia de Matemáticas 0. Los docentes Marcos Alejo Sandoval y Magda Briggitte Villamil Rodríguez, miembros de esta institución, me dieron su apoyo incondicional en la investigación.

La perspectiva de "Tareas de Investigación Matemática" viene siendo trabajada por docentes investigadores como João Pedro da Ponte, Brunheira y Fonseca,

[3] Es necesario aclarar que, aunque inicialmente este proyecto de investigación surgió de la experiencia de la práctica de Servicio Social Educativo y Trabajo de grado I, finalmente, por motivos personales tuve que cambiar el lugar de residencia y trabajar en la Fundación Universitaria Los Libertadores, con estudiantes que cursaban primer semestre de ingeniería.

entre otros. Ellos tienen en cuenta las siguientes fases importantes para el desarrollo de la investigación por parte de los estudiantes,

1) Introducción de las tareas de investigación por parte del docente y planteamiento de preguntas
2) Desarrollo del trabajo de investigación por parte de los estudiantes, mediación y orientación del docente en el proceso de investigación.
3) Discusión final de los resultados encontrados por los estudiantes, realización de reflexiones, negociación y comprensión general de los conceptos necesarios para desarrollar la investigación.

Yo creo que siempre y cuando nuestra práctica docente esté enfocada en el desarrollo de actividades de pensamiento activo, donde el estudiante pueda llegar a concluir de forma analítica y racional diversas generalidades, donde pueda conjeturar, donde sea capaz de hacer su matemática, una matemática rica en pensamiento y creación, podemos hacer que la visión que tienen los estudiantes con las matemáticas cambie de modo radical. La perspectiva de "Tareas de Investigación Matemática" puede fortalecer en los estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos, en la medida en que ellos puedan comprender y discutir activamente los significados a los que se enfrentan.

Mediante trabajos individuales y cooperativos busqué relacionar las Tareas de Investigación desarrolladas en el aula de clase y el proceso que tuvieron los estudiantes con respecto a la comprensión y argumentación de los conceptos mencionados. De esta manera surgió la pregunta de mi investigación: ¿Cómo es la relación que se establece entre el análisis individual y colectivo de las tareas de investigación matemática que desarrollan los estudiantes –que están en primer semestre de ingeniería- y la comprensión de significados de Inecuaciones y Valor Absoluto? Para dar respuesta a la pregunta de investigación señalé el siguiente objetivo: Indagar y reflexionar sobre las relaciones que se establecen entre el análisis individual y colectivo de tareas de investigación matemática que desarrollan los estudiantes – que están en primer semestre de ingeniería- y la comprensión de significados matemáticos de Inecuaciones y Valor Absoluto.

El presente trabajo de investigación, está escrito en seis capítulos, los cuales paso a describir brevemente:

En el primer capítulo, "***Hablando de mis concepciones"***, describo algunas reflexiones sobre mis pensamientos acerca de la educación en Colombia, de sus fortalezas y debilidades, de mis concepciones como maestro de matemáticas y de mi experiencia en la labor docente. Es un capitulo enfocado en mis pensamientos sobre educación, sobre la ideología que me fundamenta y sobre la responsabilidad crítica de mi profesión.

El segundo capítulo, "***Tareas de Investigación Matemática: una perspectiva en Educación Matemática"***, se refiere a las bases teóricas en las cuales me he fundamentado para realizar esta investigación.

Posteriormente, en un tercer capítulo llamado ***"Protagonistas de la investigación*"**, se encuentra una descripción de los estudiantes protagonistas de la investigación.

En el cuarto capítulo, ***"Organización y metodología",*** me refiero a la metodología que se utilizó en la investigación, que es de tipo cualitativo con un abordaje fenomenológico, específicamente un estudio de casos, el cual describe también la forma en que las actividades fueron organizadas para su eventual desarrollo.

El quinto capítulo, ***"Análisis de los resultados",*** presento las categorías que emergieron de las observaciones realizadas, las entrevistas a los estudiantes, el proceso de ellos en el desarrollo de las actividades y los resultados que obtuvieron de los estudiantes con respecto al desarrollo de las actividades de investigación. En este capítulo se tiene en cuenta las bases teóricas que fundamentan cada una de las categorías y mi posición reflexiva.

El último capítulo ***"Conclusiones y Reflexiones finales"***, presento las conclusiones producto del análisis de las categorías y describo algunas reflexiones finales sobre el desarrollo de las Tareas de Investigación Matemática.

1. TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA: UNA PERSPECTIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En contextos de enseñanza aprendizaje,
investigar no significa necesariamente
lidiar con problemas muy sofisticados
en la frontera del conocimiento.
Significa, tan solo,
que formulamos preguntas que nos interesen,
para las cuales no tenemos una respuesta pronta,
y procuramos esa respuesta
de modo en cuanto sea posible
y riguroso.
(Ponte, 2003, p. 9)

Las bases teóricas con que se fundamenta esta investigación, son las Tareas de Investigación Matemática; una perspectiva de Educación Matemática que se ha trabajado muy concienzudamente en países como Portugal, lugar en dónde se han presentado un buen número de investigaciones que trabajan con esta perspectiva en el aula de clase.

Investigar en el aula de clase, es dotar a los alumnos de herramientas teóricas para que pueda desempeñar un buen papel en la búsqueda de conocimiento. El alumno estará motivado a conocer lo que él no sabe; por medio de un estudio analítico de los conceptos matemáticos, los educandos pueden motivarse a la creación de interrogantes que ayudarán a explorar desde un punto de vista más riguroso, para que de esta manera ellos puedan llegar a realizar conjeturas que posteriormente serán probadas y por último, él estará capacitado para exponerlas frente a sus compañeros y al profesor. El estudiante además de ser un especialista en la resolución de ejercicios como los de inecuaciones y valor absoluto, se verá abocado a buscar generalizaciones y comprender de una mejor forma el tema.

Según Ponte (2003), el alumno es llamado a actuar como un matemático, no sólo en la formulación de preguntas y conjeturas, y en la realización de pruebas y refutaciones, sino también, en la presentación de resultados, en la discusión y en la argumentación con el profesor.

Teniendo en cuenta lo anteriormente escrito, expondré algunas de las ideas sobre investigación matemática vista por los matemáticos, para llegar hasta la Investigación Matemática en el aula de clase.

Según Ponte (2003), para los matemáticos, investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o desconocidos, procurando identificar las respectivas propiedades, de acuerdo a esto, el trabajo es descubrir mediante el análisis riguroso de una pregunta, respuestas que justifiquen en su totalidad los interrogantes planteados; es menos relevante el resultado al que se llegue, por el contrario, lo relevante son los procesos que condujeron a estos resultados. En una tarea de investigación matemática, hay total autonomía en la forma con que se aborde un problema planteado, es por eso, que en muchas ocasiones, se llegan a resultados de los cuales no se tenía en mente.

Algunos desarrollos de tareas de investigación llegan a contradecir lo que se pensaba, y sus procesos pueden ser interesantes en la realización de otros problemas.

Poncairé[4], citado por Ponte (2003), nos dejó una interesante descripción del proceso de investigación que realizó para demostrar la imposibilidad de la existencia de cierto tipo de funciones con cierto tipo de características y terminó por demostrar lo contrario, o sea, que las funciones sí existían y que posteriormente las llamó funciones fuchsianas.

Según su relato, esa investigación se desarrolló en tres fases bien distintas: una primera fase de compilación, de información y experimentación, si producía resultados palpables, seguía una fase de iluminación súbita y, finalmente, una tercera fase de sistematización y verificación de los resultados.

Poncairé en su relato hace la siguiente descripción del proceso que lo llevó a esa demostración:

> *Hacía ya quince días que me esforzaba por demostrar que no podía existir ninguna función análoga, las que después iba a llamar funciones fuchsianas. Estaba, entonces, en la más completa ignorancia; me sentaba todos los días en la misma mesa de trabajo y allí permanecía una o dos horas ensayando un gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una tarde, en contra de mi costumbre, tomé un café negro y no podía dormirme; las ideas surgían en desorden, sentía que se me escapaban, hasta que dos de ellas, por así decir, se encajaban formando una combinación estable. De madrugaba tenía establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las que se derivan de la serie hipergeométrica. No tuve más que redactar los resultados, lo que apenas me llevó algunas horas.*
>
> *Quise, a continuación, representar estas funciones por el cociente de dos series: esta idea fue completamente consciente y deliberada, era guiado por la analogía de las funciones elípticas. Me preguntaba a mi mismo cuales serían las propiedades de estas series, si es que llamé tetafuchsianas.*
>
> (Poncairé, citado por Ponte 2003, p. 14)

[4] Henri Poincaré (1854-1912), se destacó por sus trabajos en análisis infinitesimal, siendo también considerado el fundador de la Topología.

Lo más importante que relata Poncairé, es la actividad creadora inconsciente que lo llevó a descubrir esas funciones, llevado por la motivación de un interrogante contradictorio.

Investigar se convierte así, en la búsqueda de la verdad, fundamentada en razonamientos claros y comprensibles. Desarrollar un espíritu investigador en los estudiantes es introducirlos en el campo del conocimiento donde ellos sean capaces de hacer matemática, de buscar una mejor comprensión de conceptos, de crear conjeturas con la posibilidad de probarlas, de generalizar y de ser protagonistas en el aprendizaje de las matemáticas.

Las tareas de investigación Matemática pueden ser un buen proceso de construcción de conocimientos, donde los estudiantes transformen la manera de estudiar matemáticas y cambien la visión que tienen de ellas.

De acuerdo a lo anterior, el matemático reconocido llamado Polya,[5] citado por Ponte (2003), dice que los alumnos pueden tener un gusto de la matemática para la construcción con trabajo creativo e independiente:

> *[Ellos pueden] generalizar a partir de observaciones de casos, [usar] argumentos inductivos, argumentos por analogía, reconocer o extraer un concepto matemático de una situación concreta. (Polya, citado por Ponte 2003, p. 16)*

Otro matemático, Ramos, citado por Ponte (2000, p. 6), hace una similitud entre el hacer matemáticas y aprender matemáticas, al respecto dice lo siguiente:

[5] George Polya (1887-1985) dejó importantes trabajos en numerosas áreas de la matemática. Es autor de varios libros dedicados a la resolución de problemas, entre los cuales el famoso libro How to solve it, traducido como el arte de resolver problemas.

Un matemático, como un pintor, un poeta o un músico es un constructor de ideas, formas, coros, palabras y sonidos. El criterio fundamental es la belleza. La capacidad más determinante es la sensibilidad y la capacidad de observación. Todo el proceso creativo pasa por una actitud inicial de observación y experimentación. ¿No será también en el aprendizaje?

(Ramos, citado por Ponte, 2000, p. 6)

De la misma forma, el matemático Hadamard[6], dice lo siguiente:

Entre el trabajo del alumno que tiene que resolver un problema de Geometría o de Álgebra y el trabajo de creación, puede decirse que existe apenas una diferencia de grado, una diferencia de nivel, teniendo ambos trabajos una naturaleza semejante.

(Hadamard, citado por Ponte, 2003, p. 16)

Como podemos darnos cuenta, las investigaciones matemáticas en el aula de clase pueden brindar herramientas valiosas para que los estudiantes exploren, analicen y comprendan conceptos matemáticos.

Podemos utilizar las perspectivas de las Tareas de Investigación Matemática para favorecer la creación en los estudiantes; investigando se descubren capacidades en los seres humanos y se llega a conocer de la mejor forma; según Ponte (2003), en la disciplina de la matemática como en cualquier otra disciplina escolar, el envolvimiento activo del alumno es una condición fundamental en el aprendizaje. El alumno aprende cuando moviliza sus recursos cognitivos y afectivos con vista a alcanzar un objetivo. Ese es precisamente, uno de los aspectos fuertes de las investigaciones. Al requerir la participación del alumno en la formulación de interrogantes a estudiar, esa actividad tiende a favorecer su desenvolvimiento en el aprendizaje.

[6] Jacques Hadamard (1865-1963), matemático francés cuyo resultado más importante fue el teorema de los números primos, demostrado en 1896; fue también uno de los matemáticos que más han contribuido en el desarrollo del análisis infinitesimal.

Yo pienso que podemos hacer que la visión que tienen los estudiantes con las matemáticas puede cambiar, siempre y cuando nuestra práctica docente esté enfocada en el desarrollo de actividades de pensamiento activo, donde él pueda llegar a concluir de forma analítica y racional diversas generalidades, donde pueda conjeturar, donde sea capaz de hacer su matemática, una matemática rica en pensamiento y creación. Si logramos con las tareas de investigación que los estudiantes sean capaces de analizar, imaginar y pensar, entonces, estaremos formando personas sociales, críticas, fortalecidas y con destrezas, personas con otra concepción acerca de su estudio y sus proyectos como próximos profesionales.

Según Ponte (2003), la realización de una investigación matemática envuelve cuatro fases importantes:

i) Esta abarca el reconocimiento de situaciones, su exploración preliminar y la formulación de preguntas.
ii) Se refiere al proceso de reformulación de conjeturas.
iii) Incluye la realización de pruebas o eventual refinamiento de las conjeturas.
iv) Esta última se refiere a la argumentación, a la demostración y a la evaluación del trabajo realizado. Es un trabajo de formulación de preguntas, elaboración de conjeturas y pruebas; refinamiento de preguntas, conjeturas y demostraciones, y comunicación de los resultados en la clase de matemáticas.

El alumno investigador se preocupa por la comprensión de los conceptos necesarios para responder alguna pregunta a desarrollar. Según Ponte (2003), Una actividad de investigación en el aula, se desenvuelve habitualmente en tres fases:

i) Introducción de la tarea, el profesor hace la propuesta de investigación al grupo oralmente o por escrito.
ii) Realización de la investigación individualmente, por pequeños grupos o con todo el grupo.

iii) Discusión de los resultados, en que sus alumnos relatan a sus colegas el trabajo realizado.

En el aula de clase, las Tareas de Investigación Matemática son un complemento importante para la mejor comprensión y generalización de conceptos matemáticos; no se trata de cambiar el currículo hacia el desarrollo único de Tareas de Investigación para el estudio de todos los temas de matemáticas; el maestro, también puede utilizar herramientas de enseñanza que son paralelas a la investigación en los estudiantes. Él puede trabajar con ejercicios, resolución de problemas, desarrollo de talleres y tareas de investigación matemática.

El maestro debe observar cómo el estudiante está asimilando el proceso de volverse investigador; para muchos educandos puede ser complejo el paso de cambiar la forma de aprender matemáticas con un modelo tradicional, a un modelo de la realización de las tareas de investigación. El maestro debe facilitarle al estudiante la transición hacia este nuevo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es por eso, que me parece importante que el estudiante cambie la visión de las matemáticas, se convierta en un investigador de acuerdo a sus necesidades cognitivas y se motive por aprender matemáticas. El maestro está llamado a liberar a los estudiantes de la forma mecanicista y pasiva que tienen ellos con respecto al aprendizaje de concepto, según Freire (1970), un educador humanista, revolucionario, debe tener en cuenta en su acción, al identificarse, desde luego, con la de los educandos, debe orientarse en el sentido de la liberación de ambos. En el sentido del pensamiento auténtico y no en el de la donación, el de la entrega de conocimientos. Su acción debe estar empapada de una profunda creencia en los hombres. Creencia en su poder creador.

Es importante comprender que en esta investigación se relacionaron las Tareas de Investigación Matemática para favorecer el aprendizaje activo de las matemáticas, las estrategias del maestro para motivar al estudiante en el aprendizaje, y la visión humanista y liberadora que tiene el acto de estudiar en los seres humanos. Según mi visión, son tres factores importantes y necesarios que influyen en el verdadero trabajo de un maestro, un maestro revolucionario, que intenta liberar a los estudiantes de una educación pasiva, bancaria, mecanicista, y que siempre trata de humanizar, de dar posibilidades para que todos los seres humanos sean protagonistas de su conocimiento de forma crítica.

> *La educación que se impone a quienes verdaderamente se comprometen con la liberación no puede basarse en una comprensión de los hombres como seres" vacíos" a quien el mundo "llena" con contenidos, no puede basarse en una consciencia especializada, mecánicamente dividida, sino en los hombres como "cuerpos conscientes" y en la conciencia como conciencia intencionada al mundo. No puede ser la del depósito de contenidos, sino la de la Problematización de los hombres en sus relaciones con el mundo.*
> *(Freire, 1970, p. 60)*

2. PROTAGONISTAS DE LA INVESTIGACIÓN

Como lo había mencionado anteriormente la investigación la desarrollé en la Fundación Universitaria Los Libertadores, con estudiantes que se encontraban en primer semestre de ingeniería. Estos estudiantes tenían una edad promedio de 19 años, de los cuales todos trabajaban.

A continuación paso a describir brevemente los estudiantes que decidieron hacer parte del proceso de investigación[7]:

► MARIBEL ALEXANDRA MAHECHA CIFUENTES

Seria

Responsable

Reservada

► JEISSON STEVEN AMADO QUIROGA

Responsable

Serio

Curioso

[7] Los nombres de los estudiantes que participaron en la investigación son reales.

► PABLO ENRIQUE FLOREZ PEREZ

Participativo

Responsable

Serio

► DIEGO ANDRES LOAIZA OVIEDO

Alegre

Participativo

Creativo

3. ORGANIZACIÓN Y METODOLOGÍA

La metodología que se adoptó en esta investigación fue de tipo cualitativo y fenomenológico[8], lo que me permitió acercarme más global y comprensivamente a la realidad de los estudiantes. Específicamente la metodología fue un estudio de caso, que se ajusta a los objetivos y a la información que se pretendía recoger. La elección de este diseño se hizo por el deseo de abordar con profundidad los deferentes análisis matemáticos realizados por los estudiantes, intereses, motivaciones, entre otros; con la herramienta teórica de las Tareas de Investigación Matemática. Este diseño también se tuvo en cuenta, debido al tiempo relativamente corto que se tenía para abordar solo este tema.

Para favorecer el análisis de la investigación escogí dos grupos de estudio (cada uno de tres estudiantes), de los cuales, cuatro estudiantes fueron mi foco de estudio. — Maribel, Jeisson, Pablo y Diego — Los datos que se pudieron obtener de estos estudiantes, fueron analizados mediante categorías que emergieron del estudio de la información que se recogió, a través de la triangulación[9], es decir, relacionando y analizando los datos obtenidos, mis observaciones y las lecturas hechas del tema.

Los instrumentos que implementé para la recolección de la información fueron:

- **Un diario de campo**: en donde se registraron, interpretaron y analizaron las observaciones obtenidas de los estudiantes y el desarrollo de las actividades realizadas (observación no participante).

- **Trabajo escrito**: el cual fue tenido en cuenta, con el fin de escoger a los cuatro estudiantes que participaron en esta investigación.

---

[8] La metodología de tipo fenomenológico se confía en el proceso lógico de la interpretación; en la capacidad de reflexión del investigador sobre el objeto o fenómeno de estudio (Martínez, 2006).

[9] La triangulación es una técnica de análisis, que impide que se acepten fácilmente la validez de nuestras primeras impresiones, ampliando el ámbito, la densidad y la claridad de los constructos desarrollados a lo largo de la investigación (Goetz & LeCompte, 1988).

- **Tres encuestas**: las cuales se realizaron a los estudiantes en diferentes momentos de la investigación.

- **Actividad 1**: esta actividad privilegiaba el trabajo en pequeños grupos cooperativos (tres estudiantes).

- **Actividad 2**: la cuál consideraba el trabajo individual de los estudiantes.

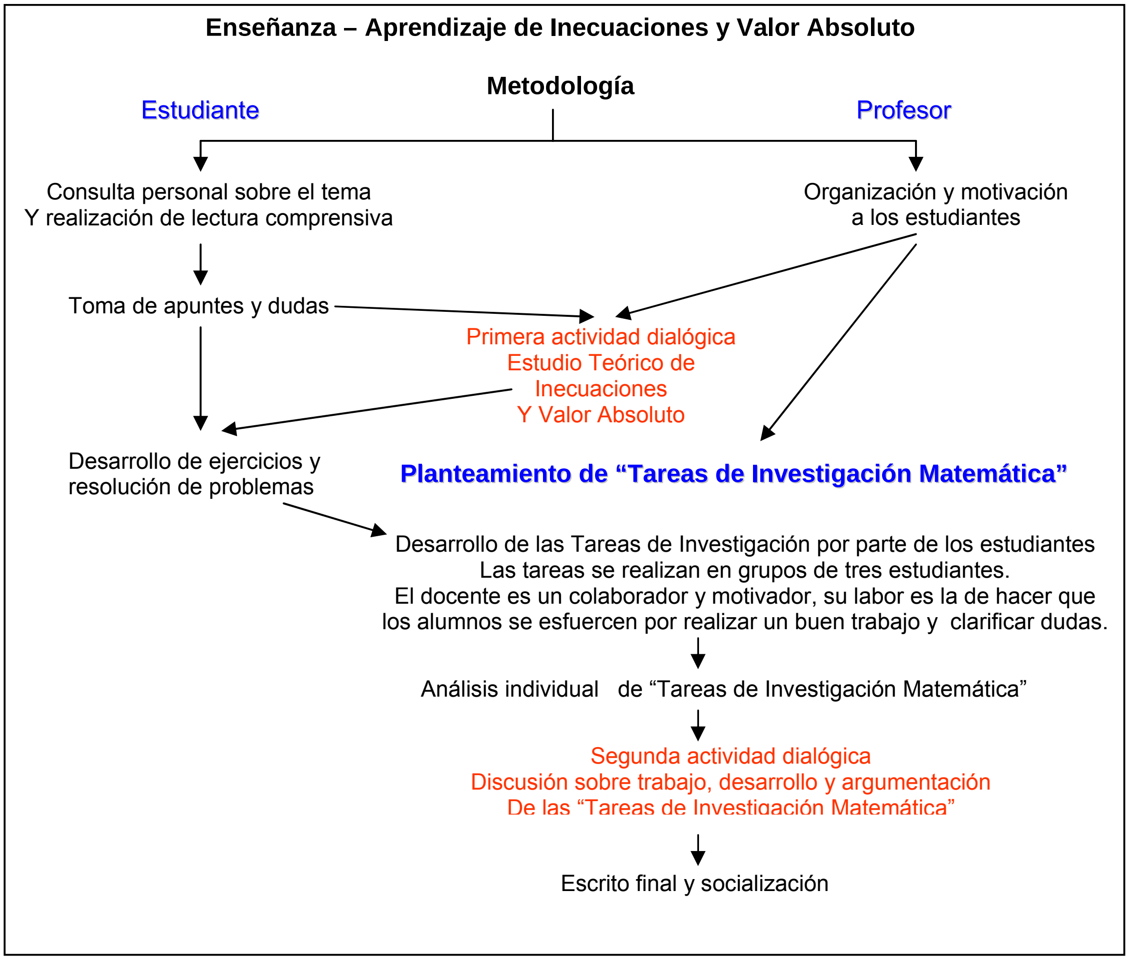
- **Entrevista**: donde los estudiantes evaluaron las tareas de investigación.

- **Actividad 3**: escrito final que permitió ver los resultados finales obtenidos por los estudiantes.

Para el desarrollo del trabajo de campo fue necesario hacer una selección de los estudiantes con los cuales desarrollaría la experiencia. La selección la hice por medio de un trabajo escrito, donde los estudiantes consignaron lo entendido acerca del tema de inecuaciones y valor absoluto después de haber realizado una lectura previa a este tema, para esta selección también tuve en cuenta las observaciones obtenidas durante el desarrollo de algunas clases.

Lo que busqué con el desarrollo de tareas de investigación matemática fue que los estudiantes aprendieran conceptos matemáticos a través actividades que fortalecieran en ellos su espíritu investigativo; pero para poder realizar esta tarea fue necesario organizar la clase de matemáticas de manera que los alumnos no empezaran a divagar sobre la investigación.

La siguiente figura muestra la organización que se utilizó para el desarrollo del tema de inecuaciones y valor absoluto:



El trabajo en el aula de clase fue realizado y organizado con la docente Magda Briggitte Villamil Rodríguez, titular de la materia Matemáticas 0. La organización del trabajo realizado se dio de la siguiente manera:

Sesión 1. Martes 25 de Marzo (2 horas)

1. EXPLORACIÓN ABIERTA:

Este día, la docente explicó la metodología que se desarrollaría durante la clase; además realizó mi presentación en el curso y cuál sería mi participación en el desarrollo de las actividades.

Antes de iniciar las tareas de investigación con los estudiantes, se dio la autonomía a que ellos exploraran de manera abierta el tema de inecuaciones y valor absoluto. Para esto, los estudiantes realizaron una lectura del tema mencionado, retomando los significados de intervalos, gráfica de intervalos específicos y axiomas de orden, temas que habían visto con su anterior profesor[10], ellos tuvieron que explorar el tema de manera responsable para que el estudio posterior con las tareas de investigación se diera de la mejor manera.

Mediante la exploración abierta de la lectura, los estudiantes obtuvieron un presaber fundamental que se requería para que hubiese una participación más activa por parte de ellos, esto en el momento en que la docente daba la explicación del tema y aclaraba algunas dudas.

En esta sesión, se notó que los estudiantes leyeron muy rápidamente, muchos de ellos no entendieron lo que habían leído o en algunos casos simplemente no realizaron la actividad. Hacer que los estudiantes leyeran, comprendieran y

[10] Es importante aclarar que por motivos ajenos, la docente no trabajó con estos estudiantes desde el inicio del semestre, sino que asumió este curso aproximadamente dos meses después.

redactaran un escrito fue muy complejo, y aún más, lograr que participaran activamente en el desarrollo de la clase.

Hoy en día, es el docente quien inicia la clase, da una definición, realiza algunos ejercicios, aclara algunas dudas y da por terminada la clase. No les damos la oportunidad a nuestros estudiantes a que desarrollen la capacidad de análisis, a que adopten un papel activo y de liderazgo en todo aquello que aprenden.

Freire (1996), argumenta que quien se está formando, desde el inicio debe asumirse como sujeto de la producción del saber; para que de esta manera sea capaz de aumentar su curiosidad por crear y aprender, por esto mismo, es el profesor quien debe respetar los saberes con los que llegan los educandos, es él quien debe discutir con aquellos, la razón de ser de esos saberes en relación con la enseñanza de los contenidos; porque como lo dice Freire (1996), no hay entendimiento que no sea comunicado e intercomunicado y que no se funda en la capacidad de diálogo.

En la primera sesión se observó que los alumnos se encontraban desorientados y en algunos casos poco atraídos por la forma como se había empezado a desarrollar el tema.

Sesión 2. Miércoles 26 de marzo (2 horas)

2. TODOS DIALOGAMOS Y COMPRENDEMOS MÁS (Parte 1)

En este día, la docente realizó una introducción acerca del papel de la matemática en el desarrollo de las potencialidades de los profesionales en ingeniería; posteriormente, planteó el siguiente interrogante: ¿para qué quiero ser ingeniero?

Veamos algunas de sus respuestas:

- ***Yo quiero ser ingeniero para ganar más plata.***
- ***Quiero ser más importante***
- ***Quiero trabajar en una multinacional***
- ***Quiero pertenecer a la fuerza aérea para ser más estable***

Al observar esto, la docente hizo énfasis en el papel que debe desempeñar un ingeniero en Colombia, que más que una oportunidad para tener riquezas materiales, también es la oportunidad para que las personas tengan un proyecto de vida, tengan un buen futuro que ofrecer a su familia y su comunidad, es la oportunidad que tiene cada uno de ellos de humanizarse y ayudar en la construcción de un mejor país.

Seguidamente, la docente planteó algunos interrogantes sobre intervalos; con estos interrogantes se buscaba que los estudiantes dieran su punto de vista y reforzaran su comprensión acerca del tema leído.
La docente empezó a hacer un bosquejo del tema de inecuaciones, a medida que los alumnos participaban, ella realizaba un resumen de lo más importante.
En esta sesión se desarrollo parte del tema de inecuaciones y se propuso como actividad leer acerca de valor absoluto.

Sesión 3 y sesión 4. Sábado 29 de marzo y Martes 1 de abril (2 horas)

3. TODOS DIALOGAMOS Y COMPRENDEMOS MÁS (Parte 2)

En esta sesión la profesora realizó algunos ejercicios acerca de algunas inecuaciones sencillas y efectuó un análisis sobre el valor absoluto, su gráfica e inecuaciones donde se involucraba el valor absoluto.

Pude notar el inconveniente que acarreó para los alumnos la definición de valor absoluto; les resultó difícil interpretar una definición funcional “por partes” cuando en el contenido del curso el tema de funciones se abordaba al final del semestre.

Veamos la definición: $|x| = \begin{cases} x, si, x \geq 0 \\ -x, si, x < 0 \end{cases}$

En la segunda parte de la definición "-x si x < 0", el signo menos delante de la x induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas al tener en cuenta que x < 0. Luego resulta difícil aceptar que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero.

Sesión 5, Sesión 6. Miércoles 2 de abril y sábado 5 de abril (2 horas)

4. DESARROLLO DE LA TAREA DE INVESTIGACIÓN (Parte 1)

TAREAS DE INVESTIGACIÓN

Una vez que los estudiantes estaban familiarizados con el tema de inecuaciones y valor absoluto, se dio inicio a la actividad de investigación, la cual buscaba que cada uno de ellos desarrollara la capacidad para analizar problemas desde la visión de un investigador. Encontrar algún error en el ejercicio, escribir la justificación matemática de procesos matemáticos, saber comprender la información de un problema, utilizar propiedades matemáticas, saber escribir procesos matemáticos y aprender a generalizar utilizando diferentes herramientas como la gráfica del valor absoluto y sus propiedades.

Esta tarea le brindó a los estudiantes ciertas instrucciones para que desarrollarán algunos ejercicios con procedimientos determinados (punto 1, 2,5 y 6), también la opción para que abordaran las situaciones planteadas por métodos propios, aplicando diversos criterios de solución en donde era necesario asignarle significado a la información obtenida (punto 3,4 y 7).

A continuación se presenta la actividad de investigación que los estudiantes desarrollaron en grupos de tres estudiantes, con el acompañamiento de la docente y la ayuda de algunos textos y apuntes[11]:

PRIMER PUNTO: En busca del error

1. EN BUSCA DEL ERROR

Comprendamos el siguiente análisis, teniendo en cuenta las propiedades de los números Reales, y al frente de cada proceso matemático escriba la operación utilizada.

PROCESO MATEMÁTICO		*ANÁLISIS Y OPERACIONES*
1. Supongamos que a = b		$a - b = \boxed{}$
2. a.a = b.b		
3. a.a+(a.a-2ab) = ab+(a.a-2ab)		
4. 2(a.a)-2ab = a.a-ab		
5. 2a.(a-b) = a.(a-b)		
6. 2a = a		
7. 2 = 1		

¿Cree usted que 2=1?

¿Por qué sucede esto?

¿Encuentra algún error en los procesos?

En este punto, se busca que el estudiante analice un conjunto de procesos que conducen finalmente a una conclusión errada; se parte de la suposición de que a = b y luego de seis procesos matemáticos se concluye que 2 = 1. El estudiante debe encontrar el error implícito en alguna operación matemática incorrecta; al frente de cada operación existe una columna donde el alumno debe escribir la operación que se utiliza en ese proceso matemático.

Para acrecentar la capacidad de argumentación y análisis, se propone después del problema algunas preguntas que pueden ser obvias, pero que hacen que el

[11] La actividad completa se presenta en los anexos.

estudiante justifique su análisis y escriba matemáticamente el resultado. En la solución de este punto se observó dificultad en justificar cada proceso realizado, los estudiantes sabían con anterioridad que en estos procesos había un error, luego sencillamente asignaron valores particulares a los términos a y b.

SEGUNDO PUNTO: Dos soluciones de una misma desigualdad

2. DOS SOLUCIONES DE UNA MISMA DESIGUALDAD

A continuación presentamos dos soluciones de la desigualdad $\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$

DESARROLLO 1	DESARROLLO 2
$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$	$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$
$\Longrightarrow \frac{4-4x+8x}{x+1} \geq 3$	$\Longrightarrow \frac{4-4x+8x}{x+1} \geq 3$
$\Longrightarrow 4+4x \geq 3(x+1)$	$\Longrightarrow \frac{4+4x}{x+1} \geq 3$
$\Longrightarrow 4x+4 \geq 3x+3$	$\Longrightarrow \frac{4(x+1)}{x+1} \geq 3$
$\Longrightarrow 4x-3x \geq 3-4$	
$\Longrightarrow x \geq -1$ Intervalo Solución $[-1,\infty)$	$\Longrightarrow 4 \geq 3$ Intervalo Solución $(-\infty,\infty)$

Este punto presenta dos desarrollos de la inecuación.

$$\boxed{\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3},$$

los desarrollos tienen diferente conjunto solución, lo que lleva al alumno a pensar que por lo menos alguno de ellos está errado; lo que se pretende es que el estudiante analice y comprenda mejor los conceptos de inecuaciones a través de la búsqueda de errores. Cuando el estudiante ha analizado los desarrollos y ha encontrado algún error, pasa a resolver una serie de interrogantes que complementan la actividad indagadora y clarifica significados matemáticos.

a) Prueba los intervalos solución para cada uno de los desarrollos de la desigualdad anterior, teniendo en cuenta los siguientes valores de x:
- x=0
- x=-1
- x=10
- x=-100
- x=-78/4

b) ¿Qué puede observar de los resultados obtenidos anteriormente con respecto a los dos desarrollos de la desigualdad?

c) ¿Por qué los procesos realizados en los dos desarrollos de la anterior desigualdad no arrojan el mismo intervalo solución?, ¿crees que pueden haber dos diferentes respuestas al desarrollar una desigualdad? Analiza y explica.

En el desarrollo de este segundo punto, los estudiantes no probaron los valores de x en la desigualdad dada para verificar el desarrollo acertado (si lo había), simplemente verificaron directamente en los dos intervalos solución si estos valores pertenecían.

Luego de que el estudiante analiza los dos desarrollos de la misma desigualdad, debe responder unos interrogantes posteriores que complementan la búsqueda del error; Los estudiantes deben argumentar sus puntos de vista y sus resultados.
Fue muy complejo para los estudiantes interpretar lo que decía el enunciado y dar una respuesta acertada.

TERCER Y CUARTO PUNTO

3. Determinación de niveles terapéuticos mínimos:

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración sanguínea debe ser mayor que cierto valor, que se llama nivel terapéutico mínimo. Según la concentración C de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión está dada por

$$C=20t/(t^2+4)$$

Si el nivel terapéutico mínimo es de 4, indica en que tiempo se rebasa este nivel **(C >4)**

En el tercer punto, se presenta una situación la cual busca el planteamiento de una desigualdad y su posterior solución; teniendo en cuenta que el denominador de la ecuación que brinda el problema es un número positivo, me proponía observar si los estudiantes tenían en cuenta esto para abordar el problema de una manera diferente.

4. Propagación del salmón:

Para una población particular de salmones, la relación entre el número *S* de ponedoras y el número *R* de hijos que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula R= 4500 S / S + 500.
¿En qué condiciones R>S?

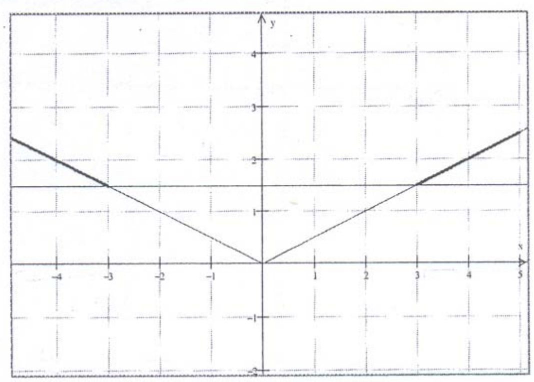
En cuanto al desarrollo del cuarto punto, se pretende observar los procesos algebraicos que siguen los estudiantes en el desarrollo de una inecuación que implica el manejo de operaciones básicas en los reales y la interpretación de los datos obtenidos teniendo en cuenta el contexto que brinda la situación.

Con la tercera y cuarta situación problema se pudieron observar las dificultades para interpretar matemáticamente lo que estaba escrito en lenguaje natural.

Hubo inconvenientes con el planteamiento de la desigualdad y el desarrollo algebraico de la misma. No existe destreza en el manejo de las operaciones algebraicas básicas.

QUINTO PUNTO

5. La gráfica que se muestra a continuación se define de la siguiente forma:
Líneas oblicuas: para $x>0$, se define como $x/2$
Para $x<0$, se define como $-x/2$
Línea horizontal: se define como $3/2$ ó 1.5



a) Determine la desigualdad que se representa en la gráfica (parte oscura).

b) Muestre en la gráfica, el intervalo solución a la desigualdad dada.

c) Diga cuál es el intervalo solución.

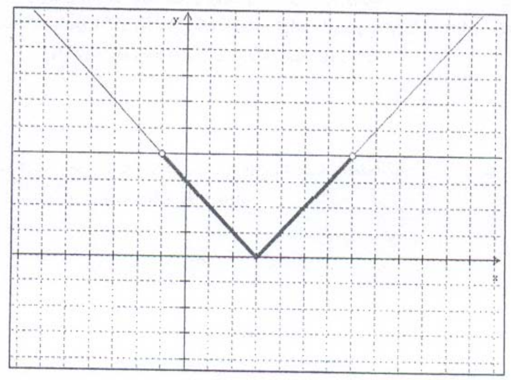
d) Plantea la desigualdad, resuélvela aplicando las propiedades vistas en clase y corrobore el resultado del intervalo solución que se dio en el punto anterior.

En este punto se busca que el estudiante realice un análisis gráfico de la situación, relacionando la solución que se obtiene de esta gráfica y el método algebraico que normalmente utiliza para solucionar inecuaciones.

A pesar de estar definida la gráfica, los estudiantes presentaron inconvenientes en determinar la inecuación que se presentaba gráficamente y en entender lo que se pedía en el literal c).

SEXTO PUNTO

6. Teniendo en cuenta la gráfica que se muestra a continuación



a) Cómo se define la gráfica

b) Determine la desigualdad que representa la gráfica

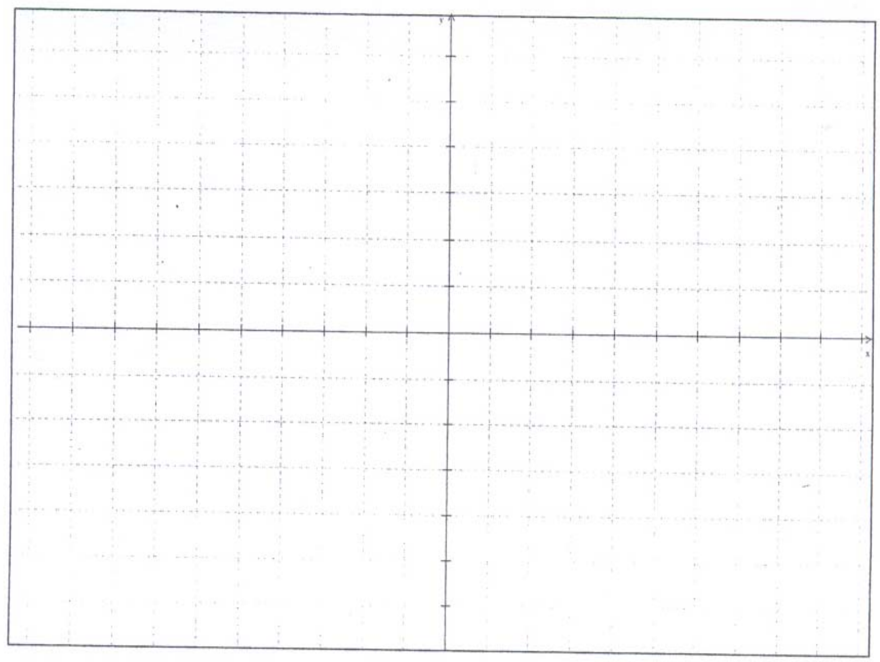
c) Plantea la desigualdad, resuélvela aplicando las propiedades vistas en clase y corrobore el resultado del intervalo solución que se dio en el punto anterior.

En este punto se pide que los estudiantes definan la gráfica de un valor absoluto que se encuentra trasladado tres unidades hacia la derecha y resuelvan la inecuación que se representa en la gráfica.

La mayoría de los estudiantes tenían claro que la gráfica hacía referencia a un valor absoluto, pero se presentaron dificultades en el planteamiento de la desigualdad.

SÉPTIMO PUNTO

7. Represente gráficamente $|x-a|>b$, donde a y b son números reales, y determine el intervalo solución en término de a y b.



Para el desarrollo del séptimo punto, es necesario tener en cuenta el desarrollo de los puntos 5 y 6, porque su gráfica es un valor absoluto, pero trasladado a unidades hacia la derecha, tal y como se plantea en el punto inmediatamente anterior.

Para los estudiantes fue complejo representar gráficamente la desigualdad planteada, y por consiguiente, determinar el intervalo solución; esto debido a que se trataba de valores generales (a y b); por tal motivo, algunos estudiantes intentaron dar una solución, pero asignándole valores particulares a los términos a y b.

Sesión 7. Martes 8 de abril (2 horas)

5. DESARROLLO INDIVIDUAL DE LA TAREA DE INVESTIGACIÓN[12]

Después de que los estudiantes realizaron el trabajo en grupo de tres personas, era importante que ellos realizaran un análisis individual, para fortalecer la comprensión de significados matemáticos; como es bien sabido, el trabajo en grupo en algunas ocasiones puede limitar el análisis en algunos estudiantes.

Sesión 8. Miércoles 9 de abril (2 horas)

6. DISCUSIÓN Y ESCRITO FINAL

Para consolidar la comprensión de los significados matemáticos mediante las tareas de investigación, fue necesario plantear una discusión donde se pudiera reflexionar acerca de los resultados arrojados en el desarrollo de la actividad grupal e individual; posterior a esto, fue importante que los estudiantes elaboraran un escrito acerca del tema de inecuaciones y valor absoluto.

[12] La tarea de investigación que se utilizó para observar el análisis individual de los cuatro estudiantes fue la misma; sin embargo, se puede proponer otro tipo de actividad para que cada estudiante desarrolle.

5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

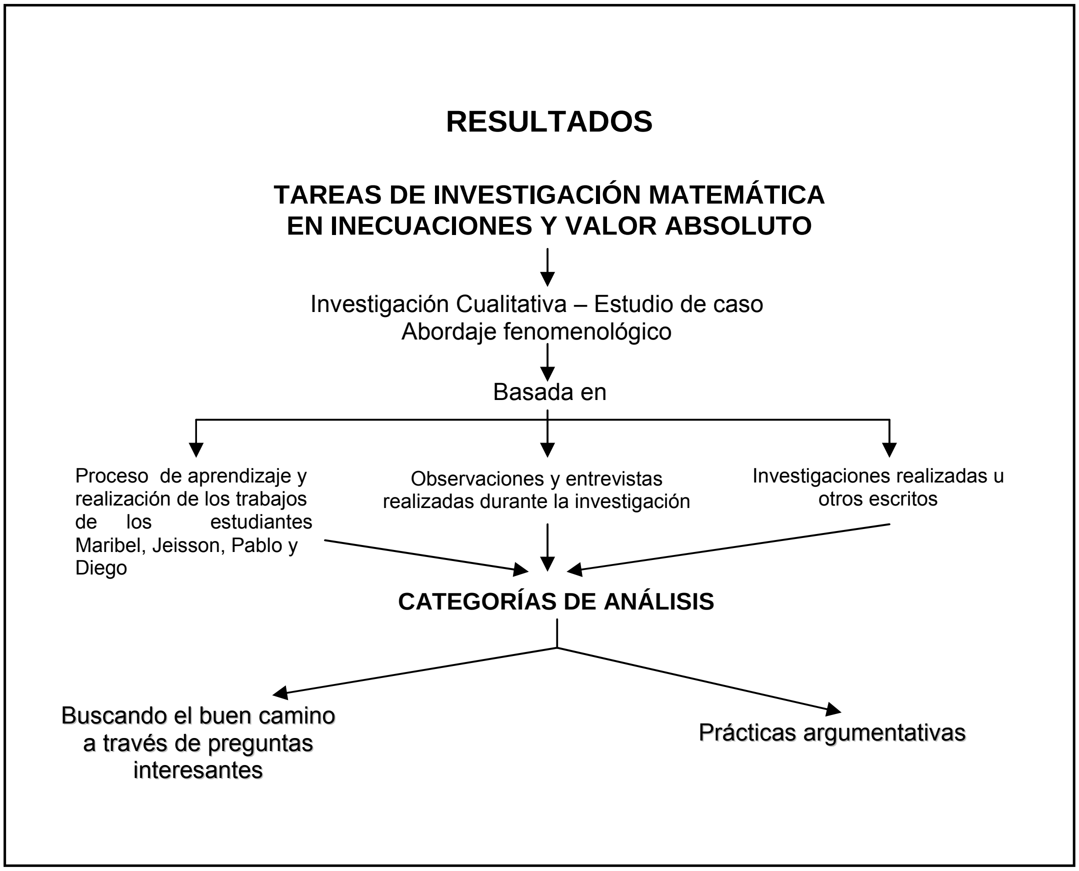
Los datos obtenidos de los estudiantes se analizaron mediante categorías que emergieron del estudio de la información que se recogió, a través de la triangulación, es decir, relacionando y analizando los datos obtenidos, mis observaciones y las lecturas hechas del tema.

Las categorías emergieron en el aula de clase, teniendo en cuenta los procesos que los estudiantes utilizaron para comprender un problema, la forma en que ellos analizaron las tareas, aún cuando no se les exigía el sólo resultado, también el entusiasmo que los alumnos expresaron.

Todo esto, me llevó a llamar la primera categoría "*Buscando el buen camino a través de preguntas interesantes*".

Con respecto al desarrollo de procesos matemáticos exigidos en las tareas de investigación matemática, fue notable el intento de los alumnos por justificar su desempeño y sus resultados, de aquí surgió la segunda categoría: "*Prácticas argumentativas"*.

En la siguiente figura se muestra cómo se desarrolló esta investigación y de qué forma se analizaron los datos.



5.1 BUSCANDO EL BUEN CAMINO A TRAVÉS DE PREGUNTAS INTERESANTES

La labor del educador está limitada muchas veces a cumplir con la transferencia de contenidos matemáticos, una vez realizado este proceso, él mismo es quien, a partir de su práctica, evalúa el conocimiento transferido en cada uno de sus estudiantes. El docente de hoy en día, guiado por las políticas educativas modernas está llamado a que mediante su práctica elabore un tipo de ser humano competente, necesario para introducirlo en el actual modelo y sistema económico.

En el documento llamado Fundamentación Conceptual – Área de Matemáticas- elaborado por el ICFES (Mayo 2007), en el cual se realiza un análisis de la nueva visión de la educación matemática en Colombia, su evaluación y la. importancia que deben tener las matemáticas en los estudiantes, se retoma lo siguiente:

> *"En la sociedad actual se reconoce muy especialmente que la cultura matemática resulta esencial para que los individuos tengan una vida productiva y con sentido, y para ello, se ha venido replanteando los fines de la educación matemática en los proyectos educativos. La escuela debe preparar a los alumnos para ser ciudadanos productivos y en consecuencia, además de que la formación matemática es un requisito esencial para el estudio de una amplia variedad de disciplinas, debe potenciar a los estudiantes con los conocimientos, destrezas y formas de razonamiento que requieren para su vida diaria…"*

Fomentar en el estudiante el desarrollo de potencialidades y habilidades que lo formen como un ser humano competente ante el mercado y el sistema productivo, es la función de la educación en Colombia, por eso es que se

observa la necesidad de formar una gran cantidad de técnicos y tecnólogos en áreas de producción y se observa el debilitamiento de la educación superior en áreas como las humanidades y Ciencias Básicas.
Es por esto, que comparto lo dicho por Zuleta (1995):

> "*La educación se ocupa de preparar estudiantes para intervenir en las distintas formas de trabajo productivo en los diversos sectores de la economía. Así, la eficacia de la educación para preparar los futuros obreros, contabilistas, ingenieros, médicos o administradores, se mide por las habilidades que el individuo adquiera para realizar tareas, funciones u oficios dentro de un aparato productivo o burocrático. Su eficacia depende también del dominio de determinadas técnicas, poco importa que la realización de las tareas productivas coincida con los proyectos o expectativas del hombre que las realiza. Se trata en esencia, de prepararlo como un empleado del capital, por lo tanto, lo importante no es que piense o no piense, sino que haya logrado manejar determinadas habilidades que permitan producir resultados determinados."*
>
> *(Zuleta, 1995, p. 30)*

En un país como el nuestro, donde se registran altos índices de desigualdad, donde no hay una verdadera inclusión de los colombianos a todos los servicios, y no existen oportunidades para un mejor futuro, con una apertura exponencial de la economía globalizante, con políticas neoliberales, es muy difícil que el estudiante se motive por aprender de una forma consciente y aplique este conocimiento en su diario vivir para mejorar sus aspiraciones. Hoy en día, es muy común ver que los seres humanos estudiemos con ambiciones económicas, luego, trabajemos donde más nos paguen y que al fin de cuentas nuestra felicidad solo dependa de lo que tengamos.

Zuleta (1995) afirma que:

> *Desde la primaria al estudiante se le educa en función de un examen, sin que la enseñanza y el saber le interesen o se relacionen con sus*

expectativas personales. Esta situación se repite una vez terminados los estudios ya que es lo que la persona encuentra en la vida. Cuando termina sus estudios, el individuo no sale a expresar sus inquietudes, sus tendencias o sus aspiraciones, sino a engancharse a un aparato o sistema burocrático que ya tiene su propio movimiento, y que le exige la realización de determinadas tareas o actividades sin preguntarle si está de acuerdo o no con los fines que se persiguen. En nuestro sistema educativo, la gente adquiere la disciplina desgraciada de hacer lo que no le interesa; de competir por una nota, de estudiar por miedo a perder el año; más adelante trabaja por miedo a perder el puesto. Desde la niñez el individuo aprende a estudiar por miedo, a resolver problemas que a él no le interesan. El capital ha puesto bajo su servicio y control la iniciativa, la creatividad y la voluntad de los individuos. Puede que el tipo de educación actual sea muy mala desde el punto de vista del conocimiento, pero es ideal para producir un "buen estudiante", al que no le interesa aprender pero sí sacar cinco, y que solo estudia por miedo a perder el año. Una educación así es ideal para el sistema y sus intereses."

(Zuleta, 1995, p. 33)

Debemos hacer que nuestros estudiantes tengan propósitos y metas que puedan cumplir; debemos motivar al estudiante con preguntas interesantes, donde él mismo pueda ver que es capaz de aprender y que ese conocimiento es útil en su vida. Con preguntas interesantes, el estudiante puede dar soluciones interesantes, puede esforzarse por responderlas; en ese momento él adquiere más habilidades y múltiples destrezas de razonamiento, esa es nuestra función; sólo así el estudiante podrá construir su propio conocimiento matemático, un conocimiento basado en trabajo, esfuerzo, razón y pensamiento.

En el momento en que se plantean en el aula de clase las tareas de investigación matemática en inecuaciones y valor absoluto pude observar que muchos de los estudiantes se encontraban preocupados y hasta nerviosos, principalmente porque el modo cualitativo con que se evaluaría la resolución de cada ejercicio, también porque se les exigía mejor razonamiento y mayor comprensión de los conceptos matemáticos trabajados; además, ellos se empezaron a dar cuenta que las matemáticas no se aprendían con el sólo manejo de fórmulas.

Cuando el educando interactúa con las tareas de investigación expresa que este tipo de estudio es más interesante porque realmente se puede aprender pensando, se pueden aclarar dudas y se tiene en cuenta al mismo estudiante en la construcción del saber.

Antes de iniciar con el desarrollo de las tareas de investigación, se les realizó una encuesta a todos los estudiantes sobre sus aspiraciones y gustos;

Maribel expresaba lo siguiente:

> *Yo deseo ser ingeniera de sistemas para poder mejorar mi trabajo, tener un sueldo mejor y poder cambiar el lugar donde vivo.*
>
> *(Entrevista, 29/03/08)*

Jeisson decía que:

> *Desea ser ingeniero Aeronáutico para poder entrar a la fuerza aérea y poder estar mucho mejor.*
>
> *(Entrevista, 29/03/08)*

Diego manifestaba:

> *Ser ingeniero Aeronáutico para poder conseguir un mejor trabajo.*
>
> *(Entrevista, 29/03/08)*

Pablo expresaba:

> *Yo deseo ser ingeniero Aeronáutico porque tengo posibilidades de trabajo en Avianca, Satena, Spain, entre otros.*
>
> *(Entrevista, 29/03/08)*

Como es posible observar, los estudiantes son programados mentalmente por los medios de comunicación, el Internet y el consumo, para ser una fuerza de trabajo dejando de lado intereses personales, la búsqueda de una mejor sociedad y hasta el amor por lo que les rodea.

La historia nos cuenta que en Grecia, cuna de la filosofía, impulsadora de las matemáticas occidentales, la astronomía y la música, existían escuelas donde sus alumnos tenían la vocación de amar lo que hacían, de pensar, de reflexionar; fue el mejor intento por institucionalizar la educación, que poco a poco se debilitó debido a factores religiosos, económicos y naturales; hoy vemos convertida a la educación en la primer herramienta de opresión; quien se más educa, tiene poder, tiene dinero y es autoridad y; los demás – ignorantes – servirán al poder; quien no estudia, no tiene oportunidades. A los poderosos del sistema les interesa que exista la ignorancia, el analfabetismo y los consumidores de clase media y baja; es la mejor forma de mantener el sistema; si existe alguien que piense, que incite al desorden o humanista, será catalogado como loco o retrógrado.

Comparto lo dicho por Zuleta:

> *"Todo hombre racional es un hombre desadaptado, porque es un hombre que pregunta. Por el contrario, el hombre adaptado es un hombre que obedece. El sistema necesita formar personas que hayan interiorizado una relación de humildad con el saber. La educación lo logra y ese es nuestro sistema educativo.*
> *Formar personas por medio de la educación que sean capaces de preguntar, que sean capaces de desatar lo que llevan en sí, de aspiración y de búsqueda, sería formar hombres inadaptados al sistema."*
>
> *(Zuleta, 1995, p. 34)*

Es necesario que los maestros repensemos la educación, sus objetivos, sus finalidades; es necesario reafirmar nuestro papel histórico de lucha por la igualdad teniendo las herramientas del conocimiento, cambiar nuestra práctica monótona y mecanicista, por una interesante búsqueda del saber; necesitamos reflexionar sobre nuestro papel, investigar sobre otras maneras de enseñar matemática y tener la convicción de que podemos hacer que los estudiantes sientan pasión por aprender y ganas por aplicar lo aprendido para mejorar su futuro y el de los demás.

La educación superior no es ajena a la política capitalista, está engendrada para dotar a las empresas de profesionales competentes, con una excelente especialización en el desarrollo de actividades determinadas y capaces de fortalecer y mantener el sistema económico en el que vivimos.

Nuestra función es brindar a los educandos otras alternativas, otras oportunidades, otras opciones de pensamiento, para que ellos mismos puedan valorar mejor su existencia, sientan que sí se puede crear un pensamiento propio, que no esté limitado por la búsqueda de satisfacciones materiales, sino por el contrario, que sientan incómodo el materialismo facilista al que nos programan los medios de comunicación y el poder.

La educación superior está regida por la ley 30 de 1992, el Artículo 4º que dice lo siguiente:

> *"La Educación Superior, sin perjuicio de los fines específicos de cada campo del saber, despertará en los educandos un espíritu reflexivo, orientado al logro de la autonomía personal, en un marco de libertad de pensamiento y de pluralismo ideológico que tenga en cuenta la universalidad de los saberes y la particularidad de las formas culturales existentes en el país. Por ello, la Educación Superior se desarrollará en un marco de libertades de enseñanza, de aprendizaje, de investigación y de cátedra."*

Nuestro trabajo como docente de matemáticas, se vuelve enriquecedor cuando buscamos nuevas formas de enseñar conceptos matemáticos, cuando reflexionamos sobre nuestra práctica docente y sobre la experiencia de otros docentes, cuando investigamos para mejorar nuestra labor y para dar a conocer nuestros resultados, cuando utilizamos herramientas didácticas que ayudan a mis estudiantes a aprender, cuando se engrandece el estudio de las matemáticas gracias a la participación de los estudiantes, cuando soy democrático y soy humilde con los educandos, cuando enseño a ellos a ser críticos, participativos, comprometidos, curiosos ante el conocimiento y generadores de una mejor forma de ser a merced de su conocimiento.

Según Freire (1996):

> *"El educador democrático no puede negarse al deber de reforzar, en su práctica docente, la capacidad crítica del educando, su curiosidad, su insumisión. Una de sus tareas primordiales es trabajar con los estudiantes el rigor metódico con que deben "aproximarse" a los objetos cognoscibles. Y este rigor metódico no tiene nada que ver con el discurso "bancario" meramente transferidor del perfil del objeto o del contenido.*
> *Es exactamente en este sentido como enseñar no se agota en el "tratamiento" del objeto o del contenido, hecho superficialmente, sino que se extiende a la producción de las condiciones en que es posible aprender críticamente. Y esas condiciones implican o exigen la presencia de educadores y de educandos creadores, instigadores, inquietos, rigurosamente curiosos, humildes y persistentes"*
>
> *(Freire, 1996, p. 28)*

De acuerdo con mis ideas sobre la educación, es importante que los educandos comprendan muy bien los significados matemáticos, porque de esta manera se adquieren conocimientos útiles para mejorar el razonamiento, ampliar el análisis de las cosas y acrecentar opciones que lo llevan a tomar decisiones, pero indiscutiblemente el proceso más importante es el acto de pensar, porque el pensamiento amplía la capacidad de creación y aprensión de nuevos conocimientos. Además ayuda a transformar y mejorar conocimientos existentes; por lo tanto, se está preparando a los estudiantes para transformar el mundo.

La solución de ejercicios clásicos, el análisis de ejercicios complejos y la resolución de problemas, son estrategias que deben utilizarse para explorar algún significado matemático, cuyo objetivo es el de ayudar al estudiante en el aprendizaje del mismo significado, pero se debe tener en cuenta que en el estudio de la matemática no se debe limitar a este tipo de enseñanza, porque se corre el riesgo de volver mecánica la comprensión de los significados matemáticos; creo que debe ser necesario reforzar el estudio de conceptos en matemáticas con actividades de investigación que sitúen a los estudiantes en contextos de exploración de situaciones, indagación autónoma y planteamiento de interrogantes, solución a estas preguntas y comprensión holística de los conceptos estudiados; estas actividades deben motivar al estudiante a su desarrollo, debe dotarlos de responsabilidad y autonomía frente al análisis; estas actividades deben estar diseñados para que el estudiante tenga la oportunidad de expresarse, de dar su opinión y de que pueda obtener la capacidad de argumentar.

El estudio de inecuaciones y valor absoluto se organizó de manera en que la maestra daba a conocer el tema por los estudiantes, estos realizaban actividades de solución de ejercicios y resolución de problemas, luego, se proponían las tareas de investigación matemática como complemento importante para una mejor comprensión del tema, además, de la búsqueda de una producción de conocimiento por parte del estudiante; dentro de estas actividades se realizó la evaluación del proceso de las actividades desarrolladas por los alumnos, enfatizada en la participación e interés que los educandos tenían frente al estudio del tema. Las Tareas de Investigación Matemática son actividades que se realizan luego de que el estudiante ha tenido una comprensión importante del tema, por eso no dejamos a un lado el planteamiento de ejercicios y problemas.

Mediante las tareas de investigación matemática, los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas que no necesariamente tienen una única estrategia de solución, además se presentan preguntas interesantes, donde no es el resultado lo único importante, también se busca que el estudiante indague, revise apuntes, tome decisiones y confronte ideas.

Ponte (2005), expresa que las buenas tareas - de investigación matemática- son aquellas que no separan el pensamiento matemático de los conceptos matemáticos o aptitudes, que despiertan la curiosidad de los alumnos y que los convidan a especular y profundizar sobre sus intuiciones.

Me parece muy importante, que lo estudiantes se sientan a gusto cuando estudian matemáticas. Parte de ese gusto depende de la curiosidad y del entusiasmo que ellos tienen al momento de realizar procesos que implican un razonamiento más complejo.

En la práctica se notó la diferencia que hay cuando lo estudiantes están solucionando ejercicios donde se les pide el resultado, para llegar a ese resultado los estudiantes deben realizar procedimientos similares en el desarrollo de todos los ejercicios.

Cuando los alumnos desarrollaban las tareas de investigación matemática, se notó un interés diferente en el análisis que ellos realizaban a cada una de las actividades de la tarea, los estudiantes estaban interesados en obtener conclusiones y resultados de preguntas no convencionales con estrategias diferentes para encontrar la solución.

Refiriéndonos a la importancia educacional de las Tareas de Investigación, Oliveira, Ponte, Cunha y Segurado citado por Canha (2005, p.3) afirman que estas:

- Constituyen una parte esencial de la actividad matemática y por tanto son esenciales para proporcionar una visión completa de esta ciencia.
- Estimulan en los alumnos el tipo de envolvimiento necesario para que pueda ocurrir un aprendizaje.
- Se forman múltiples puntos de partida para alumnos de diversos niveles de competencia matemática.
- Estimulan un modo de pensamiento globalizante, esencial en raciocinio matemático, relacionando muchos tópicos y muchas estrategias de pensamiento.

Comprender mejor los conceptos matemáticos utilizando actividades donde los estudiantes busquen sus propias maneras de solución, es una buena herramienta para ayudarle a los educandos a activar su pensamiento en pro de un mayor desarrollo intelectual, de una motivación por seguir avanzando en su aprendizaje, con el entusiasmo de comprender muchos más significados y conceptos. Por ejemplo, Diego expresó lo siguiente:

> *"Profe, la actividad que estamos desarrollando es una mejor alternativa de aprender; cuando comparto mi opinión con los compañeros de grupo, me doy cuenta que sí puedo entender cómo debo desarrollar la desigualdad"*

Maribel, expresaba una nueva motivación por aprender matemáticas:

> *"La verdad es que nunca me había imaginado que se pudiera aprender matemáticas de una manera tan divertida, es como si yo me hubiera despertado de una pesadilla, ahora sí quiero aprender y quiero ser muy buena con los números"*

Con respecto a lo que los estudiantes expresaron, pude evidenciar que las tareas de investigación matemática, involucran al estudiante en el estudio de las inecuaciones y valor absoluto; es importante resaltar que en el desarrollo de las tareas de investigación, los estudiantes estuvieron realizando muchas preguntas a la docente y que existía un diálogo constante entre ellos mismos; por ejemplo, Pablo expresaba:

> *"Me gusta mucho el trabajo que estamos realizando, porque yo mismo resuelvo mis dudas; claro, con ayuda del profesor, pero me siento responsable de mi aprendizaje"*

Podemos observar que los estudiantes no necesariamente percibían que lo problemas tenían una única forma de resolverlos, ellos podían ver utilidades interesantes del conocimiento que estaban construyendo, además ellos podían desarrollar capacidades importantes de comunicación y argumentación.

Mediante el trabajo en equipo, los estudiantes desarrollaban la construcción del conocimiento de una forma social y cooperativa; luego ellos estaban impulsados a dar su punto de vista y a encontrar formas individuales para analizar problemas.

Fueron muy valiosas las tareas de investigación, porque los alumnos se sintieron motivados por aprender los conceptos de inecuaciones y valor absoluto mientras diseñaban soluciones matemáticas a interrogantes interesantes. Cuando los estudiantes llegan a pensar que las preguntas son interesantes y los problemas son agradables, están dispuestos a investigar, a indagar, a escribir, a justificar y relatar su opinión.

Con la Tarea de Investigación Matemática, se buscaba que los estudiantes interiorizaran las propiedades de las Inecuaciones, complementaran el desarrollo de las mismas por procesos individuales, comprendieran mejor el significado de valor absoluto y llegaran a buscar generalidades sobre los conjunto solución en el desarrollo de las inecuaciones.

A continuación se presenta la segunda tarea de investigación, se señalará algunas de las características de esta tarea y el por qué esta tarea tiene interrogantes interesantes para los estudiantes.

En el segundo punto de la tarea de investigación, se trata de inferir en procesos dados, para que el estudiante analice las operaciones y en base a preguntas planteadas, se pueda llegar a relacionar la solución dada por el estudiante con las propiedades fundamentales.

Vamos a analizar el punto 2, teniendo en cuenta lo que el grupo de Maribel Alexandra y Jeisson Steven concluyen.

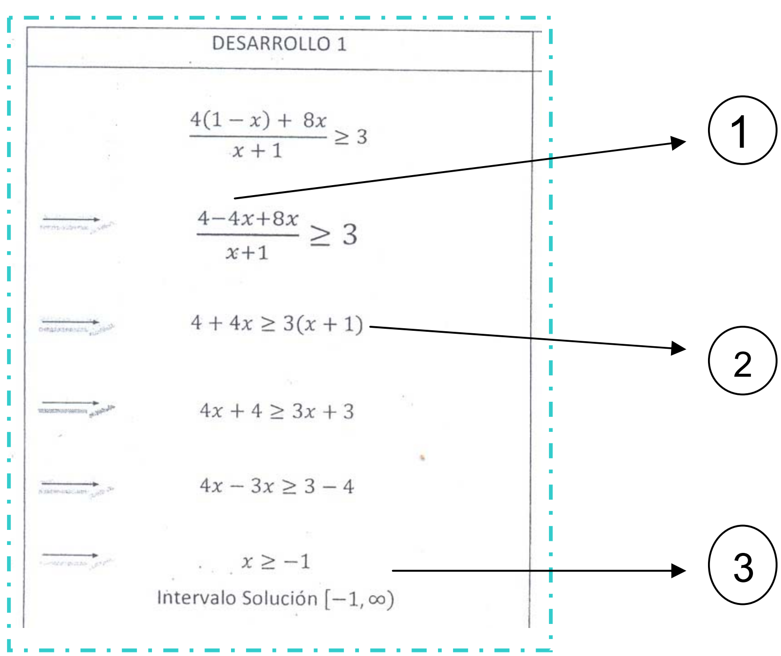
2. DOS SOLUCIONES DE UNA MISMA DESIGUALDAD

A continuación presentamos dos soluciones de la desigualdad $\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$

Frente a este problema, se observa que al parecer no es tan importante el conjunto solución de esta desigualdad, el estudiante tiene la necesidad de analizar las dos soluciones de la misma inecuación, por lo tanto, mientras él observa los dos desarrollos diferentes de la desigualdad, puede encontrar errores en estos desarrollos, puede confrontar los significados matemáticos importantes, con un nuevo tipo de problema.

Según Gómez y otros (1996), se pretende que el conocimiento construido por el estudiante sea coherente y holístico (en contraposición con un conocimiento desagrupado de herramientas específicas); sea rico en sus aspectos procedimental y conceptual (buscando ir más allá de los hechos y algoritmos, hacia las estructuras conceptuales y procedimentales); y sea rico en las conexiones entre sistemas de representación (buscando que un mismo concepto pueda ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentren conectadas).

En ese mismo punto de la tarea de investigación, se puede observar los dos desarrollos de la actividad, a continuación presento el primer desarrollo de la desigualdad y realizaré su respectivo análisis:



Los tres aspectos señalados en la gráfica anterior, representan momentos donde los estudiantes presentaron dificultades al comprender; lo cual hizo que el desarrollo del problema se convirtiera en algo muy complejo.

En el aspecto 1) encontramos algunos estudiantes que no comprendían aún la propiedad distributiva, por tal motivo sentían que no eran capaces de despejar una variable e inclusive creían que nunca podrían resolver ese ejercicio por su dificultad. Lo importante era que a los estudiantes que se les complicaba este proceso, tenían la oportunidad de reflexionar al respecto y de indagar sobre cuál era el desarrollo acertado.

En el aspecto 2) tenemos en cuenta la propiedad que impide multiplicar o dividir a cada lado de la desigualdad por un número que está representado por la variable; al momento de que ese número sea negativo, se tendrá la necesidad de cambiar el signo de la desigualdad.
La idea era que los alumnos en el momento de analizar el proceso del primer desarrollo de la desigualdad, llegaran a encontrar el error de la misma. En este análisis algunos grupos de estudiantes llegaron a esta conclusión, pero otros no tuvieron en cuenta las propiedades de las inecuaciones, en sus análisis.

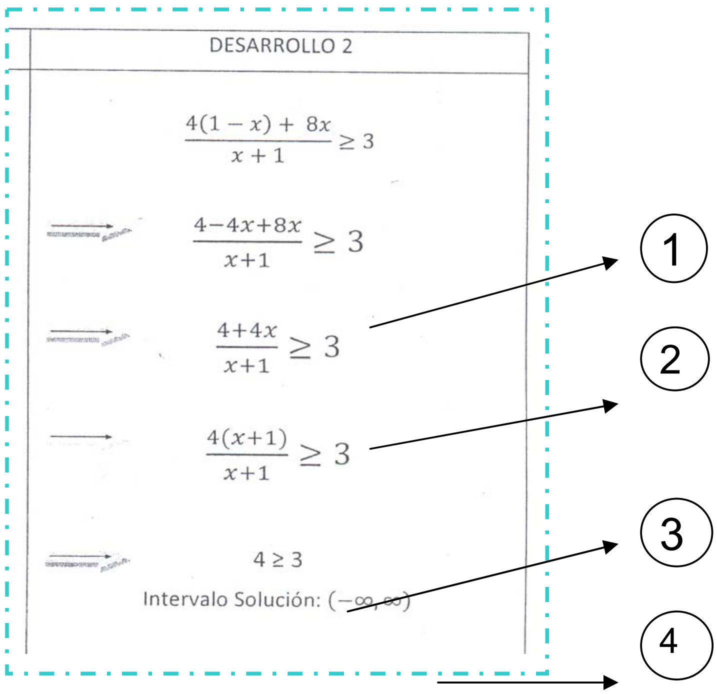
Proceso Inválido

$$\frac{4-4x+8x}{x+1}\geq 3 \quad\Longrightarrow\quad \cancel{4+4x\geq 3(x+1)}$$

En el aspecto 3) se muestra el conjunto solución del primer desarrollo junto con la desigualdad resultante.

Una de las ventajas al proponer un problema como el punto 2 de la Tarea de Investigación es que el estudiante se siente más involucrado con los conceptos matemáticos, él tiene la oportunidad de analizar problemas de inecuaciones que se plantean de otra forma, donde tiene la posibilidad de llegar a reafirmar el concepto de estudio; a su vez, puede comprender mejor la utilización de las propiedades que tiene el significado matemático y aclarar sus dudas.

Se presenta a continuación el segundo desarrollo de la desigualdad propuesta del segundo punto de la tarea de investigación matemática.


DESARROLLO 2

$$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$$

$$\longrightarrow \frac{4-4x+8x}{x+1} \geq 3$$

$$\longrightarrow \frac{4+4x}{x+1} \geq 3$$

$$\longrightarrow \frac{4(x+1)}{x+1} \geq 3$$

$$\longrightarrow 4 \geq 3$$

Intervalo Solución: $(-\infty, \infty)$

Cuando los estudiantes analizan el segundo desarrollo de la desigualdad, se encuentran con 4 momentos conceptuales, lo cuales paso a describir:

En el momento 1) el estudiante se va a encontrar con la diferencia entre

$$\boxed{-4x + 8x = 4x}$$

Como la mayoría de los estudiantes tenían más de seis meses sin haber estudiado matemáticas, era muy común observar que no podían realizar este proceso bien, es por esto que con las Tareas de Investigación, se buscaba que ellos recordaran operaciones básicas, propiedades de los números reales y factorización.

En el momento 2) se realiza un proceso de factorización utilizando el caso de factor común, además se observa también la propiedad conmutativa de los números reales:

$$4 + 4x = 4\,(1 + x) = 4\,(x + 1)$$

En el momento 3) se realiza el proceso de simplificar el término (x + 1), y nos resulta la desigualdad

$$4 \geq 3$$

Una vez los estudiantes observaron el resultado de la simplificación anterior y llegaron a que “4 es mayor o igual que 3”, se inició un debate interesante entre el resultado de la desigualdad y lo que significaba una desigualdad que no tenía la incógnita. En ese instante surgieron los siguientes interrogantes: cuál es el conjunto solución de la desigualdad, qué valores de *x* me satisfacen la desigualdad resultante, cómo puedo explicar el hecho de que “4 es mayor o igual que 3”.

En el instante 4) se da el conjunto solución de la desigualdad

$$\text{Sol: } (-\infty, \infty)$$

Podemos observar que al resolver esta desigualdad por este desarrollo, el conjunto solución es $\mathbb{R}$, pero la desigualdad

$$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$$

No puede tomar el valor de $x = -1$.

Luego de analizar los dos diferentes desarrollos de la desigualdad, se plantea a los estudiantes algunas preguntas; estas forman la estructura investigativa del problema planteado; lo interesante es que los estudiantes se motivan a desarrollar estas preguntas porque no existe ninguna presión por el resultado, también es importante estar atento al diálogo que tienen los compañeros de grupo, las opiniones, la capacidad de clarificar conceptos mal comprendidos y de crear un conocimiento mientras los alumnos piensan.

Presentamos la tarea de investigación relacionada con la desigualdad del punto 2:

a) Prueba los intervalos solución para cada uno de los desarrollos de la desigualdad anterior, teniendo en cuenta los siguientes valores de x:
- x=0
- x=-1
- x=10
- x=-100
- x=-78/4

b) ¿Qué puede observar de los resultados obtenidos anteriormente con respecto a los dos desarrollos de la desigualdad?

c) ¿Por qué los procesos realizados en los dos desarrollos de la anterior desigualdad no arrojan el mismo intervalo solución?, ¿crees que pueden haber dos diferentes respuestas al desarrollar una desigualdad? Analiza y explica.

Al momento de analizar los dos desarrollos, encontrar algunos errores y fallas en procesos, probar algunos valores de *x,* dar una justificación clara de lo que piensan con los desarrollos de la desigualdad y tener la necesidad de concluir en base al análisis y estudio, es la característica básica de la tarea de investigación.

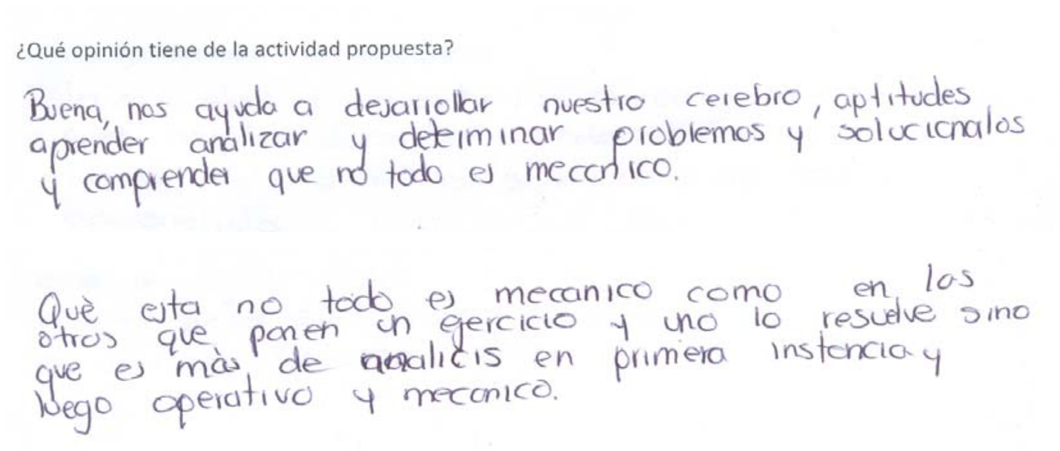
Por eso es necesario que las tareas de investigación matemática deban plantear problemas que motiven al estudiante a analizarlo, para que den solución a estos problemas interesantes; cuando el problema es interesante, los estudiantes se interesan por resolverlo.

Un problema es interesante cuando produce interés en los alumnos para resolverlo sin importar las herramientas que necesiten o el esfuerzo que requiera; estoy de acuerdo con Gómez y otros (1996), cuando se refiere a que el pensamiento de alto nivel requiere de esfuerzo. Se requiere gran cantidad de trabajo mental, con el propósito de desarrollar las elaboraciones y juicios involucrados. Por tal motivo, con las Tareas de Investigación se busca que los estudiantes elaboren juicios interesantes, teniendo como herramienta los problemas interesantes.

Para el análisis inicial de las tareas de investigación fue importante la participación de la docente en el desarrollo de las actividades porque hubo discusión, los estudiantes dejaron a un lado el papel de simple receptores de información y se convirtieron también en emisores; en ese sentido, concuerdo con Gómez y otros (1996), cuando expresan que la interacción entre el docente y el estudiante dentro del salón de clase en la construcción del conocimiento matemático sufre cambios importantes, al pasar de una situación en la que se sigue de cerca el libro de texto guía, dentro de un esquema de exposición del profesor y resolución individual de ejercicios típicos por parte de los estudiantes, a una situación de interacción en grupos de tres o cuatro estudiantes, que gira principalmente alrededor de la resolución de situaciones problemáticas complejas y diferentes, seguida de discusiones de todo el grupo de estudiantes en las que se enfatiza la argumentación y el consenso global para aceptar la validez de las afirmaciones.

Para el desarrollo de la tarea de investigación, los estudiantes realizaron el análisis en grupos de tres personas, para esto, se tuvo en cuenta el debate respetuoso, con su respectivo nivel matemático; cabe resaltar que los alumnos al momento de realizar las tareas de investigación en grupos, se encontraban muy interesados por sus desempeños, situación que los ayudó en el momento en que tuvieron que realizar el debate, el escrito final y las respectivas conclusiones.

Al finalizar el desarrollo de la actividad por grupos, se realizó una evaluación del trabajo propuesto en las tareas; Pablo expresa su opinión sobre la propuesta realizada en las tareas de investigación, veamos:



¿Qué opinión tiene de la actividad propuesta?

Buena, nos ayuda a desarrollar nuestro cerebro, aptitudes aprender analizar y determinar problemas y solucionarlos y comprender que no todo es mecanico.

Què esta no todo es mecanico como en los otros que ponen un ejercicio y uno lo resuelve sino que es màs de analicis en primera instancia y luego operativo y mecanico.

Con las afirmaciones dadas por Pablo y algunos de los estudiantes, pude observar que ellos aprenden más si dan soluciones a interrogantes que pueden ser interesantes para ellos; por eso pienso que hay que llevar a nuestros educandos por el camino del conocimiento, teniendo en cuenta que son ellos también quienes deben estar interesados por analizar y motivados por aumentar su curiosidad y capacidad crítica.

5.2 PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS[13]

Como lo había mencionado, esta investigación surgió en parte de la experiencia que había adquirido anteriormente con los niños de cuarto grado de escolaridad y mi preocupación hacia la labor docente. En esta pequeña, pero gratificante experiencia, pude evidenciar que para lograr un proceso de aprendizaje no bastaba con plantear y explicar muy bien los ejercicios que se proponían durante la clase, sino que habían otros detalles para tener en cuenta en el momento de presentar estos ejercicios, unos de estos era motivar e incentivar a los alumnos por el conocimiento, pero esto lo logré cuando reemplacé los ejercicios (principalmente repetitivos) por la actividad "El tablero de los hermanos y los primos"; mediante esta herramienta matemática los niños empezaron a generar formas de soluciones propias, ganando confianza y aprendiendo del error.

Este año, desarrolle el proyecto de investigación en una Fundación Universitaria, en otras condiciones y con alumnos de 19 años promedio. En este proyecto, tuve en cuenta lo realizado anteriormente con los niños de Servicio Social Educativo I. Es por esto, que decidí abordar el tema de "desigualdad y valor absoluto" con tareas de investigación en donde se posibilitara al estudiante a resolver problemas por métodos propios, reconociendo que existía otra fuente de conocimiento diferente al maestro o al texto guía; me refiero a la argumentación que ellos mismos pudieron construir en el desarrollo de dichas Tareas.

Mientras yo observaba la socialización hecha por los alumnos durante la aplicación de las tareas de investigación, logré ver diferentes desempeños: algunos estudiantes lanzaban sus primeras hipótesis acerca de un patrón de comportamiento visto en la solución de diversos ejercicios, otros intentaban construir una solución para casos particulares en dónde se presentaban

[13] En esta categoría se analizaron las Prácticas Argumentativas realizadas por los estudiantes en la actividad grupal.

también razonamientos inadecuados. Por tal motivo, me pareció muy pertinente analizar las argumentaciones hechas por ellos en el desarrollo de las actividades mencionadas; además, analicé los intentos por llegar a una generalización y si estos intentos se relacionaban con el grado de comprensión de significados que habían adquirido estos estudiantes[14].

Con relación al término argumentación, Toulmin, 1958 citado por Inglis (2005) presenta todo un esquema de argumentación cuyas componentes son necesarias para modelar las argumentaciones matemáticas hechas por los estudiantes. El modelo de Toulmin asume que existen normas universales para construir y evaluar argumentos que están ligados a la lógica formal; algunos investigadores han decidido basarse en este autor y adoptar formas propias para analizar las argumentaciones de los alumnos.

Hernández Sampieri (1997) categoriza estas argumentaciones dependiendo de las palabras que utilicen los alumnos en sus afirmaciones. Veamos estas categorías:

- Argumentación completa: cuando los estudiantes identifican los datos, la tesis y la justificación de manera explicita.
- Argumentación incompleta: los alumnos identifican los datos y la tesis, pero la justificación aparece de manera implícita.
- No existe argumentación: aquí se identifican los datos y la tesis, pero la justificación no aparece, ni siquiera en forma implícita.

Como se puede observar, existen aspectos básicos que una argumentación debe contemplar, es decir, existen interpretaciones que dan los alumnos cuando se enfrentan a un enunciado que Hernández Sampieri (1997) no categoriza como argumentación. En esta categoría no se intentó clasificar cada una de las reflexiones hechas por los alumnos en el desarrollo de la actividad, sino observar la capacidad de análisis y la comprensión respecto al tema visto

[14] Cuando menciono a los estudiantes, me refiero a los estudiantes que hicieron parte del análisis de los datos. (Maribel, Jeisson, Pablo y Diego)

(inecuaciones y valor absoluto). Por consiguiente, mi posición frente al término argumentación en este trabajo hizo referencia a interpretaciones, justificaciones, explicaciones, afirmaciones, datos y pruebas que hacían los alumnos cuando se enfrentaban a un determinado problema.

Paso seguidamente a realizar el análisis que se fundamenta en las prácticas argumentativas hechas por los estudiantes protagonistas de esta investigación.

ANÁLISIS PUNTO 1

En esta primera parte, Pablo intentó encontrar el error sólo dando valores particulares a los términos a y b. Veamos:

PROCESO MATEMÁTICO		ANÁLISIS Y OPERACIONES
1. Supongamos que a = b	→	$a - b = \boxed{0}$
2. a.a = b.b	→	Se cumple por multiplicacion
3. a.a+(a.a-2ab) = ab+(a.a-2ab)	→	Si se cumple porque los resultados de la multiplicacion coinciden
4. 2(a.a)-2ab = a.a-ab	→	Es igual que el proceso #3 el resultado nos da 0.
5. 2a.(a-b) = a.(a-b)	→	No se cumple porque en este caso a no es igual a b. ?
6. 2a = a	→	No se cumple por el primer termino se multiplica 2 veces y el resultado no es igual
7. 2 = 1		NO es igual

Mediante asignaciones de valores particulares, Pablo encontró que a partir del quinto paso, la igualdad no se cumplía, pero no argumentó el porqué esta igualdad dejaba de ser verdadera, no tuvo en cuenta la afirmación a – b = 0 cuando se seguía del paso 5 al paso 6.

Analizando este tipo de justificación pude notar lo limitado que es el uso de técnicas tradicionales para la enseñanza de las matemáticas y el encuadramiento mental en que estamos sometiendo a nuestros estudiantes, un ejemplo claro de esto se puede observar cuando enseñamos ecuaciones sencillas desde el grado quinto de primaria:

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

El argumento que normalmente da el profesor es: "*El tres está multiplicando, pasa al otro lado de la igualdad a dividir*".
Esta es una estrategia pedagógica que es utilizada por muchos de nosotros para facilitar la enseñanza de ecuaciones, pero perjudica la interpretación que se le hace a una ecuación, limitando la capacidad para analizar equivalencias y dominio de las propiedades de los números reales.

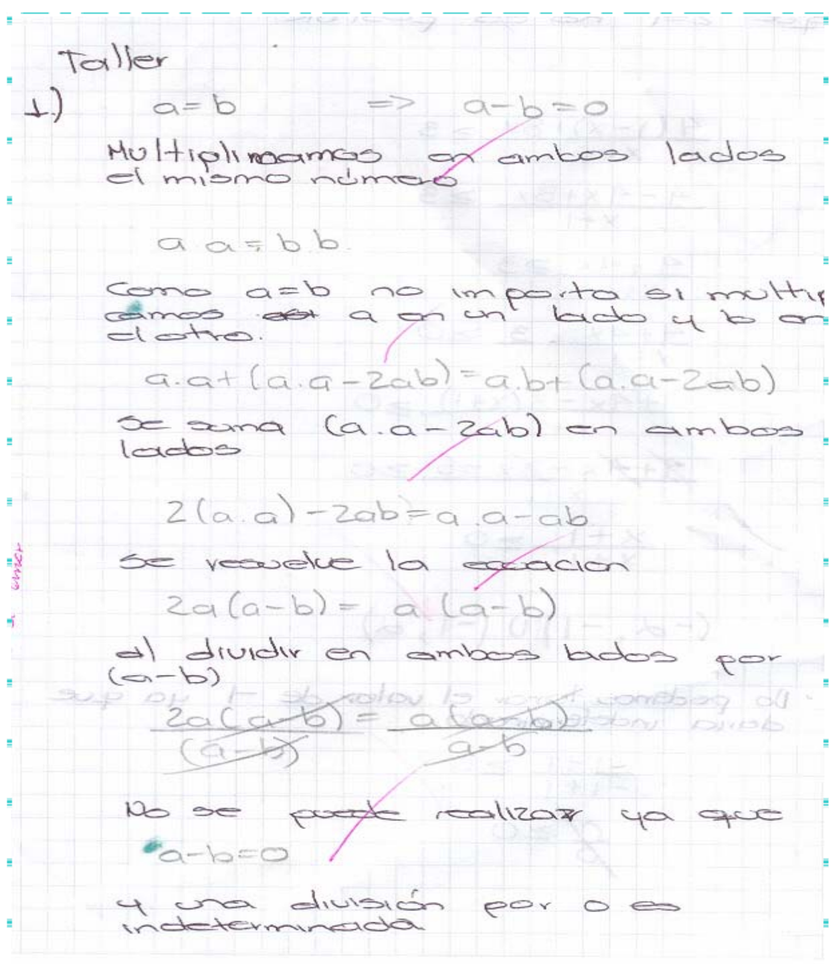
En su libro, Asiala y otros (1997), dice que una acción ha sido interiorizada en un proceso, cuando los individuos reflexionan sobre la acción y construyen una operación interna que realiza la misma transformación.

Al respecto, pienso que no estamos planeando nuestras clases de tal manera que diseñemos actividades que promuevan en los alumnos el paso de construcciones mentales de un nivel a otros más altos; estamos dejando a un lado el desarrollo cognitivo de los estudiantes y posibilitando en ellos la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar ejercicios de una manera concreta, pero que en ningún momento llegarán a interiorizarse tal y como lo menciona el autor.

Retomando la justificación dada por Pablo, he podido observar, la poca interiorización que ha hecho de las propiedades de los números reales, cuando intenta encontrar el error en los procesos dados, Veamos sus sencillas argumentaciones:

- *¿Cree usted que 2 =1?*
  Pablo: No
- *¿Por qué sucede esto?*
  Pablo: Esto sucede porque a partir del proceso número cinco no se Cumple la operación, pues sus resultados no son iguales.
- *¿Encuentra algún error en los procesos?*
  Pablo: Si, en el proceso cinco, seis y siete.

Observemos a continuación las interpretaciones hechas por Diego en este primer punto:


Taller

1.) $a=b \Rightarrow a-b=0$

Multiplimamos en ambos lados el mismo número

$a\,a=b.b$

Como $a=b$ no importa si multiplicamos ~~del~~ a en un lado y b en el otro.

$a.a+(a.a-2ab)=a.b+(a.a-2ab)$

Se suma $(a.a-2ab)$ en ambos lados

$2(a.a)-2ab=a.a-ab$

Se resuelve la ecuación

$2a(a-b)=a(a-b)$

al dividir en ambos lados por $(a-b)$

$\frac{2a\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}}=\frac{a\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}}$

No se ~~puede~~ realizar ya que $a-b=0$

y una división por 0 es indeterminada

En el análisis hecho por Diego, vemos que no reemplazó los términos a y b por valores particulares para encontrar el error, sino que interpretó los procesos matemáticos realizados para argumentar en dónde se encontraba el error. Además, Diego tuvo en cuenta que $a - b = 0$, y que en el momento de multiplicar a ambos lados de la igualdad por el recíproco de *a-b*, llegaba a que era falso afirmar que $2a = a$, es decir que $2 = 1$.

Pude ver en Diego un análisis más detallado de los procesos matemáticos y una mayor comprensión de algunos conceptos matemáticos.

Una de las fortalezas que se debe desarrollar en los estudiantes es la interpretación y resolución de situaciones problema. Es por esto que se incluyó en esta tarea de investigación situaciones de este tipo.

Como primera instancia, se buscaba que los alumnos interpretaran y plantearan la desigualdad a la cuál hacía referencia esta situación.

3. Determinación de niveles terapéuticos mínimos:

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración sanguínea debe ser mayor que cierto valor, que se llama nivel terapéutico mínimo. Según la concentración C de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión está dada por

$$C=20t/(t^2+4)$$

Si el nivel terapéutico mínimo es de 4, indica en que tiempo se rebasa este nivel **(C >4)**

ANÁLISIS PUNTO 3.

Veamos el análisis hecho por Maribel:

3. $C > 4$

$$\frac{20t}{(t^2+4)} > 4 \Rightarrow \frac{20t}{t^2+4} - 4 > 4 - 4 \Rightarrow \frac{20t}{t^2+4} > 0$$

falso

$$\frac{20t}{(t+4)(t+4)} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{20t - 4(t+4)(t+4)}{(t+4)(t+4)} > 0$$

$$\frac{20t - 4(t+4)}{(t+4)} > 0 \Rightarrow \frac{20t - 4t - 16}{(t+4)} > 0$$

$$\frac{16t - 16}{(t+4)} > 0$$

Puntos críticos

∘ $16t - 16 = 0 \Rightarrow 16t = 16$, $t = 1$ ∘ $t + 4 = 0$, $t = -4$

	$-\infty$	-4	1	∞
$16t - 16$	$-$	$-$	$+$	
$t + 4$	$-$	$+$	$+$	
	$+$	$-$	$+$	

$Cs = (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$

Al igual que Maribel, para los demás estudiantes fue muy complejo comprender el problema, noté que es muy difícil para ellos interpretar matemáticamente lo que se presenta en lenguaje natural, por tal motivo, fue importante la intervención de la docente para que los estudiantes plantearan la desigualdad que se quería.

Analizando los procesos realizados por Maribel, observé que manifiesta dificultad para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos adquiridos previos al tema de inecuaciones, es decir, no asoció procedimientos en la solución de la desigualdad.

Veamos algunos procedimientos inexactos:

$$t^2 + 4 = (t + 4)\,(t + 4)$$

$$\frac{20\,t - 4\cancel{(t + 4)}\,(t + 4)}{\cancel{(t + 4)}\,(t + 4)}$$

Este tipo de procedimientos inadecuados deberían ser discutidos y aclarados en el salón de clase para que el estudiante a través del error se dé cuenta del tipo de razonamientos hechos y sea él mismo quien los reinterprete.

Hoy en día enseñamos la definición y tres ejercicios sin fundamento. Asiala (1997), dice que si le damos la oportunidad al estudiante de asociar el objeto matemático a un contexto gráfico o numérico, éste puede enriquecer su concepto a través de la adquisición de sentido al desarrollo algebraico y significado del objeto matemático en juego, por la visión alterna en otro contexto.

Coincido con el autor en que la incorporación de un método gráfico o numérico, ayuda al estudiante a darle una mejor interpretación a los datos obtenidos cuando se han realizado de manera algebraica, además ayuda a superar las dificultades presentadas cuando realiza procedimientos algorítmicos. Veamos cómo podríamos abordar esta desigualdad en un contexto numérico, previa factorización:

$$(t-4)(t-1) > 0$$

De esta manera los puntos críticos serían *t = 4* y *t = 1*, esto supondría considerar los siguientes tres intervalos:

$$(-\infty, 1) \qquad\qquad (1,4) \qquad\qquad (4, \infty)$$

Probemos el primer intervalo con t = 0, tenemos que:

(-4)(-1) = 4, luego *4 > 0*. Efectivamente, una parte del conjunto solución lo es el intervalo *(-∞,1).*

Probemos el segundo intervalo con *t = 3*, tenemos que:

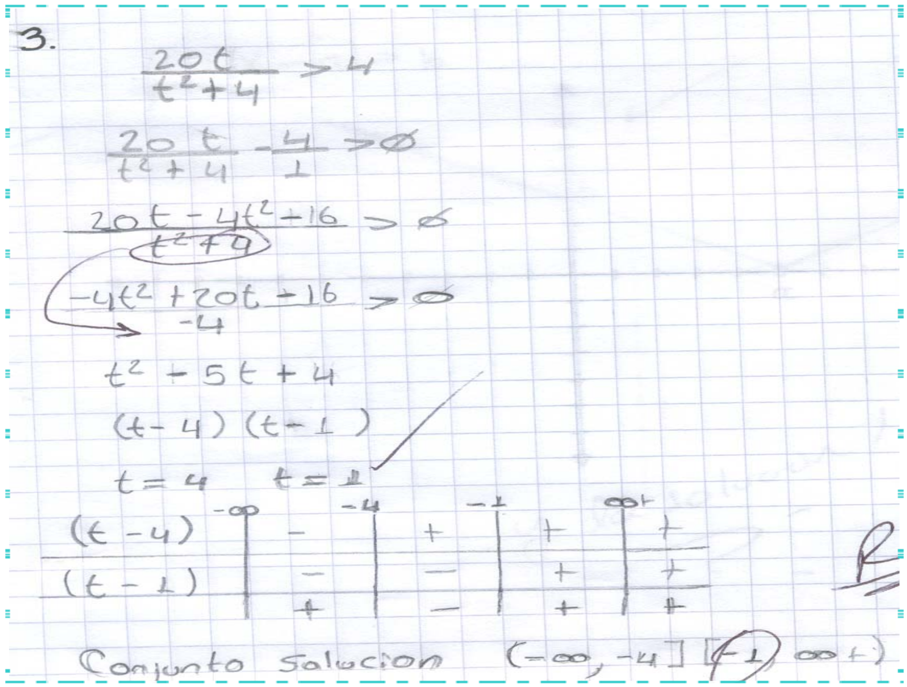
(-1)(2) = -2, luego no es cierto que *-2 > 0*. Concluimos que *(1,4)* no hace parte del conjunto solución.

Finalmente verificamos el último intervalo cuando *t = 8*, tenemos *(4)(7)=28*, luego es cierto que *28 > 0*; luego la otra parte del conjunto solución es el intervalo *(4, ∞).*

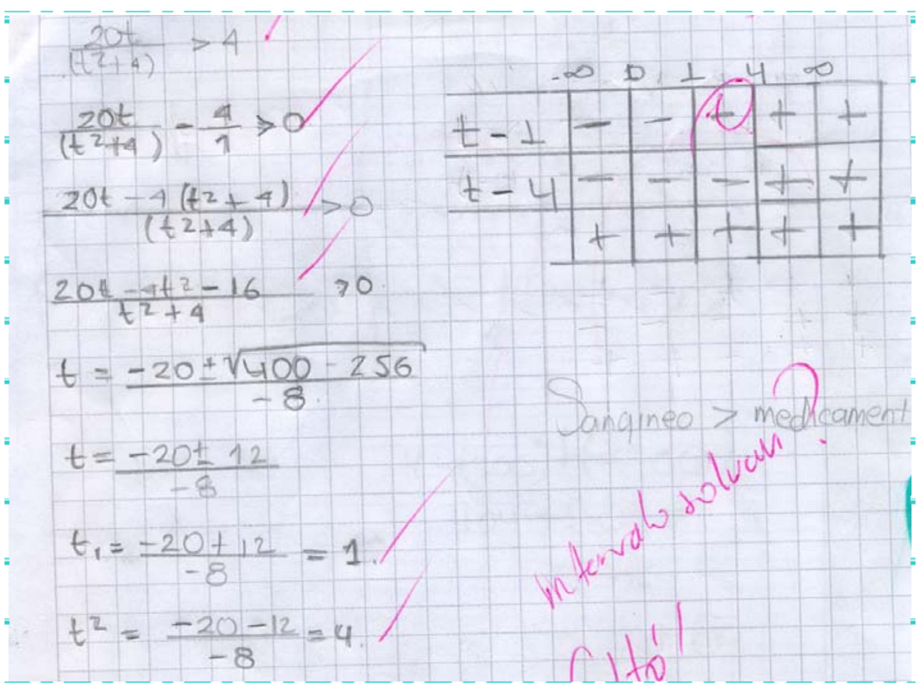
Por último, podemos expresar la solución de la desigualdad como:

$$\boxed{\text{Sol}: \quad (-\infty,1) \cup (4,\infty)}$$

A continuación presento los análisis realizados por otros dos estudiantes, protagonistas de esta investigación:



Análisis de Jeisson



Análisis de Pablo

Observé que los dos estudiantes utilizaron propiedades de los números reales como sumar (-4) en ambos miembros de la desigualdad, obteniendo:

$$\boxed{\frac{20t - 4t^2 - 16}{t^2 + 4} > 0}$$

En ningún momento analizaron el denominador del miembro izquierdo: $t^2 + 4$.

Para los estudiantes es muy difícil notar que para cualquier valor asignado a t, sea positivo o negativo, la expresión será siempre mayor que cero.
Esto es, $t^2 + 4 > 0$, luego la desigualdad podía ser abordada de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{20t}{t^2 + 4}(t^2 + 4) > 4(t^2 + 4)}$$

$$\boxed{20t > 4(t^2 + 4)}$$

Los estudiantes podían multiplicar a ambos lados de la desigualdad por *(t^2 + 4)*, debido a que esta expresión era positiva y no había ningún problema con el sentido de la desigualdad.

Veamos a continuación el modelo algebraico que siguen Jeisson y Pablo para obtener la solución de la situación planteada, el método es el siguiente:

- Ubicar el cero al lado derecho de la desigualdad
- Factorizar o utilizar la fórmula de la ecuación cuadrática
- Encontrar los puntos críticos
- Desarrollar la ley de signos
- Hallar el intervalo solución

A pesar de las dificultades presentadas en los procesos algorítmicos, Jeisson y Pablo pudieron obtener un intervalo solución el cual no fue analizado, quedando así pendiente la interpretación del resultado. Por tal motivo fue importante completar el proceso dirigiendo una actividad posterior en la cual se discutió los procesos realizados por los estudiantes en los diferentes puntos para generar una mayor comprensión de los conceptos.

4. Propagación del salmón:

Para una población particular de salmones, la relación entre el número *S* de ponedoras y el número *R* de hijos que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula R= 4500 S / S + 500.
¿En qué condiciones R>S?

ANÁLISIS PUNTO 4

Al igual que en la situación anterior, los estudiantes presentaron dificultades en los procesos algorítmicos, por tal razón fue necesario que la profesora aclarara algunas dudas. Veamos algunas interpretaciones realizadas cuando los estudiantes obtuvieron un intervalo solución:

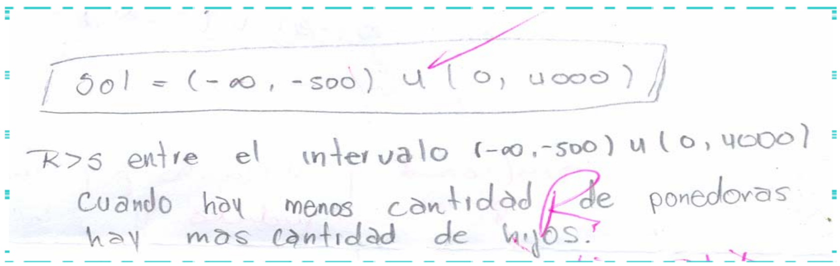
Pablo interpretó el signo negativo en el intervalo solución como las muertes de las ponedoras.

$s = (-\infty, -500) \cup (0, 4000)$

Entre mas de 500 muerte de ponedoras, los hijos seran mayor cantidad. ???

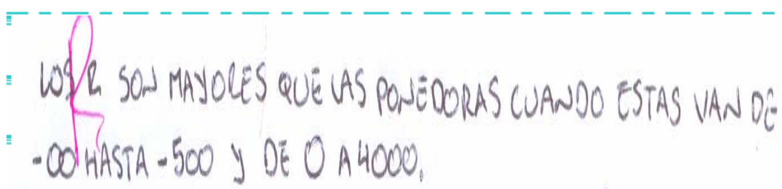
Análisis de Pablo

Jeisson argumenta que como R > S, entonces S < R. Luego no le da ningún tipo de interpretación al intervalo que obtuvo como respuesta.


Sol = (-∞, -500) u (0, 4000)
R>S entre el intervalo (-∞,-500) u (0,4000)
cuando hay menos cantidad de ponedoras hay mas cantidad de hijos.

Análisis de Jeisson

Diego le da una mejor interpretación al intervalo solución, pero no analiza que no tiene sentido hablar de ponedoras que pertenezcan al intervalo (-∞, -500), luego solo se tendría en cuenta el otro intervalo (0, 4000) para la solución de esta situación problema.


LOS R SON MAYORES QUE LAS PONEDORAS CUANDO ESTAS VAN DE -∞ HASTA -500 Y DE 0 A 4000.

Análisis de Diego

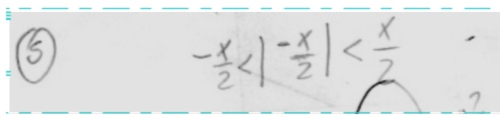
Vemos que la solución dada $(-\infty,-500)\cup(0,4000)$, matemáticamente es correcta, pero no se ajusta a la situación que se intenta resolver.

La formulación de situaciones como esta es importante, porque hace que se genere discusión en el aula de clase, propiciando reflexión crítica en nuestros educandos.

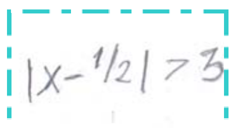
Paso seguidamente a realizar el análisis que se fundamenta en los intentos de generalización hechos por los estudiantes.

ANÁLISIS PUNTO 5, 6 Y 7[15]

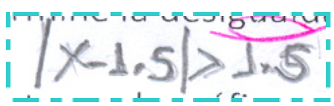
Con base a esclarecer la solución de inecuaciones con valor absoluto, se propuso en la actividad tres puntos que posibilitaba a los alumnos utilizar la gráfica de la función lineal. Al analizar las respuestas y explicaciones dadas por los estudiantes en estos puntos, pude observar que se facilitó la comprensión de la gráfica para hallar el intervalo solución de la inecuación; para ellos fue claro ubicar el conjunto solución en el eje de las x, caso contrario sucedió cuando se les pidió que plantearan la inecuación que se definía en la gráfica y que posterior a esto, la desarrollaron validando el intervalo solución obtenido de la gráfica. Veamos los planteamientos dados por los estudiantes:



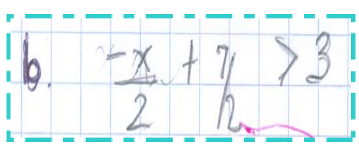
Análisis de Diego



Análisis de Jeisson



Análisis de Pablo



Análisis de Maribel

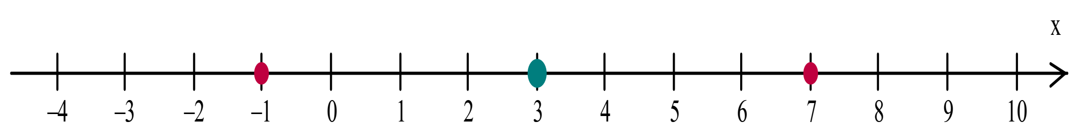
[15] Ver puntos en los anexos.

El desarrollo del punto seis guardaba similitud con el punto inmediatamente anterior; aquí la diferencia radicaba en una gráfica que mostraba la función valor absoluto trasladada tres unidades hacia la derecha. Pude evidenciar, que aunque los estudiantes hubiesen resuelto un número considerable de inecuaciones de este tipo e inclusive aún más complejos, no habían logrado establecer una relación con la gráfica de funciones lineales con valor absoluto desarrolladas durante la clase.

Lo anterior me llevó a pensar en la importancia que se debe dar al hecho de tratar el valor absoluto no simplemente como una definición funcional por partes, la cual se encuentra en todos los libros de texto, sino también considerar el valor absoluto de un número real como una distancia, es decir, como la longitud del segmento que tiene como extremos cero y ese real. De esta misma manera mostrarles que $|x-a|$ es la distancia entre x y a. Este tipo de definición podría facilitar la interpretación gráfica de las soluciones de inecuaciones con valor absoluto. Veamos una forma sencilla de abordar este ejercicio:

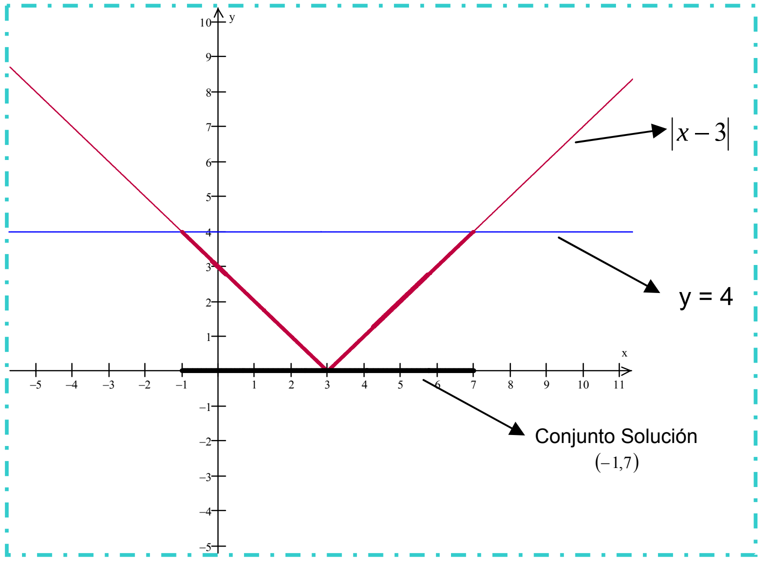
$$|x-3|<4$$

Encontrar los valores de x que hacen que la distancia a 3 sea menor que 4.

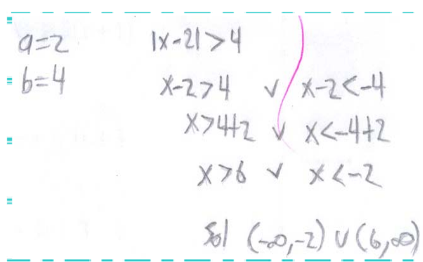


Intervalo solución: $(-1,7)$

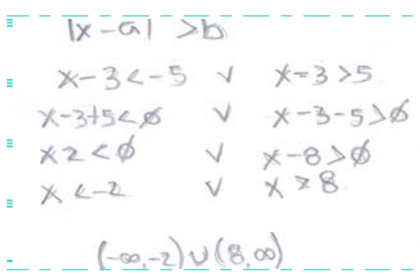
Como complemento al análisis anterior se puede presentar la solución gráfica a esta desigualdad, la cual es la que se exigía en el punto 6.



En cuanto al último punto propuesto en esta actividad pretendí que los estudiantes analizaran las soluciones obtenidas en los puntos 5 y 6 para que de esta manera pudieran transferir estos conocimientos a inecuaciones con valor absoluto a una manera general. Como se esperaba en este punto, los estudiantes como primer intento recurrían a encontrar soluciones numéricas para casos particulares y de esta forma, encontrar un patrón que les ayudara a construir el intervalo solución. Veamos dos de estos intentos:

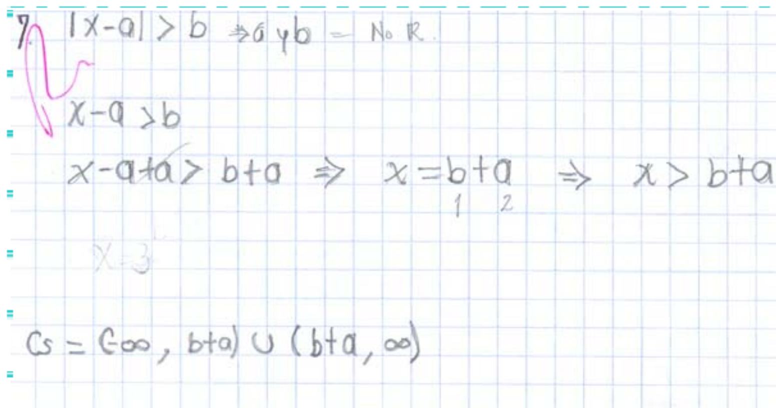


Análisis de Diego



Análisis de Jeisson

Analizando estos hechos, pude notar que para los alumnos fue difícil realizar operaciones algorítmicas en las cuales no existan números sino términos, también se sentían inseguros con el hecho de aplicar propiedades de los números reales que para ellos eran solo letras. Caso contrario sucedió con Maribel. Veamos sus intentos por encontrar una solución:



Observé que Maribel presenta dificultad en aplicar propiedades de los números reales, pero reconoce que esta es una forma válida para encontrar una solución.

Las tareas de investigación matemática deben constituirse como una herramienta importante para acrecentar un mejor análisis de problemas matemáticos, de esta manera dota al estudiante de posibilidades para solucionar y liberar el problema del simple resultado, tomando como base el mejoramiento de la argumentación de los procesos realizados por el estudiante para llegar a la solución. Mientras este explica más detalladamente cada uno de los procesos que lo llevaron a una determinada solución, enriquece su aprendizaje porque utiliza concientemente los significados matemáticos necesarios para desarrollar el problema.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a las tareas de investigación matemática se dieron cuenta que necesitaban pensar por sí mismos, se motivaron por preguntar lo que no lograban comprender, buscaron agrupar significados para complementar su constructo matemático, necesitaron debatir su punto de vista con el compañero, se sintieron obligados a diseñar su propio modo de analizar el problema teniendo en cuenta el saber creado cooperativamente, intentaron explicar matemáticamente lo que concluyeron y trataron de mejorar sus practicas argumentativas.

6. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Es muy importante reflexionar sobre nuestra práctica docente, sobre lo que sucede con los estudiantes en el aula de clase, sobre la manera como incitamos al estudiante a aprender matemáticas; por tal motivo es favorable hacer que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje, enriqueciendo la actividad de aprender por medio de un pensamiento acertado y un análisis conciente. El docente de matemáticas debe facilitar la adquisición de conocimientos en los estudiantes y debe dotarlos de herramientas teóricas para buscar una mejor comprensión de significados matemáticos; debe motivar y dar confianza a los educandos para que se interesen por aprender matemáticas y por formarse como seres críticos, que tengan posibilidades de mejorar su futuro y el de su alrededor; el profesor debe ser democrático, respetuoso y responsable con el conocimiento.

Por medio de las tareas de investigación matemática en inecuaciones y valor absoluto pude observar que los educandos pudieron crear un ambiente activo y crítico con sus compañeros, lo cual hizo que se generaran sus propias soluciones cuando se enfrentaron a estas actividades, aunque en algunos casos los procesos realizados para llegar a una solución eran inadecuados fue gracias al debate cooperativo que se realizo junto con la docente que ellos pudieron aclarar dudas, reinterpretar los conceptos y llegar a comprender mejor los significados.

El llevar a cabo las tareas de investigación matemática en el aula transformó la visión de los estudiantes frente al estudio de la matemáticas; inicialmente ellos se valían de las fórmulas para resolver ejercicios, buscaban el resultado de un problema por medio de un único método, desarrollaban problemas descontextualizados de su realidad, y proponían análisis mecánicos de los problemas tratados; esto dio paso a la construcción de grandes vacíos conceptuales en los estudiantes y por consiguiente la desmotivación por esta hermosa ciencia. Con el desarrollo de estas actividades de investigación, los educandos llegaron a reflexionar sobre la importancia de la matemática en su profesión y se observó que ellos estaban dispuestos a analizar y pensar, además fue sobresaliente las ganas que tenían por justificar, por aclarar dudas, por comprender mejor, por participar y por intentar llegar a sus propias conclusiones.

Las prácticas argumentativas desarrolladas por los estudiantes se convirtieron en una forma de comunicación; por medio de estas, ese punto de vista débil que daban los estudiantes frente a un determinado problema se transformó en un saber que poco a poco se fundamentaba mejor, esto gracias a la discusión y negociación de significados que se llevó a cabo posterior al desarrollo de la actividad. También se logró incentivar a los alumnos a que ganaran confianza y dejaran vislumbrar sus dificultades para que de esta manera la docente titular se interesara por repensar acerca de su quehacer y por realizar nuevas propuestas que facilitaría la enseñanza de inecuaciones y valor absoluto.

Es importante tener en cuenta, que para el desarrollo de las tareas de investigación en el aula se necesita esfuerzo y un poco más de tiempo del que comúnmente utilizamos para enseñar el concepto matemático; necesitamos desafiar las barreras que nos impone el currículo y buscar una formación integra de personas que dominen conscientemente unos saberes, que sepan utilizarlos en situaciones determinadas y que tengan amor por la matemática.

Las tareas de investigación matemática ayudaron a mejorar la comprensión de los significados matemáticos de inecuaciones y valor absoluto en la medida en que los estudiantes fueron cautivados por actividades de investigación donde ellos se sentían autónomos de su análisis, donde no se sintieron presionados por buscar un resultado exacto, además se sentían tranquilos porque la docente aclaraba dudas y daba sugerencias en el momento del desarrollo de las tareas. Cuando los estudiantes analizaron las tareas de investigación matemática, pudieron notar que los problemas propuestos buscaban algo más que una simple respuesta, los estudiantes encontraron que los problemas eran interesantes, por lo tanto se esforzaban por analizarlos. Para que los estudiantes no presentaran tanta dificultad con el desarrollo de las tareas de investigación se inició con la realización de actividades grupales; los estudiantes tuvieron la oportunidad de compartir opiniones y puntos de vista con sus compañeros de grupo, también fue gratificante el trabajo cooperativo porque la discusión con los pares daba para clarificar dudas y comprender mejor los conceptos. Cuando los estudiantes se sintieron más familiarizados con este tipo de actividades, se dio paso a la resolución de tareas de investigación por parte de los estudiantes, donde se evidenció que los estudiantes justificaban mejor sus procesos y fueron más responsables al momento de analizar y escribir sus resultados.

Cuando los estudiantes se motivaron a desarrollar problemas que concebían interesantes, fue de gran importancia valorar las diferentes formas en que los estudiantes llegaban a responder esas preguntas; por eso se dio gran relevancia a las justificaciones que ellos realizaban para dar alguna solución a estos problemas; a estas justificaciones se le denominó prácticas de argumentación y se exigió gran trabajo por parte de los alumnos para que trataran de explicar muy bien los procesos matemáticos utilizados por los alumnos para dar solución al problema.

Las tareas de investigación realizadas por los estudiantes fueron muy valiosas debido a que con estas actividades fue posible valorar múltiples comportamientos en los estudiantes como la participación, la originalidad, el punto de vista, la constancia, la capacidad de confiar en si mismo y en su análisis, la capacidad de debatir y defender sus resultados, el interés por aprender y el esfuerzo por mostrar en sus practicas argumentativas procesos claros que explicaban cada uno de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASIALA, M. y otros, (1997), A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim kaput, Alan H. Schoenfeld y Dubinsky (Educación Secundaria.), Research in CollegiateMathematicsEducation.

BISHOP, Alan. (2004). Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática. Instituto de educación y pedagogía. UNIVALLE, Cali, Colombia

FREIRE, P. (1970). La educación como práctica de la libertad. 1 ed. México D.F.: siglo veintiuno editores.

FREIRE, P. (1996). Pedagogia da autonomia: saberes necessários â práctica educativa. 7 ed. São Paulo: paz e terra, (original de 1996)

GOETZ, J. y LECOMPTE, M. (1998) Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Evaluación del diseño etnográfico. Madrid: Ediciones Morata, S.A.

Gómez, P., Mesa, V., Carulla, C., Valero, P., & Gómez, C. (1996). Situaciones Problemáticas de Precálculo. El eestudio de funciones a traves de la exploración com calculadoras gráficas. Universidad de los Andes, Bogotá D.C., Colombia

HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., Fernández, C. y BAPTISTA LUCIO, P., (1997). *Metodología de la Investigación*. Colombia, Mc Graw Hill.

INGLIS, M. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. Revista EMA, Vol. 10, No 2. Recuperado el 21 de abril de 2008, de *http://www.warwick.ac.uk/staff/J.P.Mejia/files/ema.pdf*

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR-ICFES (2007). Fundamentación Conceptual-Área de Matemáticas. Recuperado el 9 de diciembre de 2006, de *http://menweb.mineducacion.gov.co:8080/saber/Marco_teorico_matematicas.pdf*

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

MARTÍNEZ, M. (2006).La investigación cualitativa. Recuperado el 8 de Junio de http://www.concienciactiva.org/Concienciactiva21/conciencia10/3.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1992). *Ley 30.* Recuperado el 9 de mayo de 2008, de *http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86437_Archivo_pdf.pdf*

OLIVEIRA, H., PONTE, J., CUNHA, M., & SEGURADO, M. (1997). Mathematical investigations in the classroom. In: CANHA, C. N. (Org.). Os relatórios na avaliação das tarefas de investigação. Recuperado el 21 de abril de 2008, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Nunes.pdf

PONTE. (1998). La educación para la libertad. Recuperado el 18 de marzo de 2008 de http://portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Historico/Numerosanteriores03/012/Rocha%20Eugenia%2012.pdf

PONTE J., BROCARDO J., OLIVEIRA H. (2003). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: autêntica

ROCHA E. (1998). La educación para la libertad. Recuperado el 18 de marzo de 2008 de http://portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Historico/Numeros_anteriores03/012/Rocha%20Eugenia%2012.pdf

ZULETA, Estanislao. (1995).Educación y democracia, un campo de combate. Fundación Estanislao Zuleta. 1 ed. Bogotá, Colombia.

ZULETA, Estanislao. (2007). Elogio de La dificultad y otros ensayos. Fundación estanislao Zuleta. Hombre Nuevo Editores. Décima Edición.

.

ANEXOS

ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN PROPUESTA A LOS ESTUDIANTES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
MATEMATICAS 0
DOCENTE MAGDA BRIGGITTE VILLAMIL
ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN MATEMATICA - JOSÉ WILLIAM RAMÍREZ APONTE
DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

1. EN BUSCA DEL ERROR

Comprendamos el siguiente análisis, teniendo en cuenta las propiedades de los números Reales, y al frente de cada proceso matemático escriba la operación utilizada.

PROCESO MATEMÁTICO		ANÁLISIS Y OPERACIONES
1. Supongamos que a = b	$\longrightarrow$	$a - b =$ $\boxed{}$
2. a.a = b.b	$\longrightarrow$	
3. a.a+(a.a-2ab) = ab+(a.a-2ab)	$\longrightarrow$	
4. 2(a.a)-2ab = a.a-ab	$\longrightarrow$	
5. 2a.(a-b) = a.(a-b)	$\longrightarrow$	
6. 2a = a	$\longrightarrow$	
7. 2 = 1		

¿Cree usted que 2=1?

¿Por qué sucede esto?

¿Encuentra algún error en los procesos?

2. DOS SOLUCIONES DE UNA MISMA DESIGUALDAD

A continuación presentamos dos soluciones de la desigualdad $\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$

DESARROLLO 1	DESARROLLO 2
$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$	$\frac{4(1-x)+8x}{x+1} \geq 3$
$\longrightarrow$ $\frac{4-4x+8x}{x+1} \geq 3$	$\longrightarrow$ $\frac{4-4x+8x}{x+1} \geq 3$
$\longrightarrow$ $4+4x \geq 3(x+1)$	$\longrightarrow$ $\frac{4+4x}{x+1} \geq 3$
$\longrightarrow$ $4x+4 \geq 3x+3$	$\longrightarrow$ $\frac{4(x+1)}{x+1} \geq 3$
$\longrightarrow$ $4x-3x \geq 3-4$	$\longrightarrow$ $4 \geq 3$
$\longrightarrow$ $x \geq -1$ Intervalo Solución $[-1, \infty)$	Intervalo Solución: $(-\infty, \infty)$

a) Prueba los intervalos solución para cada uno de los desarrollos de la desigualdad anterior, teniendo en cuenta los siguientes valores de x:

- x=0
- x=-1
- x=10
- x=-100
- x=-78/4

b) ¿Qué puede observar de los resultados obtenidos anteriormente con respecto a los dos desarrollos de la desigualdad?

c) ¿Por qué los procesos realizados en los dos desarrollos de la anterior desigualdad no arrojan el mismo intervalo solución?, ¿crees que pueden haber dos diferentes respuestas al desarrollar una desigualdad? Analiza y explica.

3. Determinación de niveles terapéuticos mínimos:

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración sanguínea debe ser mayor que cierto valor, que se llama nivel terapéutico mínimo. Según la concentración C de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión está dada por

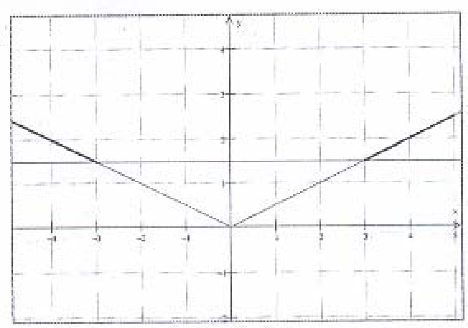
$$C=20t/(t^2+4)$$

Si el nivel terapéutico mínimo es de 4, indica en que tiempo se rebasa este nivel **(C >4)**

4. Propagación del salmón:

Para una población particular de salmones, la relación entre el número *S* de ponedoras y el número *R* de hijos que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula R= 4500 S / S + 500.
¿En qué condiciones R>S?

5. La gráfica que se muestra a continuación se define de la siguiente forma:
Líneas oblicuas: para x>0, se define como x/2
Para x<0, se define como -x/2
Línea horizontal: se define como 3/2 ó 1.5



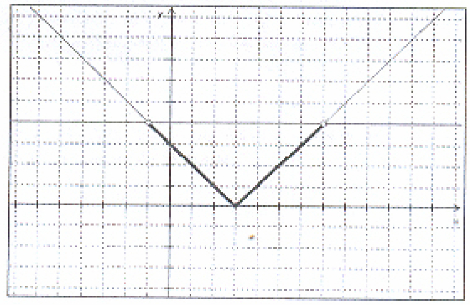
a) Determine la desigualdad que se representa en la gráfica (parte oscura).

b) Muestre en la gráfica, el intervalo solución a la desigualdad dada.

c) Diga cuál es el intervalo solución.

d) Plantea la desigualdad, resuélvela aplicando las propiedades vistas en clase y corrobore el resultado del intervalo solución que se dio en el punto anterior.

6. Teniendo en cuenta la gráfica que se muestra a continuación



a) Cómo se define la gráfica

b) Determine la desigualdad que representa la gráfica

c) Plantea la desigualdad, resuélvela aplicando las propiedades vistas en clase y corrobore el resultado del intervalo solución que se dio en el punto anterior.

7. Represente gráficamente $|x-a|>b$, donde a y b son números reales, y determine el intervalo solución en término de a y b.