Estudio del proceso de argumentación y demostración por inducción matemática en un curso de teoría de números

Trabajo de investigación

José Ricardo Herrera Alfaro

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2023

Dedicado a:

...Dios todo poderoso…

...Amada, José Luis y Dannys Alejandra ...

Agradecimientos

A mis padres Amada y José Luis por ser la fuente de mi motivación, por darme la vida y ser ejemplo de fortaleza y fuerza ante las adversidades, gracias por todas sus enseñanzas día tras día; a mi hermana Dannys Alejandra por brindarme tiempo y fortalezas; a mi familia, son el mejor regalo que la vida me brindó.

A mis amigos Hernán, Paula, Yessika, Sebastián, Edwin, Cristian, Raymond.

A mis amigos y compañeros de estudios: Joao, Yessika, Ana, Angélica, Joaquín.

A mi director del trabajo de grado, profesor Jorge Enrique Fiallo Leal, por el tiempo, la paciencia y su invaluable orientación en el proceso de esta investigación.

A los profesores Carlos Mario Jaramillo López y Dora Solange Roa Fuentes por sus valiosos aportes los cuales, sin duda, enriquecieron el reporte de la investigación.

A Yulieth, quien me inspiró a terminar la maestría; gracias por tanto apoyo incondicional. Gracias por estos años que he compartido junto a ti.

Índice

Pág.

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Lista de apéndices

Resumen

Título: Estudio del proceso de argumentación y demostración por inducción matemática en un curso de teoría de números*

Autor: José Ricardo Herrera Alfaro**

Palabras Claves: Argumentación, Demostración, Inducción Matemática

Descripción:

Se reporta una investigación de diseño de un experimento de enseñanza que tuvo como objetivo Analizar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática mediante la construcción de una unidad de enseñanza dirigida estudiantes que inician un curso de Teoría de Números en la Universidad Industrial de Santander. Para dar sustento teórico y metodológico a esta investigación se usó una herramienta de análisis y un marco conceptual que analiza unidad o ruptura cognitiva (Garuti et al., 1996), del proceso de argumentación desde el punto de vista estructural y referencial (Fiallo, 2011; Pedemonte, 2005; Pedemonte & Balacheff, 2016) entre los procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones; estos elementos permitieron identificar las dificultades y errores presentes en los dos procesos.

Para alcanzar el objetivo de investigación se tomó como punto de partida una conjetura que gira en torno a mitigar las dificultades de aprendizaje de Principio de inducción matemática, se diseñó e implementó la unidad de enseñanza y se analizó cómo esta unidad promueve la comprensión del PIM

Entre los resultados obtenidos en la investigación se encontró que el estudiante necesita realizar procesos de generalización de patrones y planteamientos de sus propias conjeturas para propiciar la construcción del significado de la estructura del PIM. Y para posibilitar este proceso se debe transitar por etapas o núcleos conceptuales de temas en matemáticas en los que el PIM es aplicable.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal

Abstract

Title: Study of the argumentation and demonstration process by mathematical induction in a number theory course[*]

Author: José Ricardo Herrera Alfaro[**]

Key Words: Argumentation, Demonstration, Mathematical Induction

Description:

This document reports an investigation of a teaching design experiment that aimed at designing, implementing, and evaluating a teaching unit of the Principle of Mathematical Induction (PMI) intended for students who are starting a Number Theory course at the Industrial University of Santander; it is focused on the cognitive rupture between the conjecture approach and the construction of proof by mathematical induction. The conceptual framework supports this research theory, along with a methodological tool which analyses the unity or cognitive rupture (Garuti et al., 1996), the argumentation and the demonstration process from a structural and referential point of view (Fiallo, 2011; Pedemonte, 2005; Pedemonte & Balacheff, 2016) of the proposing process of conjectures and building proofs, which helped identifying the difficulties and errors present in the two processes.

To achieve the research objective, a conjecture about mitigating the learning difficulties of the PMI was applied as a starting point; also, a teaching unit was designed and implemented to analyze how it promotes the understanding of PMI.

Among the investigation results, it was found that students need to carry out processes of generalization of patterns and propose their own conjectures to promote the understanding of the PIM structure. This process was possible through the implementation of stages or conceptual nuclei of mathematical topics in which the PMI is applicable.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal

Introducción

Las matemáticas en el ámbito formal siempre buscan ser validadas mediante la demostración, en el descubrimiento de nuevas proposiciones se presenta el proceso de plantear conjeturas, la conjetura es un proceso, en algunos casos más difícil que la misma demostración y, por tanto, requiere atención promover el proceso de plantear conjeturas. Este hecho se presenta en todo el campo de las matemáticas, independiente del método de demostración que se emplee para demostrar la conjetura.

En relación con la preocupación mencionada anteriormente, trabajos como Stylianides et al (2007); Stylianides, Sandefur y Watson (2016); Pedemonte (2008); Fiallo (2011); López (2017); Fiallo y Gutiérrez (2017); Faizah et al., (2020) investigaron sobre las dificultades para demostrar bajo el enfoque de plantear conjeturas y construir demostraciones desde diferentes áreas de la matemática, estas investigaciones analizan las producciones de los estudiantes, identifican las dificultades para construir demostraciones deductivas al resolver problemas bajo este enfoque, concluyen que una de las razones es que estos procesos no han sido promovidos en cursos previos.

En particular, se centra la atención en las dificultades para aprender el método de demostración por inducción matemática, se encontró trabajos que investigan la forma de razonamiento por inducción matemática, sus orígenes, fundamentación en la historia de la matemática, alcances, dificultades y errores en su aplicación, de los cuales afirman que: los estudiantes lo aplican correctamente en muchos casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo aplican de manera mecánica sin comprender su significado. Estas dificultades se convierten en la razón que da origen a los propósitos de este trabajo. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente y la hipótesis de Mariotti (2006), se plantea la siguiente pregunta de investigación.

Por lo anterior, se desarrolla una investigación de diseño de un experimento de enseñanza, con el objetivo de Analizar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática mediante la construcción de una unidad de enseñanza dirigida estudiantes que inician un curso de Teoría de Números en la Universidad Industrial de Santander. La investigación adaptó el proceso metodológico que define a una investigación de tipo diseño de un experimento de enseñanza.

A continuación, se describe la estructura del presente documento el cual se desarrolla en nueve capítulos como se muestra a continuación.

Capítulo 1. Problema de investigación. Aquí se expone la problemática que llevó a realizar este proyecto de investigación.

Capítulo 2. Pregunta y Objetivo de Investigación. Se enuncia específicamente la pregunta y el objetivo de investigación.

Capítulo 3. Antecedentes Aquí se dan a conocer algunos estudios relacionados con el origen del PIM, las dificultades de aprendizaje del PIM, estudios que han indagado en la problemática de la construcción de significado del PIM y estudios que orientaron el planteamiento o los análisis que aquí se presentan.

Capítulo 4. Aspectos teóricos y aspectos conceptuales. Este capítulo contiene los referentes teóricos que sustentaron el análisis de información producto de la implementación de la unidad, mismo que contribuyeron en el diseño del tipo de problemas de cada núcleo.

Capítulo 5. Aspectos Metodológicos. Aquí se describe en qué consistió casa una de las etapas que permitieron responder a la pregunta de investigación y alcanzar el objetivo planteado, además se realiza una breve explicación del diseño de los núcleos conceptuales que conforman la unidad de enseñanza.

Capítulo 6. Análisis del proceso de argumentación. En este apartado se muestran los análisis de las producciones y discusiones de los estudiantes a lo largo de la implementación de la unidad de enseñanza, análisis realizado con base a los elementos teóricos del Modelo Pedemonte y las dificultades categorizadas.

Capítulo 7. Análisis retrospectivo de la Unidad de Enseñanza. En este apartado se muestra la confrontación de la conjetura definida con los resultados de la implementación de la unidad de enseñanza y las sugerencias generales que deducen de esta comparación.

Capítulo 8. Conclusiones. En este apartado se responde a la pregunta de investigación planteada en el estudio.

1. Problema de investigación

Al realizar una búsqueda sobre investigación en la demostración, se encontró que los estudiantes de todos los niveles educativos tienen dificultades para construir demostraciones en el aula, y poco se ha usado la teoría producida por investigaciones en el campo para abordar dichas dificultades, este fenómeno constituye la problemática de la investigación (Mejía et al, 2017; Stylianides, Stylianides y Philippou 2007; Stylianides y Stylianides, 2017).

Los autores anteriormente mencionados y Mejía et al (2017); Stylianides, Bieda y Morselli, (2016); Stylianides, Stylianides, y Weber, (2017) han expresado su preocupación sobre el papel limitado de la investigación educativa en el apoyo sobre lo que significa comprender una demostración matemática en cursos de pregrado, cómo se puede evaluar dicha comprensión y cómo mejorar la práctica en el aula, especialmente al abordar las dificultades de los estudiantes para aprender matemáticas.

En relación con la preocupación mencionada anteriormente, trabajos como Stylianides et al (2007); Stylianides, Sandefur y Watson (2016); Pedemonte (2008); Fiallo (2011); López (2017); Fiallo y Gutiérrez (2017); Faizah et al., (2020) investigaron sobre las dificultades para demostrar bajo el enfoque de plantear conjeturas y construir demostraciones desde diferentes áreas de la matemática, estas investigaciones analizan las producciones de los estudiantes, identifican las dificultades para construir demostraciones deductivas al resolver problemas bajo este enfoque, concluyen que una de las razones es que estos procesos no han sido promovidos en cursos previos.

Teniendo en cuenta estas investigaciones, se centra la atención en las dificultades para aprender el método de demostración por inducción matemática, enseñado y usado en cursos de álgebra lineal, fundamentos de matemáticas o teoría de números para demostrar proposiciones o teoremas en las que aparezca una variable que tome un valor natural cualquiera. Se encontró trabajos que investigan la forma de razonamiento por inducción matemática, sus orígenes, fundamentación en la historia de la matemática, alcances, dificultades y errores en su aplicación, de los cuales afirman que: los estudiantes lo aplican correctamente en muchos casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo aplican de manera mecánica sin comprender su significado (Crespo, 2016).

De la búsqueda realizada en investigación sobre inducción matemática, Dubinsky (1990); Stylianides, et al, (2007) identificaron dificultades en estudiantes de matemáticas y licenciatura en matemáticas centradas en dos ideas principales; la primera es la esencia base del método, "visto por algunos estudiantes como un procedimiento sin ningún significado real" (Stylianides et al, 2007) y la segunda idea, es que en lugar de intentar demostrar el paso inductivo $P_k \Longrightarrow P_{k+1}$, los estudiantes intentan demostrar P_{k+1}, sin comprender que los pasos del método forman un proceso unificado de demostración, poniendo en evidencia la importancia de promover el aprendizaje y uso correcto del método de demostración.

Por otra parte, Mariotti (2006) recalca la importancia de cambiar la atención de demostrar la proposición general P_k a demostrar la implicación $P_k \Longrightarrow P_{k+1}$, entendida como un paso genérico en una cadena de implicaciones para algún $k \in \mathbb{N}$. Este cambio de atención genera dificultades en los estudiantes; dichas dificultades se vuelven aún más evidentes si se describen en términos de la definición de Unidad Cognitiva o Ruptura Cognitiva, es decir, se debe crear en el estudiante una ruptura entre los argumentos elegidos en el planteamiento de la conjetura y los argumentos que usa para construir la demostración, por esto la autora sugiere que si se plantea una conjetura como resultado de generalización de un patrón, será más sencillo producir una demostración por inducción matemática, pero se requiere pasar de un tipo de argumento empírico de exploración a un argumento netamente genérico puesto que "si un estudiante nunca ha experimentado la producción de argumentos en el proceso de generalización de patrones, puede ser difícil para él captar el sentido de una demostración por inducción matemática" (Mariotti, 2006).

Además, Sandefur et al (2013); Stylianides, Sandefur y Watson (2016) muestran que se debe promover problemas de demostración por el método de inducción matemática, en el que primero se planteen conjeturas e identifique la inducción como el método más apropiado para abordar el problema; de esa manera las conjeturas y argumentos planteados les otorgará herramientas que puedan usar en la demostración. Los autores proponen que "si los estudiantes trabajan en problemas que su formulación no ofrece claramente el enunciado que necesitan demostrar, entonces probablemente los estudiantes se involucrarían en explorar ejemplos y posibles relaciones" (Stylianides, Sandefur y Watson, 2016, p. 33).

Por último, se percibió una dificultad desde la experiencia como tutor y docente (del autor), tanto en colegas como en estudiantes, en cuanto a la falta de promoción de una sólida relación entre el paso base y el paso inductivo en el proceso de la inducción matemática, la naturaleza del método inicia en demostrar la proposición P_1, seguido de una cadena implicaciones $\mathrm{P}_1 \Longrightarrow \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2 \Longrightarrow \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_3 \Longrightarrow \mathrm{P}_4, \ldots$ hasta generalizar el patrón de las implicaciones de la forma $\mathrm{P}_\mathrm{k} \Longrightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{k}+1}$, pero cuando se utiliza el PIM, no evidencian esta cadena de implicaciones en el proceso de la demostración, sólo se centran en demostrar P_1 y $\mathrm{P}_\mathrm{k} \Longrightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{k}+1}$. Al indagar en libros de texto que explican el Principio inducción matemática, no indican que esta relación es de suma importancia.

Las anteriores investigaciones han identificado problemas de aprendizaje para realizar una demostración por el método de inducción matemática. Al realizar la búsqueda de posteriores trabajos relacionados con esta problemática, se encontró que el estudio sobre las dificultades al demostrar por inducción matemática es un campo poco explorado. Estas dificultades se convierten en la razón que da origen a los propósitos de este trabajo. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente y la hipótesis de Mariotti (2006), se plantea la siguiente pregunta de investigación.

2. Pregunta y Objetivo de Investigación

2.1. Pregunta de investigación

¿Cómo propiciar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática a partir de la ruptura cognitiva entre, el proceso de argumentación para el planteamiento de una conjetura y el proceso de argumentación para la construcción de una demostración?

2.2. Objetivo General

Analizar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática mediante la construcción de una unidad de enseñanza dirigida estudiantes que inician un curso de Teoría de Números en la Universidad Industrial de Santander.

2.3. Objetivos específicos

Diseñar una unidad de enseñanza sobre el Principio de Inducción matemática enfocada a la ruptura cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostración por inducción matemática.

Implementar la unidad de enseñanza sobre el Principio de Inducción matemática dirigida estudiantes que inician un curso de Teoría de Números en la Universidad Industrial de Santander.

Evaluar la construcción del significado del Principio de Inducción Matemática identificado de la implementación de la unidad de enseñanza.

3. Antecedentes

El proceso de razonamiento y demostración ha sido objeto de estudio, de discusión y fuente de fenómenos o problemáticas de estudio y llaman la atención para ser abordados desde la investigación en el aula de clase, comenzando con los sistemas de educación básica primaria hasta la educación superior en cada país. En Estados Unidos, los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), plantean el estándar de razonamiento y demostración, aludiendo que mediante este estándar se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento desde los grados iniciales en cualquier tema en matemáticas. Allí se plantea que el razonamiento y la demostración "no son actividades especiales reservadas para temas especiales en el plan de estudios, sino que deben ser desarrollados como procesos naturales de las acciones y discusiones en el aula" (NCTM, 2003, p. 342).

A nivel nacional, los Estándares de Competencias en Matemáticas (2006) al definir el razonamiento, exponen que "en los grados superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos y materiales que tienen sentido, son lógicos, potencian la capacidad de pensar, para trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones" (p. 54), dejando de lado la memorización y producción de reglas algorítmicas en las soluciones pero apoyándose en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, esquemas u otros artefactos.

Ante estos lineamientos, se realizó una búsqueda de información que permitan estudiar el significado de la inducción para responder la pregunta de investigación. En este apartado se muestra una revisión sobre cómo definen el método de demostración en los libros de textos, una mirada a los orígenes del método, investigaciones que presenten resultados ante las dificultades de aprendizaje que tienen los estudiantes sobre inducción matemática, posibles diseños de problemas que permitan mitigarlas, y por último, una mirada al estudio de la relación entre la argumentación y la demostración, por medio de la unidad cognitiva, elemento teórico de estudio que se usará en este trabajo.

3.1. Revisión de los libros de texto.

Se realizó una revisión de los libros guía usados en un curso de álgebra lineal o teoría de números, donde se enseña inducción matemática en la Universidad Industrial de Santander, con el fin de identificar (1) los aspectos que se tienen en cuenta para definir el método de demostración (consideraciones y estructura) (2) el proceso que realizan para explicar inducción matemática y (3) el tipo de problemas que proponen como material de estudio. Los libros seleccionados fueron los siguientes:

- Introduction to analytic number theory, Tom M. Apostol.
- Elementary number theory, 6ta y 7ma Edition, David M. Burton.
- Elementary number theory and its applications, Kenneth H. Rosen.
- Teoría de números para principiantes, Luis R. Jiménez, Jorge E. Gordillo y Gustavo N. Rubiano.
- Álgebra lineal, 6ta y 7ma Edición, Stanley I, Grossman.
- Introducción al algebra lineal, 5ta Edición, Howard Anton.
- Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico, Rafael Isaacs y Sonia Sabogal.

El principio de inducción matemática es presentado como preliminar o fundamento inicial que aportará al resto del contenido. En la mayoría de los libros mencionados se define el método a partir de la formalización axiomática del conjunto de los números Naturales:

El conjunto de los números naturales se puede caracterizar mediante los siguientes axiomas, introducidos por el matemático italiano Giuseppe Peano en 1899, (Rubiano et al, 2004):

A-1 Hay un elemento especial $0 \in N$.

A-2 Para todo $n \in N$ existe un único elemento $s(n) \in N$ llamado el sucesor de n.

A-3 Para todo $n \in N, s(n) \neq 0$.

A-4 Si $n, m \in N$ y $s(n) = s(m)$ entonces $n = m$.

A-5 Si S es un subconjunto de N tal que:

1. 0 es un elemento de S, es decir, $0 \in S$.
2. $s(k) \in S$ siempre que algún $k \in S$, entonces $S = N$.

(Rubiano et al 2004, p. 1)

Notas

1. El conjunto de los números naturales se simboliza N, así la expresión $k \in N$ significa que k es un número natural.

2. Si $k \in N$, el "sucesor" de k se simboliza $s(k) = k + 1$.

3. Se contempla el número cero (0) como natural. En algunos problemas, no se considera y parte de 1 como primer elemento del conjunto.

El axioma **A-5** se conoce como El Principio de Inducción Matemática—abreviadamente, PIM—. En las aplicaciones de este principio la hipótesis $k \in S$, a partir de la cual se demuestra que $k + 1 \in S$, se denomina <u>hipótesis de inducción</u>. Por otro lado, S se define como el conjunto de números naturales que hacen cierta la proposición $p(n)$, simbólicamente

$$S = \{p(n)\ es\ verdadera\}$$

Entonces, usando el principio de inducción matemática, bastaría demostrar:

Si S es un subconjunto de N tal que:

1. $0 \in S$ o, lo que es lo mismo, que $p(0)$ es verdadera. (<u>Paso base</u>).

2. Si $k \in S$, entonces $k + 1 \in S$, es decir, $p(k)$ es verdadera para algún k natural (hipótesis de inducción), entonces se debe demostrar que $p(k + 1)$ es verdadera. (<u>Paso inductivo</u>).

Al demostrar (1) y (2), por el P.I.M, se concluye que $S = N$, es decir, que, $p(n)$ es verdadera para todo $n \in N$. (Isaacs y Sabogal, 2009, p. 4)

En la Universidad Industrial de Santander, la enseñanza del principio de inducción matemática sigue el orden determinado de los libros de texto mencionados; en los cursos de álgebra lineal y teoría de números se estudia como preliminares, principios o fundamentos iniciales, al cual se le dedican tres o cuatro sesiones de clase, dado que es un método de demostración necesario para diferentes objetos matemáticos estudiados en cada curso.

La revisión de los problemas que los libros usan para explicar la inducción matemática y plantear ejercicios de estudio se clasifican en los siguientes tipos:

- Sumas de términos de progresiones aritméticas o geométricas finitas.
- Sumas de términos de una sucesión finita, esta puede variar dependiendo de cómo esté definida la sucesión.
- Productos de términos de una sucesión finita.
- Productos de términos de un factorial o consecuente de propiedades factoriales.
- Definición de Sucesiones recursivas.
- Divisibilidad y algoritmo de la división.
- Propiedades de orden entre los números del conjunto de los naturales.
- Teoremas y propiedades de la aritmética de números o conjuntos (por ejemplo, particiones de un conjunto, propiedades de números primos, funciones aritméticas).

Además de los problemas anteriores, Isaacs y Sabogal (2009) proponen los siguientes tipos de problemas:

- Juegos secuenciados.
- Secuencias de figuras fractales.

La clasificación de estos problemas, pueden ayudar en el diseño de problemas bajo el enfoque de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, como se planea en esta investigación. De estos libros de texto y de los problemas planteados se asume que la inducción matemática es un método de demostración formal/deductivo y requiere un razonamiento inductivo; inician con demostrar el valor de verdad de un caso particular y finaliza al demostrar una implicación genérica. Según Castro, Cañadas y Molina (2010) el razonamiento inductivo es un generador de conocimiento gracias a la generalización que parte de hechos abstractos, descubre patrones y construye nuevo conocimiento.

En la búsqueda de información sobre la demostración por inducción matemática, se encontró el libro "Exploring Mathematics, Problem-Solving and Proof" del matemático alemán Daniel Grieser, publicado en 2018. Este libro presenta nociones de exploración, ejemplificación y planteamiento de conjeturas para problemas de inducción matemática. Los problemas no explicitan las conjeturas y priorizan la construcción de "relaciones de recurrencia" para definir el término n-ésimo de un problema de conteo y otros tipos de problemas de diferentes ramas de la matemática. Estos elementos teóricos comparten algunas ideas sobre el planteamiento de problemas con este trabajo y se profundizará en ellos en el siguiente capítulo. El contenido del libro sugiere qué herramientas debe tener un estudiante para demostrar por inducción matemática mientras desarrolla habilidades de resolución de problemas.

En cuanto a las dificultades de aprendizaje de la inducción matemática, desde el punto de vista didáctico, se observa un distanciamiento entre el paso inductivo. Es decir, los libros de texto no contemplan que el proceso para demostrar casos particulares ($P_1 \Longrightarrow P_2, P_2 \Longrightarrow P_{3,} \dots P_6 \Longrightarrow P_7$ ...) en el paso base puede ayudar a demostrar el paso inductivo, utilizando el mismo proceso de las implicaciones anteriores. Para resolver esta problemática, el profesor debe desarrollar en el estudiante un pensamiento inductivo, educándolo en la verificación de cierta propiedad para casos particulares, de los cuales se infiere una hipótesis y una tesis que luego se demuestra (Peña et al., 2019, p. 406).

Se ha identificado que en los libros analizados no se promueve el planteamiento de conjeturas en los estudiantes. Aunque esta estrategia no es común en el aula, es importante en la naturaleza de las matemáticas, ya que se hace matemática desde el empirismo, lo especulativo, la exploración y la comprobación. Sin embargo, en los problemas dados en los libros ya está planteada la conjetura o el teorema. Es importante considerar cómo acercarse a la demostración, explorando casos particulares sin perder la formalidad, explicando y mostrando las diferentes formas del Principio de Inducción Matemática (PIM) equivalentes, para que los estudiantes puedan plantear sus propias conjeturas, utilicen el método de inducción matemática y puedan definir o formular argumentos que permitan un buen entendimiento del método (Avital y Libeskind, 1978).

3.2. Contexto y origen de la Inducción matemática.

En esta sección se presenta un acercamiento histórico-epistemológico de la inducción matemática con un enfoque educativo con la finalidad de identificar tres aspectos: (1) ¿cómo surge la inducción matemática?, (2) saber cuáles son las situaciones que influyeron para que se haya generado dicho conocimiento matemático, y (3) encontrar fundamentos necesarios y propios de la inducción matemática. A partir de estos aspectos, se busca reorientar el sentido de la inducción matemática, es decir, hallar argumentos para darle un sentido o significado distinto y en ocasiones hasta contrastante del método enseñado como concepto, así, desarrollar un rediseño de problemas usados en el aula y poder dar una aproximación al proceso de aprendizaje del PIM, entendido el término aprendizaje como la adquisición del conocimiento de un objeto matemático por medio del estudio.

Durante los siglos XVI y XVII, se encuentran las primeras evidencias de la inducción matemática. Francesco Maurolycus (1494-1575), un matemático italiano, es uno de los primeros en haber empleado este método, como se puede constatar en sus trabajos (Vacca, 1909; del Busto, 1964; Ernest, 1982). Maurolycus hizo importantes aportes al movimiento del

Renacimiento, que se centró en la recuperación de trabajos griegos como los de Euclides, Arquímedes y Apolonio, lo que permitió la transmisión de la ciencia griega a Europa (Vacca, 1909). De hecho, Maurolycus fue conocido como el segundo Arquímedes debido a que empleaba los métodos de este último como recursos para descubrir nuevas conjeturas y sopesarlas con herramientas empíricas (del Busto, 1964).

Francesco Maurolycus fue el primer matemático en utilizar la inducción matemática en su obra la arithmeticorum libri duo (1557), que formaba parte de la colección "D. Francisci Maurolyci Opuscula mathematica." En su trabajo, Maurolycus desarrolló proposiciones bajo la filosofía Euclídea, demostrando cada proposición utilizando resultados previamente demostrados.

Según del Busto (1964), Maurolycus empleó razonamientos donde se exhiben procesos hereditarios al demostrar las proposiciones 13, 15, 65, 66 y 67. En particular, en las proposiciones XIII y XV, Maurolycus utilizó argumentos de la inducción matemática y proposiciones anteriores para demostrar la presentación de sumas de números impares:

Proposición 13: Si a es un número, entonces, $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

Usando esta proposición demuestra que:

Proposición 15: la suma de a números impares es igual al siguiente número cuadrado colateral, en símbolos modernos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2a + 1) = (a + 1)^2$$

(Vacca, 1909, p. 71).

Las dos proposiciones anteriores se demostraron de la siguiente forma:

Para P13, en particular cuando un número impar de unidades después de un cuadrado sigue, a saber, el 4, el segundo cuadrado, tercero, con un número impar, a saber, 5, un tercer cuadrado 9. De manera similar, el tercer cuadrado, con el cuarto impar, es decir, 7, hace cuadrado el cuarto, es decir 16. Y así hasta el infinito siempre se demuestra P13 repetidamente. (Vacca, 1909, p. 71).

Para demostrar la proposición 15, Maurolycus utilizó el razonamiento de demostrar los casos base (para a=1,2,3) utilizando la proposición 13, y luego utilizó el paso inductivo para demostrar la implicación $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$. (del Busto, 1964).

La forma adoptada por Maurolycus con el objetivo de persuadir al lector de la verdad de sus demostraciones es generalmente la siguiente: aplica el razonamiento a los primeros casos particulares, muy a menudo a los primeros cinco casos, y luego concluye con alguna de estas frases (en términos actuales):

"Se deduce lo mismo para algún otro caso, usando el mismo razonamiento".

"El argumento desde el quinto caso al siguiente, puede ser usado para concluir en cualquier otro caso al siguiente".

"Se usa el silogismo de un caso al siguiente, de la misma forma que del quinto caso al sexto para que el problema haya concluido". (Vacca, 1909)

Siguiendo la línea de la inducción matemática, el francés Blaise Pascal (1623-1662) empezó describiendo el triángulo aritmético en su obra el *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière,* dando sus propiedades y componentes, así como sus 19 consecuencias (del Busto, 1964). En la consecuencia décima segunda usó la formulación de la inducción matemática sin nombrar a Maurolycus como argumento de su demostración. Según Vacca (1909), duda del desconocimiento de Pascal por Maurolycus, debido a que en posteriores demostraciones nombra el razonamiento de Maurolycus para argumentar proposiciones.

> “En su Traite du triangle arithmétique (1657), nunca menciona a Maurolycus, a pesar de que, en mi opinión, este tratado es solo una aplicación del método descubierto por Maurolycus. Pero Pascal, poco después, enfrascado en la polémica sobre la cicloide, en la conocida "Lettre de Dettonville à Carcavi" tuvo que demostrar una proposición sobre los números triangulares y piramidales. Entonces dice: "CELA EST AISÉ PAR MAUROLIC." *(Se tiene por Maurolycus).* Es extraño señalar que ni siquiera el nombre de Maurolycus ha sido incluido en la Tabla analítica de la antigua edición de las obras de Pascal”. (Vacca, 1909, p. 72)

Estos hallazgos encontrados, en particular, la opinión de Vacca (1909), conducen a que el razonamiento usado por Pascal es consecuente de las ideas originarias de Maurolycus, salvo que se tenía un lenguaje simbólico más avanzado. Maurolycus utilizó procedimientos los cuales lo llevaron a usar una u otra proposición; necesitó tener la certeza de que lo que hacía era correcto y válido y fue entonces que empleó la inducción matemática para demostrar. Pascal utilizó un método de demostración que utiliza dos lemas los cuales son los que actualmente se conocen como paso base y paso inductivo (del Busto, 1964).

En resumen, la inducción matemática surgió por la razón de querer demostrar ciertas proposiciones o resultados, algunos de esos resultados eran considerados verdaderos y con la inducción matemática se demostraba; pero, para lograr comprobar o validar era necesario desarrollar la construcción de significado desde lo empírico, así entender la repetición indefinida de un mismo acto en diferentes casos. Este proceso fue necesario para generalizar un patrón de recurrencia (PR) del acto, aun cuando dicho acto solo se haya planteado una sola vez.

El acercamiento al origen del método, también nos muestra que los problemas primero transitan por un proceso especulativo y de exploración, que permitirá crear proposiciones verdaderas y demostrarlas bajo el mismo proceso. Problemas que luego serán consecuentes para otros generados por el interés de una comunidad. El origen del método devela a su vez un ejemplo del tipo de problemas que se pueden abordar demostrando por inducción, siguiendo un patrón de generalización del procedimiento para todas las implicaciones, usando los mismos argumentos que en casos particulares.

3.3. Investigaciones sobre la argumentación en inducción matemática y problemas de plantear conjeturas y construir demostraciones.

El principio de inducción matemática es un tema clave en la educación matemática y ha sido objeto matemático de estudio de varias investigaciones en los últimos años. Las investigaciones se han centrado principalmente en la enseñanza de la inducción matemática, las concepciones y dificultades de los estudiantes en relación con este principio y las estrategias de enseñanza más efectivas.

A continuación, se exponen investigaciones que identificaron dificultades de aprendizaje y plantearon posibles soluciones para mitigarlas, desde diferentes perspectivas. Algunas de estas consideran de gran importancia el desarrollo de una argumentación para el planteamiento de una conjetura que puede ayudar a la construcción de su posterior demostración, tal como se ha asumido en esta investigación.

Ron y Dreyfus (2004) reconocen la problemática encontrada al momento de utilizar la inducción matemática, presentan resultados de entrevistas con seis profesores de secundaria experimentados, sobre el uso de modelos en la enseñanza de la inducción matemática, no necesariamente limitado a modelos físicos; hacen sugerencias de cómo abordar a la inducción matemática centrándose en tres aspectos en el que la comprensión significativa de la demostración por inducción matemática requiere un conocimiento complejo: comprender la estructura de la demostración por inducción matemática, comprender la etapa de la base de inducción y comprender la etapa del paso de inducción.

Además, plantean sugerencias sobre la forma de presentarla más entendible o sencilla y en ellas, los autores sugieren una analogía por medio del modelo (una de ellas es la del efecto dominó o la historia de las torres de Hanoi), para minimizar las dificultades del estudiantado. Sugieren que en el paso de $P(1)\ a\ P(k)$, demostrar también las implicaciones de los casos $P(1), P(2), P(3), P(4)$ y con ello conjeturar $P(k)$. También consideran que el uso de modelos para apoyar, ilustrar e interpretar la comprensión mediante el uso de un lenguaje pictórico, contribuye la explicación de la demostración por inducción matemática, "hemos demostrado que los profesores podrían hacer un uso más profundo de los modelos, en particular con respecto a los puntos delicados relacionados con la hipótesis de inducción" (Ron y Dreyfus, 2004, p. 120).

Siguiendo esta misma línea de las dificultades de aprendizaje del estudiante respecto a la demostración por inducción matemática y sugerencias al profesorado para mitigarlas, Cusi y Malara (2008), con el objetivo de promover la comprensión del PIM y corregir conceptos erróneos aprendidos previamente, diseñaron un método de enseñanza para fomentar la comprensión PIM mediante la clarificación de sus aspectos lógicos por los estudiantes, empleando un enfoque no tradicional para enseñar el PIM, con 44 maestros que estaban completando un curso de capacitación docente. Un concepto erróneo típico entre los estudiantes es que en la inducción "asumen lo que tiene que demostrar y luego lo demuestra" (Ernest, 1984, citado en Cusi y Malara 2008).

Cusi y Malara se fundamentan en los tres aspectos del conocimiento para fomentar una comprensión significativa de una demostración por inducción matemática de Ron y Dreyfus (2004) y Ernest (1984), en sus sugerencias propuestas para plantear el enfoque no tradicional. La estructura del enfoque incluye como pasos esenciales: un análisis exhaustivo del concepto de implicación lógica, una introducción del PIM a través del enfoque empírico, trazando paralelismos entre la inducción matemática, el orden de los números naturales, el uso de metáforas de referencia y una presentación de ejemplos de inducción donde no se presente directamente el proceso para enfatizar la importancia de la base inductiva.

De las observaciones y análisis de los protocolos de los alumnos se validó la eficiencia de la estructura de su enfoque para desarrollar una comprensión profunda de la inducción matemática, "los resultados positivos de las pruebas finales atestiguan la validez de nuestra hipótesis de investigación sobre los aspectos fundamentales para una introducción productiva al uso del PIM como herramienta de demostración" (Cusi y Malara, 2008, p. 21).

Este enfoque diferente permite superar el desconcierto de los estudiantes ante el salto de la base de inducción al paso inductivo; es abordar la inducción matemática mediante la argumentación empírica, demostrando la implicación de $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ para valores particulares de k "no por simple cálculo sino encontrando una estructura de transición que sea la misma para el paso de cada valor de k al siguiente" (Avital y Libeskind 1978, citado en Cusi y Malara 2008).

Por otro lado, Mariotti (2006) plantea que "los matemáticos han llegado a un acuerdo sobre la aceptabilidad de un tipo particular de argumento inductivo, comúnmente llamado inducción matemática" (p. 186). También menciona que, es un método de demostración que ha sido difícil y no está exento de debate, pero se usa y enseña comúnmente en cursos avanzados de matemáticas. Mariotti nombra que Harel y Sowder (1998) usan los esquemas de demostración para clasificar la inducción en dos tipos diferentes de argumentos; un primer tipo es aquel en el que la generalización se logra identificando un patrón general en el resultado mismo, es decir, encuentra una regularidad de una serie de cálculos; el segundo tipo consiste en la generalización derivada del proceso que lo condujo al resultado después de una serie de comprobaciones, en otras palabras, se puede observar una cadena particular de pasos que interrelacionan los resultados.

En cuanto a las concepciones y dificultades de los estudiantes en relación con el principio de inducción matemática, varios estudios han examinado las concepciones erróneas que los estudiantes tienen sobre la inducción matemática, así como las estrategias que utilizan para comprender y demostrar afirmaciones inductivas. Por ejemplo, Mariotti (2006) considera que los dos tipos de argumentaciones inductivas tienen relaciones bastante diferentes con el método de demostración por inducción matemática, puesto que, el PIM no centra la atención en demostrar una generalización P_n, sino en demostrar la inferencia $P_{n-1} \Longrightarrow P_n$, tomando esta como un paso genérico de una cadena de inferencias. Identificar esta diferencia se convierte en una dificultad que requiere ser abordada.

Una dificultad identificada por Mariotti (2006) consiste en que, si un estudiante nunca ha experimentado la producción de argumentos como proceso para generalización de patrones, puede ser difícil para él captar el sentido de una demostración por inducción matemática, por lo que sugiere el diseño de intervenciones didácticas que facilite la introducción de los estudiantes a la Inducción Matemática usando generalizaciones de patrones.

Siguiendo esta línea de investigación sobre las dificultades de aprendizaje de la inducción matemática, Stylianides, Stylianides y Philippou (2007) investigan el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación sobre la demostración por inducción matemática, analizaron las respuestas escritas de 95 participantes (estudiantes de licenciatura en matemáticas para primaria y secundaria) a tareas especialmente desarrolladas y en entrevistas semiestructuradas con 11 de ellos, en sus resultados muestran que los futuros profesores de ambos grupos tienen dificultades que se centran en: (1) la esencia del paso base del método de inducción; (2) el significado asociado con el paso inductivo al demostrar la implicación $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ para algún k arbitrario de la proposición P_n; y (3) realizar inferencias en el proceso de la demostración de un enunciado por inducción matemática a partir de los datos del problema sin necesidad de analogías.

Para mitigar estas dificultades, Stylianides (2007) recalcan que el conocimiento de las matemáticas por parte de los profesores debe ser un tema central en las experiencias matemáticas de los estudiantes, ya que el aprendizaje de la demostración depende en gran medida del conocimiento de demostración de los profesores, "de esta manera, los maestros de matemáticas estarán bien posicionados para diseñar e implementar intervenciones de instrucción apropiadas para ayudar a los estudiantes a desarrollar un conocimiento sólido de la demostración" (Stylianides et al 2007, p. 164).

Siguiendo esta línea de investigación, Sandefur et al (2013); Stylianides, Sandefur y Watson (2016) identifican las condiciones para que la demostración por inducción matemática sea explicativa para quien demuestra, es decir, si el principio de inducción matemática proporcionó una forma en el que el estudiante formalice el pensamiento que precedió de la información suministrada en el planteamiento de conjeturas.

Stylianides, Sandefur y Watson (2016) analizan videos de estudiantes de pregrado en matemáticas de una universidad privada estadounidense de un curso de "introducción a la demostración" del cual Sandefur enseña desde 2003. Los estudiantes en este curso habrán tomado dos semestres de Cálculo y, posiblemente, Cálculo Multivariable y / o Álgebra Lineal, cursos en los que han visto qué es el principio de inducción matemática.

Estos autores plantean como hipótesis que los ejemplos pueden desempeñar un papel constructivo en el proceso de demostración explicativa por inducción matemática por parte de los estudiantes, ya que la inducción a menudo implica la elaboración de ejemplos secuenciados que al analizarse pueden describir patrones recursivos que luego lograrían generalizar. Además, describen cuatro aspectos que orientaron la organización del trabajo y a su vez funcionó como marco de investigación:

- En la formulación de los problemas, estos se redactan intencionalmente para que los estudiantes hagan un trabajo exploratorio e identificar la declaración más apropiada para demostrar y resolver el problema (Stylianides, Sandefur y Watson, 2016).
- La experiencia de los estudiantes sobre la posible utilidad de construir ejemplos al comprobar y la familiaridad de los estudiantes al respecto de cómo la construcción de ejemplos puede usarse no sólo para verificar, sino también para exponer relaciones estructurales y generar conjeturas.
- Si se da una combinación entre un problema, el conocimiento, la experiencia y la capacidad técnica de los estudiantes, la demostración puede completarse mediante la manipulación sin prestar atención a las relaciones matemáticas subyacentes. "La actividad de exploración puede ser reforzada cuando un problema se formula con el enfoque de los autores planteado en el primer aspecto" (Stylianides, Sandefur y Watson, 2016, p 24).

El enfoque de los problemas de la secuencia didáctica, como se aborda en Stylianides, Sandefur, y Watson, (2016), va encaminado a plantear conjeturas sin conocer que el método de demostración es por inducción matemática (podría incluir el uso de otro método, contraposición, contradicción, entre otros). Estos autores presentan dos problemas que fueron diseñados, redactados y analizados bajo el enfoque del marco de su investigación anteriormente mencionado, estos problemas les permitieron corroborar la hipótesis de que, si los estudiantes están trabajando en problemas que el enunciado no ofrece claramente lo que necesitan demostrar, es probable que los estudiantes se involucren en la exploración de ejemplos y posibles relaciones. En el análisis de las posibles soluciones de los estudiantes, describen que pueden identificar varias conjeturas y varios métodos de demostración.

Con base en la literatura y sus investigaciones, Stylianides, Sandefur y Watson (2016) exponen las siguientes dificultades y errores en los estudiantes cuando al demostrar por inducción matemática:

- Una dificultad y error común, es la falta de comprensión de quien demuestra, de la necesidad y utilidad tanto del paso base como del paso inductivo.
- Dificultad en profesores que aceptan una demostración por inducción matemática, no porque entiendan el método, sino porque ya sabían que era el camino de solución en situaciones matemáticas equivalentes, pero no proporcionan una forma para formalizar la información sobre una conjetura o si el enunciado es válido, verdadero o falso. (Knuth 2002 citado en Stylianides, Sandefur y Watson, 2016).
- Dificultad centrada en el significado del paso inductivo al demostrar la implicación $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para un n arbitrario en el dominio del discurso de $P(n)$; y la posibilidad de que un enunciado demostrado por inducción matemática pueda aplicarse a un dominio extendido más allá del demostrado. (Stylianides et al. 2007, citado en Stylianides, Sandefur y Watson, 2016).
- Dificultad en entender el paso inductivo, en vez de demostrar la implicación $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, intentan demostrar $P(n+1)$. (Dubinsky 1986, 1990, citado en Stylianides, Sandefur y Watson, 2016)

- Dificultad en entender la esencia del paso base, que fue visto por algunos estudiantes como un procedimiento sin ningún significado real.
- Dificultades en la formulación de una expresión apropiada de las ideas en el enunciado durante la exploración inicial del problema por parte de los estudiantes.

En el mismo sentido, Crespo (2016) plantea algunos de los errores y dificultades que cometen algunos estudiantes cuando demuestran usando el método de inducción matemática, analiza situaciones de aula cuando usan incorrectamente este método, reflejando la falta de comprensión de su significado. La autora designa cuatro casos de problemas que emergen en las producciones de los estudiantes:

El primer caso tiene que ver con *los errores algebraicos*, cometidos en el proceso del paso inductivo, en muchas ocasiones son errores detectados por el estudiante, ya que al saber qué están demostrando (que también se cumple para el sucesor del número), la hipótesis inductiva es a veces usada para forzar y llegar a una conclusión.

El segundo caso se refiere a *la importancia del paso base* en el proceso de demostración por inducción matemática, suele ser en su mayoría un paso sencillo e incluso trivial, es por ello, que descuidan su importancia, su valor de verdad y su significado. “El paso base es fundamental para garantizar el cumplimiento de la propiedad en un conjunto bien ordenado” (Crespo, 2016, p.247).

El tercer caso consiste en que, no en todas las propiedades que involucran a los números naturales es aplicable la inducción (Crespo, 2016), en este sentido, algunos estudiantes usan la inducción matemática siempre que el problema a tratar se relacione con propiedades que lo relacionen con el conjunto de los números naturales, sin determinar sobre qué conjunto se hará inducción, o sin analizar si el método se ajusta a las condiciones dadas. La autora menciona una situación que recrea este caso. Por ejemplo, al demostrar que l*a unión de una familia de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable,* algunos de los estudiantes intentaron usar el método de inducción matemática sobre el número de conjuntos, por tratarse de conjuntos numerables, pero dejan de lado que la unión de conjuntos numerables es infinita y no necesariamente ordenada.

El cuarto caso se trata sobre *los casos de inducción matemática que no necesariamente se representa con una proposición algebraica*, puesto que predomina en los estudiantes "la búsqueda de una expresión algebraica o de una manera de escribir formalmente las ideas que surgen, confundiendo lo formal y lo riguroso en sus afirmaciones" (Crespo, 2016, p.250).

En otra línea de investigación sobre las dificultades de aprendizaje de la inducción matemática, el estudio de R. J. Barwell y E. A. Barbeau (2017), utilizó entrevistas para explorar las concepciones de los estudiantes sobre el principio de inducción matemática y describir las estrategias que utilizan para comprender y demostrar afirmaciones inductivas.

Siguiendo esta línea de investigación, García y Parraguez (2017), usando la teoría APOS como marco junto con un estudio de caso desde una perspectiva dentro del diseño metodológico de la teoría APOS, presentaron un modelo cognitivo del Principio de Inducción Matemática (PMI) a nivel universitario, reformularon la descomposición genética (GD) diseñada por Dubinsky y Lewin (1986) para este concepto, introduciendo y definiendo el paso base en el PMI como un proceso mental.

Los participantes de esta investigación fueron cuatro estudiantes de una universidad chilena matriculados en los programas de Licenciatura en Matemáticas o Educación Matemática.

Una de las categorías de selección como caso de estudio fue que debían haber superado previamente el módulo de álgebra básica para evitar, en lo posible, la limitación de sus construcciones mentales a sólo acciones y/o procesos. Para determinar la validez del paso base y la GD reformulada, diseñaron instrumentos de acuerdo con el ciclo metodológico propuesto por la teoría APOS para encontrar evidencia de si los participantes en la investigación muestran las construcciones mentales que aparecen en el GD con relación al paso base. Diseñaron entrevistas con base en el GD para para luego analizar las producciones de los estudiantes, y en particular sus estrategias de solución.

García y Parraguez (2017) reportan dificultades en los estudiantes para demostrar usando el Principio de inducción matemática, muestran que las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el PIM están determinadas por la lógica implícita en el principio, "muestra aplicaciones mecánicas del PIM (como algoritmo)" García y Parraguez (2017), declaran que la falta de construcción del paso base significa que el PMI es nulo como método para demostrar cualquier propiedad que involucre números naturales.

> "Como resultado, el dominio de aplicación del PIM estaría entonces limitado a conjuntos de números particulares (por ejemplo, subconjuntos de los números naturales), omitiendo así todo un mundo numérico para explorar, en el que la decisión de aplicar el PIM depende del uso efectivo del paso base y el paso inductivo." (García y Parraguez, 2017, p. 142).

En cuanto a la enseñanza de la inducción matemática, varios estudios han explorado diferentes estrategias de enseñanza para mejorar la comprensión y la habilidad de los estudiantes en la demostración inductiva. Por ejemplo, el estudio de P. Bryant y K. Bieda (2021), examinó las concepciones de los estudiantes sobre la inducción matemática y describió una experiencia de enseñanza que incorpora diferentes estrategias de demostración. Además, el estudio de N. Karacapilidis y G. Souleles (2018), utilizó el enfoque de "aprendizaje mediante la enseñanza" para enseñar la inducción matemática y analizó el impacto en la comprensión y la actitud de los estudiantes.

Por otra parte, Fernández, Caraballo y Nieves (2019), con el objetivo de promover experiencias didácticas, que contribuyan al aprovechamiento del trabajo con el método de inducción matemática como recurso para desarrollar el pensamiento lógico-matemático de estudiantes de un preuniversitario que cursaron duodécimo grado; escogieron diez estudiantes de un total de 32 estudiantes. Dan a conocer una metodología basada en cuatro modelos de actividades: "la formalización con la que se le presenta el contenido a los estudiantes; el trabajo con conceptos previos a la demostración; la lógica del proceso de demostración y las formas de aplicación asociadas a la propiedad demostrada". (Fernández et al, 2019, p. 396).

En los cuatro modelos de actividades mencionados anteriormente se articulan de forma coherente, los contenidos de sucesiones numéricas y los respectivos procedimientos para el proceso de demostración. Las acciones y orientaciones para desarrollar cada modelo de actividad son: (1) Identificar el tipo de modelo de actividad a desarrollar, (2) tratamiento de los conceptos fundamentales de sucesiones y series numéricas, (3) tratamiento de los elementos fundamentales del método de demostración por inducción matemática, (4) desarrollo de tareas asociadas al método de demostración, y (5) evaluación de las transformaciones logradas en el estudiante.

En sus resultados Fernández, Caraballo y Nieves (2019) evidencian aún dificultades sobre el manejo algebraico en el paso inductivo, tienen limitaciones en la identificación de términos de la sucesión de sumandos y de la sucesión de sumas parciales, esta situación influye en que el estudiante establezca una hipótesis sin haber fundamentado sus ideas en un razonamiento inductivo (Fernández et al, 2019).

Fernández, Caraballo y Nieves (2019) recomiendan el profesor, formular las afirmaciones y preguntas de forma que no existan contradicciones con la teoría de las sucesiones, “para que los estudiantes tengan éxito en la utilización del método de demostración por inducción matemática y los conceptos asociados” (Fernández et al, 2019, p. 399). Sugieren que contextualice el método de demostración por inducción matemática para el caso de las sucesiones numéricas. También comparten los resultados de las investigaciones anteriormente mencionadas sobre realizar procesos de argumentación para casos particulares que serán de mucha información para la construcción de la demostración “es necesario que antes de la utilización del método de demostración, a los estudiantes se les planteen actividades relacionadas con la manipulación de conceptos previos que sustentarán todo el razonamiento de la demostración que se realizará posteriormente” (Fernández et al, 2019, p. 406).

En cuanto a las estrategias de enseñanza más efectivas, varios estudios han analizado la efectividad de diferentes enfoques y metodologías de enseñanza en la enseñanza de la inducción matemática. Por ejemplo, el estudio de M. E. Landry y K. S. Klosinski (2020), examinó la efectividad de la enseñanza de la demostración en un curso de matemáticas discretas utilizando el principio de inducción matemática.

En general, las investigaciones sobre el principio de inducción matemática en educación matemática han identificado algunas concepciones erróneas y dificultades de los estudiantes y que, a pesar del tiempo transcurrido hasta ahora, aún siguen vigentes. También se han identificado las estrategias de enseñanza más efectivas para mejorar la construcción de significado y la habilidad de los estudiantes en la demostración inductiva. Además, estas investigaciones ofrecen ideas útiles para mejorar la enseñanza de la inducción matemática y la resolución de demostraciones inductivas en general.

Además, se han recopilado de los trabajos sugerencias y observaciones para tratar de minimizar dichas dificultades, tanto para conocimiento a los profesores y estudiantes, como para el diseño de los problemas. Estas investigaciones sugieren un cambio en la metodología de enseñanza del PIM para generar desarrollo de razonamiento inductivo, habilidad de exploración y ejemplificación de casos particulares; relacionar el proceso entre los casos particulares; desarrollo del planteamiento de conjeturas y construcción de la demostración. Estos aportes serán el fundamento del presente trabajo, el cual pretende diseñar problemas bajo el enfoque de argumentación en dos momentos: plantear conjeturas y construir demostraciones.

3.4. Constructo de unidad cognitiva.

En esta sección, se expondrán investigaciones que usan los constructos de unidad o ruptura cognitiva de un teorema, que han permitido analizar, la relación entre la argumentación y la demostración desde diferentes posturas. Como se plantea en este trabajo, algunas posturas comparten la importancia del desarrollo de una argumentación para el planteamiento de una conjetura que puede ayudar a la construcción de su respectiva demostración.

Las investigaciones italianas (Garuti et al, 1996; Mariotti et al, 1997, Mariotti, 2006) sobre el enfoque de los teoremas de la geometría en la escuela, introducen el elemento teórico de unidad cognitiva de un teorema para: (1) enfatizar la importancia de un enfoque holístico a los teoremas, es decir, contemplar los sistemas y las propiedades en conjunto que conllevaron a declarar su valor de verdad, (2) interpretar algunas de las dificultades encontradas por los estudiantes en el enfoque tradicional de la demostración. Boero et al (1996) proponen que, en un contexto educativo adecuado es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas, caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración; como resultado encontraron “evidencia experimental de la unidad cognitiva entre las fases de producción de conjeturas y construcción de la demostración” (Garuti et al, 1998).

Esto lleva a los autores a plantear la unidad cognitiva de un teorema, que se basa en la continuidad existente o no, entre la resolución de un problema que requiere producción de una conjetura y la posible construcción de su demostración (Garuti et al, 1996, Garuti et al, 1998).

Garuti et al (1998) explican a través de ejemplos "emblemáticos" las potencialidades de esta herramienta e indican posibles desarrollos futuros tanto en la investigación como en las implicaciones educativas para el enfoque de la demostración en las escuelas. Definen el este elemento teórico en los siguientes términos:

> *Constructo de Unidad cognitiva* "durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado a través de una actividad argumentativa intensiva, entremezclada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante la etapa subsiguiente de demostración del enunciado, el estudiante vincula con este proceso de forma coherente, organizando algunos de los argumentos producidos anteriormente según una cadena lógica”. (Garuti et al, 1998, p. 1)

Teniendo en cuenta esta definición, con el fin de obtener un indicador de la dificultad encontrada los estudiantes al demostrar un enunciado dado, Garuti et al (1998) definen como brecha entre la exploración del enunciado y el proceso de demostración, la distancia entre: los argumentos para plantear una conjetura, producidos durante la exploración del enunciado y los argumentos que pueden ser explotados durante el proceso de demostración.

Pedemonte (2002) analiza y compara la argumentación que sustenta una conjetura y su demostración en la resolución de problemas abiertos en geometría, basada en los aportes de Duval (1995, 2007) y Boero, Garuti, Mariotti (1996), para analizar la unidad o ruptura cognitiva que puede existir entre la argumentación y la demostración. Señala que tal comparación puede realizarse desde dos puntos de vista: el del sistema referencial y el de la estructura; el sistema referencial está compuesto por el sistema de representación (el lenguaje, la heurística, el dibujo) y el sistema de conocimiento (concepciones, teoremas) de argumentación y demostración y la estructura_es la conexión cognitiva lógica entre declaraciones (abducción, inducción o deducción).

Además, Pedemonte (2002) explica que cuanto mayor es la distancia referencial entre el proceso de argumentación y el proceso de demostración, mayor es la dificultad del estudiante para construir una demostración deductiva. De manera que, para Pedemonte, el análisis de la relación entre la argumentación y la demostración es la forma de determinar la unidad cognitiva (referencial o estructural), y la distancia entre ambos puede causar ruptura cognitiva.

Para el análisis cognitivo de la unidad que puede existir entre los procesos de argumentación ligada a una conjetura y su demostración, desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte utiliza una herramienta basada en la integración de dos modelos, "El análisis estructural se puede realizar mediante el modelo de Toulmin (1958) mientras que el análisis del sistema referencial requiere otro modelo: el modelo cK¢ (Balacheff, 2000, Balacheff & Margolinas, 2005)" (Pedemonte, 2008, p. 388). Pedemonte considera al modelo cK¢ porque, aunque el modelo de Toulmin permite transformar el proceso de resolución de un problema en una concatenación de pasos de la argumentación, de la conjetura, y de la demostración, esto no es suficiente.

Fiallo (2011), apoyado de las ideas de Boero et al (1996); Garuti et al (1998); Pedemonte (2002, 2008), asume la postura sobre la estrecha relación entre la argumentación y la demostración propuesto por estas investigaciones, analiza la existencia de la unidad o ruptura cognitiva entre los dos procesos y analiza posibles dificultades presentes en el trabajo realizado por 17 estudiantes de décimo grado (10°) que se enfrentan a problemas de demostración en Trigonometría.

Fiallo (2011) nombra la integración de dos modelos (la integración del modelo cK¢ en el modelo de Toulmin) usados en Pedemonte (2002, 2008); Pedemonte y Balacheff (2016) como el modelo de Pedemonte, con el modelo analizó la estructura y el sistema de referencia tanto de la argumentación como de la demostración y adapta la unidad o ruptura cognitiva para el análisis estructural y referencias de dichos procesos del estudiante cuando resuelve problemas de demostración sobre trigonometría. A partir de los resultados obtenidos en su investigación reportan cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva: *Unidad cognitiva inductiva, ruptura referencial - unidad estructural inductiva, ruptura referencial – unidad estructural deductiva, unidad referencial -ruptura estructural* y *unidad cognitiva deductiva*.

Hasta aquí se realizó una revisión sobre la línea de investigación centrada en el estudio de la argumentación y la demostración, por medio de la unidad cognitiva de un teorema y el modelo de Pedemonte, con estos elementos teóricos que se articulan, se analizará la actividad argumentativa de estudiantes de teoría de números sobre el principio de inducción matemática.

Para finalizar este apartado, la revisión de estos distintos trabajos de investigación gira alrededor de la problemática definida y sobre la relación entre la argumentación previa al planteamiento de una conjetura y su demostración en inducción matemática, los cuales servirán para fundamentar desde lo didáctico y lo teórico, en el diseño de los problemas y en el análisis cognitivo de las producciones de los estudiantes respectivamente. Además, las revisiones bibliográficas en los libros de texto y el origen del método, aportan información acerca de los núcleos conceptuales en los que se usa la inducción matemática, qué tipo de preguntas y la estructura que conforman los problemas.

4. Aspectos teóricos y aspectos conceptuales

En este apartado se presenta el marco teórico que sustenta el estudio. Se comienza definiendo los términos "Proceso de argumentación y demostración" (Pedemonte, 2002) y "demostración por inducción matemática" (Mariotti, 2006; Pedemonte, 2002). Luego, se introduce la herramienta de análisis enmarcada en la unidad cognitiva de un teorema (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), la cual ha sido adaptada por Fiallo (2011) y Fiallo y Gutiérrez (2017) para (1) diseñar la estructura de los problemas y (2) caracterizar el proceso de argumentación y demostración entre la formulación de conjeturas y la producción de la demostración.

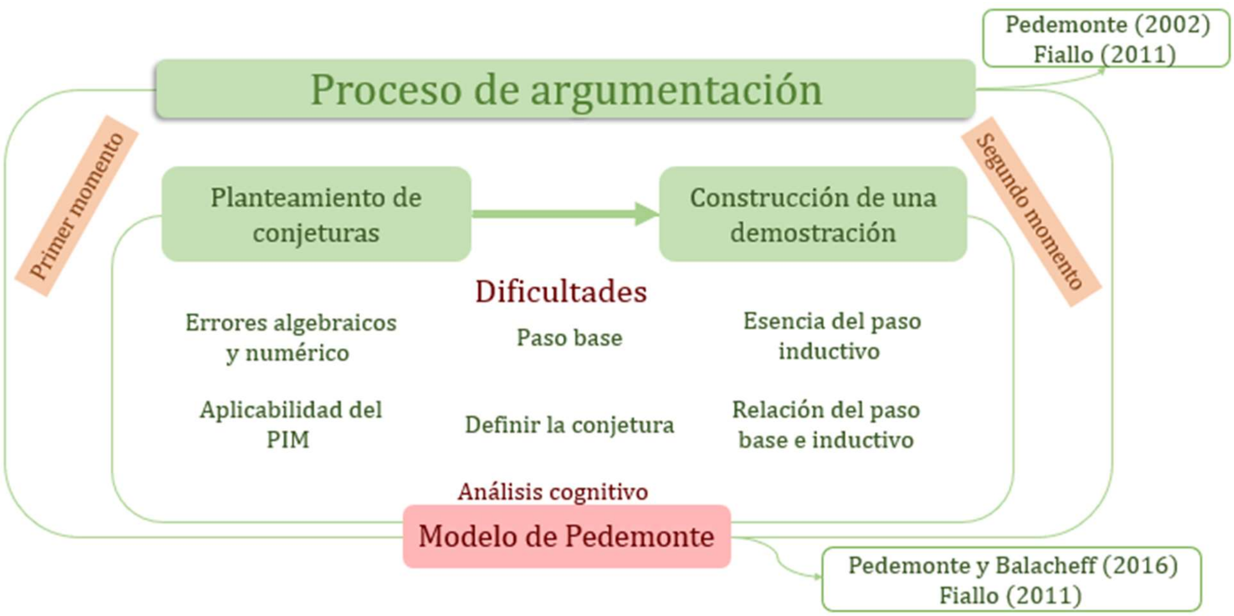
Finalmente, se describe el Modelo de Pedemonte (Fiallo, 2011; Pedemonte, 2002; Pedemonte y Balacheff, 2016), el cual se ha desarrollado como una herramienta de análisis del proceso de argumentación entre la formulación de conjeturas y la construcción de una demostración. Este análisis permite identificar las dificultades de los estudiantes, tal como se ha reportado en la investigación. Si el modelo indica que el estudiante no presenta dificultades para demostrar por inducción matemática, entonces se ha propiciado el significado del método de demostración.

Del estudio de las relaciones entre argumentación y demostración, emerge la hipótesis de que el paso del planteamiento de una conjetura a una demostración puede resultar útil para su construcción. Se parte de esta hipótesis para dar respuesta al objetivo de esta investigación y así mismo, el modelo y el constructo de unidad o ruptura cognitiva se articulan para diseñar y analizar el proceso de Argumentación y Demostración en problemas que promueven el aprendizaje de la inducción matemática en estudiantes de un curso de teoría de números.

A continuación, se presenta un esquema que articula estos elementos teóricos:

Figura 1

Esquema del marco de investigación



4.1. El proceso de argumentación

Pedemonte (2002) realiza la caracterización de argumentaciones presentes en el proceso de argumentación y también muestra cómo está relacionada la argumentación con la conjetura. En el proceso de argumentación se pueden dar las siguientes posibilidades (Pedemonte, 2002):

1. No hay una argumentación ligada a la conjetura, sino que se construye directamente su demostración. Pedemonte (2002) y Fiallo (2011) contemplan que la demostración es un caso particular de argumentación.

2. La argumentación persigue la formulación de la conjetura y pueden estar relacionada de dos formas: (a) para contribuir a la construcción de una conjetura (*argumentación*

constructiva); o (b) para justificar la conjetura dada como un hecho (*argumentación estructurante)*.

Pedemonte (2002) considera y describe tres tipos de argumentación: deductiva, inductiva y abductiva. En este trabajo, el tipo de problema y la metodología de enseñanza no contemplan la argumentación abductiva, por lo cual se precisan sólo las dos primeras.

En la a*rgumentación deductiva* es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos por medio de una regla o teorema a partir de la declaración de una conclusión que se deduce de hipótesis determinadas de antemano, puede que se utilice el lenguaje natural como sistema de representación en la construcción de un enunciado y no estar apoyada por una teoría matemática. Esta es la razón por la que una deducción en la argumentación puede ser semánticamente falsa.

La *argumentación inductiva* o empírica es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos a partir de la observación de casos particulares o hechos observados que se generalizan en un conjunto más extensos de casos o reglas. La inducción, no puede inferir con certeza una conclusión que es construida por una generalización de casos particulares.

Pedemonte (2002) distingue y caracteriza los siguientes tres tipos de argumentos inductivos:

- Argumentación inductiva por generalización, es una inferencia práctica que procede analizando casos particulares hasta que se determina una ley general o propiedad. La generalización permite la abstracción de una propiedad o inferencia entre propiedades, en varios casos. Este proceso puede llevar a dos generalizaciones diferentes: *generalización a partir de un caso particular y generalización sobre el proceso realizado.* Estas generalizaciones se dan cuando el estudiante ve una regularidad a partir de una sucesión de procesos realizados, con casos o conclusiones particulares respectivamente.

- Argumentación inductiva por recurrencia, los cuales se basan en una generalización a n. A partir de una propiedad verdadera en un caso $P(1)$ y el descubrimiento de una relación recurrente entre dos casos sucesivos, enlazamos $P(n)$ y $P(n+1)$. La conclusión del razonamiento es que la regla $P(n)$ es verdadera.
- Argumentación inductiva pasando "al límite", suele ser el caso considerado para verificar la propiedad ya derivada de otros casos. Puede considerarse como un caso extremo: si la propiedad es verdadera en este caso, nos lleva a pensar que también puede serlo en los casos anteriores y es considerado como el caso que está conectado con todos los precedentes y no sólo con el anterior (Pedemonte, 2002).

4.2. Proceso de Demostración

Pedemonte (2002) caracteriza la demostración como parte del proceso de argumentación en matemáticas. Aunque comparten características comunes, la demostración y el argumento son formas distintas de razonamiento en la disciplina (Duval, 1995). En general, las razones para aceptar o refutar una proposición se basan en teoremas que permiten explicar una demostración mediante razonamientos precisos. Sin embargo, cuando los estudiantes construyen demostraciones por sí mismos en el aula, suelen utilizar el lenguaje natural debido a las dificultades que enfrentan para emplear el lenguaje formal de la demostración. Las reglas de la demostración y su lenguaje formal son herramientas que se utilizan para validar una declaración en matemáticas (Pedemonte, 2002).

4.2.1 Características funcionales de la demostración

Como en la argumentación Pedemonte (2002) afirma que la demostración es una justificación racional y tiene un objetivo muy específico "validar un enunciado, una tesis". Desde el punto de vista matemático, validar una declaración significa dar fe de su verdad dentro de una teoría matemática.

- La demostración quiere justificar dentro de un dominio teórico. Si la demostración no se entiende, es difícilmente convincente. Va dirigida a un público universal que está representado por la comunidad matemática en conjunto. Y como tal, esta comunidad reconoce el valor de validación y por tanto de convicción en la ley de la demostración.
- La demostración es relativa a un campo, un campo teórico que determina los criterios de aceptabilidad. "Toulmin acepta la demostración como argumento. Según Toulmin, un paso de demostración es un argumento; los argumentos matemáticos son los argumentos más analíticos que existen" Pedemonte (2002).

4.2.2 Características estructurales de la demostración

Desde las matemáticas, la demostración se construye según el método axiomático que se basa en la formalización del lenguaje, en la formulación de los axiomas y postulados primitivos, en la coherencia y la completitud de la teoría desarrollada (Pedemonte, 2002).

Un argumento puede ser aceptado como demostración, o, por el contrario, la falta de formalismo puede ser un motivo para rechazar una afirmación.

Demostración deductiva

La estructura de la cadena deductiva es una de las primeras características de la demostración que el estudiante debe aprender. La deducción matemática se puede esquematizar de la siguiente manera:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{B}}$$

A $\Longrightarrow$ B es un teorema,

A es una proposición de entrada o dada,

B es la conclusión.

El paso deductivo de una demostración es el modus ponens de la lógica. La deducción es una especie de "mecanismo" que el estudiante debe aprender para construir demostraciones. No se desarrolla espontáneamente en su actividad. Por el contrario, puede parecer artificial y complicado. (Pedemonte, 2002, p. 62)

Demostración por inducción

La demostración por inducción se basa en el axioma de inducción de Peano. Este es un principio que permite establecer la validez de un conjunto contable de proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ para todos los valores de n (entero natural). De la validez de la primera proposición, y del hecho de que la validez de una proposición implica la siguiente. La inducción matemática se puede esquematizar de la siguiente manera:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{P}_1\\ \mathrm{P}_k \Rightarrow \mathrm{P}_{k+1}\end{array}}{\forall n\ \mathrm{P}_n}$$

Si la deducción puede parecer artificial para los estudiantes, aprender a demostrar por inducción es aún más doloroso (Harel, 2001). Ella no es intuitiva. Si no ha sido introducido explícitamente por el profesor, y si no se domina bien, es muy difícil que alguien lo use. (Pedemonte, 2002, p. 64)

En la siguiente sección se profundizará sobre este segundo tipo de demostración, desde la matemática conocida como el Principio de Inducción Matemática (PIM).

4.3. Demostración por el Principio de inducción matemática

La inducción matemática se asocia a distintos dominios en el área (álgebra, geometría, conjuntos, teoría de números) y dentro de estos, distintos objetos matemáticos. Este trabajo limita la enseñanza de la inducción matemática dirigida a estudiantes de un curso de teoría de números, se considera que el estudiante ha desarrollado acercamientos del proceso de argumentación y demostración en cursos que son requisito para la asignatura Teoría de Números. Esta sección contiene dos partes, (1) la definición del principio de inducción matemática y (2) sugerencias didácticas reportadas por la investigación en el tema.

4.3.1 Definición del Principio de inducción matemática

Desde el punto de vista matemático, se considera la demostración por inducción matemática como se define a continuación:

Se define S como el conjunto de números naturales que hacen cierta la proposición $p(n)$, simbólicamente $S = \{p(n)\ es\ verdadera\}$, entonces usando el principio de inducción matemática, bastaría demostrar:

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

1. $1 \in S$ o, lo que es lo mismo, que $P(1)$ es verdadera. (Paso base).

2. Si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$ es decir, asumimos para algún $k, P(k)$ es verdadera (hipótesis de inducción) entonces se debe demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera. (Paso inductivo).

Al demostrar (1) y (2), por el PIM, se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir, que, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. (Isaacs y Sabogal, 2005, p. 4)

4.3.2 Sugerencias didácticas

Con base en la definición y sugerencias de los antecedentes sobre la inducción matemática, se define a continuación, cómo debe plantearse los problemas, qué proceso debe recorrer y qué estructura requiere la demostración por inducción matemática:

Teniendo en cuenta que el trabajo de investigación está dirigido a estudiantes que posiblemente nunca se han enfrentado al reto de plantear conjeturas y de construir demostraciones, se busca que los estudiantes, al ir abordando los distintos tipos de problemas, construyan nuevos conocimientos y herramientas que les permitan (1) propiciar la construcción de significado del principio de inducción matemática y (2) desarrollar la habilidad de demostración por el PIM.

Se fundamentan estas sugerencias didácticas sobre el método de demostración desde la investigación en el campo de las matemáticas y la educación matemática, para mostrar la interpretación de la estructura del método de demostración y permitir analizar el proceso de argumentación y demostración de los estudiantes.

En matemáticas, cuando abordamos un problema que requiere una demostración surge la pregunta ¿Cómo podemos estar seguros de que siempre es así? Se recurre a la demostración como objeto de convicción en ausencia de herramientas, los estudiantes buscan en una demostración una explicación, se esfuerzan en leer la demostración como herramienta para convencerse y convencer a otros, esto radica en que usualmente se enfrentan a problemas que explicitan lo que quieren demostrar sin tener herramientas o exploraciones previas al problema.

“Una demostración no es un requisito previo de la convicción, al contrario, es más bien la convicción la que puede ayudar a la construcción de una demostración” (De Villiers, 1990 citado en Fiallo 2011, p. 84).

Grieser (2018) declara que al resolver un problema matemático recurrimos a diferentes estrategias, algunos se pueden abordar de manera similar: “resuelva el problema reduciéndolo a un problema más pequeño del mismo tipo”. Esta recursividad es una idea fundamental usada a menudo en matemáticas para problemas de conteo, y la ecuación que expresa esta reducción se llama relación de recurrencia Grieser (2018).

Grieser (2018) define la relación de recurrencia de la siguiente manera: *“Una relación de recurrencia para una secuencia de números* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ *es una ecuación que expresa cualquier* a_n *en términos de* $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1$*”.* Este trabajo contempla esta definición como “Patrón de recurrencia (PR)”, porque los problemas promueven el proceso de generalización de patrones para encontrar el patrón de recurrencia entre casos, este elemento se definió previamente dadas las características de los problemas diseñados para la investigación y los reportes de investigación expresados en los antecedentes. Algunos ejemplos de patrones de recurrencia son los siguientes:

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
2. $a_n = na_{n-1}$
3. $a_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$

Las anteriores ecuaciones descritas de manera recursiva, se cumplen para todo n natural, donde los términos están relacionados con él o los predecesores, al menos una vez en la ecuación (por ejemplo, el patrón 2). Por ejemplo, de la segunda ecuación se interpreta: $a_2 = 2a_1, a_3 = 3a_2,\ a_4 = 4a_3, \cdots$.

El patrón de recurrencia resulta útil para plantear conjeturas y una herramienta importante en el proceso de su demostración, en particular, para el paso inductivo en problemas de inducción matemática. En estos problemas (usualmente de conteo) se pretende generalizar la estructura de los casos para plantear la conjetura, al hallar una fórmula que permita calcular cualquier "a_n" definido en términos de n. Grieser plantea una técnica para encontrar y usar el patrón de recurrencia (PR):

> Técnica: Recursión
>
> 1. Busca una relación de recurrencia: ¿Puedes reducir el problema de tamaño n a un problema más pequeño del mismo tipo? En caso afirmativo, obtendrá una relación de recurrencia para la secuencia de números desconocidos a_n.
>
> 2. Plantea la conjetura: Usa la relación de recurrencia para encontrar una fórmula para a_n. Para ello también necesitas una condición inicial, es decir, los valores de a_n para alguna n pequeña (dependiendo de la relación de recurrencia puede ser uno, dos o más valores).
>
> (Grieser 2018, p. 42-43).

Los dos pasos de la técnica de recursión son de carácter muy diferente y no existe una técnica general para encontrar una conjetura, depende del tipo de problema. Plantear el patrón de recurrencia es un proceso que permite visibilizar la relación entre los casos particulares de una proposición $P(n)$ y se usa como un objetivo intermedio para identificar la implicación $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ en casos particulares que faciliten el proceso de demostración en el paso inductivo.

Con base en las sugerencias de Grieser (2018), a continuación, se describen las características de los problemas que se hacen parte del diseño: Para cualquier problema dado, normalmente hay dos tareas: Primero, encontrar el patrón de recurrencia, entendido como una expresión algebraica en términos de la diferencia entre dos términos de una sucesión, por ejemplo: $a_n - a_{n-1} = n$. Segundo, plantear una conjetura basada en la relación de los datos; es decir, hallar una fórmula cerrada/algebraica, no recursiva.

Cada problema contiene datos que permiten ser abordados bajo la exploración y el planteamiento de conjeturas. Deben ser diseñados de modo que no explicite las conjeturas en el enunciado, sino que al operar con el problema se pueda hallar, esto ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de razonamiento inductivo y a argumentar cómo se pueden inferir propiedades generales a partir de casos particulares. Se debe realizar la implicación del paso inductivo en los primeros casos particulares e identificar un patrón de recurrencia, a partir de lo anterior, generalizar el proceso de demostración y finalmente emplear este mismo proceso de demostración en una implicación genérica.

Como se nombró al inicio de la sección, los problemas están dirigidos a estudiantes que posiblemente nunca se enfrentaron al reto de plantear conjeturas y de construir demostraciones. Por tanto, este trabajo adoptó estas investigaciones en el diseño de los problemas, los estudiantes que se enfrentaron a este tipo de problemas usualmente tuvieron dificultades para resolverlos. En la siguiente sección se caracterizan las dificultades que han sido reportadas por la investigación sobre el tema de la demostración por inducción matemática.

4.4. Dificultades de aprendizaje del principio de inducción matemática.

De los reportes de investigación plasmados y profundizados en los antecedentes (Dubinsky (1990); Ron y Dreyfus (2004); Stylianides et al (2007); Pedemonte (2008); Cusi y Malara (2008); Crespo (2016); Fernández, Caraballo y Nieves (2019); García y Parraguez (2017); Stylianides, Sandefur y Watson (2016)), se toma en cuenta las siguientes dificultades identificadas durante el proceso de demostración por inducción matemática:

Errores numéricos y algebraicos. (J_1)

Crespo (2016) reporta que estos errores son cometidos en el paso base o paso inductivo y usualmente no son detectados por los estudiantes, "por saber que están demostrando la propiedad para el sucesor de un elemento de la hipótesis inductiva son a veces utilizados para "forzar" el resultado" (Crespo, 2016, p. 246). Los estudiantes cometen errores al realizar operaciones numéricas al realizar los cálculos de los primeros casos de la demostración; por ejemplo, cometen errores al asignar el valor a los términos de una sucesión, esta dificultad impide el paso a la generalización de un patrón ya que no permite ver la relación entre cada caso particular.

Dificultad para argumentar la demostración del paso base. ($\mathbf{J_2}$)

El proceso de demostración en el paso base del principio de inducción matemática suele ser corto y en muchas oportunidades trivial, pero no sencillo de entender qué se quiere demostrar. Los estudiantes normalmente concentran su atención en la realización del paso inductivo, ya que es el proceso que puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el paso base, su significado e importancia. Crespo (2016) y García y Parraguez (2017) ejemplifican esta dificultad con el siguiente problema de demostración por inducción matemática:

Considere la función proposicional $p(n)$: $n^2 + 5n + 1$ *es par.*

> *a) Demuestre que si* $p(n)$ *es verdadera, entonces* $p(n+1)$ *es verdadera para todo* n *natural y saque conclusiones.*
>
> *b) ¿Para qué valores de* n *es* $p(n)$ *realmente cierto? ¿Qué podemos concluir?*

El problema tuvo como objetivo determinar si los estudiantes comprendían que la verificación del paso inductivo no garantiza la veracidad de una proposición, e incluso mostrar que aún si el paso inductivo puede demostrarse, la propiedad puede no ser válida para ningún caso, dado que el paso base no es verdadero, en particular, esta función proposicional es falsa para todo natural.

En ambas investigaciones (Crespo, 2016; García y Parraguez, 2017), se reportó que hubo casos de estudiantes que se centraron en escribir la demostración del paso inductivo (*inciso a) del problema*) y concluyeron que "por el principio de inducción matemática" la proposición es válida para todos los naturales, pero no tomaron en cuenta que debían demostrar el paso base, por lo tanto, por la definición del principio no puede afirmar su aplicabilidad.

> "El estudiante, sin embargo, no es capaz de identificar que el problema es que no ha verificado el caso base y que por lo tanto la demostración del paso inductivo no garantiza el cumplimiento de la propiedad para todos los números naturales, e incluso en este caso no se verifica para ningún número natural la propiedad." (Crespo, 2016, p. 247).

Dificultad para identificar la esencia del paso inductivo. (J_3)

Esta dificultad se centra en la estructura lógica del paso inductivo; investigaciones como Mariotti (2006), Stylianides, Stylianides y Philippou (2007), Stylianides, Stylianides y Watson (2016) reportan que los estudiantes tienen dificultades asociadas al significado asociado al paso inductivo para demostrar la implicación $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para un k arbitrario que pertenece al conjunto de los naturales.

La dificultad se relaciona "con el carácter de la implicación como una entidad total: en lugar de intentar demostrar el paso inductivo $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, varios estudiantes intentan demostrar $P(k+1)$" (Stylianides et al 2007, p. 149).

Dificultad para identificar cuando es aplicable la inducción matemática. (J_4)

Como se ha venido relatando, el método de demostración por inducción matemática tiene sus raíces en la construcción axiomática del conjunto de los Naturales y los tipos de problemas sobre el método están relacionados con variables en el conjunto. Una dificultad latente en las aulas de matemática es que los estudiantes aplican inducción matemática siempre que encuentren una propiedad que menciona a los números naturales, sin analizar si es aplicable o no.

Los estudiantes en algunos casos manejan el método de demostración y se espera que comprendan su significación y las implicaciones de su aplicación; pero, existen casos donde los problemas, a pesar de estar relacionados con los naturales, la variable que modela la proposición no es natural. Crespo (2016), ejemplifica esta dificultad con el siguiente problema: *demuestre que la unión de una familia numerable de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable.*

Algunos de los estudiantes intentaron usar el método de inducción matemática sobre el número de conjuntos por tratarse de conjuntos numerables, pero dejaron de lado que la unión de conjuntos numerables es infinita y no necesariamente ordenada.

Esta dificultad se hace visible en problemas que requieren analizar el error de una demostración y los pasos están debidamente escritos, lo que demuestra que los estudiantes asumen la inducción matemática "como una técnica, pero que se la había vaciado de significación, no reconociéndose lo que en realidad se está demostrando y para qué casos es aplicable." Crespo (2016).

Dificultad para identificar la proposición a demostrar. (J_5)

Usualmente los problemas de inducción matemática están relacionados con sumas finitas y los estudiantes suelen resolver este tipo de problemas de forma sencilla o algorítmica (Cusi y Malara, 2008), pero usualmente presentan dificultades para resolver problemas de inducción matemática cuando no conocen una expresión algebraica o la proposición que deben demostrar. Crespo (2016) planteó el siguiente problema de inducción matemática a estudiantes de cuarto nivel en licenciatura en matemáticas:

En un grafo no orientado, la suma de los grados de los vértices coincide con el doble del cardinal del conjunto de aristas. Demostrar por inducción matemática ¿sobre qué conjunto realizas inducción? (Crespo, 2016, p. 249).

En el proceso de argumentación del problema los estudiantes tenían presente los pasos de inducción matemática, pero no recordaban su significado, tuvieron dificultad en desarrollar el problema porque no comprendían en qué conjunto aplicar la inducción. Predomina en los estudiantes el enfoque formal puesto de manifiesto en la búsqueda de una expresión algebraica o de una manera de escribir formalmente las ideas que surgen, confundiendo lo formal y lo riguroso en sus afirmaciones (Crespo, 2016).

Stylianides, Stylianides y Watson (2016) reportan que este tipo de dificultad se hace más visible cuando se plantean problemas que requieran plantear conjeturas y construir demostraciones; estos problemas requieren que el estudiante explore y realice ejemplos que permita definir una conjetura, se convierte así en un reto que el estudiante no ha enfrentado y por consiguiente muestra dificultades. En matemáticas se suele precisar la proposición a demostrar y una vez conocido el método más razonable para demostrarlo, continúan con la demostración, sin tener que pensar necesariamente por qué el enunciado es verdadero (Stylianides et al, 2016).

Dificultad para entender la relación entre el paso base y el paso inductivo. (J_6)

El proceso de demostración para entender la transición de los dos pasos de la inducción matemática, es otra dificultad latente en la enseñanza y aprendizaje del PIM. Desde el punto de vista matemático, la definición del principio no visibiliza la relación entre los pasos base e inductivo, pero no implica que no esté presente. Ron y Dreyfus (2004) y Cusi y Malara (2008) identifican que los estudiantes presentan dificultades para construir demostraciones por el PIM dado que hay una “confusión de los estudiantes ante el salto del paso base al paso de inductivo” (Cusi y Malara, 2008). Este salto se produce porque los estudiantes, aunque conocen el subconjunto al que pertenece el elemento k (usualmente en los naturales), no relacionan que puede tomar cualquier caso, incluyendo la implicación $P_1 \Longrightarrow P_2$, por el contrario, se contempla el caso “para algún k natural” como una variable.

Mariotti (2006) sugiere que el uso del PIM requiere un cambio de atención, de demostrar el enunciado general $P(n)$ a demostrar la inferencia $[P_{n-1} \Longrightarrow P_n]$, concebida como un paso genérico en una cadena de inferencias $(P_1 \Longrightarrow P_2, P_2 \Longrightarrow P_3, \ldots, P_{k-1} \Longrightarrow P_k)$. Ron y Dreyfus (2004) y Cusi y Malara (2008) sugieren abordar la demostración por inducción matemática, mediante inducción ingenua. Inducción ingenua consiste en mostrar el paso de $P_{k-1} \Longrightarrow P_k$ para particulares valores de k, $(k = 1,2,3, \ldots)$ no por simple cálculo sino encontrando una estructura de transición que sea la misma para el paso de cada valor de k al siguiente (Cusi y Malara, 2008).

Antes de profundizar en la herramienta que permite analizar los elementos teóricos ya mencionados, se debe plantear una postura a lo que en el estudio se refiere a construcción de significado de una demostración, proceso que da lugar al aprendizaje de una demostración.

Al referirse al aprendizaje de la demostración como la adquisición autónoma del conocimiento por medio del estudio de los teoremas que la validen, la postura adoptada en este estudio concuerda con Wenger (1998) en afirmar que este proceso confiere significado a la práctica que se está llevando a cabo. Por lo tanto, resulta necesario aclarar qué se entiende por "significado".

De acuerdo con las sugerencias de Wenger (1998), el término significado no se alude a acepciones filosóficas o semióticas que traten sobre la relación entre un signo y un referente, sino que se trata de expresar una experiencia determinante en la vida. En consecuencia, el significado no surge de la absorción pasiva de información o de la realización de procedimientos mecánicos o rutinarios sino de procesos de argumentación al enfrentar a problemas en los que se requiere plantear conjeturas y validar reglas, propiedades o teoremas matemáticos.

Parafraseando a Wenger, se afirma que los estudiantes adquieren un significado de la demostración que es fruto de la exploración e interacción en la producción de actividad demostrativa, que el mismo grupo va configurando, y el proceso de argumentación en la producción de definiciones y teoremas que alimentan el sistema axiomático de referencia, en consecuencia, si las dificultades reportadas se presentan en los estudiantes, entonces aún no se construye adecuadamente el significado del PIM.

4.5. Herramienta de análisis

De acuerdo con los objetivos y características de este trabajo, se tiene en cuenta las sugerencias de Mariotti (2006), quien resalta la dificultad sobre la esencia del paso inductivo, afirmando que tal dificultad se vuelve aún más evidentes si se describen en términos de Unidad Cognitiva.

> “De hecho, cuando una conjetura es generada por el resultado de la generalización de patrones, construir una demostración por inducción matemática requiere pasar de un tipo de argumento a otro, lo que significa que el estudiante tiene que controlar la brecha entre los dos tipos de argumentos”. (Mariotti 2006, p. 188)

Desde las ideas de Mariotti (2006), las dificultades para demostrar se visibilizan con estos elementos teóricos. Se utilizan estos elementos teóricos para identificar las dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración por inducción matemática.

El constructo de unidad cognitiva es útil para el diseño de la secuencia de tareas que promuevan rupturas cognitivas en los problemas, mientras que con el modelo (*se definirá más adelante*) se analiza elementos que intervienen en los argumentos del estudiante cuando se resuelven problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones.

A continuación, se presentan los dos momentos que plantea la noción de unidad cognitiva de un teorema:

> - durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones;
>
> - durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo con una cadena lógica.

(Boero, et al, 1996, p.113)

La unidad cognitiva fue utilizada para expresar una posible continuidad entre los dos momentos ya mencionados, posteriormente fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la argumentación para plantear conjeturas y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006, p. 184):

> La principal fortaleza de la unidad cognitiva es que proporciona una forma de evitar la rígida dicotomía que coloca a la argumentación contra la demostración: La posible distancia entre argumentación y demostración no es negada pero tampoco es

definitivamente asumida como un obstáculo; desde esta perspectiva, la distinción irreparable entre argumentación y demostración es substituida prestando atención a las analogías, sin olvidar las diferencias.

Pedemonte (2002) analiza y compara la argumentación que sustenta una conjetura y su demostración en la resolución de problemas abiertos en geometría, señala que pueden realizarse desde dos puntos de vista: el del sistema referencial y el de la estructura. El *sistema referencial* está compuesto por el sistema de representación (el lenguaje, la heurística, el dibujo) y el sistema de conocimientos (concepciones, teoremas) de argumentación y demostración, La *estructura* es la conexión cognitiva lógica entre declaraciones (puede ser abductiva, inductiva o deductiva) (Pedemonte, 2008).

Según Pedemonte, hay unidad referencial entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos o teoremas usados en la demostración, han sido usados en la argumentación dando soporte a la conjetura. Además, hay una unidad estructural entre la argumentación y la demostración, si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación también están presentes en la demostración; o de lo contrario, hay una ruptura estructural entre los dos, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva (Pedemonte, 2008).

Para el análisis de la unidad o ruptura cognitiva que puede existir entre las argumentaciones del planteamiento de una conjetura y la construcción de su demostración, se utiliza el Modelo de Pedemonte (Pedemonte 2002, 2008; Pedemonte y Balacheff 2016), modelo basado en la integración del modelo cK¢ que permite analizar el sistema de referencia (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin (1958) que sirve para analizar la estructura de la argumentación.

El Modelo de Toulmin: Un argumento, en el modelo de Toulmin está compuesto por un esquema ternario formado por:

Una afirmación (C) o conclusión que el interlocutor pretende justificar,
Unos datos (D) que sirven al interlocutor para justificar el enunciado C,
Un permiso de inferir (Pi) que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre D y C.

Un argumento proporciona un punto de vista (una afirmación, una opinión) que se llama *afirmación* en la terminología de (Toulmin, 1958). Se producen *datos* que respaldan la afirmación. Un *permiso de inferir* proporciona la justificación para usar los datos en apoyo de las relaciones los datos y la afirmación; puede expresarse como un principio o una regla y actúa como un puente entre los datos y la afirmación. Esta es la estructura base ternaria de un argumento, pero pueden ser necesarios elementos auxiliares que complementan a la estructura base para describir la argumentación. Toulmin (1958) describe tres de ellos:

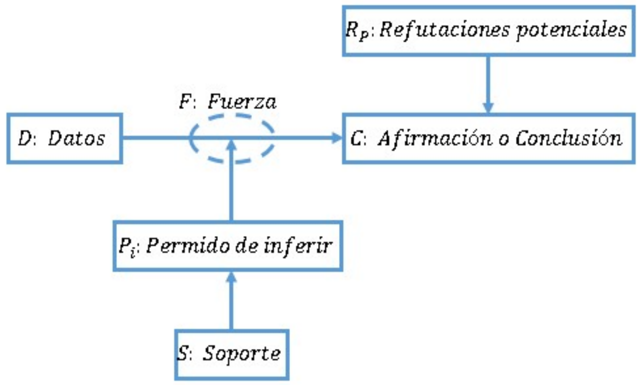
Un indicador de *fuerza (F)* del argumento,
Una *refutación potencial (Rp)* del enunciado conclusión,
Un *soporte (S) d*el permiso de inferir.

El indicador de fuerza *F* muestra la firmeza de la conexión entre los datos y el permiso de inferir que conlleva el enunciado; *F* es un elemento que no es explícito. El permiso de inferir confiere diferentes grados de fuerza a la conclusión que justifica, el indicador de Fuerza es un elemento que no es explícito, pero puede estar indicado por un calificativo como “débil”, “fuerte”, “verdadero”, "necesariamente", "probablemente" o "presumiblemente" adjunto a la transición de los datos a la afirmación. En el último caso, es posible que debamos mencionar las condiciones de la refutación “que indiquen las circunstancias en las que la autoridad del permiso tendría que dejarse de lado” (Fiallo, 2011, p. 77). Por tanto, un permiso de inferir puede defenderse apoyándose en un soporte que pueda expresarse en forma de declaraciones categóricas de hechos (Fiallo, 2011, p 77). Un soporte puede ser proporcionado por un sistema de clasificación taxonómica, por un estatuto, por resultados estadísticos o por una teoría matemática. El tipo de soporte podría cambiar mucho a medida que uno se mueve de un campo de argumento a otro (Fiallo, 2011, p 77). El soporte puede ayudar al estudiante o profesor a explicitar el permiso de inferir; sin el soporte puede que el permiso no sea aceptado (Fiallo, 2011, p. 77).

Al momento de realizar una argumentación, es posible que ciertas circunstancias particulares impidan la aplicación del permiso de inferir a los datos, por lo que el esquema argumentativo prevé excepciones a la afirmación. Si hay excepciones a la afirmación, disminuye la fuerza del permiso de inferir. Las condiciones de las excepciones o refutaciones potenciales Rp se toman entonces en consideración. Esas refutaciones potenciales, o restricciones, aportan un comentario sobre la relación entre el permiso de inferir y la legitimidad del paso de los datos a la afirmación o conclusión; señalan las circunstancias en las que será necesario anular la autoridad del permiso de inferir.

Las refutaciones pueden ayudar a los estudiantes a hacer explícitos los permisos de inferir que están usando, a transformar la clase en un escenario de debate y a decidir en qué condiciones los permisos de inferir son apropiados. A menudo, cuando un estudiante presenta un argumento matemático, no tiene claridad acerca de los permisos de inferir que está usando; ese estudiante puede utilizar permisos de inferir implícitamente sin haber considerado si esos permisos de inferir son válidos. Las refutaciones en las discusiones con los compañeros de clase o con el profesor invitan al estudiante a hacer explícitos los permisos de inferir empleados (Weber y otros, 2008, citado por Fiallo, 2011). El modelo de argumento de Toulmin que contiene seis elementos relacionados y organizados se presenta a continuación:

Figura 2
Modelo de argumentación de Toulmin



Nota: Adaptado de Pedemonte y Balacheff (2016),

Aunque el modelo de Toulmin ha demostrado su utilidad, este tiene algunas limitaciones: las bases de los conocimientos de los estudiantes, y sobre el permiso de inferir, a veces es ambiguo porque la regla relacionada no está claramente definida (Pedemonte y Balacheff, 2016). "También nos dimos cuenta de que el modelo de Toulmin era una herramienta eficaz para caracterizar la argumentación en matemáticas, pero que no tenía en cuenta la complejidad del sistema de conocimiento que está en la base de la argumentación" (Pedemonte y Balacheff, 2016, p. 107).

"La integración de cK¢ y el modelo de Toulmin es la solución que encontramos para una explicación más precisa de la complejidad de una argumentación al obtener estos elementos implícitos" (Pedemonte y Balacheff, 2016 p. 107).

El modelo cK¢ permite dar sentido al proceso de argumentación de los estudiantes cuando resuelven problemas que requieren realizar actividad argumentativa, en este proceso las concepciones juegan un papel fundamental para llevar a cabo estas tareas, por esta razón consideramos que la concepción es "una estructura mental atribuida a un sujeto por un observador de su comportamiento, que debe ser consistente y eficaz en un ámbito de práctica" (Balacheff, 2005, p. 36).

Una concepción se caracteriza en primer lugar por el conjunto de *situaciones-problema* (P) en el que se demuestra que la concepción es una herramienta eficaz para la construcción de una solución (Pedemonte y Balacheff, 2016, p. 104), dentro del conjunto argumentos de los estudiantes se desarrolla y se fortalece.

El segundo componente tomado de Vergnaud (1991), se caracteriza por un conjunto de *operadores* (R) es el que permite la manipulación de los elementos del sistema de representación, y por lo tanto la transformación de los problemas. Según Pedemonte (2005) los operadores, al igual que los permisos de inferir, legitiman el paso entre datos y el enunciado conclusión y se explicitan a menudo en la forma "si…entonces" (p. 327).

Al igual que los operadores de Vergnaud (1991), se considera un *sistema de representación* (L) que permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación.

"El cuarto componente es la *estructura de control* (Σ), que es el conjunto de medios que tienen los alumnos para tomar decisiones, hacer elecciones y evaluar su producción" (Pedemonte y Balacheff, 2016 p. 105).

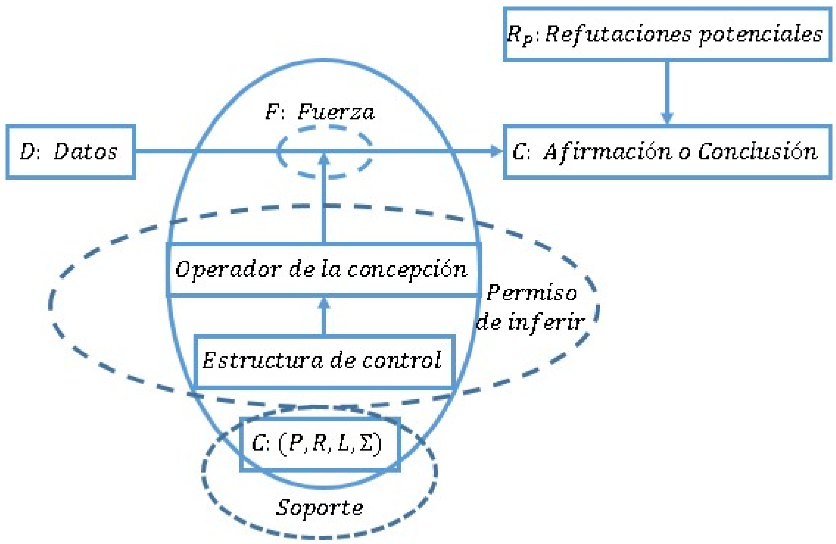
En particular, el modelo cK¢, al expresar las estructuras de control de los conceptos en juego desde los conocimientos base para aprenderlos, dan lugar a la identificación y obtención de razones que expliquen por qué la inferencia de una afirmación a partir de los datos es adecuada, papel importante en la argumentación, aunque no presente en el modelo de Toulmin. En términos matemáticos, hacer explícita la estructura de control proporciona mejores condiciones para comprender los vínculos entre conocer y demostrar; estos dos términos no se pueden separar Balacheff (2010). A lo largo del proceso de resolución de problemas, los estudiantes se apoyan en la estructura de control para cuestionar y asegurar la validez y adecuación de sus decisiones y acciones Boero, Garuti y Mariotti (1996).

La introducción del modelo cK¢ en el modelo de Toulmin, permite el enriquecimiento de la representación para describir algunos elementos importantes de las argumentaciones de los estudiantes, como son las reglas de inferencia como la deducción, la abducción, la inducción, que casi siempre permanecen implícitas en el proceso de plantear una conjetura y construir una demostración. “Encadenar los esquemas de Toulmin que representan el desarrollo de la argumentación hará evidente que varias concepciones pueden contribuir a resolver un problema” (Pedemonte y Balacheff, 2016 p 108).

El permiso de inferir se desarrolla para hacer explícito el papel de la estructura de control Σ. La fuerza que en términos de Duval (1991), expresa el valor epistémico del paso de la argumentación, se incluye en la concepción porque está en la base de la estructura de control Σ. Un movimiento de datos (en matemáticas son representaciones) a la afirmación, por ejemplo, lingüísticas, simbólicas o gráficas, es el resultado de la aplicación de unos operadores R que transforman un conjunto de representaciones en nuevos datos o afirmaciones, suelen ser la parte explícita del permiso de inferir; su aplicación está permitida por algunos elementos de la estructura de control que generalmente está implícito (un solo elemento o el resultado de un razonamiento). A continuación, se presenta el esquema del Modelo de Pedemonte:

Figura 3

Integración del modelo cK¢ y el modelo de Toulmin



Nota: Adaptado de Pedemonte y Balacheff (2016).

El Modelo de Pedemonte se usará para analizar el proceso de argumentación de estudiantes que resuelven problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostración por inducción matemática, ya que este permite exponer los elementos de la estructura y el sistema de referencia. Los operadores describen si los estudiantes cometen errores algebraicos, comprenden la relación entre el paso base y el paso inductivo o comprenden cuando es aplicable la inducción matemática; la estructura de control permite analizar si el estudiante identificó la proposición a demostrar; las refutaciones potenciales se usan para analizar si el estudiante comprende el patrón de recurrencia en el proceso de argumentación.

Luego de realizar la descripción de los elementos teóricos que se van a usar en el transcurso del trabajo, se explica cómo se plantea el desarrollo de la investigación para lograr alcanzar el objetivo propuesto.

5. Aspectos Metodológicos

Este apartado describe los aspectos metodológicos que se planea llevar a cabo para responder a la pregunta de investigación ¿Cómo propiciar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática a partir de la ruptura cognitiva entre, el proceso de argumentación para el planteamiento de una conjetura y el proceso de argumentación para la construcción de una demostración?

De acuerdo con la pregunta de investigación, se trazó el objetivo de diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza del Principio de Inducción Matemática, dirigida a estudiantes que inician un curso de Teoría de Números en la Universidad Industrial de Santander, enfocándola a la ruptura cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostración por inducción matemática. Con base en lo anterior, el presente estudio se caracterizó por ser una investigación de diseño de un experimento de enseñanza (Camargo, 2021), ya que la unidad de enseñanza busca poner en funcionamiento una hipótesis sobre el aprendizaje de la demostración por el PIM.

Esta metodología de investigación tiene dos objetivos principales: (a) mejorar la práctica en el aula mediante la ingeniería de formas de actuar sobre el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje; y (b) profundizar la comprensión teórica de los fenómenos del aula relacionados con estos problemas (Stylianides y Stylianides, 2013), por tanto, el diseño, implementación y evaluación de la unidad de enseñanza se organiza con la meta de poner en funcionamiento una hipótesis sobre el aprendizaje de la demostración por el PIM, esta se expondrá en la siguiente sección.

El experimento de enseñanza se basa en una secuencia de clases que involucran un profesor, unos estudiantes, y uno o más observadores que registran aspectos de los sucesos de clase (Camargo, 2021). Entre las sesiones de clase el profesor y los observadores, que usualmente conforman un equipo de investigación, se reúnen para discutir el efecto de la aproximación formulada y determinar si ella necesita cambios en la trayectoria (Ball, 2000).

El diseño de la unidad de enseñanza inició desde el segundo semestre de 2021, se realizaron implementaciones pilotajes, así como los cambios realizados sobre la marcha donde los estudiantes participaron por decisión propia, sin embargo, se solicitó firmar un consentimiento de tratamiento de la información de las video grabaciones de cada sesión. Los cambios se produjeron en los tipos de problemas que se plantearon en los núcleos conceptuales, algunos no estaban enfocados a plantear conjeturas y construir demostraciones.

Por cuestión de tiempo y espacios, el presente estudio realizó las sesiones por fuera de clase y el investigador (quien escribe) asumió los dos roles, profesor y observador. En conjunto con el orientador de este trabajo, se discutieron las grabaciones, transcripciones y se determinaron los respectivos cambios. Los cambios se produjeron porque el abordaje de un problema requirió un tiempo de más de dos horas, cuando se había planeado la duración de 4 horas por núcleo conceptual. Además, los estudiantes optaron por trabajar en grupo para plantear la conjetura, se valoró decisión de permitirlo en posteriores problemas. Luego, la planeación general de la versión de la unidad en donde se analizaron los datos (primer semestre de 2022), así como los cambios realizados sobre la marcha, fueron objeto de discusión para el análisis retrospectivo de la unidad de enseñanza; también lo fueron la toma de decisiones sobre la gestión de las sesiones. Los criterios para deliberar si la unidad de enseñanza cumple el objetivo de investigación está en validar que se genere la ruptura cognitiva en el proceso de argumentación del estudiante y con esto, verificar si el diseño de los problemas responde al enfoque de los problemas y a los objetivos de cada núcleo conceptual.

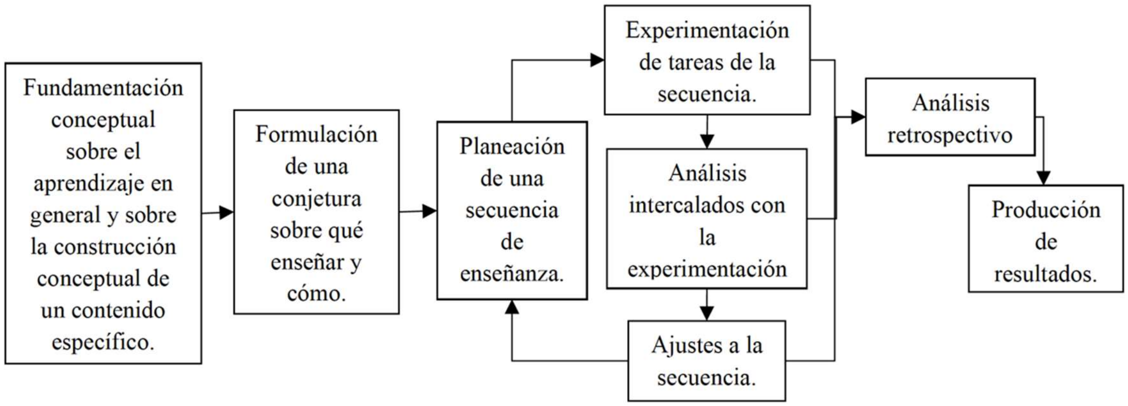
El objetivo de este experimento de enseñanza fue evaluar el aprendizaje de los estudiantes al plantear conjeturas y demostrar a través del PIM, con la intención de lograr la construcción de demostraciones deductivas que se ajusten a la estructura del PIM.

Las dificultades y los elementos teóricos de las investigaciones, caracterizados en el marco conceptual, se utilizaron para el diseño y rediseño de los problemas. Se aplicaron cinco núcleos conceptuales a un grupo de estudiantes que cursaban carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas. La explicación detallada del criterio para plantear estos cinco núcleos se abordará más adelante. Debido a la estructura de los problemas, se buscó fomentar la ruptura cognitiva en el proceso de demostración, y se consideró la participación e interacción de los estudiantes a lo largo del proceso para recopilar información que permita evaluar si el objetivo responde a la pregunta de investigación.

El desarrollo de este trabajo comenzó con el diseño del conjunto de problemas, basado en la revisión didáctica y en los fundamentos del PIM. Luego, se seleccionaron estudiantes para la implementación de los problemas, se realizó un análisis de la secuencia de tareas de los problemas para identificar si había una unidad o una ruptura cognitiva, y se llevó a cabo una evaluación de la unidad de enseñanza. A continuación, se presenta un esquema que resume el plan de ejecución para la estrategia de experimento de enseñanza.

Figura 4

Esquema del Experimento de enseñanza



Nota: Tomado de "Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.89).

A continuación, se presenta la formulación de la hipótesis sobre la importancia del PIM y a la luz de la investigación reportada, sugerencias de cómo enseñarlo, la planeación de la unidad de enseñanza; la selección de los participantes del estudio y la descripción de los participantes; se explica cómo fue documentada la actividad argumentativa de los estudiantes y, finalmente, se expone cómo se utilizó, a la luz del marco teórico, los instrumentos que permitirán realizar el análisis de los datos.

5.1. Formulación de la Hipótesis de la investigación:

De acuerdo a las investigaciones que se mencionaron en el planteamiento del problema y que reportaron la problemática sobre dificultades para demostrar por inducción matemática, se identificaron y se asumieron como hipótesis sobre qué y cómo enseñar, la afirmación de Mariotti (2006), quien plantea que; *para mejorar el aprendizaje de la demostración usando el principio de inducción matemática, el planteamiento de una conjetura como resultado de generalización de un patrón, contribuye a la construcción de una demostración por inducción matemática*; así mismo, Cusi y Malara (2008) y, Grieser (2018) sugieren que *en el aprendizaje de la* *demostración por inducción matemática, el estudiante debe realizar exploración de relaciones de recurrencia o ejemplificación de un paso intermedio que permita visibilizar en la implicación que representa el paso inductivo*. Estas ideas fueron el primer punto de partida para la formulación de los problemas en el diseño de la Unidad de enseñanza,

5.2. Unidad de enseñanza, escenario investigativo y población de estudio

El escenario en que se desarrolló la investigación fue en la Universidad Industrial de Santander (UIS) y se implementó con estudiantes de cuarto nivel de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas. A continuación, describimos las características de la unidad de enseñanza, de los problemas y de los estudiantes que participaron de la investigación.

Unidad de enseñanza: debido a las dificultades reportadas por la investigación para aprender el PIM (Dubinsky (1990); Ron y Dreyfus (2004); Stylianides et al (2007); Pedemonte (2008); Cusi y Malara (2008); Crespo (2016); Fernández, Caraballo y Nieves (2019); García y Parraguez (2017); Stylianides, Sandefur y Watson (2016)), se diseñó la unidad de enseñanza con el objetivo de favorecer la construcción de significado del PIM en el aula, con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas.

El diseño de la unidad de enseñanza se fundamentó en la revisión de algunos libros de texto para definir los temas de matemáticas que englobarían los núcleos conceptuales que conforman la unidad, se abordan temas de sucesiones aritméticas, sucesiones recursivas, progresiones, propiedades de números primos, propiedades de potencias de un números, generalizaciones, divisibilidad e interacciones con juegos a lo largo de cinco núcleos, y se definieron de la siguiente manera: Núcleo 1: Progresiones, Núcleo 2: Sucesiones Recursivas; Núcleo 3: Situaciones hipotéticas, Núcleo 4: Divisibilidad, Núcleo 5: Teoremas.

El criterio para plantear estos cinco núcleos conceptuales se originó a partir de la revisión realizada en los antecedentes sobre el PIM y las sugerencias didácticas que la investigación reportó (Crespo, 2016); (Fernández, Caraballo y Nieves, 2019); (García y Parraguez, 2017); (Stylianides, Sandefur y Watson, 2016). Además, se llevó a cabo una revisión de los libros de texto utilizados para enseñar el PIM en la Universidad Industrial de Santander. Esta revisión reveló la variedad de problemas en los que se puede aplicar el PIM. Dichos problemas se agruparon en cinco núcleos conceptuales, ya que cada uno muestra el tipo de problemas en los que se emplea el PIM en los libros de texto. Para fines de este trabajo, se define el término "núcleo conceptual" como el eje articulador de un conjunto de problemas matemáticos con características similares.

Los problemas de la unidad de enseñanza siguen el enfoque propuesto por Boero et al (1996) y Garuti et al (1998), que se basa en el desarrollo de la formulación de conjeturas y la construcción de demostraciones. Este enfoque tiene como objetivo promover un trabajo activo de resolución de problemas por parte del estudiante, involucrando procesos de razonamiento y demostración. Además, el diseño del material de la unidad de enseñanza (los problemas de los núcleos conceptuales) va desde la argumentación para la formulación de conjeturas hasta la argumentación para la construcción de una demostración. La discusión entre el estudiante y el profesor desempeña un papel importante en el aprendizaje del PIM.

Cada etapa de trabajo se divide en dos momentos: trabajo individual, donde el estudiante aborda el problema sin recibir orientación de otros participantes, y comunicación y discusión grupal, donde el estudiante expone sus argumentos para respaldar sus afirmaciones o refutar las de sus compañeros. Durante la etapa de comunicación del primer momento, se plantean y defienden conjeturas falsas o verdaderas utilizando argumentos como operadores de la concepción, refutaciones potenciales o estructuras de control. Durante la resolución del problema, el profesor debe priorizar la formulación de preguntas que cuestionen los argumentos del estudiante y alienten al estudiante a buscar apoyos para defenderlos.

Problemas seleccionados: a continuación, se expone el objetivo de cada núcleo de problemas seleccionados para esta investigación, los problemas que se analizaron y algunas ideas de lo que se espera que hagan los estudiantes cuando los abordan. Estos núcleos promueven procesos de planteamiento de conjeturas (con las preguntas que están elaboradas), y la construcción de su respectiva demostración (ya que siempre se les pide a los estudiantes explicar, justificar, argumentar, demostrar o se les pregunta por qué son verdaderas las conjeturas planteadas). Es decir, se considera un problema de demostración como cualquier problema cuyo propósito sea "descubrir cierto objeto o incógnita del problema y mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente anunciada" (Pólya, 2011, p. 161) y no necesariamente problemas de demostración que expliciten la proposición a demostrar. Los problemas que no se exponen resultan análogos a los que se muestran a continuación.

Núcleo 1: la actividad matemática central de los problemas del núcleo consiste en que, dada una cantidad creciente de cuatro o más números naturales, estimar o generalizar a partir de las características de las operaciones básicas la regularidad que representa a todos los números o entre los números, y plantear una conjetura sobre esos hallazgos. Luego, demostrar la conjetura por el método que el estudiante considere adecuado. Un propósito del primer núcleo es que los estudiantes logren distinguir el papel del PIM para demostrar proposiciones definidas en el conjunto de los números naturales. La característica que diferencia este núcleo respecto a los siguientes, consiste en que las conjeturas requieren definir patrones sobre la diferencia de los términos; además, el núcleo es un punto de partida para conocer la estructura metodológica de cada problema y el camino a seguir para solucionarlo. Otro elemento diferenciador consiste en que los problemas están muy relacionados, no se puede abordar el segundo problema sin conocer los datos y conjetura extraídos del primer problema. Para el caso del análisis, se seleccionó el problema 1:

Problema 1: Considere en orden estrictamente creciente los siguientes enteros positivos $3, 7, 11, 15, \ldots$
Realice lo que se indica a continuación:

1) **Explorando conjeturas**
   - ***a)*** ¿Cuál es el décimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   - ***b)*** ¿Cuál es el centésimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   - ***c)*** Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo. **Justifique su respuesta.**
   - ***d)*** ¿Cuál es el $n-ésimo$ término de la progresión? construya una conjetura sobre lo encontrado. **Justifique su respuesta.**
   - ***e)*** ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

2) **Discusión y comunicación de resultados**

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) **Demostrando**
   - **a)** Una conjetura puede ser cierta en muchos casos particulares y sin embargo no ser verdadera en general. Es imposible analizar todos los casos particulares. ¿Cómo podemos saber, si la conjetura planteada es cierta para todo natural?
   - **b)** Construya una demostración para cada conjetura planteada en **1) d)**, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

4) **Discusión y comunicación de resultados**

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

A continuación, se define la conjetura y su respectiva demostración usando el PIM.

Conjetura: sea $S = \{n \in \mathbb{N} | a_n = 4n - 1\}$, donde a_n es una secuencia de números.

Demostración del problema 1 por inducción matemática

Paso 1. Se demostrará que $1 \in S$. Por hipótesis del problema, $a_1 = 3 = 4(1) - 1$, por tanto, $1 \in S$.

Paso 2. Supongamos que $k \in S$, para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir $a_k = 4k - 1$. Se quiere demostrar que $k + 1 \in S$, es decir, $a_{k+1} = 4(k+1) - 1$.

Para obtener el siguiente término de a_{k+1}, es suficiente sumarle "4", al término a_k, se tiene que $a_{k+1} = a_k + 4$. Por hipótesis de inducción, $a_k = 4k - 1$. Así,

$$a_{k+1} = a_k + 4 = (4k - 1) + 4 = 4k + 4 = 4(k+1) - 1$$

$$a_{k+1} = 4(k+1) - 1.$$

Por tanto $k + 1 \in S$.

Se concluye que, por inducción matemática, la progresión $a_n = 4n - 1,\ n \in \mathbb{N},$ *representa la cantidad de números iniciales* $3, 7, 11, 15, \ldots$.

Núcleo 2**:** la actividad matemática central de los problemas del núcleo consiste en que, dada una sucesión recursiva de números naturales con el primer término de la sucesión, estimar o generalizar a partir de las características de las operaciones básicas la regularidad que representa a todos los términos o entre los términos de la sucesión y plantear una conjetura sobre esos hallazgos. Las conjeturas a diferencia del núcleo 1, no dependen de un problema anterior, si no que los problemas requieren que el estudiante realice descomposiciones en números primos, calcule las diferencias entre los términos, identifique propiedades de potencias de un número y sus exponentes, y generalice los términos hasta encontrar una sucesión que depende exclusivamente de la variable $n \in \mathbb{N}$. Luego, discutir la conjetura y demostrarla siguiendo el orden de las etapas del problema. Para el caso del análisis, se seleccionó el problema 1:

Problema 1:
Hallar a_n, si se conoce que $a_0 = 1$ y que, para todo natural, $a_n = 2a_{n-1} + 3$

1) **Explorando conjeturas**
   - **a)** ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   - **b)** ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   - **c)** Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**
   - **d)** ¿Cuál es la representación algebraica del $n - ésimo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   - **e)** ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**
2) **Discusión de conjeturas obtenidas**

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) **Demostrando**

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

4) **Discusión de las demostraciones**

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

A continuación, se define la conjetura y su respectiva demostración usando el PIM.

Conjetura: sea $S = \{n \in \mathbb{N}_0 | a_n = 2^{n+2} - 3,\ a_0 = 1\}$, donde $a_n = 2a_{n-1} + 3$ es una sucesión recursiva de números.

Demostración del problema 1 por inducción matemática

Paso 1. Probemos que $0 \in S$, por hipótesis del problema, $a_0 = 1 = 4 - 3 = 2^{0+2} - 3$, por tanto, $0 \in S$.

Paso 2. Supongamos que $k \in S$, para algún $k \in \mathbb{N}_0$, es decir $a_k = 2^{k+2} - 3$ (1). Se quiere demostrar, dado lo anterior, que $k + 1 \in S$, es decir, $a_{k+1} = 2^{k+3} - 3$.

Por hipótesis del problema $a_{k+1} = 2a_k + 3$ (2). Por hipótesis de inducción, se puede reemplazar (1) en (2).

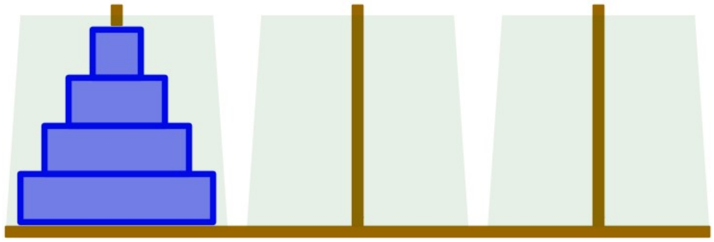
$$a_{k+1} = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2^{k+3} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3$$

Por tanto, $k + 1 \in S$.

Se concluye que, por inducción matemática, que la sucesión $a_n = 2^{n+2} - 3, n \in \mathbb{N}_0$, *representa algebraicamente la sucesión recursiva* $a_n = 2a_{n-1} + 3$, *con* $a_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Núcleo 3: este núcleo tiene como objetivo que los estudiantes desarrollen modelos matemáticos de las situaciones planteadas a partir de juegos que requieren exploración y registro de datos, para lo cual se espera que seleccionen y usen estrategias de resolución de problemas no rutinarios, esto con el fin de traducir la realidad a estructuras matemáticas que permitan comunicar el modelo obtenido y su validez. Los modelos son sucesiones definidas en el conjunto de los números naturales y se espera que, a partir de las condiciones de la situación, los estudiantes logren encontrar los términos de una sucesión para ***"generalizar el proceso"*** iterativo, determinando la expresión algebraica correspondiente. La diferencia del presente núcleo respecto a los anteriores, radica en el uso del juego para extraer datos que permitan transitar de los cálculos de ejemplos a expresiones algebraicas, este transito puede resultar difícil si no se comprende las reglas o el objetivo del problema, además, muestra al estudiante que puede plantear conjeturas matemáticas de situaciones con contextos reales. Basados en las reglas de los juegos, los estudiantes pueden abordar la demostración de la conjetura usando el PIM. En este tipo de problemas de demostración, los estudiantes pueden tener dificultades en el planteamiento de la proposición a demostrar y en la demostración del paso inductivo, dado que se requiere realizar una generalización de las estrategias y del proceso usado para ganar el juego. Para el caso del análisis, se seleccionó el problema 2:

Problema 2: El juego de las torres de Hanoi
El juego está conformado por tres torres y una cantidad de *n*-discos de distinto tamaño. Inicialmente los discos están agrupados de forma decreciente en una de las torres, por ejemplo, como se muestra en la siguiente figura:



El juego consiste en pasar todos los discos de la torre ocupada, es decir, la torre que posee los discos, a una de las torres vacías en el mismo orden inicial, pero teniendo en cuenta las siguientes reglas de juego:

- Sólo se puede mover un disco cada vez.
- Un disco de mayor tamaño no puede descansar sobre uno más pequeño que él mismo.
- Sólo puedes desplazar el disco que se encuentre arriba en cada torre.

1) Explorando conjeturas

a) Realiza varios intentos para distintas cantidades de discos y encuentra estrategias para finalizar el juego en el menor número de movimientos. **Justifique su respuesta.**
b) Escribe el menor número de movimientos para partidas de dos, tres, cuatro, y cinco discos. **Justifique su respuesta.**
c) Qué regularidad o patrón de recurrencia identifica en el proceso de los casos jugados del inciso anterior. **Justifique su respuesta.**
d) ¿Qué patrón de recurrencia identifica entre el menor números de movimientos para dos, tres, cuatro o cinco discos y el número de discos respectivamente? **Justifique su respuesta.**
e) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene para n-discos? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

a) Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

4) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

A continuación, se define la conjetura y su respectiva demostración usando el PIM.

Conjetura: el menor número de movimientos para mover "n" discos de una torre de Hanoi a otra es: $a_n = 2^n - 1$, además, se tiene que $a_n - a_{n-1} = 2^n,\ n \geq 1, a_1 = 1$.

Demostración del problema 1 por inducción matemática

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} | a_n = 2^n - 1\}$, se demostrará que $S = \mathbb{N}$.

Paso 1. Probemos que $1 \in S$, por hipótesis del problema, $a_1 = 1 = 2^1 - 1$, por tanto, $1 \in S$

Paso 2. Supongamos que $k \in S$, para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir $a_k = 2^k - 1$ (1). Se quiere demostrar que $k + 1 \in S$, es decir, $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Por hipótesis del problema $a_{k+1} - a_k = 2^{k+1}$ (2). Por hipótesis de inducción, se puede reemplazar (1) en (2).

$$a_{k+1} - (2^k - 1) = 2^{k+1}$$

$$a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^k - 1 = 2 * 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

$$a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Por tanto, $k + 1 \in S$.

Se concluye que, por inducción matemática, el menor número de movimientos para mover "n" discos de una torre de Hanoi a otra es: $a_n = 2^n - 1$.

Núcleo 4: El propósito del núcleo es propiciar la construcción de significado del PIM en problemas relacionados con divisibilidad, a partir de la descomposición de números en factores primos o de los criterios de divisibilidad. La actividad matemática central del núcleo consiste en que, dada una expresión algebraica definida en los naturales con representación verbal, generalizar propiedades de divisibilidad en común de los términos de la expresión y conjeturar propiedades de divisibilidad para la expresión planteada. Este núcleo se diferencia de los anteriores porque ya no tiene el objetivo de plantear algebraicamente una sucesión, los estudiantes familiarizados a la temática de estrategias que descubrieron en los anteriores problemas, tendrán dificultades para comprender el objetivo de los problemas del núcleo; para abordar esta dificultad hay que centrar al estudiante a comprender la frase *"experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos"* explícita en el enunciado ,y en responder los incisos para plantear conjeturas sobre las propiedades en común que cumplen los términos. Otro elemento para resaltar en este núcleo, consiste en que los estudiantes pueden plantear diferentes conjeturas de un mismo problema y dichas conjeturas pueden ser demostradas por otros métodos diferentes al PIM; por ejemplo, el algoritmo de la división. Se busca que el estudiante construya la demostración y justifique la elección del método que eligió, esto con el objetivo de visibilizar qué impulsó al estudiante a demostrar. A continuación, se muestra el problema 1 que representa la estructura de los problemas del núcleo.

Problema 1:
Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como el cubo del número n más el doble del número n.

1) Explorando conjeturas

a) Describa los primero diez términos de la sucesión definida y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. **Justifique su respuesta.**

b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. **Justifique su respuesta.**

c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n-ésimo$ de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

4) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

A continuación, se define la conjetura y su respectiva demostración usando el PIM.

Conjetura: Todos los términos de la sucesión $a_n = n^3 + 2n, n \in \mathbb{N}$ son divisibles por 3.

Demostración del problema 1 por inducción matemática

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} | a_n \text{ } es \text{ } divisible \text{ } por \text{ } 3\}$, se demostrará que $S = \mathbb{N}$.

Paso 1. Probemos que $1 \in S$, por hipótesis del problema, $a_1 = 3$, es divisible por 3, por tanto, $1 \in S$.

Paso 2. Supongamos que $k \in S$, para algún $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k^3 + 2k$ es divisible por 3, es decir, $k^3 + 2k = 3t, t \in \mathbb{N}$ (1). Se quiere demostrar que $k+1 \in S$, $a_{k+1} = (k+1)^3 + 2(k+1)$ es divisible por 3, es decir, $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3m, m \in \mathbb{N}$.

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$$

$$= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3$$

Por hipótesis de inducción $k^3 + 2k = 3t$,

$$= 3t + 3k^2 + 3k + 3 = 3(t + k^2 + k + 1) = 3m, m \in \mathbb{N}$$

Luego, a_{k+1} es divisible por 3. Por tanto, $k+1 \in S$.

Se concluye que, por Principio de inducción matemática, los términos $a_n = n^3 + 2n$ son divisibles por 3.

Núcleo 5: El propósito del núcleo es generar nuevas conjeturas a partir de proposiciones consecuentes de teoremas, conjeturas o demostraciones que contienen errores en su escritura. En este núcleo, los estudiantes se dedican a validar la estructura del PIM y a identificar los casos en los que la conjetura o la demostración son incorrectas. A diferencia de los núcleos anteriores, se enfoca en destacar las dificultades o errores que pueden surgir al construir demostraciones utilizando el PIM, sin prestar atención al proceso de solución. El objetivo del núcleo 5 es que los estudiantes tengan en cuenta las dificultades y estrategias que descubrieron a la luz de los anteriores núcleos y las utilicen como referencias para identificar qué aspectos deben tener en cuenta al interpretar o realizar una demostración mediante el uso del PIM, por ejemplo, aspectos relacionados con identificar el paso en la demostración en que debe usar la hipótesis de inducción y la proposición del paso base. Se recalca que este objetivo puede resultar difícil para el estudiante, pero se espera que al haber abordado los anteriores núcleos tengan más herramientas para identificar estos aspectos en el análisis de demostraciones por el PIM construidas por ellos mismo o por otros (estudiantes y profesores). Para el caso del análisis, se seleccionó el problema 2:

Problema 2:
Un estudiante plantea una demostración a la siguiente conjetura:

$$\text{“}Para\ todo\ natural\ 2^n > n^2\text{”}$$

(Demostración por inducción matemática):
Sea A $= \{n \in \mathbb{N} | 2^n > n^2\}$, se probará que A $= \mathbb{N}$.
Paso base: $1 \in$ A, se tiene porque $2^1 > 1^2$.
Paso inductivo: supongamos que $k \in$ A. Es decir, $2^k > k^2, para\ algún\ k \in \mathbb{N}$. Se debe probar que $k + 1 \in$ A, esto es, $2^{k+1} > (k + 1)^2$, $k + 1 \in \mathbb{N}$.
Por hipótesis de inducción

$$2^k > k^2$$
$$2 * 2^k > 2 * k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$$
$$2^{k+1} > (k + 1)^2$$

Así $k + 1 \in$ A. Por tanto, $2^n > n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

5) Explorando conjeturas

a) Analiza la demostración del estudiante y plantea qué procesos debe considerar, modificar o cambiar en la demostración. **Justifique su respuesta.**
b) Analiza los términos de la desigualdad que se está demostrando, verifica la veracidad de la proposición demostrada y deduzca conjeturas consecuentes. **Justifique su respuesta.**
c) ¿Qué procesos o regularidades se mantienen en las conjeturas planteadas? **Justifique su respuesta.**

6) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

7) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

8) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

A continuación, se define la conjetura y su respectiva demostración usando el PIM.

Conjetura: se redefine la proposición, "$2^n > n^2, para\ n \geq 4$".

Demostración del problema 2 por inducción matemática
Sea A $= \{n \in \mathbb{N} | 2^n > n^2, n \geq 4\}$. Se demostrará que A $= \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$
Paso base: $4 \in$ A, se tiene porque $2^4 = 16 = 4^2$.
Paso inductivo: supongamos que $k \in$ A. Es decir, $2^k > k^2, para\ algún\ k \geq 4$. Se debe probar que $k + 1 \in$ A, esto es, $2^{k+1} > (k+1)^2$, $k + 1 \in \mathbb{N}$.
Por hipótesis de inducción

$$2^k > k^2$$
$$2 * 2^k > 2 * k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1, (usando\ la\ hipótesis\ k \geq 4)$$
$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$
$$Luego, por\ transitividad\ de\ las\ desigualdades, 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Así $k + 1 \in$ A. Por tanto, por el PIM, $2^n > n^2,\ n \geq 4$.

Población de estudio: la población de estudio para esta investigación consistió en tres estudiantes de cuarto nivel en la universidad que aceptaron participar voluntariamente en la unidad de enseñanza durante el primer semestre del 2022. Se les pidió por escrito su aprobación para ser grabados en video durante sus actividades individuales, de grupo y de discusión. La elección de solo tres estudiantes se debió al tipo de investigación que se llevó a cabo. El objetivo de la investigación era documentar los procesos de argumentación y demostración que los estudiantes utilizaban al resolver los problemas de la unidad de enseñanza. Los nombres utilizados en este estudio son ficticios: Gabriela participó en la implementación de toda la unidad de enseñanza, David no participó en la implementación del núcleo 3 debido a una enfermedad y Jesús no participó en el núcleo 5 debido a las vacaciones de la universidad. Durante las sesiones, todos los estudiantes interactuaron en grupo para discutir sus conjeturas y registros. En general, se observó que los estudiantes tendían a compartir sus respuestas antes de la discusión para verificar si habían planteado las mismas conjeturas y si habían utilizado condiciones similares.

Los tres estudiantes participantes eran de cuarto semestre en las carreras de Licenciatura en Matemáticas (Gabriela) y Matemáticas (David y Jesús). Todos estaban cursando la asignatura

Teoría de Números por primera vez. Algunos estudiantes no asistieron a todas las sesiones debido a motivos académicos, de salud o problemas internos de la universidad. Por lo tanto, en el análisis que se presenta en el siguiente capítulo, se tomarán en cuenta solo los datos de los estudiantes que asistieron a la mayoría de las sesiones. Si se presentan procesos iguales, se mostrará un solo análisis.

5.3. Producción de los datos investigativos

Antes de hablar de la recolección de los datos cualitativos, se aclarará el rol del docente investigador que se sostuvo al grabar e interactuar durante todo el curso con los estudiantes que accedieron a participar de la investigación.

Rol del profesor: el profesor y a su vez investigador (quien escribe) fue el responsable de la enseñanza a la luz de la metodología de unidad enseñanza; facilitó los espacios de participación promoviendo la discusión y el debate matemático entre los estudiantes como señala la metodología de la unidad de enseñanza. El objetivo como profesor consistía en promover el uso de la argumentación para que los estudiantes construyeran sus conjeturas y demostraciones, tomando las dificultades reportadas como punto de partida para generar preguntas, dichas preguntas buscan a su vez visibilizar las dificultades que el estudiante no identificó.

Rol del investigador: se adoptó un papel de observador activo en las tareas de asesoramiento y orientación de los estudiantes. Se entiende por "observador activo" a alguien que no solo observa el fenómeno que está siendo estudiado, sino que también interactúa y participa en él de manera activa, influyendo en su desarrollo. En este caso, el investigador interactuó constantemente con los estudiantes, formulando preguntas que permitían visibilizar los elementos del marco, registrando sus respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas. Su objetivo fue generar cambios en la argumentación de la construcción de la conjetura y la demostración mediante la realización de preguntas en la discusión. Es importante señalar que, debido a las limitaciones de tiempo del presente estudio, no se realizó una nueva experimentación con los ajustes realizados a la unidad, sino que se hicieron los ajustes para la versión que aquí se presenta, y se espera que sea experimentada en un salón de clase para obtener datos y realizar un análisis más detallado en próximas investigaciones.

Toma de datos: se trabajaron los cinco núcleos conceptuales, el tiempo requerido para abordar cada problema del núcleo 1 fue de 2 horas, por tanto, el investigador decidió en la marcha filmar sesiones de dos horas, donde en cada sesión desarrolló un problema y recolectó las hojas de trabajo de los estudiantes participantes para tener evidencia escrita y poder corroborar o aclarar ideas expresadas en los videos, durante el desarrollo del problema. A continuación, se presenta una tabla que muestra los tiempos que se tenían previstos para abordar cada problema comparado con el tiempo empleado por los estudiantes.

Tabla 1

Comparación del tiempo estimado y el tiempo empleado

Núcleo conceptual	Tiempo estimado	Tiempo empleado
Progresiones	4 Horas	4 horas
Sucesiones recursivas	4 Horas	6 horas
Situaciones hipotéticas	4 Horas	6 horas
Divisibilidad	4 Horas	6 horas
Teoremas	4 Horas	4 horas

Las sesiones filmadas tuvieron una duración de dos horas, algunas sesiones se centraron en abordar el problema filmando en grupo (dos o tres estudiantes), mientras que otras sesiones se realizaron con un estudiante. Esto con la intención de documentar sus procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, que ofrecieran evidencias que soportaran el objetivo de la investigación. Asimismo, se acompañó de manera puntual el trabajo individual y grupal de los participantes cuando resolvían los problemas planteados.

5.4. Análisis de datos

Al ser esta investigación de diseño, para la sistematización de los datos el investigador transcribió los videos y los complementó con apuntes de las hojas de trabajo recolectadas; así extrajo el proceso de argumentación y demostración de los problemas seleccionados y, posteriormente, los analizó la luz del marco teórico y conceptual empleando la herramienta de análisis, esto sin perder de vista los objetivos de la investigación.

A continuación, se retoman los elementos teóricos que fueron expuestos en el capítulo 4 y que sirven de herramienta de análisis de los datos recolectados:

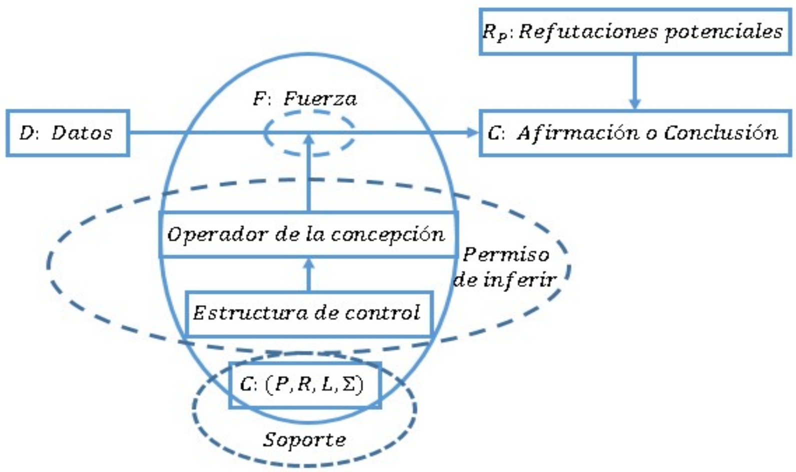
Modelo de Pedemonte: Si en el momento seleccionado de planteamiento de la conjetura o construcción de la demostración del estudiante, se identifican los tres elementos principales (datos, enunciado conclusión y los operadores de la concepción) con el modelo de Toulmin, ya se tiene estructurado un proceso de argumentación o de demostración. Se considera y se presta mucha atención en el análisis a tres de los elementos adicionales que completan la estructura (indicador de fuerza, refutación potencial y soporte). En paralelo a esto, se identifican los elementos que conforman el sistema de referencia (operadores de la concepción, sistema de representación y estructura de control) de los estudiantes al abordar los problemas.

Identificados todos los elementos estructurales y referenciales en el proceso de solución del problema, se analizó el trabajo de los estudiantes, centrando siempre la atención en el elemento que permitió provocar una ruptura cognitiva, de los cuales se preveía que eran las refutaciones potenciales o los dos elementos del sistema de referencia que están implícitos en el esquema estructural ($L\ y\ \Sigma$), ya que están ligados a la concepción que es el soporte en el Modelo de Pedemonte. Los elementos del sistema en el Modelo Pedemonte muestran en qué centrar la atención y cómo hacerlo, por lo tanto, es necesario identificar cada uno para identificar si hubo o no una ruptura cognitiva.

A continuación, se muestra la estructura del Modelo de Pedemonte al integrar el modelo cK¢ en el modelo de Toulmin; esta estructura es explicada en cada análisis de los problemas.

Figura 5

Integración del modelo cK¢ y el modelo de Toulmin



Nota: Adaptado de Pedemonte y Balacheff (2016).

Posterior a la identificación de la estructura y el sistema de referencia de ambos procesos, analizamos la posible distancia o continuidad estructural y referencial entre el planteamiento de la conjetura y la demostración. Así que, al igual que Fiallo (2011), utilizamos un cuadro comparativo para analizar los sistemas de referencia (cuádrupla del modelo cK¢) y un cuadro comparativo para analizar la estructura de los procesos, a la luz del constructo de unidad cognitiva según la interpretación de Fiallo (2011) del trabajo de Boero, et. al (1996) y Pedemonte (2002).

a) *Continuidad o ruptura del sistema de referencia*: A continuación, observamos el cuadro comparativo, propuesto por Fiallo (2011):

Tabla 2

Análisis de la Comparación del sistema de referencia

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
CONCLUSIÓN	CONCLUSIÓN
OPERADORES	OPERADORES
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
ESTRUCTURA DE CONTROL	ESTRUCTURA DE CONTROL
UNIDAD O RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Ese cuadro lo utilizamos para analizar la posible continuidad o ruptura del sistema de referencia al contrastar cada uno de los elementos correspondientes a cada proceso y dejar en evidencia si se repiten, están representados bajo el mismo sistema de referencia o comparten la estructura de control.

b) *Análisis de la estructura:* A continuación, el cuadro comparativo que contrasta las características de la estructura del proceso de argumentación y del proceso de demostración.

Tabla 3

Análisis de la Comparación del sistema estructural

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN	FORMA DE ARGUMENTACIÓN
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
UNIDAD O RUPTURA ESTRUCTURAL	

En este estudio, al igual que Fiallo (2011), se utilizó este cuadro para identificar la posible continuidad o ruptura en la estructura de los procesos. Se considera que la ruptura se presenta si entre el planteamiento de la conjetura y la demostración los procesos involucrados son inductivos y deductivos respectivamente o ambos deductivos.

Posterior a la implementación de estos instrumentos, analizamos la posible unidad o ruptura cognitiva, las posibles dificultades de los estudiantes si demuestran por el PIM.

A continuación, se presenta el análisis de los datos integrando los instrumentos expuestos en este apartado.

6. Análisis del proceso de argumentación

En este capítulo, se detalla el análisis del proceso de argumentación realizado por los estudiantes; se presenta el estudio de los cinco núcleos conceptuales que conforman la unidad de enseñanza: *1) Progresiones, 2) Recursividad, 3) Situaciones Hipotéticas, 4) Aritmética y Divisibilidad, 5) Teoremas.*

El análisis de cada núcleo está conformado de la siguiente forma: se presenta el enunciado del problema y un conjunto de indicaciones sobre qué debe tener en cuenta el estudiante; posteriormente un episodio de la sesión donde se evidencie el proceso de argumentación en el planteamiento de la conjetura, con el esquema del argumento de un estudiante por medio del Modelo de Pedemonte; seguido, se describe un episodio del proceso de argumentación en la demostración de la conjetura y un esquema del argumento, este esquema evidencia qué dificultades se identificaron en el estudiante, que a su vez sirven como descriptores que visibilizan el uso del método; por último, verificamos si hubo unidad o ruptura cognitiva comparando el proceso de argumentación para plantear la conjetura y el proceso de argumentación para construir la demostración.

Se usó abreviaciones (en lo posible) para algunos operadores u otros elementos del Modelo de Pedemonte en la verificación de la ruptura para aligerar los esquemas. Se usaron los nombres

Jesús, David, y Gabriela como seudónimo en alusión a los estudiantes y no comprometer su información personal.

6.1. Análisis del Núcleo 1: Progresiones

A continuación, se presenta el análisis del primero de los cuatro problemas de demostración del Núcleo 1, los cuales fueron abordados por los estudiantes Jesús, David y Gabriela de manera individual y conjunta. En el problema 1 no participó Gabriela.

Figura 6

Enunciado Problema 1-Núcleo 1

Problema 1

Considere en orden estrictamente creciente los siguientes enteros positivos $3, 7, 11, 15, \ldots$

Realice lo que se indica a continuación:

1) **Explorando conjeturas**
   a) ¿Cuál es el décimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Cuál es el centésimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo. **Justifique su respuesta.**
   d) ¿Cuál es el $n-ésimo$ término de la progresión? construye una conjetura sobre lo encontrado. **Justifique su respuesta.**
   e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

Luego de presentar el problema a los estudiantes, se indicó trabajar de manera individual en el planteamiento de la conjetura para que cada estudiante respondiera en su hoja de trabajo a los incisos en el orden que vea más asequible. Luego de un tiempo el investigador intervino preguntando si abordaron todos los incisos para comenzar la discusión del problema y sus resultados.

Análisis del problema 1 para Jesús

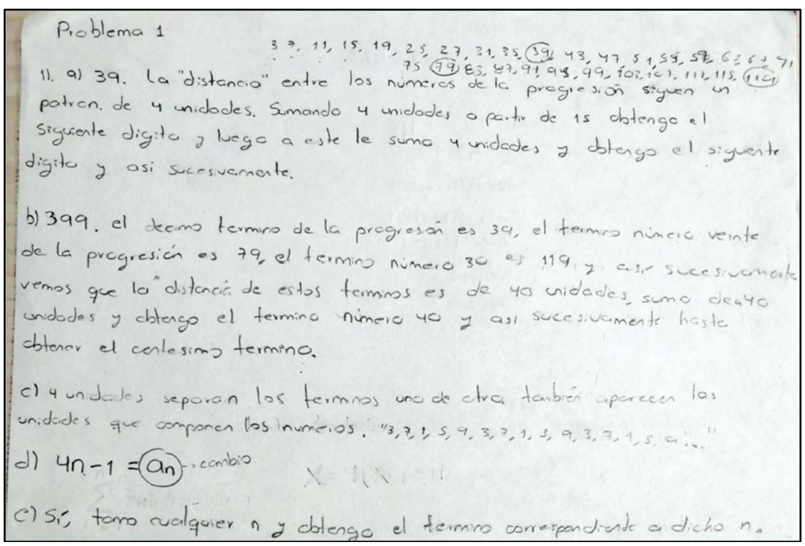
Planteamiento de conjetura

[1] Inv. ¿Cómo encontraron el décimo y el centésimo término?

[2] Jesús: Para encontrar el décimo término de la progresión, me di cuenta de que los términos se separan por cuatro unidades, a partir de los que nos dan acá, ósea el 3, 7, 11, 15, …; entonces, fui agregando +4 para hallar el siguiente, 19, +4 para hallar el siguiente y así al décimo término que es 39.
[3] Jesús: En el punto b, para hacer los cálculos de a uno por uno, resultaba más difícil; entonces, me di cuenta de que en el décimo término para avanzar al número 20 (a_{20}) de la progresión, avanzamos 40 unidades, ósea +40. Para hallar el término treinta (a_{30}) de la progresión, agregamos +40, y así lo hice hasta el término cien (a_{100}) de la progresión, es decir, el centésimo término de la progresión me dio 499 [*El estudiante escribió mal el resultado, pero usó correctamente el patrón que planteó, después corrigió el resultado al darse cuenta sabía que era 399*].
[4] Jesús: En el punto c, los términos se separan por 4 unidades y también me di cuenta de que, al sumarle cuatro, el resultado podría ser múltiplo de 4, serían 4,8,12,16,20, …, pero no es así, porque siempre están restando de a uno. Entonces serían múltiplos de cuatro menos uno [*Señala la expresión 4n-1*].
[5] Inv. Okey ¿qué es eso?
[6] Jesús: Eso sería el patrón de la progresión. En el punto d si obtengo el n-ésimo término de la progresión, entonces reemplazando acá por cualquier "n" [*Señala la expresión 4n-1*] yo voy a obtener ese término.

Figura 7

Escáner hoja de trabajo de Jesús



Problema 1

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75, 79, 83, 87, 91, 95, 99, 103, 107, 111, 115, 119

1). a) 39. La "distancia" entre los números de la progresión siguen un patron. de 4 unidades. Sumando 4 unidades a partir de 15 obtengo el siguiente digito y luego a este le sumo 4 unidades y obtengo el siguente digito y asi sucesivamente.

b) 399. el decimo termino de la progresión es 39, el termino número veinte de la progresión es 79, el termino número 30 es 119, y asi sucesivamente vemos que la "distancia de estos terminos es de 40 unidades, sumo de a 40 unidades y obtengo el termino número 40 y asi sucesivamente hasta obtener el centesimo termino.

c) 4 unidades separan los terminos uno de otro. tambien aparecen las unidades que componen los numeros. "3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9..."

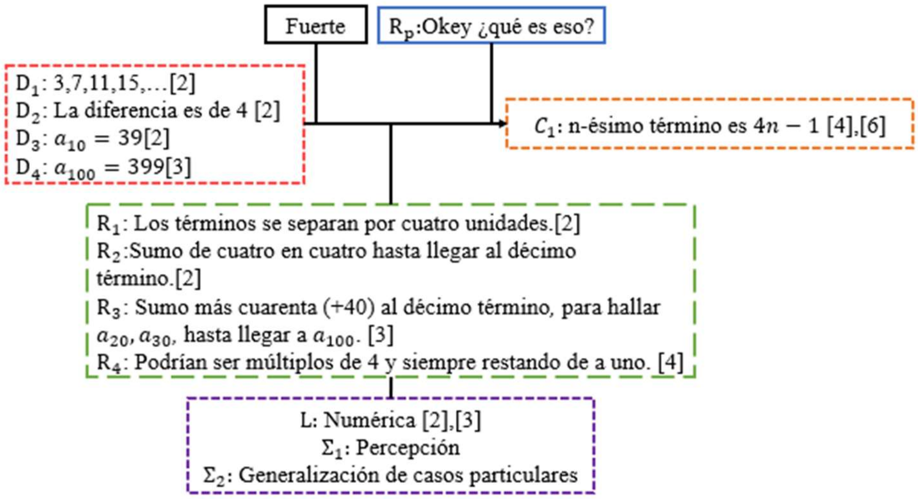
d) $4n-1 = a_n$ → cambio

e) Si, tomo cualquier n y obtengo el termino correspondiente a dicho n.

[13] Inv. Lo que usted está planteando es la relación de dos términos consecutivos, eso no es el n-ésimo término. En otras palabras, es lo que le pregunto a "Jesús" como patrón de recurrencia. Lo que siempre se repite, es decir cualquier término es igual al anterior más cuatro, eso también lo podemos escribir de la siguiente manera, el término a_n restado con el anterior siempre va a dar cuatro [$a_n - a_{n-1} = 4$], ese es el patrón de recurrencia.
[14] Jesús: Usted decía ponerlo de esta manera [Señala $X + 4$] y se puede hallar a través de una ecuación, [*Jesús plantea una expresión que responde a las preguntas, pero no plantea las incógnitas como elementos de una progresión*].

Figura 8

Esquema del planteamiento de conjetura de Jesús



Dada la estructura inductiva del problema, el planteamiento de conjeturas de Jesús fue un proceso de argumentación constructivo, pues a partir de las hipótesis y los procedimientos de cálculo realizado para encontrar a_{10} y a_{100}, encontró una recurrencia que brindó información para plantear la conjetura (C_1). La representación (L) del estudiante es numérica porque necesitó realizar todos los cálculos que las instrucciones indicaban para encontrar la recurrencia (D_2) y posteriormente el n-ésimo término.

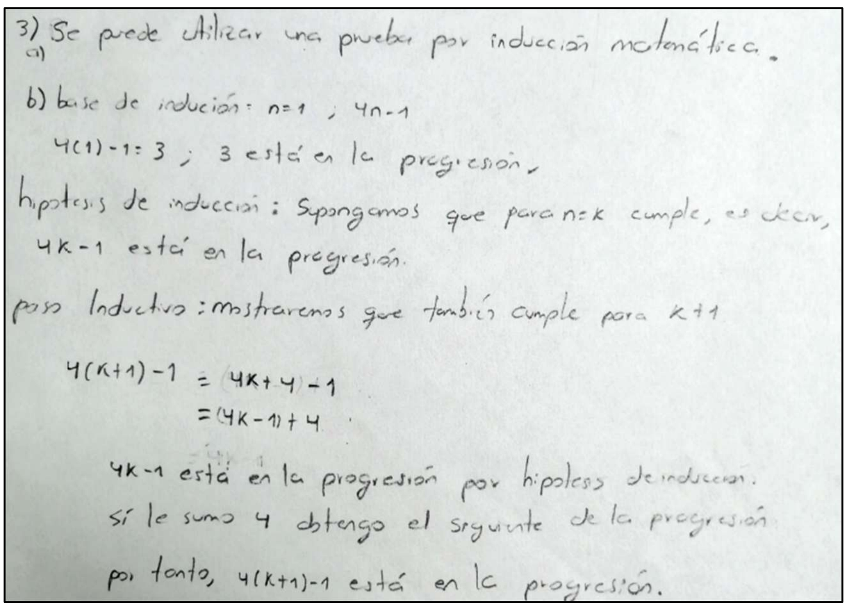
Los operadores R_1 y R_2 son procesos extraído de los datos que permiten generalizar una característica de las progresiones y encontrar términos de la forma a_{10}, para generar una propiedad en R_3, esta propiedad está basada en procedimientos aritméticos. La estructura de control es perceptiva, es decir no es teórica, ya que basados en esos procedimientos justificó su conjetura. En [5] la pregunta se convierte en refutación potencial (R_p), porque cuestiona al estudiante si la expresión $4n - 1$ es el patrón de recurrencia o la generalización de los términos de la progresión.

Demostración

[27] Jesús: Yo de igual manera **utilicé el método de inducción matemática** para probar de que se cumplía para todos.
[28] Inv. Al utilizar el principio de inducción matemática, en el paso inductivo se prueba de un n-ésimo término al siguiente, pero todo el principio indica que lo están demostrando para todo el conjunto. ¿Cómo hicieron esa demostración? ¿Quién quiere participar primero?
[29] Jesús: **Primero se parte de la base inducción**, que es probar para el primero, pero como yo empecé en $n = 1$, entonces pruebo para $n = 1$, y la fórmula es $4n - 1$. **Entonces para $n = 1$ vemos que está, porque $4(1) - 1 = 3$ y ese término está en la progresión.** Entonces en **la hipótesis de inducción, supongo que para $n = k$ también se cumple**, eso ya lo doy por sentado, y **veamos que también se cumple para $n = k + 1$** es decir, para el siguiente.

Figura 9

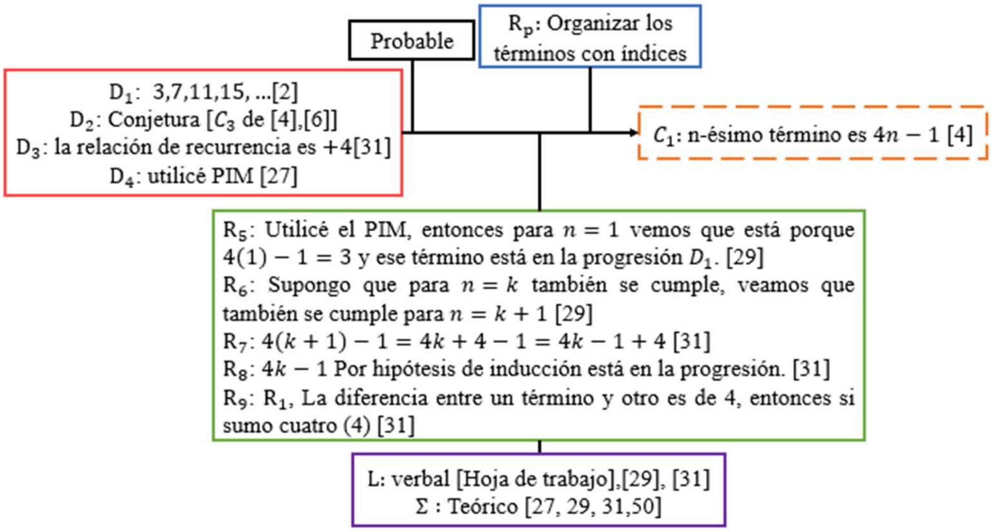
Escáner hoja de trabajo de Jesús


3) Se puede utilizar una prueba por inducción matemática.
a)
b) base de inducción: $n=1$; $4n-1$
$4(1)-1=3$; 3 está en la progresión.
hipótesis de inducción: Supongamos que para $n=k$ cumple, es decir, $4k-1$ está en la progresión.
paso Inductivo: mostraremos que también cumple para $k+1$
$4(k+1)-1 = 4k+4-1$
$=(4k-1)+4$
$4k-1$ está en la progresión por hipótesis de inducción.
si le sumo 4 obtengo el siguiente de la progresión
por tanto, $4(k+1)-1$ está en la progresión.

[30] Inv. Lo que debe considerar también es la organización de los términos con índices. Porque si plantea la idea de esta manera está organizando solamente dos expresiones, pero cuando intente agregarle algo habrá confusiones, no quiere decir que esté mal.
[31] Jesús: **Entonces para $4k - 1$, es decir, reemplazamos $n = k + 1, 4(k + 1) - 1$ y ahí hacemos una propiedad distributiva, $4k + 4 - 1$, eso también se puede mirar como $4k - 1 + 4$,** $4k - 1$ está por hipótesis de inducción está en la progresión y si yo le sumo 4, voy a obtener el siguiente término de **la relación de recurrencia es +4**, es decir, **la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro (4)**, ese término también va a estar en la progresión, entonces, el $k + 1$ término está en la progresión.
[33] Jesús: No sé.
[34] Inv. Ahí tiene que nombrarlos.
[35] Jesús: Tiene que ir con subíndices, el a_{k+1}quedaría menos ambiguo.
[36] Inv. Exacto, ahí está trabajando directamente con la representación algebraica de los términos.
[37] Jesús: Si.

Figura 10

Esquema de la demostración de Jesús



En la construcción de la demostración, Jesús utilizó el principio de inducción matemática, declarado como dato (D_4) extraído del inciso 3a) planteado en el problema, utilizó D_4 como operador en R_5, R_6, R_7, validó su proceso mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, pero no usa el principio correctamente, ya que asume la conclusión del paso inductivo como conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura.

Jesús usa el lenguaje natural como única representación (L), ya que no comprende la proposición a demostrar y usa representación algebraica para indicar términos en el paso inductivo sin plantear igualdades entre el término (a_k) y su estructura algebraica $(4k - 1)$. La forma de argumentación es estructurante ya que basa su demostración en el PIM y por tanto su control es teórico (Σ).

La fuerza para su demostración es probable porque el estudiante contempla que usó el método, pero no escribió la demostración en un lenguaje que otra persona pueda entenderle, es decir, no está convencido de estar matemáticamente bien escrito. Las refutaciones [30] y [35] giran en torno a poner en duda como explícita su demostración.

Jesús retoma como dato (D_3) recurrencia [31] extraída en el planteamiento de la conjetura y lo usa como hipótesis en el proceso de su demostración, resultado de la exploración del problema. Este dato permitió realizar el proceso del paso inductivo ($P_k \Rightarrow P_{k+1}$).

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 4

Comparación del sistema de referencia de Jesús

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN C_3: n-ésimo término es $4n-1$	CONCLUSIÓN C_1: $4(k+1)-1$ está en la progresión 3,7,11,15, ...
OPERADORES R_1: los términos se separan por cuatro unidades. R_2: sumo de cuatro en cuatro hasta llegar al décimo término. R_3: sumo mas cuarenta (+40) al décimo término, para hallar a_{20}, a_{30}, hasta llegar a a_{100}. R_4: podrían ser múltiplos de 4… pero entonces siempre están restando de a uno.	OPERADORES R_5: utilicé el PIM, entonces para $n=1$ vemos que está porque $4(1)-1=3$ y ese término está en la progresión D_1. R_6: supongo que para $n=k$ también se cumple, veamos que también se cumple para $n=k+1$ R_7: $4(k+1)-1=4k+4-1=4k-1+4$ R_8: $4k-1$ por hipótesis de inducción está en la progresión R_9: R_1 la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro.
REPRESENTACIÓN L: Numérica	REPRESENTACIÓN L: verbal
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Percepción Σ_2: Generalizó con casos particulares	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Tabla 5

Comparación del sistema estructural de Jesús

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción
RUPTURA ESTRUCTURAL	

En este proceso de argumentación para el planteamiento de la conjetura y la construcción de la demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural, debido a que los operadores usados en la construcción de la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura.

Aunque se provocó la ruptura, se identificó la dificultad (J_5), ya que, en el proceso de la demostración usó el lenguaje natural en carencia de entender lo que quería demostrar. Otras dificultades identificadas son (J_2) y (J_6); el estudiante asume la conclusión del paso inductivo como la conclusión de la demostración, lo cual muestra que (1) el estudiante no contempla que es demostrada la proposición cuando son demostrados el paso base y el paso inductivo y (2) asumen el paso base como un requisito desligado de la demostración.

Análisis del problema 1 para David

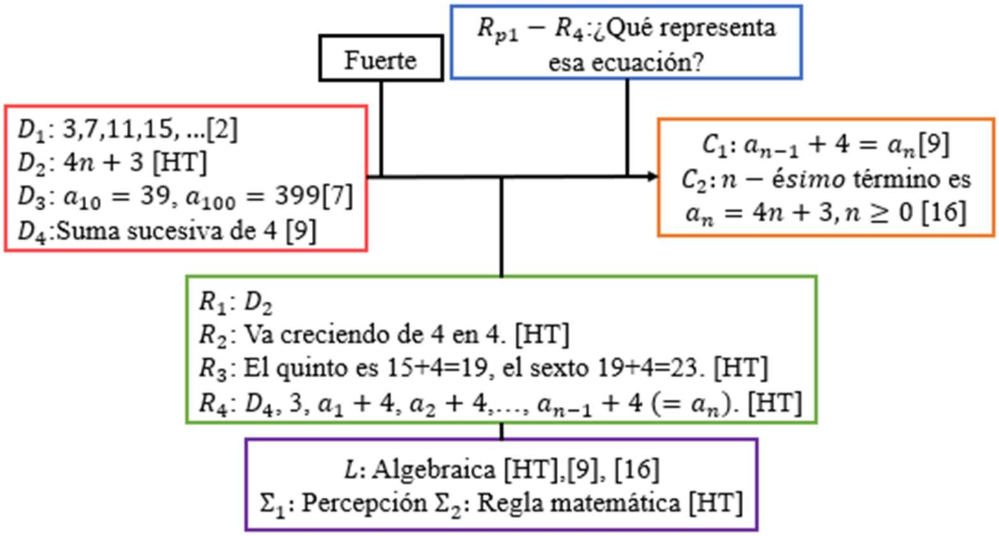
Planteamiento de conjetura

[7] David: En el primer paso nos pide que identifiquemos los primeros términos de la sucesión y podemos ver que entre cada término se le suma cuatro al anterior, así concluimos que el décimo término es 39, después de esto, empezamos a sumar el término anterior más el siguiente y llegamos a que el centésimo término es 399.
1a) La sucesión es estrictamente creciente, podemos ver que después del primer número la sucesión va creciendo de 4 en 4. Así se podría deducir que el quinto término es 15+4=19, el sexto es 19+4=23, en general $4n+3$ *para* $n \geq 0$*, así el décimo término, es decir, para* $n=9$ *es* $4(9)+3=39$.
1b) Continuando con muestra conjetura, el centésimo término es $4(99)+3=399$
[8] Inv. ¿Como llegó a eso?

[9] David: No hice los pasos y utilicé directamente la ecuación, pero en general, deberíamos de identificar la sucesión, la cual es que en cada paso empezando por $a_1 = 3$, en cada paso se van sumando cuatros, así tenemos que $a_1 + 4$, $a_2 + 4$, y en general hasta $a_{n-1} + 4 = a_n$,
1c) Identifiqué una suma sucesiva de 4 en cada paso, empezando desde $a_0 = 3$, de la siguiente manera $a_0 + 4, a_1 + 4, \dots, a_{n-1} + 4 = a_n$.
1d) Con base a todo lo anterior el n-ésimo término es $a_n = 4n + 3, n \in \mathbb{N}$.
1e) Si, dado que iniciando en el primer término para $n = 0, 4(0) + 3$, en el inciso c) se puede observar que los números después de cada paso se sumaban 4 como se observa en la conjetura.
[10] Inv. Okey ¿Qué representa esa ecuación?
[11] David: el n-ésimo término de la sucesión.
[12] Inv. Okey, algebraicamente, en términos de "n" qué representaría. [Silencio por un minuto]
[13] Inv. Lo que usted está planteando es la relación de dos términos consecutivos, eso no es el n-ésimo término. En otras palabras, es lo que le pregunto a Jesús como patrón de recurrencia. Lo que siempre se repite, es decir, cualquier término es igual al anterior más cuatro, eso también lo podemos escribir de la siguiente manera, el término a_n restado con el anterior siempre va a dar cuatro [$a_n - a_{n-1} = 4$], ese es el patrón de recurrencia.
[14] Jesús: Usted decía ponerlo de esta manera [Señala $X + 4$] y se puede hallar a través de una ecuación, [Jesús plantea una expresión que responde a las preguntas, pero no plantea las incógnitas como elementos de una progresión].
[15] Inv. Pero hay que plantearles subíndices para poder organizarlos y facilitar el orden de la progresión [Borra las expresiones con variables X y plantea que $a_n = 4n - 1$].
[16] David: Entonces el inciso d, que pide representar algebraicamente el término n-ésimo, entonces en base a lo anterior, podríamos llegar a concluir que el término "n", una ecuación en donde "n" es lo único que varía siendo "n" natural, tenemos que $a_n = 4n + 3$.
[17] Inv. Okey, ¿"n" puede tomar valores de uno y cero?
[18] David: [*Asiente*]
[19] Inv. Listo. ¿Cómo verifica que esa ecuación está bien definida?
[20] David: Podemos probar para los cuatro términos que nos han dado.

Figura 11

Esquema del planteamiento de conjetura de David



David inicialmente planteó la conjetura (C_2) para responder a los incisos del problema apoyándose en una recurrencia ($a_n = a_{n-1} + 4$) (R_4) y en una expresión algebraica ($4n + 3$) (D_2) como representante de los términos de la progresión, la hoja de trabajo evidencia que el estudiante pensó directamente en una representación algébrica (L) que cumpla con las hipótesis del problema. David no necesitó explicitar cálculos de casos particulares para convencerse de su conjetura y con base en eso calculó a_{10} y a_{100} por tanto, la estructura de control es teórica ya que basó sus procedimientos sólo en la fórmula y perceptiva porque encontró la expresión en los datos. La refutación potencial ($\mathrm{R_p}$) se origina en cuestionarle si contemplaba, qué expresión representa su conjetura y su patrón de recurrencia, o si eran dos conjeturas las que dedujo.

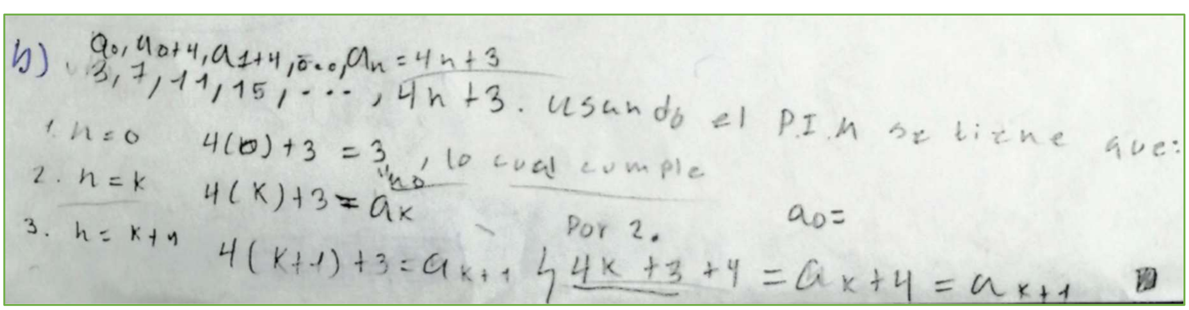
Los operadores (R_1 a R_4) muestran un proceso de argumentación estructurante y una estructura inductiva por recurrencia, ya que, a partir de los primeros casos, el estudiante obtuvo el patrón que permitió para elaborar procedimientos aritméticos que se indicaban y transformarlo en la conjetura (C_2).

Demostración

[21] Inv. ¿Qué se hizo en la tercera etapa?
[22] David: Primero nos pedía los métodos que íbamos a utilizar para probar que las conjeturas eran ciertas, entonces yo coloqué, que para probar esto, debíamos hallar la forma de probar que era cierto el patrón de recurrencia y la ecuación [$a_n = 4n + 3$]. Para esto nos valíamos del principio de inducción matemática, porque nosotros no podemos determinar que es cierto para cada uno, porque en general no hay método que muestre que para el n-ésimo término esto se va a cumplir, por eso usamos el PIM el cual nos permite garantizar que esto se cumplirá.
3a) Pese a no poder probarse para cada caso particular, se puede probar para los términos de la sucesión ya conocidos, después de ello se puede demostrar que el término n-ésimo es un natural, así mismo, por medio del PIM, podemos garantizar que nuestra conjetura es cierta.
[23] Inv. Cuando se utiliza el PIM, no solo se demuestra para el n-ésimo…
[24] Jesús: También para el siguiente.
[25] David: n+1.
[26] Inv. [*Intervención*] Para todos los términos de la progresión.
[32] Inv. En este caso se llama el k+1 término.
[38] Inv. Pero no está escribiendo el término como lo plantea.
[39] David: ¿Entonces iniciamos con el patrón de recurrencia?
[40] Inv. ¿Qué hizo?, ¿Qué usa?, ¿Para qué es el patrón de recurrencia?
[41] David: Lo uso como hipótesis. Debemos de probar que este patrón de recurrencia para el n-ésimo término es igual a nuestra ecuación, la cual es $a_n = 4n + 3$.
[42] Inv. ¿Cuál es su conjetura?, ¿Qué quiere demostrar?
[43] David: Quiero demostrar que el patrón de recurrencia en el n-ésimo término es $4n + 3$.
[44] Inv. Ahí tiene dos cosas a la vez, una cosa es el patrón de recurrencia y otra cosa es demostrar que el término $a_n = 4n + 3$. Lo que usted busca demostrar no es el patrón, quiere demostrar es que todos los términos de la progresión son de la forma $4n + 3$.
[45] David: si, entonces, como el mínimo de mi conjunto es cero, se hace desde cero. Digamos que, para nuestra ecuación, $4(0) + 3 = 3$, lo cual sería nuestro término a_0. Lo cual se cumple. Entonces pasamos al paso dos, suponer para un k, ponerlo como hipótesis, entonces tengo que $a_k = 4k + 3$ lo cual suponemos cierto y de ahí pasamos al paso tres para probar para $n = k + 1$, entonces planteamos la ecuación, $4(k + 1) + 3 = a_{k+1}$.

Figura 12

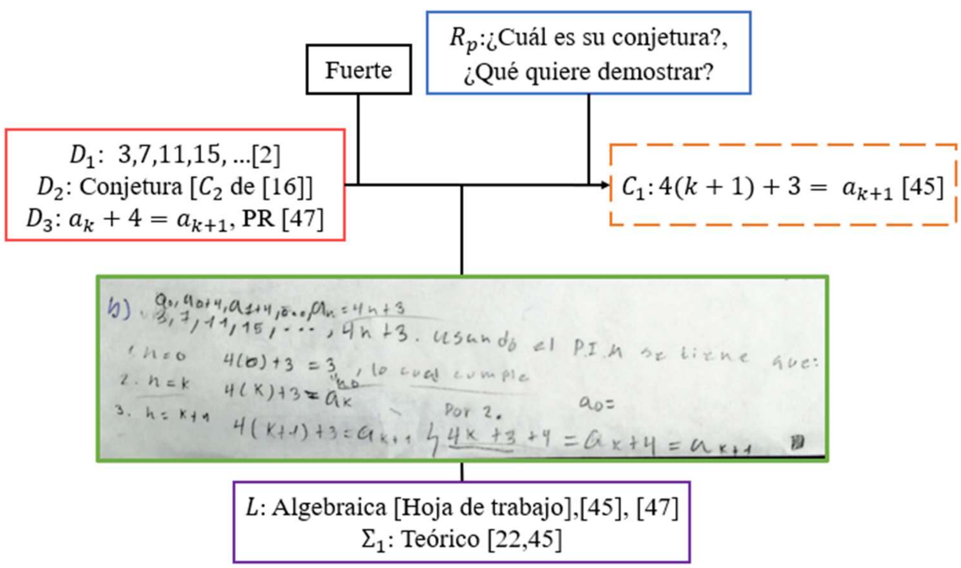
Demostración de David



[46] Inv. eso es lo que quiere probar.
[47] David: si, aplicando propiedad distributiva tenemos, $4k+3+4$, y $4k+3=a_k$, lo tenemos por hipótesis, más cuatro, entonces tenemos, $\boldsymbol{a_k+4=a_{k+1}}$, **lo cual es nuestra recurrencia**
Por eso tendríamos que eso sería igual a $\boldsymbol{a_{k+1}}$.
[48] Inv. Usó el patrón de recurrencia para demostrarlo. Aquí hay dos cosas. La primera es si ustedes en verdad están haciendo el paso base. Pero para eso tenemos que mirar si se definió bien la conjetura. También tengo que mirar si se usó bien el paso inductivo.
[49] Inv. ¿Qué datos tienen para demostrar la conjetura?
[50] Jesús: En el punto anterior se pedía las técnicas que se podían utilizar, ese punto nos sitúa en qué vamos a utilizar para poder demostrarla, en este caso el principio de inducción matemática.

Figura 13

Esquema de la Demostración de David



En la construcción de la demostración, David utilizó el principio de inducción matemática, declarado como dato (D_4) extraído del inciso 3a) planteado en el problema para validar que su conjetura es cierta, como operadores utilizó D_4 mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, pero no usa el principio correctamente, ya que asume la conclusión del paso inductivo como conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura.

David usa representación algebraica (L) dado que utiliza un caso genérico en la demostración del paso inductivo. La forma de argumentación es estructurante ya que basa su demostración en el PIM y es a su vez el soporte donde verifica si su proceso es correcto, por tanto, su control teórico (Σ).

La fuerza para su demostración es fuerte porque David contempla que usó el método y conoce la estructura lógica del método en el contexto del problema. Contempla que el uso de la hipótesis de inducción y del patrón de recurrencia en el paso inductivo permite concluir la tesis. La refutación potencial gira en torno a poner en duda cual es la conjetura que quiere demostrar.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 6

Comparación del sistema de referencia de David

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN $C_1: a_{n-1} + 4 = a_n$ C_2: n − ésimo término es $a_n = 4n + 3, n \geq 0$	CONCLUSIÓN $C_1: 4(k+1) + 3 = a_{k+1}$
OPERADORES R_1: D_2 R_2: va creciendo de 4 en 4. R_3: el quinto es 15+4=19, el sexto 19+4=23. R_4: D_4, 3, $a_1 + 4$, $a_2 + 4$,…, $a_{n-1} + 4$ ($= a_n$).	OPERADORES R_5: R_4. $3,7,11,15,\ldots,4n+3$. usando el PIM, se tiene que: R_6:1. $n = 0$, $4(0) + 3 = 3 = a_0$ lo cual cumple R_7: 2. $n = k$, $4(k) + 3 = a_k$ R_8: 3. $n = k + 1$, $4(k + 1) + 3 = a_{k+1}$ R_9: por R_7, $4k + 3 + 4 = a_k + 4 = a_{k+1}$ q.p.d.
REPRESENTACIÓN L: algebraica	REPRESENTACIÓN L: algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: percepción Σ_2: regla matemática	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Tabla 7

Comparación del sistema estructural de David

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por recurrencia	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción

RUPTURA ESTRUCTURAL

En este proceso de argumentación de conjetura y demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura estructural, ya que los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura.

Aunque se provocó la ruptura, se identificó la dificultad (J_6) pues, el estudiante asume la conclusión del paso inductivo como la conclusión de la demostración, lo cual muestra que (1) el estudiante no contempla que es demostrada la proposición cuando son demostrados el paso base y el paso inductivo y (2) asumen el paso base como un requisito desligado de la demostración.

6.2. Análisis del Núcleo 2: Recursividad

Análisis del problema 1 para Gabriela

A continuación, se presenta el análisis del problema 1 del Núcleo 2. Este fue abordado por los estudiantes Jesús, David y Gabriela de manera individual y conjunta.

Figura 14

Enunciado del Problema 1- Núcleo 2

Problema 1:

Hallar a_n, si se conoce que $a_0 = 1$ y que, para todo natural, $a_n = 2a_{n-1} + 3$

1) Explorando conjeturas

   a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? Justifique su respuesta.
   b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? Justifique su respuesta.
   c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. Justifique su respuesta.
   d) ¿Cuál es la representación algebraica del $n-ésimo$ término de la sucesión? Justifique su respuesta.
   e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? Justifique su respuesta.

Luego de mostrarles el problema se indicó trabajar de manera individual en el planteamiento de la conjetura, cada estudiante en su hoja de trabajo responde a los incisos en el orden que vea más asequible. Luego de 15 minutos el investigador interviene preguntando si abordaron todos los incisos para comenzar la discusión del problema y sus resultados.

Planteamiento de conjetura

Al iniciar, los estudiantes empezaron realizando los cálculos de los primeros términos con la calculadora y respondieron los incisos del enunciado del problema, entre ellos corrigieron los cálculos de los términos encontrados y posteriormente se dio la siguiente discusión cuando se les preguntó ¿qué hicieron?

[3] Jesús: Estamos hallando el patrón de recurrencia, yo digo que aumenta en potencias de dos.
[4] Gabriela: Yo digo que aumenta en la diferencia. Osea 5-1=4, 13-5=8, ahí tenemos el doble de la diferencia anterior.

Figura 15

Proceso de generalización de Gabriela

a) $a_{10} = 2a_{10-1} + 3 = 2a_9 + 3$

$a_0 = 1$ $\quad a_4 = 2(29) + 3 = 61$ $\quad 32 = 2^5$

$a_1 = 2(1)+3 = 5$ $\quad a_5 = 2(61) + 3 = 125$

$a_2 = 2(5)+3 = 13$ $\quad a_6 = 2(125) + 3 = 253$

$a_3 = 2(13)+3 = 29$ $\quad a_7 = 2(253) + 3 = 509$

$a_8 = 2(509)+3 = 1021$ $\quad a_9 = 2(1021) + 3 = 2045$

4, 8, $16 = 2^4$

Entonces $a_{10} = 2(2045) + 3 = 4093$

$a_9 = 2045$

[5] Inv. Eso también son potencias de 2, están en lo mismo.
[6] Gabriela: Ah, okey.
[7] Inv. ¿Ese sería el patrón de recurrencia?
[8] Gabriela: Me piden el centésimo término, entonces, empezando desde cero sería el término a_{99}, entonces lo anoté así $a_{99} = 2a_{98} + 3$. Pero no lo encontré.

Figura 16

Proceso de Generalización de Gabriela

b) $a_{99} = 2a_{98} + 3$

c) $a_n - a_{n-1} = 2^{n+1} \longrightarrow a_n = 2^{n+1} + a_{n-1}$

$2a_n + 3 - (2a_{n-1} + 3) = 2a_n + 3 - 2a_{n-1} - 3 = 2a_n - 2a_{n-1}$

$2(a_n - a_{n-1})$

[9] Inv. ¿Cuál es ese término?
[10] Gabriela: No sé, no he llegado hasta allá.
[11] Inv. ¿Cuánto vale el término a_{98}?
[12] Gabriela: No sé, no lo he descifrado.
[13] Inv. Tiene razón en lo que dijo, que entre término y término hay una diferencia y tiene un patrón en esa diferencia, un patrón indica que es algo que se repite de la misma forma, y recurrencia indica que no siempre será constante. ¿Cuál es el patrón de recurrencia? - Que la diferencia aumenta siempre en potencias de 2, y es una relación variable.
[14] Inv. Pero ahí deben saber en qué tipo de potencias, qué tipo de exponente, si es 2^n ó 2^{n-1}.

Se hacen correcciones de signos en las ecuaciones recursivas que proponen como patrón de recurrencia. Recalcando que el patrón de recurrencia es la diferencia entre términos consecutivos.

[16] Inv. En el siguiente inciso pueden plantear la respuesta usando el patrón, ¿Cómo definieron el patrón?

[17] David: ¡Ah! *(David se da cuenta de algo).*

[18] David: Al parecer si me dio, pero con el anterior (a_{n-1}), se halla el siguiente.

[19] Inv. Si encontró el anterior de forma algebraica pues los demás también; pero ahí hay un error, mire como define a_{n-1}, hubo un error en un signo.

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n+1}$$
$$2a_{n-1} + 3 - a_{n-1} = 2^{n+1}$$
$$a_{n-1} + 3 = 2^{n+1}$$
$$a_{n-1} = 2^{n+1} + 3$$

Error al despejar a_{n-1}, se hizo la corrección en el momento.

[21] David: Ah si, este es "-3". $a_{n-1} = 2^{n+1} - 3$

Una vez definió a_{n-1}, plantea $a_n = 2^{n+2} - 3$

[22] Inv. Así es.

David *comienza a verificar si la ecuación corregida cumple con los primeros datos del problema, entre las hipótesis y los términos encontrados.*

[23] David: El primero sería $a_0 = 2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$

$$a_1 = 2^{1+2} - 3 = 8 - 3 = 5$$
$$a_2 = 2^{2+2} - 3 = 16 - 3 = 13$$

Entonces aparentemente está bien, este es $a_n = 2^{n+2} - 3$

Ahora si probamos que cumple el patrón de recurrencia que teníamos al inicio.

[24] Inv. ¿Qué dice Gabriela?

[25] Gabriela: Veo que hay como 2^n pero también la relación del 3, la expresión es como $2^n + 3(n-1)$, Pero no me da.

[26] Inv. Hay que seguir intentando con otra forma. Recuerden que el patrón de recurrencia les facilita la demostración y les facilita el planteamiento de la conjetura. Desde el punto de vista de las ecuaciones; si tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, podemos encontrar el valor de las incógnitas, la relación que les doy al inicio es una ecuación y el patrón de recurrencia es otra ecuación, entonces tiene dos ecuaciones, dos incógnitas, lo pueden ver así.

[27] Jesús: ¿Cómo dos sistemas?

[28] Inv. Un sistema 2x2, pero antes de verlo como una matriz, es mejor resolverlo por sustitución, igualación, eliminación, les estoy dando como una pista, pero lo pueden hacer mirando otras cosas.

[29] Inv. David ¿puede compartir lo que ha hecho para plantear la conjetura?

[30] David: Para hallar el n-ésimo término, me guié por el patrón de recurrencia que hallamos. A través de esto, pude despejar el n-ésimo término y así mismo, este cumple el patrón de recurrencia.

David explica a sus compañeros el proceso que realizó para encontrar el n-ésimo término.

[31] Inv. ¿Qué dice Gabriela? ¿confuso? Inténtenlo hacer ustedes teniendo en cuenta lo que David comentó, miren los resultados de los primeros diez términos, ¿será que tendrán relación con lo que David está planteando?

Gabriela también replica el proceso para convencerse de lo que hicieron sus compañeros.

Figura 17

Proceso de generalización de Gabriela para plantear la conjetura

$a_n = 2a_{n-1} + 3$ y

$2^{n+1} + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 3$

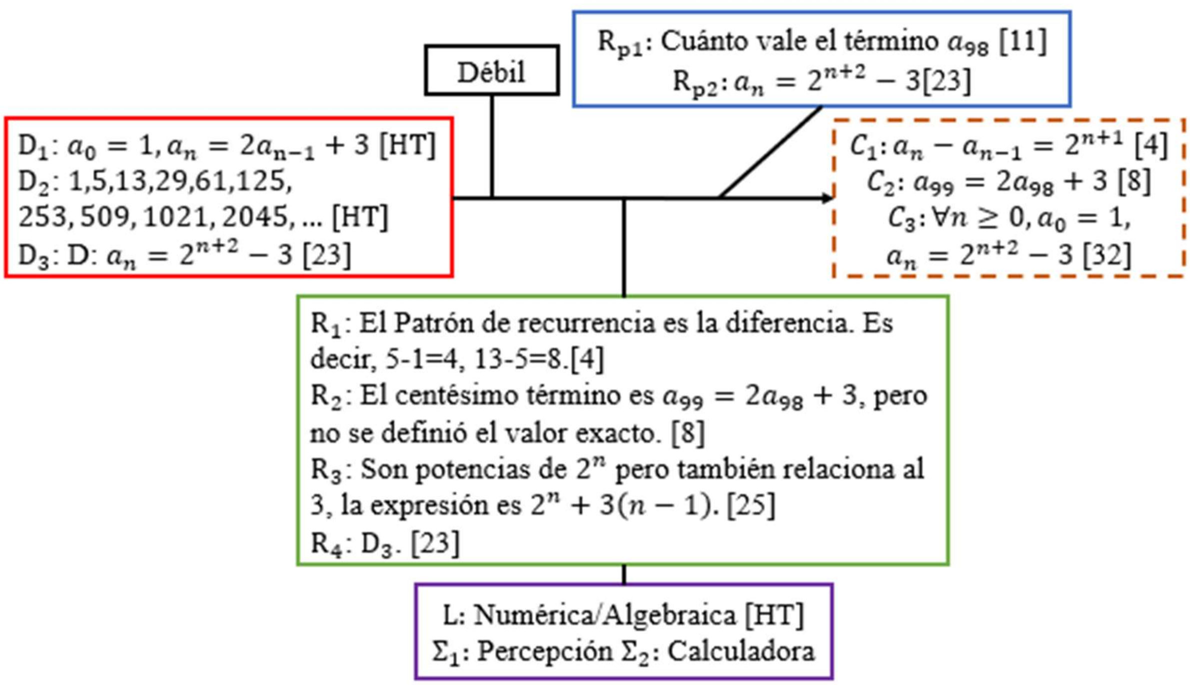
$2^{n+1} = 2a_{n-1} - a_{n-1} + 3$

$2^{n+1} - 3 = a_{n-1}$ $\quad a_n = 2^{n+2} - 3$

[32] Gabriela: Yo puse, Conjetura: $\forall n \geq 0$ se cumple que $a_n = 2^{n+2} - 3$, donde $a_0 = 1$
[33] Jesús: ¿Cuándo usted se refiere a definir la conjetura, a qué se refiere?
[34] Inv. Es esto *(señalo a la conjetura planteada por Gabriela)*, lo que encontraron en la primera parte fue el término n-ésimo, y lo que usaron para justificarlo fueron los datos, pero el cómo se hacer el patrón de recurrencia depende de ustedes. Definir el conjunto hace parte del cómo. Ya tienen la conjetura ¿Cómo sabemos si está bien definido?

Figura 18

Esquema del planteamiento de conjetura de Gabriela



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Gabriela no logró plantear su propia conjetura, se basó en el resultado encontrado por David; por tanto, el planteamiento de conjeturas de Gabriela fue un proceso de argumentación estructurante, pues justifica su conjetura como un hecho a partir de la discusión generada con el grupo, los procedimientos de cálculo realizados para encontrar los primeros términos hasta a_{10} contribuyeron a la construcción de una recurrencia que brindó información para plantear la conjetura (C_1). La representación (L) del estudiante es numérica/algebraica porque realizó cálculos numéricos para encontrar una recurrencia (C_1) sin lograr identificar el n-ésimo término por cuenta propia, pero si usa representación algebraica para definir su expresión.

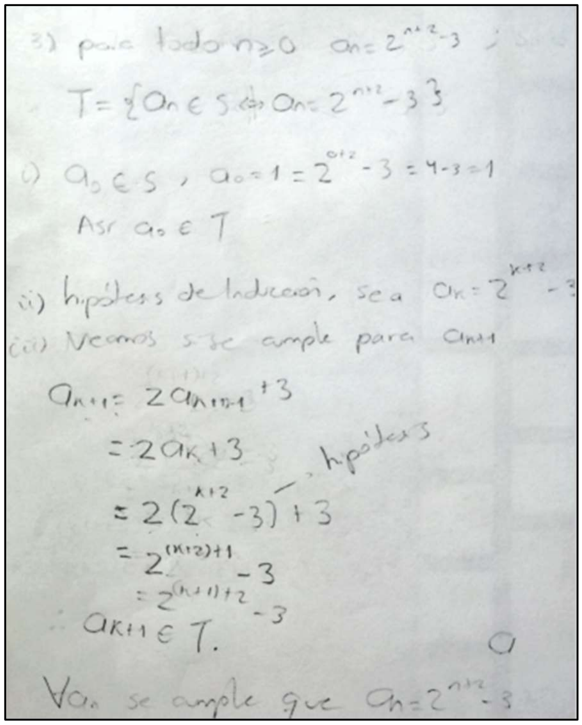
El operador R_1 es un proceso extraído de los datos que permiten generalizar una característica de las progresiones y encontrar el patrón de recurrencia. Al no encontrar el $n-ésimo$ término, describe R_2 como resultado de indagar en el problema siendo consciente que el objetivo no fue alcanzado. Esta recursión está basada en las hipótesis del problema, pero requiere de un número considerable de cálculos predecesores que no encontró, lo cual no favorece su justificación. La estructura de control es perceptiva, ya que no se basó en reglas matemáticas para justificar su conjetura, la calculadora se convierte en su estructura de control porque la usa como recurso para verificar sus resultados. En [11] la pregunta se convierte en refutación potencial (R_{p1}), porque cuestiona al estudiante si la expresión $a_{99} = 2a_{98} + 3$ responde a la pregunta planteada para la generalización de los términos de la progresión. El aporte de David para el planteamiento de la conjetura se convierte en R_{p2}, ya que, al no lograr un resultado, Gabriela elige la conjetura de David como su conclusión (C_3).

Demostración

[35] Inv. ¿Quién quiere iniciar explicando la demostración?
[36] Jesús: Empezamos definiendo un conjunto donde están todos los a_n. Miremos primero como base de inducción que a_0 como primer elemento pertenece al conjunto.

Figura 19

Demostración de Jesús

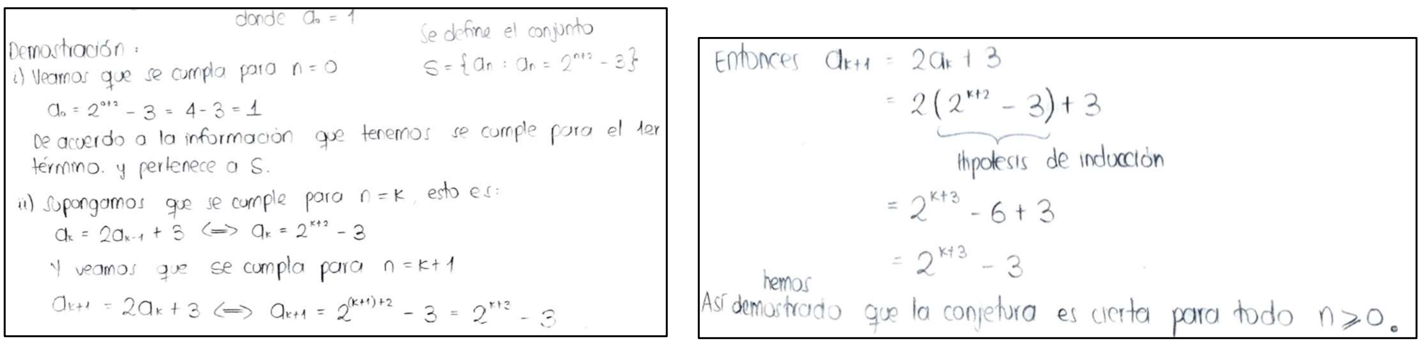


[37] Inv. Okey, pero ahí concluyo el paso inductivo.
[38] Jesús: Sí, la conclusión es que para todo a_n se cumple que $a_n = 2^{n+2} - 3$
[39] Inv. Okey.
[40] Jesús: Es importante enunciarla en todos los casos.
[41] Inv. Hay una parte en el paso base que, aunque sea pequeña, es importante. Así como usted (Jesús) lo escribió, en el orden que está escrito, como lo tiene escrito, no es la demostración del paso base. Pero como lo está relatando, le comprendí que lo está demostrando. ¿Qué es lo que se quiere demostrar? Que todos los términos se pueden escribir de la misma forma.
[42] Inv. Habrá momentos donde se note más. Ahora vamos con David.
[43] David: Sea $a_0 = 1$, y $a_n = 2a_{n-1} + 3$, $n \in \mathbb{N}, a_n = 2^{n+2} - 3$, usando el Principio de inducción matemática verificamos lo siguiente: que $a_0 = 1$, pertenece al conjunto inductivo S, pues $a_0 = 1 = 2^{0+2} - 3 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$, entonces $a_0 \in S$. Continuamos al paso dos, suponemos que $a_k = 2^{k+2} - 3$, es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces a_{k+1}, como se había definido al inicio, por recursión tenemos que $a_{k+1} = 2a_k + 3$, por hipótesis de inducción esto es: $a_{k+1} = 2 * (2^{k+2} - 3) + 3 = (2^{k+3} - 6) + 3 = 2^{k+3} - 3$, así podemos ver que se puede escribir de la forma $a_{k+1} = 2^{(k+1)+2} - 3$, osea que $a_{k+1} \in S$, por lo cual $\forall n \in \mathbb{N}_0, a_n = 2^{n+2} - 3$.
[44] Inv. cuando demuestran que a_{k+1} está en el conjunto, ¿Qué se está indicando?
[46] David: Que los elementos se pueden escribir de la misma forma para todo el conjunto.
[47] Gabriela: Es como una implicación, lo que usted mencionaba, si cumple para algún k natural, eso indica que se cumple para a_0, a_1 y así para el siguiente a_2.
[48] David: Ah cierto.

[49] Inv. El solo hecho de decir que a_{k+1} está en el conjunto eso no me dice nada, lo que sí se puede decir es que como a_k está en el conjunto y muestro que el siguiente elemento también está, eso ya es una implicación, no es una comprobación de que el elemento está ahí.
[50] David: ¡Ah!
[51] Inv. Teniendo en cuenta los dos pasos es que puedo concluir la demostración, no sólo la conclusión del paso inductivo, porque demostrar la base le permite decir que a partir de ahí va a iniciar como algo verdadero, como su proposición inicial; la implicación es la que le permite avanzar y hacer la generalización, pero no puede avanzar sin el paso base. Entonces la verdadera conclusión es, por los pasos base e inductivo es que puede demostrar la conjetura.
[52] Gabriela: Yo lo hice igual pero no definí el conjunto.

Figura 20

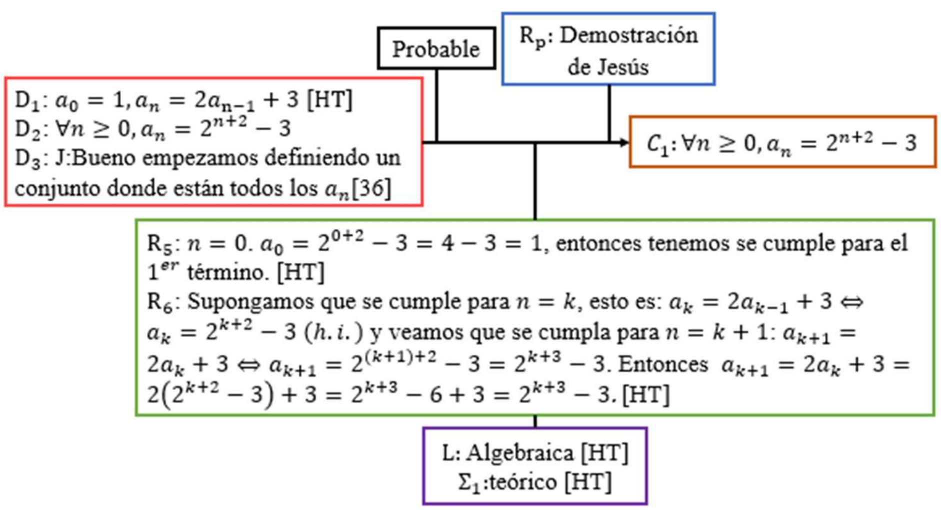
Demostración de Gabriela



A continuación, se presenta el esquema que sintetiza el proceso de argumentación de la demostración de Gabriela.

Figura 21

Esquema de la demostración de Gabriela



En la construcción de la demostración, Gabriela utilizó el PIM como operador en R_5, R_6, R_7, validó su proceso mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, pero no usa el principio correctamente, Gabriela escribe $a_0 = 2^0 + 1 = 2$, la hipótesis en el paso base es $a_0 = 2$, basado en la conjetura, la conclusión gira alrededor de representar los términos de la forma $2^n + 1$, Gabriela asume la conclusión del paso base como argumento de su demostración; además asume la conclusión del paso inductivo como conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura, se movilizaron de ser procesos de cálculo y ejemplos a formar un conjunto de operadores de una regla teórica.

Gabriela usa la representación algebraica (L) ya que el PIM lo requirió en el cuantificador de la proposición a demostrar. La forma de argumentación es estructurante ya que basa su demostración en el PIM y por tanto su control es teórico (Σ).

La fuerza para su demostración es probable porque la estudiante contempla que usó el método, pero escribió la demostración en forma algorítmica recurriendo a conocimientos previos, pero si se convenció de estar matemáticamente bien escrito al seguir la estructura del PIM. La refutación R_p en [36] giran en torno a poner en duda como escribió su demostración.

Gabriela retoma el aporte de Jesús (D_3) en el momento de la discusión y modifica su demostración, lo usa como argumento en el proceso de su demostración del paso base, pero no lo usó en el paso inductivo, por tanto, no influye en el resto de la demostración.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 8

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
CONCLUSIÓN $C_1: a_n - a_{n-1} = 2^{n+1}$ $C_2: a_{99} = 2a_{98} + 3$ $C_3: \forall n \geq 0, a_0 = 1, a_n = 2^{n+2} - 3$	CONCLUSIÓN $C_3: \forall n \geq 0, a_0 = 1, a_n = 2^{n+2} - 3$
OPERADORES R_1: El Patrón de recurrencia es la diferencia. Es decir, 5-1=4, 13-5=8. R_2: El centésimo término es $\mathrm{a}_{99} = 2\mathrm{a}_{98} + 3$, pero no se definió el valor exacto. R_3: Son potencias de 2^{n} pero también relaciona al 3, la expresión es $2^{\mathrm{n}} + 3(\mathrm{n} - 1)$. R_4: D_3	OPERADORES R_5: $n = 0$. $a_0 = 2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$, entonces tenemos se cumple para el 1^{er} término. R_6: Supongamos que se cumple para $n = k$, esto es: $a_k = 2a_{k-1} + 3 \Leftrightarrow$ $a_k = 2^{k+2} - 3$ $(h.i.)$ y veamos que se cumpla para $n = k + 1$: $a_{k+1} = 2a_k + 3 \Leftrightarrow a_{k+1} = 2^{(k+1)+2} - 3 = 2^{k+3} - 3$. Entonces $a_{k+1} = 2a_k + 3 = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2^{k+3} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3$.
REPRESENTACIÓN L: Numérica/algebraica	REPRESENTACIÓN L: algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Percepción Σ_2: calculadora	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico

RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Tabla 9

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por recurrencia	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción

RUPTURA ESTRUCTURAL

Gabriela no plantea su propia conjetura, sin embargo, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura, por tanto, en este proceso se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural.

Aunque se provocó la ruptura, se identificó la dificultad (J_2) en el proceso de la demostración del paso base, dado que usó la sucesión a demostrar como un paso de la demostración, esto se evidencia cuando evalúa en la sucesión el primer elemento, pero no concluye que el primer elemento se puede escribir en término de la sucesión a demostrar. Otras dificultades identificadas son (J_5) y (J_6); Gabriela asume la conclusión del paso inductivo como la conclusión de la demostración, lo cual muestra que (1) el estudiante no contempla que es demostrada la proposición cuando son demostrados el paso base y el paso inductivo y (2) asumen el paso base como un requisito desligado de la demostración.

Análisis del problema 2 para Gabriela

A continuación, se presenta el análisis del problema 2 del Núcleo 2: recursividades, se presenta el proceso de Gabriela.

Figura 22

Enunciado del problema 2-Núcleo 2

Problema 2:

Hallar a_n, si se conoce que $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ y que para todo natural $n \geq 2$,

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

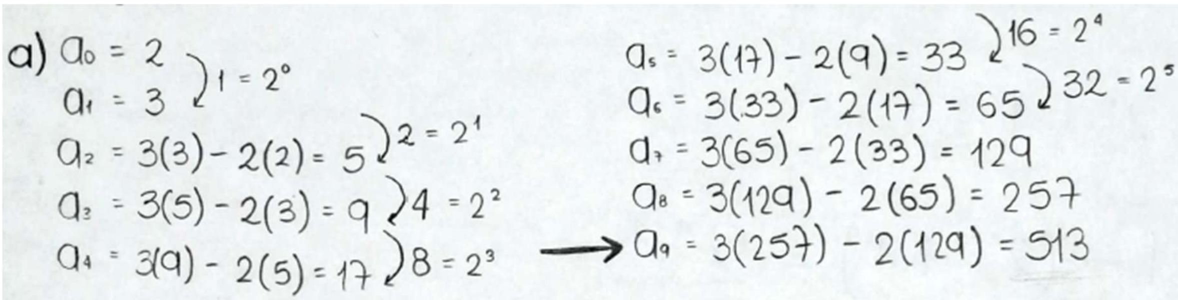
1) **Explorando conjeturas**
   a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**
   d) ¿Cuál es la representación algebraica del $n-ésimo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

Planteamiento de conjetura

[1] Inv. ¿Cómo va?
[2] Gabriela: Pues aquí, más o menos **lo mismo que hemos hecho en las otras sesiones**, tratar de **ver cuales la diferencia entre un término y el otro, entonces numéricamente ya sé que son las potencias de 2.** Pero no he podido encontrar una forma general que no dependa de algún término.

Figura 23

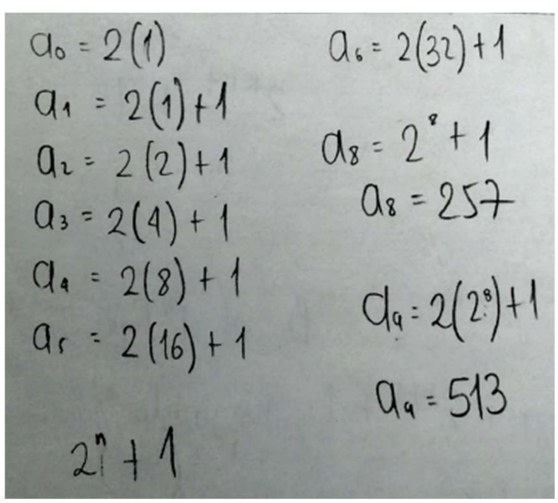
Proceso de argumentación de Gabriela para el planteamiento de la conjetura



[3] Inv. ¿Miró las diferencias?
[4] Gabriela: Si
[5] Inv. ¿Miró los resultados de cada término?, por ejemplo, ¿Quién es a_1, a_2, a_3, a_4, a_5?
[6] Gabriela: Si.
[7] Inv. ¿De ahí no encontró un patrón, ni nada para generalizar?
[8] Gabriela: no, no he encontrado nada.
[9] Inv. Yo sugiero que comience a generalizar los resultados de los términos de la sucesión, quizás así encuentre regularidades.
[10] Gabriela: Inicialmente pensé que eran los primos, pero no todos.
[11] Inv. ¿Será que 129 es primo? ¿el 33?
[12] Gabriela: Si, el 33 tampoco es primo.
Minutos después
[13] Gabriela: Ya.
[14] Inv. ¿Cómo lo hizo?
[15] Gabriela: Lo que dije al principio que eran las potencias de dos. Es $2 * 2^{n-1} + 1$.
[16] Inv. ¿Cómo llegó a eso?
[17] Gabriela: Mirando esto *(señala imagen)*, como vi que iban quedando los impares, entonces vi una relación entre ellos de la forma $2k + 1$.

Figura 24

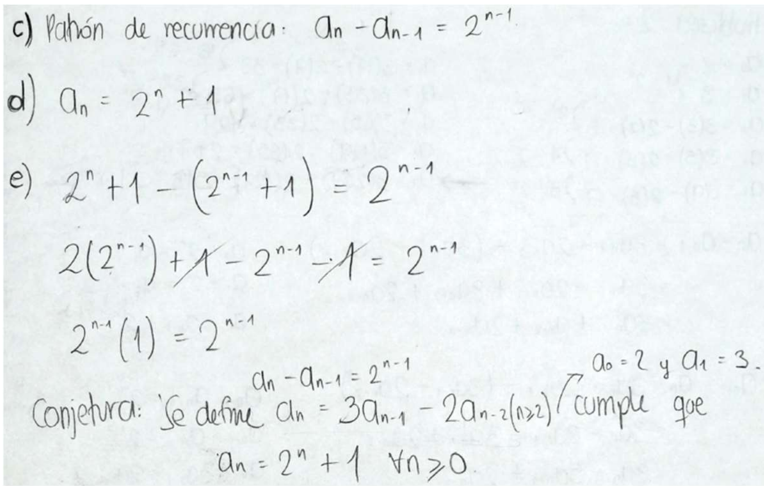
Proceso de argumentación de Gabriela para el planteamiento de la conjetura



[18] Inv. ¿Y estaba buscando quien era ese k?, pero el a_0 no es impar.
[19] Gabriela: Sí, entonces seria $2^n + 1$
Empieza a evaluar casos particulares para verificar que se cumple y completa los incisos del problema.

Figura 25

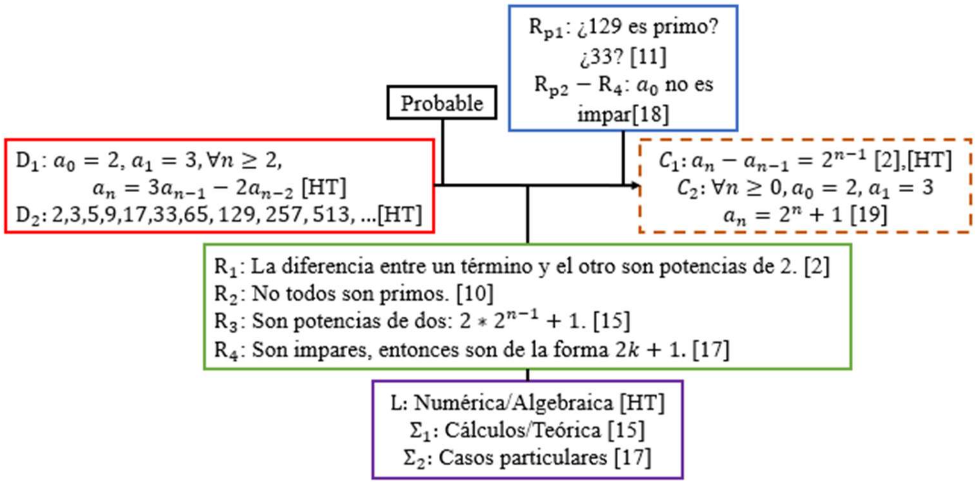
Proceso de argumentación de Gabriela para el planteamiento de la conjetura



[20] Gabriela: ¡Ya ahora sí!
[21] Inv. Listo, ¿qué tan difícil se le hizo plantear la conjetura?
[22] Gabriela: Bastante.
[23] Inv. ¿Cuántas veces intentó encontrar la conjetura?
[24] Gabriela: En una intenté, pero no llegué a nada. Aquí lo encontré, pero no lo veía claro *(Señala el cálculo de los casos particulares y el patrón de recurrencia)*, luego lo de las ecuaciones.
[25] Inv. ¿Cómo verificó que le estaba quedando bien lo que hacía?
[26] Gabriela: Pues en los intentos cuando encontraba algo, miraba si concuerda con alguno de los términos que ya encontré.
[27] Inv. En el intento que le quedó bien, ¿Cómo iba verificando que le iba quedando bien?
[28] Gabriela: Pues el máximo que tenía era el décimo entonces lo que iba encontrando iba mirando a ver si cuadraba con lo que tenía acá *(señala la primera parte donde calculó los primeros diez términos).*
[29] Inv. Okey.

Figura 26

Esquema del planteamiento de conjetura de Gabriela



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Gabriela intentó cuatro formas diferentes para plantear su propia conjetura hasta lograrlo, los intentos le brindaron información que le permitió deducir la generalidad [17], escribió los términos de la forma $2k + 1$ e identificó que los valores de k son potencias de dos (2^{n-1}). Del proceso de generalización deduce que los términos son de la forma $2 * 2^{n-1} + 1$, por tanto, el planteamiento de conjeturas de Gabriela fue un proceso de argumentación constructivo, pues sus intentos contribuyeron a la construcción de su conjetura, los procedimientos de cálculo realizados para encontrar los primeros términos hasta a_{10}, contribuyeron a la construcción de una recurrencia que brindó información para plantear la conjetura (C_1). La representación (L) del estudiante es por una parte numérica, porque realizó los cálculos solicitados con el objetivo de encontrar la recurrencia (C_1) e identificar el n-ésimo término, y, por otra parte, es algebraica porque usa representación algebraica al plantear la expresión.

El operador (R_1) es un proceso extraído de la construcción de problemas anteriores, permiten generalizar una característica de la sucesión recursiva y encontrar el patrón de recurrencia. Al no encontrar el n-ésimo término después de varios intentos (R_2), usa el patrón de recurrencia como resultado de indagar en el problema, esta recursión está basada en las hipótesis del problema. La estructura de control es perceptiva/teórica, ya que no se basó en reglas matemáticas para justificar su conjetura, pero si usó un teorema para generalizar con ejemplos particulares. La calculadora es otra estructura de control porque la usa como recurso para verificar sus resultados. En [11] la pregunta se convierte en refutación potencial (R_{p1}), porque hace dudar a Gabriela sobre la conjetura emergente, R_{p2} pone en duda el argumento de Gabriela, ya que el contraejemplo alerta a Gabriela que su conjetura no es verdadera para todos los elementos del conjunto, sin embargo, la misma refutación aporta al planteamiento de la conjetura.

Demostración

[30] Inv. ¿Cómo demuestra el paso base? Supongo que está utilizando inducción.
[31] Gabriela: Tomando el primer valor que puede tomar "n" y compruebo que en este caso se cumple la hipótesis que me dan, en este caso me dicen que $a_0 = 2$, y yo pongo $n = 0$, y yo compruebo que a_0 efectivamente es igual a 2.
[32] Inv. Okey, comprueba y demuestra con base a la hipótesis
[33] Gabriela: ¡Ah listo!
[34] Gabriela: ¿Esta demostración se hace por inducción fuerte?
[35] Inv. ¿Qué quiere demostrar?
[36] Gabriela: Que $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$, pero entonces acá, yo tomo esto ($a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$) entonces necesita el término $k - 1$ y $k - 2$.
[39] Inv. Puede usar esa inducción, pero recuerde que hay otra ecuación que no está usando, si quiere escríbala ($a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$), esa es otra hipótesis, le puede facilitar el problema. Es decir, $a_{k+1} - a_k = 2^k$ ó $a_{k+1} = 2^k + a_k$, no estoy tomando el caso para k, si no para $k + 1$.
[40] Gabriela: Hum… sí.
[41] Inv. Eso es una hipótesis, pero no es la hipótesis de inducción.
[42] Gabriela: Hum… ahora sí, usando la otra hipótesis, de que la diferencia entre los dos términos es $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ entonces

$$a_{k+1} - a_k = 2^k$$

Despejo a_{k+1},

$$a_{k+1} = 2^k + a_k$$

Esto lo reemplacé por hipótesis de inducción

$$a_{k+1} = 2^k + 2^k + 1$$

Opero algebraicamente

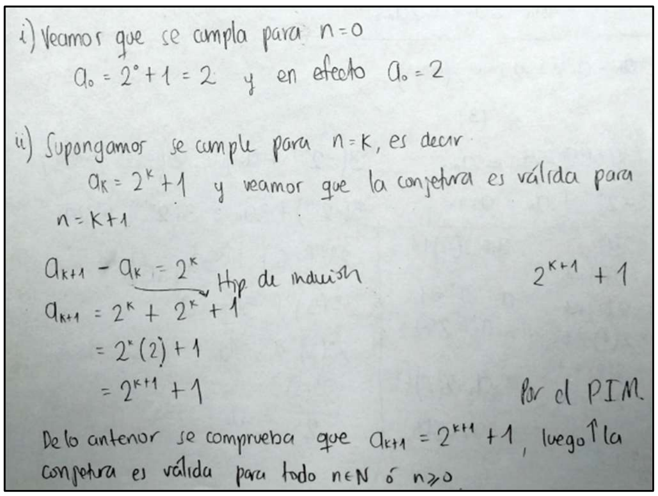
$$a_{k+1} = 2 * 2^k + 1$$

Y llego que efectivamente que $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$

[43] Inv. Listo, si se dio cuenta de que se le facilitó el problema con ese patrón.
[44] Gabriela: Sí.
[45] Inv. ¿Qué pasaría si hubiera usado la otra ecuación?
[46] Gabriela: Tendría que haber incluido que se cumple desde $0,1,\dots,k-1,k$ términos haciendo uso del principio de inducción fuerte creería yo.
[47] Inv. Okey, en realidad es el mismo principio, solo que usa varios casos. No ha concluido, ¿Qué quiere concluir?
[48] Gabriela: Que de lo anterior se comprueba que $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$, luego la conjetura es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ ó $n \geq 0$.

Figura 27

Demostración de Gabriela


i) Veamos que se cumpla para $n=0$
$a_0 = 2^0+1 = 2$ y en efecto $a_0 = 2$

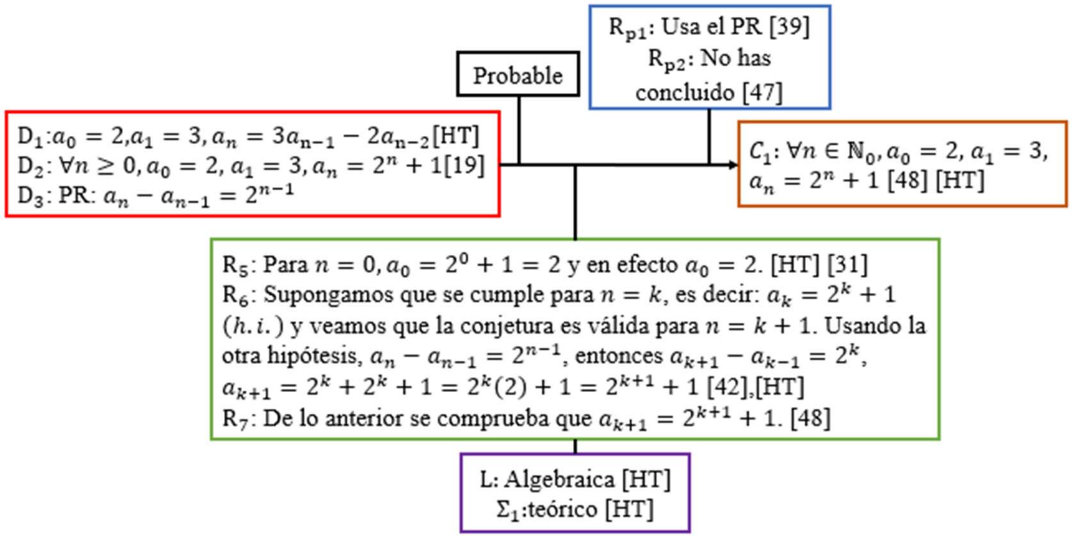
ii) Supongamos se cumple para $n=k$, es decir
$a_k = 2^k+1$ y veamos que la conjetura es válida para
$n=k+1$

$a_{k+1} - a_k = 2^k$ Hip de inducción $2^{k+1}+1$
$a_{k+1} = 2^k + 2^k + 1$
$= 2^k(2)+1$
$= 2^{k+1}+1$
Por el PIM
De lo anterior se comprueba que $a_{k+1} = 2^{k+1}+1$, luego la conjetura es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ ó $n \geq 0$

[49] Inv. Okey, hay algo que debe tener en cuenta es que lo puede demostrar por el principio de inducción matemática y hay que escribir por qué.
[50] Gabriela: *Hace la corrección*
"Que de lo anterior se comprueba que $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$, *luego por el PIM la conjetura es válida para todo* $n \in \mathbb{N}$ ó $n \geq 0$.*"*

Figura 28

Esquema de la demostración de Gabriela



En la construcción de la demostración, Gabriela utilizó el principio de inducción matemática como operadores en R_5, R_6, R_7, validó su proceso mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, empleando el razonamiento del problema anterior, por tanto, para la demostración del paso base, no usa el principio correctamente, pero toma en cuenta la discusión promovida en el problema 1 sobre el papel del paso base e inductivo para la conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura, se movilizaron de ser procesos de cálculo y ejemplos a formar un conjunto de operadores de una regla teórica.

Gabriela usa la representación algebraica (L) ya que el PIM lo requirió en el cuantificador de la proposición a demostrar. La forma de argumentación es estructurante ya que basa su demostración en el PIM y por tanto su control teórico (Σ).

La fuerza de su demostración es probable porque contempla que usó el método, ya que escribió la demostración en forma algorítmica recurriendo a conocimientos previos, pero se convenció de estar debidamente escrito al seguir la estructura del PIM. La refutación R_{p1} en [36] gira en torno a elegir el camino e hipótesis en el paso inductivo la cual le plantea la duda a Gabriela de cómo escribir su demostración, R_{p2} es una intervención para visibilizar a Gabriela una dificultad implícita en la demostración.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 10

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN C_1: $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ C_2: $\forall n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2^n + 1$	CONCLUSIÓN C_1: $\forall n \in N_0, a_0 = 2, a_1 = 3, a_n = 2^n + 1$.
OPERADORES R_1: La diferencia entre un término y el otro son potencias de 2. R_2: No todos son primos. R_3: Son potencias de dos: $2 * 2^{n-1} + 1$. R_4: Son impares, entonces son de la forma $2k + 1$.	OPERADORES R_5: Para $n = 0$, $a_0 = 2^0 + 1 = 2$ y en efecto $a_0 = 2$. R_6: Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir: $a_k = 2^k + 1$ $(h.i.)$ y veamos que la conjetura es válida para $n = k + 1$. Usando la otra hipótesis, $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$, entonces $a_{k+1} - a_{k-1} = 2^k$, $a_{k+1} = 2^k + 2^k + 1 = 2^k(2) + 1 = 2^{k+1} + 1$ R_7: De lo anterior se comprueba que $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$.
REPRESENTACIÓN L: Numérica/Algebraica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Cálculos/teórica Σ_2: Casos particulares	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Tabla 11

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN	FORMA DE ARGUMENTACIÓN
Constructiva	Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
Inductiva por generalización sobre el proceso	Demostración por inducción

RUPTURA ESTRUCTURAL

Gabriela propone su propia conjetura basada en el proceso después de cuatro intentos, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura, por lo tanto, en este proceso de argumentación de conjetura y demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural.

Al igual que en el problema 1, se provocó la ruptura cognitiva, pero se identificó la dificultad (J_2) en el proceso de la demostración del paso base, dado que Gabriela usó la sucesión como un paso en la demostración. Esto se evidencia cuando sólo evaluó el primer elemento, sin concluir que el primer elemento se puede escribir en términos de la sucesión, lo cual era el objetivo de su conjetura. Lo anterior también manifiesta la dificultad (J_5); Gabriela asume el paso base como un requisito mecánico y desligado de la demostración.

Análisis del problema 3 para Gabriela

A continuación, se presenta el análisis del problema 3 del Núcleo 2 del proceso de Gabriela.

Figura 29

Enunciado del Problema 3-Núcleo 2

Problema retador:

Hallar a_n, si se conoce que $a_1 = 2, a_2 = 8$ y que para todo natural $n \geq 3$,

$$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$$

1) Explorando conjeturas

a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**

d) ¿Cuál es la representación algebraica del $n - \acute{e}simo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

Planteamiento de conjetura

[1] Inv. ¿Cómo va?
[2] Gabriela: muy difícil.
[3] Inv. ¿Por qué? ¿Qué pasó?
[4] Gabriela: Porque no encuentro nada, no veo nada acá, así como en los otros dos ejercicios que, así como potencias de dos, la diferencia, algo similar.

Figura 30

Proceso argumentación de Gabriela para plantear la conjetura

Problema retador:

a) $a_1 = 2$
$a_2 = 8$ — 6
$a_3 = 4(8-2) = 24$ — 16
$a_4 = 4(24-8) = 64$ — 40
$a_5 = 4(64-24) = 160$ — 96
$a_6 = 4(160-64) = 384$ — 224
$a_7 = 4(384-160) = 896$ — 512
$a_8 = 4(896-384) = 2048$ — 1152
$a_9 = 4(2048-896) = 4608$ — 2560
$a_{10} = 4(4608-2048) = 10240$ — 5632

Decimo término

[5] Gabriela: Todos son pares.
[6] Inv. Entonces los términos tienen un factor de dos. Eso es una generalidad, ¿qué otra cosa observó? recuerde que los números lo podemos descomponer en factores primos.
[7] Gabriela: Si, también lo intenté, pero tampoco.
[8] Inv. Por ejemplo 24, en factores primos es $3 * 2^3$
[9] Gabriela: Si, pero este es $a_1 = 2 = 2^1, a_2 = 8 = 2^3$, pero $a_3 = 24$ ya se sube mucho.
[10] Inv. Si ese es $24 = 3 * 2^3$ y el otro es $64 = 2^6$, y $160 = 10 * 16 = 2 * 5 * 2^4$, Osea, $5 * 2^5$
[11] Gabriela: Si $5*2^5 = 5 * 32$

[12] Inv. Sí, ¿y el otro cómo es?
[13] Gabriela: A ver, toca probar, uy no, ¿falta algo más?
[14] Inv. Pues siga descomponiéndolo.
[15] Gabriela: Voy en 2^6, pero me salió de nuevo.
[16] Inv. Pero todavía faltan factores, divida $384/2^6$ cuanto le da.
[17] Gabriela: Seis. *(usa calculadora para hallar los valores)*, a ver otra vez de nuevo.
[18] Inv. ¿Qué tal le fue?
[19] Gabriela: No, con factores primos no me dio, pero creo que ya la encontré.
[20] Inv. Esa era una estrategia, no es la única.
[21] Gabriela: Pero creo que ahora si
Gabriela intentó generalizar la sucesión basado en el proceso, pero no obtuvo resultados.
[22] Inv. Un consejo, puede ayudarse con el patrón de recurrencia.
[23] Gabriela: El patrón no está, no encuentro ningún patrón. Si sé que tiene que ver con las restas, pero es que devolverme es tedioso.
[24] Inv. Para devolverse no es necesario hacer todos los n pasos, es generalizar.
[25] Gabriela: Es que con poquitos no soy capaz, entonces no sé.
[26] Inv. Otra sugerencia sería sacar factores en los resultados de las diferencias.
Hizo descomposiciones de factores primos a las diferencias de los términos consecutivos.
[27] Gabriela: Pero tampoco encuentro algo. ¿Sigo sacando factores?
[28] Inv. Sí
[29] Gabriela: Hubo un momento en el que sentí que lo tenía, pero luego se me fue.
[30] Inv. También puede hacer esto.

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 8$$
$$a_3 = 4(8-2) = 4(6) = 8 * 3 = 24$$
$$a_4 = 4(24-8) = 4(16) = 64$$
$$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$$

Realizó varios casos hasta visibilizar información para generalizar.
[31] Inv. Este es el proceso, ¿Qué podemos encontrar de los términos en común? Si estos no bastan, entonces hay que hacer más, ¿Cuántos más? Los que necesite.

$$a_5 = 4(64-24) = 4(40) = 160$$

[32] Inv. ¿Será que con esos me basta? ¿hay algo en común?
[33] Gabriela: Todos los cuatros
[34] Inv. Note que $8 * 3 = 2^3 * 3$

$$4(16) = 4 * 2^4$$

además

$$4(40) = 4 * 4 * 10 = 4 * 4 * 2 * 5 = 2^2 * 2^2 * 2 * 5 = 2^5 * 5$$

[35] Inv. Verifica
[36] Gabriela: Si
[37] Inv. ¿Cuánto tiempo hemos estado aquí?
[38] Gabriela: Ya vamos para la hora.
[39] Inv. Si quiere hagamos a_6

$$a_6 = 4(160-64) = 4(96) = 4(2 * 48) = 4 * 2 * (6 * 8) = 2^2 * 2 * 2 * 3 * 2^3$$

¿Cuántos factores de dos hay?
[40] Gabriela: Hay siete
[41] Inv. ¿Cuántos hay aquí?

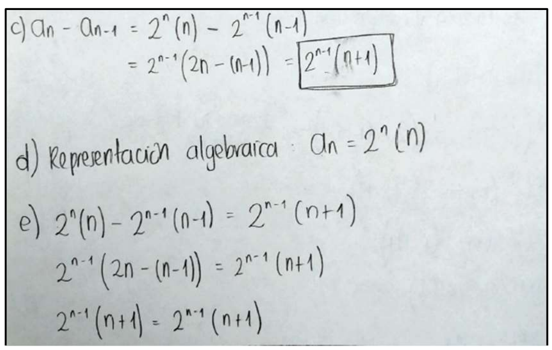
oculto con la mano un factor de dos y el factor de tres.
[42] Gabriela: Hay seis.
[43] Inv. ¿Cuánto vale esto? (las multiplicaciones de los factores 2*3, factores ocultos)

$$2^2 * 2 * (2 * 3) * 2^3 = 2^6 * 6$$

[44] Gabriela *iba revisando todos los términos para identificar la generalidad.*
Gabriela: ¿Pero todos son así? *Recalcó lo escrito en el caso* $a_3 = 8 * 3 = 2^3 * 3$
[45] Gabriela: $a_1 = 1 * 2^1, a_2 = 2 * 2^2, a_3 = 2^3 * 3$ Ah okey es $2^n * n$. Entonces $a_1 = 100 * 2^{100}$ (*Respuesta del inciso b)*)
[46] Inv. Esto es $a_4 = 4(16) = 4 * 2^4$, $a_2 = 8 = 2 * 2^2$, y, $a_1 = 2 = 1 * 2^1$
[47] Gabriela: Si, y yo no lo vi, y yo los descompuse todos.
[48] Inv. ¿En este problema utilizó algo de lo que hicimos en el anterior problema?
[49] Gabriela: Si claro, las potencias de dos y las diferencias, para buscar el patrón.
Cinco minutos después.
[50] Gabriela: Ya tengo el patrón, la representación algebraica y ahora estoy mirando el inciso e), pero otra vez me confundí como reemplazarlo.

Figura 31

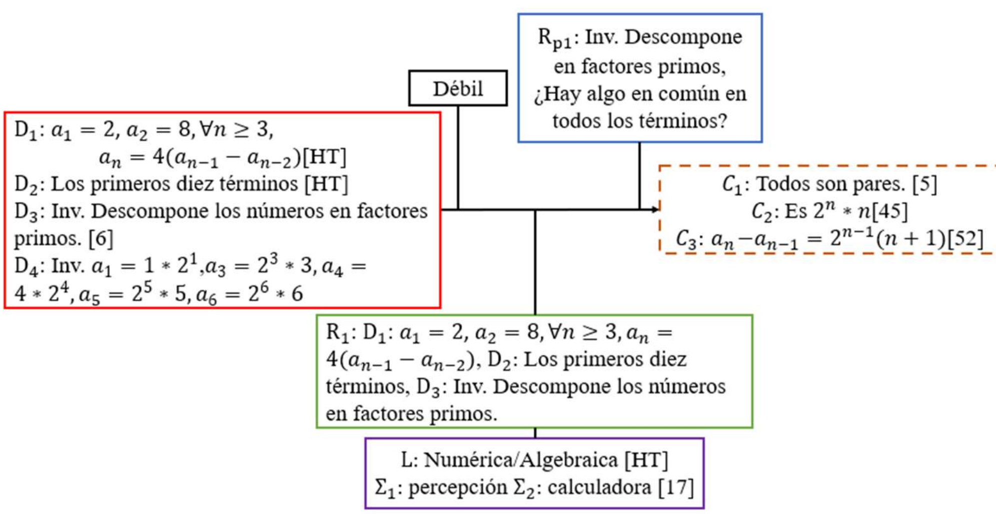
Proceso argumentación de Gabriela para plantear la conjetura



[51] Inv. ¿Cómo es el patrón?
[52] Gabriela: $2^{n-1}(n+1)$

Figura 32

Esquema del planteamiento de conjetura de Gabriela



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Gabriela no logró plantear su propia conjetura, fue necesario intervenir para aportar indicios y así Gabriela identificara una conjetura; por tanto, el planteamiento de conjeturas de Gabriela fue un proceso de argumentación estructurante, pues justifica su conjetura basada en un hecho producto de la intervención del investigador; los procedimientos de cálculo realizados para encontrar los primeros términos hasta a_{10} no contribuyeron a la construcción del término n-ésimo porque no identificó patrones sobre el valor numérico de cada término, pero después de la intervención, la estructura de control (Σ_2) verifica la conjetura (C_2). La representación (L) es algebraica porque se basó en la explicación del Investigador para plantear sus expresiones y estas fueron algebraicas.

El operador R_1 es un indicador del uso de operadores usados en anteriores problemas y de datos del actual problema sin encontrar un resultado. Al no encontrar el n-ésimo término, la intervención del investigador permitió a Gabriela identificar la conjetura que el problema prevé teniendo en cuenta el tiempo transcurrido, por tanto, Gabriela no logró plantear su conjetura. La estructura de control es perceptiva, ya que no se basó en reglas matemáticas para justificar su conjetura, la calculadora se convierte en su estructura de control porque la usa como recurso para verificar sus resultados. En [6] la sugerencia se convierte en refutación potencial (R_{p1}), porque da alternativas a Gabriela sin mostrar qué conjetura se busca plantear. La intervención del investigador es una refutación potencial R_{p2}, ya que esclarece el camino que debe seguir para obtener un resultado, de este modo, Gabriela logró identificar lo que el investigador intentó mostrar, basada en esos procedimientos (del [30] al [44]) consiguió plantear la conjetura (C_2).

Demostración

[53] Inv. ¿Cómo le fue?
[54] Gabriela: Bien, La conjetura es: Para todo $n \geq 1$, tal que $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ y $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}(n+1)$, con $a_1 = 2$ y $a_2 = 8$, se cumple que $a_n = 2^n(n)$.

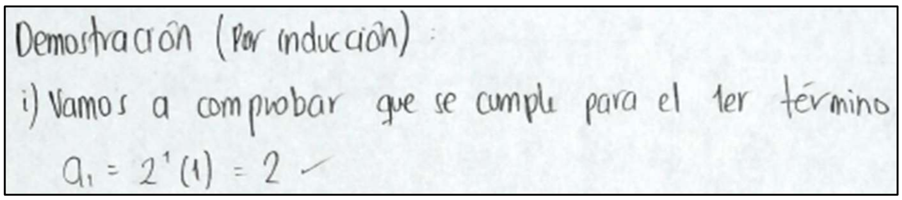
[55] Inv. ¿Las demostraciones en este tipo de problemas son muy diferentes a lo que ha hecho antes en sus materias?
[56] Gabriela: Se hacen más fáciles
[57] Inv. ¿Por qué?
[58] Gabriela: Porque uno revisa lo que ya ha hecho y lo aplica acá.
[59] Inv. Cuando dice lo que ya ha hecho, ¿a qué se refiere?
[60] Gabriela: Lo he hecho en la primera parte del problema.
[61] Inv. ¿Qué revisó? ¿Qué usó?
[62] Gabriela: Planteé la conjetura, hice la base y al llegar acá *(señala el paso inductivo)*, entonces cuando empiezo a hacer como tal la demostración, es un poco como lo que ya hice al intentar encontrar el patrón de recurrencia, o cuando quería comprobar si la forma en como yo lo estaba definiendo me cumplía. Digamos, cuando uso las hipótesis

$$a_{k+1} = 4(a_k - a_{k-1})$$
$$a_k = 2^k(k)$$

Y es cuando empiezo a factorizar *(en potencias de dos)* y que $4 = 2^2$, es como un poco de lo mismo.

Figura 33

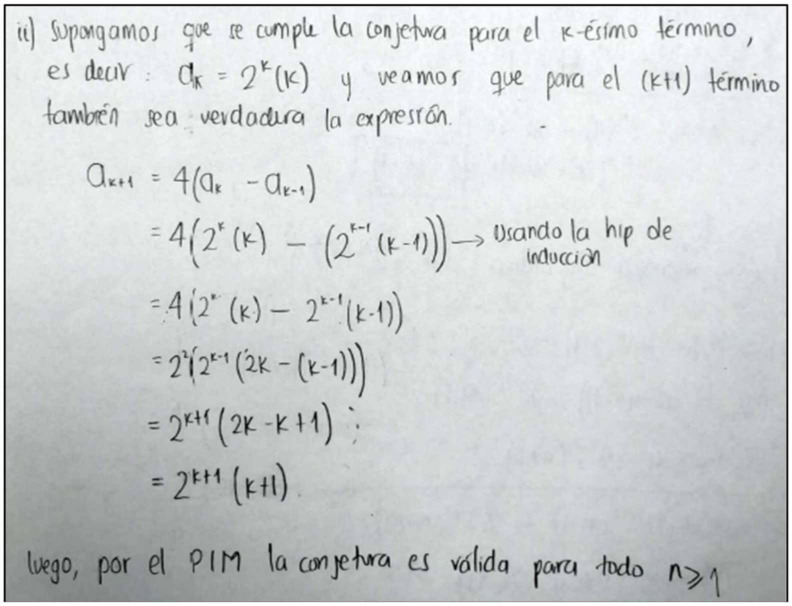
Demostración de Gabriela



[63] Inv. ¿Este procedimiento es el mismo que el que usó para verificar? ¿Qué es lo que tiene acá que no tiene allá?
[64] Gabriela: Que allá lo estaba verificando y acá lo estoy demostrando.
[65] Inv. Use eso ($a_k = 2^k(k)$) dentro de la demostración, porque esto es la hipótesis de inducción.
[66] Gabriela: Hum… okey.
[67] Inv. ¿A qué se refiere con el paso base?
[68] Gabriela: comprobar que la conjetura cumple con el primer término que me dan en este caso.
[69] Inv. Okey, pero lo que sabe es que $a_1 = 2$, aún no sabe que a_1 se puede escribir así ($2^1(1)$).
[70] Gabriela: No, eso es lo que quiero probar.
[71] Inv. Exacto y lo está usando. Se ve muy trivial, pero como es trivial se pasa por alto.
[72] Gabriela: Como que implícitamente estoy usando lo que quiero demostrar.
[73] Inv. Ahora bien, supongamos que se cumple para algún k-ésimo término natural, osea se elige uno cualquiera ¿Qué se busca probar?
[74] Gabriela: Que para el $k + 1$ término también sea verdadera la expresión, es decir que el $k + 1$ término pertenece al conjunto de la sucesión.

Figura 34

Demostración de Gabriela



ii) Supongamos que se cumple la conjetura para el k-ésimo término, es decir: $a_k = 2^k(k)$ y veamos que para el $(k+1)$ término también sea verdadera la expresión.

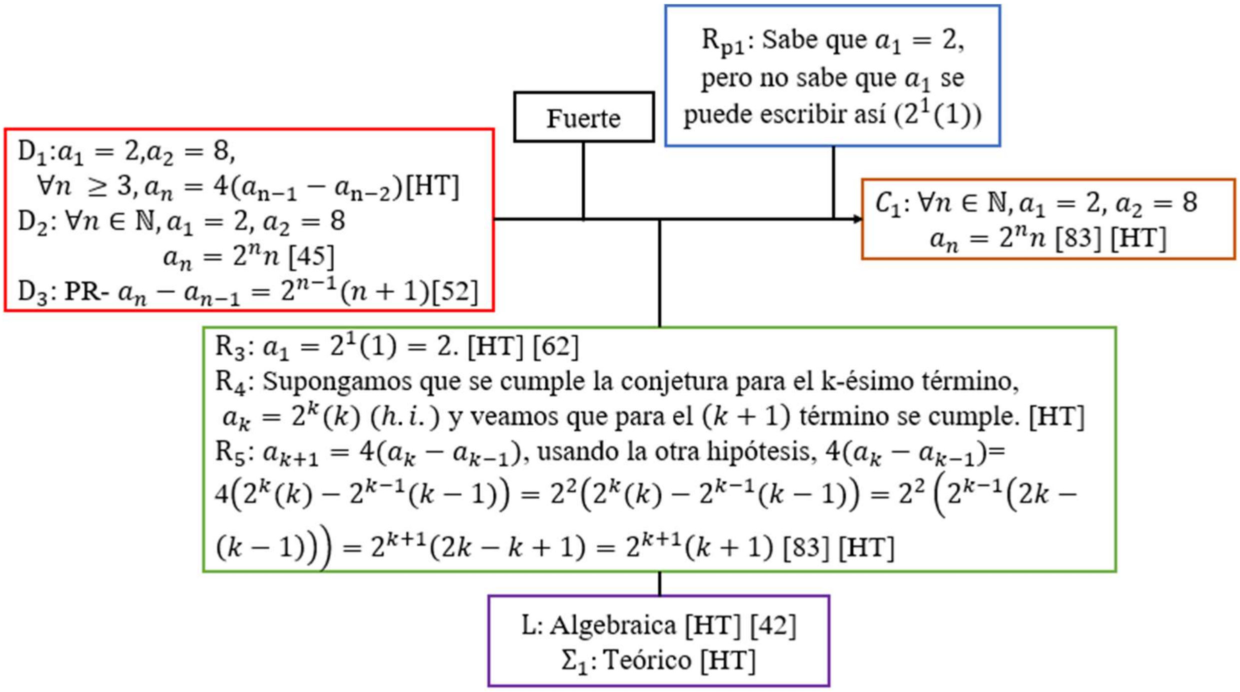
$$a_{k+1} = 4(a_k - a_{k-1})$$
$$= 4(2^k(k) - (2^{k-1}(k-1))) \rightarrow \text{Usando la hip de inducción}$$
$$= 4(2^k(k) - 2^{k-1}(k-1))$$
$$= 2^2(2^{k-1}(2k-(k-1)))$$
$$= 2^{k+1}(2k-k+1)$$
$$= 2^{k+1}(k+1)$$

luego, por el PIM la conjetura es válida para todo $n \geq 1$

[75] Inv. Que el $k+1$ término también se puede escribir de esa forma.
[76] Gabriela: Sí
[77] Inv. También es importante aclarar que ahí hay que usar varias hipótesis de inducción, puede elegir las necesarias, en este caso solo dos porque es así como se define la ecuación recursiva.
[78] Inv. ¿Cómo concluye su demostración?
[79] Gabriela: Entonces empiezo así, uso la forma en que me definen la sucesión para el a_{k+1}, también usando la hipótesis de inducción donde digo que se cumple para cualquier k, $a_k = 2^k(k)$.
[80] Inv. A pesar de que no usó el patrón de recurrencia, si usó la relación de recurrencia, entonces si se utiliza una relación de recurrencia cualquiera, así sea el patrón o sea otra, se hará más fácil la demostración.
[81] Gabriela: Si, en este caso me pareció más fácil así.
[82] Inv. Okey, ¿qué hizo después de eso?
[83] Gabriela: Operé y efectivamente llegué a que $a_{k+1} = 2^{k+1}(k+1)$ y entonces concluyo que por el principio de inducción matemática la conjetura es válida para todo $n \geq 1$.
[84] Inv. Como sugerencia, es bueno concluir de la siguiente manera, por i), ii) y por el PIM se cumple la conjetura. (*(i) y ii) son los pasos base e inductivo de la demostración de Gabriela*)

Figura 35

Esquema de la demostración de Gabriela



En la construcción de la demostración, Gabriela utilizó el principio de inducción matemática. El PIM se descompone en los operadores R_3, R_4, R_5 y validó su proceso mediante la definición del paso base y paso inductivo. Empleó el mismo razonamiento de los problemas anteriores, por lo cual, para la demostración del paso base sigue usando el principio incorrectamente, pero tomó en cuenta la discusión promovida en el problema 1, sobre el papel del paso base e inductivo en la conclusión de la demostración de su conjetura. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura, se movilizaron de ser procesos de cálculo y ejemplos a formar un conjunto de operadores de una regla teórica; el operador R_5 es el mismo proceso que el inciso e) indicaba realizar, este resultado evidencia la necesidad de definir el PR para facilitar la demostración en el paso inductivo.

Gabriela usó la representación algebraica (L) ya que el PIM lo requiere para el paso inductivo. La forma de argumentación es estructurante pues validó una conjetura de la que se convenció ser verdadera, por tanto, se convierte en un hecho.

Su estructura de control (Σ) es teórica, dado que es el método de demostración por inducción el conjunto de medios que tiene Gabriela para tomar decisiones, hacer elecciones y evaluar su producción.

La fuerza de su demostración es fuerte, porque contempla que usó el método para validar la conjetura y se convenció de usar correctamente la estructura del PIM. Escribió la demostración en forma algorítmica recurriendo a los operadores desarrollados en los problemas y planteamientos previos. La refutación R_p en [69] gira en torno a poner en duda como escribió su demostración en el paso base.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 12

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
CONCLUSIÓN C_1: Todos son pares. C_2: Es $2^n * n$ C_3: $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}(n+1)$	CONCLUSIÓN C_1: $\forall n \in N, a_1 = 2,\ a_2 = 8, a_n = 2^n n$
OPERADORES R_1: D_1: $a_1 = 2$, $a_2 = 8, \forall n \geq 3, a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$, D_2: Los primeros diez términos, D_3: Inv. Descompone los números en factores primos.	OPERADORES R_3: $a_1 = 2^1(1) = 2$. R_4: Supongamos que se cumple la conjetura para el k-ésimo término, $a_k = 2^k(k)\ (h.i.)$ y veamos que para el $(k+1)$ término se cumple. R_5: $a_{k+1} = 4(a_k - a_{k-1})$, usando la otra hipótesis, $4(a_k - a_{k-1})$= $4\left(2^k(k) - 2^{k-1}(k-1)\right) = 2^2\left(2^k(k) - 2^{k-1}(k-1)\right) = 2^2\left(2^{k-1}\left(2k - (k-1)\right)\right) = 2^{k+1}(2k - k + 1) = 2^{k+1}(k+1)$
REPRESENTACIÓN L: Numérica/Algebraica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Percepción Σ_2: Calculadora	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico

RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Tabla 13

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción

RUPTURA ESTRUCTURAL

En el problema retador, Gabriela no propone su propia conjetura, el problema tiene mayor grado de dificultad, sin embargo, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para intentar plantear la conjetura, por tanto, en este proceso de argumentación de conjetura y demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural.

Al igual que en el problema 1 y 2, se provocó la ruptura, pero se identificó la dificultad (J_2) en el proceso de la demostración del paso base, dado que Gabriela usó la sucesión como un paso de la demostración R_1. Esto se evidenció cuando sólo evaluó el primer elemento, sin concluir que el primer elemento se puede escribir en términos de la sucesión, lo cual era el objetivo de su conjetura. Lo anterior también manifiesta la dificultad (J_5); Gabriela asumió el paso base como un requisito mecánico y desligado de la demostración [62].

Con el objetivo de propiciar la construcción de significado del PIM a la estudiante, en el momento de discusión para la demostración se realizó una intervención para visibilizar la dificultad referente a la demostración del paso base (J_2) y mitigar esta dificultad en posteriores problemas.

6.3. Análisis del Núcleo 3: Situaciones Hipotéticas

Análisis del problema 1 para Gabriela

A continuación, se presenta el análisis del problema 1 del Núcleo 3, fue abordado por los estudiantes Jesús, Raúl y Gabriela de manera individual y conjunta.

Luego de mostrarles la hoja de trabajo, se indicó trabajar inicialmente de manera individual en el planteamiento de la conjetura y pasado un tiempo, discutir preguntar a otros compañeros dudas o conjeturas encontradas. Cada estudiante en su hoja de trabajo responde a los incisos en el orden que vea más asequible. El investigador interviene preguntando si abordaron todos los incisos para comenzar la discusión del problema y sus resultados.

Figura 36

Salto de la rana, foto del juego.

Se realizó una explicación del juego y sus reglas de uso para casos particulares. Se utilizó un diseño del juego del aula virtual de GeoGebra para ejemplificar su uso. (*El juego está diseñado por Ceferino A. y se puede encontrar en https://www.geogebra.org/m/fDfHbxJd*)

El grupo requirió de varios intentos para aprender las reglas de juego e hicieron varias explicaciones entre ellos. Se centraron en buscar estrategias para terminar en el menor número de movimientos y llegaron a la conclusión de que sólo hay una manera de culminarlo.

Hacen esquemas en la hoja de trabajo para que no olviden estrategias de juego y registros de turnos jugados, se recomendó leer los incisos de la parte 1 para entender cuál era el objetivo del problema. (*El enunciado completo se encuentra en Anexos*)

Figura 37

Enunciado del Problema 1-Núcleo 3

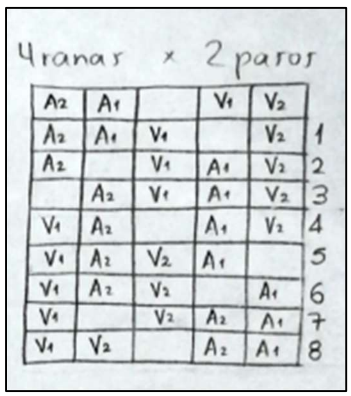
1) **Explorando conjeturas**
   a) Realice el juego para grupos de una, dos tres o cuatro ranas, describa cuantos movimientos se necesitan para finalizar el juego. Justifique su respuesta.
   b) Busque estrategias para finalizar el juego en el menor número de movimientos posibles ¿Qué regularidad se identifica sobre el menor número de movimientos? Justifique su respuesta.
   c) ¿Qué relación hay entre la cantidad de ranas de un grupo y el número de movimientos para finalizar el juego? Justifique su respuesta.
   d) ¿Qué relación hay entre los movimientos de un grupo de $n - ranas$ y $n + 1 - ranas$? Justifique su respuesta.

Planteamiento de conjetura

Media hora después de iniciar.
[1] Inv. ¿Qué encontraron?
[2] Gabriela: Por ahora nada.
[3] Gabriela: Generalizar los pasos que hacen las ranas para terminar el juego.
[4] Inv. El objetivo del problema es contar el menor número de movimientos para terminar el juego, pero no por grupo sino por color. Por ejemplo: cuando jugamos con una rana, ¿cuántos movimientos se necesita? *(Realizo los movimientos con las ranas en la regleta)* Se necesitan tres movimientos.
[5] Gabriela: En la de dos ranas son ocho movimientos.
[6] Gabriela: Y para tres, quince movimientos.
[7] Inv. Okey, y ¿para cuatro?
[8] Gabriela: No, ahí no he llegado, es que quiero encontrar la relación entre los movimientos.
[9] Inv. ¿Qué significan esos cuadritos? *(Se señala lo siguiente)*

Figura 38

Registro de Movimientos por cada posición de Gabriela



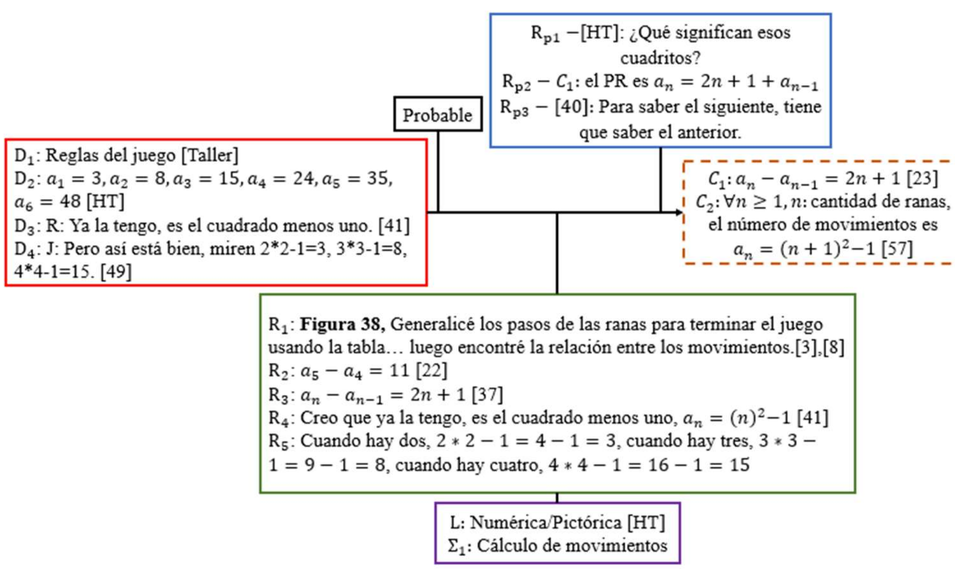
[10] Gabriela: Los movimientos que voy haciendo por cada posición.
[11] Gabriela: ¿Los de cuatro ranas son 24 pasos?
[12] Raúl: No lo he encontrado.
[13] Jesús: 24, sí.
[14] Gabriela: *(Empieza a mirar en la regleta cómo sería jugar con cinco ranas por grupo, pero solo se puede jugar con un grupo máximo de cuatro ranas, entonces rellena con sus lapiceros las dos casillas faltantes. Al ver que resulta complicado jugar de esa manera, se centra en los datos que ya tiene y se da cuenta de algo)*.
[15] Gabriela: Ya, creo.
[16] Gabriela: *(Sin escribir y sólo mirando lo que ya tenía, comienza a verificar sus hallazgos con los datos anteriores).*
[17] Inv. ¿Cuántos movimientos se necesitan para terminar el juego si uso cuatro ranas?
[18] Gabriela: 24,
[19] Inv. ¿Y con cinco ranas?
[20] Gabriela: 35
[21] Inv. ¿Por qué?

[22] Jesús: $a_5 - a_4 = 11$ ¿cierto? ¿Es lo que usted quiere más o menos hacer? *(Jesús le pregunta a Gabriela)*
[23] Gabriela: Es $2n + 1$, n es la cantidad de ranas que hay, eso nos da la diferencia de los pasos. *[...]*. Lo que yo hallé es la diferencia con la cantidad de ranas. No sé cómo se escribe. $2n + 1$ lo sumo a la cantidad de pasos anteriores.
[24] Inv. Eso *($a_n = 2n + 1 + a_{n-1}$)*, más la cantidad de pasos anteriores, es el patrón de recurrencia.
[25] Gabriela: *(Se da cuenta y le causa asombro porque lo encontró sin pensar que era el patrón de recurrencia.)*
[26] Gabriela: ¡Entonces ya hallé el patrón de recurrencia! *[...]* Con la tabla no sabía nada del número de movimiento de las ranas, entonces dije: ¡no por ahí no es!
[27] Inv. Ustedes pueden hacer la tabla para hacer cada movimiento, pero recuerden que no estamos mirando cada movimiento, estoy mirando el menor número de movimientos en total, no importa como los hagan. Si quieren pueden hacer una tablita con los resultados.
[28] Gabriela: Para $n = 2$, el número de movimientos es 3.
[29] Inv. Ya pueden generalizar la diferencia.
[30] Gabriela: Pero yo sí sé que con el patrón de recurrencia también se puede conseguir la generalidad ¿no?
[31] Inv. Si claro, pero tendría que conseguir otra relación de recurrencia para poder hacerlo.
[32] Jesús: ¿Cuál es la que sugiere?
[33] Inv. No, yo no sugerí una. Lo que digo es que generalicen el número de movimientos para n ranas por equipo. Por ejemplo, cual sería para $n = 6$.
[34] Raúl, Gabriela: 48
[35] Inv. ¿Cómo lo hizo?
[36] Raúl: Por el patrón de recurrencia
[37] Inv. Pueden usar eso, que la diferencia es $2n + 1$. Es decir, que $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$, ese sería el patrón de recurrencia, ahora hallemos el término n-ésimo.
[38] Raúl: Se puede saber cuánto es, para saber el siguiente, tiene que saber el anterior. Necesitaríamos el noveno para hallar el décimo, pero para hallar el noveno necesito el octavo.
[39] Inv. ¿Y si les pido el centésimo?
[40] Raúl: Hallar el noventa y nueve.
[41] Raúl: Ya la tengo, creo que ya la tengo, es el cuadrado menos uno.
[42] Inv. ¿El cuadrado de qué?
[43] Raúl: Del número de ranas.
[44] Inv. ¿Qué dicen los demás?
[45] Raúl: Porque mira, cuando hay dos, $2 * 2 - 1 = 4 - 1 = 3$, cuando hay tres, $3 * 3 - 1 = 9 - 1 = 8$, cuando hay cuatro, $4 * 4 - 1 = 16 - 1 = 15$, para cinco, $5 * 5 - 1 = 25 - 1 = 24$. Cuando hay dos ranitas el número de movimientos es tres.
[46] Gabriela: Número de ranitas en total o de cada ficha.
[47] Jesús, Inv. Una ficha por equipo.
[48] Gabriela: Cuando hay dos ranas en total ahí se cumple, pero cuando hay cuatro no se cumple.

[49] Jesús: Pero así está bien, miren $2 * 2 - 1 = 3$, ahora el siguiente es, $4 * 4 - 1$, no $3 * 3 - 1 = 8$, daría 8 que es el otro resultado, $4 * 4 - 1 = 15$, como él dice, aquí todos estos números son factores de cuadrados.
[50] Gabriela: Pero entonces este número no tiene ninguna relación con nada.
[51] Jesús: Raúl mira la cantidad de movimientos.
[52] Inv. Raúl explíquenos entonces como llegó ahí porque estamos perdidos.
[53] Jesús: Así es como se halla el número de movimientos, así si funciona, podemos hallar la cantidad de movimientos cualquiera.
[54] Gabriela: La idea es cómo relacionarlo con el número de ranas por equipo.
[55] Raúl: Osea yo puse los movimientos y miré que todas eran diferencias de cuadrados entonces empecé a mirar y me di cuenta, pero no sé.
[56] Jesús: Yo creería que la potencia se mantiene, el exponente es fijo.
[57] Gabriela: Ya sé, entonces debe ser $(n + 1)^2 - 1$.
[58] Inv. ¿Por qué?
[59] Gabriela: Porque *n* es la cantidad de ranas.
[60] Jesús: El total de ranas de ambos colores.
[61] Gabriela: No, por equipo. (*verifica con los primeros casos*) ahí si da con $(n + 1)^2 - 1$.
[62] Raúl: Si, pero ¿ese sería solo para el primer caso?
[63] Gabriela: En general, para cualquiera.
[64] Inv. Entonces Raúl como llegó a eso, qué representa eso que escribió en la hoja.
[65] Raúl: Osea esta columna representa el número de movimientos, y después miré esta parte *(señala la otra columna, que representa al caso)* que era el número de cuadrados de un número.
[66] Inv. Osea que hizo generalización basados en el resultado.
[67] Raúl: Si eso fue lo que hice, pero no sabía dónde salía esto (señala la columna uno que representa el número de discos) hasta que Gabriela lo encontró.

Figura 39

Planteamiento de la conjetura de Gabriela



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Gabriela no logró plantear su propia conjetura y fue necesario generar discusión para proporcionar indicios que le permitieran identificar una conjetura. Por tanto, el proceso de planteamiento de conjeturas por parte de Gabriela fue un proceso de argumentación estructurante, ya que justificó su conjetura basada en un hecho producto de la intervención de Raúl (D_3).

Los procedimientos de cálculo realizados por Gabriela para encontrar los primeros términos hasta a_{10} no contribuyeron a la construcción del término n-ésimo, ya que no identificó patrones sobre el valor numérico de cada término (D_2). Sin embargo, después de la intervención de Raúl, Gabriela utilizó la estructura de control (Σ_1) para verificar la conjetura (C_2). La representación utilizada por Gabriela fue numérica/pictórica (L), ya que se basó en la explicación de su compañero, en los dibujos y registros y en sus conocimientos previos para plantear expresiones algebraicas (L).

En resumen, Gabriela experimentó un proceso de argumentación estructurante, respaldado por la idea de Raúl, intervención del investigador y la verificación de la conjetura a través de la estructura de control Σ_1. La representación utilizada fue numérica/pictórica, y aunque inicialmente no logró plantear su propia conjetura, pudo llegar a la conjetura correcta después de seguir los procedimientos y las indicaciones proporcionadas.

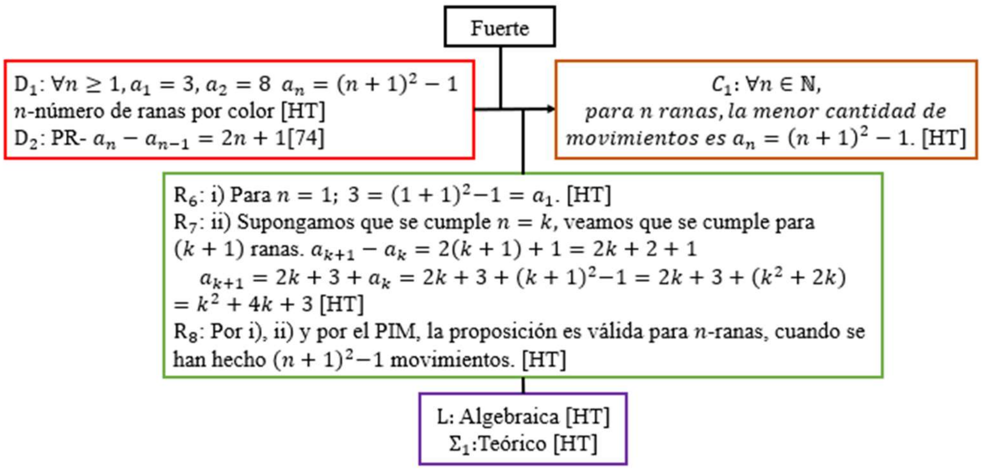
Demostración

[68] Gabriela: Yo estaba convencida pero ahora no, porque la demostración no me da, no sé en qué me equivoqué.
[69] Inv. Aquí está el problema, en cómo se definen los términos, si es el cuadrado de un natural menos uno, pero es $(n+1)^2-1$ más no n^2-1, ¿Cómo es el patrón de recurrencia?
[70] Gabriela: $a_n - a_{n-1} = 2n+1$
[71] Inv. ¿Esa diferencia está en términos de qué?
[72] Gabriela: De a_n y a_{n-1}.
[73] Inv. ¿Qué regla matemática usa para verificar su demostración?
[74] Gabriela: Las operaciones algebraicas y la demostración por inducción.
[75] Inv. En algún momento del problema ¿Qué dije o hice, que pusiera en duda lo que hicieron?

[76] Gabriela: Nos hizo avanzar cuando nos preguntaba si la conjetura se trataba de las ranas totales o las ranas de cada color. Entonces ahí como que uno se replanteaba.

Figura 40

Demostración de Gabriela



Gabriela demostró la conjetura $\forall n \in \mathbb{N}$, *para n ranas, la menor cantidad de movimientos es* $a_n = (n+1)^2 - 1$. En la construcción de la demostración, Gabriela utilizó el principio de inducción matemática (PIM) (R_6). El PIM se descompone en los operadores R_6, R_7 y R_8, y Gabriela validó su proceso mediante la definición del paso base y del paso inductivo (R_6, R_7). Sin embargo, cometió un error algebraico al definir la diferencia entre un término de la sucesión y el siguiente término, pero este error se corrigió con una breve intervención del investigador (R_7). Durante la discusión de la demostración, no surgieron refutaciones potenciales, ya que Gabriela no presentó dificultades para propiciar la construcción de significado del PIM (R_6).

Gabriela utilizó la representación algebraica (L) para demostrar la conjetura, ya que el PIM requiere el uso de operaciones algebraicas en el paso inductivo. La forma de argumentación empleada por Gabriela fue estructurante, ya que validó una conjetura de la que estaba convencida de que era verdadera, convirtiéndola en un hecho. Su estructura de control (Σ) fue teórica, dado que utilizó el método de demostración por inducción como medio para tomar decisiones, hacer elecciones y evaluar su producción.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 14

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN $C_1: a_n - a_{n-1} = 2n + 1$ $C_2: \forall \geq 1, n$: *cantidad de ranas, el número de movimientos es* $a_n = (n+1)^2 - 1$	CONCLUSIÓN $C_1: \forall n \in \mathbb{N}$, *el menor número de movimientos es* $a_n = (n+1)^2 - 1$.
OPERADORES R_1: **Figura 38,** Generalicé los pasos de las ranas para terminar el juego usando la tabla… luego encontré la relación entre los movimientos. R_2: $a_5 - a_4 = 11$ R_3: $a_n - a_{n-1} = 2n + 1$ R_4: Lo tengo!, es el cuadrado menos uno, $a_n = (n)^2 - 1$ R_5: Cuando hay dos, $2 * 2 - 1 = 4 - 1 = 3$, cuando hay tres, $3 * 3 - 1 = 9 - 1 = 8$, cuando hay cuatro, $4 * 4 - 1 = 16 - 1 = 15$	OPERADORES R_6: i) Para $n = 1, 3 = (n+1)^2 - 1 = a_1$. R_7: ii) Supongamos que se cumple $n = k$, veamos que se cumple para $(k+1)$ ranas. $a_{k+1} - a_k = 2(k+1) + 1 = 2k + 2 + 1$ $a_{k+1} = 2k + 3 + a_k$ $= 2k + 3 + (k+1)^2 - 1$ $= 2k + 3 + (k^2 + 2k)$ $= k^2 + 4k + 3$ R_8: Por i), ii) y por el PIM, la proposición es válida para n-ranas, cuando se han hecho $(n+1)^2 - 1$ movimientos.
REPRESENTACIÓN L: Numérica/Pictórica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Cálculo de movimientos	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico

<u>RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA</u>

Tabla 15

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización de casos particulares	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción

<u>RUPTURA ESTRUCTURAL</u>

Gabriela no propone su propia conjetura en el problema del salto de la rana. Este problema promueve la necesidad de plantear razonamientos diferentes a los empleados en los problemas anteriores, lo cual dificulta encontrar la solución. Sin embargo, los operadores utilizados en la demostración son distintos a los que utilizó al plantear la conjetura. Por lo tanto, durante el proceso de argumentación de la conjetura y demostración se produjo una ruptura cognitiva debido a la ruptura referencial y estructural.

La ruptura se produjo y se identificó la dificultad (J_1) en la demostración del paso inductivo, ya que Gabriela cometió un error al definir el patrón de recurrencia, lo que le impidió completar la demostración. Como se mencionó anteriormente, la intervención del investigador permitió identificar el error algebraico. Sin embargo, es importante resaltar que Gabriela, al conocer la estructura de control, logró darse cuenta de que tenía un error en su conjetura, lo que llevó a una discusión para corregirse a sí misma.

Con el objetivo de facilitar el proceso de argumentación de la solución inductiva del problema al estudiante, durante la discusión para la demostración se llevó a cabo una intervención para señalar y abordar las dificultades relacionadas con errores algebraicos, como una factorización o un planteamiento incorrecto del patrón de recurrencia. Esta intervención tuvo como finalidad mitigar estas dificultades en problemas posteriores. Este primer problema sentó nuevas estrategias para plantear la conjetura, por ejemplo, generalizar empíricamente el menor movimientos para ganar, plantear esta estrategia verbalmente y luego tener la habilidad de describir la estrategia de manera recursiva o algebraica.

Análisis del problema 2 para Jesús

A continuación, se presenta el análisis del problema 2 del Núcleo 3: situaciones hipotéticas *(Torres de Hanoi)*. Este fue abordado por los estudiantes Jesús y Gabriela de manera individual y conjunta.

Figura 41

Torres de Hanoi, foto del juego.

Se realizó la explicación de las reglas de juego, se sugirió leer e indicar si comprenden o tienen dudas al respecto; lo anterior está descrito en la hoja de trabajo entregada al estudiante. Como se muestra en la imagen, el juego permite utilizar de uno a siete discos.

En algunos casos, los estudiantes cometieron errores, lo que impidió terminar el juego, por lo tanto, fue necesario comenzar una nueva partida hasta culminarlo. Luego de varias partidas, los estudiantes finalizaron el juego con el caso de siete discos, aunque no se dedicaron a plantear conjeturas. Entre ellos se preguntaron *¿Cuál es el menor número de movimientos por casos? ¿Cuántos movimientos para cuatro, cinco, seis discos?*, con el fin de verificar si sus registros eran correctos. De modo que, se sugirió encontrar estrategias que permitieran terminar el juego a partir de un número de movimientos.

Planteamiento de conjetura

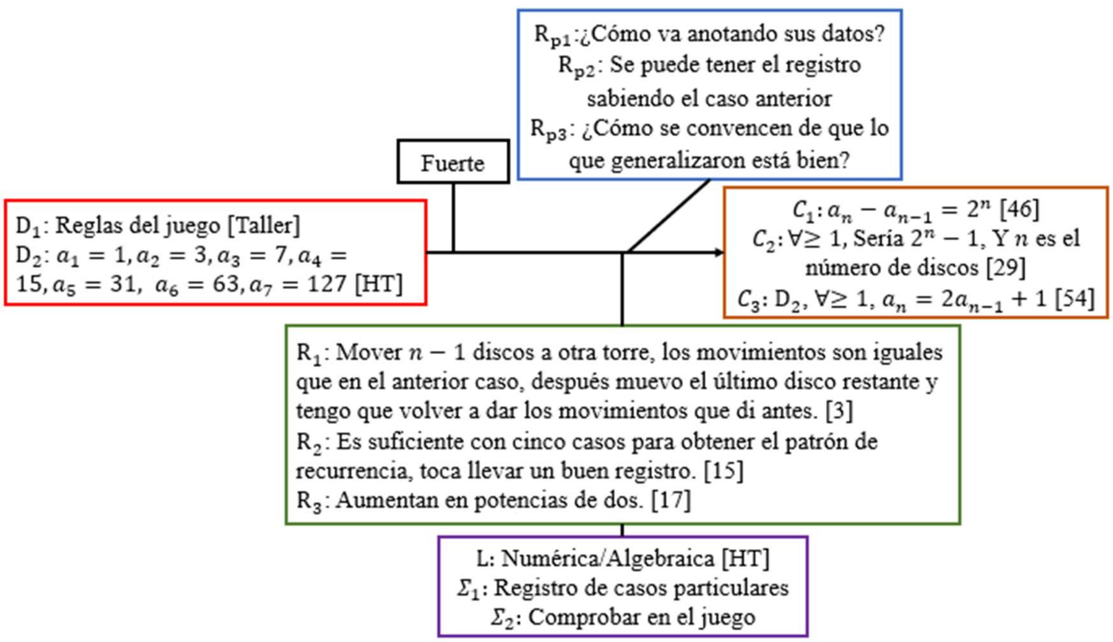
[1] Jesús: ¿Cuántos movimientos les dio si se usan cuatro discos?
[2] Gabriela: Lo mínimo que me ha salido es 15, estoy mirando si de pronto me salen menos.
[3] Jesús: Más o menos tengo idea de cómo se juega, tengo que mover todos los discos a otra torre, mover los discos es igual que en el anterior movimiento entonces requiere el mismo número de movimientos, después muevo el último disco, el más grande y tengo que volver a dar los movimientos que di antes.
[4] Gabriela: Si, algo así también vi, ¿pero anotó el número de movimientos?
[5] Jesús: No, pero todas son como los mismos movimientos cada una.
Han pasado 35 minutos desde que iniciamos
[6] Inv. Jesús, ¿Cómo va anotando sus datos?
[7] Jesús: Me quedé en el caso de cuatro discos, me dio 15 movimientos y en cinco aún no lo anoto.
Minutos después
[8] Jesús: Pero son muchos, ¿cuánto le dio su contabilidad de movimientos?
[9] Gabriela: El de cuatro me dio 15, el de cinco me dio 31 y el de seis me dio 64 pero no sé si hice alguno mal.
[10] Jesús: *Registra los datos que Gabriela le dijo.*
Han pasado 45 minutos desde que iniciamos
[11] Inv. Jesús, ¿Cómo va ese registro?
[12] Jesús: Yo estoy más perdido acá porque no le hallo sentido a esto. ¡Bueno si y no! Jajaja
Minutos después
[13] Jesús: No hay que ir tan lejos para saber esto.
[14] Inv. ¿Qué dice Jesús?
[15] Jesús: Que parece ser suficiente que hasta cinco casos puedo obtener el patrón de recurrencia, pero toca llevar un buen registro.
[16] Inv. Si señor, puede generalizar, eso depende de sus datos.
[17] Jesús: Aumentan en potencias de dos ¿Cierto?
[18] Gabriela: Si
[19] Jesús: ¿31 movimientos le dieron en 5 discos?
[20] Gabriela: Si
[21] Jesús: Entonces si funciona, entonces para seis sería igual ¿Con 6 disco le dio 63 movimientos?
[22] Gabriela: Si.
[23] Jesús: Entonces si es este.
[24] Gabriela: Ese es el patrón, ese es. Pero la forma de generalizar no la hallo aún.
[25] Jesús: La forma algebraica. Ahí la tiene ¿no? Quedaría como un 2^n más algo.
[26] Gabriela: Si, pero entonces ¿Cómo se generaliza? Es, más el anterior término.
[27] Jesús: No, el anterior término me tiene que quedar en términos de *n*.
[28] Gabriela: Exacto, no hemos encontrado la forma general.
[29] Jesús: Hay que mirar todas las cuentas. Por ejemplo, en seis discos …
¡Hum! **Sería $\mathbf{2^n - 1}$, Y $\boldsymbol{n}$ es el número de discos** ¿cierto?
[30] Gabriela: Si. ¡Esa es!
Gabriela y Jesús comienzan a verificar su expresión con los casos que ya tienen
[31] Inv. ¿Qué han logrado? *[...]* ¿Cómo llegaron a la generalidad del término a_n?

[32] Gabriela: Porque encontramos el patrón de recurrencia, por ejemplo, acá es: $2^7 = 128$, y éste (*señala el número 127, el número de movimientos para 7 discos*) es ese menos uno.
[33] Inv. Okey, ¿El patrón que les permitió encontrar el n-ésimo término?
[34] Jesús: Si, confié más en el patrón que en el juego.
[35] Inv. ¿En el juego?
[36] Jesús: Si, es que no le prestaba mucha atención al juego, en cambio con los registros si pude.
[37] Inv. ¿Y los registros de donde los toma?
[38] Jesús: De aprender a jugar jajaja
[39] Inv. ¿En qué momento ya se convencen de la generalidad y del patrón? ¿Qué pensaría si hay un caso que no cumple con la conjetura?
[40] Jesús: ¿Un caso que no cumpla? Pero ¿Cuál caso? Si fuese que sí, entonces deme contraejemplo.
[41] Inv. Intente buscarlo ¿Cuál caso demostraría eso?
[42] Jesús: No hay caso, nosotros no estamos poniendo casos específicos donde no se dé.
Minutos después
[43] Inv. Jesús, ¿Qué está escribiendo ahí?
[44] Jesús: Aquí estaba tratando de escribir el patrón de recurrencia.
[45] Inv. ¿Y si lo encontró?
[46] Jesús: Si, que la diferencia es potencia de 2^n, entonces sería $a_{n+1} - a_n = 2^n$
[47] Inv. Hay una estrategia que les voy a comentar. Pensemos esta estrategia generalizando, en un caso de siete discos se tiene que hacer todos los movimientos de seis discos, es decir moviendo seis discos a una torre y dejando el último quieto, ¿Cuántos movimientos hice para mover los seis discos?
[48] Gabriela: 63.
[49] Inv. *Traslada el último disco a otra torre.* Con este van 64, más 63 (*toma todos seis discos anteriores y los traslada a la torre donde ubicó el último disco*) ¿Cuánto es?
[50] Jesús: ¡127! (*Responde asombrado por el resultado*) *[…]* Y para los seis discos también se puede hacer de esa manera sabiendo el caso anterior.
[51] Inv. Así es, teniendo los movimientos del anterior caso. Eso es recursión. ¿Cómo escribirían algebraicamente una recursión con esta estrategia?
[52] Jesús: el término sería uno más dos veces el anterior, y si funciona.
[53] Inv. ¿Si funciona?
[54] Jesús: Si tengo los anteriores funciona, en el patrón de recurrencia también. Hasta para demostrarlo sale mejor usando esa $a_n = 2a_{n-1} + 1$.
[55] Inv. Hay dos ecuaciones recursivas, pero el Patrón de recurrencia es $a_{n+1} - a_n = 2^n$, porque es la diferencia entre dos términos consecutivos. Y ambas ecuaciones son una relación de recurrencia, en donde no importa como esté descrita pero que estén en términos de la sucesión.
Minutos después
[56] Inv. Iniciemos la discusión de lo que hicieron. Pregunta para Jesús, ¿El planteamiento lo vio como un verdadero problema?
[57] Jesús: Está complicado, el problema fue que me centré en jugar y no le di mucha importancia a los resultados, otra vez me centré en mirar si había un patrón en la manera de jugar para culminar, para decir -este se mueve tantos movimientos-. Pero no llevaba los registros, y cuando empecé a anotar los registros ya me di cuenta de que era por acá.
[58] Inv. ¿Realicé alguna pregunta qué les hizo dudar de lo que hicieron?

[59] Jesús: Cuando estaba jugando con varios discos y no llevaba un registro, no había hallado el patrón, entonces me preguntó que por qué no probaba con menos discos para tratar de llevar un registro, entonces empecé a probar con una, con dos, lo que me estaba tratando de decir fue que mirara los datos a ver qué sale, ahí si me fijé en los datos y hallé el patrón.
[60] Inv. ¿Cómo se convencen de que lo que generalizaron está bien?
[61] Jesús: Cuando pasamos del juego a los registros, porque cuando se halla el patrón nos olvidamos del juego, confiamos en el número de casos que podemos hacer con estos discos y con eso sería suficiente, porque si lo intentamos para un siguiente caso necesitaríamos otro disco, pero igual creemos que también va a funcionar.
[62] Inv. Entonces su manera de convencerse fue que al probar los siete casos en las generalidades que hallaron en todas les cumplieron.
[63] Jesús, Gabriela: Así es.

Figura 42

Planteamiento de la conjetura de Jesús



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Jesús logró plantear su propia conjetura, fue necesario el trabajo de Gabriela para identificar una conjetura ya que Jesús no registraba el menor número de movimientos mientras que Gabriela sí, Jesús estaba centrado en buscar las estrategias que le permitan generalizar los movimientos para cualquier disco. En apoyo de los datos de Gabriela, Jesús logró plantear algebraicamente una conjetura, por tanto, el planteamiento de conjeturas de Jesús fue un proceso de argumentación constructivo, pues justificó su conjetura basado en la generalización del proceso que trazaron para encontrar los datos y en la estrategia generalizar los movimientos; los procedimientos de cálculo realizados para encontrar los primeros términos hasta a_7 contribuyeron a la construcción del término n-ésimo, una vez entendido el patrón de la estrategia de solución del juego para cualquier número de discos, dicho patrón no cambiaba y tampoco la estructura algebraica de cada término, es decir, siempre se mantuvo como una potencia de dos. La estructura de control (Σ_2) verifica la conjetura (C_2). La representación (L) es algebraica porque se basó generalizó los datos para plantear sus expresiones y estas fueron algebraicas.

El operador R_1 permitió brindar información de la estrategia para generalizar los movimientos que debe realizar, pero en ausencia de los datos del problema que permita plantear una conjetura. Al encontrar el n-ésimo término, el aporte de los registros de Gabriela permitió a Jesús identificar la conjetura. La estructura de control (Σ_1) son los datos de Gabriela, ya que con estos justificó su conjetura, el juego se convierte en su estructura porque lo usa como recurso para verificar sus resultados. En [11] las preguntas sobre el registro de los movimientos se convierten en refutación potencial (R_{p1}), porque le indica a Jesús que debe centrarse en ello para plantear la conjetura sin mostrar qué conjetura se busca plantear. La intervención del investigador es una refutación potencial R_{p2}, ya que busca entender por qué la generalización solo necesita entender un conjunto de casos particulares.

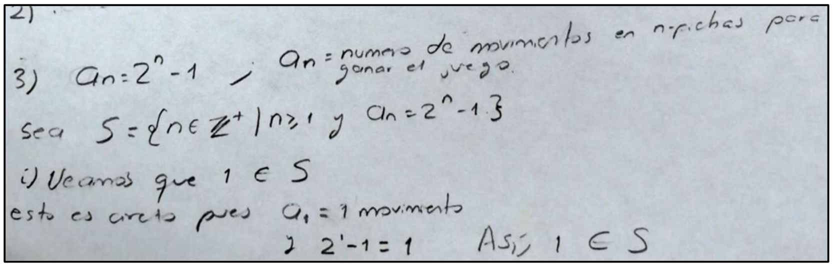
Demostración

[64] Jesús: Con los dos patrones se puede demostrar el paso inductivo, se verifica el término a_{n+1}.
[65] Inv. Se les hace más sencilla la demostración no porque sea más fácil, sino porque lo realizado en el planteamiento de la conjetura les brinda herramientas para demostrarla.
5 Minutos después

[66] Jesús y Gabriela *terminaron la demostración.*

Figura 43

Demostración de Jesús


2)

3) $a_n = 2^n - 1$; a_n = numero de movimientos en n-fichas para ganar el juego.

sea $S = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \geq 1$ y $a_n = 2^n - 1\}$

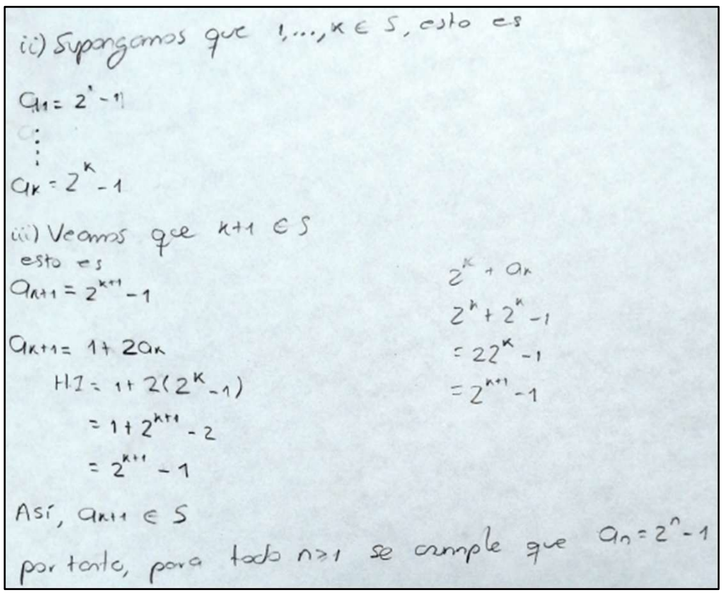
i) Veamos que $1 \in S$

esto es cierto pues $a_1 = 1$ movimiento

y $2^1 - 1 = 1$ Así, $1 \in S$

Figura 44

Demostración de Jesús


ii) Supongamos que $1, \dots, k \in S$, esto es

$a_1 = 2^1 - 1$

$\vdots$

$a_k = 2^k - 1$

iii) Veamos que $k+1 \in S$

esto es

$a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

$a_{k+1} = 1 + 2a_k$

HI $= 1 + 2(2^k - 1)$

$= 1 + 2^{k+1} - 2$

$= 2^{k+1} - 1$

$2^k + a_k$

$2^k + 2^k - 1$

$= 2 2^k - 1$

$= 2^{k+1} - 1$

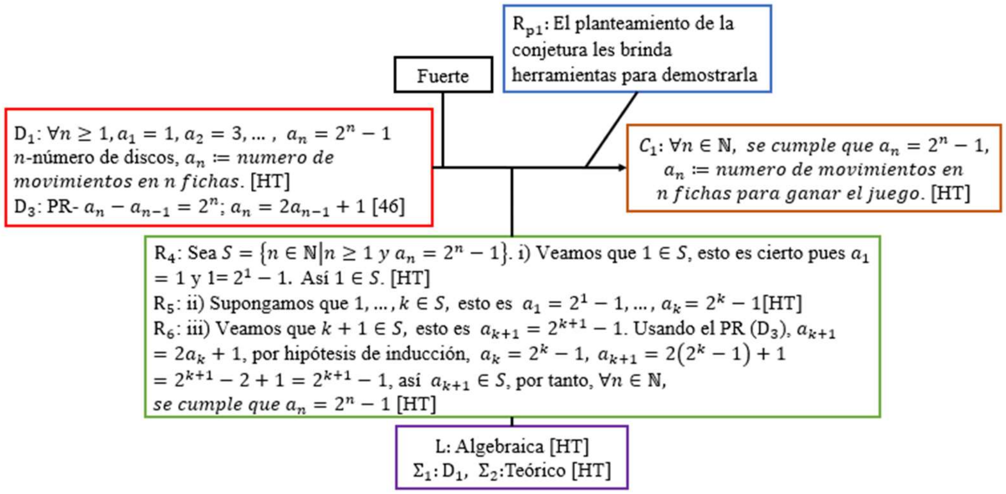
Así, $a_{k+1} \in S$

por tanto, para todo $n \geq 1$ se cumple que $a_n = 2^n - 1$

[67] Inv. ¿Esta vez a qué querían llegar? O ¿Qué resultados encontraron?
[68] Jesús: Que la conjetura se cumplía para n −discos, el número de movimientos que se quiere para culminar el juego y ese $n \in \mathbb{N}$.
[69] Inv. ¿Qué reglas teóricas usaron durante la demostración?
[70] Gabriela: Lo de las potencias
[71] Jesús: El método de la demostración.
[72] Inv. ¿Qué les permite decir que la conjetura se cumple para todo n?
[73] Gabriela: La demostración.
[74] Inv. Y si no la hacen, ¿qué les permite decir que se cumple?
[75] Jesús: Si es necesario la demostración.

Figura 45

Demostración de Jesús



Jesús construyó la demostración utilizando el principio de inducción Matemática, muestra dominio de los elementos de la estructura de la demostración, definió la proposición a demostrar y comprende la relación entre los pasos base e inductivo. El proceso de la demostración se descompone en los operadores R_4, R_5, R_6, transformó los datos y operadores encontrados del planteamiento de la conjetura en nuevos argumentos para la demostración y válida su demostración en la definición del PIM, además usa los datos D_1 para validar el paso base y el proceso para generalizar un caso particular a otro de forma recursiva, lo que permite identificar la implicación del paso inductivo, esto muestra que su estructura de control es teórico.

Jesús usó la representación algebraica (L) ya que el PIM lo requiere tanto en el paso base como en el paso inductivo. La forma de argumentación es estructurante pues está convencido que la demostración es el medio para validar la conjetura de la que suponía ser verdadera, por tanto, su argumento se convierte en un hecho.

La fuerza de su demostración es fuerte, porque contempla que usó el método para validar la conjetura y se convenció de usar correctamente la estructura del PIM. Escribió la demostración en forma algorítmica recurriendo a los operadores desarrollados en los problemas y planteamientos previos. La refutación R_{p1} en [65] gira en torno a poner en duda como escribió su demostración en el paso inductivo.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 16

Comparación del sistema de referencia de Jesús

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN $C_1: a_n - a_{n-1} = 2^n$ $C_2: \forall \geq 1$, *Sería* $2^n - 1$, *Y n es el número de discos.* $C_3: D_2$, $\forall \geq 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$	CONCLUSIÓN $C_1: \forall n \in \mathbb{N}, se\ cumple\ que\ a_n = 2^n - 1,$ $a_n :=$ número de movimientos en n fichas para ganar el juego.
OPERADORES R_1: Mover $n-1$ discos a otra torre, los movimientos son iguales que en el anterior caso, después muevo el último disco restante y tengo que volver a dar los movimientos que di antes. R_2: Es suficiente con cinco casos para obtener el patrón de recurrencia, toca llevar un buen registro. R_3: Aumentan en potencias de dos.	OPERADORES R_4: *Sea* $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\ y\ a_n = 2^n - 1\}$ *i) Veamos que* $1 \in S$, *esto es cierto pues* $a_1 = 1$ *y* $1 = 2^1 - 1$. *Así* $1 \in S$. R_5: *ii) Supongamos que* $1, \dots, k \in S$, *esto es* $a_1 = 2^1 - 1, \dots, a_k = 2^k - 1$ R_6: *iii) Veamos que* $k + 1 \in S$, *esto es* $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. *Usando el PR (D₃),* $a_{k+1} = 2a_k + 1$, *por hipótesis de inducción,* $a_k = 2^k - 1$, $a_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$, *así* $a_{k+1} \in S$, *por tanto,* $\forall n \in \mathbb{N}, se\ cumple\ que\ a_n = 2^n - 1$
REPRESENTACIÓN L: Numérica/Algebraica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Registro de casos particulares Σ_2: Comprobar en el juego	ESTRUCTURA DE CONTROL $\Sigma_1: \forall n \geq 1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = 2^n - 1$ Σ_2: Teórico

RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Tabla 17

Comparación del sistema estructural de Jesús

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación deductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Jesús propuso su propia conjetura en el problema de las Torres de Hanoi. Este problema promovió la necesidad de plantear estrategias diferentes a las empleadas en los problemas anteriores y resaltó la importancia de demostrar la conjetura utilizando el Principio de Inducción Matemática (PIM). Los operadores utilizados en la demostración fueron distintos de aquellos que Jesús empleó al plantear la conjetura. Durante el proceso de argumentación de la conjetura y la demostración, se produjo una ruptura cognitiva debido a la ruptura referencial; sin embargo, las formas en que Jesús describió sus argumentos mantuvieron la misma representación y estructuras de control, lo que generó continuidad estructural. Dado su entendimiento del problema, Jesús argumentó de manera deductiva y no presentó ninguna dificultad categorizada.

El tipo de problema planteado a Jesús en el contexto del juego de las Torres de Hanoi fue fundamental para motivarlo y promover su proceso de generalización. El juego presentaba una estructura jerárquica clara y un patrón recurrente que despertó el interés de Jesús en descubrir las reglas y estrategias para resolverlo. A medida que avanzaba en la resolución del juego, comprendía la importancia de seguir las reglas y el impacto que tenían en el resultado final.

Una vez que Jesús había formulado su conjetura y comprendía el proceso de generalización tanto de la sucesión algebraica como del procedimiento de un caso particular a otro, se facilitaba la demostración utilizando el Principio de Inducción Matemática. Este principio permitía probar la validez de la conjetura para todos los casos posibles, asegurando así la generalización de los resultados obtenidos.

La aplicación del Principio de Inducción Matemática en la demostración proporcionó a Jesús una herramienta para respaldar sus conclusiones de manera rigurosa y sistemática. Jesús reconocía que la generalización no se basaba en un razonamiento inductivo, sino en una metodología sólida respaldada por la lógica matemática. Esto fortalecía su confianza en la validez de sus resultados.

Al darle importancia al tipo de problema planteado, se creaba un entorno de aprendizaje motivador y desafiante. Este tipo de problema despertaba la curiosidad de los estudiantes y los impulsaba a explorar diferentes estrategias y patrones para encontrar la solución. La combinación de un problema intrigante con la aplicación del Principio de Inducción Matemática brindó al Jesús una experiencia de aprendizaje enriquecedora que fortaleció su capacidad para generalizar, demostrar y resolver problemas matemáticos de manera más amplia y sofisticada.

6.4. Análisis del Núcleo 4: Aritmética y Divisibilidad

Análisis del problema 1 para Gabriela

A continuación, se presenta el análisis del problema 1, fue abordado por los estudiantes Gabriela y David de manera individual y conjunta.

Luego de mostrarles la hoja de trabajo, se indicó trabajar inicialmente de manera individual el planteamiento de la conjetura y pasado un tiempo, discutir y preguntar al compañero dudas o conjeturas encontradas. Cada estudiante en su hoja de trabajo responde a los incisos en el orden que vea más asequible. El investigador interviene preguntando si abordaron todos los incisos y comenzar la discusión de los resultados del problema.

Figura 46

Enunciado del problema 1- Núcleo 4

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como el cubo del número n más el doble del número n.

1) **Explorando conjeturas**

a) Describa los primero diez términos de la sucesión y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. Justifique su respuesta.
b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. Justifique su respuesta.
c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n-ésimo$ de la sucesión? Justifique su respuesta.

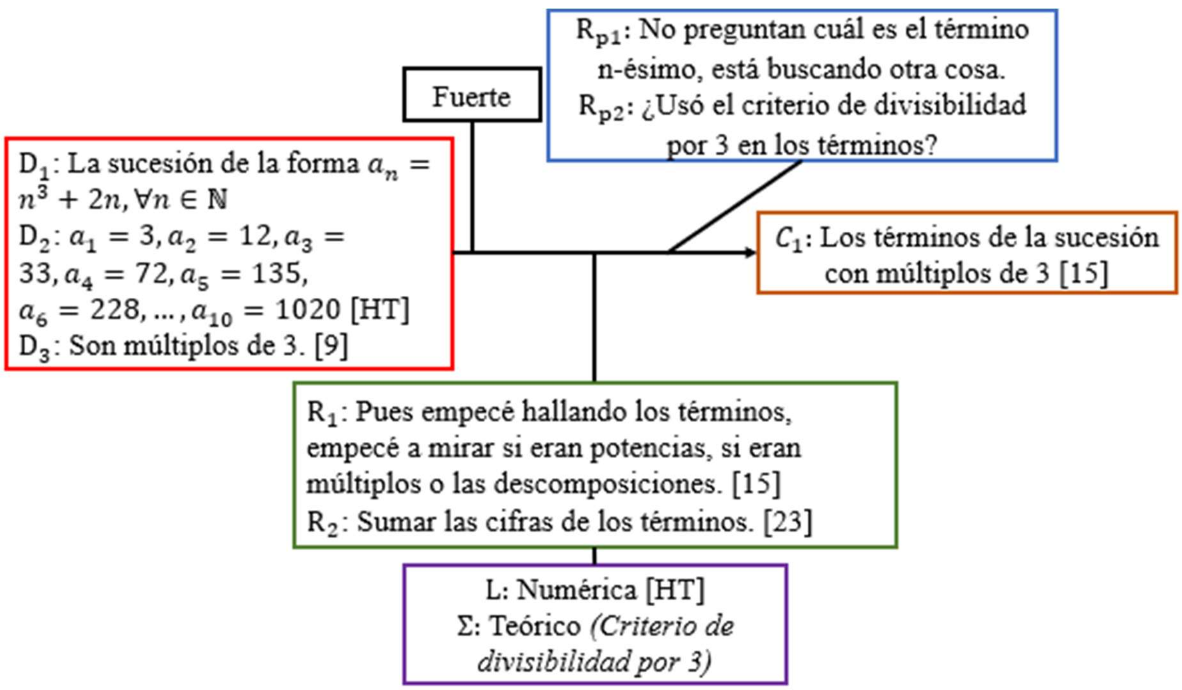
Planteamiento de conjetura

[1] Gabriela: a_n es $n^3 + 2n$.
[2] Inv. Si a_n es eso, es el cubo de n más 2 veces n.
[3] David: Pero esto qué sentido tiene, por ejemplo, se trata de a_n, éste ya está dado.
[4] Inv. Porque no le están preguntando eso.
[5] David: *'Lee el ejercicio'*.
[6] Inv. Lea tranquilo, léalo de nuevo y vera que ahí no preguntan exactamente cuál es el término n-ésimo, está buscando otra cosa, dice, experimente con las propiedades o características que identifiquen con dichos términos ¿ahora si hice comprender la idea?
[7] David: Mas o menos.
Pasado 12 min
[8] Inv. Que pasó, ¿cómo van?
[9] Gabriela: Son múltiplos de 3, eso es una propiedad, Pero es que me dice que patrón sigue con esa regularidad, identifica en los primeros 10 términos, y después halla $n-ésimo$ de la sucesión.
[10] Inv. Es lo que les había dicho antes, ¿Cuál es el patrón de recurrencia?, ¿lo está tomando como la diferencia entre dos términos?
[…]
[11] Gabriela: Ya.
[12] Inv. ¿Ya? Explíqueme como hicieron su proceso de organización desde el comienzo.
[13] Gabriela: ¿O sea desde el primer punto?
[14] Inv. Sí, explíquenme todo, ¿qué pensó?, ¿cómo lo hicieron?, ¿a que llegaron?
[15] Gabriela: **Pues empecé hallando los términos**, y como decía que identificara alguna característica o propiedad, entonces **empecé a mirar si eran potencias, si eran múltiplos o las descomposiciones**, entonces por medio de eso encontré que eran múltiplos de tres.
[16] Inv. Okey, ¿Fue fácil llegar a concluir eso?
[17] Gabriela: Sí.
[18] Inv. ¿Por qué?
[19] Gabriela: Fue como la segunda opción, o sea miré potencias y no, luego múltiplos de tres, o sea la primera vez me di cuenta de que no eran múltiplos de dos como tal porque el tres ya estaba, entonces era de tres, empecé a sumar y si todos son de tres.
[20] Inv. Okey.

[21] Gabriela: Después de eso lo escribí, pero decía propiedades.
[22] Inv. ¿Cómo miraba que son múltiplos de tres?
[23] Gabriela: Sumar las cifras.
[24] Inv. ¿Del número?
[25] Gabriela: Si, del número.
[26] Inv. ¿Usó el criterio de divisibilidad por 3 en los términos?
[27] Gabriela: Sí.
[28] Inv. Okey.
[29] Gabriela: Y después de eso, pues intenté encontrar más porque decía propiedades y características entonces pensé que tenía que encontrar más y no encontré más. Empecé a buscar de pronto las diferencias de cada termino que igual eran múltiplos de tres y ya, ahí digamos que terminé con esa parte, y ya pasé después a la conjetura, yo puse que para todo n que pertenece a los naturales el termino $a_n = n^3 + 2n$ es de la forma $3k$ con k también en los naturales, y pues ya hice la demostración.

Figura 47

Planteamiento de la conjetura de Gabriela



Gabriela y David tuvieron dificultades para comprender el enunciado del problema, ya que estaban acostumbrados a formular la sucesión de manera algebraica y en este caso se les presentó de forma verbal con el objetivo de analizar las propiedades que tiene la sucesión. Gabriela mencionó que la sucesión era de la forma "$a_n = n^3 + 2n$" dando alusión a que con esto ya había planteado una conjetura, mientras que David expresó su confusión al decir que el enunciado no tenía sentido, ya que se trataba de "a_n" y este valor ya estaba dado.

El investigador intervino para aclarar la situación y explicó que el objetivo del problema no era simplemente encontrar el término n-ésimo de la sucesión, sino experimentar con las propiedades y características de los términos. Les señaló que el enunciado pedía identificar un patrón de recurrencia o regularidad en los primeros diez términos y luego aplicarlo a todos los términos de la sucesión.

Después de la aclaración del investigador, David expresó que aún tenía cierta dificultad para entender por completo la idea. Ante estas dificultades se puede apreciar que el enunciado puede distraer o confundir los objetivos del problema con relación al planteamiento de conjeturas sobre el tema de divisibilidad.

Dada la estructura inductiva del problema planteado, Gabriela logró plantear su propia conjetura y no fue necesario generar discusión para proporcionar indicios que le permitieran identificar una conjetura. Por tanto, el proceso de planteamiento de conjeturas por parte de Gabriela fue un proceso de argumentación constructiva, ya que justificó su conjetura basada en los procesos de los casos particulares y reglas matemáticas que conocía, como lo es el criterio de divisibilidad por tres (R_2). El tipo de problema que se planteó en este núcleo generó dificultades en el proceso de argumentación de los objetivos del problema, ya que venían acostumbrados a definir algebraicamente una sucesión dada una recursión o dado los primeros términos de la sucesión.

Los procedimientos de cálculo realizados por Gabriela para encontrar los primeros términos hasta a_{10} contribuyeron a la construcción de la propiedad de los términos, ya que identificó patrones sobre los dígitos de cada término (D_2, D_3). Gabriela utilizó la estructura de control (Σ_1) para verificar la conjetura (C_1). La representación utilizada por Gabriela fue numérica (L), ya que se basó en el cálculo de la división los primeros diez términos y en sus conocimientos previos sobre criterios de divisibilidad.

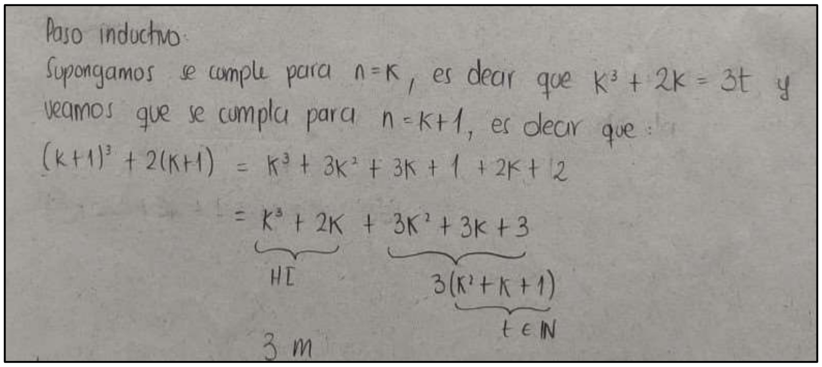
Demostración

[30] Inv. ¿Cómo hizo la demostración?
[31] Gabriela: Yo utilicé el principio de inducción matemática.
[32] Inv. Okey.
[33] Gabriela: Entonces empecé con el termino de a_1.
[34] Inv. Bueno, antes de empezar, ¿Por qué inducción matemática?
[35] Gabriela: Porque de acuerdo con los términos y todo eso, era algo que relacionaba todos los términos de la sucesión; entonces, si ya habíamos identificado como era el termino entonces el siguiente también cumplía yo lo vi como lo que uno usa en inducción, y por eso escogí ese.
[36] Inv. Bueno, prosiga.
[37] Gabriela: Entonces hice la base, verificar bajo el termino de a_1.
[38] Inv. ¿Verificar?
[39] Gabriela: ¿O demostrar?
[40] Inv. ¿Demostrar o verificar?, ¿Qué es verificar? y ¿Qué es demostrar?
[41] Gabriela: Verificar que lo que yo estoy diciendo si se cumple.
[42] Inv. ¿Qué es demostrar?
[43] Gabriela: Y demostrar ya es que se cumple para todos, que es cuando uno lo hace de forma general.
[44] Inv. ¿El paso 2 que dice?
[45] Gabriela: Pues yo puse verificamos que la proposición se cumpla para $n = 1$.
[46] Inv. ¿Cuál es la proposición?
[47] Gabriela: Que para todo n que pertenece a los naturales, el termino $a_n = n^3 + 2n$ sea de la forma $3k$.
[48] Inv. Okey, listo.
[49] Gabriela: Entonces verifiqué que el primer término cumpliera eso, y ya entonces el paso inductivo supongo que se cumple para un k y vamos a probar que el termino $k + 1$ también cumpla las proposiciones.
[50] Inv. Okey.
[51] Gabriela: Entonces, empecé desde el $k + 1$ operé algebraicamente.
[52] Inv. ¿Cómo así que desde el $k + 1$?
[53] Gabriela: Si, tomé el término $k + 1$ y llegué a que efectivamente lo puedo escribir como 3 algo.
[54] Inv. El termino a_{n+1}.
[55] Gabriela: No este (*señala* $3(k^2 + k + 1)$, *donde* $t = k^2 + k + 1, t \in \mathbb{N}$).

[56] Inv. Por eso a_{n+1}.
[57] Gabriela: Sí creo que sí, pero sin tomarlo así, sino en términos de $k + 1$.

Figura 48

Paso inductivo de la demostración de Gabriela


Paso inductivo:
Supongamos se cumple para $n=k$, es decir que $k^3+2k=3t$ y veamos que se cumpla para $n=k+1$, es decir que:

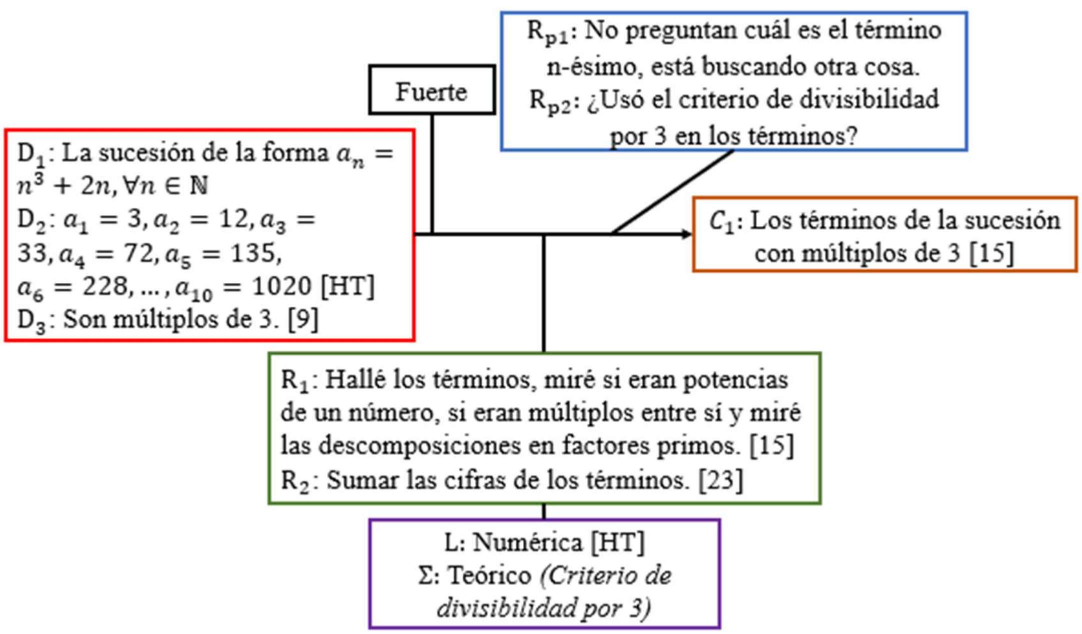
$$(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2$$
$$= \underbrace{k^3+2k}_{HI} + \underbrace{3k^2+3k+3}_{3\underbrace{(k^2+k+1)}_{t \in \mathbb{N}}}$$

3 m

[58] Inv. Si.
[59] Gabriela: Y en términos de $k+1$ se puede escribir de la forma k algo porque acá también esta parte es por hipótesis de inducción ya es 3 por algo.
[60] Inv. Si.
[61] Gabriela: Y ese también lo puedo factorizar por 3 y ya.
[62] Inv. Entonces por hipótesis de inducción es un $3t$.
[63] Gabriela: Si.
[64] Inv. Este es tres por algo ($k^3+2k=3t$) más tres por algo ($3(k^2+k+1)=3m$).
[65] Gabriela: Si acá podemos factorizar y queda 3 por algo. Y la conclusión vemos que por el principio de inducción matemática los términos son múltiplos de tres.

Figura 49

Demostración de Gabriela



Gabriela construyó una demostración utilizando el principio de inducción matemática, mostrando un dominio sólido de los elementos de la estructura de la demostración. Definió claramente la proposición a demostrar y comprendió la relación entre los pasos base e inductivo. Durante el proceso de la demostración, descompuso los operadores en R_3, R_4, R_5, R_6, transformando los datos y operadores utilizados en la conjetura en nuevos argumentos para la demostración. Validó su demostración según la definición del principio de inducción matemática, haciendo uso de los datos $\mathrm{D}_1\ y\ \mathrm{D}_2$ para validar el paso base y el proceso de generalización de un caso particular a otro de forma recursiva (D_2), lo cual permitió identificar la implicación del paso inductivo y demostrar que su estructura de control era sólida.

Gabriela empleó la representación algebraica (L) en su argumentación, ya que el principio de inducción matemática lo requiere tanto en el paso base como en el paso inductivo. Su forma de argumentación fue estructurante, mostrando una convicción de que la demostración por inducción matemática era el método óptimo para validar la conjetura, convirtiendo así su argumento en un hecho. Además, La fuerza de su demostración fue sólida, ya que consideró el uso del método para validar la conjetura y se aseguró de utilizar correctamente la estructura del principio de inducción matemática.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 18

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN	CONCLUSIÓN
C_1: Los términos de la sucesión con múltiplos de 3	C_1: $\forall n \in \mathbb{N}$, el término $a_n = n^3 + 2n$ es de la forma $3k, k \in \mathbb{N}$
OPERADORES	OPERADORES
R_1: Hallé los términos, miré si eran potencias de un número, si eran múltiplos entre sí y miré las descomposiciones en factores primos. R_2: Sumar las cifras de los términos.	R_3: Utilicé el principio de inducción matemática. R_4: Verificamos que la proposición se cumpla para $n = 1$, $a_1 = 1^3 + 2(1) = 3 = 3(1)$. R_5: Supongamos se cumple para $n = k$, es decir que $k^3 + 2k = 3t$ y veamos que se cumpla para $n = k + 1$, es decir que $(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3$ $= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)$, donde $k^3 + 2k = 3t$ (HI), y, $t = k^2 + k + 1$, es un natural. R_6: Luego vemos que por el PIM los $a_n = n^3 + 2n$ son múltiplos de 3.
REPRESENTACIÓN L: Numérica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Teórico *(Criterio de divisibilidad por 3)*	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico (Inducción matemática)

<u>**RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA**</u>

Tabla 19

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación Deductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción

<u>**CONTINUIDAD ESTRUCTURAL**</u>

Gabriela propuso su propia conjetura en el problema de las propiedades de una sucesión. Este problema promovió la necesidad de replantear las estrategias empleadas en los problemas anteriores, también fomentó el análisis de la representación algebraica y las propiedades de los términos, y resaltó la importancia de demostrar la conjetura utilizando el Principio de Inducción Matemática (PIM) o validar si se podían usar otros métodos de demostración. Los operadores utilizados en la demostración fueron distintos de aquellos que Gabriela empleó al plantear la conjetura. Los operadores de la demostración se basaron en la estructura del PIM, por lo tanto, se produjo una ruptura referencial. Sin embargo, las formas en que Gabriela describió sus argumentos mantuvieron la misma representación y estructuras de control, lo que generó continuidad estructural. Se destaca que los primeros casos particulares, vistos como ejemplos de prueba para la conjetura, solo se utilizaron como datos para la demostración del paso base y no como su demostración. Dado su entendimiento del problema, Gabriela argumentó de manera deductiva. Se puede precisar que en la aplicación de los núcleos conceptuales Gabriela ha propiciado sus conocimientos sobre el PIM y el proceso de plantear conjeturas, esto se identifica por las dificultades que presentó entre el núcleo 1 y núcleo 4.

Análisis del problema 2 para Jesús

A continuación, se presenta el análisis del problema 2, fue abordado por Jesús.

Luego de mostrarles la hoja de trabajo, se indicó trabajar el planteamiento de la conjetura y pasado un tiempo, discutir y preguntar dudas o conjeturas encontradas. En su hoja de trabajo respondieron los ítems del problema en el orden que desearan. El investigador interviene preguntando si abordó todos los incisos y comenzar la discusión de todo el problema.

Figura 50

Enunciado del Problema 2-Núcleo 4

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como el producto de $n, n+1, n+2$, números naturales consecutivo.

1) Explorando conjeturas
   a) Describa los primero diez términos de la sucesión y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. Justifique su respuesta.
   b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. Justifique su respuesta.
   c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n-\acute{e}simo$ de la sucesión? Justifique su respuesta.

Planteamiento de conjetura

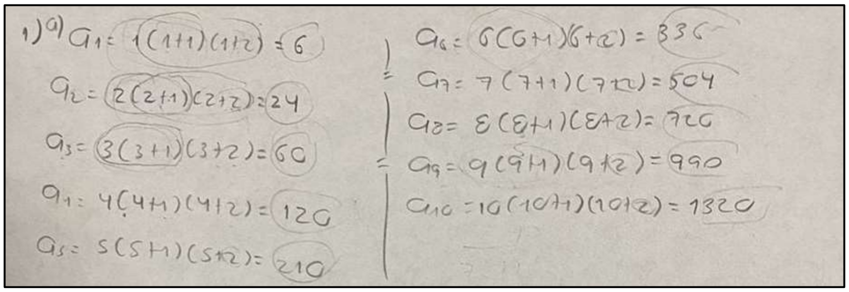
[1] Jesús: Aquí lo que dice es que así están definidos los a_n.
[2] Inv. Si señor, dice cómo están definidos los a_n.
15 minutos después.
[3] Inv. ¿Necesita más tiempo o avanzamos?
[4] Jesús: Yo estaba mirando y encontré las regularidades, a_1 sería $(1)(1+1)(1+2)=6$, $a_2=(2)(2+1)(2+2)=24$, $a_3=(3)(3+1)(3+2)=60$. ¿yo podría decir que para hallar este valor de acá simplemente es el anterior partido por el anterior?

"el estudiante se centró en identificar la regularidad de la sucesión, sin contemplar que ya la regularidad está definida como el producto de 3 números consecutivos es decir $n(n+1)(n+2)$"

[5] Inv. ¿Para hallar qué valor?
[6] Jesús: Para cualquiera, por ejemplo, para a_{10} sería igual al anterior que sería a_9 sobre $n-1$.
[7] Inv. Halle el término a_{100} como lo está pensando.
[8] Jesús: Debo tener el anterior.
[9] Inv. ¿Cuánto vale el anterior?
[10] Jesús: No sé, porque todavía no he llegado al n-ésimo término.
[11] Inv. El n-ésimo término ya lo tiene. No estamos buscando a_n porque ya lo da el enunciado.
[12] Jesús: Si, a_n ya me lo dio, porque es consecutivo. Tengo que hallar el n-ésimo término.
[13] Inv. ¿Para qué lo va a hallar?
[14] Jesús: Para hallar cualquiera, digamos halle a_{100}.
[15] Inv. El término es $a_{100}=100(100+1)(100+2)$.
[16] Jesús: Es eso.
[17] Inv. Si, no le estoy pidiendo el n-ésimo termino, mire el enunciado del problema.
[18] Jesús: ¿Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros 10 términos?
[20] Inv. Pero eso sería eso que borró, el patrón de recurrencia es la diferencia entre dos términos consecutivos, más no es, si escribimos eso algebraicamente.

Figura 51

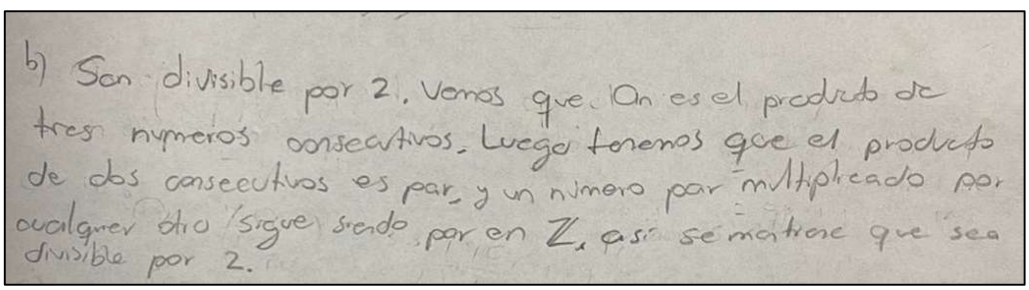
Proceso de Jesús para encontrar la conjetura



[21] Jesús: ¡Ya entendí! Por ejemplo 24 menos 6 es igual a 18, así encuentro las regularidades, 60 menos 24 me tiene que dar la tercera parte de esto.
[22] Inv. Recuerde que usted escribió los primeros 10 términos de la sucesión; experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. Cuando uno dice propiedades o características ¿Que intenta buscar?
[23] Jesús: Encontré que los términos son divisibles por 3, por 6 y por 2.
[24] Inv. ¿Por qué son divisible por 3, 6 y 2?
[25] Jesús: Verifiqué que hasta a_{10} son divisibles por 6.
[26] Inv. ¿Hizo las divisiones?
[27] Jesús: Si, hice las divisiones por 6; también, son divisibles por 3 porque $6 = 3 * 2$, **si es divisible por 6 entonces es divisible por 3 y por 2.**
[28] Inv. Bien, si hace los 2000 primeros términos ¿son divisibles por 6?
[29] Jesús: Si.
[30] Inv. ¿Por qué?
[31] Jesús: Yo los pruebo acá, este es $n - 1$ este es $n + 1$, si empezamos con uno par.

Figura 52

Justificación de la conjetura de Jesús

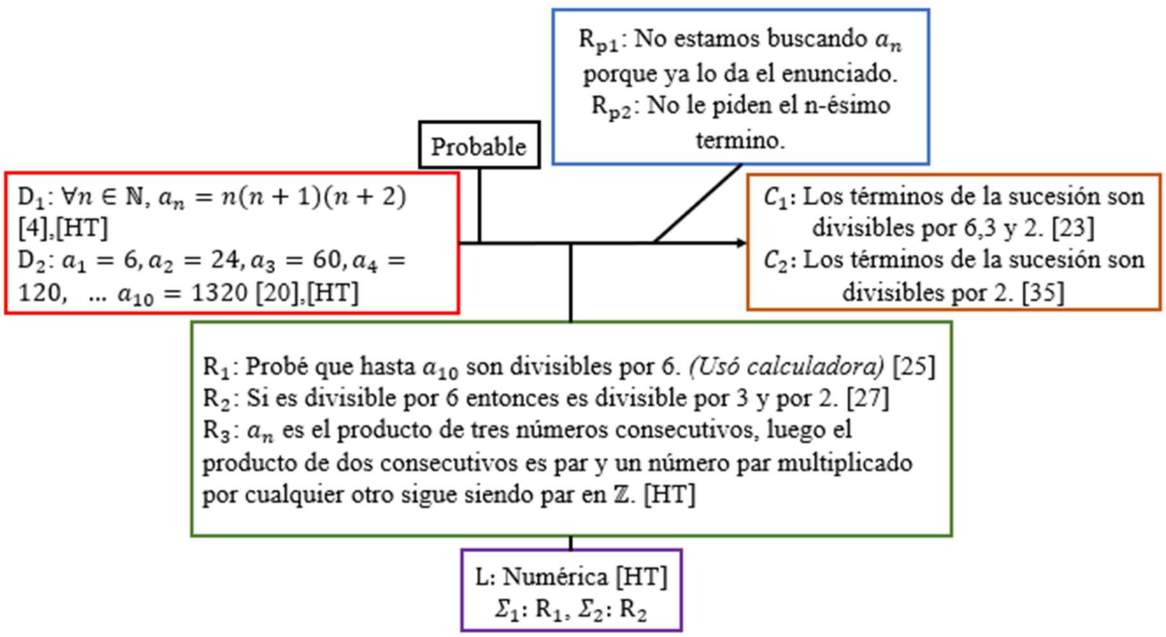


[32] Inv. ¿Con uno par?
[33] Jesús: Cuando yo opere esto, va a ser divisible por 6. (*Señala los cálculos de los registros de los primeros términos*)
[34] Inv. Si, justifique por qué.
[35] Jesús: Ah ya la hice, pero le voy a poner que es divisible por 2 para irme más rápido.
(El estudiante tenía un compromiso, quería terminar rápido)
[36] Jesús: Si pues si es divisible por 6, pues es divisible por los otros dos.
[37] Inv. Pues si es divisible por 2 y por 3 es divisible por 6, pero escríbalo.
[38] Jesús: Uso el algoritmo de la división.
[39] Inv. ¿Cuál es su conjetura en este caso?
[40] Jesús: Que a_n es divisible por 6 para cualquier n.
[41] Inv. Esa es su conjetura, por favor plantee y justifique cómo llego a eso.

[42] Jesús: Si, a partir de los primeros 10 registros yo pude ver que los números se podrían escribir como, eran divisibles por 6, pero también puedo decir que, si pongo los n, por ejemplo, yo sé que ese n tiene que ser par o impar alguno de los dos casos, y hacer esta operación a ver que me da, arbitrario es trabajar con arbitrarios.
[43] Inv. Bueno escriba eso.
[44] Jesús: ¿Es una justificación valida?
[45] Inv. Escriba lo que le parezca válido.
[46] Jesús: Si.
[47] Inv. Ahora después de que plantee su conjetura, debe demostrarla.

Figura 53

Planteamiento de la conjetura de Jesús



Dada la estructura inductiva del problema planteado, Jesús logró plantear su propia conjetura, la forma de argumentación de Jesús fue constructivo producto del proceso de calcular los primeros diez términos de la sucesión como se indicaba en el enunciado del problema, en el proceso Jesús encontró tres conjeturas: La sucesión $a_n = n(n+1)(n+2), \forall \geq n \in \mathbb{N}$ es divisible por 2, 3, o 6 a cuál Jesús optó solo por demostrar una de las conjeturas. Los procedimientos de cálculo realizados para encontrar los primeros términos hasta a_{10} contribuyeron a la construcción del término n-ésimo, una vez entendido el patrón de la estrategia de solución del juego para cualquier término, los operadores R_1, R_2 son a su vez estructura de control pues usa directamente una regla matemática para plantear una conjetura.

Jesús utilizó la estructura de control (Σ_1) para verificar la conjetura (C_1). La representación utilizada por Jesús fue numérica (L), ya que se basó en el cálculo de la división los primeros diez términos y en sus conocimientos previos sobre criterios de divisibilidad.

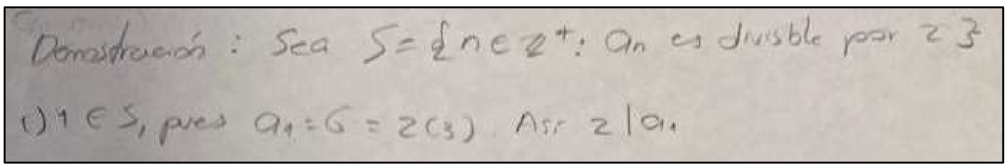
Demostración

[48] Jesús: Sólo Lo hice para dos (*los términos de la sucesión son divisibles por 2*).
[49] Inv. Bueno, pero justifique bien si lo hace solo para dos ¿lo puse difícil?
[50] Jesús: No, está fácil, yo ya había hecho algo parecido.
[51] Inv. ¿Está muy parecido a lo visto en clase?
[52] Jesús: Si, hice algo parecido en números.
[53] Inv. ¿Por qué eligió esa conjetura?, ¿Por qué desistió de la otra?
[54] Jesús: porque me demoro menos haciéndola, es que creo que voy a tener confusiones cuando la vaya a hacer por 3, bueno no necesariamente, es que es aplicar el algoritmo de la división y entonces mirar que formas adquiere n, y mirar que eso sea un entero y ya. Pero puedo utilizar otras cosas.
[55] Inv. Ahora ahí es donde estoy interesado saber qué le beneficia utilizar, inducción o el algoritmo de la división. ¿Para usted qué método es mejor?
[56] Jesús: Algoritmo de la división.
[57] Inv. ¿Cuál es la ventaja de usar el algoritmo de división respecto a inducción y viceversa?
[58] Jesús: Ya me di cuenta de algo.
[59] Inv. ¿Qué?
[60] Jesús: Que era más sencillo por inducción.
[61] Inv. ¿Por qué?
[62] Jesús: Porque no tengo que hacer todos esos casos para…
[63] Inv. ¿Para qué?
[64] Jesús: Para la forma que tienen esos n cuando utilizo el algoritmo.
(Usando el algoritmo de la división para demostrar divisibilidad por 6, requiere seis casos, demostrar divisibilidad por 2 requiere dos casos)
[65] Inv. Pues depende, si usted está haciéndolo para 6 o para 2.
[66] Jesús: Para 2.
[67] Inv. Okey, entiendo por qué eligió para 2, ya se dio cuenta que la conjetura se puede demostrar por dos métodos, ¿Por qué elige uno por encima del otro?
[68] Jesús: Es por comodidad, por tiempo, o tal vez el otro método también, no se ahorita, esperemos a ver.
10 minutos después
[69] Jesús: Yo creo que ya, la parte de inducción tuve problemas.
[70] Inv. ¿Ya terminó?
[71] Jesús: Si, lo demostré por algoritmo de la división, en la parte de demostrar por inducción tuve problemas en el a_{k+1}.

[72] Jesús: Por inducción tuve problemas no fui capaz, dije: "lo intento para el primero, luego para el segundo y luego lo pruebo para el $k+1$". Pero en $k+1$ tuve problemas expresar y encontrar, por ejemplo, que $(k)(k+1)(k+2)$ que era el que suponía, la hipótesis, resolver ese (distribuir la expresión) y en el $k+1$ pues lo hallaba, pero me quedaban la expresión $3k^2+9k+6$. Y ahí no podía factorizar por 2, o sea no podía decir que es divisible por 2.
[73] Inv. Pero si se pueden mirar valores de k para $3k^2+9k+6$ y usar el mismo criterio.
[74] Jesús: El mismo argumento sí, pero pensé que tal vez me demoraba un poco más.
[75] Inv. Bueno, muestre la primera parte, usted dice que lo hizo por inducción, pero no le dio.
[76] Jesús: si, $a_1=6$ y es igual a 2 por 3.

Figura 54

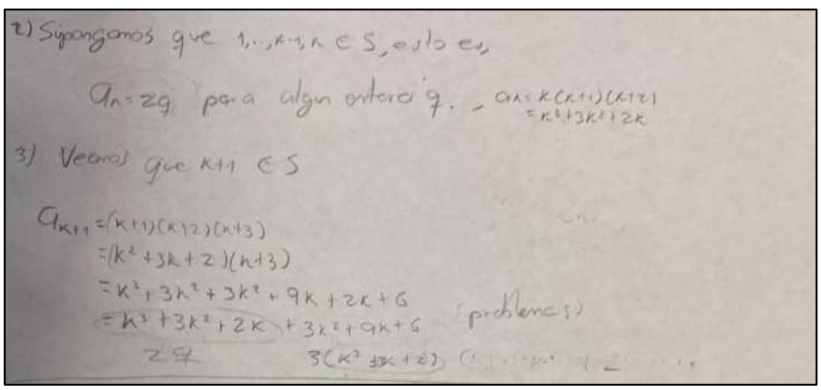
Conjetura y Paso base de la demostración de Jesús


Demostración: Sea $S=\{n\in\mathbb{Z}^+ : a_n$ es divisible por 2$\}$
1) $1\in S$, pues $a_1=6=2(3)$. Así $2|a_1$

Supongamos que aquí hay que tener claro, que como un conocimiento previo, ya conozco de divisibilidad. Bueno para el $a_k=(k)(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$. Que $a_k=2q$.

Figura 55

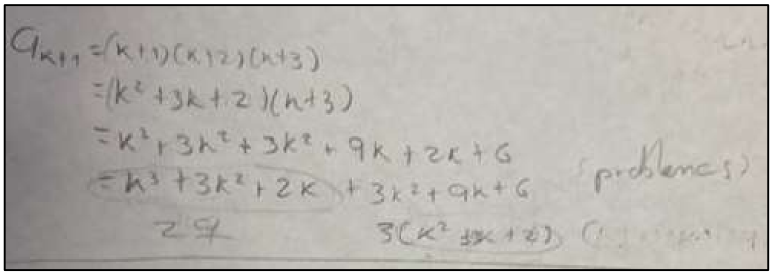
Paso inductivo de la demostración de Jesús


2) Supongamos que $1,\dots,k-1,k\in S$, esto es,
$a_n=2q$ para algún entero q. $a_k=k(k+1)(k+2)$
$=k^3+3k^2+2k$
3) Veamos que $k+1\in S$
$a_{k+1}=(k+1)(k+2)(k+3)$
$=(k^2+3k+2)(k+3)$
$=k^3+3k^2+3k^2+9k+2k+6$
$=k^3+3k^2+2k+3k^2+9k+6$ (problemas)
$2q$ $3(k^2+3k+2)$

[77] Inv. ¿Y qué significa eso?
[78] Jesús: Que existe un entero tal que al yo multiplicarlo por 2, ese a_k tiene que ser entero. **Veamos que a_{k+1} pertenece a S entonces $a_{k+1}=(k+1)(k+2)(k+3)$.** Cuando hice la operación esta parte.

Figura 56

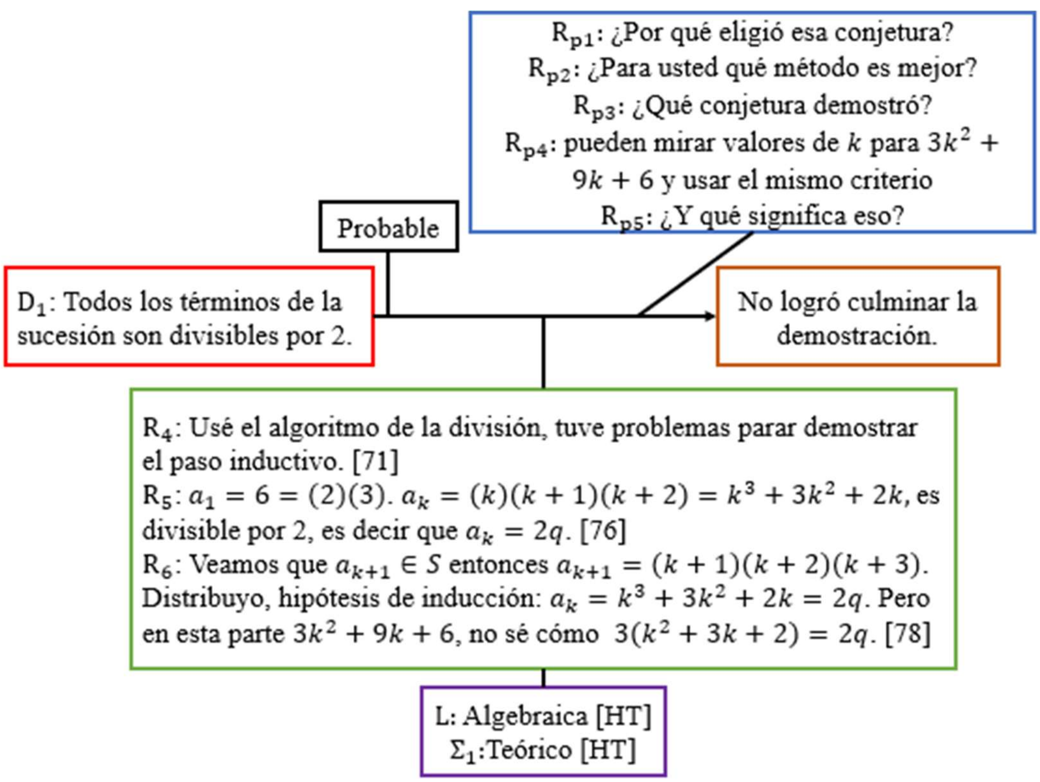
Paso inductivo incompleto de la demostración de Jesús



Aquí podría ver mi **hipótesis de inducción:** $\boldsymbol{a_k = k^3 + 3k^2 + 2k = 2q}$, ya podría decir que es $2q$. Pero en esta parte $3k^2 + 9k + 6$, ¿Cómo factorizo la expresión?, Ahí tengo un problema. Lo de expresarlo como $3(k^2 + 3k + 2) = 2q$. Bueno ahí fue donde me quedé.
[79] Inv. No logró identificar esa expresion.
[80] Jesús: Eso me tiene que dar.
[81] Inv. Okey.
[82] Jesús: Si tuve problemas, entonces yo decidí, como ya sabía que tambien lo podía hacer por algoritmo de la division antes de pasar a la parte de demostración, pues mi pensado era, si tengo problemas con inducción, lo demuestro por algoritmo de la division y ya.
(Jesús realizó la demostración de la conjetura usando el algoritmo de la división)

Figura 57

Esquema de la Demostración de Jesús



Jesús abordó la conjetura que afirmaba que todos los términos de la sucesión eran divisibles por 2, con la proposición $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n(n+1)(n+2)$. Inicialmente, intentó demostrarlo utilizando el Principio de Inducción Matemática, pero no logró alcanzar una demostración satisfactoria pues encontró dificultades en el paso inductivo al intentar factorizar el término a_{n+1}. Ante esta dificultad, decidió recurrir al algoritmo de la división como alternativa. Sin embargo, Jesús también enfrentó dificultades similares a los mencionados anteriormente en el caso de Gabriela y David al momento de comprender los objetivos del problema. Esto muestra que se debe mejorar el enunciado de este tipo de problemas para generar en el estudiante la necesidad de usar el PIM.

En la discusión de la demostración, el investigador intervino para aclarar la situación y proporcionar orientación. Jesús recibió instrucciones específicas para superar las dificultades encontradas en el paso inductivo. La representación utilizada por Jesús en su demostración fue algebraica, y su estructura de control se mantuvo en el ámbito teórico. Por tanto, la forma de argumentación fue estructuran ya que, aunque no demostró usando el PIM, fue recurrió a un método de demostración como medio para validar la conjetura.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 20

Comparación del sistema de referencia de Jesús

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN	CONCLUSIÓN
C_1: Los términos de la sucesión son divisibles por 6, 3 y 2. C_2: Los términos de la sucesión son divisibles por 2.	No logró culminar la demostración.
OPERADORES	OPERADORES
R_1: Probé que hasta a_{10} son divisibles por 6. *(Usó calculadora)* R_2: Si es divisible por 6 entonces es divisible por 3 y por 2. R_3: a_n es el producto de tres números consecutivos, luego el producto de dos consecutivos es par y un número par multiplicado por cualquier otro sigue siendo par en $\mathbb{Z}$.	R_4: Lo demostré por algoritmo de la división, en la parte de demostrar por inducción tuve problemas en el a_{k+1}. R_5: $a_1 = 6$ y es igual a 2 por 3. Un conocimiento previo ya conozco de divisibilidad es: para el $a_k = (k)(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$. Es decir que $a_k = 2q$. R_6: Veamos que a_{k+1} pertenece a S entonces $a_{k+1} = (k+1)(k+2)(k+3)$. Distribuyo y sale la hipótesis de inducción: $a_k = k^3 + 3k^2 + 2k = 2q$. Pero en esta parte $3k^2 + 9k + 6$, ¿Cómo lo factorizo?, Ahí Tengo un problema Lo de expresarlo como $3(k^2 + 3k + 2) = 2q$. Bueno ahí fue donde me quedé.
REPRESENTACIÓN L: Numérica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: R_1 Σ_2: R_2	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico (Inducción matemática)

<u>RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA</u>

Tabla 21

Comparación del sistema estructural de Jesús

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por directa (Deductiva)
RUPTURA ESTRUCTURAL	

Jesús propone su propia conjetura, los operadores para hallar la conjetura se centraron en el cálculo de casos particulares hasta encontrar una regularidad, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados cuando planteó la conjetura ya que usó el algoritmo de la división (método de demostración deductivo), por tanto, en este proceso de argumentación de conjetura y de demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural.

Aunque provocó la ruptura para propiciar la construcción de significado del PIM, pero se identificó la dificultad (J_1, J_4) en el proceso de la demostración, dado que Jesús no logró completar la demostración usando el PIM, esto se originó por errores algebraicos al momento de identificar la hipótesis de inducción en el paso inductivo.

Con el objetivo de propiciar la construcción de significado del PIM al estudiante, en el momento de discusión para la demostración se realizó una intervención para visibilizar la dificultad referente a la demostración del paso inductivo $(J_3,\ J_4)$ y mitigar esta dificultad en posteriores problemas.

En resumen, de este núcleo conceptual, el tipo de problemas puede aportar al desarrollo del proceso de plantear conjeturas, en donde el estudiante que se enfrenta a un problema no solo mira regularidades de una secuencia si no también en propiedades presentes en todos los términos o los alcances que las conjeturas tienen al momento de usarlas para proponer conjeturas nuevas. Sin embargo, se debe modificar su enunciado de modo que no tienda a confundir al estudiante. Se puede afirmar con base a esto, que este tipo de problemas no propició el PIM en comparación a los anteriores núcleos conceptuales.

6.5. Análisis del Núcleo 5: Teoremas

A continuación, se presenta el análisis del Segundo de los tres problemas de demostración del Núcleo 5, los cuales fueron abordados por los estudiantes David y Gabriela de manera individual y conjunta.

Luego de presentarles la hoja de trabajo, se indicó trabajar inicialmente de manera individual y pasado un tiempo, discutir dudas o conjeturas encontradas. Cada estudiante en su hoja de trabajo responde a los incisos en el orden que vea más asequible. El investigador interviene preguntando si abordaron el problema y comienza la discusión.

Figura 58

Enunciado problema 2-Núcleo 5

Problema 2:

Un estudiante plantea una demostración a la siguiente conjetura:

$$\text{“}\textit{Para todo natural } 2^n > n^2\text{”}$$

(Demostración por inducción matemática):

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} | 2^n > n^2\}$, se probará que $A = \mathbb{N}$.

Paso base: $1 \in A$, se tiene porque $2^1 > 1^2$.

Paso inductivo: supongamos que $k \in A$. Es decir, $2^k > k^2, para\ algún\ k \in \mathbb{N}$. Se debe probar que $k + 1 \in A$, esto es, $2^{k+1} > (k + 1)^2, k + 1 \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis de inducción

$$2^k > k^2$$

$$2 * 2^k > 2 * k^2$$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$$

$$2^{k+1} > (k + 1)^2$$

Así $k + 1 \in A$. Por tanto, $2^n > n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

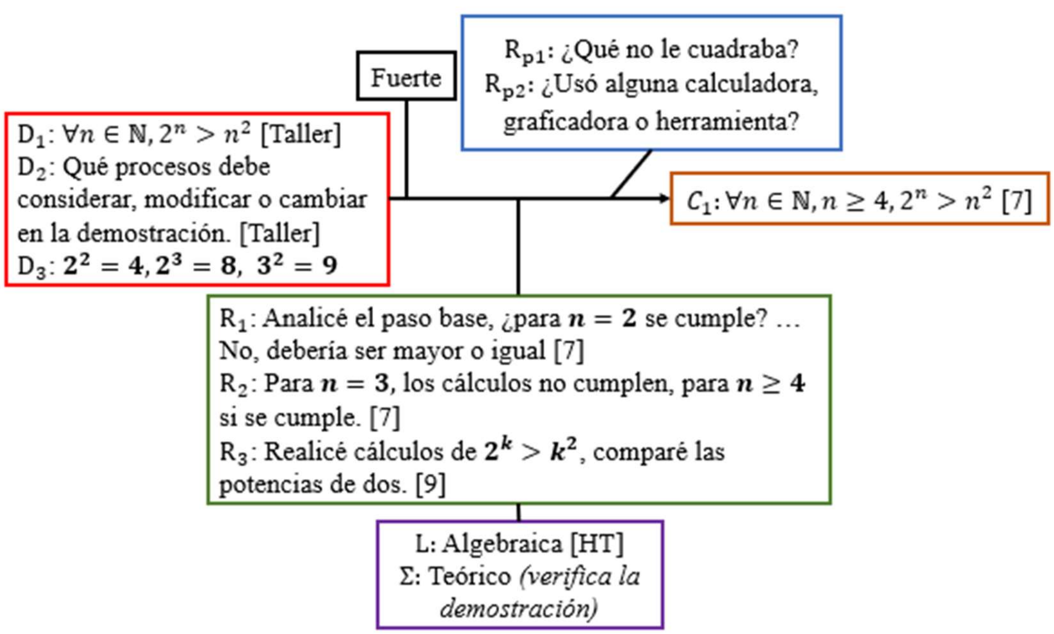
Análisis del problema 2 para Gabriela

Planteamiento de conjetura

[1] Inv. Cuando planteen la conjetura hablamos de eso y ahí si demuestren, ¿Listo?
Silencio, Gabriela y David continúan con la solución del problema (10 minutos)
[2] Inv. ¿Qué pasó? ¿Tienen inconvenientes con el problema dos?
[3] Gabriela: Pues yo dije que la conjetura debería añadirse como una condición más.
[4] Inv. ¿Quiere empezar?
[5] Gabriela: Sí.
[6] Inv. Explique desde el comienzo; desde que leyó el problema, ¿qué miró?, ¿se dio cuenta de algo?
[7] Gabriela: Eh… Pues… lo revisé y **decía algo como, qué posibles errores encontraba o sea dije tal vez tiene un error;** entonces cuando vi el paso base yo pensé, que pasaría con el $\boldsymbol{n = 2}$; de esto me di cuenta... debería ser mayor o igual; entonces seguí revisando; revisé cuando $\boldsymbol{n = 3}$ porque también en mi cabeza dije esos **cálculos tampoco dan**, entonces bueno $\boldsymbol{n = 3}$ tampoco da, cuando llegue a $\boldsymbol{n = 4}$ **de ahí en adelante si se cumple**, entonces es como la condición que se le debería agregar la conjetura. Yo puse para todo $\boldsymbol{n}$ que pertenece a los naturales $\boldsymbol{n}$ **mayor o igual a 4**, se tiene que $\boldsymbol{2^k > k^2}$.
[8] Inv. Okey, ¿Qué no le cuadraba?
[9] Gabriela: Pues que uno más o menos maneja esos cálculos en la mente, como $\boldsymbol{2^k > k^2}$ Las potencias de dos que uno se sabe; pero cuando pensé $\boldsymbol{2^2}$ y $\boldsymbol{2^2}$ es igual, entonces este no, y luego $\boldsymbol{2^3 = 8}$ y el otro $\boldsymbol{3^2 = 9}$ entonces ahí está mal, eso era lo que no me cuadraba.
[10] Inv. ¿Usó alguna calculadora, graficadora o herramienta?
[11] Gabriela: Eh…. No.

Figura 59

Esquema del Planteamiento de la conjetura de Gabriela



El tipo de problema del núcleo 5 se centró en plantear una conjetura a partir de un hecho o redefinir una conjetura falsa. Dado el tipo de problema planteado, Gabriela logró plantear su propia conjetura, al abordar un problema algebraico donde los datos y las reglas matemáticas se presentan de forma explícita en comparación de los problemas anteriores, los argumentos de Gabriela son estructurantes pues se presentan como un hecho al verificar o corregir la conjetura falsa con nuevas condiciones. Al redefinir la conjetura, la estructural de control es la demostración de la conjetura expuesta en el enunciado, lo que cataloga el control como teórico. La representación no cambia ya que solo redefine la conjetura y la fuerza de convicción es sólida dado que no usa la misma demostración. Las refutaciones potenciales se centran en validar si Gabriela comprendió si los nuevos cambios que la conjetura sea verdadera.

Demostración

[12] Inv. Okey, ahora ¿Usó la misma demostración para demostrar su conjetura?
[13] Gabriela: Pues yo pienso que sí, es que la verdad yo las demostraciones de esas desigualdades, yo no las manejo bien, entonces yo elegí esa conjetura y pues debe ser esa.
[14] Inv. La conjetura que diseñó plantea una condición $\boldsymbol{n \geq 4}$.
[15] Gabriela: Si.
[16] Inv. Entonces en ese caso cumple, ¿Será que esa nueva condición influye en el procedimiento del paso inductivo?
[17] Gabriela: Si claro, **porque el paso inductivo ya no es con $\boldsymbol{n \geq 1}$ sino con $\boldsymbol{n \geq 4}$.**
[18] Inv. Si, pero me refiero dentro del proceso; por ejemplo: supongamos que utilizo la demostración escrita en el enunciado.

Figura 60

Parte de la demostración escrita en el enunciado del problema

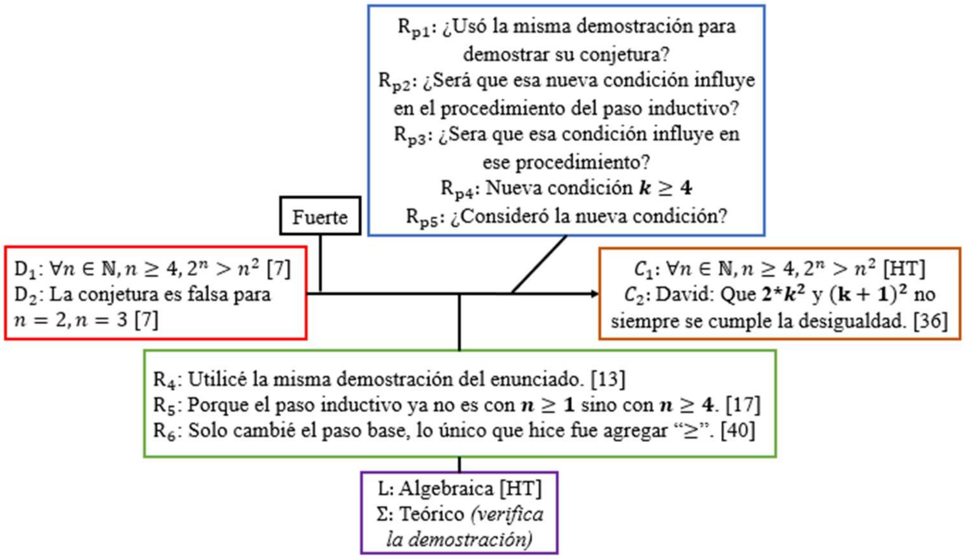
$$2^k > k^2$$
$$2 * 2^k > 2 * k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$
$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$$
$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

[19] Inv. ¿Sera que esa condición influye en ese procedimiento?, David también puede decir o preguntar.

[20] David: Tomé un rumbo diferente supongo, no me fijé tanto en el inicio yo me fui directo al paso inductivo para ver que se hacía en el paso inductivo y me pareció raro; como se asumía $\boldsymbol{2^k > k^2}$, pero, primero, eso está demostrado y segundo, no cumple para todo $\boldsymbol{n}$ porque si tomamos por ejemplo $\boldsymbol{n = 2}$ eso ya no se cumple.
[21] Inv. Entonces usted si está usando el mismo razonamiento que Gabriela.
[22] David: Pues sí, estoy probando con un caso para decir que lo que él dice no es cierto.
[23] Inv. Interesante, ¿Qué tiene que decirle a Gabriela de lo que ella hizo?
[24] David: Que está bien, yo no lo había visto desde ese punto, supuse que la proposición original iba a ser cierta, ¿Por qué suponer que es falsa?
[25] Inv. ¿La proposición que dio Gabriela o la que está escrita en el problema?
[26] David: La del problema en sí, al demostrar puse que era cierto, pero no me fije en ello.
[27] Inv. Okey, O sea, al inicio pensó que eso era verdadero.
[28] David: Si, o sea asumí que era verdadero, no demostré que para $n = 2$ era mayor o igual.
[29] Inv. En qué momento se dio cuenta que no era verdadero.
[30] David: Realmente en ninguno en sí, porque cuando continúe, no le iba a dar lugar a eso, simplemente a que la demostración que se estaba realizando fuera correcta. No sé cómo decirlo… asumía que era verdadero estando mal la demostración y llegué a que la demostración no era correcta.
[31] Inv. ¿Dónde no se cumplía?
[32] David: Un contraejemplo para decir que la desigualdad que está en medio del paso inductivo no se cumplía, yo no estaba hablando de la base.
[33] Inv. Pero eso es lo mismo que $\boldsymbol{2^{k+1} > (k+1)^2}$
[34] David: No, porque yo estoy mirando es que $\boldsymbol{2 * k^2}$ no es mayor para todos los casos, que $\boldsymbol{(k+1)^2}$, eso es lo que yo lo único que yo vi mal en la demostración en ese momento.
[35] Gabriela: ¿Qué fue lo que veía mal?, perdón, no escuché.
[36] David: Que $\boldsymbol{2 * k^2}$ y $\mathbf{(k+1)^2}$ no siempre se cumple la desigualdad.
[37] Inv. Pues miremos, lo que usted está comparando son estas dos cosas $\boldsymbol{k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1}$. Ahí es donde debe utilizar la condición de Gabriela en la demostración "$\boldsymbol{k \geq 4}$".
[38] David: Si señor.
[39] Inv. Ahí vuelvo con Gabriela, justo en este momento de la demostración, donde quiero demostrar, es donde busco la nueva condición, y esa es la pregunta Gabriela ¿será que eso lo considero? ¿Consideró la nueva condición?
[40] Gabriela: No, **yo solo cambié el paso base, lo único que hice fue agregar "$\boldsymbol{n \geq 4}$"** entonces el resto lo escribí con $\geq$, nada más.
[41] Inv. Pues de hecho con la nueva condición, la expresión $\boldsymbol{k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1}$**;** se vuelve mayor estricto.
[42] David: Pero eso no pasa con el $\boldsymbol{2^k}$.
[43] Inv. Claro, eso no pasa con el $\boldsymbol{2^k}$, el $\boldsymbol{2^k}$ me dice quién es *mayor estricto*, la desigualdad por un lado es *mayor o igual* y el otro es *mayor estricto* por transitividad el orden que queda es *mayor estricto*.
[44] David: No, pero para el $\boldsymbol{k = 3}$, el $\boldsymbol{2^k}$ no se cumple, no es mayor estricto.
[45] Inv. Si, eso es lo que discutimos, para el caso $\boldsymbol{k = 3}$ es falso, debe ser para mayores o iguales a 4.

Figura 61

Esquema de la Demostración de Jesús



Los elementos que se explicitan en el esquema son procesos extraídos del enunciado del problema por lo que los operadores y los argumentos de la demostración son correcciones del problema.

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva

Tabla 22

Comparación del sistema de referencia de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN C_1: C_1: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n > n^2$	CONCLUSIÓN C_1: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n > n^2$ C_2: *David: Que* $\boldsymbol{2*k^2}$ *y* $(\boldsymbol{k+1})^2$ *no siempre se cumple la desigualdad.*
OPERADORES R_1: Analicé el paso base, ¿para $\mathbf{n = 2}$ se cumple? … No, debería ser mayor o igual. R_2: Para $\mathbf{n = 3}$, los cálculos no cumplen, para $\mathbf{n \geq 4}$ si se cumple. R_3: Realicé cálculos de $\mathbf{2^k > k^2}$, comparé las potencias de dos.	OPERADORES R_4: Utilicé la misma demostración del enunciado. R_5: Porque el paso inductivo ya no es con $\boldsymbol{n \geq 1}$ sino con $\boldsymbol{n \geq 4}$. R_6: Solo cambié el paso base, lo único que hice fue agregar "≥".
REPRESENTACIÓN L: Algebraica	REPRESENTACIÓN L: Algebraica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Teórico *(Verifica la demostración)*	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico (Inducción matemática)

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Tabla 23

Comparación del sistema estructural de Gabriela

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN	FORMA DE ARGUMENTACIÓN
Estructurante	Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
Argumentación Deductiva	Demostración por inducción
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque no hubo un proceso en que Gabriela construya su propia demostración, este tipo de problemas también brindan información sobre la compresión del método. Como los argumentos no se movilizan del paso del planteamiento de conjetura a la demostración, entonces, se preserva una continuidad referencial y estructural. El tipo de problema no visibiliza un proceso para plantear una conjetura, pero si muestra qué las dificultades que presentan los estudiantes al demostrar usando el PIM. Gabriela a pesar de identificar por qué la conjetura era falsa, no tuvo presente sus aportes al momento de demostrar el paso inductivo, es decir, no usó la hipótesis que redefinió ($n \geq 4, 2^n > n^2$).

6.6. Resumen del análisis de los núcleos conceptuales

Resumen del análisis del proceso de argumentación

En la siguiente tabla se sintetizan el proceso de argumentación analizado a lo largo de este capítulo. Se sintetiza el tipo de argumentación y la existencia de unidad o ruptura cognitiva considerando la caracterización de Pedemonte (2002) y Fiallo (2011), los resultados son parte la base de las conclusiones de este estudio.

Tabla 24

Estructura de la argumentación y comparación entre el planteamiento de conjetura y construcción de demostración

Núcleo Conceptual	Problema	Estudiante	Estructura de la Argumentación en la conjetura y demostración	Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva
Núcleo 1	P1	*Jesús*	Inductiva por generalización sobre el proceso	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
		David	Inductiva por recurrencia	Continuidad del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
Núcleo 2	P1	*Gabriela*	Inductiva por recurrencia	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
	P2	*Gabriela*	Inductiva por generalización sobre el proceso	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
	P3	*Gabriela*	Inductiva por generalización sobre el proceso	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
Núcleo 3	P1	*Gabriela*	Inductiva por generalización de casos particulares	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Ruptura estructural
	P2	*Jesús*	Deductiva	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Continuidad Estructural
Núcleo 4	P1	*Gabriela*	Deductiva	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Continuidad estructural
	P2	*Jesús*	Inductiva por generalización sobre el proceso	Ruptura del sistema de referencia
			Demostración deductiva	Ruptura estructural
Núcleo 5	P2	*Gabriela*	Deductiva	Continuidad del sistema de referencia
			Demostración por Inducción matemática	Continuidad Estructural

Los resultados en la ta

Resumen de las Dificultades de los estudiantes

En las siguientes tres tablas se sintetizan las dificultades emergentes que impidieron el tratamiento de los problemas de forma adecuada, cada tabla corresponde a un estudiante. Los resultados de la tabla permiten valorar la unidad de enseñanza e identificar el desarrollo de los estudiantes sobre la demostración por el PIM. Se marca con una "X" la dificultad identificada.

Tabla 25

Tabla de dificultades para Gabriela

Dificultades de aprendizaje del principio de inducción matemática	**Núcleo 1**	**Núcleo 2**			**Núcleo 3**			**Núcleo 4**		**Núcleo 5**	
	P2	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P4	P2	P3
Errores numéricos y algebraicos (J_1)	X				X	X		X	X		
Argumentar la demostración del paso base (J_2)		X	X	X							
Identificar la esencia del paso inductivo (J_3)											
Identificar cuando es aplicable la inducción matemática (J_4)											X
Identificar la proposición a demostrar (J_5)	X	X	X	X			X		X		
Entender la relación entre el paso base y el paso inductivo (J_6)	X	X					X			X	

Tabla 26

Tabla de dificultades para Jesús

Dificultades de aprendizaje del principio de inducción matemática	**Núcleo 1**		**Núcleo 2**	**Núcleo 3**			**Núcleo 4**	**Núcleo 5**
	P1	P2	P1	P1	P2	P3	P2	No participó
Errores numéricos y algebraicos (J_1)	X		X	X		X	X	
Argumentar la demostración del paso base (J_2)	X							
Identificar la esencia del paso inductivo (J_3)	X		X				X	
Identificar cuando es aplicable la inducción matemática (J_4)							X	
Identificar la proposición a demostrar (J_5)	X							
Entender la relación entre el paso base y el paso inductivo (J_6)	X	X					X	

Durante el proceso de aprendizaje de Jesús en esta implementación, su aprendizaje que se vio beneficiado por la resolución de problemas en la unidad de enseñanza, lo que le permitió comprender el PIM. En el primer núcleo de la unidad, se identificaron todas las dificultades que tenía al concebir la demostración como un proceso mecánico en tres partes separadas, tal y como Crespo (2016) señala. Sin embargo, una de las fortalezas de Jesús fue su habilidad para asociar el proceso de contar unidades con elementos del conjunto de los números naturales, lo que le permitió abordar la demostración de su conjetura desde el PIM.

En el primer problema del núcleo 1, se observó que Jesús desconocía algunos términos clave, como recurrencia, patrón de recurrencia y conjetura, por lo que necesitó ayuda para entender su significado y cómo utilizarlos en la demostración. En las discusiones se aclaraban sus errores algebraicos y sus concepciones erróneas sobre la importancia del paso base y la estructura del PIM.

En el segundo problema del núcleo 1, se pudo observar que la discusión del problema anterior fue útil para que Jesús comprendiera la importancia del patrón de recurrencia en la demostración. Además, logró justificar los pasos de su demostración basándose en la estructura del PIM y utilizando el patrón de recurrencia y los registros calculados en la primera etapa. Este resultado muestra que el enfoque de la unidad de enseñanza cumple con su objetivo.

En los núcleos 2 y 3, Jesús presentó dificultades al escribir sus conjeturas en notación matemática, pero se pudo notar que su razonamiento era deductivo. Durante la fase de discusión se trabajó en la corrección de algunos términos, como la escritura de una sucesión o el símbolo para todo (∀). Los problemas del núcleo 3 permitieron a Jesús transformar los datos del juego en proposiciones escritas algebraicamente, lo que generó la necesidad de demostrar sus conjeturas.

En el problema 2 del núcleo 4, Jesús logró razonar deductivamente y comprender el camino que debía recorrer para construir la demostración utilizando el PIM. Sin embargo, presentó dificultades de tipo algebraico al escribir el paso inductivo. En la etapa de discusión, Jesús mencionó que no logró extraer el factor de divisibilidad de su conjetura (*demostrar que el término* $a_n = n(n+1)(n+2)$ *es divisible por 2*), por lo que decidió abandonar ese proceso de demostración y utilizar otro método de demostración, en este caso el algoritmo de la división.

Basados los resultados de la *tabla 27* y en lo que se define como significado de Wenger (1998), se pudo observar que Jesús utilizaba un razonamiento inductivo para plantear sus conjeturas, pero una vez definidas estas conjeturas de forma algebraica, resultaba más sencillo construir una demostración deductiva, pero aún desconoce los elementos en la demostración, en consecuencia, la unidad de enseñanza no propició construcción de significado del PIM.

Tabla 27

Tabla de dificultades para David

Dificultades de aprendizaje del principio de inducción matemática	**Núcleo 1**		**Núcleo 2**		**Núcleo 3**	**Núcleo 4**		**Núcleo 5**		
	P1	P2	P1	P2	No participó	P1	P4	P1	P2	P3
Errores numéricos y algebraicos (J_1)	X	X					X	X		
Argumentar la demostración del paso base (J_2)	X								X	X
Identificar la esencia del paso inductivo (J_3)	X	X		X						
Identificar cuando es aplicable la inducción matemática (J_4)						X	X			
Identificar la proposición a demostrar (J_5)	X			X			X			
Entender la relación entre el paso base y el paso inductivo (J_6)	X	X	X	X						

Desde el inicio de la implementación de la unidad, David mostró un acercamiento al razonamiento deductivo, buscaba métodos de demostración para justificar los ítems de los problemas, cuestionaba el planteamiento de los problemas y las conjeturas de sus compañeros usando contraejemplos. Sin embargo, los problemas con previo planteamiento de conjeturas fueron novedosos para él, lo cual implicó más tiempo para abordarlos por completo. David asoció el PIM desde el primer problema como método de demostración principal para la etapa de demostración, presentó fortalezas en la ejecución de los problemas para extraer información que le sea útil posteriormente; en la etapa de discusión formulaba ideas a sus compañeros para esclarecer la conjetura o cuestionaba algunos pasos de sus compañeros para plantear la conjetura.

En el problema 1 del núcleo 1, presentó fortalezas para el planteamiento de la conjetura, ya que comprendía rápidamente el objetivo del problema, pero presentó dificultades en la notación algebraica definida para demostrar usando el PIM; luego, en el problema 2 no presentó las dificultades, esto se debe a su vez a las discusiones promovidas, pues las preguntas realizadas generaron un cambio en el tipo de razonamiento usar en el planteamiento de conjeturas.

En el núcleo 2, David requirió de mucho tiempo para avanzar en el orden de los problemas pues empleaba la solución en cálculos de muchos casos que corroboraron su conjetura; esto, aunque fue la una idea importante en la discusión de los problemas, también fue un foco de dificultades al momento de demostrar, puesto que describía al paso base del PIM como un paso de verificación de un cálculo o una regla. Esta dificultad se presentó hasta el núcleo 5, en donde los problemas están enfocados a mitigarla visibilizando el uso del paso base en el paso inductivo.

En el núcleo 4 usó herramientas aprendidas anteriormente para plantear conjeturas, pero estas fueron a su vez un obstáculo, ya que la metodología de estos problemas son diferentes y el objetivo de los mismo también, requirió intervenir al investigador realizando preguntas que orientaran al David al planteamiento de conjeturas. Dichas preguntas se enfocaron en leer el enunciado del problema y en recurrir al uso de patrones entre los términos de las sucesiones.

Basados los resultados de la *tabla 27* y en lo que se define como significado de Wenger (1998), David presentó construcción del significado del PIM por medio de la implementación de la Unidad de enseñanza, esto se debe a su vez porque ya el estudiante pensaba deductivamente, en la mayoría de los problemas se centró en realizar un procedimiento lógico basado en reglas teóricas o propiedades por lo que, para estos problemas resultaba más difícil plantear la conjetura que construir la demostración.

7. Análisis retrospectivo de la Unidad de Enseñanza

La unidad de enseñanza está conformada por cinco núcleos conceptuales que representan diferentes tipos de problemas en los que se puede usar el PIM, cada problema contiene una serie de actividades que el estudiante debe recorrer. De modo que, para la evaluación de la unidad de enseñanza se analizaron dichas actividades, se estudiaron las ventajas o desventajas que se presentaron al incluir los problemas en cada núcleo, por último, se analizaron las dificultades identificadas en el proceso de planteamiento de conjeturas y en el desarrollo de la argumentación en la demostración por el PIM. En ese sentido, se analiza la secuencia de los núcleos, la metodología de los problemas, los alcances y aportes de la unidad de enseñanza, las correcciones a la unidad y la formulación de otros problemas. Cabe resaltar que en este análisis se tiene en cuenta el trabajo realizado por los 3 estudiantes (Gabriela, David y Jesús) quienes resolvieron los problemas y los siguientes subapartados son el análisis de la unidad de enseñanza.

Secuencia de los núcleos: La unidad de enseñanza está estructurada por 5 núcleos conceptuales (*núcleo 1: progresiones, núcleo 2: Recursividades, núcleo 3: situaciones hipotéticas, núcleo 4: divisibilidad, núcleo 5: Teoremas*), debido a que cada uno de ellos se enfoca en un contexto distinto donde es necesario realizar demostraciones utilizando el PIM. Los núcleos conceptuales están organizados donde el grado de dificultad y la necesidad de preconceptos aumenten. Teniendo en cuenta la asignatura o semestre académico de los estudiantes (se hace referencia a estudiantes universitarios), se pueden implementar los núcleos que estén relacionados con el plan de la asignatura; por ejemplo, la asignatura Teoría de números brindada en la Universidad Industrial de Santander, todos los núcleos son aplicables, en un curso de fundamentos de matemáticas enfocado en la enseñanza de los métodos de demostración puede implementar los que el profesor delibere necesarios para propiciar la construcción del significado del PIM.

En Cada núcleo, el grado de dificultad aumenta conforme se desarrollan problemas. El último problema se llama *el problema retador,* puede resultar más difícil o puede completar el aprendizaje del PIM en el tipo de problemas. Debido a que el PIM es un método de demostración, la unidad de enseñanza no necesariamente tiene una secuencia unidireccional, los núcleos representan el uso en el que es aplicable el PIM.

Metodología del problema: Los problemas de la unidad de enseñanza se diseñaron con base en los dos momentos que definen el constructo de unidad o ruptura cognitiva de un teorema planteado por Boero et al, (1996). La primera fase del problema consiste en la producción de conjeturas, donde el estudiante elabora su enunciado por medio de una previa exploración de ejemplos, casos particulares o ejercicios análogos; la segunda fase está conformada por la demostración de conjeturas, donde el estudiante relaciona por medio de una cadena lógica, los argumentos producidos en la primera fase o nuevos argumentos producto de la generalización de un patrón y de sus concepciones sobre la estructura del PIM.

Lo anterior fundamentó las bases para el diseño de la unidad de enseñanza a partir de la ruptura cognitiva, elemento que hace parte del objetivo del presente estudio.

Los incisos propuestos en los problemas son similares, están basados en la hipótesis de Mariotti (2006) y su objetivo es generalizar patrones, por tanto, se buscaba que la producción de conjeturas se centrara en estudiar los primeros casos del enunciado, identificar regularidades entre ellos y generalizarlas.

Alcances de la unidad de enseñanza: el tema de inducción matemática no se limita a una asignatura o un tipo de problemas, bajo el enfoque de generar la ruptura cognitiva Mariotti (2006), el enfoque de los problemas puede usarse en otras áreas de matemáticas, por ejemplo, Trigonometría (Fiallo, 2011), Cálculo (López, 2017) o Cursos de refuerzo en matemáticas (Gonzáles, 2022). Será un reto plantear problemas bajo el enfoque la unidad de enseñanza pues, basados en los resultados del análisis de la implementación, poco se ha promovido el desarrollo de planteamiento de conjeturas en anteriores cursos de matemáticas.

Aportes de esta unidad: Con el fin de propiciar el aprendizaje del método PIM y según los resultados obtenidos en el análisis, se sugiere dos tareas: (1) explorar los datos dados en el enunciado del problema, para poder definir el patrón de recurrencia, pues esto facilita el desarrollo del paso inductivo; (2) antes de realizar el paso inductivo para un caso genérico, es importante utilizarlo para un caso particular ya que los cálculos o los pasos lógicos puedan visibilizar el proceso de la demostración.

El enfoque de los problemas fue novedoso para los estudiantes al momento de plantear conjeturas, comprender que lo aprendido en un problema anterior podría extenderse a problemas de otros núcleos y a relacionar el uso del PIM en diferentes temas en matemáticas. La etapa de exploración de conjeturas admite el uso de preconceptos que sirvieron para generar inquietud sobre la necesidad de aprender nuevos conceptos y detectar avances o dificultades en el aprendizaje.

Cabe resaltar que la unidad de enseñanza promueve el uso de juegos para desarrollar generalizaciones de patrones que sirven como herramienta en la producción de conjeturas y la construcción de la demostración; pues el Núcleo 3 se trabajó en juego del salto de la rana, las torres de Hanói, el juego de los billetes.

Correcciones a los núcleos: Una corrección general de la unidad es la escritura de los ítems de los problemas, pues, durante el transcurso de la implementación, en la fase *explorando conjeturas*, hubo confusiones sobre el inciso que solicitaba verificar el patrón de recurrencia en la conjetura planteada por los estudiantes, por ejemplo, *¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior?* El objetivo del inciso es validar que el patrón de recurrencia esté bien definido. Este ítem se puede omitir ya que no aporta a la construcción de la demostración y genera confusiones en la implementación.

Grieser (2018) sugiere que en la producción de conjeturas se usen técnicas de recursión para encontrar relaciones de recurrencia (*Dirigirse a la sección 4.3.2*), de modo que, en el diseño de los núcleos conceptuales y en su implementación se definió Patrón de Recurrencia (PR) como: *Una ecuación que expresa cualquiera sucesión* a_n *en términos de la diferencia entre* a_n *y* a_{n-1}, se convierte así en un caso particular de Relación de recurrencia que Grieser (2018) define como: *"una ecuación que expresa cualquier* a_n *en términos de* $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1$*".* Estas definiciones fueron utilizadas en la implementación, los estudiantes identificaron la importancia del PR en la demostración del paso inductivo. Se sugiere para próximas implementaciones, definir el PR en la primera implementación y escribirlo en su hoja de trabajo. Se sugiere a menudo realizar intervenciones recordando su definición, con base en el análisis de resultados, se tiene que estas intervenciones son apropiadas para mitigar dificultades al realizar una demostración por el PIM.

Basados en las respuestas de los estudiantes en la implementación del núcleo 5, algunos ítems del problema 2 y 3 necesitan reescribirse, el objetivo de los problemas es identificar el error en el enunciado, el estudiante debe identificar el error y replantear la conjetura y después escribir la demostración, pero el estudiante tiende a confundir el objetivo del problema cuando abordan los ítems b) y c) del planteamiento de conjeturas.

Formulación de nuevos problemas a partir de otros ya definidos: según la metodología del problema y el análisis de los resultados obtenidos en la implementación, con el objetivo de fomentar estos procesos de razonamientos y demostración, se definen otros problemas que pueden usarse en una nueva implementación o en la práctica en clase de matemáticas. Estos problemas fueron extraídos y adaptados para fines del presente estudio de los libros de texto: *Exploring Mathematics: Problem-Solving and Proof.* Grieser, D. (2018).

Problema 1: Defina en términos n, la sucesión $a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, si se conoce que $a_1 = 1$ y que, para todo natural $n \geq 2$, $a_n = na_{n-1}$.
a) Plantee una conjetura para a_n y demuéstrela.

Problema 2: Considere la función proposicional $p(n)$: $n^2 + n + 17$ es un número primo.
a) Demuestre que $p(n)$ es verdadera para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
b) ¿Es $p(n)$ verdadero para todo número natural n?

Problema 3: Considere la función proposicional $p(n)$: $n^2 + 5n + 1$ es par.
a) Demuestre que si $p(n)$ es verdadera, entonces $p(n+1)$ es verdadera para todo n natural y saque conclusiones.
b) ¿Para qué valores de n es $p(n)$ realmente cierto?

Según lo mencionado anteriormente, la unidad de enseñanza aporta al aprendizaje del PIM y a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, pero se necesita realizar nuevas implementaciones ya que es necesario reducir los incisos de los problemas propuestos, en algunos casos se vuelven repetitivos y aumentan el tiempo para desarrollar la demostración.

8. Conclusiones

Teniendo en cuenta la fundamentación teórica, metodológica y el análisis de los datos obtenidos en la implementación de la unidad de enseñanza, en este capítulo se presentan aspectos que permiten propiciar la construcción de significado del PIM y se consolidaron a partir del diseño, implementación y análisis retrospectivo de la unidad de enseñanza.

Las conclusiones están organizadas en tres apartados, en la primera sección responde la pregunta de investigación ¿Cómo propiciar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática a partir de la ruptura cognitiva entre, el proceso de argumentación para el planteamiento de una conjetura y el proceso de argumentación para la construcción de una demostración?, en la segunda sección se exponen unas reflexiones generales del trabajo de investigación, entre ellas validar la hipótesis de investigación; y en la tercera sección, se menciona futuras investigaciones que pueden emerger de la problemática y el análisis de resultados.

8.1. Cómo propiciar la construcción de significado del Principio de Inducción Matemática

En este apartado se presentan aspectos que orientan a responder la pregunta de investigación: (1) El orden por el cual se debe transitar para propiciar la construcción de significado del PIM, (2) Las características o el tipo de problemas que permiten propiciar la construcción de significado del PIM, y (3) Observaciones sobre la implementación del tipo de problemas de los núcleos conceptuales.

El orden de la unidad de enseñanza se divide en diferentes temas en el que se aplica el PIM. A través del análisis retrospectivo de la implementación, se ha determinado que para propiciar la construcción de significado del PIM al trabajar con el tipo de problemas de la unidad de enseñanza, es necesario que el estudiante resuelva problemas siguiendo el siguiente orden:

1. Generalizar una expresión algebraica que represente todos los casos a partir de una lista de datos o casos particulares.

2. Generalizar una expresión algebraica que represente todos los casos a partir del descubrimiento del patrón de recurrencia, entendido como la diferencia entre cualquier par de términos de una sucesión.

3. Generalizar una expresión algebraica que represente todos los casos a partir de datos calculados mediante una herramienta o soporte que permita extraerlos o confirmarlos.

4. Analizar las propiedades de una conjetura y crear nuevas conjeturas a partir de los datos o del cambio de condiciones.

Se ha observado que los estudiantes lograron mejorar sus demostraciones a medida que exploraban regularidades, definiciones y teoremas, lo cual impulsó su actividad argumentativa y enriqueció la producción de significado, según la conceptualización propuesta por Wenger (1998) en el capítulo de aspectos teóricos y conceptuales. Además, los resultados de las *Tablas 25, 26 y 27*, que identifican las dificultades encontradas en el PIM, confirman que el enfoque de enseñanza implementado en esta unidad permitió mitigar dichas dificultades y, en consecuencia, fomentar la construcción de significado del PIM. El proceso seguido por los estudiantes, descrito anteriormente, ha demostrado ser efectivo en este contexto de estudio.

Además, los problemas de todos los núcleos de la unidad de enseñanza involucraron cantidades numerables, ya que uno de los procesos que realiza el estudiante es contar. Por lo tanto, las conjeturas planteadas por los estudiantes se definieron en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$). Así mismo, al realizar una breve búsqueda sobre el origen del PIM (*ver sección 3.2*) y al definir el PIM como un método de demostración (*ver sección 4.3.1*), se descubrió que las demostraciones que involucran el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) están asociadas al uso del PIM. Por esta razón, es frecuente que los estudiantes utilicen el PIM en este tipo de problemas de la unidad de enseñanza, ya que incitan a pensar y definir patrones de recurrencia en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$). Esta relación entre la unidad de enseñanza y el PIM se evidenció en el análisis del proceso de argumentación de los estudiantes (*Ver capítulo 6, más atrás*). Esto demuestra cómo, en términos de Pedemonte (2008), es posible generar una ruptura estructural en estos problemas.

El segundo aspecto se centra en el tipo de problemas de la unidad de enseñanza. Estos se diseñaron de modo que en las dos primeras etapas del problema (*Explorando conjeturas y Discusión de conjeturas obtenidas*), el estudiante explore primeros casos particulares del enunciado, encuentre regularidades y generalice patrones de recurrencia; este primer momento permite plantear y discutir conjeturas basados en un proceso de argumentación inductivo, como lo menciona Pedemonte (2002); en la tercer y cuarta etapa (*Demostrando y Discusión de las demostraciones*) de los problemas, se requiere demostrar la conjetura planteada en las dos primeras etapas. Este enfoque destaca cómo la unidad de enseñanza guía al estudiante para emplear un proceso de argumentación basado en razonamientos lógicos o teoremas matemáticos.

En el núcleo 1 los estudiantes se enfrentaron por primera vez a problemas donde no es explícita la conjetura y la demostración de la conjetura se centró en validar que la sucesión está bien definida para todos casos, por tanto, el tipo de problemas propició que el estudiante aprenda que el PIM está asociado al conjunto de los naturales e identifique donde se explicita la implicación del paso inductivo.

En el núcleo 2 ayudó al estudiante a entender que, el PIM está estructurado en dos pasos que no están desligados y por tanto se debe tener presente el paso base en el paso inductivo, esto identificó al momento de concluir las demostraciones por el PIM. El diseño de encontrar las representaciones algebraicas de una sucesión recursiva es un tipo de problema poco usado en el aula de clase, esto puede favorecer el proceso de identificar patrones, cambiar de representación algebraica a recursiva.

En el núcleo 3 el tipo de problemas basado en un juego favoreció el proceso de generalización para que los estudiantes plantearan sus propias conjeturas proceso que transformaron reglas teóricas en la construcción de la demostración, así, el papel del juego se situó solo en una herramienta para corroborar y el PIM en el soporte para validar la conjetura. Todos los problemas del núcleo 3 cumplieron lo mencionado y por tanto favorecieron la elección de la hipótesis de inducción y en qué momento de la demostración se usa.

En el núcleo 4 el planteamiento de los problemas no propició la construcción de significado del PIM, se profundizará más adelante.

En el núcleo 5 este tipo de problemas favoreció al estudiante a comprender que se debe tener en cuenta las condiciones y resultados demostrados en el paso base en la demostración del paso inductivo del PIM. Además, permitió generar el planteamiento de conjeturas a partir de reglas matemáticas ya validadas.

El tercer aspecto se centró en mencionar algunos resultados del análisis retrospectivo de la unidad en miras de corregir y mejorarla. Como se mencionó en el capítulo seis, hubo dificultades por parte de los estudiantes en la implementación del núcleo 4, al no visibilizar el objetivo del problema. Este hecho no permitió que los estudiantes plantearan sin ayudas sus propias conjeturas, fue necesario una intervención que tampoco favoreció la construcción de significado del PIM, dado que los estudiantes preferían otro método de demostración que consideraron se adaptó mejor al tema matemático de los problemas, se sugiere dos cambios para posteriores implementaciones: (1) retirar el núcleo por otro tema en matemáticas en el que es aplicable el PIM como lo son, el teorema del binomio, combinatorias y permutaciones, (2) cambiar el enunciado de los incisos de la etapa de plantear conjeturas de la siguiente manera:

1) Explorando conjeturas

a) Describa los primero diez términos de la sucesión definida verbalmente y <u>deduzca propiedades o características con relación a divisibilidad</u>. **Justifique su respuesta.**

b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos, ¿el patrón de recurrencia identificado se mantiene en cualquier término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

Este cambio, debe ir en conjunto de la intervención "*No se busca definir algebraicamente la sucesión, esto lo brinda el enunciado verbalmente*" e intervenir con contra preguntas como refutaciones potenciales; por ejemplo, *¿Esta sucesión no está definida en el enunciado?* Cuando el estudiante defina que su conjetura es la representación algebraica de la sucesión.

Por otro lado, para el diseño de otros conjuntos de problemas que permitan formular conjeturas y construir demostraciones. Deben seleccionarse o formularse cuidadosamente, teniendo en cuenta la dificultad, la variedad de formas de plantear el problema y su pertinencia en relación con el objetivo de la unidad de enseñanza, estos aspectos son los siguientes:

- ✓ Un diseño de problemas donde no se explicite la proposición a demostrar si no que, en el desarrollo permita plantear conjeturas y su respectiva demostración; este enfoque genera que el estudiante plantee sus propios argumentos como producto de la exploración de los datos extraídos del enunciado.
- ✓ Brindar un tiempo para que el estudiante explore por sí sólo los datos del enunciado, esto permite que plantee conjeturas y tenga la necesidad de convencerse a partir de una demostración.

- ✓ Promover la generalización de un patrón de recurrencia y entender su importancia en la demostración.
- ✓ Realizar intervenciones que permitan al estudiante entender que el PIM es una cadena de implicaciones lógicas.

Una recomendación para favorecer la construcción de significado del PIM mediante la aplicación de la unidad de enseñanza es capacitar a los profesores para utilizar las refutaciones potenciales como herramienta didáctica. Para ello, resulta útil estudiar el Modelo de Pedemonte, el cual brinda herramientas claras sobre cómo realizar intervenciones que permitan visibilizar la actividad argumentativa de los estudiantes y ayudarles a comprender el PIM. En particular, el Modelo de Pedemonte permite plantear preguntas que permiten al estudiante reconocer sus falencias y avanzar en la construcción de significado del PIM.

Con base en los tres aspectos explicados anteriormente, se tiene que la unidad de enseñanza induce a que se produzca la ruptura cognitiva entre el proceso de argumentación para el planteamiento de una conjetura y la construcción de una demostración por inducción matemática.

A continuación, se presentan el resumen de resultados de los problemas analizados en el capítulo 6, para determinar si se produjo unidad o ruptura cognitiva.

Con base en el resumen del análisis de resultados (*Ver **Tabla 24** en* Resumen del análisis de los núcleos conceptuales), en la siguiente tabla se presenta las veces que presentó la unidad o ruptura cognitiva en el sistema de referencia y en la estructura.

Tabla 28

Resultados de las categorías emergentes

Constructo de Unidad o Ruptura cognitiva	Cantidad
Ruptura del sistema de referencia – Ruptura estructural	7
Unidad del sistema de referencia – Ruptura estructural	1
Ruptura del sistema de referencia – Unidad estructural	1
Unidad del sistema de referencia – Unidad estructural	1

Las primeras tres categorías (*Ruptura del sistema de referencia – Ruptura estructural, Unidad del sistema de referencia – Ruptura estructural y Ruptura del sistema de referencia – Unidad estructural*) son rupturas cognitivas puesto que las generalizaciones que realizaron los estudiantes corresponden al proceso de generalización de un patrón de recurrencia, logrando transformar los operadores y controles perceptivos de los primeros casos, en propiedades matemáticas y controles teóricos en la construcción de la demostración (uso del PIM). Utilizaron argumentos basados en la estructura del PIM, y transformaban los operadores de la conjetura (registros de casos particulares, regularidades, patrones) en datos o nuevos operadores en la construcción de la demostración. La categoría *Unidad del sistema de referencia – Ruptura estructural* ya está definida en Fiallo (2011) como *unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva falsa,* salvo que en este estudio el planteamiento de la conjetura por medio de analogías (Pólya, 1966) con relaciones, procesos y procedimientos realizados en actividades anteriores, sin ningún proceso de exploración, se garantizó la construcción de una demostración deductiva, caracterizada por el cambio de una forma de razonamiento inductivo a una forma de razonamiento deductivo (Fiallo, 2011, p. 263).

La categoría *Unidad del sistema de referencia – Unidad estructural* es una unidad cognitiva, porque se mantiene un proceso de razonamiento deductivo en el planteamiento de la conjetura y en la demostración, el cual se basó en las regularidades del problema, propiedades que cumplen todos los datos del enunciado y operaciones mentales que apuntan a validar la conjetura. En este caso la conjetura fue producto de un proceso de exploración que conllevó al planteamiento de argumentos deductivos que facilitaron la demostración usando el PIM. En Fiallo (2011), se declara esta categoría como Unidad cognitiva deductiva.

8.2. Reflexiones generales del estudio

En esta sección, se expondrán algunas reflexiones relevantes en torno al estudio realizado. En primer lugar, se discutirá la utilidad del marco teórico/conceptual en la elaboración de la unidad de enseñanza, así como su impacto en el análisis de los resultados obtenidos. Asimismo, se abordará el alcance de la unidad de enseñanza y su relación con la hipótesis de investigación que se planteó en el estudio. También se definirán los diferentes tipos de unidad o ruptura cognitiva reportados por la investigación y las rupturas cognitivas identificadas en el análisis de resultados en conjunto con su importancia en el desarrollo de la investigación:

- Aunque este estudio es de diseño, los elementos teóricos utilizados tuvieron un papel importante en el análisis de los datos. El modelo de Pedemonte fue útil para identificar los elementos clave de la argumentación y esquematizar los datos obtenidos en las sesiones. En particular, el modelo permitió examinar si los soportes, operadores de la concepción o representación cambiaban o se mantenían en el proceso de pasar de la conjetura a la demostración. Se encontró que, en la mayoría de los problemas analizados, las refutaciones potenciales (es decir, preguntas o afirmaciones que desafían la conjetura del estudiante) resultaron útiles para provocar una ruptura cognitiva que permitió visibilizar otros elementos del modelo, especialmente las estructuras de control.

Junto con las dificultades identificadas en investigaciones previas, el modelo permitió describir las dificultades específicas que los estudiantes enfrentan al demostrar a través del PIM, las cuales se presentan en los operadores o permiso de inferir y en el enunciado/conclusión.

- Aunque la elección del área de matemáticas se basó en la variedad de situaciones en las que se puede aplicar el PIM, también se consideró el nivel de conocimiento previo que los estudiantes poseen para abordar problemas de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones. En muchos casos, los estudiantes pueden asociar algunos datos del problema y aplicar reglas matemáticas que ya han sido validadas en clase, lo que facilita la formulación de conjeturas y la construcción de demostraciones.

Una limitación de la unidad de enseñanza puede estar relacionada con el tiempo que se emplea para resolver un problema. Sin embargo, es importante considerar que los estudiantes solo se enfrentan al planteamiento de conjeturas, un proceso que puede resultar más difícil que la demostración en sí misma. Esta metodología de resolución de problemas exige que el profesor dé un nuevo significado a su labor en el aula, lo cual incluye el reconocimiento de los esfuerzos de los estudiantes como oportunidades para aprender. Este enfoque fue evidente en el análisis de los últimos núcleos, donde los estudiantes se esforzaron por utilizar más que solo ejemplos para validar sus conjeturas, lo que representa una oportunidad para que el profesor pueda aprovechar al máximo el potencial de aprendizaje de sus estudiantes. Un ejemplo de esto se evidenció en el núcleo 4, donde Jesús, al no poder avanzar con un método de demostración, optó por abordar el problema desde otra perspectiva.

Durante los núcleos, se enfatiza la importancia de la socialización como estrategia clave de la clase. Sin embargo, es importante tener en cuenta cómo el profesor construye este espacio, en particular, las preguntas que formula para ayudar a los estudiantes a realizar conexiones entre los conceptos clave del núcleo y de la unidad en sí misma. En ocasiones, este espacio puede convertirse en un lugar para mostrar lo que se ha hecho sin un sentido matemático que oriente la discusión. Por lo tanto, el profesor debe estar atento a cómo se desarrolla la socialización y asegurarse de que se enfoque en el proceso de argumentación del problema en cuestión.

- *Confrontación de la Hipótesis de investigación:* tras analizar los resultados obtenidos en la aplicación de problemas diseñados para promover el proceso inductivo de generalización de patrones en términos o procesos para obtener un término y su siguiente, se observó que los estudiantes lograron generalizar reglas que luego utilizaron en el paso inductivo del PIM, principalmente a través del patrón de recurrencia y, en algunos casos, mediante la identificación de una recurrencia de términos. Además, cuando los problemas no permitían validar una definición algebraica o una propiedad de los términos de la sucesión, el proceso inductivo de estudiar una demostración o argumento falso resultó útil para replantear la conjetura y facilitar la escritura de la demostración, como en el núcleo 5. Estos hallazgos respaldan la hipótesis de investigación de Mariotti (2006) y sugieren la necesidad de explorar esta estrategia en otros contextos o niveles educativos.

- *Tipos de Ruptura cognitiva identificadas en el presente estudio.*

Fiallo (2011) plantea cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados para el aprendizaje de la demostración, las categorías son las siguientes:

- *Unidad cognitiva empírica,* la cual no favorece la construcción de demostraciones deductivas, se presenta cuando hay continuidad del sistema de referencia y continuidad estructural.
- *Ruptura referencial – continuidad estructural inductiva,* si se logra la ruptura del sistema de referencia, sin la ruptura estructural, tampoco se llega a la construcción de demostraciones deductivas.
- *Ruptura referencial – argumentación inductiva – demostración genérica intelectual* si la ruptura cognitiva es causada por la ruptura del sistema de referencia y se construye una demostración inductiva, hay más posibilidades de una ruptura estructural que conlleve a la construcción de una demostración deductiva, puesto que las generalizaciones que hacen los estudiantes corresponden a una generalización del proceso, en donde se logra transformar los operadores y controles perceptivos en propiedades matemáticas y controles teóricos.
- *Unidad referencial – argumentación inductiva – demostración deductiva falsa,* si la conjetura se plantea por analogía (Pólya, 1966) con relaciones, procesos y procedimientos realizados en actividades anteriores, sin ningún proceso de exploración, puede que exista unidad del sistema de referencia y se logre la ruptura cognitiva, caracterizada por el cambio de una forma de razonamiento inductivo a una forma de razonamiento deductivo.
- *Unidad cognitiva deductiva,* la unidad cognitiva favorece la construcción de demostraciones deductivas. Los pasos inductivos que realizan los estudiantes, los utilizan para comprobar la veracidad de la identidad planteada, pero la demostración final se basa en propiedades generales.

(Fiallo, 2011, p. 262)

Como contribución a estas categorías, se identificaron las siguientes rupturas cognitivas, las cuales agrupan los diferentes progresos o dificultades detectadas. Con esta categorización se plantean aportes al estudio de la unidad cognitiva y se asocian las dificultades para el aprendizaje de la demostración que se describieron en el capítulo 6, estas se resumen a continuación:

➢ La ruptura cognitiva causada por “*Ruptura del sistema de referencia – Ruptura estructural”* conlleva a la construcción de una demostración deductiva, en este caso usando el principio de inducción Matemática (PIM), se produce cuando los estudiantes generalizan patrones o procesos en su planteamiento de una conjetura, transformando los operadores y controles perceptivos en propiedades matemáticas y controles teóricos. Los argumentos se basan en propiedades matemáticas generales o particulares que se recuerdan de los cálculos previos. En esta categoría, los controles suelen ser teóricos y esto favorece el uso de un razonamiento deductivo en la construcción de demostraciones.

En cuanto al aporte al campo de la educación matemática, esta categoría contribuye a los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de demostraciones deductivas en matemáticas y destaca la importancia de los controles teóricos en este proceso. Asimismo, proporciona una herramienta útil para la identificación y tratamiento de las dificultades que enfrentan los estudiantes al realizar esta tarea.

- La ruptura cognitiva causada por *Ruptura del sistema de referencia – Unidad estructural*

En un estudio Crespo (2016), se encontraron resultados en los que se indica que los estudiantes universitarios tienen dificultades para comprender la importancia de los axiomas en la construcción de demostraciones deductivas en matemáticas. De acuerdo con esto, la ruptura cognitiva descrita en este párrafo es causada por la ruptura del sistema de referencia y continuidad estructural, si utilizan axiomas, definiciones o teoremas que son suficientes para construir una demostración deductiva utilizando el proceso axiomático, en este caso, usando el PIM. No obstante, si los estudiantes no comprenden la importancia de los pasos que conforman el PIM, no pueden lograr la ruptura cognitiva. Las instrucciones del problema y la aplicación de refutaciones potenciales también pueden ayudar a inducir al estudiante a poner en duda sus argumentos, pero es necesario que tenga la convicción para declarar que sus argumentos son verdaderos o falsos.

En cuanto al aporte de la segunda categoría, se destaca la importancia de comprender de los axiomas en la construcción de demostraciones deductivas en matemáticas. Esto es importante porque los axiomas proporcionan las bases para la construcción de una demostración deductiva y, por lo tanto, es crucial que los estudiantes los comprendan y los utilicen correctamente.

En general, ambas categorías identificadas proporcionan información valiosa al campo de la educación matemática sobre los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de demostraciones deductivas en matemáticas y pueden ayudar a los educadores a identificar o intervenir ante las dificultades que enfrentan los estudiantes al demostrar.

8.3. Perspectiva de futuras investigaciones

Este estudio diseñó una unidad de enseñanza que permite al estudiante propiciar el aprendizaje del PIM en temas en los que el método es aplicable, y a su vez permite al profesor un diseño que puede adaptar a su clase de teoría de números. De esta manera, se presenta un primer acercamiento a la implementación de este tipo de problemas en el contexto de las demostraciones en matemáticas, que puede ser adaptado, y fortalecido con otras implementaciones u otros reportes de investigación a partir de futuras investigaciones.

Este estudio basado en un experimento de enseñanza implica que debe realizarse una constante comparación de resultados con la hipótesis de investigación, debido a limitaciones de tiempo, solo se llevó a cabo una implementación, por lo que el estudio abre el paso a que otra investigación retome los datos y reformule si es necesario el diseño o la hipótesis.

Este estudio también considera la posibilidad de que futuras investigaciones estudien los procesos de razonamiento y demostración utilizando el diseño de la unidad de enseñanza, así como otros tipos de problemas relacionados con la construcción de conjeturas y demostraciones en otros objetos matemáticos en el área de teoría de números. Es importante destacar que estos problemas promueven la autonomía del estudiante para construir sus propias conjeturas, una habilidad que a menudo se subestima en el aula de matemáticas.

9. Referencias Bibliográficas

Anton, Howard. (2010). *INTRODUCCION AL ALGEBRA LINEAL* (4 ed.). Limusa.

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory* (1.ª ed.). Springer, New York, NY. Springer, New York, NY. https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2236/10.1007/978-1-4757-5579-4

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.). *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, *séminaires 1994-1995* 219-244. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). Ck¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Ed), *Balises pour la didactique des mathématiques.* 75-106. Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Barwell, R. J., & Barbeau, E. A. (2017). Investigating students' understanding of mathematical induction: An interview study. Journal of Mathematical Behavior, 47, 120-131. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.003

Bryant, P., & Bieda, K. (2021). Revisiting mathematical induction: Teaching experiences and student conceptions. Journal for Research in Mathematics Education, 52(2), 143-178. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.52.2.0143

Burton, D. (2011). Elementary number theory. (Seventh ed). University of New Hampshire.

Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), 28, 243-252.

Cusi, A. y Malara, N. (2008). Improving awareness about the meaning of the principle of mathematical induction. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A.

Sepúlveda (Eds.). Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA (pp. 393-398). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, S., y Rahardi, R. (2020). Exploring Students' Thinking Process in Mathematical Proof of Abstract Algebra Based on Mason's Framework. Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 8(2), 871-884. DOI: http://dx.doi.org/10.17478/jegys.689809.

Fernández, C., Nieves, S. y Carballo, C. (2019). Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa. Mendive, 17(3), 393–408.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación: curso de Precálculo mediado por GeoGebra. Ediciones UIS. Bucaramanga, Colombia.

Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. Educational Studies in Mathematics, 96(2). 145-167. https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2236/10.1007/s10649-017-9755-6.

Fiallo, J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis Doctoral. Universitat de València, España.

García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. Journal of Mathematical Behavior, 46, 128–143.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Proceedings of the 22nd PME International Conference, 345 - 352.

Grieser, D. (2018). *Exploring Mathematics: Problem-Solving and Proof*. Springer. https://link-springer-com.bibliotecavirtual.uis.edu.co/book/10.1007/978-3-319-90321-7

Grossman S., Stanley I, Grossman S. Stanley I, Grossman, Stanley I, & Flores Godoy, José Job. (2012). ÁLGEBRA LINEAL (7 ed..). McGraw-Hill.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld et al (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 7*(3), 234 - 283. Providence, USA: American Mathematical Society.

Isaacs, R. & Sabogal S. (2009). *APROXIMACION AL ALGEBRA LINEAL APROXIMACION AL ALGEBRA LINEAL: UN ENFOQUE GEOMETRICO*. UIS.

Karacapilidis, N., & Souleles, G. (2018). Teaching mathematical induction through learning by teaching approach: A study on preservice teachers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(2), 196-210. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1376294

Landry, M. E., & Klosinski, K. S. (2020). On the effectiveness of using induction to teach proof in a discrete mathematics course. PRIMUS, 30(10), 1015-1032. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1797415

López, E. (2017). *Procesos de Argumentación y de Demostración de estudiantes en un curso de Precálculo.* Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the PME: Past, present and future (pp. 173–204). Rotterdam, the Netherlands: Sense.

Mejía-Ramos, J. P., Lew, K., de la Torre, J., y Weber, K. (2017). Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics. *Research in Mathematics Education, 19*(2), 130-146. DOI: 10.1080/14794802.2017.1325776

Ministerio de Educación Nacional (MEN). *Estándares Básicos de Matemáticas.* Colombia: M.E.N.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E., (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 075–088

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques.* Tesis doctoral. Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques, 25*(3), 313-348.

Pedemonte, Bettina. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM: The International Journal of Mathematics Education*. *40*(3). 385-400.

Pedemonte, B., y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 104–122.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the twenty-eighth conference of* *the international group for the Psychology of Mathematics education PME* (pp.113-120). Bergen, Norge: Bergen University College.

Rosen, K. (2005). Elementary number theory and its applications. (Fifth ed). Pearson/Addison Wesley

Rubiano, G. Gordillo, J. Jiménez, L. (2004). Teoría de números [Para principiantes]. Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(3), 145-166.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. Educational Studies in Mathematics, 83(3), 323-340. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9467-1

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 314-352. https://doi.org/10.2307/40539371

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: Classroom-based interventions in mathematics education. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45(3), 333-341. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0479-9

Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. The Journal of Mathematical Behavior, 43, 20-34. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.02.002

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education (pp. 315-351). Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. Educational Studies in Mathematics, 96(2), 119-127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Vacca, G. (1909). Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction. Bulletin of the American Mathematical Society, 16(2), 70-74. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1909-01860-9

Wenger, E. (1998). *Comminities of practice. Learning, meaming and identity*. Cambridge, Cambridge University.

Apéndice

Apendice A Unidad de Enseñanza

Núcleo 1: Progresiones

Problema 1

Considere en orden estrictamente creciente los siguientes enteros positivos $3, 7, 11, 15, \ldots$

Realice lo que se indica a continuación:

5) Explorando conjeturas
   f) ¿Cuál es el décimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   g) ¿Cuál es el centésimo término de la progresión? **Justifique su respuesta.**
   h) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo. **Justifique su respuesta.**
   i) ¿Cuál es el $n - ésimo$ término de la progresión? construya una conjetura sobre lo encontrado. **Justifique su respuesta.**
   j) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

6) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

7) Demostrando
   c) Una conjetura puede ser cierta en muchos casos particulares y sin embargo no ser verdadera en general. Es imposible analizar todos los casos particulares. ¿Cómo podemos saber, si la conjetura planteada es cierta para todo natural?

   d) Construya una demostración para cada conjetura planteada en 1) d), teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

8) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 2

1) Explorando conjeturas

Considere el problema anterior de la progresión de términos 3, 7, 11, 15, …

a) ¿Qué valores resultará de sumar uno, dos o tres primeros términos? **Justifique su respuesta.**
b) ¿Cuál es la suma de los primeros doce términos? **Justifique su respuesta.**
c) ¿Qué patrón de recurrencia identifica entre cada suma consecutiva? **Justifique su respuesta.**
d) ¿Usando la información y propiedades que identificó de los incisos anteriores, halle la suma de los n primeros números, donde $n \in \mathbb{N}$. **Justifique su respuesta.**

2) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y profesor, **escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

Construya una demostración para la conjetura planteada en 1) d).

4) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y profesor, **escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 3

Considere en orden creciente los siguientes números positivos $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$

Realice lo que se indica a continuación:

1) Explorando conjeturas
   a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo. **Justifique su respuesta.**
   d) ¿Cuál es el $n-ésimo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
   e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando
   a) Construya una demostración para la conjetura planteada en 1) d), teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.
4) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema Retador:

Considere en orden creciente los siguientes números positivos $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$

1) Explorando conjeturas
   a) ¿Qué valores resultará de sumar, uno, dos o tres primeros términos? **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Cuál es la suma de los primeros doce términos? **Justifique su respuesta.**
   c) ¿Qué patrón de recurrencia identifica entre cada suma consecutiva? **Justifique su respuesta.**
   d) ¿Usando la información y propiedades que identificó de los incisos anteriores, halle la suma de los n primeros números impares, donde $n \in \mathbb{N}$. **Justifique su respuesta.**
   e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados obtenidos con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

¿Cómo podemos saber, si la conjetura planteada es cierta en general para todo $n \in \mathbb{N}$? **Construya** una demostración para la conjetura planteada en **1) d)**, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

4) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados obtenidos con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Núcleo 2: Recursividades

Problema 1:

Hallar a_n, si se conoce que $a_0 = 1$ y que, para todo natural, $a_n = 2a_{n-1} + 3$

5) Explorando conjeturas

f) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

g) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

h) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**

i) ¿Cuál es la representación algebraica del $n - ésimo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

j) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

6) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

7) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

8) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 2:

Hallar a_n, si se conoce que $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ y que para todo natural $n \geq 2$,

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

5) Explorando conjeturas

a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**

d) ¿Cuál es la representación algebraica del $n - \acute{e}simo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

6) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

7) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

8) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema retador:

Hallar a_n, si se conoce que $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ y que para todo natural $n \geq 3$,

$$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$$

1) Explorando conjeturas

a) ¿Cuál es el décimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
b) ¿Cuál es el centésimo término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
c) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término. **Justifique su respuesta.**
d) ¿Cuál es la representación algebraica del $n-ésimo$ término de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
e) ¿El patrón de recurrencia del inciso c) cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

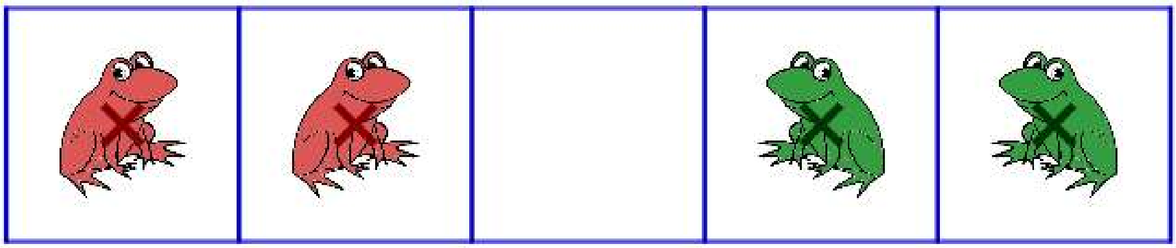
4) Discusión y comunicación de resultados

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Núcleo 3: Situaciones hipotéticas

Problema 1: El salto de la rana

El juego está conformado por dos grupos de $n\ ranas$ de distinto color, por ejemplo, como se presenta a continuación para grupos de 2 $ranas$:



El objetivo es intercambiar la posición que ocupan las ranas en sus posiciones. Las ranas verdes deben ocupar el lugar de las rojas y las rojas el lugar de las verdes. *Los movimientos de las ranas se efectuarán de acuerdo con las siguientes Reglas*:

- Una rana puede saltar a la posición adyacente si éste se encuentra vacío
- Una rana puede saltar por encima de otra de diferente color si inmediatamente detrás de ésta hay una posición vacía.
- En una posición no pueden estar dos ranas
- Las ranas no pueden retroceder

9) Explorando conjeturas

   a) Realice el juego para grupos de una, dos tres o cuatro ranas, describa cuantos movimientos se necesitan para finalizar el juego. **Justifique su respuesta.**
   b) Busque estrategias para finalizar el juego en el menor número de movimientos posibles ¿Qué regularidad se identifica sobre el menor número de movimientos? **Justifique su respuesta.**
   c) ¿Qué relación hay entre la cantidad de ranas de un grupo y el número de movimientos para finalizar el juego? **Justifique su respuesta.**
   d) ¿Qué relación hay entre los movimientos de un grupo de $n - ranas\ y$ $n + 1 - ranas$? **Justifique su respuesta.**

10) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

11) Demostrando
   a) Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

12) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 2: El juego de las torres de Hanoi

El juego está conformado por tres torres y una cantidad de n-discos de distinto tamaño. Inicialmente los discos están agrupados de forma decreciente en una de las torres, por ejemplo, como se muestra en la siguiente figura:

El juego consiste en pasar todos los discos de la torre ocupada, es decir, la torre que posee los discos, a una de las torres vacías en el mismo orden inicial, pero teniendo en cuenta las siguientes reglas de juego:

- Sólo se puede mover un disco cada vez.
- Un disco de mayor tamaño no puede descansar sobre uno más pequeño que él mismo.
- Sólo puedes desplazar el disco que se encuentre arriba en cada torre.

9) Explorando conjeturas
   f) Realiza varios intentos para distintas cantidades de discos y encuentra estrategias para finalizar el juego en el menor número de movimientos. **Justifique su respuesta.**
   g) Escribe el menor número de movimientos para partidas de dos, tres, cuatro, y cinco discos. **Justifique su respuesta.**
   h) Qué regularidad o patrón de recurrencia identifica en el proceso de los casos jugados del inciso anterior. **Justifique su respuesta.**
   i) ¿Qué patrón de recurrencia identifica entre el menor números de movimientos para dos, tres, cuatro o cinco discos y el número de discos respectivamente? **Justifique su respuesta.**
   j) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene para n-discos? **Justifique su respuesta.**

10) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

11) Demostrando

b) Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

12) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema retador: El problema de los billetes Colombianos

Colombia distribuye billetes "sencillos", dichos billetes son cinco mil (5000), dos mil (2000) y mil pesos (1000), el billete de mil pesos no se tendrá en cuenta puesto que ha sido reemplazada por la moneda de mil pesos. El problema consiste en descomponer una suma de dinero, múltiplo de mil pesos y mayor o igual a cinco mil pesos (5000), en billetes sencillos.

1) Explorando conjeturas
   a) Realice descomposiciones de varias sumas de dinero, estas pueden (o no) ser consecutivas y anote todas las posibilidades en las que se puede descomponer. **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Qué propiedades o características se identifica entre los casos realizados en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**
   c) Describa (si lo hay) un patrón de recurrencia o regularidad en las sumas de dinero elegidas en el inciso a), ¿Se mantiene para cualquier suma de dinero? **Justifique su respuesta.**
2) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando
   a) Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**
4) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Núcleo 4: Aritmética y divisibilidad

Problema 1:

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como el cubo del número n más el doble del número n.

13) Explorando conjeturas

k) Describa los primero diez términos de la sucesión definida y <u>experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos</u>. **Justifique su respuesta.**

l) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. **Justifique su respuesta.**

m) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n-\acute{e}simo$ de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

14) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

15) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

16) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 2

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como el producto de $n, n+1, n+2$, números naturales consecutivo.

13) **Explorando conjeturas**

a) Describa los primero diez términos de la sucesión definida y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. **Justifique su respuesta.**

b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. **Justifique su respuesta.**

c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n-ésimo$ de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

14) **Discusión de conjeturas obtenidas**

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

15) **Demostrando**

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

16) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 3

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como la suma entre las potencias de 3 de la forma (3^{3n+1}) y las potencias de 2 de la forma (2^{n+1})

1) Explorando conjeturas
   a) Describa los primero diez términos de la sucesión y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. **Justifique su respuesta.**
   b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. **Justifique su respuesta.**
   c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n - ésimo$ de la sucesión? **Justifique su respuesta.**

2) Discusión de conjeturas obtenidas

   Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) Demostrando

   Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

4) Discusión de las demostraciones

   Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema retador

Considere la sucesión a_n en orden creciente, donde los términos se definen como la suma entre las potencias de 4 de la forma (4^{n+1}) y las potencias de 5 de la forma (5^{2n-1})

1) **Explorando conjeturas**
   a) Describa los primero diez términos de la sucesión y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. **Justifique su respuesta.**
   b) Qué patrón de recurrencia o regularidad identifica en común de los primeros diez términos. **Justifique su respuesta.**
   c) ¿El patrón de recurrencia identificado se mantiene en el término $n - ésimo$ de la sucesión? **Justifique su respuesta.**
2) **Discusión de conjeturas obtenidas**

   Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

3) **Demostrando**

   Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente. **Justifique su respuesta.**

4) **Discusión de las demostraciones**

   Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Núcleo 5: Teoremas en teoría de números

Problema 1

Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ si $n \geq 3$, $a_1 = a_2 = 1$. Esta sucesión es conocida como **la sucesión de Fibonacci** y la aparición de la misma brota por doquier. Es decir, está en infinidad de ejemplos: tanto en las plantas, como en los animales, en la Física, en la Matemática, etc.

17) Explorando conjeturas

n) Escriba por lo menos los diez términos de la sucesión de Fibonacci y experimente con las propiedades o características que identifica en dichos términos. **Justifique su respuesta.**
o) ¿Cuáles términos de la sucesión de Fibonacci son pares? **Justifique su respuesta.**
p) ¿Cuáles términos de la sucesión de Fibonacci son múltiplos de 3? **Justifique su respuesta.**
q) Basados en lo realizado en a), b) y c) analice la sucesión de Fibonacci y plantee una conjetura sobre regularidades o propiedades de sus términos. **Justifique su respuesta.**

18) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

19) Demostrando

Construya una demostración para una conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

20) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema 2:

Un estudiante plantea una demostración a la siguiente conjetura:

$$\text{“}Para\ todo\ natural\ 2^n > n^2\text{”}$$

(Demostración por inducción matemática):

Sea $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} | 2^n > n^2\}$, se probará que $\mathrm{A} = \mathbb{N}$.

Paso base: $1 \in \mathrm{A}$, se tiene porque $2^1 > 1^2$.

Paso inductivo: supongamos que $k \in \mathrm{A}$. Es decir, $2^k > k^2, para\ alg$ún $k \in \mathbb{N}$. Se debe probar que $k + 1 \in \mathrm{A}$, esto es, $2^{k+1} > (k+1)^2$, $k + 1 \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis de inducción

$$2^k > k^2$$

$$2 * 2^k > 2 * k^2$$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$$

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

Así $k + 1 \in \mathrm{A}$. Por tanto, $2^n > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17) Explorando conjeturas

d) Analiza la demostración del estudiante y plantea qué procesos debe considerar, modificar o cambiar en la demostración. **Justifique su respuesta.**

e) Analiza los términos de la desigualdad que se está demostrando, verifica la veracidad de la proposición demostrada y deduzca conjeturas consecuentes. **Justifique su respuesta.**

f) ¿Qué procesos o regularidades se mantienen en las conjeturas planteadas? **Justifique su respuesta.**

18) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

19) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

20) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

Problema Retador:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ se cumple que en todo conjunto de n caballos todos los caballos son del mismo color.

Demostración: La demostración se hará por inducción. Es claro que, en un conjunto con un sólo caballo, todos los caballos de ese conjunto son del mismo color. Supongamos que la afirmación se cumple para k y lo mostraremos para $k + 1$. Sea A un conjunto de $k + 1$ caballos. Elija uno de ellos cualquiera y considere el conjunto B de k caballos que se obtiene sacando el caballo escogido. Por hipótesis inductiva, todos los caballos de B tienen el mismo color. Como esto es válido para cualquier caballo que escojamos, es claro que todos los caballos de A tienen el mismo color.

5) Explorando conjeturas
   a) Analiza la demostración del estudiante y plantea qué procesos debe considerar, modificar o cambiar en la demostración. **Justifique su respuesta.**
   b) Analiza los términos de la ecuación, verifica la veracidad de la conjetura y deduzca conjeturas consecuentes. **Justifique su respuesta.**
   c) ¿Qué procesos o regularidades se mantienen en las conjeturas planteadas? **Justifique su respuesta.**

6) Discusión de conjeturas obtenidas

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.

7) Demostrando

Construya una demostración para cada conjetura planteada, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

8) Discusión de las demostraciones

Discuta y comunique los resultados con sus compañeros y su profesor. **Escriba** sus conclusiones en el siguiente recuadro.