Análisis teórico de la ecuación **KdV** con coeficientes dependientes del tiempo

José Camilo Rueda Niño

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director

Gilberto Arenas Díaz

Doctor en Ciencias Matemáticas

Codirector

Gerardo Arturo Loaiza Motato

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el apoyo ecónomico y moral que tuvieron para conmigo durante el desarrollo de mi carrera. También agradezco a mi pareja y a mis amigos por las vivencias de estos inolvidables años de universidad.

Un reconocimiento y agradecimiento importante lo realizo a mi director de trabajo de grado Gilberto Arenas Díaz y a mi codirector Gerardo Arturo Loaiza Motato, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi proyecto.

Tabla de Contenido

Notación

Se presenta aquí la notación que va a ser usada a lo largo del presente trabajo.

- $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ medible} : \|f\|_p := (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty \right\}$
- $L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ medible} : \|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |f(x)| < \infty \right\}$
- Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p = 1,2$, se define

$$\mathscr{F}(f(\xi)) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{lím}_{|x|\to\infty} \left| x^\beta D^\alpha f(x) \right| = 0 \quad \text{para todo par de multi-índices } \alpha \text{ y } \beta \right\}$,
- $H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s f(x) = \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee (x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$
- $\mathscr{B}(Y,X)$ es el conjunto de todos los operadores lineales acotados de Y en $X; X, Y$ espacios de Banach con norma $\|\cdot\|_{Y,X}$ la cual se escribirá simplemente como $\|\cdot\|$. Si $X = Y$ se escribe $\mathscr{B}(X,X) = \mathscr{B}(X)$.
- $G(X,M,\beta)$ es la colección de todos los operadores A tales que $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$, el cual satisface $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$.

Resumen

Título: Análisis teórico de la ecuación **KdV** con coeficientes dependientes del tiempo *

Autor: José Camilo Rueda Niño **

Palabras Clave: Ecuaión Korteweg de Vries; Buena colocación local; Ecuación cuasi-lineal; Espacio de Sobolev; Problema de Cauchy.

Descripción: El presente proyecto de investigación se enmarca en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas no lineales y la teoría cuasilineal de Kato. Se considera una ecuación KdV unidimensional con coeficientes dependientes del tiempo y se demuestra, considerando condiciones generales sobre los coeficientes, la buena colocación local del problema de Cauchy. Adicionalmente, para este mismo problema, se logran probar tres leyes de conservación.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matematicas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas. Codirector: Gerardo Arturo Loaiza Motato, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Abstract

Title: Theoretical analysis for a KdV equation with time-dependent coefficients

Author: José Camilo Rueda Niño [**]

Keywords: Korteweg de Vries equation; Local well-posedness; Quasilinear Equation; Sobolev space; Cauchy problem.

Description: This paper is framed in the theory of nonlinear dispersive partial differential equations and Kato's quasilinear theory. Our aim is to analyze, from a theoretical standpoint, the local existence of solutions to the Cauchy problem associated with the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients.

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matematicas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas. Codirector: Gerardo Arturo Loaiza Motato, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Introducción

Desde mediados del siglo XIX ha surgido un enorme y creciente interés por parte de matemáticos y físicos por estudiar las soluciones más simples para un modelo dispersivo, dichas soluciones son conocidas hoy como ondas viajeras. Las ondas viajeras existen como consecuencia de un equilibrio entre los efectos dispersivos y los no lineales presentes en un sistema. Estas ondas viajan con una velocidad constante, sin ninguna evolución temporal en forma o tamaño, cuando el marco de referencia se mueve con la misma velocidad de la onda. Las investigaciones han demostrado que este tipo de soluciones especiales aparecen en diversos campos, como la mecánica de fluidos, la acústica (ver Levario-Diaz and Bhaskar (2020)), la óptica (ver Ferri et al. (2020)), la oceanografía (ver Shearman (1983)), entre otros. Las ondas viajeras están presentes en líquidos, sólidos, gases, corrientes eléctricas, campos electromagnéticos (ver Bogerd et al. (1998)), atmósferas de planetas (ver Salby (1984)), cristales, plasmas, incluso en nuestro propio cuerpo como se evidencia en el trabajo de Cascaval (2003)), el cual muestra una modelo dispersivo que describe el comportamiento de la sangre en las venas.

Debido a las características particulares que poseen este tipo de ondas viajeras, forman una clase especial de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales dispersivas no lineales. Determinar la existencia y propiedades de tales soluciones es un problema de gran interés tanto para matemáticos puros como aplicados.

La ecuación Korteweg de Vries (KdV) es un modelo matemático que describe el comportamiento de las ondas viajeras unidimensionales. Las ondas viajeras evidenciadas en el articulo de Russel (1845) [1], done son descritas por él como una masa de agua suave que no presenta ningún cambio en su forma o velocidad a lo largo de su recorrido. El primer modelo para este nuevo tipo de ondas fue dado por Boussinesq (1871) [2]. Posteriormente, en 1895 con el propósito de aclarar ciertas dudas sobre la existencia de estas ondas solitarias D.J. Korteweg y G. de Vries, en Korteweg and De Vries (1895), plantean un nuevo modelo que describe cómo se comportan estas ondas viajeras. Dicho modelo se basó en la suposición de que la profundidad del agua es pequeña si la comparamos con el ancho de la onda, además relaciona la amplitud de la misma con su variación en el tiempo.

La ecuación KdV es una de las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas cuasilineales más conocidas. La relevancia de este modelo se debe, no solo, a la teoría matemática que involucra su estudio y el número de problemas abiertos asociados que aún persisten, sino a lo sugestiva que resulta a la hora de abordar problemas relacionados.

Un problema interesante asociado al estudio de la ecuación KdV, es el caso donde se consideran los coeficientes de la ecuación KdV variables. Entre los artículos que estudian la deducción de este modelos podemos encontrarnos con lo planteado por Johnson (1973), donde desarrolla un estudio para las ondas solitarias que se mueven en una región que cambia de profundidad len-

---

[1] John Scott Russel (1808-1882), ingeniero escocés, quien fue el primero en escribir acerca de las ondas viajeras, así como por ser el primero en observar experimentalmente el efecto Doppler utilizando las ondas sonoras producidas al pasar un tren.

[2] Joseph Valentin Boussinesq, 1842-1929, matemático y físico francés el cual es una figura de suma importancia en la mecánica de fluidos e hidráulica.

tamente, este estudio desemboca en la derivación de la ecuación KdV con coeficientes variables válidos en donde la profundidad cambia lentamente. Dicho modelo es el siguiente

$$u_t + \frac{3}{2}d^{-\frac{7}{4}}uu_\xi + \frac{1}{6}d^{\frac{1}{2}}u_{\xi\xi\xi} = 0,$$

donde u es el perfil de la onda y d es una función que describe el cambio de profundidad, esta función depende del tiempo y del cambio de profundidad. A su vez, en (Ablowitz, 2011, Sec. 5.4) muestra el proceso de deducción de la ecuación KdV donde sus coeficientes dependen de la altura, la densidad del fluido y la tensión superficial. En este caso el modelo tiene la siguiente forma

$$\frac{1}{c_0}u_t + u_x + \gamma u_{xxx} + \frac{3}{2h}uu_x = 0,$$

donde u es el perfil de la onda, h es la profundidad del fluido, c_0 es un valor que depende de la altura del fluido y la gravedad, además γ depende de la constante gravitacional, la altura, la densidad y la tensión superficial del fluido.

Por otra parte, en Cascaval (2003) se muestra el proceso de deducción de un modelo que describe el movimiento de ondas a través de tubos con paredes elásticas llenos de líquido, dicho modelo coincide con la ecuación KdV con coeficientes variables. El modelo planteado por Cascaval es

$$u_\tau - \frac{3}{4}\frac{r_{o\tau}(\tau)}{r_o(\tau)}u + \frac{5}{2r_o(\tau)^{1/2}}uu_\xi + \frac{k}{2}r_o(\tau)^{5/2}\left(\gamma + \frac{r_o(\tau)}{4}\right)u_{\xi\xi\xi} = 0,$$

donde $r_{o\tau}(\tau)$ es el radio del tubo que depende del tiempo y γ es un valor constante definido por el grosor del tubo y es el radio típico de una sección trasversal del tubo. En este mismo artículo Cascaval presenta un estudio teórico para un problema con condiciones de contorno para esta ecuación.

En Ji et al. (2019) podemos ver un estudio de ondas solitarias excitadas por la topografía con coeficientes dependientes del tiempo. El resultado de este estudio es la deducción de una ecuación KdV con término de forzamiento topográfico con coeficientes dependientes del tiempo, dicha ecuación posee la siguiente forma

$$u_t + a_1(t)uu_\xi + a_2(t)u_{\xi\xi\xi} + a_3(t)u = a_4(t)\frac{\partial H_1}{\partial \xi},$$

donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son funciones arbitrarias que dependen del tiempo y $\frac{\partial H_1}{\partial \xi}$ es el término de forzamiento topográfico.

En los artículos citados con anterioridad, así como en sus referencias, podemos encontrar distintas versiones de la ecuación KdV con coeficientes variables. Es importante mencionar que todos los trabajos previos enfocados en el estudio del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo, que encontramos en nuestra consulta bibliográfica, se centran en encontrar soluciones exactas de la ecuación como se puede evidenciar en los trabajos de Bao and Bao (2014), Zhang (2008), Vlieg-Hulstman and Halford (1995) y Zuo-Nong (1995) o por medio del análisis numérico de las soluciones como se ve en los trabajos de Zhou et al. (2003) y Han et al. (2021), respectivamente. Esto motivó a plantear el presente trabajo de investigación, que tiene como propósito realizar un estudio acerca de la buena colocación local del problema de

Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo.

Por otra parte, es de resaltar la gran cantidad de trabajos dedicados a estudiar la buena colocación de la ecuación KdV con coeficientes constantes, en este caso vale la pena mencionar los trabajos de Iorio and Nunes (1991), Pazy (2012) y Rojas (2018), respectivamente.

El presente trabajo se ha organizado de la siguiente forma: En el primer capítulo, se presenta el marco teórico. Se iniciará en la sección 2.1 definiendo los espacios $L^p(\mathbb{R})$; además se revisa la definición de la transformada de Fourier, así como de la transformada inversa, junto con algunas de sus propiedades. A su vez, se mostrará la definición de el espacio de Schwartz $\mathscr{S}$, y el espacio de las distribuciones temperadas $\mathscr{S}'$ como dual topológico de $\mathscr{S}$. Posteriormente en la sección 2.2, se definen los espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$, que se denotan usualmente como $H^s(\mathbb{R}^n)$. Por medio del espacio de las distribuciones temperadas, adicionalmente se mencionan algunos resultados de estos espacios. Más adelante en la sección 2.3, se introducen ciertas nociones básicas de semigrupos, operadores disipativos y un par de resultados útiles relacionados con la teoría de semigrupos. Por último, en la sección 2.4, se presentará un resumen de la teoría cuasilineal de Kato.

En el capítulo dos, se desarrollan los resultados principales de este trabajo. Se considera aquí el problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

$$\begin{cases} u_t + \alpha(t) u u_x + \beta(t)\partial_x^3 u = 0, \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

donde u es una función con valor real, $t \in [0,T]$ y $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones tales que $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$; $\beta(t) \geq 1$, para todo $t \in [0,T]$. Para este problema de Cauchy se demuestran su buena colocación local y tres leyes de conservación. En la último capítulo del trabajo se presentan las conclusiones.

1. Objetivos

Objetivo general

Analizar teóricamente el problema del valor inicial asociada a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo, desde el punto de vista de la existencia y/o unicidad de soluciones vía la teoría cuasilineal de Kato.

Objetivos específicos

Realizar un estudio introductorio sobre la teoría de semigrupos;

Hacer un estudio sobre la teoría cuasilineal de Kato;

Comprender los resultados clásicos sobre buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV;

Usar las teorías estudiadas para establecer resultados asociados con la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

2. Resultados preliminares

Por compacidad del documento este capítulo se centrará en incluir algunas definiciones, notaciones estándares y resultados importantes que se emplearán a lo largo del trabajo.

2.1. Transformada de Fourier

En esta sección se dará la definición y algunas propiedades asociadas a la transformada de Fourier. Todos los resultados de esta sección son tomados de Iorio Iorio and Iorio (2001), Serov Serov et al. (2017) y Kesavan **?**. Antes de definir la transformada de Fourier recordemos la definición de los espacios de Lebesgue. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para $1 \leq p < \infty$ se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

con norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso de que $p = \infty$ se definirá el espacio $L^\infty(\Omega)$ de la siguiente forma

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ es medible y } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\},$$

donde su norma esta definida como

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |f(x)|.$$

Teniendo clara la definición de los espacios de Lebesgue se definirá la transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de f, denotada por $\hat{f}$ o $\mathscr{F}(f)$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ como*

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi \cdot x} dx, \tag{2}$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ es el producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Debido a que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene de forma inmediata que $\hat{f}$ esta bien definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Además,

$$\left|\hat{f}\right| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{3}$$

para todo ξ. Por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *La transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es una función continúa, acotada y satisface la siguiente desigualdad*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La demostración de este resultado se sigue de la desigualdad (3). El siguiente resultado nos brinda algunas propiedades de la transformada de Fourier.

Teorema 2.3. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

1. *$\hat{f}$ es continua.*

2. *$\hat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$ (Riemann-Lebesgue).*

Observación 2.4. *Note que estamos considerando $\hat{f}$ como función, no como operador.*

Demostración. 1. Note que

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot(x+h)}dx-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left[e^{ix\cdot h}-1\right]f(x)dx.\end{aligned}$$

Sean $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}^n$ tal que $h_k \to 0$ y g_k una sucesión de funciones que tiende a 0 definida por

$$g_k(x) = e^{ix\cdot\xi}\left[e^{ix\cdot h_k}-1\right]f(x).$$

Obsérvese que esta función se puede acotar, en efecto,

$$|g_k(x)| = \left|e^{ix\cdot\xi}\left[e^{ix\cdot h_k}-1\right]f(x)\right| \leq 2|f(x)|,$$

para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por medio del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty} g_k(x)dx = 0.$$

Por lo tanto, se puede afirmar que $\text{lím}_{h\to 0}\hat{f}(\xi+h)=\hat{f}(\xi)$ para toda sucesión $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ tal que $h_k\to 0$. Lo cual indica que $\hat{f}$ es una función continua y acotada de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$.

2. Defina $(\rho(t)f)(x)=f(x-t)$. Considere la transformada de Fourier de f junto con el cambio de variable $x=y-\alpha(\xi)$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}f(x)dx,\\&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(y-\alpha(\xi))\cdot\xi}f(y-\alpha(\xi))dy\\&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\xi}\cdot e^{-\alpha(\xi)\cdot\xi}(\rho(\alpha(\xi))f)(y)dy.\end{aligned}$$

Si se considera que $\alpha(\xi)\cdot\xi=1$ entonces es posible afirmar que $\alpha(\xi)=\dfrac{\xi}{\|\xi\|^2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\xi}\cdot e^{-\alpha(\xi)\cdot\xi}(\rho(\alpha(\xi))f)(y)dy.\\&=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\xi}\left(\rho\left(\frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right)f\right)(y)dy.\end{aligned}\tag{4}$$

Usando la ecuación (4) se puede afirmar que

$$\begin{aligned}2\hat{f}(\xi)&=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[e^{iy\cdot\xi}f(y)-e^{iy\cdot\xi}\left(\rho\left(\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}\right)f\right)(y)\right]dy\\&=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\xi}\left[f(y)-\left(\rho\left(\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}\right)f\right)(y)\right]dy.\end{aligned}$$

Sea $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\xi_k\| \to \infty$, entonces

$$g_k(y) = f(y) - \left(\rho\left(\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}\right) f\right)(y) = f(y) - f\left(y - \frac{\xi_k}{2\|\xi_k\|^2}\right) \to 0.$$

Si se utiliza el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_k(y)dy = 0,$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} 2|\hat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-2\pi i y\cdot\xi} \left[f(y) - \left(\rho\left(\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}\right) f\right)(y)\right]\right| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y) - f\left(y - \frac{\xi_k}{2\|\xi_k\|^2}\right)\right| dy \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $\|\xi\| \to \infty$. Por lo tanto $\lim_{\|\xi\|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. □

Ejemplo 2.5. *Considere $n = 1$ y*

$$f(x) = \chi_{[-k,k]}(x) = \begin{cases} 1, x \in [-k,k], \\ 0, x \notin (-k,k), \end{cases}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-k,k]}(t)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k} e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kx}{x}.\end{aligned}$$

Antes de dar algunas propiedades acerca de la transformada de Fourier recordemos la definición de la convolución entre dos funciones.

Definición 2.6. *Sean $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La convolución de f y g, denotada por $f*g$, es una función en $\mathbb{R}^n$ definida por*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Observación 2.7. *Directamente de la definición es sencillo ver que $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 2.8. *1. (Desigualdad de Young) Sean $p,q,r \in [1,\infty]$ tales que $p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}$. Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, la convolución $f*g$ esta bien definida y pertenece $L^r(\mathbb{R}^n)$. Adicionalmente, se tiene la siguiente desigualdad*

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

2. Si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\mathscr{F}(f*g)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. 1. De la definición 2.6 se tiene que

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &\leq \int |f(x-y)|\cdot|g(y)|\mathrm{d}y \\
&= \int |f(x-y)|^{1+p/r-p/r}\cdot|g(y)|^{1+q/r-q/r}\,\mathrm{d}y \\
&= \int |f(x-y)|^{p/r}\cdot|g(y)|^{q/r}\cdot|f(x-y)|^{1-p/r}\cdot|g(y)|^{1-q/r}\,\mathrm{d}y \\
&= \int (|f(x-y)|^{p}\cdot|g(y)|^{q})^{1/r}\cdot|f(x-y)|^{(r-p)/r}\cdot|g(y)|^{(r-q)/r}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Dado que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, directamente de la definición se puede ver que

$$
\begin{aligned}
|f(x-y)|^{(r-p)/r} &\in L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^n), \\
|g(y)|^{(r-q)/r} &\in L^{\frac{qr}{r-p}}(\mathbb{R}^n), \\
(|f(x-y)|^{p}\cdot|g(y)|^{q})^{1/r} &\in L^{r}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que

$$
\frac{1}{r}+\frac{r-p}{pr}+\frac{r-q}{qr}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1,
$$

al aplicar desigualdad de Hölder se obtiene

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(x)| \leq &\left\|(|f(x-y)|^{p}\cdot|g(y)|^{q})^{1/r}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \\
&\cdot\left\||f(x-y)|^{(r-p)/r}\right\|_{L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^n)}\cdot\left\||g(y)|^{(r-q)/r}\right\|_{L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Usando la definición de la norma en los espacios de Lebesgue se puede afirmar que

$$\left\| |f(x-y)|^{(r-p)/r} \right\|_{L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-p)/r}$$
$$\left\| |g(y)|^{(r-q)/r} \right\|_{L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-q)/r}.$$

Teniendo presente esto y usando (5) se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \right)^r = \int |(f*g)(x)|^r \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int \left(\int (|f(x-y)|^p \cdot |g(y)|^q)^{1/r} \cdot |f(x-y)|^{(r-p)/r} \cdot |g(y)|^{(r-q)/r} \, \mathrm{d}y \right)^r \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\left(\int (|f(x-y)|^p \cdot |g(y)|^q) \, \mathrm{d}y \right)^{1/r} \cdot \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-p)/r} \cdot \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-q)/r} \right)^r \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\int (|f(x-y)|^p \cdot |g(y)|^q) \, \mathrm{d}y \right) \cdot \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-p)} \cdot \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{(r-q)} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Finalmente el teorema de Fubini implica que

$$\begin{aligned}
\left(\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \right)^r &\leq \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-p} \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-q} \int |g(y)|^q \left(\int |f(x-y)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-p} \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-q} \int |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \int |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-p} \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{r-q} \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^q \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^p \\
&= \left(\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^r \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^r
\end{aligned}$$

En consecuencia, se puede concluir que $\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

2. De las definiciones 2.1 y 2.6 se sigue que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f*g)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)dx, \end{aligned} \tag{6}$$

al aplicar el teorema de Fubini a la ecuación (6) se tiene que

$$\mathscr{F}(f*g)(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}dx\right)dy.$$

Si se realiza el cambio de variable $u = x - y$ se puede ver que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f*g)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(u)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot(u+y)}du\right)dy \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(u)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot u}\mathrm{e}^{-i\xi\cdot y}du\right)dy \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot y}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(u)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot u}du\right)dy \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot y}dy\int_{\mathbb{R}^n}f(u)\mathrm{e}^{-i\xi\cdot u}du \\ &= (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{F}(f*g)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. □

El espacio de Schwartz está definido como el espacio de todas las funciones C^∞ tales que decrecen más rápido que un polinomio, es decir,

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |x^\beta D^\alpha f(x)| = 0 \quad \text{para todo par de multi-índices}\, \alpha \text{ y } \beta \right\},$$

donde su norma está definida por $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \right| < \infty$, para todo par de multi-índices[3] α y β. El siguiente resultado garantiza la densidad del espacio de Schwartz en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.9. *El espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$.*

Es necesario mencionar algunos resultados adicionales para realizar la demostración de este teorema. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define el soporte de la función como

$$\text{supp } f(x) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

El espacio de funciones $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto. Además, se tiene que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$. Por último, un resultado fundamental en la demostración es que el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$, una demostración de este resultado puede encontrarse en Kesavan (**?**, Sec. 1.5, Teo. 1.5.6).

---

[3] Un multi-índice α es una n-tupla de números naturales donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, y se definen las siguientes notaciones para esta $x^\alpha = x_1^{\alpha} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_2}^{\alpha_n}$. Además, el orden del multi-índice viene dado por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

La demostración del teorema se tiene del siguiente resultado de topología, sean A, B conjuntos no vacíos contenidos en cierto espacio métrico $\mathscr{M}$, tales que $A \subset B$. Luego, si A es denso en $\mathscr{M}$, entonces B es denso en $\mathscr{M}$.

Teniendo presente lo anterior podemos pensar en las siguientes propiedades de la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz,

Teorema 2.10. *Para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *$\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, además*

$$(-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

y

$$\left(\partial^\alpha \hat{f}\right)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f)(\xi).$$

2. *Se tiene que*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

3. *La transformada de Fourier inversa esta definida por*

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

Adicionalmente, se cumple que

$$\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)) = f = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(f)).$$

Una demostración de este resultado puede encontrarse en Kesavan (Serov et al., 2017, Obs. 16.6, Teo. 16.10). Hasta el momento se ha definido la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$, el siguiente resultado define la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y garantiza que es una isometría en dicho espacio. Esta extensión de la definición de la transformada de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$ es posible por el Teorema 2.9.

Teorema 2.11. *La transformada de Fourier es una isometría en L^2, cumpliando así la identidad de Parseval $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en Kesavan (**?**, Sec. 1.10, Teo. 1.10.2). Ahora, considere $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las distribuciones temperadas, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales definidos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{C}$. Se denotará, como es usual, el valor de $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ evaluado en $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ por la expresión $\langle f, \varphi \rangle$. En este espacio, la α-ésima derivada de $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ está definida como

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle .$$

Por otro lado, la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ está definida de la siguiente forma,

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \;\text{ y }\; \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle.$$

Teorema 2.12. *Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$\xi^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(\partial^\alpha f) \;\; y \;\; \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f).$$

La demostración de este teorema puede verse en Iorio (Iorio and Iorio, 2001, Cap. 7, Teo. 7.39).

2.2. Espacios de Sobolev

En la sección anterior se introdujo la definición de la transformada de Fourier y del espacio de las distribuciones temperadas. En este apartado por medio de dichas definiciones previas se presentarán los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades. A lo largo del documento se denotará la norma de un elemento en el espacio de Sobolev como $\|\cdot\|_s$ y la norma de un elemento en el espacio L^2 como $\|\cdot\|_0$.

Definición 2.13. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$, $H^s(\mathbb{R}^n)$, como*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s f(x) = \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \right)^{\vee}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con norma definida como

$$\|f\|_s = \|J^s f\|_0.$$

El siguiente resultado nos brinda una caracterización de los elementos de los espacios de Sobolev

Teorema 2.14. *$f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ si y solo si $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ es un multi-índice tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq m$.*

La demostración de este teorema puede encontrar en Linares (Linares and Ponce, 2014, Cap. 3, Teo. 3.1). Defina sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$, el operador $Su = \left(1 - \partial_x^2\right)^{s/2} u$ para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. De esta forma se tiene para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ que

$$\Lambda^s = \widehat{Su}(\xi) = \left(1 + \xi^2\right)^{s/2} \widehat{u}(\xi)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el siguiente resultado nos garantiza que S es un isomorfismo isométrico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Teorema 2.15. *$S \in \mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Por como ha sido definido S sabemos que es un operador lineal. Considere $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|Su\|_0^2 = \left\|\widehat{\Lambda^s u}\right\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \xi^2\right)^{s/2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_s^2 = \|u\|_s^2,$$

por lo tanto $S : H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal isométrico, en consecuencia inyectivo y por lo tanto existe $S^{-1} : Im(S) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ el operador inverso de S. Basta ver que $Im(S) = L^2(\mathbb{R}^n)$, tome $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y defina $u = \Lambda^{-s} v$, note que

$$Su = J^s\left(J^{-s} v\right) = J^0(v) = v,$$

más aún

$$\|u\|_0 = \left\|\Lambda^{-s} v\right\|_s = \left\|\Lambda^s \left(\Lambda^{-s} v\right)\right\|_0 = \|v\|_0,$$

y por lo tanto $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, teniendo así que $Im(S) = L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

El siguiente resultado nos brindará algunas propiedades de los espacios de Sobolev.

Teorema 2.16. *1. Para $t \geq s$, se tiene que $H^s(\mathbb{R}) \supset H^t(\mathbb{R})$. Es más, para $u \in H^t(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$\|u\|_t \geq \|u\|_s$$

2. Para $s > \dfrac{1}{2}$, se tiene que $H^s(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ y para $u \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_s,$$

donde $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en Pazy (Pazy, 2012, Sec. 8.5, Teo. 5.1).

Se sabe que un álgebra es un espacio vectorial, donde sus vectores cumplen con la propiedad asociativa, distributiva entre los elemento del espacio y la distributiva bajo la multiplicación por escalar, más aún diremos que un espacio es un álgebra de Banach si para todo x, y en el espacio se cumple que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, además debe poseer un elemento identidad tal que su norma sea igual a uno. Los espacios de Sobolev de tipo L^2 en general cumplen con las propiedades de álgebra de manera sencilla, pero esta última desigualdad requerida para ser un álgebra de Banach no es nada trivial, así que el siguiente resultado que podemos encontrar en Linares (Linares and Ponce, 2014, Cap. 3, Teo. 3.5) nos garantiza que los espacios $H^s(\mathbb{R})$, con $s \in \mathbb{R}$, cumple con esta desigualdad.

Teorema 2.17. *Si* $s > \frac{n}{2}$, *entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es una álgebra con respecto al producto de funciones. Esto es, si* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *y además*

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Por último, el siguiente teorema muestra una propiedad que cumplen las derivadas de los elementos de los espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R})$

Teorema 2.18. *Sea* $f \in H^s(\mathbb{R})$, *tal que* $s \in \mathbb{R}$ *entonces* $\partial^\alpha f \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R})$, *y además se cumple que*

$$\|\partial^\alpha f\|_{H^{s-\alpha}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en Iorio (Iorio and Iorio, 2001, Sec. 7.4, Teo. 7.75).

2.3. Teoría de semigrupos

En esta sección se presentará la teoría de semigrupos necesaria para introducir la teoría cuasilineal de Kato. Los resultados que se presentarán a continuación son tomados de Pazy Pazy (2012) y Linares Linares and Ponce (2014). Se notará como $\mathscr{B}(X,Y)$ el conjunto de los operadores lineales acotados de X en Y. Diremos que un operador lineal A es acotado si

$$\sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|=1}} \|Af\| < \infty,$$

en cuyo caso escribiremos $\|A\| := \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|=1}} \|Af\|$. Ahora, se definirán los semigrupos uniparamétricos de operadores acotados.

Definición 2.19. *Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathscr{B}(X,X)$ es un semigrupo uniparamétrico de operadores acotados (o simplemente semigrupo) si:*

i) $T(0) = I$.

ii) $\forall s,t \geq 0,\ T(s+t) = T(s)T(t)$.

Si un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisface además

iii) $\forall x \in X$ *se tiene que* $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$.

decimos que es un semigrupo fuertemente continuo o un C_0-semigrupo.

Definición 2.20. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo. El generador infinitesimal de $T(t)$ es el operador $A : D(A) \to X$, definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} =: \left.\frac{d^+ T(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \quad para \quad x \in D(A)$$

donde su dominio está dado por

$$D(A)=\left\{x\in X:\exists \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}\right\}.$$

Ejemplo 2.21. *Sea* $T:[0,\infty)\longrightarrow\mathscr{L}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$*, definido por*

$$(T(t)f)(s):=f(s+t),\quad f\in L(\mathbb{R}^n),\quad t\geq 0.$$

Note que $(T(0)f)(s)=f(s)$*, por lo tanto* $T(0)=I$*. Además,*

$$(T(t+h)f)(s)=f(t+h+s)=(T(t)T(h)f)(s).$$

En consecuencia $(T(t))_{t\geq 0}$ *satisface las propiedades de semigrupo. Además,*

$$\lim_{t\to 0^+}(T(t)f)(s)=\lim_{t\to 0^+}f(t+s)=f(s),$$

de esta forma $(T(t))_{t\geq 0}$ *es un* C_0*-semigrupo. Para hallar su generador*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{(T(t)f)(s)-f(s)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(s+t)-f(s)}{t}=f'_+(s).$$

Por lo tanto, su dominio está dado por

$$D(A)=\left\{f\in L(\mathbb{R}^n):f'_+\text{ existe y }f'_+\in L(\mathbb{R}^n)\right\},$$

además $Af = f'_{+}$.

Teorema 2.22. *Sea $T(t)$ un C_0 semigrupo. Entonces existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad para \quad 0 \leq t < \infty$$

La demostración de este teorema puede verse en Pazy (Pazy, 2012, Sec. 1.2, Teo. 2.2).

Si $\omega = 0$ y $M = 1$, se dice que es un semigrupo de contracciones o contractivo.

Observación 2.23. *Se denotará a partir de ahora $G(X,M,\beta)$ a la colección de todos los operadores A tales que $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$, el cual satisface $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$. Si $A \in G(X,1,0)$, esto es, $-A$ genera un semigrupo de contracción, se dice que A es un operador acretivo maximal o m-acretivo. Si $A \in G(X,1,\beta)$, esto es, $\|T(t)\| \leq e^{t\beta}$, para todo $t \in [0,\infty)$, se dice que A es cuasi-acretivo maximal o cuasi-m-acretivo.*

Para ver la definición de un operador disipativo, es necesario definir el siguiente conjunto. Sea X un espacio de Banach y X^* su dual. El valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$ se denota por $\langle x^*, x\rangle$ o por $\langle x, x^*\rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad entre X y X^*. Para cada $x \in X$ se define el conjunto de dualidad por

$$F(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\} \subseteq X^*.$$

Definición 2.24. *Un operador lineal A es disipativo si para cada $x \in D(A)$, existe un $x^* \in F(x)$ tal que $\Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

En la definición anterior y en los resultados posteriores, $\Re z$ representa la parte real del número complejo z.A continuación veremos el ejemplo de un operador disipativo.

Ejemplo 2.25. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, con $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Si $\lambda_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$ entonces $x \to Ax$ es un operador disipativo puesto que $\langle Ax, x\rangle = (Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq 0$, donde $(\cdot,\cdot)$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.*

El siguiente teorema debido a Stone será fundamental en la demostración de buena colocación local del resultado considerado en el presente trabajo.

Teorema 2.26 (Stone)**.** *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H si, y solo si, el operador iA es autoadjunto.*

La demostración de este resultado puede encontrarse en Pazy (Pazy, 2012, Sec. 1.10, Teo. 10.8). Por último, el siguiente resultado mostrará que si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones, entonces a partir de A, es posible generar otros semigrupos perturbando el operador inicial.

Teorema 2.27. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones. Suponga que B es un operador lineal disipativo, $D(A) \subset D(B)$ y*

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|, \quad para \quad x \in D(A),$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ y $\beta \geq 0$. Entonces $A + B$ es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones.

La demostración de este resultado puede encontrarse en Pazy (Pazy, 2012, Sec. 3.3, Cor. 3.3).

2.4. Teoría de ecuaciones diferenciales cuasilineales

En esta sección se mostrará de forma breve la teoría de ecuaciones diferenciales cuasilineales de Kato, ver Kato Kato (1975), Iorio (Iorio and Nunes, 1991, Cap. III, 3), Pazy (Pazy, 2012, Sec. 6.4). Lo mostrado en esta sección será clave para nuestro estudio de la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo.

Considere la ecuación de evolución cuasilineal

$$\begin{cases} u_t + A(t,u)u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{7}$$

donde $A(t,u)$ es un operador no lineal de Y en X, para $t \in [0,T]$ y todo u, donde X e Y son espacios de Banach con inclusión densa y continua[4], con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente.

La idea principal planteada por Kato y aplicada por Iorio Iorio and Nunes (1991) y Rojas Rojas (2018) para abordar problemas como (7), es la siguiente. Para cada $v \in C([0,T] : X)$,

---

[4] Es decir, Y es un subespacio denso en X y existe una constante C tal que

$$\|w\|_X \leq C\|w\|_Y.$$

considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + A(t, v(t))u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{8}$$

Para cada v fijo, se busca una solución integral $u \in C([0,T] : X)$ del problema de Cauchy (8). Teniendo estas soluciones se define la aplicación $\Phi : C([0,T] : X) \to C([0,T] : X)$ dada por $\Phi(v) = u$. Posteriormente, se busca un punto fijo de Φ que corresponderá con la solución integral del problema de Cauchy (7). Para realizar esto, se suponen sobre el problema de Cauchy (7) las siguientes condiciones.

(H_1) Existe una isometría sobreyectiva $S : Y \to X$.

(H_2) Sea A una función de $[0,T] \times W$ en $G(X, 1, \beta)$, donde W es una bola abierta en Y, centrada en u_0, β es un número real positivo, tal que $-A(t, v)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo en X el cual satisface,

$$\left\| e^{-sA(t,v)} \right\|_X \leq e^{\beta s}, \quad s \geq 0, \quad t \in [0,T], \quad v \in W.$$

(H_3) Para todo $(t, v) \in [0,T] \times W$, el operador,

$$B(t, v) := SA(t, v)S^{-1} - A(t, v) \in \mathscr{B}(X, X),$$

esto es, existe λ_1 tal que $\|B(t,v)\|_{\mathscr{B}(X,X)} \leq \lambda_1$, donde λ_1 es una constante.

(H_4) Para todo $(t,v) \in [0,T] \times W$, se tiene que $A(t,v) \in \mathscr{B}(Y,X) (Y \subset D(A(t,v))$ y $A(t,v)|_Y \in \mathscr{B}(Y,X))$. Para todo $v \in W$, la aplicación $t \mapsto A(t,v) : [0,T] \to \mathscr{B}(Y,X)$ es continua. Para todo $t \in [0,T]$, la aplicación $v \mapsto A(t,v)$ es Lipschitz continua, es decir,

$$\|A(t,v_1) - A(t,v_2)\|_{\mathscr{B}(Y,X)} \leq \mu \|v_1 - v_2\|$$

donde μ es una constante positiva.

(H_5) Sea u_0 el centro de la bola W. Entonces $A(t,v)u_0 \in Y$, para todo $(t,v) \in [0,T] \times W$. Además,

$$\|A(t,v)u_0\|_Y \leq \lambda_2, \quad t \in [0,T], \quad v \in W,$$

donde λ_2 es una constante positiva.

Teniendo establecidas estas hipótesis podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.28. *Si se satisfacen las hipotesis (H_1)-(H_5), y $u_0 \in Y$, entonces existe $0 < T' < T$ tal que el problema de Cauchy* (7) *tiene una única solución clásica $u \in C([0,T'];Y) \cap C^1([0,T'];X)$.*

Para ver una demostración de este teorema ver Iorio (Iorio and Nunes, 1991, Cap. III, 3), Pazy (Pazy, 2012, Sec. 6.4, Teo. 4.5).

3. Buena colocación local para la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

3.1. Buena colocación local del problema de Cauchy

En esta sección se desarrollarán algunos resultados auxiliares con el fin de verificar las hipótesis (H_1)-(H_5), Sección 2.4, y así demostrar un resultado de buena colocación para el problema empleando el Teorema 2.28. Considere el siguiente problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

$$\begin{cases} u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)\partial_x^3 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{9}$$

donde u es una función con valor real, $t \in [0,T]$ y $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones tales que $\alpha(t) > 0$; $\beta(t) \geq 1$, para todo $t \in [0,T]$. Defina los siguientes operadores con el propósito de reescribir el problema (9) de tal forma que sea posible aplicar la teoría de Kato:

$$A_0(t)u := \beta(t)\partial_x^3 u.$$

$$A_1(t,v)u := \alpha(t)v\partial_x u.$$

$$A(t,v)u := A_0(t)u + A_1(t,v)u.$$

Así el problema de Cauchy (9) se reescribe en la forma

$$\begin{cases} u_t + A(t,u)u = 0, \\ \qquad u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{10}$$

En lo que sigue del capítulo se buscará comprobar las hipótesis del teorema Kato con $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 3$ y $W = \{v \in H^s(\mathbb{R})) : \|v\|_s < r\}$ con $r > 0$. Note que el operador A_0 así definido satisface,

$$A_0(t) := D(A_0(t)) \subset X \to L^2(\mathbb{R}).$$

Mientras que el operador A_1 cumple,

$$A_1(t) := D(A_0(t)) \subseteq D(A_1(t,v)) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto, se puede afirmar que el operador A satisface

$$A(t) := D(A(t,v)) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

En el siguiente lema se demostrará que A_0 es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de isometrías, este resultado será de utilidad para demostrar hipótesis (H_2),

Lema 3.1. *El operador A_0 es el generador de un C_0-semigrupo de isometrías en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $u \in D(A_0(t))$, $t \in [0,T]$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(A_0(t)u,u)_0 &= \int_{\mathbb{R}} \beta(t)(\partial_x^3 u)u\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \beta(t)(\partial_x^2 u)(\partial_x u)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \beta(t)(\partial_x u)(\partial_x^2 u)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} u\beta(t)(\partial_x^3 u)\,dx \\
&= -(u,A_0(t)u)_0\,, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Estas últimas igualdades son obtenidas al aplicar integración por partes. Debido a que las igualdades (11) muestran que A_0 es antisimétrico es posible usar el Teorema 2.26. Teniendo así que el operador A_0 es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de isometrías.

□

A continuación se demostrará la hipótesis (H_2) del Teorema 2.28, utilizando el Lema 3.1 junto con un resultado de perturbaciones.

Lema 3.2. *Sea $s \geq 3$. Para todo $v \in Y$, el operador $-A(t,v)u := -(A_0(t)u + A_1(t,v)u)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo en X tal que,*

$$
\left\| e^{-sA(t,v)} \right\| \leq e^{\varepsilon s}, s \geq 0,
$$

con $t \in [0,T]$ y $v \in W$, donde W es una bola abierta alrededor de u_0, para todo $\varepsilon \geq \varepsilon_0 = c_s \|v\|_s$

Demostración. Sea $v \in H^s(\mathbb{R})$ entonces $\partial_x v \in H^{s-1}(\mathbb{R})$, dado que $s \geq 3$ al usar el Teorema 2.16 se tiene $\partial_x v \in L^\infty(\mathbb{R})$ junto con el estimativo

$$\|\partial_x v\|_\infty \leq C \|\partial_x v\|_{s-1} \leq C_s \|v\|_s .$$

Ahora, sean $v \in Y$ y $u \in D(A_1)$.

$$\begin{aligned}
(A_1(t,v)u,u)_0 &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) v\, \partial_x u\, u\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) v\, \partial_x u^2\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \partial_x v\, u^2\, dx \\
&\geq -\frac{1}{2}|\alpha|_\infty \int_{\mathbb{R}} sup\, |\partial_x v|\, u^2\, dx \\
&\geq -\frac{1}{2}|\alpha|_\infty \|\partial_x v\|_\infty \|u\|_0^2 \\
&\geq -c_s \|v\|_s \|u\|_0^2 . \qquad (12)
\end{aligned}$$

Note que la norma $\|\cdot\|_\infty$ está calculada en las variables espaciales, mientras que la norma $|\cdot|_\infty$ se calcula en la variable temporal. Teniendo en cuenta (12), si $\varepsilon \geq \varepsilon_0 = c_s \|v\|_s$, entonces

$$((A_1(t,v) + \varepsilon I)u,u)_0 \geq (-c_s \|v\|_s + \varepsilon)\|u\|_0^2 \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$(-(A_1(t,v) + \varepsilon I)u,u)_0 \leq 0,$$

y en consecuencia $A_1(t,v) + \varepsilon I$ es un operador disipativo para $\varepsilon \geq \varepsilon_0(v) = c_s \|v\|_s$ en $L^2(\mathbb{R})$. Dado que iA_0 es autoadjunto, Lema 3.1, entonces $A_0(t) + A_1(t,v) + \varepsilon I$ también es disipativo para $\varepsilon \geq$

$\varepsilon_0(v)$. Más aún, sea $u \in D(A_0)$ entonces,

$$\|-(A_1(t,v)+\varepsilon I)u\| \leq |\alpha|_\infty \|v\|_\infty \|\partial_x u\|_0 + \varepsilon \|u\|_0 \tag{13}$$

Por otro lado, note

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u\|_0^2 = \left\|\widehat{\partial_x u}\right\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\partial_x u})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{u}|^{2/3} |\widehat{u}|^{4/3} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|\widehat{u}|^{4/3})^{3/2} dx\right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}} (|\xi|^2 |\widehat{u}|^{2/3})^3 dx\right)^{1/3} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 dx\right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^6 |\widehat{u}|^2 dx\right)^{1/3} \\
&\leq \left(\left\|\partial_x^3 u\right\|_0^2\right)^{1/3} \|u\|_0^{4/3},
\end{aligned}$$

es decir $\|\partial_x u\| \leq \left\|\partial_x^3 u\right\|_0^{1/3} \|u\|_0^{2/3}$, usando la desigualdad de Young se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u\|_0 \leq \varepsilon^{1/3} \left\|\partial_x^3 u\right\|_0^{1/3} \frac{\|u\|_0^{2/3}}{\varepsilon^{1/3}} &\leq \frac{\left((\varepsilon \left\|\partial_x^3 u\right\|_0)^{1/3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\varepsilon^{-1/3} \|u\|_0^{2/3}\right)^{3/2}}{3/2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} \left\|\partial_x^3 u\right\|_0 + C_\varepsilon \|u\|_0 .
\end{aligned} \tag{14}$$

Teniendo en cuenta que $\beta(t) \geq 1$, para todo $t \in [0,T]$, se puede afirmar que $\left\|\partial_x^3 u\right\|_0 \leq \|A_0(t)u\|_0$, por lo tanto (14) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\|\partial_x u\|_0 \leq \frac{\varepsilon}{3} \|A_0(t)u\|_0 + C_\varepsilon \|u\|_0 . \tag{15}$$

Juntando las desigualdades (13) y (15)

$$
\begin{aligned}
\|-(A_1(t,v)+\varepsilon I)u\| &\leq |\alpha|_\infty \|v\|_\infty \left(\frac{\varepsilon}{3}\|A_0(t)u\|_0 + C_\varepsilon \|u\|_0\right) + \varepsilon \|u\|_0 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}|\alpha|_\infty \|v\|_\infty \|A_0(t)u\|_0 + (CC_\varepsilon \|v\|_0 + \varepsilon)\|u\|_0 .
\end{aligned}
$$

Considere $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\varepsilon}{3}|\alpha|_\infty \|v\|_\infty = \frac{1}{2}$, entonces

$$
\|-(A_1(t,v)+\varepsilon I)u\| \leq \frac{1}{2}\|A_0(t)u\|_0 + (CC_\varepsilon \|v\|_0 + \varepsilon)\|u\|_0 .
$$

Si se usa ahora, el Teorema 2.27 se concluye que, para todo $\varepsilon \geq \varepsilon_0 = c_s \|v\|_s$, $-(A(t,v)+\varepsilon I)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones en X. Teniendo así que $-A(t,v)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo tal que

$$
\left\| e^{-sA(t,v)} \right\| \leq e^{\varepsilon s}, s \geq 0.
$$

□

El siguiente resultado es un Lemma auxiliar que nos ayudará a garantizar la hipótesis (H_3), en él se considera para $f \in L^2(\mathbb{R})$ el operador denotado como M_f definido como la multiplicación por f, es decir, $M_f u = fu$. Adicionalmente, note que $\mathscr{F}(M_f u) = (\widehat{f} * \widehat{u})(\xi)$.

Lema 3.3. *Sea $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$ y sea $T = \left(\Lambda^s M_f - M_f \Lambda^s\right)\Lambda^{1-s}$. Entonces T es un operador* *acotado en* $X = L^2(\mathbb{R})$ *y*

$$\|T\| \leq C \|grad\, f\|_{s-1}. \tag{16}$$

Demostración. Sea $u \in H^s(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}(\left(\Lambda^s M_f - M_f \Lambda^s\right) \Lambda^{1-s} u)(\xi) = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} (\widehat{f} * \mathscr{F}(\Lambda^{1-s} u))(\xi) - (\widehat{f} * \mathscr{F}(\Lambda^s \Lambda^{1-s} u))(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}} \widehat{u}(\eta) - \widehat{f}(\xi-\eta) \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}} (1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}} \widehat{u}(\eta) d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} - \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\right] \widehat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}} \widehat{u}(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{17}$$

Aplicando teorema del valor medio a la función $f(x) = (1+x^2)^{\frac{s}{2}}$ en el intervalo con extremos ξ y η, se tiene

$$\left|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} - \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\right| = s\,|\theta| \left(1+\theta^2\right)^{\frac{s}{2}-1} |\xi-\eta|,$$

para algún θ en el intervalo con extremos ξ y η. Así

$$\left|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} - \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}}\right| \leq s\,|\theta| \left(1+\theta^2\right)^{\frac{s-1}{2}} |\xi-\eta|. \tag{18}$$

Teniendo en cuenta que $g(x) = (1+x^2)^{\frac{s-1}{2}}$ es convexa, se puede afirmar para $\zeta \in [0,1]$ tal que $\theta = (1-\zeta)\xi + \zeta\eta$ se tiene que

$$(1+\theta^2)^{\frac{s-1}{2}} \leq (1-\zeta)(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}} + \zeta(1+\eta^2)^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\leq c((1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1+\eta^2)^{\frac{s-1}{2}}), \tag{19}$$

con $c = max(\zeta, 1-\zeta)$. Por lo tanto, si se junta (18) y (19) se puede afirmar

$$\left|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}-(1+\eta^2)^{\frac{s}{2}}\right| \leq C|\xi-\eta|((1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1+\eta^2)^{\frac{s-1}{2}}). \tag{20}$$

Ahora, teniendo en cuenta (17) y (20) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left|\mathscr{F}(\left(\Lambda^s M_f - M_f\Lambda^s\right)\Lambda^{1-s}u)(\xi)\right| \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}}\left[(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1+\eta^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]|\xi-\eta|\widehat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}}\widehat{u}(\eta)d\eta \\
&\leq C\left[\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}|\xi-\eta|\widehat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}}\widehat{u}(\eta)d\eta+\int_{\mathbb{R}}|\xi-\eta|\widehat{f}(\xi-\eta)(\widehat{u}(\eta)d\eta\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Considere los operadores $\mathscr{F}(I_1(\xi)u)$ y $\mathscr{F}(I_2(\xi)u)$ que corresponden a las dos integrales de la ecuación (21)

$$\mathscr{F}(I_1(\xi)u) = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{\frac{s-1}{2}}|\xi-\eta|\widehat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{\frac{1-s}{2}}\widehat{u}(\eta)d\eta, \tag{22}$$

$$\mathscr{F}(I_2(\xi)u) = \int_{\mathbb{R}}|\xi-\eta|\widehat{f}(\xi-\eta)\,\widehat{u}(\eta)d\eta. \tag{23}$$

Note que para obtener la desigualdad (16) basta encontrar estimaciones para (22) y (23). En primer lugar, se aplica transformada de Fourier inversa a (22) se tiene que $I_1\,u = \Lambda^{s-1}M_g\Lambda^{1-s}u$ donde M_g es el operador multiplicación por la función g la cual satisface que $\widehat{g}(\xi) = |\xi|\widehat{f}(\xi)$.

Dado que $s-1>\frac{1}{2}$ entonces,

$$\begin{aligned}\|I_1u\|_0=\left\|\Lambda^{s-1}M_g\Lambda^{1-s}u\right\|_0 &= \left\|M_g\Lambda^{1-s}u\right\|_{s-1}\\ &\leq \|g\|_{s-1}\left\|\Lambda^{1-s}u\right\|_{s-1}\\ &\leq \|g\|_{s-1}\|u\|_0\\ &\leq C\|\operatorname{grad} f\|_s\|u\|_0. \qquad (24)\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando transformada de Fourier inversa a (23) se tiene que $I_2\,u=M_g u$

$$\|I_2u\|=\|g\,u\|\leq\|g\|_\infty\|u\|_0\leq C\|\operatorname{grad} f\|_s\|u\|_0. \qquad (25)$$

Teniendo en cuenta (24) y (25) se puede reescribir (21) de la siguiente forma

$$\left\|\left(\Lambda^s M_f-M_f\Lambda^s\right)\Lambda^{1-s}u\right\|\leq C\|\operatorname{grad} f\|_s\|u\|_0.$$

Obteniendo así la acotación $\|T\|\leq C\|\operatorname{grad} f\|_{s-1}$. □

En el siguiente lema se buscan probar las hipótesis (H_1) y (H_3). En primer lugar se demostrará que el operador $B(t,v)=SA(t,v)S^{-1}-A(t,v)$ está bien definido, luego se usará el Lema 3.3 para garantizar que es un operador acotado.

Lema 3.4. *Sea $s\geq 3$ y considere $S=(1-\Delta)^{s/2}:Y\to X$. Entonces S es un isomorfismo de Y en X, y el operador $B(t,v)=SA(t,v)S^{-1}-A(t,v)\in\mathscr{B}(X)$ para $t\in[0,T]$, y todo $v\in W$.*

Demostración. Veamos que el operador $B(t,v)$ está bien definido. Para esto, basta ver que $SA(t,v)S^{-1} = S(A_0(t)+A_1(t,v))S^{-1}$ lo esta. En efecto, note que si $u \in D(A_0(t))$ entonces

$$\partial_x^k Su = S\partial_x^k u,$$

Por lo tanto $S(A_0(t))S^{-1} = A_0$, y en consecuencia esta bien definido. Por otro lado, dado que S es un isomorfismo, Teorema 2.15, si $u \in H^s(\mathbb{R})$ existe $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $u = (1-\partial_x^2)^{-s/2}\phi$. Por lo tanto

$$A_1(t,v)S^{-1}u = \alpha(t)v\,\partial_x S^{-1}\,u = \alpha(t)v\,\partial_x S^{-1}\,(1-\partial_x^2)^{-s/2}\phi = \alpha(t)v\,\partial_x(1-\partial_x^2)^{-s}\phi.$$

Puesto que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$(1-\partial_x^2)^{-s}\phi \in H^{2s}(\mathbb{R}),$$

con $s \geq 3$. En consecuencia

$$\partial_x(1-\partial_x^2)^{-s}\phi \in H^{2s-1}(\mathbb{R}),$$

por lo tanto $\partial_x(1-\partial_x^2)^{-s}\phi \in H^s(\mathbb{R})$.

Dado que $v \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene $v\partial_x(1-\partial_x^2)^{-s}\phi \in H^s(\mathbb{R})$, por lo tanto

$$\beta(t)v\partial_x(1-\partial_x^2)^{-s}\phi \in H^s(\mathbb{R}).$$

Así $A_1(t,v)S^{-1} \in H^s(\mathbb{R})$, teniendo que el operador $SA(t,v)S^{-1}$ está bien definido. Ahora se verá que $B(t,v) = SA(t,v)S^{-1} - A(t,v) \in \mathscr{B}(X)$. Sea $u, v \in Y$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left(SA(t,v)S^{-1} - A(t,v)\right)u = S\left(\beta(t)\partial_x^3 + \alpha(t)v\partial_x\right)S^{-1}u - \beta(t)\partial_x^3 u - \alpha(t)v\partial_x u \\
&= S\left(\beta(t)\partial_x^3\right)S^{-1}u + S\left(\alpha(t)v\partial_x\right)S^{-1}u - \beta(t)\partial_x^3 u - \alpha(t)v\partial_x u \\
&= \left(\beta(t)\partial_x^3\right)SS^{-1}u + S\left(\alpha(t)v\partial_x u\right)S^{-1}u - \beta(t)\partial_x^3 u - \alpha(t)v\partial_x u \\
&= \left(S\alpha(t)v\,\partial_x S^{-1} - \alpha(t)v\,\partial_x\right)u \\
&= \alpha(t)\left(Sv\,\partial_x S^{-1} - vSS^{-1}\partial_x\right)u \\
&= \alpha(t)\left(Sv - vS\right)S^{-1}\partial_x u,
\end{aligned} \tag{26}$$

De la ecuación (26) y el Lema 3.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\left(SA(t,v)S^{-1} - A(t,v)\right)u\right\|_0 &= \left\|\alpha(t)\left(Sv - vS\right)S^{-1}\partial_x u\right\|_0 \\
&\leq |\alpha|_\infty \left\|\left(\Lambda^s v - v\Lambda^s\right)\Lambda^{-s}\Lambda^{-1}\Lambda^1\partial_x u\right\|_0 \\
&\leq |\alpha|_\infty \left\|\left(\Lambda^s v - v\Lambda^s\right)\Lambda^{1-s}\right\| \left\|\Lambda^{-1}\partial_x u\right\|_0 \\
&\leq C\left\|\operatorname{grad} v\right\|_{s-1}\|u\|_0 \\
&\leq C\|v\|_s\|u\|_0 .
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\|B(t,v)u\|_0 \leq C\|v\|_s \|u\|_0 .$$

Por lo tanto $B(t,v) \in \mathscr{B}(X)$. Dado que $v \in W$, se obtiene

$$\|B(t,v)\|_{\mathscr{B}(X)} \leq \lambda(r),$$

donde $\lambda(r)$ es un valor constante que depende de r, dicho valor r es el radio de W. □

A continuación, se demostrará que el operador $A(t,v)$ satisface la hipótesis (H_4).

Lema 3.5. *Sean $s \geq 3$, $u \in Y$ y $(t,v) \in [0,T] \times W$. Entonces, $Y \subseteq D(A(t,v))$, $A(t,v)\Big|_Y \in \mathscr{B}(Y,X)$, y para cada $v \in W$ la aplicación $A(\cdot,v) : [0,T] \to \mathscr{B}(Y,X)$ es fuertemente continua. Adicionalmente, para cada $t \in [0,T]$ la aplicación $A(t,\cdot) : W \to \mathscr{B}(Y,X)$ es uniformemente Lipschitz en W, es decir,*

$$\|A(t,v_1) - A(t,v_2)\|_{\mathscr{B}(Y,X)} \leq C(r)\|v_1 - v_2\|_s$$

para todo $v_1, v_2 \in Y$.

Demostración. Note que $Y \subseteq D(A_0(t)) = D(A(t,v))$. Ahora, sean $u \in Y$, $t \in [0,T]$ entonces

$$\|A(t,v)u\|_0 \leq \|A_0(t)u\|_0 + \|A_1(t,v)u\|_0 .$$

Por otro lado, se tiene

$$\|A_1(t,v)u\|_0 \leq |\alpha|_\infty \|v\|_\infty \|\partial_x u\|_0 \leq C\,|\alpha|_\infty \|v\|_s \|u\|_1 \leq C' \|v\|_s \|u\|_s\,.$$

Teniendo en cuenta que $A_0(t)$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones, se concluye que

$$\|A(t,v)u\|_0 \leq C_2(1+\|v\|_s)\,\|u\|_s\,,$$

con lo cual $A(t,v) \in \mathscr{B}(Y,X)$. Sea $v_1, v_2 \in W$ y $u \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(A(t,v_1)-A(t,v_2))\,u\|_0 &= \|(A_0(t)+A_1(t,v_1)-A_0(t)-A_1(t,v_2))u\|_0 \\
&= \|\alpha(t)v_1\partial_x u - \alpha(t)v_2\partial_x u\|_0 \\
&= \|\alpha(t)\,(v_1-v_2)\,\partial_x u\|_0 \\
&\leq |\alpha|_\infty \|v_1-v_2\|_0 \|\partial_x u\|_\infty \\
&\leq C_s \|v_1-v_2\|_0 \|\partial_x u\|_{s-1} \\
&\leq C_s \|v_1-v_2\|_0 \|u\|_s\,,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\|A(t,v_1)-A(t,v_2)\|_{\mathscr{B}(Y,X)} \leq C(r)\,\|v_1-v_2\|_s$. Por último, sean $t_1,t_2 \in [0,T]$, y $v,w \in W$ entonces

$$\|(A(t_1,v)-A(t_2,v))\,w\|_0 = \|(A_0(t_1)+A_1(t_1,v_1)-A_0(t_2)-A_1(t_2,v))\,w\|_0$$

$$= \left\| \left(\beta(t_1) - \beta(t_2)\, \partial_x^3 w + (\alpha(t_1) - \alpha(t_2))\, v \partial w\right) \right\|_0$$

$$\leq |\beta(t_1) - \beta(t_2)|_\infty \left\| \partial_x^3 w \right\|_0 + |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)|_\infty \| v \partial w \|_0 . \qquad (27)$$

Teniendo en cuenta la continuidad de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, además de la cota obtenida en la desigualdad (27), si hacemos que $t_1 \mapsto t_2$ se obtiene la continuidad uniforme.

$\square$

De la demostración del Lema 3.5, se tiene para $(t, v) \in [0, T] \times W$, la siguiente acotación

$$\|A(t, v)u_0\| \leq C(1 + \|v\|_s)\, \|u_0\|_s \leq C(1 + \sup_{v \in W} \|v\|_s)\, \|u_0\|_s \leq \lambda(r),$$

teniendo así que el operador $A(t, v)$ satisface la hipótesis (H_5). Teniendo demostradas las hipótesis (H_1)- (H_5), utilizando el teorema 2.28 se puede afirmar el siguiente resultado

Teorema 3.6. *Para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$, existe T', $0 < T' < T$, tal que* (9) *tiene única solución clásica $u \in C([0, T']; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1\left([0, T']; L^2(\mathbb{R})\right)$.*

3.2. Leyes de conservación

Las leyes de conservación establecen que cierta propiedad física (como por ejemplo la masa, la energía, el momento, el momento angular) no cambia en el transcurso del tiempo, siempre y cuando estemos trabajando en un sistema físico aislado. El estudio de las leyes de conservación es importante debido a que permiten predecir el comportamiento macroscópico de un sistema sin necesidad de considerar los detalles microscópicos de un proceso físico.

A continuación se muestra que la solución u del problema de Cauchy (9), obtenida en la sección anterior, satisface tres de las leyes de conservación de la ecuación KdV, en primer lugar se demostrará la ley conservación de la masa.

Teorema 3.7. *Sean $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $u(x,t)$ la solución del problema de Cauchy* (9). *Entonces u satisface*

$$E_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = E_1(0)$$

Demostración. En primer lugar considere la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)\partial_x^3 u = 0.$$

Reescribiendo esta ecuación de forma adecuada se obtiene,

$$u_t + \partial_x\left(\frac{\alpha(t)}{2}u^2 + \beta(t)\partial_x^2 u\right) = 0.$$

Ahora se procede a integrar sobre $\mathbb{R}$ la ecuación anterior

$$\int_{\mathbb{R}} u_t\,dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(\frac{\alpha(t)}{2}u^2 + \beta(t)\partial_x^2 u\right)dx = 0.$$

Teniendo en cuenta que $u \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 3$, entonces $u, \partial_x^2 u \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. En consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}} u_t\,dx = 0,$$

por lo, tanto $E(t)$ es constante.

□

Ahora, se demostrará que dicha solución u del problema de Cauchy (9) satisface la ley de conservación de la energía.

Teorema 3.8. *Sean $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $u(x,t)$ la solución del problema de Cauchy* (9)*. Entonces u satisface*

$$E_2(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)dx = E_2(0)$$

Demostración. En primer lugar multiplique la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo por $2u(x,t)$

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)\partial_x^3 u = 0,$$

$$2uu_t + 2\alpha(t)u^2u_x + 2\beta(t)u\partial_x^3 u = 0.$$

A continuación reescriba la ecuación anterior

$$u_t^2 + \frac{2\alpha(t)}{3}\partial_x\left(u^3\right) + 2\beta(t)u\,\partial_x^3 u = 0,$$

se suma y se resta $2\beta(t)\,\partial_x u\,\partial_x^2 u$

$$u_t^2 + \frac{2\alpha(t)}{3}\partial_x\left(u^3\right) + 2\beta(t)\,\partial_x u\,\partial_x^2 u - 2\beta(t)\,\partial_x u\,\partial_x^2 u + 2\beta(t)u\,\partial_x^3 u = 0. \tag{28}$$

Teniendo en cuenta las siguientes igualdades

$$\partial_x \left(\beta(t)\,(\partial_x u)^2\right) = 2\beta(t)\partial_x u\,\partial_x^2 u,$$

$$\partial_x \left(2\beta(t)u\partial_x^2 u\right) = 2\beta(t)\partial_x u\,\partial_x^2 u + 2\beta(t)u\,\partial_x^3 u,$$

se puede reescribir la ecuación (28) como

$$u_t^2 + \partial_x \left(\frac{2\alpha(t)}{3}u^3 + 2\beta(t)u\partial_x^2 u - \beta(t)\,(\partial_x u)^2\right) = 0. \tag{29}$$

Ahora se procede a integrar sobre $\mathbb{R}$ la ecuación (29), obteniendo

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^2\,dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{2\alpha(t)}{3}u^3 + 2\beta(t)u\partial_x^2 u - \beta(t)\,(\partial_x u)^2\right) dx = 0,$$

teniendo en cuenta que $u \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 3$, entonces $u, \partial_x^2 u \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. En consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^2\,dx = 0,$$

por lo tanto, $E(t)$ es constante. □

Veremos que bajo ciertas condiciones para $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ es posible probar una última ley de conservación

Teorema 3.9. *Sean $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $u(x,t)$ la solución del problema de Cauchy* (9)*, si $\alpha(t) = \beta(t)$.*

Entonces u satisface

$$E_3(t)=\int_{\mathbb{R}}\left((u(x,t))_x^2-\frac{u^3(x,t)}{3}\right)dx=\int_{\mathbb{R}}\left((u_0(x))_x^2-\frac{u_0^3(x)}{3}\right)dx=E_3(0).$$

Demostración. En efecto, considere la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo multiplicada por $-u_{xx}-u^2$

$$\begin{aligned} u_t+\alpha(t)uu_x+\beta(t)\partial_x^3u&=0,\\ \left(-u_{xx}-u^2\right)u_t+\left(-u_{xx}-u^2\right)\left(\alpha(t)uu_x+\beta(t)\partial_x^3u\right)&=0. \end{aligned}$$

A continuación se reescribe la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} -u_{xx}u_t-u^2u_t-\alpha(t)uu_xu_{xx}-\beta(t)u_{xx}\partial_x^3u-\alpha(t)u^3u_x-\beta(t)-u^2\partial_x^3u&=0,\\ -u_{xx}u_t-u^2u_t-\alpha(t)uu_xu_{xx}-\frac{\beta(t)}{2}\partial_x(u_{xx})^2-\frac{\alpha(t)}{4}(u^4)_x-\beta(t)u^2\partial_x^3u&=0. \end{aligned} \tag{30}$$

Integrando sobre $\mathbb{R}$ la ecuación (30), se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}}\left(-u_{xx}u_t-u^2u_t\right)dx-\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)uu_xu_{xx}dx\\ &\qquad-\int_{\mathbb{R}}\frac{\beta(t)}{2}\partial_x(u_{xx})^2dx-\int_{\mathbb{R}}\frac{\alpha(t)}{4}(u^4)_xdx-\int_{\mathbb{R}}\beta(t)u^2\partial_x^3udx=0. \end{aligned} \tag{31}$$

En primer lugar, teniendo en cuenta la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} -u_{xx}u_t - u^2u_t dx = -\int_{\mathbb{R}} u_{xx}u_t dx - \int_{\mathbb{R}} u^2u_t dx,$$

integrando por partes la primera integral del lado derecho se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} -u_{xx}u_t - u^2u_t dx = \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} dx - \int_{\mathbb{R}} u^2u_t dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(u_x^2 - \frac{u^3}{3} \right) dx \tag{32}$$

Además, puesto que $u \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 3$, entonces $u, \partial_x^2 u \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\beta(t)}{2} \partial_x (u_{xx})^2 dx = 0, \tag{33}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha(t)}{4} (u^4)_x dx = 0. \tag{34}$$

Por último, usando integración por parte se tiene

$$-\int_{\mathbb{R}} \beta(t) u^2 \partial_x^3 u = \int_{\mathbb{R}} \beta(t) u u_x \partial_x^3 u. \tag{35}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (31),(32),(33),(34),(35), se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(u_x^2 - \frac{u^3}{3} \right) dx - \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) u u_x u_{xx} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta(t) u u_x \partial_x^3 u = 0.$$

Dado que $\alpha(t) = \beta(t)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(u_x^2 - \frac{u^3}{3} \right) dx = 0,$$

teniendo así que $E_3(t)$ es constante. $\square$

4. Conclusiones y trabajos futuros

El objetivo principal de este proyecto de investigación era obtener un resultado de buena colocación local del problema de Cauchy, asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo. El resultado obtenido es una generalización de los trabajos de Pazy Pazy (2012) y Iorio Iorio and Nunes (1991), donde se aborda la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV. Para profundizar en los resultados presentes en ambos artículos se debió hacer un estudio previo acerca de la teoría de Semigrupos y la teoría cuasilineal de Kato. Es importante resaltar lo realizado en la sección 3.1 no fue encontrado en ninguna de las referencias bibliográficas consultadas, se encontró que en la mayoría de los trabajos previos para la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo se centraban en calcular explícitamente soluciones de la ecuación, mediante distintos métodos analíticos. Adicionalmente, en la sección 3.2 se realizó un estudio adicional demostrando tres leyes de conservación para la ecuación. Por lo tanto, consideramos que estos resultados son las principales contribuciones de nuestro trabajo de investigación. Como trabajos futuros, sería interesante abordar el problema de Cauchy desde el punto de vista del análisis número utilizando el método de elementos finitos. Otro posible trabajo, enfocado en el análisis teórico, sería estudiar la posibilidad de adaptar los resultados de Kato en **?**

para el problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV en espacios de Sobolev con $s > 3/2$.

Referencias Bibliográficas

Ablowitz, M. (2011). *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*, volume 47. Cambridge University Press.

Bao, Y. and Bao, S. (2014). Exact soliton solutions of the variable coefficient KdV equation with forced term. In *Applied Mechanics and Materials*, volume 548, pages 1196–1200. Trans Tech Publ.

Bogerd, J., Tijhuis, A., and Klaasen, J. (1998). Electromagnetic excitation of a thin wire: a traveling-wave approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(8):1202–1211.

Boussinesq, J. (1871). Théorie de lintumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 72(755-759):1871.

Cascaval, R. (2003). Variable coefficient KdV equations and waves in elastic tubes. *Evolution equations*, 234:57–69.

Ferri, F., Garcia, S., Baghdad, M., Reichel, J., and Long, R. (2020). Mapping optical standing-waves of an open-access Fabry–Perot cavity with a tapered fiber. *Review of Scientific Instruments*, 91(3):033104.

Han, C., Wang, Y.-L., and Li, Z.-Y. (2021). Numerical solutions of space fractional variable-coefficient KdV-modified KdV equation by Fourier spectral method. *Fractals*, 29(8):2150246–1602.

Iorio, J. and Iorio, V. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations*. Number 70. Cambridge University Press.

Iorio, J. and Nunes, W. V. L. (1991). *Introdução as equações de evolução não lineares*. IMPA.

Ji, J., Zhang, L., Wang, L., Wu, S., and Zhang, L. (2019). Variable coefficient KdV equation with time-dependent variable coefficient topographic forcing term and atmospheric blocking. *Advances in Difference Equations*, 2019(1):1–18.

Johnson, R. (1973). On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 73, pages 183–203. Cambridge University Press.

Kato, T. (1975). Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations*, pages 25–70. Springer.

Korteweg, D. J. and De Vries, G. (1895). Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240):422–443.

Levario-Diaz, V. and Bhaskar, P. (2020). Effect of acoustic standing waves on cellular viability and metabolic activity. *Scientific reports*, 10(1):1–11.

Linares, F. and Ponce, G. (2014). *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer.

Pazy, A. (2012). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media.

Rojas, C. L. (2018). Teoría cuasilineal de Kato. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 25(2):319–345.

Russel, J. S. (1845). *Report on Waves, Made to the Meetings of the British Association in 1842-1843*. R. and J. Taylor.

Salby, M. L. (1984). Survey of planetary-scale traveling waves: The state of theory and observations. *Reviews of Geophysics*, 22(2):209–236.

Serov, V. et al. (2017). *Fourier series, Fourier transform and their applications to mathematical physics*, volume 197. Springer.

Shearman, E. (1983). Radio science and oceanography. *Radio science*, 18(3):299–320.

Vlieg-Hulstman, M. and Halford, W. (1995). Exact solutions to KdV equations with variable coefficients and/or nonuniformities. *Computers & Mathematics with Applications*, 29(1):39–47.

Zhang, S. (2008). Exact solutions of a KdV equation with variable coefficients via exp-function method. *Nonlinear Dynamics*, 52(1):11–17.

Zhou, Y., Wang, M., and Wang, Y. (2003). Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients. *Physics Letters A*, 308(1):31–36.

Zuo-Nong, Z. (1995). On the KdV-type equation with variable coefficients. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(19):5673.