

**CÁLCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIANTE EL
ALGORITMO DE LOMB**

LUIS AMAURYS LÓPEZ MÁRQUEZ

Presentado ante:

**CONSEJO DE ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA, SANTANDER
NOVIEMBRE DE 2005**

**CÁLCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIANTE EL
ALGORITMO DE LOMB**

AUTOR

LUIS AMAURYS LÓPEZ MÁRQUEZ

DIRECTOR

Msc. JAIME BARRERO PÉREZ

CODIRECTOR

Msc. JAVIER GONZÁLEZ BARAJAS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA, SANTANDER
NOVIEMBRE DE 2005**

AGRADECIMIENTOS

A todos los que de alguna manera, inclusive si ha sido por equivocación, han permitido y facilitado el hecho de poder convertirme en un hombre de bien, capacitado para desarrollar propuestas interesantes en pro de la sociedad, mi familia y de mí mismo.

Un sincero llamado a mis padres, que con su esfuerzo han forjado una excelente educación en su hijo, a mi hermana mayor que ha sido ejemplo claro de superación, valentía y coraje, a mi hermana menor que ha sido mi tormento y mi compañía en los últimos años.

A Javier González por facilitarme el vínculo al proyecto, Jaime Barrero por su tiempo, consejo y colaboración, y a Raúl Castro por su incondicional apoyo.

TÍTULO CÁLCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA MEDIANTE EL ALGORITMO DE LOMB*

AUTOR LÓPEZ MÁRQUEZ, Luis Amaurys**

Palabras claves: Estimación, distorsión espectral, muestreo irregular, densidad espectral de potencia, enventanado, variabilidad.

CONTENIDO

En el estudio de las series temporales se puede destacar el *análisis espectral*, empleado para obtener la información frecuencial, y en particular se presenta la densidad espectral de potencia como el promediado estadístico apropiado para caracterizar señales aleatorias. Los métodos de estimación para la densidad espectral de potencia particularmente asumen estacionariedad y un espaciado uniforme entre los datos, dificultando el análisis al considerar series temporales con una frecuencia de adquisición variable. La falta de muestreo uniforme típicamente se aborda con métodos que emplean remuestreo, enventanado o realizando un ajuste a una distribución espectral conocida. El método de estimación espectral de mejor rendimiento en cuanto a los índices de distorsión espectral, tiempo de cálculo y nivel de ruido empleado sobre señales con muestreo irregular es el cálculo de la densidad espectral de potencia (DEP) mediante el algoritmo de Lomb, el cual es un método directo de fácil programación, que puede incorporar el uso de enventanado y ponderaciones, mostrándose como una alternativa viable para el análisis de la variabilidad del ritmo cardiaco (VRC); mientras que el remuestreo no es la alternativa más viable para el análisis espectral de potencia cuando el muestreo es irregular, debido a que actúa como un filtro pasabajo y aumenta la varianza y el tiempo de cómputo al emplear métodos de interpolación de orden superior.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: BARRERO PÉREZ, Jaime Guillermo. Codirector: GONZÁLEZ BARAJAS, Javier.

TITLE POWER SPECTRAL DENSITY CALCULATION BY MEANS LOMB ALGORITHMS*

AUTHOR LÓPEZ MÁRQUEZ, Luis Amaurys**

Key words: Estimation, spectral distortion, irregular sampling, power spectral density, windowed, variability.

CONTENT

In temporary series studies it can stand out the spectral analysis, employee to obtain the frecuencial information, and in particular the power spectral density is presented like the one averaged statistical appropriate to characterize random signs. The estimate methods for the power spectral density particularly assume stationary and spaced uniform among the data, hindering the analysis when considering temporary series with a frequency of variable acquisition. The lack of uniform sampling typically is approached with methods that use re-sampling, windowed or carrying out an adjustment to a well-known spectral distribution. The method of spectral estimate of better yield as for the indexes of spectral distortion, time of calculation and level of noise used on signs with irregular sampling is the power spectral density calculation by means Lomb algorithm. It is a direct method of easy programming, can incorporate windowed and weighted use, showing you like a viable alternative for the analysis of the variability of the heart rhythm (VRC); while re-sampling is not the viable alternative for the spectral analysis of power when the sampling is irregular because it acts as a filter and it increases the variance and the time of computation when using methods of high order interpolation.

* Grade work's

** Phisic-Mecanic Engineering Faculty. Electric, Electronic and Telecommunications Engineering School. Director: BARRERO PÉREZ, Jaime Guillermo. Co-director: GONZÁLEZ BARAJAS, Javier.

TABLA DE CONTENIDO

	pág
INTRODUCCIÓN	16
1. DEL MUESTREO REGULAR AL IRREGULAR	17
1.1 CONSIDERACIONES BÁSICAS DEL MUESTREO UNIFORME	1
1.2 TIPOS DE MUESTREO IRREGULAR	21
1.3 DEL MUESTREO NO UNIFORME AL UNIFORME: REMUESTREO	22
1.4 ANÁLISIS TEÓRICO DE LOS MÉTODOS SIMPLES DE REMUESTREO	23
1.5 MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN	25
1.6 ERRORES EN EL REMUESTRO CON INTERPOLACIÓN PARA SIM	28
1.7 SOBREMUESTREO	31
1.8 IMPOSIBILIDAD DE EMPLEAR LOS MÍNIMOS CUADRADOS CON SENOIDALES	33
2 MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA	34

2.1 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS	35
2.2 MÉTODOS PARAMÉTRICOS	36
2.3 MÉTODOS ESPECTRALES VARIANTES CON EL TIEMPO	38
2.4 MÉTODOS ESPECTRALES DIRECTOS PARA SIM	39
2.5 MÉTODOS ESPECTRALES DE AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS	42
2.5.1 La formulación de Bloomfield	43
2.5.2 La formulación de Lomb-Scargle (LS)	44
2.5.3 Análisis estadístico del periodograma LS	45
2.5.4 Aplicación de la Pseudo-Inversa al periodograma LS	51
2.5.5 El periodograma LS modificado: el periodograma Welch-Lomb	53
2.5.6 Extensión del periodograma LS al periodograma LS no senoidal por Bretthorst	54
2.5.7 Extensión del periodograma LS a una serie compleja aplicando la pseudo-inversa	56
2.5.8 Extensión del periodograma LS al inventariado y al análisis Wavelet por Mathias, Grond, Guardans, Seese, Canela y Diebner: periodograma LS inventariado	58
2.5.9 Convergencia del periodograma LS	59

2.5.10 Cambio en el cálculo del valor medio en el periodograma LS	61
2.5.11 Extrapolación del algoritmo LS para el cálculo del biespectro y la no linealidad	62
3 COMPARACIÓN ENTRE ESTIMADORES DE POTENCIA ESPECTRAL	65
3.1 COMPARACIÓN ENTRE PERIODOGRAMAS: CLÁSICO VS LOMB-SCARGLE	68
3.2 SIMULACIONES EMPLEANDO MUESTREO IRREGULAR	70
3.2.1 Modelo de muestreo senoidal fluctuante o muestreo fluctuante aleatorio	71
3.2.2 Simulación para la comparación entre periodogramas: Clásico vs. LS	71
3.2.3 Resumen de resultados usando el modelo senoidal fluctuante	73
3.3 COMPARACIÓN ENTRE LAS VARIANTES DEL PERIODOGRAMA DE LOMB	74
3.3.1 Resumen de los resultados de la comparación de las variantes del algoritmo de Lomb	77
3.4 COMPARACIONES PARA DIFERENTES TIPOS DE MUESTREOS	77
4 APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LOMB SOBRE VRC	78
4.1 LA MEDICIÓN DE LA VARIABILIDAD DEL RITMO CARDIACO	80
4.1.1 Perspectiva histórica	80

4.1.2 Obtención de la señal de ritmo cardiaco o señal RR	81
4.1.3 Análisis de la VRC en tiempo y en frecuencia	82
4.1.4 Detrending avanzado basado en aproximaciones previas suavizadas	85
4.1.5 Inconvenientes de los estimadores espectrales para el análisis de la VRC	88
4.1.6 Análisis fractal y no lineal de la VRC	90
4.2 SIMULACIÓN CON SEÑALES SENOIDALES	91
4.3 ANÁLISIS DE LA VRC MEDIANTE EL ALGORITMO DE LOMB	97
4.4 RELACIÓN ENTRE LOS ESPECTROS DE LAS SEÑALES ECG Y RR	105
CONCLUSIONES	107
BIBLIOGRAFÍA	

LISTA DE FIGURAS

	pág
Figura 1. Proceso de muestreo y conversión Analógica/Digital	18
Figura 2. Aliasing. Características en tiempo y frecuencia para: a. señal continua, b. señal muestreada, c. disminución de la frecuencia de muestreo, d. suma de espectros y e. filtrado	20
Figura 3. NNR mejorado. 'o' valor por estimar, '+' son los 5 vecinos más cercanos	21
Figura 4. Intervalo T_r y el intervalo T_I usados para el remuestreo con S&H. o = irregular	23
Figura 5. Relación entre $x_R'(t)$ y $x(t)$	24
Figura 6. Multiplicación anidada	26
Figura 7. Manchas presentes en el método de distancia inversa	27
Figura 8. Efectos en tiempo del remuestreo de un pulso para diversos interpoladores	29
Figura 9. Errores de remuestreo promedio (DE y ER) para 6 interpoladores evaluados en 100 frecuencias $[0, 0,5f_s]$, con 1000 muestras	30
Figura 10. Señal de banda limitada, señal muestreada a $f_s=2f_{max}$ y señal sobremuestreada a $f_s'=4f_{max}$ ($L=2$) en el dominio de la frecuencia	32

Figura 11. Efecto del sobremuestreo sobre la frecuencia de corte de 4 interpoladores	32
Figura 12. Ejemplos de Wavelets madres coif3, db9 y meyr	39
Figura 13. Evaluación variante en el tiempo de la TF sobre una ventana $[t_1, t_N]$: La NFDT	40
Figura 14. Error promedio de la medida de la media convencional y de los algoritmos integradores para una señal seno a diferentes frecuencias	61
Figura 15. Ganancias en la estimación espectral mediante la funciones Wavelet	65
Figura 16. Nivel de ruido presente en algunos métodos para la estimación de la DEP	68
Figura 17. Detalle de las características de acuerdo a la fase del caso 1 de la tabla 7	72
Figura 18. Nivel de ruido para 4 algoritmos de Lomb, $N=100$, $m=100$	75
Figura 19. Nivel de ruido para 4 algoritmos de Lomb, $N=100$, $m=100$	76
Figura 20. Descripción esquemática de la organización del sistema nervioso central	79
Figura 21. Obtención de la señal RR para dos señales ECG	83
Figura 23. Etapas necesarias para la mediación de la VFC	83
Figura 24. Tiempo computacional para seis métodos de estimación espectral	93
Figura 25. Estimación de la DEP de una señal senoidal sin ruido con muestreo regular	94

Figura 26. Función de transferencia para cuatro estimadores espectrales	94
Figura 27. Efecto del aliasing para una señal con muestreo regular	96
Figura 28 Efecto del aliasing para una señal con muestreo irregular	96
Figura 29. Biespectro y diagrama bilogarítmico de una persona sana: ECG 19140normal	103
Figura 30. Biespectro y diagrama bilogarítmico de una persona enferma: ECG chf01	103
Figura 31. Estimación espectral de la señal RR de un paciente con epilepsia: ECG sz01	104
Figura 32. Estimación espectral de la señal RR de un paciente con fibrilación atrial: ECG 04015atrial	104
Figura 33. Estimación espectral de la señal ECG y su respectiva señal RR	105

LISTA DE TABLAS

	pág
Tabla 1. Formato de tabulación de la información	25
Tabla 2. Frecuencias de corte promedio para diversos métodos interpoladores (en 1/T0)	28
Tabla 3. Cuadro comparativo de interpoladores normalizado a los valores de S&H	31
Tabla 4. Valores del error en la estimación de la media para diferentes algoritmos	62
Tabla 5. Distorsión espectral de la estimación de potencia de ruido con muestreo regular	66
Tabla 6. Tiempo computacional en segundos de estimadores de potencia espectral	67
Tabla 7 Descripción de las características del periodograma de Lomb según la fase	72
Tabla 8. Descripción de las características del periodograma de Lomb según N	72
Tabla 9. Error medio cuadrático del periodograma de Lomb para $f = 0.5 f_s^{irr}, f_s^{cir}$	73
Tabla 10. Distorsión espectral de la estimación de potencia de ruido blanco	74
Tabla 11. Distorsión espectral para estimadores que usan ventanas, N=1000, m=100	74
Tabla 12. Tiempo computacional en segundos para las variantes del algoritmo de Lomb	76
Tabla 13. Distorsión espectral para los métodos seleccionados para muestreo irregular	77

Tabla 14. Medidas de VRC en el dominio del tiempo	85
Tabla 15. Bandas de frecuencias para el análisis de la VFC	86
Tabla 16. Resultados de las cinco señales sintéticas	92
Tabla 17. Errores de estimación para una señal senoidal y un armónico	95
Tabla 18. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 16265 normal	97
Tabla 19. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 16773 normal	98
Tabla 20. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 19140 normal	98
Tabla 21. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 04015 atrialfib	99
Tabla 22. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 04936 atrialfib	99
Tabla 23. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG chf01fail	100
Tabla 24. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG sz01	100
Tabla 25. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG sz04	101
Tabla 26. Análisis por bandas de frecuencia, no lineal y fractal de la VRC	102

INTRODUCCIÓN

La voz, los electrocardiogramas, y los electroencefalogramas son ejemplos de señales que varían con una única variable independiente, el **tiempo**, y se denominan en un sentido amplio series temporales.

En el estudio de las series temporales se puede destacar *el análisis espectral*, empleado para obtener la información frecuencial, y en particular se presenta la densidad espectral de potencia como el promediado estadístico apropiado para caracterizar señales aleatorias.

Los métodos de estimación para la densidad espectral de potencia particularmente asumen estacionariedad y un espaciado uniforme entre los datos, dificultando el análisis al considerar series temporales con una frecuencia de adquisición variable. Dicha falta de muestreo uniforme típicamente se aborda con métodos que emplean remuestreo, enventanado o realizando un ajuste a una distribución espectral conocida.

Los métodos de *enventanado* fijan una estimación de la covarianza equidistante de los datos, sin embargo no es una estimación válida al presentar estimaciones negativas, por lo que teóricamente no puede darse ninguna interpretación útil. Los métodos de *ajuste* a un modelo espectral paramétrico sólo pueden ser útiles si la forma de la distribución espectral de los datos es a priori conocida. Los métodos que *remuestran* los datos en una base de tiempo equidistante causan una distorsión del espectro estimado que aumenta fuertemente con la frecuencia, disminuyendo los detalles espectrales a alta frecuencia¹.

Debido a que estos métodos no proporcionan resultados óptimos se desarrolla una nueva alternativa con el fin de obtener una estimación apropiada de la densidad espectral de potencia para señales irregularmente muestreadas: el empleo de métodos directos usando la información de tiempo exacta, cuyo primer representante es el método de **Lomb-Scargle**

(*Lomb*², 1976 y *Scargle*, 1989, que a veces sólo se denota por *Lomb*), introducido por *Lomb* para el proceso de señales astronómicas.

Este proyecto de grado que presenta como eje temático central el periodograma de *Lomb-Scargle*, surge en primera instancia como un trabajo de apoyo al proyecto de maestría “Procesamiento digital de la señal electrocardiográfica con tecnología DSP orientado al análisis de la frecuencia cardíaca” desarrollado por *Javier González Barajas*, pues el análisis de variabilidad de frecuencia cardíaca en el dominio de la frecuencia se hace en base a la señal de frecuencia instantánea del corazón la cual es discreta e irregularmente muestreada.

Se asienta en la necesidad de verificar que los nuevos métodos de estimación espectral son consistentes para cualquier tipo de muestreo, lo cual conlleva a una etapa de comparación y/o de ajustes de los parámetros propios de cada método, en la cual la intención es distinguir al algoritmo de *Lomb*, presentando sus fortalezas matemáticas y las posibles extensiones que puede generar.

El desarrollo del texto se resume en cuatro capítulos. El primer capítulo expone las consideraciones básicas del muestreo y sustenta las razones por las cuales se considera que el remuestreo no es una herramienta óptima para el análisis espectral. El segundo capítulo sustenta toda la base teórica que se origina en torno al periodograma de *Lomb-Scargle*, y algunos métodos directos. El tercer capítulo muestra los resultados de la comparación del periodograma de *Lomb* con los diversos métodos de estimación espectral y las variantes del mismo periodograma expuestas en el segundo capítulo. El cuarto capítulo presenta una implementación del periodograma de *Lomb* para una señal real con muestreo irregular y su comparación con la estimación espectral por el método de remuestreo y FFT.

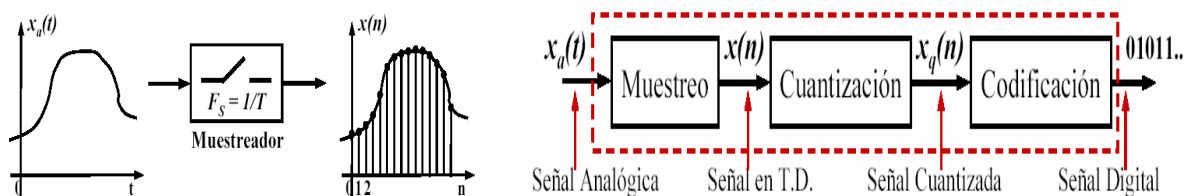
1. DEL MUESTREO REGULAR AL IRREGULAR

1.1 CONSIDERACIONES BÁSICAS DEL MUESTREO UNIFORME

La mayoría de las señales de interés son de tipo analógico, para procesar estas señales en forma digital es necesario convertirlas en una secuencia de números de precisión finita. Los dispositivos que realizan esta operación se denominan conversores análogo-digital (A/D), que constan de un muestreo (en tiempo), una cuantización (en amplitud y tiempo) y una codificación (Fig. 1).

El procesamiento de una señal digitalizada brinda las características de *flexibilidad*, por lo cual la función de un sistema se puede actualizar o modificar reprogramando el software, *reproducibilidad*, donde una operación en dos unidades distintas es idéntica, *seguridad*, los microprocesadores no se deterioran con el tiempo como lo hacen los componentes analógicos y su operación no cambian con las condiciones ambientales, *complejidad*, permite realizar operaciones más sofisticadas (reconocimiento de voz, imágenes), es de fácil almacenamiento, transportabilidad controla de los requisitos de precisión, bajo costo y además existen algoritmos que no tienen su equivalente analógico.

Figura 1. Proceso de muestreo y conversión Analógica/Digital



El *muestreo uniforme*, regular o periódico se obtiene tomando muestras de una señal continua en el tiempo, $x_a(t)$, cada T segundos; así, $x(n) = x_a(nT) | n \in \mathbb{Z}$, es el producto del muestreo y es una señal en tiempo discreto (TD), la cual permite digitalizar la señal $x_a(t)$.

La frecuencia de muestreo f_s , corresponde al inverso del período T , siendo ambos constantes para el muestreo regular.

Si $x_a(t)$ es una señal no periódica con energía finita $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt < \infty\right)$, su transformada de Fourier (TF) o espectro es $X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt$, la cual es una representación de la señal $x_a(t)$ en el dominio de la frecuencia; así mismo, la señal $x_a(t)$ puede recuperarse a partir de su espectro $X_a(f)$ a través de la transformada inversa, $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f) e^{j2\pi f t} df$.

El espectro de la señal $x(n)$ viene dado por la TF discreta $X(f/f_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi n f / f_s}$, al relacionarse con $X_a(f)$: $X(f/f_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[f - kf_s]$, o, $X(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f - k)f_s]$, revela que de la señal en TD consiste de una repetición periódica del espectro escalado $f_s \bullet X_a(f)$ de la señal en tiempo continuo, pudiéndose recuperar la señal $x(n)$ a partir de su espectro usando la transformada inversa, $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f/f_s) e^{j2\pi n f} df$.

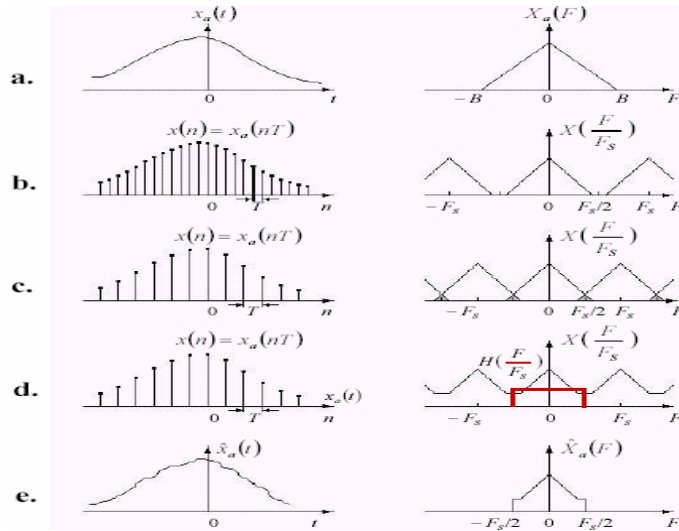
Para recuperar la señal $x(n)$ a partir de su espectro se debe tener en cuenta las consideraciones enunciadas en el Teorema del Muestreo: “Si la máxima frecuencia contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $f_{max}=B$ y la señal es muestreada con una frecuencia $f_s > 2f_{max}=2B$ ”, entonces $x_a(t)$ puede ser exactamente recuperada a partir de las muestras $x_a(nT)$ mediante el uso de la fórmula de interpolación ideal,

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}, \text{ que se deriva de la TF inversa.}$$

Si no se cumple con dichas consideraciones, la periodicidad de $X_a(f)$ resulta en sobreposición de espectros. El espectro $X(f/f_s)$ de la señal en TD contiene **alias**, componentes de frecuencia que son copias desplazadas del espectro de la señal analógica, dicha presencia de *aliasing* impide que la señal original pueda recuperarse a partir del

espectro de la señal muestreada (Fig. 2). En la práctica, se emplea un prefiltro de anti-aliasing antes de muestrear la señal para asegurar que las componentes de frecuencia por encima de $f_s/2$ están suficientemente atenuadas y de esta forma el *aliasing* no produce una distorsión apreciable.

Figura 2. *Aliasing.* Características en tiempo y frecuencia para: a. señal continua, b. señal muestreada, c. disminución de la frecuencia de muestreo, d. suma de espectros y e. filtrado.



Como en el caso de señales en tiempo continuo es posible expresar el espectro $X(\omega)$ en términos de las muestras $X(2\pi k/N)$ con $k=0,1,\dots,N-1$, conociendo la representación de una señal $x(n)$ en TD mediante muestras de su espectro $X(\omega)$ y $x(n)$ siendo una señal aperiódica de energía finita con un espectro continuo $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$.

Al muestrear en frecuencia periódicamente $X(\omega)$, con un espaciado entre muestras δ_ω , tomando K muestras equidistantes en un período de $X(\omega)$, en el rango $0 \leq \omega < 2\pi$, de tal manera que $\delta_\omega = 2\pi/K$, la fórmula de interpolación en este caso resulta:

$$X(f) = \sum_{k=0}^{K-1} X\left(\frac{2\pi k}{K}\right) I\left(\omega - \frac{2\pi k}{K}\right) \quad K \geq L, \quad \text{donde } I(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega K/2)}{K \text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega \frac{K-1}{2}} \quad \text{es el}$$

interpolador y L la duración de la señal.

De modo similar, el espectro $X(\omega)$ en frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k=2\pi k/N$, puede expresarse como $X(\omega_k) = X(2\pi k/K) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{\frac{-j2\pi(n-1)}{N}}$, expresión empleada para definir la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT) con N puntos: si la señal es de longitud L , con $N \geq L$, la DFT con N puntos puede pensarse como muestras del espectro $X(\omega)$ en las frecuencias equiespaciadas $\omega_k=2\pi k/N$, en cambio si no se verifica que, $N \geq L$ entonces la DFT con N puntos de la señal no puede pensarse como muestras del espectro $X(\omega)$. Cuando la señal $x(n)$ puede recuperarse a partir de las muestras $X(\omega_k)$ se emplea la DFT inversa,

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} / N.$$

Para añadir, el problema más importante de muestrear una señal con un intervalo T es si se prefiere la invarianza en tiempo o en el dominio de frecuencia. La aproximación en el dominio del tiempo preserva la función de la covarianza en los tiempos desplazados kT , mientras la aproximación en el dominio de la frecuencia intenta conservar la parte del espectro original hasta la frecuencia p/T y requiere el uso de filtros anti-aliasing no ideales.

1.2 TIPOS DE MUESTREO IRREGULAR

Para definir el muestreo irregular, no uniforme, o aperiódico, basta con decir que es aquel donde la frecuencia de muestreo no es constante, o que varía súbitamente; lo cual implica que puede aparecer en cualquier tipo de aplicación, a pesar que se crea emplear un muestreo regular. Otra manera de describir el muestreo irregular es, como el producto de un muestreo regular al cual se la ha adicionado ruido o algunas fluctuaciones transitorias³.

El tipo más común de muestreo irregular aparece cuando existe un error en el muestreo regular causado ya sea por la pérdida u omisión de datos, o por cambios en la frecuencia instantánea de muestreo. El segundo caso se presenta al intercalar el muestreo regular y *lapsus* de tiempo sin muestreo, que se conocen como huecos, saltos a procedimientos o llamadas del sistema. El tercer caso se presenta cuando el muestreo es intencionalmente

irregular y comúnmente se le asocia con una función de distribución de probabilidad, de la cual se extrae una frecuencia de muestreo promedio f_p . El cuarto caso es cuando la naturaleza de la señal es intrínsecamente irregular.

1.3 DEL MUESTREO NO UNIFORME AL UNIFORME: REMUESTREO

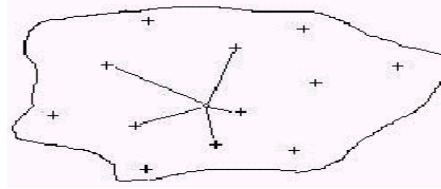
Siguiendo con el principio anteriormente mencionado, cuando se presentan datos que no tengan una frecuencia de muestreo constante, existe la alternativa de aproximar dichos datos a unos que sí cumplan con este requisito. El **remuestreo**, permite que una señal regularmente muestreada (SRM) se extraiga de observaciones que se espacien irregularmente en el tiempo (SIM). Los métodos de remuestreo pueden ser divididos en simples y complejos, los métodos simples como Sample&Hold (S&H) y el Vecino más cercano (NNR) usan sólo una muestra irregular para una observación del remuestreo; los métodos complejos como spline, interpolación, regresión, ajuste de curvas por mínimos cuadrados y NNR mejorado usan dos o varias muestras cercanas.

S&H es un método popular de remuestreo de retención, de orden cero, donde la señal remuestreada es el igual al último valor conocido de la muestra irregular. NNR es un método simple donde la señal remuestreada a es igual al valor más cercano conocido de la muestra irregular. Con S&H, el espectro de la señal remuestreada no despliega picos falsos, por consiguiente, se clasifica como un método de remuestreo robusto, mientras que NNR no lo es.

El NNR mejorado es muy aplicado para diferentes propósitos, existiendo diferentes formulaciones e interpretaciones, por ejemplo cuando se usa vecinos de acuerdo a una métrica de distancia aplicada a cada uno de los datos que componen la señal, y se define de la siguiente forma: Sean x_1, \dots, x_n datos distribuidos temporalmente en tiempos t_1, \dots, t_n de x_0 el método consiste en tomar los k datos más próximos y aplicarle una función F adecuada, que dependerá de los tipos de datos, tal F pueda consistir por ejemplo en tomar el máximo de los datos, la media de los datos, o el valor que más se repite (mayoría), etc. $x_i =$

$F(x_1, \dots, x_n)$. La cantidad de muestras irregulares consideradas puede ser una o varias, dependiendo del criterio que se emplee (Fig. 3).

Figura 3. NNR mejorado. ‘o’ valor por estimar, ‘+’ son los 5 vecinos más cercanos

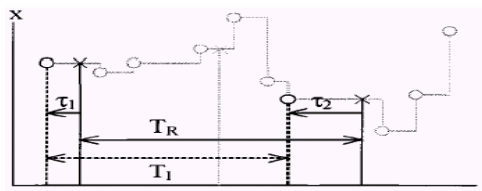


1.4 ANÁLISIS TEÓRICO DE LOS MÉTODOS SIMPLES DE REMUESTREO

Dado que el intervalo T_R (tiempo de remuestreo) entre los datos remuestreados es diferente de los varios intervalos T_i entre las muestras irregularmente espaciadas usadas para el remuestreo (Fig. 4). La diferencia entre T_i y T_R causa las desviaciones entre las propiedades de la señal remuestreada y las propiedades de la señal original. De tal forma que con NNR, la desviación cuadrática media entre T_R y T_i será menor que para S&H⁴.

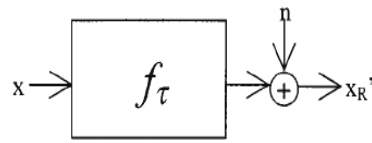
Asumiendo que los tiempos de muestreo son igualmente distribuidos con tiempo de muestreo irregular medio ($T_i = \bar{T}_i$), de tal manera que el tiempo entre las muestras tiene una distribución exponencial y que $T_R \gg T_i$, (esto significa que el número de veces que un mismo dato irregular se usa para dos aproximaciones remuestreadas es despreciable) entonces la posibilidad P de usar una misma muestra para dos remuestreos con S&H es igual a la posibilidad que el tiempo entre dos muestras irregulares sea más grande que el tiempo del remuestreo, $P_{S\&H} = e^{-T_R/T_i}$. Para NNR esta posibilidad es menor que para S&H.

Figura 4. Intervalo T_r y el intervalo T_i usados para el remuestreo con S&H. o = irregular



Siendo $x_R(t)$ la señal remuestreada de $x(t)$, se cumple que $x_R(t) = x(t-\tau_1)$ y $x_R(t+T_R) = x(t+T_R-\tau_2)$. Al reorganizar y sustituir la variable $T_r = T_R - \delta\tau$, con $\delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, en la función de autocovarianza de $x_R(t)$, $R_{x_R}(T_r) = E[x_R(t)x_R(t+T_r)]$, se obtiene que $R_{x_R}(T_r) = E[x(t)x(t+T_r)]$, indicando que $x_R(t)$ tiene la misma función de autocovarianza de una señal artificial $x_R'(t)$, que es una versión filtrada de la señal $x(t)$ más ruido blanco.

Figura 5. Relación entre $x_R'(t)$ y $x(t)$



Para $T_r=0$, $R_{x_R}(0) = E[x(t)^2] = R_x(0)$, esto relación demuestra que la varianza de la señal remuestreada es igual a la varianza de la señal original. También puede declararse que τ_1 y τ_2 son variables estocásticas independientes con la misma función de distribución f_τ , cuyas expresiones para S&H y NNR son $f_\tau(\text{S\&H}) = e^{-\tau/T_i}/T_i | \tau > 0$, $f_\tau(\text{NNR}) = e^{-2|\tau|/T_i}/T_i$. De aquí se desprende que las desviaciones estándar de T_r para S&H y NNR sean $\text{sd}(\text{S\&H}) = T_i\sqrt{2}$, y $\text{sd}(\text{NNR}) = T_i$.

La desviación entre T_r y T_i es menor para NNR que para S&H, por consiguiente, se espera que NNR conserve mejor el carácter de la señal original que S&H. El nivel de ruido del remuestreo, $n_{\text{S\&H}}$, puede relacionarse en S&H a una cantidad medible, llamada la diferencia cuadrada media entre muestras irregulares subsecuentes $n_{\text{S\&H}} = E[(x_I(n) - x_I(n-1))^2]$. Así, una indicación del nivel de ruido de remuestreo para S&H, $n_{\text{S\&H}}$, puede obtenerse de las mediciones, esta expresión resulta útil cuando el ruido de la medición se presenta además de la influencia de remuestreo. Sin embargo, la obtención de dichos resultados para un algoritmo más complejo no promete ser simple.

1.5 MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

Uno de los procedimientos más útiles en el procesamiento de información, es el de construir curvas con base en unos cuantos puntos de referencia P_j con coordenadas (x_j, y_j) , (Tabla 1). Las curvas obtenidas representan y aproximan la información puntual y con las debidas precauciones, se usan frecuentemente en lugar de los datos originales. Si la curva que se construye pasa por todos los puntos de la tabla, se denomina una *interpolación*. Si la curva no tiene que pasar por los puntos pero satisface un cierto criterio de cercanía, se denomina una *aproximación* a los datos de la tabla, donde los criterios de cercanía son procedimientos de optimización entre los cuales el más común es, posiblemente, el de *mínimos cuadrados*.

Tabla 1. Formato de tabulación de la información

j	0	1	...	N
x_j	x_0	x_1	$x...$	x_n
y_j	y_0	y_1	$y...$	y_n

Los cuatro métodos de interpolación más utilizados son el *lineal*, donde los puntos se unen por medio de rectas, el *cúbico* y el *polinomial*, que construyen un polinomio cúbico o polinomial, respectivamente, que pasa por los puntos y el *spline*, que es una interpolación cúbica segmentaria, donde cada segmento es un polinomio cúbico que se une suavemente con el vecino, o sea que su valor y los de sus dos primeras derivadas en el punto de encuentro, concuerdan con los del vecino.

Algunos métodos de interpolación son apropiados para completar datos faltantes, por lo cual pueden ser pensarse que son útiles para realizar la conversión del muestreo irregular al regular. La interpolación lineal, también es un método de remuestreo robusto y la reconstrucción de la señal original generalmente es más exacta que con S&H; sin embargo, la varianza de la señal estimada es demasiado baja y causa problemas en la estimación espectral, mientras que las estimaciones con interpoladores cúbicos y polinómicos mejoran esta característica, pero no la hacen satisfactoria. La interpolación spline cúbica satisface la

varianza de la señal, pero conlleva a picos falsos en la señal remuestreada para varios tipos de datos.

Las ideas teóricas sobre interpolación, se encabezan por el teorema fundamental de interpolación polinómica que garantiza existencia y unicidad del polinomio interpolante. Para el cálculo de los coeficientes, la idea en la demostración de existencia conlleva a considerar el procedimiento recurrente: $p_0(x) = y_0 = c_0$, $p_1(x) = p_0(x) + c_1(x-x_0)$, ..., de tal

forma que $p_k(x) = \sum_{j=0}^k c_j \prod_{S=0}^{j-1} (x-x_S)$ con la convención $\prod_{S=0}^m (x-x_S) = 1$, si $m < 0$. Para evaluar

los valores p_k y para calcular los c_j se usa la multiplicación anidada (Fig. 6).

Figura 6. Multiplicación anidada

```

c0 = y0
Para k = 1, 2, ..., n
    d ← xk - xk-1
    u ← ck-1
    Para i ≥ 0 e i = k - 2, k - 3, ..., 0
        u ← u(xk - xi) + ci
        d ← d(xk - xi)
    Fin i
    ck ← (yk - u) / d
Fin k

```

Hay una expresión equivalente para el polinomio interpolante de grado máximo n y se conoce como la forma de *Lagrange*. Está dada por $p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$ donde

$l_k(x) = \prod_{S=0, \dots, S \neq k}^n \frac{(x-x_S)}{(x_k-x_S)}$. A los polinomios l_k se les llama polinomios básicos de *Lagrange* o

funciones cardinales. Estos polinomios son de grado n y el polinomio interpolante se consigue como una suma ponderada de polinomios de grado n . Como característica $l_k(x_j) = \delta_{kj}$ o delta de *Kronecker*, que toma el valor 1 si $k=j$ y 0 si $k \neq j$. En particular, los cálculos con la forma de *Lagrange*, son más susceptibles de ser inestables numéricamente que los cálculos con diferencias divididas.

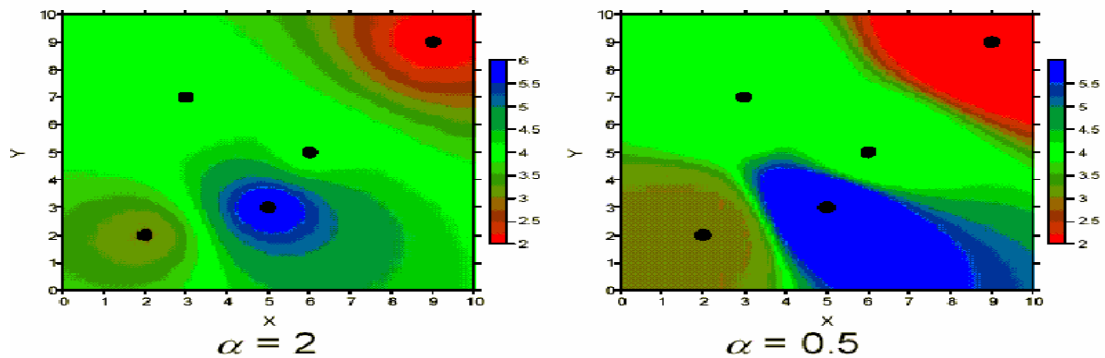
Otros métodos de interpolación son la media ponderada de los datos donde $Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$, donde $Z^*(x_0)$ es el valor a estimar y λ_i es un valor cualquiera de ponderación deseado, y el *método de la distancia inversa*, donde $\lambda_i = d_i^{-\alpha} / \sum_{i=1}^n d_i^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$ y $d_i = |x_i - x_0|$, es muy popular, sobre todo para $\alpha=2$. Es localmente sensible, λ_i disminuye rápidamente cuando d_i aumenta, la elección de α es arbitraria y no tiene en cuenta la configuración de los datos, es muy rápido y presenta el efecto Bull's-eyes (manchas cerca de los datos y derrame espectral de la señal, Fig. 7). Con la interpolación senoidal, existe la posibilidad de realizar una aproximación considerando T como el promedio del espaciado irregular.

La ecuación para la interpolación senoidal viene dada por $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \frac{\text{sen}(\omega_0(t - nT))}{\omega_0(t - nT)}$,

sustituyendo t por x_0 y nT por x_i se obtiene $Z^*(x_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Z(x_i) \cdot \frac{\text{sen}(\omega_0(x_0 - x_i))}{\omega_0(x_0 - x_i)}$, donde

$Z^*(x_0)$ es la aproximación de la señal reconstruida, $Z(x_i)$ es la secuencia de muestras, ω_0 es la frecuencia de remuestreo. La interpolación senoidal (o sinc) asegura una reconstrucción de la señal lo más exacta posible, siendo el único tipo de interpolación lineal que es ortogonal, satisface el criterio de *Nyquist* sin tener en cuenta el número de muestras, y además puede aplicarse en tiempo real.

Figura 7 Manchas presentes en el método de distancia inversa.



1.6 ERRORES EN EL REMUESTRO CON INTERPOLACIÓN PARA SIM

Los métodos de interpolación pueden remuestrear una señal cualquiera, pero *no son ideales*, cuando ideal se refiere a buscar nuevas muestras que tengan el mismo espectro. Es posible obtener un interpolador ideal con la interpolación vía DFT o FFT, si se tiene N muestras de una señal y se desea conocer P valores con $P > N$ se calcula la DFT/FFT de los N datos originales, lo cual origina N muestras en el dominio de la frecuencia, se incluyen $P - N$ ceros en el centro de la transformada, aumentando la frecuencia de muestreo desde f_s a $P/N f_s$, pero que represente el mismo espectro, para así obtener P datos con la IDFT/IFFT. Sin embargo esta maravillosa idea además de no interpolar en tiempo real, *no funciona* para datos irregulares, debido a que la FFT y la DFT se basan en una SRM*.

Todas las formas de interpolación se comportan como un **filtro variante en el tiempo**, que actúa con una función de transferencia (que es función del espacio entre las muestras interpoladas, T_0). Al aumentar el orden de las interpolaciones, la función de transferencia del filtro interpolador equivalente se aproxima a la de un filtro ideal y por tanto se minimiza el efecto de filtrado paso bajo, propio de cualquier método de interpolación, empero existe un orden máximo ya que con órdenes superiores no se mejoran los resultados debido a la precisión limitada en los cálculos. Esto supone un efecto de filtrado paso bajo despreciable y una distorsión prácticamente nula.

Tabla 2. Frecuencias de corte promedio para diversos métodos interpoladores (en $1/T_0$)

Método de interpolación	Lineal	Cúbica y Pchip	Spline	Senoidal	Distancia inversa
Señal pulso	$0,288 \pm 0,023$	$0,307 \pm 0,016$	$0,339 \pm 0,028$	0,5	$0,354 \pm 0,019$

Al emplear las distribuciones[†] $Beta(1,2)$, $\chi^2(10,1)$, $Exponencial(10,1)$, $Gamma(10,1)$, y $Rayleigh(10,1)$, para generar diversos muestreos irregulares y a partir de ellos señales

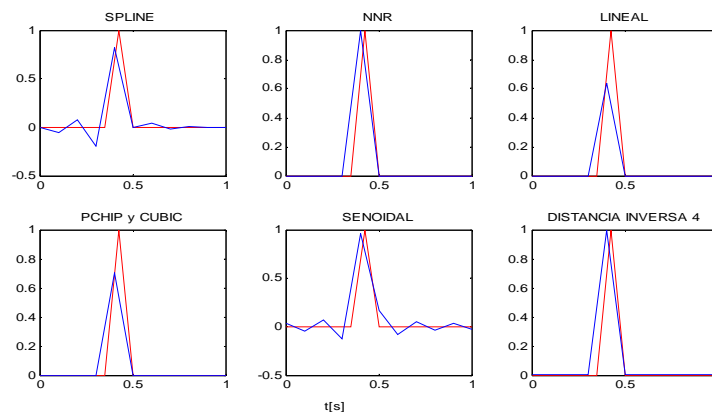
* Esta idea se preservará para una conclusión posterior.

† Los valores en paréntesis corresponden a los parámetros empleados para cada distribución.

simuladas, se obtienen diferentes valores para la frecuencia de corte asociada a un interpolador. La tabla 2 muestra las frecuencias de corte promedio calculadas para 5 tipos de interpoladores, resultante de 100 espectros de un pulso remuestreado en tres posiciones diferentes (al inicio, intermedio y final de un intervalo de observación de 512 muestras), de la cual se deduce que la interpolación Spline presenta mejores resultados que la interpolación cúbica y la lineal, no obstante es superada por el método de la distancia inversa en ancho de banda, mientras que el interpolador senoidal brinda la mejor característica en frecuencia. La figura 8 muestra el efecto en el tiempo del remuestreo de un pulso unitario para dichos interpoladores, teniendo como base 10 muestras.

Después del remuestreo si la señal presenta picos falsos se manifiesta una distorsión en el espectro, acompañado de un aumento en la varianza en el dominio del tiempo. En el caso de la interpolación lineal la varianza estimada es pequeña, debido a que es un promedio compensado de dos observaciones irregulares, produciendo una señal remuestreada con una varianza más baja que la varianza de la señal original; al estimarse erróneamente puede reemplazarse por un valor correcto similar a la varianza de S&H.

Figura 8. Efectos en tiempo del remuestreo de un pulso para diversos interpoladores

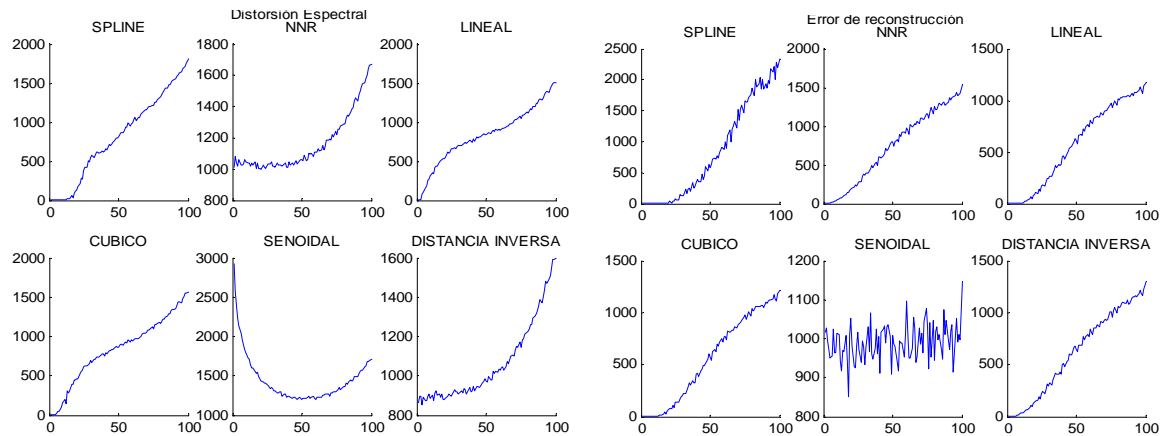


La distorsión espectral es una medida empleada para la cuantificación de errores de remuestreo, definida como $DE = \frac{N}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(X(\omega)) - \ln(\hat{X}(\omega))$, siendo $X(\omega)$ y $\hat{X}(\omega)$ las

funciones de densidad de potencia real y estimada, respectivamente. Otro tipo de medida de error que es usada a menudo para comparar los métodos del remuestreo es el error de la reconstrucción, $ER = \sum_k [x(k) - \hat{x}(k)]^2 / \sigma_x^2$, donde $\hat{x}(k)$ es la señal reconstruida a partir de su espectro y tiene como ventaja el uso de la varianza.

El mejor comportamiento para la distorsión espectral y el error de reconstrucción en bajas frecuencias lo muestra el interpolador Spline, en frecuencias medias el interpolador cúbico es la mejor opción, mientras que en altas frecuencias se disputan el lugar el interpolador distancia inversa y el senoidal (Fig. 9). El error de reconstrucción luce una tendencia creciente en todos los interpoladores, exceptuando el caso del interpolador senoidal concebido para minimizar el error en la reconstrucción y no la distorsión espectral. La distorsión espectral exhibe concavidades que son distintas para cada distribución de muestreo, y se recalca la similitud entre la distancia inversa y NNR, y la presente entre el interpolador cúbico y el lineal.

Figura 9 Errores de remuestreo promedio (DE y ER) para 6 interpoladores evaluados en 100 frecuencias $[0, 0,5f_s]$, con 1000 muestras.



Un método de remuestreo que proporcione una reconstrucción exacta de la señal original obligatoriamente no conduce a una estimación exacta de las propiedades estadísticas de la señal. Los métodos del remuestreo simples, tienen algunas propiedades deseables que no se

encuentran en los métodos del remuestreo complejos, son robustos y proporcionan una estimación imparcial de la varianza. Los métodos complejos como la interpolación cúbica, spline, senoidal y la distancia inversa tienen como una desventaja común que la varianza puede estimarse erróneamente, por lo tanto son omitidos en la tabla 3.

Tabla 3. Cuadro comparativo de interpoladores normalizado a los valores de S&H.

$N = 256$ muestras	Varianza	ST	RE
S&H	1	1	1
NNR	0,9849	0,3225	0,4308
Lineal	0,8323	0,1375	0,2462

1.7 SOBREMUESTREO

La definición del espectro de una señal SRM, $X(f/f_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[f - kf_s]$, implica que

las componentes de *aliasing* pueden desplazarse al variar la frecuencia de muestreo. Si la frecuencia de muestreo disminuye se dice que hay un submuestreo, si aumenta se dice que hay *sobremuestreo*. El submuestreo para una señal SRM, consiste en eliminar muestras de la señal de acuerdo a la nueva frecuencia de muestreo f_s' , en contraste el sobremuestreo implica la interpolación de las muestras de la señal.

Así surge el concepto de interpolación de banda limitada (IBL), que toma una SRM y produce una señal interpolada, que es idéntica al muestreo de la señal continua en el tiempo a una tasa más alta; partiendo del concepto de una señal de banda limitada continua en el tiempo, $x_c(t)$, es decir, $X_c(f) = 0 \mid |f| > f_{\max}$. Una IBL ideal puede lograrse por medio del sobremuestreo y el uso de un filtro pasabajo ideal (Fig. 10).

Para una SIM, el sobremuestreo puede pensarse como el remuestreo a una frecuencia, f_s' , múltiplo de la frecuencia promedio del muestreo irregular, f_i : $f_s' = Lf_i$, donde L es el factor de sobremuestreo. A la par, un interpolador puede usar el sobremuestreo para mejorar su frecuencia de corte, empero, para el remuestreo de una SIM, el factor de sobremuestreo no

presenta un comportamiento lineal para el mejoramiento de la característica en frecuencia de los interpoladores, al contrario, para valores de $L > 5$, la característica se satura, registrando a $L=2$ como el factor de sobremuestreo de máximo rendimiento para la mayoría de distribuciones empleadas en la simulación de SIM, debido que combina un gasto mínimo en tiempo de cálculo con el aumento apreciable de la frecuencia de corte del filtro pasabajo característico de los interpoladores, exceptuando al senoidal.

Figura 10. Señal de banda limitada, señal muestreada a $f_s=2f_{max}$ y señal sobremuestreada a $f_s'=4f_{max}$ ($L=2$) en el dominio de la frecuencia

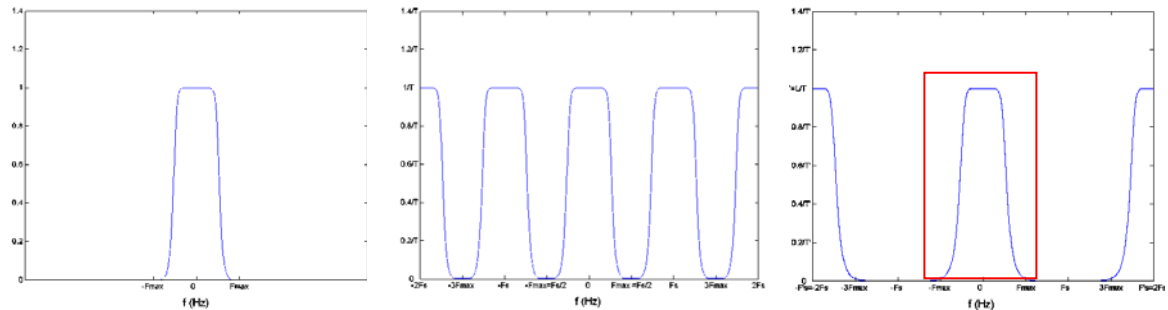
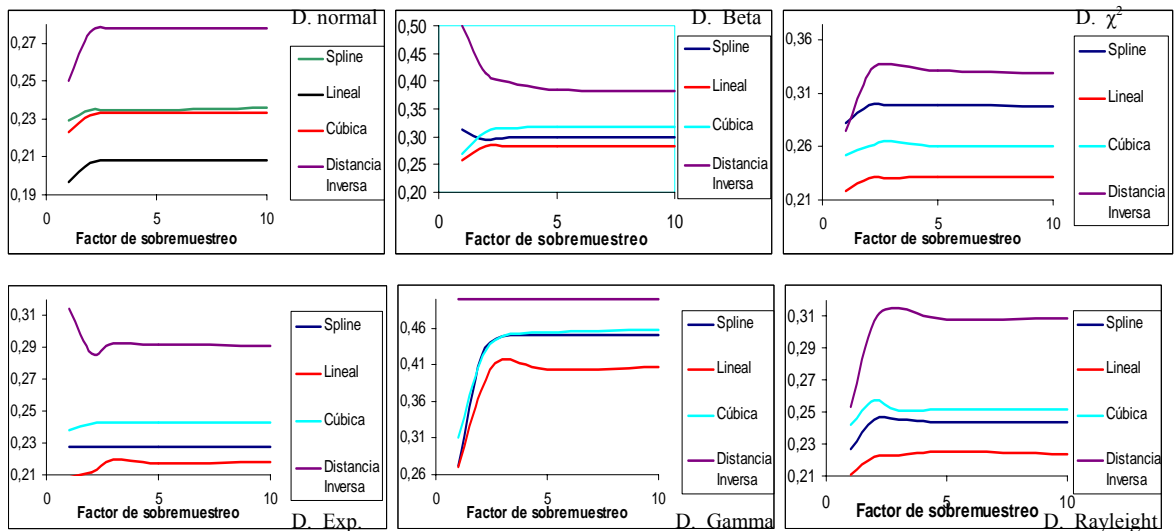


Figura 11. Efecto del sobremuestreo sobre la frecuencia de corte de 4 interpoladores



1.8 IMPOSIBILIDAD DE EMPLEAR LOS MÍNIMOS CUADRADOS CON SENOIDALES

La formulación para mínimos cuadrados se hace en base a la minimización del error en la aproximación de una señal a una forma conocida. Empleando derivadas de la función error, se desprende un sistema de ecuaciones, cuya solución da la respuesta a la minimización del error en la estimación. Para emplear los mínimos cuadrados también es necesario conocer la forma a la cual se desea aproximar y para el remuestreo se conoce de antemano que la información espectral puede mostrarse mediante una descomposición en series de Fourier, siendo la mejor alternativa más fiable aproximar a una sumatoria de funciones senoidales⁵.

Resulta fácil formular un ajuste por mínimos cuadrados para una función senoidal en particular, sin embargo a medida que se adicionen más funciones senoidales a la función de aproximación, se generan términos cruzados en el sistema de ecuaciones que dificulta su resolución. Debido a esta información se piensa que es imposible implementar un algoritmo que por mínimos cuadrados devuelva la serie de Fourier completa de una señal cualquiera. Sin embargo, esta es la base para el algoritmo de *Lomb-Scargle*, del cual se hablará con más detalle más adelante en el siguiente capítulo.

2 MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

El problema básico a considerar es la estimación de la densidad espectral de potencia (DEP) de una señal a partir de la observación de la señal en un intervalo de tiempo finito. La principal limitación en la calidad de la estima del espectro de potencia se debe a la longitud finita del registro de la secuencia de datos, que se mejora cuando el registro aumenta si la señal es estadísticamente estacionaria. Para las estadísticamente no estacionarias no se puede seleccionar una longitud arbitraria del registro y se determina por la rapidez de las variaciones temporales en los estadísticos de la señal; la meta es seleccionar un registro tan corto que permita resolver las características espectrales de los componentes de la señal. El segundo problema es la distorsión del espectro de potencia.

El cálculo espectral de una señal de energía finita se estima mediante la aproximación a la distribución espectral de la energía (DEE) de la señal, $S_{x_a}(f) = |X_a(f)|^2$, inscrita en el teorema de Parseval, $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(f)|^2 df$, que se puede expresar como la TF de la función de autocorrelación $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^*(t)x_a(t+\tau)dt$ $S_{x_a}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$.

A partir del teorema de *Wiener-Khintchine*, la DEE de una señal discreta se expresa mediante $S_x(f/f_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-2j\pi k f/f_s} = |X(f/f_s)|^2$, donde $r_x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*(i)x(i+k)$. Esta relación desprende dos métodos para el cálculo de la DEE, el método directo con la TF de $x(n)$ y el método indirecto que calcula TF de la autocorrelación de $x(n)$. Además, la estimación de la DEE se puede expresar mediante $S_{\tilde{x}}(f) = \left| \sum_{i=1}^N \tilde{x}(i) e^{-j2\pi f(i-1)} \right|^2$ que es una versión distorsionada del verdadero espectro, donde $\tilde{x}(i) = x(i)w(i)$, y $w(i)$ es una ventana, a sabiendas que el resultado en frecuencia de la convolución de la ventana $W(f)$ con $X(f)$, suaviza el espectro $X(f)$ cuando el espectro de la ventana es más estrecho⁶.

Esto implica que N debe ser grande, de lo contrario se produce energía de los lóbulos laterales en $\tilde{X}(f)$ en bandas de frecuencia donde $X(f) = 0$, este problema se conoce como derrame espectral. Al seleccionar ventanas que tengan lóbulos laterales pequeños se obtiene un corte suave en el dominio del tiempo incrementando el suavizado o ensanchamiento de la característica espectral $X(f)$, disminuyendo la resolución en frecuencia.

Las señales caracterizadas como procesos estacionarios aleatorios no tienen energía finita y por lo tanto están caracterizadas por la DEP. La estima correspondiente a la DEP tiene un desarrollo similar a la estima de la DEE y termina en el concepto del periodograma introducido por *Schuster* (1898) para descubrir periodicidades en los datos, y se expresa por

$$P_x(f/f_s) = |X(f/f_s)|^2 / N = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_x(m) e^{-j2\pi m f / f_s}, \text{ donde } r_x(m) \text{ es la autocorrelación}$$

promediada en el tiempo, y es una estima consistente de la función de autocorrelación real:

$$r_x(m) = \sum_{i=1}^{N-m} x^*(i)x(i+m) / N \quad |0 \leq m \leq N, \text{ y } r_x(m) = \sum_{i=|m|}^N x^*(i)x(i+m) / N \quad |-1 \leq m \leq -N.$$

Sin embargo la TF de $r_x(m)$, el periodograma, muestra un sesgo para una serie de duración finita, lo cual lo hace una estima no consistente de la verdadera DEP, hecho que se evidencia por medio la distorsión y el derrame espectral.

Para aumentar la resolución en frecuencia adiciona ceros a $x(n)$ hasta tener una señal de

$$\text{longitud } L \text{ que se evalúa con la FFT para obtener } P_x(k/L) = \left| \sum_{i=1}^N x(i) e^{-j2\pi(i-1)k/L} \right|^2 / N,$$

para $k=0$ hasta $L-1$, sin embargo esto simplemente corresponde a una interpolación de los valores del espectro medido en más frecuencias, y también se aplica a la estima de la DEE.

2.1 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS

Para reducir la varianza de la estimación espectral se emplean los métodos clásicos o no paramétricos, los cuales no hacen hipótesis sobre cómo se generan los datos.

El método de *Bartlett* (1948) para reducir la varianza en el periodograma implica tres pasos: se subdivide la secuencia de N puntos en K segmentos de igual longitud no solapados, para cada segmento se calcula el periodograma y finalmente se promedian los periodogramas para obtener la estima de la potencia espectral de *Bartlett*. El método de *Welch* (1967) permite el solapamiento en los segmentos de datos y el enventanado de los segmentos de datos antes de calcular el periodograma, cuyo resultado es un periodograma “modificado”, así la estima de *Welch* de la potencia espectral es el promedio de estos periodogramas modificados. *Blackman* y *Tukey* (1958) propusieron y analizaron el método que calcula TF la secuencia de autocorrelación enventanada para producir la estima de la potencia espectral.

Los métodos no paramétricos necesitan de la disponibilidad de largos registros de datos para obtener la resolución de frecuencia requerida y sufren los efectos de derrame espectral debido al enventanado, que a menudo enmascara señales débiles presentes en los datos. Sus limitaciones básicas, parten de la suposición inherente de que la estima de la autocorrelación $r_x(m)$ es cero para $m \geq N$, limitando la resolución en frecuencia y la calidad de la estima, y que los datos son periódicos con periodo N .

2.2 MÉTODOS PARAMÉTRICOS

Los métodos paramétricos se basan en el modelamiento de la secuencia de la señal $x(n)$ como la salida de un sistema lineal caracterizado por un función de transferencia racional $H(z)=B(z)/A(z)$, cuya ecuación en diferencias correspondiente es $x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$, donde $w(n)$ es la secuencia de entrada al sistema y los datos observados $x(n)$ representan la salida. Para estimar la densidad espectral de potencia se supone que la secuencia $w(n)$ es una secuencia de ruido blanco con media cero y varianza σ_w^2 , y la DEP de los datos observados se expresa como

$$\Gamma_x(f) = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} = \sigma_w^2 |H(f)|^2.$$

Para la estimación de los parámetros a_k y b_k se tienen tres modelos lineales: un modelo autoregresivo de medias móviles (ARMA) de orden (p,q) , un modelo autoregresivo (AR) de orden p , y un modelo de medias móviles (MA) de orden q . En la práctica suele ser elegido el modelo AR que se relaciona con los demás modelos mediante el teorema de descomposición de *Wold* (1938).

El método de *Yule-Walker* usa la forma sesgada de la estima de la autocorrelación dando un modelo AR estable, cuya estima corresponde a $P_x^{YW}(f) = \hat{\sigma}_{wp}^2 / \left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) e^{-j2\pi fk} \right|^2$, donde $\hat{\sigma}_{wp}^2$ es la varianza estimada del error de predicción lineal. El método de *Burg* se basa en la minimización de errores hacia adelante y hacia atrás en los predictores lineales, con la restricción de que los parámetros AR satisfagan la recursión de *Levinson-Durbin*; a partir de las estimas de los parámetros AR se forma la estima de densidad espectral de potencia $P_x^B(f) = \hat{E}_p / \left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) e^{-j2\pi fk} \right|^2$, (\hat{E} es la estima del error medio cuadrático total de predicción hacia adelante y hacia atrás), produciendo una alta resolución en frecuencia, un modelo AR estable.

Para el uso de un modelo AR es indispensable la selección del orden p , por ejemplo mediante el criterio de información de *Akaike*, $CIA = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N$, que a pesar de ser inconsistente cuando $N \rightarrow \infty$, presenta resultados favorables para valores de N pequeños.

A pesar de ser eficientes ante el muestreo regular, los métodos paramétricos presentan falsos picos para órdenes altos, separación de las líneas espectrales y son sensibles a la fase inicial. Basándose en la segmentación, *De Waele* (2003) ante el muestreo irregular, propone una variación del método de *Burg* partiendo del supuesto que existe una probabilidad finita de encontrar dos puntos espaciados $pT \pm \Delta\tau$. Modifica las definiciones para los coeficientes de reflexión y los errores de predicción hacia adelante y hacia atrás, al tener en cuenta sólo los valores asociados a los tiempos t_1 y t_2 , tal que $|t_1 - t_2| \in [pT - \Delta\tau/2, pT + \Delta\tau/2]^7$.

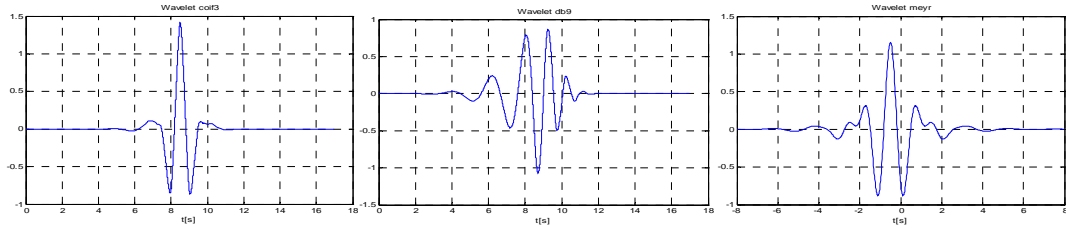
2.3 MÉTODOS ESPECTRALES VARIANTES CON EL TIEMPO

Los métodos espectrales variantes con el tiempo son una simple extensión de los métodos espectrales en la que se realizan diferentes estimaciones espectrales utilizando una ventana temporal que se desliza a lo largo del registro para analizar registros no estacionarios y observar cómo varía el contenido espectral de la señal con el tiempo, originando la TF de tiempo corto (STFT), que aplica una función ventana $g(t)$ de tamaño fijo que se mueve sobre los datos para determinar el espectro en el tiempo b , $SFTF(f, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) g^*(t-b) e^{-j2\pi ft} dt$, la cual a pesar de poseer localización, no puede adaptarse a las características de la señal en ciertos puntos interesantes de analizar.

Al adicionar el uso de ventanas de suavizado en tiempo y en frecuencia a los métodos espectrales variantes con el tiempo se consigue mitigar el efecto negativo que provoca la aparición de términos cruzados y se conocen como métodos espectro-temporales.

Una visión distinta es la que ofrecen los métodos de escala-tiempo o Wavelets, partiendo de la descomposición de la señal mediante funciones arbitrarias que deben cumplir unos requisitos mínimos se puede realizar una descomposición de la señal en componentes de variación rápida y lenta. Así, la Transformada Continua Wavelet (CWT) se usa para construir una representación de tiempo-frecuencia de una señal ofreciendo una buena localización en tiempo y en frecuencia, a costa de una alta carga computacional⁸. La CWT descompone una señal en oscilaciones pequeñas localizadas en tiempo, por medio de la convolución de la sucesión de datos con versiones escaladas (por un factor s) y desplazadas (al tiempo η) de la Wavelet madre Ψ_0 , $W_\eta(s) = \sum_{n=1}^N x(n) \sqrt{\delta t \Psi_0 / s} * [(n-\eta) \delta t / s]$. Dicha función madre puede ser seleccionada de acuerdo al tipo de señal que se desea analizar, teniendo como principales representantes la *Daubechies* de orden i (*dbi*), la *Mexican hat* (*mexh*), la *Symmetlet* de orden i (*symi*), la *Coiflet* de orden i (*coifi*), la Gaussiana de coeficiente n (*gausn*), la *Morlet* (*morl*), la *Meyer* (*meyr*), y la *Biorthogonal* de coeficientes $i.k$ (*biori.k*), algunos ejemplos se muestran en la figura 12 .

Figura 12. Ejemplos de Wavelets madres *coif3*, *db9* y *meyr*



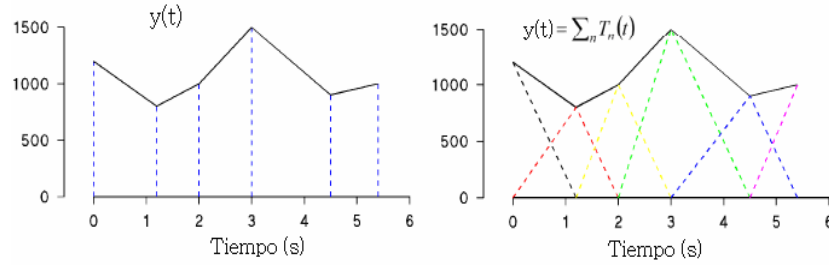
La CWT consiste en N valores espectrales por cada escala usada y cada uno de éstos requiere un FFT inverso, lo cual permite que sea empleada para la estimación de la DEP de forma similar a la FFT. A menos que la reconstrucción sea necesaria, no hay ninguna restricción acerca de cuántas escalas se deba usar, ni del espacio entre las escalas, de tal forma que para un espectro de alta definición puede generarse para un rango estrecho de frecuencias.

2.4 MÉTODOS ESPECTRALES DIRECTOS PARA SIM

Los métodos espectrales directos para SIM son aquellos que no requieren de un proceso de remuestreo antes de ser implementados. El primer método se basa en la evaluación de la expresión analítica de la TF de las series de tiempo interpoladas, y no requiere la interpolación real y el remuestreo, así la *NDFT* (Transformada de *Fourier* Discreta No uniforme) de una secuencia x_i se define por $X(z_k) = \sum_{i=1}^N x_i z_k^{-(i-1)} \Big|_{k=0, \dots, N-1}$, donde z_k son diferentes puntos localizados arbitrariamente en el plano complejo z (los cuales siempre y cuando sean distintos configuran una matriz no singular que permite determinar la inversa de la *NDFT*)⁹.

La transformada continua de *Fourier* a partir de la *NFDT* se puede expresar como un polinomio de *Lagrange* de orden $n-1$: $X(z) = \sum_{k=1}^n \frac{L_k(z)}{L_k(z_k)} X(z_k) \Big| L_k(z) = \prod_{i \neq k} (1 - z_i z^{-1})$, o como una interpolación de Newton (Fig. 13).

Figura 13. Evaluación variante en el tiempo de la TF sobre una ventana $[t_l, t_N]$: La NFDT



Qi, Minka y Picard (2002) emplean una estructura bayesiana para la estimación espectral no estacionaria, cuyo objetivo es la estimación instantánea del vector de estados s_i para el tiempo de muestreo t_i , asumiendo que las variables de estado s_1, \dots, s_n forman una cadena de *Markov* que emite una serie de tiempo x_1, \dots, x_n , y definen el espacio de estado $s_i = s_{i-1} + w_i$, $y_i = c_i s_i + v_i$, donde w_i es el ruido del proceso y v_i es el ruido de la muestra en t_i ¹⁰.

A partir de un modelo lineal gaussiano con ruido del proceso $w_i \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_i)$ y ruido de la muestra $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la distribución conjunta de las variables de estados y muestras puede calcularse como $p(s_{1:n}, x_{1:n}) = p(s_1)p(x_1 | s_1) \prod_{i=2}^n p(s_i | s_{i-1})p(x_i | s_i)$, donde $s_{1:n} = [s_1, \dots, s_n]^T$ y $x_{1:n} = [x_1, \dots, x_n]^T$. La distribución de filtrado $p(s_i | x_{1:i-1})$ puede estimarse secuencialmente como $p(s_i | x_{1:i-1}) = \int_{s_{i-1}} p(s_i | s_{i-1})p(s_{i-1} | x_{1:i-1})$, $p(s_i | x_{1:i}) = \frac{p(x_i | s_i)p(s_i | x_{1:i-1})}{p(x_i | x_{1:i-1})}$.

Entonces, se obtiene una distribución de filtrado $p(s_i | x_{1:i-1})$ gaussiana y el espectro para el tiempo t_i puede resumirse al valor medio de $p(s_i | x_{1:i})$, consecutivamente se añade el uso de un filtro *Kalman* recursivo para el cálculo eficaz de las probabilidades,

Denotando m_i y V_i como la media y la matriz de covarianzas de $p(s_i | x_{1:i})$, respectivamente, el algoritmo recursivo para el filtro *Kalman* no estacionario se describe por las ecuaciones: $m_i = m_{i-1} + K_i(y_i - c_i m_{i-1})$, $V_i = (I - K_i c_i)P_{i-1}$, donde $P_{i-1} = V_{i-1} + \Gamma_{i-1}$, y $K_i = P_{i-1} c_i^T (c_i P_{i-1} c_i^T + \sigma^2)^{-1}$, que cubija el caso del muestreo irregular haciendo que $\Gamma_i = Z(t_i - t_{i-1})$, donde Z es una matriz

constante predefinida, y $\Gamma_0=0$. Las recursiones empiezan con los hiperparámetros m_0 y V_0 para la distribución $p(s_0)$, los cuales proveen la información suficiente para la ejecución del algoritmo. Si se desea se puede utilizar la información futura en el conjunto de datos, para estimar el espectro, calculando $p(s_i|x_{1:N})$ o también puede emplearse el suavizado.

Schwarzenberg y *Czerny* (1996) emplean polinomios periódicos ortogonales para expandir una serie de Fourier de K armónicos, $F^K(t)$, que corresponde al polinomio complejo $\Psi_{2K}=z^K F^K(t)$, de orden $2K$, de tal forma que se obtiene el modelo complejo $z^K \sum_{k=0}^K a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K [a_k - jb_k] z^{K+k} + [a_k + jb_k] z^{K-k}$, donde $a_0=b_0$ ¹¹.

Estos polinomios complejos en el espacio de *Hilbert* con el producto escalar se definen por la integral de *Stjeljes* sobre el círculo unitario, $(\Phi, \Psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(z) \overline{\Psi(z)} d\mu(t)/2\pi$, esta integral depende de la función $\mu(t)$ definida sobre el círculo unitario, que en el caso de datos discretos la función apropiada es la función escalón para las fases ωt_i , convirtiendo el producto escalar a una suma ponderada $(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^n g_i \Phi(z_i) \overline{\Psi(z_i)}/2\pi$.

Para la base $\Phi_K(z) = \sum_{k=0}^K a_k^{(K)} z^k$, la expansión del polinomio $\Psi_K(z) = \sum_{k=0}^K c_k \Phi_k(z)$ es única, y en el espacio de polinomios de *Hilbert* existe una base ortonormal única con coeficientes reales y positivos, $0 < a_k^k \in \mathfrak{R}$, que satisface la condición de ortonormalidad $(\Phi_k, \Phi_l) = \delta_{k,l}$. Para generar Φ_K se emplean las relaciones de recurrencias: $\tilde{\Phi}_0(z) = 1$,

$\tilde{\Phi}_{k+1}(z) = z\tilde{\Phi}_k - \alpha_k z^k \overline{\tilde{\Phi}_k(z)}$, y $\Phi_k(z) = \frac{\tilde{\Phi}_k(z)}{\sqrt{(\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_k)}}$. La fórmula para los coeficientes α_k y c_k

se puede obtener de la multiplicación de la expresión para expansión polinómica y el

algoritmo recursivo por Φ_k : $\alpha_k = \frac{(z\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_k)}{(z^k \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_k)}$ y $c_k = \frac{(\Psi, \tilde{\Phi}_k)}{\sqrt{(\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_k)}}$.

El teorema de *Parseval* correspondiente a la integral de Fourier en la ecuación de c_k tiene la forma $(2K+1)E\left[(F^N)^2\right] \equiv \sum_{i=0}^n (F^N)^2 = \sum_{k=0}^{2K} |c_k|^2$, el cual también permite relacionar los términos $F^K(t)$ y Ψ_{2K} en la identidad $(F^K, F^K) = (\Psi_{2K}, \Psi_{2K}) = \sum_{k=0}^{2K} (\Psi_{2K}, \Phi_k)(\Phi_k, \Psi_{2K})$, así que para $K=1$ el algoritmo se reduce a la suma de dos variables estadísticamente independientes y es invariante al desplazamiento temporal, debido a que el desplazamiento temporal gira el plano complejo entero sin afectar el valor absoluto de c_k .

2.5 MÉTODOS ESPECTRALES DE AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS

Para ajustar una señal a una senoidal de una frecuencia conocida $f > 0$, se emplea el modelo general de N datos $x_i = C \cos(2\pi ft_i + \phi) + \varepsilon_i = A \cos(2\pi ft_i) + B \sin(2\pi ft_i) + \varepsilon_i$, donde x_i es la amplitud, ϕ es la fase, y ε_i es el error del modelo. $A = C \cos(\phi)$ y $B = -C \sin(\phi)$ son las transformaciones que permiten obtener un modelo cuadrático para minimizar la suma de los errores al cuadrado, $SE = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - C \cos(2\pi ft_i + \phi)]^2$, por lo cual se debe solucionar

las dos ecuaciones $\frac{\partial SE}{\partial A} = 0$ y $\frac{\partial SE}{\partial B} = 0$, que pueden reescribirse en una forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \cos^2(2\pi ft_i) & \sum_{i=1}^N \sin(2\pi ft_i) \cos(2\pi ft_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin(2\pi ft_i) \cos(2\pi ft_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(2\pi ft_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i \cos(2\pi ft_i) \\ \sum_{i=1}^N x_i \sin(2\pi ft_i) \end{bmatrix}, \text{ para la cual}$$

se empleará la notación $\begin{bmatrix} CC & CS \\ CS & SS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XC \\ XS \end{bmatrix}$.

Se define la reducción en la suma de los cuadrados como

$$\Delta R(f) = \begin{bmatrix} XC & XS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CC & CS \\ CS & SS \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} XC \\ XS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YC & YS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SS/D & -CS/D \\ -CS/D & CC/D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} YC \\ YS \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$D = CC \cdot SS - CS^2$, también se dice que se tiene una base ortogonal cuando el término

cruzado $CS=0$ y que para ajustar una señal a una sumatoria de senoidales de M frecuencias positivas conocidas y diferentes, f_j , empleando el modelo $x_i = \sum_{j=1}^M A_j \cos(2\pi f_j t_i) + B_j \sin(2\pi f_j t_i) + \varepsilon_i$ se obtiene un sistema de ecuaciones de dimensión $2M \times 2M$ (notando $CC(j,k)$ como CC_{jk}), con términos no diagonales $CC_{jk} = \sum_{i=1}^n \cos(2\pi f_j t_i) \cos(2\pi f_k t_i) \Big|_{f_j \neq f_k}$, $SS_{jk} = \sum_{i=1}^n \sin(2\pi f_j t_i) \sin(2\pi f_k t_i) \Big|_{f_j \neq f_k}$, y $CS_{jk} = \sum_{i=1}^n \cos(2\pi f_j t_i) \sin(2\pi f_k t_i)$, que al ser todos nulos crean una base ortogonal.

2.5.1 La formulación de *Bloomfield*

Bloomfield simplifica las expresiones de la matriz cuadrada cuando el tiempo de muestreo es regular, es decir $t_i = i\delta t$, por el uso de identidades trigonométricas y la función kernel de

Dirichlet, $D_N(2a) = \frac{\text{sen}(Na)}{N \text{sen}(a)}$: $CC^B = N(1 + D_N(4\pi f \delta t) \cos(2\pi f \delta t))/2$, de tal forma que

$$SS^B = N(1 - D_N(4\pi f \delta t) \cos(2\pi f \delta t))/2, \text{ y } CS^B = D_N(4\pi f \delta t) \text{sen}(2\pi f \delta t)/2.$$

Luego postula una reducción en la suma de los cuadrados de

$$\Delta R^B(f) = \begin{bmatrix} XC & XS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CC^B & CS^B \\ CS^B & SS^B \end{bmatrix}^{-1}, \text{ conlleva a } P^B(f) = \sqrt{\Delta R_1^2(f) + \Delta R_2^2(f)} / N. \text{ Esta}$$

simplificación puede ser empleada para SIM al hacer $\delta t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{i+1} - t_i$, sin embargo no

debe usarse en caso de que el tipo de muestreo presente grandes discontinuidades.

De manera similar plantea una implementación para la estimación conjunta

$$CC_{jk}^B = N \left(D_N \left[(\omega_j + \omega_k) \delta t \right] \cos \left[\pi (f_j + f_k) N \delta t \right] + D_N \left[(\omega_j - \omega_k) \delta t \right] \cos \left[\pi (f_j - f_k) N \delta t \right] \right) / 2,$$

$$SS_{jk}^B = N \left(D_N \left[(\omega_j - \omega_k) \delta t \right] \cos \left[\pi (f_j - f_k) N \delta t \right] - D_N \left[(\omega_j + \omega_k) \delta t \right] \cos \left[\pi (f_j + f_k) N \delta t \right] \right) / 2,$$

$CS_{jk}^B = N \left(D_N [(\omega_j + \omega_k)\delta t] \text{sen} [\pi(f_j + f_k)N\delta t] - D_N [(\omega_j - \omega_k)\delta t] \text{sen} [\pi(f_j - f_k)N\delta t] \right) / 2$, si $f_k = \frac{k}{N\delta t}$ los términos de la diagonal son cero si $(\omega_j \pm \omega_k)\delta t = \frac{2\pi k}{N}$, $j \neq k$, para CC_{jk}^B y SS_{jk}^B , y para CS_{jk}^B cuando $(\omega_j \pm \omega_k)\delta t = 0$ o 2π , donde D_N no se hace cero sino 1.

2.5.2 La formulación de *Lomb-Scargle* (LS)

Un método de análisis espectral de mínimos cuadrados basado fundamentalmente para SIM se desarrolló por *Lomb* (1976), quien se basó en parte, en el trabajo previo de *Barning* (1963) y *Vaniček* (1971) y después mejorado por *Scargle* (1982). *Lomb* muestra que una elección particular de desplazamiento, con la cual se forma una base ortogonal, hace que la ecuación del periodograma de *Lomb* sea idéntica a la ecuación que se obtendría si se estimara el volumen armónico de un conjunto de datos, a una frecuencia dada, ponderando los datos sobre una base por punto en lugar de una base por intervalo de tiempo. Dicho desplazamiento facilita la descripción de $\Delta R(f)$ al poder expresarse de la forma $C^2 + S^2$.

El modelo de ajuste cambia a $h_i = A \cos(2\pi f(t_i - \tau)) + B \text{sen}(2\pi f(t_i - \tau)) + \varepsilon_i$, y se elige la

constante de desplazamiento τ , definida por la relación $\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_{i=1}^N \text{sen}(2\omega t_i)}{\sum_{i=1}^N \cos(2\omega t_i)}$ de tal

forma que se anulen los términos cruzados, es decir $CS=0$. Entonces

$$\Delta R^{LS}(f) = [HC \quad HS] \begin{bmatrix} CC & 0 \\ 0 & SS \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} HC \\ HS \end{bmatrix} = [HC \quad HS] \begin{bmatrix} 1/CC & 0 \\ 0 & 1/SS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HC \\ HS \end{bmatrix}, \text{ donde por}$$

$$\text{ejemplo } CC = \sum_{i=1}^N \cos^2(2\pi f(t_i - \tau)), \text{ así } \Delta R^{LS}(f) = \left(\frac{HC}{\sqrt{CC}} \right)^2 + \left(\frac{HS}{\sqrt{SS}} \right)^2 = C^2(f) + S^2(f).$$

Cuando $\Delta R(f)$ se expresa en esta forma compacta su similaridad con el usual periodograma se hace evidente, y en efecto es una aproximación a esta fórmula exacta. La fórmula usada

en el periodograma puede verse como $\Delta R^P(f) \approx \left(\frac{HC}{\sqrt{2/N}}\right)^2 + \left(\frac{HS}{\sqrt{2/N}}\right)^2$, que parte de dos supuestos: $CS=0$ para todos los valores de τ y $CC=SS=N/2$, satisfechos ocasionalmente.

Al definir $R = \sum_{i=1}^N h_i^2$, la función espectral normalizada para el periodograma de *Lomb* puede definirse como: $L(f) = [C^2(f) + S^2(f)]/R$, que puede ser evaluada de 0 a 1. En el periodograma de LS se calcula primero la media y la varianza de los datos por las fórmulas usuales $\bar{h} = \sum_{i=1}^N h_i / N$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2 / (N-1)$, y luego la constante τ para obtener la

$$\text{expresión: } LS = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{\left[\sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h}) \cos(\omega(t_i - \tau)) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \cos^2(\omega(t_i - \tau))} + \frac{\left[\sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h}) \text{sen}(\omega(t_i - \tau)) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \text{sen}^2(\omega(t_i - \tau))} \right\}.$$

Mediante el uso de las relaciones trigonométricas y las notaciones $C_h = \sum_{i=1}^N h_i \cos(2\pi f t_i)$

$S_h = \sum_{i=1}^N h_i \text{sen}(2\pi f t_i)$, $C_2 = \sum_{i=1}^N \cos(2\pi f t_i)$, $S_2 = \sum_{i=1}^N \text{sen}(2\pi f t_i)$ se puede llegar a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N h_i \cos(2\pi f(t_i - \tau)) &= C_h \cos(\omega\tau) + S_h \text{sen}(\omega\tau), \\ \sum_{i=1}^N h_i \text{sen}(2\pi f(t_i - \tau)) &= S_h \text{sen}(\omega\tau) - C_h \cos(\omega\tau), \\ \sum_{i=1}^N \cos^2(2\pi f(t_i - \tau)) &= (N + C_2 \cos(\omega\tau) + S_2 \text{sen}(\omega\tau))/2, \text{ y} \\ \sum_{i=1}^N \text{sen}^2(2\pi f(t_i - \tau)) &= (N - S_2 \text{sen}(\omega\tau) - C_2 \cos(\omega\tau))/2, \end{aligned}$$

que agilizan el cálculo el periodograma LS, pero son formas que dependen de la frecuencia.

Por otro lado, el valor de la constante de desplazamiento para una frecuencia dada, no es forzosamente el mismo para las demás frecuencias, de tal forma que la estimación conjunta del periodograma LS es imposible de definir si se toma un valor de τ óptimo de una sola frecuencia. Sin embargo, la estimación conjunta es posible si el cálculo del periodograma LS se hace en base en la diagonalización de la matriz que contiene los términos cruzados, lo cual es más efectivo computacionalmente que la búsqueda de valor de τ óptimo global.

2.5.3 Análisis estadístico del periodograma LS

Scargle al analizar el periodograma de *Lomb* lo expresa como un periodograma modificado que corrige los errores en la definición clásica del periodograma para datos muestreados irregularmente, produciendo tres resultados: el análisis del periodograma es similar al ajuste por mínimos cuadrados de senoidales a los datos, se conserva la invarianza en el desplazamiento temporal; y por último, el desarrollo estadístico del periodograma es esencialmente idéntico en ambos tipos de muestreo. El análisis se tiende sobre tres hipótesis: una señal senoidal pura, ruido blanco y una señal senoidal mas ruido blanco¹².

Si $g_i = a \cos(2\pi f_1(t_i - \tau_1)) + b \sin(2\pi f_1(t_i - \tau_1))$ es una señal senoidal de frecuencia f_1 y g_i son los datos, entonces para $y_i = g_i$, con frecuencia f_2 la estimación espectral se define por

$$\Delta R_G(f_2) = a^2 \left(\frac{C_1 C_2^2}{C_2 C_2} + \frac{C_1 S_2^2}{S_2 S_2} \right)^2 + b^2 \left(\frac{S_1 C_2^2}{C_2 C_2} + \frac{S_1 S_2^2}{S_2 S_2} \right)^2 + 2ab \left(\frac{C_1 C_2 S_1 C_2}{C_2 C_2} + \frac{C_1 S_2 S_1 S_2^2}{S_2 S_2} \right), \text{ donde}$$

$$C(f_2) = \frac{a C_1 C_2 + b S_1 C_2}{\sqrt{C_2 C_2}}, S(f_2) = \frac{a C_1 S_2 + b C_1 C_2}{\sqrt{C_2 C_2}}, \text{ y } C_1 C_2 = \sum_{i=1}^N \cos(2\pi f_1(t_i - \tau_1)) \cos(2\pi f_2(t_i - \tau_2)).$$

Al definir $Q_{c_1 c_2} = \frac{C_1 C_2}{\sqrt{C_1 C_1 \cdot C_2 C_2}}$, similarmente $Q_{c_1 s_2}, Q_{s_1 s_2}$, y $A = a\sqrt{C_1 C_1}$ y $B = b\sqrt{S_1 S_1}$, se

obtiene que $\Delta R_G(f_2) = A^2 (Q_{C_1 C_2}^2 + Q_{C_1 S_2}^2) + B^2 (Q_{S_1 C_2}^2 + Q_{S_1 S_2}^2) + 2AB (Q_{C_1 C_2} Q_{S_1 C_2} + Q_{C_1 S_2} Q_{S_1 S_2})$, y

que la suma total de cuadrados está dada por: $R = a^2 C_1 C_1 + b^2 S_1 S_1 + 2ab C_1 S_1 = A^2 + B^2$, si τ se elige de tal forma que $C_1 S_1 = 0$, y el espectro normalizado se convierte en:

$$P_G(f_2) = \frac{A^2 (Q_{C_1 C_2}^2 + Q_{C_1 S_2}^2) + B^2 (Q_{S_1 C_2}^2 + Q_{S_1 S_2}^2) + 2AB (Q_{C_1 C_2} Q_{S_1 C_2} + Q_{C_1 S_2} Q_{S_1 S_2})}{A^2 + B^2}.$$

Debido a que $P_G(f_2)$ varía muy poco en relación con los cambios de A y de B , cuyos cambios involucran la variación de la fase de la señal, se puede estimar el espectro por

medio del valor medio $\bar{p}_G(f_2) = \frac{1}{2}(Q_{C_1, C_2}^2 + Q_{C_1, S_2}^2 + Q_{S_1, C_2}^2 + Q_{S_1, S_2}^2)$, y están relacionados por medio de la expresión $P_G(f_2) = \bar{p}_G(f_2) \propto |TF(f_2 - f_1) + TF(f_2 + f_1)|^2$, donde $TF(f)$ es la transformada de Fourier para la ventana observada la cual es igual a 1 para $t_i | 1 \leq i \leq N$.

Si la serie $u_i=1,2,\dots,N$, constituye un muestra aleatoria de una señal con distribución normal con media cero y varianza σ^2 , entonces la media y la varianza del espectro de Lomb

$$E[C(f)] = E\left[\frac{UC}{\sqrt{CC}}\right] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^N u_i \cos(2\pi f(t_i - \tau))\right]}{\sqrt{CC}} = \frac{\sum_{i=1}^N E(u_i) \cos(2\pi f(t_i - \tau))}{\sqrt{CC}} = 0, \text{ y}$$

$$E[C^2(f)] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^N (u_i \cos(2\pi f(t_i - \tau)))^2\right]}{CC} = \frac{\sum_{i=1}^N E(u_i^2) \cos^2(2\pi f(t_i - \tau))}{CC} = \sigma^2,$$

igualmente se comporta $S(f)$, por lo cual se concluye que $C(f)$ y $S(f)$ son independientes y $\Delta R_N(f) = C^2(f) + S^2(f)$, es σ^2 veces una variable χ^2 con dos grados de libertad. De acuerdo a este resultado, se puede esperar que el conjunto de picos del espectro de ruido blanco esté gobernado por una distribución χ^2 .

Sin embargo, es razonable pensar que el ruido blanco, al igual que una señal senoidal, está relacionado con otros picos, por lo cual se presenta la correlación entre $C(f_1)$ y $C(f_2)$:

$$\varsigma[C(f_1), C(f_2)] = \frac{E[C(f_1)C(f_2)]}{(E[C^2(f_1)]E[C^2(f_2)])^{1/2}} = \frac{C_1 C_2}{\sqrt{C_1 C_1 \cdot C_2 C_2}}, \text{ de igual forma se definen las}$$

correlaciones entre $C(f_1)$ y $S(f_2), \dots$, y la correlación entre el nivel de espectral para f_1 y f_2 es

$$\begin{aligned} \varsigma_{12} &= \varsigma[P_N(f_1), P_N(f_2)] = \varsigma[\Delta R_N(f_1), \Delta R_N(f_2)] = E[(\Delta R_N(f_1) - 2\sigma^2)(\Delta R_N(f_2) - 2\sigma^2)] / 4\sigma^4 \\ &= \frac{E[\Delta R_N(f_1) \cdot \Delta R_N(f_2)]}{4\sigma^4} - 1 = \frac{4\sigma^4 + 2\sigma^4(\varsigma_{C_1 C_2}^2 + \varsigma_{C_1 S_2}^2 + \varsigma_{S_1 C_2}^2 + \varsigma_{S_1 S_2}^2)}{4\sigma^4} - 1 = \bar{p}_G(f_2), \text{ entonces} \end{aligned}$$

la correlación entre los picos espectrales de ruido para las frecuencias f_1 y f_2 es igual a la media del pico espectro de una curva senoidal de frecuencia f_1 evaluado en f_2 y la expresión $E[(\Delta R_N(f_1) - 2\sigma^2)(\Delta R_N(f_2) - 2\sigma^2)]$ es un coeficiente de regresión de $p_N(f_1)$ sobre $p_N(f_2)$.

El modelo para la señal senoidal con ruido a seguir es: $y_i = g_i + u_i$, donde $g_i = a \cos(2\pi f_1(t_i - \tau)) + b \sin(2\pi f_1(t_i - \tau))$ y u_i tiene una distribución normal con media cero y varianza σ^2 . La reducción en la suma de los cuadrados para una frecuencia f_2

se expresa por medio de $\Delta R(f_2) = \frac{(GC_2 + UC_2)^2}{C_1 C_2} + \frac{(GS_2 + US_2)^2}{S_1 S_2} = \Delta R_G(f_2) + \Delta R_U(f_2) + Ia(f_2)$,

donde $GC_2 = \sum_{i=1}^N g_i \cos(2\pi f_2(t_i - \tau))$, $UC_2 = \sum_{i=1}^N u_i \cos(2\pi f_2(t_i - \tau))$, ... , y $\Delta R_G(f_2)$ es la reducción de la suma de cuadrados de la señal en ausencia de ruido, $\Delta R_U(f_2)$ es la reducción de la suma de cuadrados del ruido en ausencia de una señal, y la interacción entre los

términos de la señal y el ruido es $Ia(f_2) = \frac{2(GC_2 \cdot UC_2)}{C_1 C_2} + \frac{2(GS_2 \cdot US_2)}{S_1 S_2}$. Si $R_y = \sum_{i=1}^N y_i^2$, el

espectro para f_2 queda definido mediante $P(f_2) = \frac{\Delta R_G(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{\Delta R_U(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{Ia(f_2)}{R_G + R_U}$.

En la ecuación de $P(f_2)$ el primer término es constante, el segundo es el aporte del ruido, y el tercer término, debido a que UC_2 y US_2 son normalmente distribuidas e independientes, es una variable normal con media cero y varianza

$$E\left[\left(Ia(f_2)\right)^2\right] = 4\sigma^2 \left(\frac{GC_2^2 C_2 C_2}{C_1 C_2^2} + \frac{GS_2^2 S_2 S_2}{S_1 S_2^2} \right) = 4\sigma^2 \Delta R_G(f_2). \text{ Si } GC_1 = aC_1 C_1 \text{ y } GS_1 = aS_1 S_1,$$

$Ia(f_1) = 2(aUC_1 + bUS_1)$ es una variable normal con media cero y $E\left[\left(Ia(f_1)\right)^2\right] = 4\sigma^2 \Delta R_G(f_1)$.

Para encontrar la correlación entre $Ia(f_1)$ e $Ia(f_2)$ se necesita su covarianza

$$E[Ia(f_1)Ia(f_2)] = 4\sigma^2 \left(\frac{GC_2(aC_1 C_2 + bS_1 C_2)}{C_1 C_2} + \frac{GS_2(aC_1 S_2 + bS_1 S_2)}{S_1 S_2} \right) = 4\sigma^2 \Delta R_G(f_2), \text{ entonces}$$

$$\varsigma[Ia(f_1), Ia(f_2)] = \frac{E[Ia(f_1)Ia(f_2)]}{\left(E[Ia^2(f_1)]E[Ia^2(f_2)]\right)^{1/2}} = \frac{4\sigma^2 \Delta R_G(f_2)}{4\sigma^2 \sqrt{R_G \Delta R_G(f_2)}} = \sqrt{P_G(f_2)}.$$

Para finalizar se calcula la esperanza de $P(f_2)$ dado que $P(f_1)$ es afectado por ruido

$$\begin{aligned} E[P(f_2) | P(f_1) = Z] &= \frac{R_G P_G(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{R_U E[P_U(f_2) | P_U(f_1) = x]}{R_G + R_U} + \frac{E[P_{Ia}(f_2) | P_{Ia}(f_1) = y]}{R_G + R_U} \\ &= \frac{R_G P_G(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{R_U (x\zeta_{12} + \bar{x}(1-\zeta_{12}))}{R_G + R_U} + \frac{y P_G(f_2)}{R_G + R_U} \quad \Leftarrow x\zeta_{12} \gg \bar{x}(1-\zeta_{12}) \\ &\approx \frac{R_G P_G(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{R_U x P_G(f_2)}{R_G + R_U} + \frac{y P_G(f_2)}{R_G + R_U} \cong P_G(f_2) Z \end{aligned}$$

Lo cual indica que $E\left[\frac{P(f_2)}{P(f_1)}\right] = P_G(f_2)$, y la varianza de $P(f_2)/P(f_1)$ es una función de

$1-p_G^2(f_2)$ y de $(1-p_G(f_2)) p_G(f_2)$ y consecuentemente, tiende a cero a medida que $p_G(f_2)$ tiende a 1, entonces, el espectro de una señal que ha sido afectada por ruido, después de normalizar las amplitudes, debe reducirse a un espectro libre de ruido.

Empleando la función de distribución acumulada F se realiza otro análisis estadístico, tal

que si $P_y(\omega) = \frac{C^2(\omega) + S^2(\omega)}{2} = Z$ que es una suma de cuadrados de dos variables aleatorias

normalmente distribuidas con media cero y varianzas σ_c^2 y σ_s^2 , se dice que Z posee una

distribución de probabilidad exponencial $p_Z(z) = \frac{e^{-z/2\sigma^2}}{2\sigma^2}$, si $\sigma = \sigma_c = \sigma_s$.

La distribución de probabilidad, en por unidad de σ_0^2 , con variables de la misma varianza puede enunciarse como $p_Z(z) dz = \Pr(z < Z < z + dz) = e^{-z} dz$, lo cual da una función de

probabilidad de distribución acumulada $F_Z(z) = \Pr\{Z < z\} = \int_0^z e^{-z'} dz' = 1 - e^{-z}$, de tal forma

que es más útil manejar el término $\Pr\{Z > z\} = 1 - F_Z(z) = e^{-z}$, indicando si en la estima se puede encontrar un pico significativo al aplicar ruido a pesar de no estar presente señal.

Así, la probabilidad de que se presente una señal de frecuencia desconocida entre un conjunto de m frecuencias para $Z = \max_m \{P(\omega_m)\}$ donde $P(\omega_m)$ es una variable aleatoria

independiente se da $\Pr(z) = 1 - Z [1 - e^{-z}]^m$, donde los factores de $[1 - e^{-z}]$ vienen de $m-1$

frecuencias para las cuales no existe señal, mientras que el otro factor proviene de la frecuencia de la señal.

Para la probabilidad de una *estimación conjunta*, aún cuando se elija una buena distribución de las frecuencias, el grado de libertad entre las potencias para diferentes frecuencias es usualmente pequeño, lo cual se verifica mediante el uso de la correlación $E[P(\omega)P(\omega')] = \left| \sum_{i=1}^N e^{-j i_i (\omega - \omega')} / N \right|^2$, una ventana espectral que contiene toda la información relevante acerca de las interdependencias y de las correlaciones, y al asumirse cero o muy pequeña para un conjunto de frecuencias uniformemente espaciadas, entonces $P(\omega_m)$ es independiente de manera aproximada, condición rigurosamente justificada para procesos gaussianos, debido a que posee una correlación implícitamente independiente.

La probabilidad de *falsa alarma* permite encontrar un nivel de potencia, z_0 , tal que sólo se afirma la detección de una señal si la estimación espectral excede este nivel, en la cual se está equivocado (engaño por las fluctuaciones) sólo un fragmento pequeño del tiempo, p_0 , que es un número pequeño fijo, a partir de la función de probabilidad acumulada se obtiene la detección de pico $z_0 = -\left[1 - (1 - p_0)^{1/m}\right]$ donde m es el número de frecuencias evaluadas.

También es notable que entre mayor sea la cantidad de muestras que se tengan para el análisis la detección se hace mucho más fiable, si la potencia espectral decae por debajo de la potencia de probabilidad de falsa alarma, la señal no será detectada. Así mismo, la probabilidad de perder una señal de potencia P está dada por su correspondiente función de distribución de probabilidad evaluada en el pico detectado:

$$p^*(m, P) = \Pr\{pérdida\} = F_m(z_0) = (1 - p_0)^{\frac{m-1}{m}} \left[1 - e^{-z_0 - P}\right] \phi(z_0, P)$$

$$= (1 - p_0)^{\frac{m-1}{m}} \left[1 - e^{-z_0 - P}\right] \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{z_0^k P^j}{k! j!} \right), \quad \phi \text{ es una integral de función Bessel}$$

Esta ecuación puede ser usada para comparar la eficiencia en la detección de dos esquemas observacionales en términos de sus parámetros m y P . La eficiencia en la detección de una señal de potencia se define como la *probabilidad de detectar* una señal de potencia P , y esto se convierte en el complemento de p^* : $DE=1-p^*(m,P)$.

Se puede ver en la relación de potencia a ruido que P depende no sólo de la amplitud de la señal también de los parámetros σ_0 y m . Esto hace que si se desea específicamente una baja probabilidad de falsa alarma entonces la relación de potencia a ruido debe ser relativamente grande y la probabilidad de la no detección baja.

Una aplicación de estos resultados es el ajuste de los parámetros para maximizar la eficiencia en la detección. Intuitivamente, se puede clarificar que entre mayor sea la cantidad de datos analizados mayor es la eficiencia en la detección. Sin embargo, es fácil ver que si P es una función no creciente de m , incluyendo el caso constante, p^* es creciente en función de m , para lo cual m debe ser lo más pequeña posible. El caso contrario, en el cual P es una función creciente de m , no puede ser tratada fácilmente, para lo cual se emplea contornos para la eficiencia en la detección. A partir de la ecuación de contornos

para p^* , $dp^* = \left(\frac{\partial p^*}{\partial m}\right)dm + \left(\frac{\partial p^*}{\partial P}\right)dP$, se obtiene que $P = \left(-C + \sqrt{\ln\left(\frac{m}{p_0}\right)}\right)^2$, es el valor

para maximizar la detección, donde C es una constante de integración. Se induce, luego, que P debe incrementar junto con m para revertir el crecimiento de p^* en función de m .

Conjuntamente, *Horne* y *Baliunas* a partir de los resultados de extensos experimentos de Monte Carlo para determinar el valor de m en varios casos, en $P(Z > z) \approx me^{-z}$, concluyeron que en general m depende del número de frecuencias de muestreo, el número de datos N , y la densidad del muestreo. Resulta que m es casi igual a N cuando el muestreo es aproximadamente regular, aún cuando exista sobremuestreo de frecuencias. De igual forma, el valor de m no es fatuamente diferente para el muestreo irregular que para el regular, y cuando se muestrea en un rango de frecuencia mayor al rango de Nyquist m

aumenta proporcionalmente. El único caso en dónde m difiere significativamente del caso regular, es cuando los puntos se agrupan estrechamente, por decir en grupos de 3, entonces el número de frecuencias independientes se reducido por un factor de 3, aproximadamente.

Para calcular un buen valor de m por Monte Carlo simple se mantiene la base de tiempo y se generan varios conjuntos de datos con distribución gausiana, se calcula el máximo valor de potencia para cada conjunto de datos y se ajusta la distribución resultante para M .

2.5.4 Aplicación de la Pseudo-Inversa al periodograma LS

Empleando el modelo general de N datos con muestreo irregular y la nomenclatura

$$x_i = (A_\omega B_\omega) \begin{pmatrix} \cos \omega t_i \\ \sin \omega t_i \end{pmatrix} + \varepsilon_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbf{\Omega}_{t,\omega} = \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \cos \omega t_2 & \cdots & \cos \omega t_N \\ \sin \omega t_1 & \sin \omega t_2 & \cdots & \sin \omega t_N \end{bmatrix} \text{ se puede}$$

derivar una aproximación por mínimos cuadrados conjunta para M frecuencias. Los coeficientes A_ω y B_ω se pueden obtener mediante el uso de la pseudo-inversa de *Moore-Penrose* e identidades trigonométricas, de manera que: $(A_\omega B_\omega) = \mathbf{x} \mathbf{\Omega}_{t,\omega}^T (\mathbf{\Omega}_{t,\omega} \mathbf{\Omega}_{t,\omega}^T)^{-1}$

$$= \sum \left[x_i \begin{pmatrix} \cos \omega t_i \\ \sin \omega t_i \end{pmatrix}^T \right] \begin{pmatrix} CC & CS \\ CS & SS \end{pmatrix}^{-1} = 2 \sum \left[x_i \begin{pmatrix} \cos \omega t_i \\ \sin \omega t_i \end{pmatrix}^T \right] \frac{\begin{pmatrix} N - \sum \cos 2\omega t_i & -\sum \sin 2\omega t_i \\ -\sum \sin 2\omega t_i & N + \sum \cos 2\omega t_i \end{pmatrix}}{N^2 - (\sum \cos 2\omega t_i)^2 + (\sum \sin 2\omega t_i)^2}, \text{ y}$$

la estima se expresa como $P_\omega^{PI} = (A_\omega^2 + B_\omega^2) / N$, la cual es empleada por *Bloomfield*.

Al ingresar la constante de desplazamiento del estudio de *Lomb*, de tal forma que se cree una base ortogonal para la frecuencia ω los coeficientes A_ω y B_ω se expresan por la fórmula:

$$(A_\omega B_\omega) = \left(\frac{\sum x_i \cos(\omega(t_i - \tau))}{\sum \cos^2 \omega(t_i - \tau)} \quad \frac{\sum x_i \sin(\omega(t_i - \tau))}{\sum \sin^2 \omega(t_i - \tau)} \right), \quad \text{de tal forma que}$$

$$|(A_\omega B_\omega)|^2 = \frac{[\sum x_i \cos(\omega(t_i - \tau))]^2}{[\sum \cos^2 \omega(t_i - \tau)]^2} + \frac{[\sum x_i \sin(\omega(t_i - \tau))]^2}{[\sum \sin^2 \omega(t_i - \tau)]^2}, \text{ la cual es equivalente en}$$

forma al periodograma de *Lomb*, exceptuando el cuadrado del denominador, que hace las veces de regularizador de ruido, y incrementarse hace más aguda la estimación espectral.

Para lograr una estimación conjunta $(A_1 B_1 \dots A_m B_m) = \mathbf{x}\mathbf{\Omega}_t^T (\mathbf{\Omega}_t \mathbf{\Omega}_t^T)^{-1}$ se usa un modelo de

$$m \text{ frecuencias: } x_i = (A_1 B_1 \dots A_m B_m) \begin{pmatrix} [\cos \omega_1 t_i \ \text{sen } \omega_1 t_i]^T \\ \vdots \\ [\cos \omega_m t_i \ \text{sen } \omega_m t_i]^T \end{pmatrix} + \varepsilon_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \mathbf{\Omega}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{t, \omega_1} \\ \vdots \\ \mathbf{\Omega}_{t, \omega_m} \end{bmatrix}.$$

2.5.5 El periodograma LS modificado: el periodograma *Welch-Lomb*

Como el periodograma, el periodograma de *Lomb* no es un estimador consistente un estadísticamente. Para obtener una estimación espectral que provea un balance razonable entre el sesgo y varianza, se puede considerar potencia promediar las transformadas de varios segmentos enventanados de la señal observada, posiblemente solapados, de manera similar al método propuesto por *Bartlett* o *Welch*. Para poder promediar los periodograma de *Lomb*, se necesita resolver dos problemas: la desnormalización del periodograma para usar el promedio y la selección del tamaño adecuado de la longitud de la ventana¹³.

La desnormalización es necesaria porque para cada segmento existe una constante de normalización diferente, lo cual hace que su promediado no sea significativo. Para derivar el factor de desnormalización, se considera el caso del muestreo regular ($t_i = iT$). De esta manera para una señal $x_i = A \cos(2\pi iK/N)$, donde K es un entero, $\bar{x}_i = 0$, $\sigma^2 = A^2/2$, el numerador del primer término (coseno) de la ecuación del periodograma para $f = K/NT$ es $(AN/2)^2$, el denominador es $N/2$, el segundo término es cero y el valor teórico de la densidad espectral de potencia normalizada es $N/2$, así el factor de desnormalización debe ser $2\sigma^2/N$.

Esto indica que si la entrada es ruido blanco con varianza σ^2 , el valor esperado del periodograma no normalizado debe ser igual a $2\sigma^2$, para cualquier tipo de muestreo. La

potencia del ruido medida en un ancho de banda efectivo de $2\pi/i\overline{\Delta t_i}$ (y una varianza pequeña) se espera que sea $2\sigma^2/N$, potencia de σ^2 difundida sobre $N/2$ puntos distanciados $1/N\overline{\Delta t_i}$ Hz en un ancho de banda $[0, 0.5\overline{\Delta t_i}]$. El factor de desnormalización vuelve a ser $2\sigma^2/N$, que es el mismo que se emplea para el caso de una senoidal, esto se traduce en:

$$P_{x_{desnormalizado}}(f) = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\left[\sum (x_i - \bar{x}) \cos(2\pi f(t_i - \tau)) \right]^2}{\sum \cos^2(2\pi f(t_i - \tau))} + \frac{\left[\sum (x_i - \bar{x}) \text{sen}(2\pi f(t_i - \tau)) \right]^2}{\sum \text{sen}^2(2\pi f(t_i - \tau))} \right\}.$$

Como los datos se muestrean irregularmente, no existe manera alguna de establecer cómo debe segmentarse el registro de datos y qué tan grande debe ser para promediar el periodograma. La solución más viable es el uso de segmentos de igual tiempo de duración (o de duración mínima) o separar en partes iguales de acuerdo a la cantidad de datos obtenidos teniendo en cuenta el ancho de banda de la señal, ambas implican el uso de una ventana rectangular implícita, y la estimación para cada frecuencia se convolucionan con una función $\text{sinc}(f)$, y entonces el ancho de banda es proporcional a la ventana de observación.

Cuando estos términos se promedian, el resultado es incoherente para ventanas de diferente duración debido a las diferencias en los anchos de banda. Usando segmentos con la misma duración de tiempo, aún con una cantidad de puntos diferente, se tiene anchos de banda subyacentes similares y si además la señal es estacionaria, la estimación obtenida es consistente. Así, la segmentación recomendada para promediar es escoger los segmentos que posean la misma duración de tiempo D , tal que $\max_m \{ [x_i, x_{i+m}] | t_{i+m} - t_i < D \}$.

2.5.6 Extensión del periodograma LS al periodograma LS no senoidal por *Bretthorst*

Para analizar datos en cuadratura muestreados no simultáneamente se generaliza el modelo: $d_R(t_i) = A \cos(\omega(t_i - \tau))Z(t_i) + B \text{seno}(\omega(t_i - \tau))Z(t_i) + \varepsilon_R(t_i)$, donde $d_R(t_i)$ son los datos reales, τ debe ser definido de tal forma que se forme funciones senoidales ortogonales, la

función $Z(t_i)$ especifica el amortiguamiento de la senoide, puede ser exponencial, gaussiana, o cualquier función apropiada para el modelado de la señal, de tal forma que todos sus parámetros son conocidos para no desviar la atención en resolver dos problemas a la vez¹⁴.

Para los datos imaginarios $d_I(t_j) = A \cos(\omega(t_j - \tau))Z(t_j) + B \sin(\omega(t_j - \tau))Z(t_j) + \varepsilon_I(t_j)$, donde N_I es el número total de valores imaginarios, t_j los tiempos de muestreo y el subíndice I asegura que estas cantidades se refieren a la parte imaginaria de la señal.

Se definen las formas $C(f) = \sum_{i=1}^{N_R} [\cos(\omega(t_i - \tau))Z(t_i)]^2 + \sum_{j=1}^{N_I} [\sin(\omega(t_j - \tau))Z(t_j)]^2$,

$$S(f) = \sum_{i=1}^{N_R} [\sin(\omega(t_i - \tau))Z(t_i)]^2 + \sum_{j=1}^{N_I} [\cos(\omega(t_j - \tau))Z(t_j)]^2,$$

$$SR(f) = \sum_{i=1}^{N_R} d_R(t_i) \cos(\omega(t_i - \tau))Z(t_i) - \sum_{j=1}^{N_I} d_I(t_j) \sin(\omega(t_j - \tau))Z(t_j),$$

$$SI(f) = \sum_{i=1}^{N_R} d_R(t_i) \sin(\omega(t_i - \tau))Z(t_i) + \sum_{j=1}^{N_I} d_I(t_j) \cos(\omega(t_j - \tau))Z(t_j).$$

Las expresiones $SR(f)$ y $SI(f)$ para una SRM se reducen respectivamente a la parte real e imaginaria de una TF discreta ponderada de datos complejos, $C(f)$ y $S(f)$ respectivamente son valores representativos de la medida de la parte real e imaginaria de la señal, y la función $Z(t)$ juega el papel de función ponderante.

Finalmente, la condición que cancela los términos cruzados, es decir, que las funciones modelos son ortogonales se usa para determinar el valor de τ , esta condición está dada por:

$$0 = \sum_{i=1}^{N_R} \cos(\omega(t_i - \tau)) \sin(\omega(t_i - \tau)) Z(t_i)^2 - \sum_{j=1}^{N_I} \sin(\omega(t_j - \tau)) \cos(\omega(t_j - \tau)) Z(t_j)^2,$$

de tal forma que si los datos imaginarios y reales no son simultáneos se llega a la forma:

$$\tan(2\omega\tau) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_R} \sin(\omega(t_i - \tau)) Z(t_i)^2 - \sum_{j=1}^{N_I} \sin(\omega(t_j - \tau)) Z(t_j)^2}{\sum_{i=1}^{N_R} \cos(\omega(t_i - \tau)) Z(t_i)^2 - \sum_{j=1}^{N_I} \cos(\omega(t_j - \tau)) Z(t_j)^2} \right).$$

La probabilidad conjunta para las frecuencias se denota como $P(f|D_H)$, donde D se entiende por todos los datos y la hipótesis H se refiere a toda la información previa. La probabilidad conjunta para la frecuencia se calcula de la probabilidad conjunta para todos los parámetros: $P(f|D_H) = \int dA dB d\sigma P(fAB\sigma|D_H)$, donde σ es la desviación estándar de la probabilidad ruido gaussiano usado para asignar las probabilidades.

El lado derecho de esta ecuación puede ser factorizado usando el teorema de *Bayes* y las reglas de la suma y el producto de la teoría de probabilidad para obtener $P(f|D_H) \propto \int P(f|H)P(A|H)P(B|H)P(\sigma|H)P(D_R|fAB\sigma_H)P(D_H|fAB\sigma_H)dAdBd\sigma$, donde se asume independencia lógica de los parámetros, y que la desviación estándar de la probabilidad del ruido es la misma tanto para los datos reales como para los imaginarios. Si se asignan probabilidades uniformes para $P(f|I)$, $P(A|H)$, $P(B|H)$, una probabilidad de *Jeffreys* ($1/\sigma$) a $P(\sigma|H)$, y se asignan las dos probabilidades usando probabilidad de ruido gaussiano para una cantidad total N de valores, definida como $N=N_R+N_I$, se obtiene

$$P(f|D_H) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{-\infty}^{\infty} dB \int_0^{\infty} \sigma^{-(N+1)} \exp \left\{ -\frac{N\bar{d}^2 - 2AR(f) - 2BI(f) + A^2C(f) + B^2S(f)}{2\sigma^2} \right\} d\sigma,$$

donde el valor medio \bar{d}^2 se define como $\bar{d}^2 = \left[\sum_{i=1}^{N_R} d_R(t_i)^2 + \sum_{j=1}^{N_I} d_I(t_j)^2 \right] / N$.

La integral sobre las dos amplitudes son integrales en cuadratura gaussiana desacopladas y sólo necesitan completar el cuadrado en el exponente y un simple cambio de variable para evaluarlas, mientras que la integral de la desviación estándar de la probabilidad del ruido precisa convertirse a una integral *Gama* para evaluarse fácilmente, el resultado conlleva a:

$$P(f|D_H) \propto \frac{1}{\sqrt{C(f)S(f)}} \left(N\bar{d}^2 - \bar{h}^2 \right)^{(2-N)/2}, \quad \text{donde} \quad \bar{h}^2 = \frac{SR(f)^2}{C(f)} + \frac{SI(f)^2}{S(f)} \quad \text{es la}$$

generalización del periodograma LS y su máxima expresión es una forma funcional que tiene un formato idéntico al periodograma LS adaptado a una señal decadente con datos en cuadratura muestreados irregularmente y no simultáneos.

2.5.7 Extensión del periodograma LS a una serie compleja aplicando la pseudo-inversa

En el caso de una serie compleja $\xi = \{\xi_i\}$ y una aproximación por funciones complejas $e^{j\omega t}$, el resultado es igual de simple. Cuando se usa la matriz $\Psi_{t,\omega} = (e^{j\omega t_1}, e^{j\omega t_2}, \dots, e^{j\omega t_N})$ para formular la expresión $\xi = \zeta_i \Psi_{t,\omega} + \varepsilon$, análogamente al desarrollo expuesto por Lomb, con un coeficiente complejo ζ_ω y un vector de términos de error ε de media compleja cero, la solución pseudo-inversa en este caso es $\zeta_\omega = \xi \Psi_{t,\omega}^* (\Psi_{t,\omega} \Psi_{t,\omega}^*)^{-1} = \sum \xi_i e^{-i\omega t_i} / N$.

Usando $\Re z = (z + \bar{z})/2$ y $\Im z = (z - \bar{z})/2j$, se reescribe la aproximación real en términos de la aproximación compleja. Donde, ζ_ω denota la aproximación compleja de las series reales, $t_{2\omega}$ denota la aproximación compleja para la frecuencia 2ω , y $\Re c$ y $\Im c$, la media de la parte real e imaginaria de un número complejo c , respectivamente. Se obtiene, entonces:

$$c_\omega + is_\omega = \frac{2(\Re z - \Im z)}{1 - |t_{2\omega}|} \begin{pmatrix} 1 - \Re t_{2\omega} & \Im t_{2\omega} \\ \Im t_{2\omega} & 1 + \Re t_{2\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{2 \left(\bar{\zeta}_\omega - \overline{t_{2\omega} \zeta_\omega} \right)}{1 - |t_{2\omega}|^2}$$

Para $\omega=0$, basta con calcular el promedio c_0 , mientras que los demás términos se determinan por la multiplicación matricial $(c_\omega s_\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega t_i & \sen \omega t_i \\ -\sen \omega t_i & \cos \omega t_i \end{pmatrix} = (\Re x_i \quad \Im x_i)$.

Aproximando tales series uniformes de valores reales con la solución de la pseudo-inversa, la parte imaginaria queda indeterminada, mientras que la aproximación de *Lomb* puede ser interpretada como una ecuación compleja con parte imaginaria cero. Así mismo, al introducir un desplazamiento temporal τ , se puede indicar:

$$\begin{aligned} \Omega_{t+\tau,\omega} &= \Phi_{\omega\tau} \Omega_{t,\omega} = \begin{pmatrix} \cos \omega(t_1 + \tau) & \cos \omega(t_2 + \tau) & \dots & \cos \omega(t_N + \tau) \\ \sen \omega(t_1 + \tau) & \sen \omega(t_2 + \tau) & \dots & \sen \omega(t_N + \tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & -\sen \omega\tau \\ \sen \omega\tau & \cos \omega\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t_1 & \cos \omega t_2 & \dots & \cos \omega t_N \\ \sen \omega t_1 & \sen \omega t_2 & \dots & \sen \omega t_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & -\sen \omega\tau \\ \sen \omega\tau & \cos \omega\tau \end{pmatrix} \Omega_{t,\omega} \end{aligned}$$

Como $(c_\omega s_\omega) = \Omega_{t,\omega}^T (\Omega_{t,\omega} \Omega_{t,\omega}^T)^{-1}$, entonces la pseudo-inversa de $\Omega_{t+\tau}$ se calcula mediante la expresión $(\Phi_{\omega\tau} \Omega_{t,\omega})^* (\Phi_{\omega\tau} \Omega_{t,\omega} (\Phi_{\omega\tau} \Omega_{t,\omega})^*)^{-1} = \Omega_{t,\omega}^* (\Omega_{t,\omega} \Omega_{t,\omega}^*)^{-1} \Phi_{\omega\tau}^T$, y los coeficientes después del desplazamiento se $(c_\omega s_\omega)_\tau = (c_\omega s_\omega) \Phi_{\omega\tau}^T$, donde es obvio que $\zeta_\omega^\tau = \zeta_\omega e^{-i\omega\tau}$. Así, las amplitudes tanto de la aproximación real como de la compleja son invariantes en el tiempo y se obtiene una fase significativa, y se conserva la ventaja de la insensitividad ante el fenómeno de *aliasing* del periodograma LS cuando las diferencias entre los tiempos de muestreo tienen una distribución normal. Sin embargo, la reconstrucción de una señal a partir del análisis espectral de una serie de tiempo requiere invertir de manera completa la matriz como una consecuencia del muestreo no uniforme.

2.5.8 Extensión del periodograma LS al eventanado y al análisis Wavelet por *Mathias, Grond, Guardans, Seese, Canela y Diebner*: periodograma LS eventanado

Combinando las aproximaciones derivadas del algoritmo de *Lomb-Scargle* se puede formular una expresión eventanada o ponderada con una función apropiada $\beta_i^2 = w(t_i)$, tal

que $\sum_{i=1}^N \left\{ \beta_i^2 \left[x_i - (c_\omega s_\omega) \begin{pmatrix} \cos(\omega t_i) \\ \sin(\omega t_i) \end{pmatrix} \right] \right\}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\beta_i x_i - (c_\omega s_\omega) \begin{pmatrix} \beta_i \cos(\omega t_i) \\ \beta_i \sin(\omega t_i) \end{pmatrix} \right]^2$, que puede ser

minimizada con respecto a $(c_\omega s_\omega)$, para la cual la solución pseudo-inversa es:

$$(c_\omega s_\omega) = \left(\frac{2}{\left(\sum \beta_i^2 \right)^2 - \left(\sum \beta_i^2 \cos(2\omega t_i) \right)^2 - \left(\sum \beta_i^2 \sin(2\omega t_i) \right)^2} \right) \left[\sum_{i=1}^N \beta_i^2 x_i \begin{pmatrix} \cos(\omega t_i) \\ \sin(\omega t_i) \end{pmatrix}^T \right] \left[\begin{pmatrix} \sum \beta_i^2 - \sum \beta_i^2 \cos(2\omega t_i) & -\sum \beta_i^2 \sin(2\omega t_i) \\ -\sum \beta_i^2 \sin(2\omega t_i) & \sum \beta_i^2 + \sum \beta_i^2 \cos(2\omega t_i) \end{pmatrix} \right]$$

y su expresión en forma compleja es: $\zeta_\omega = \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i^2 \xi_k e^{-i\omega t_k}}{\sum_{i=1}^N \beta_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N w(t_i) \xi_k e^{-i\omega t_k}}{\sum_{i=1}^N w(t_i)}$.

Para acelerar los cálculos, se puede emplear una función ventana con soporte compacto en

el tiempo que no emplea funciones transcendentales, $w(t) = \begin{cases} 1 - 3|t|^2 + 2|t|^3, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$, la cual

tiene una forma similar a la popular ventana *Hanning* $h(t) = \begin{cases} (1 - \cos(\pi t))/2, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

2.5.9 Convergencia del periodograma LS

Para una secuencia infinita real con una función de densidad generalizada

$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{N\varepsilon} |\{t_k | t - \varepsilon/2 \leq t_k \leq t + \varepsilon/2\}|$, y una función real $x(t)$ donde $x(t)\varphi(t)$ sea absolutamente integrable y en secuencias con densidades no continuas (considerando los

limites de las funciones ordinarias ejemplo, $t_k = k \bmod m$ $\varphi(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \sum_{h=0}^{m-1} e^{-\frac{(t-h)^2}{\sigma}} / m$),

se puede escribir $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x(t_i) / N = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t) dt$.

Así, cuando se considera una función compleja $\xi(t)$ donde $\xi(t)\varphi(t)$ es absolutamente integrable y la medida del error ρ_i sigue una distribución simétrica compleja independiente de media cero, la estima de ζ_ω aplicada para $\xi(t_i) + \rho_i$ es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum (\xi(t_i) + \rho_i) e^{-j\omega t_i} = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum (\xi(t_k)) e^{-j\omega t_k} + \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum \rho_i e^{-j\omega t_i}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{TF}_i(\xi(t)\varphi(t)), \text{ donde } \mathcal{TF}_i(f(t)) \text{ es la TF de } f(t), \text{ de tal forma que}$$

si la densidad de muestreo no es constante, entonces la aproximación compleja se convierte en un estimador sesgado que converge a cero cuando $\mathcal{TF}_i(\varphi(t))$ se aproxima a $\delta_{0,t}$

(elementos de $\varphi(t)$ con desvanecimientos en frecuencia sin incluir la frecuencia cero), y es

estimador consistente debido a: $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sum \rho_i e^{-j\omega t_i} / N \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left(N^{-2} \sum \rho_i e^{-j\omega t_i} \overline{\sum \rho_i e^{-j\omega t_i}} \right)$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N |\rho_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^i \Re(\rho_i \rho_k e^{-j\omega(t_i - t_k)}) \right] \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \rho_i / N = 0.$$

La convergencia para la aproximación real se puede expresar como:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_\omega + js_\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2(\overline{\zeta_\omega} - \overline{l_{2\omega}} \zeta_\omega)}{1 - |l_{2\omega}|^2} = \frac{2(\overline{\mathcal{T}\mathcal{F}_t(x(t)\varphi(t))} - \overline{\mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(\varphi(t))} \mathcal{T}\mathcal{F}_t(x(t)\varphi(t)))}{1 - |\mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(\varphi(t))|^2}, \quad \text{con}$$

$\omega \neq 0$. Cuando $\mathcal{T}\mathcal{F}_t(\varphi(t))$ se aproxima a $\delta_{0,t}$, la expresión $\mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(\varphi(t))$ tiende a cero, que es equivalente a la aproximación compleja excepto por el factor 2 y bajo estas circunstancias, la aproximación real converge de forma diferente a la aproximación compleja.

Si φ es simétrica entonces $\mathcal{T}\mathcal{F}_t(\varphi(t))$ es real, y la parte real e imaginaria de $\overline{\mathcal{T}\mathcal{F}_t(x(t)\varphi(t))}$ se escalan individualmente, en el caso general, la aproximación real converge al complejo conjugado del limite de la aproximación compleja, siendo un estimador no sesgado. Se puede obtener una varianza cero para ζ_ω asumiendo una distribución simétrica real para el término del error, con lo cual también se obtiene un estimador consistente. Así se concluye que si la TF de una SIM existe, tanto la aproximación real como la compleja convergen y proveen una estima consistente.

Para estudiar la convergencia del periodograma LS se introduce

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-j\omega\tau} = e^{-j \arg \mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(\varphi(t))/2} \text{ de tal forma que:}$$

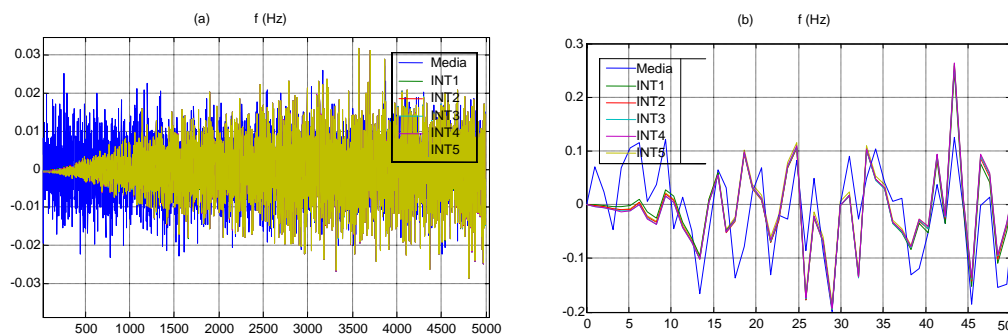
$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} LS(\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{[\sum x_i \cos(\omega(t_i - \tau))/N]^2}{\sum \cos^2(\omega(t_i - \tau))/N^2} + \frac{[\sum x_i \sen(\omega(t_i - \tau))/N]^2}{\sum \sen^2(\omega(t_i - \tau))/N^2} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{[\sum x_i \Re(e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_i})/N]^2}{\sum 1 + \Re(e^{-2j\omega\tau} e^{j2\omega t_i})/2N^2} + \frac{[\sum x_i \Im(e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_i})/N]^2}{\sum 1 - \Re(e^{-2j\omega\tau} e^{j2\omega t_i})/2N^2} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{2\sigma^2} \left\{ \frac{[\sum x_i \Re(e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_i})/N]^2}{\sum 1 + \Re(e^{-2j\omega\tau} e^{j2\omega t_i})/N} + \frac{[\sum x_i \Im(e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_i})/N]^2}{\sum 1 - \Re(e^{-2j\omega\tau} e^{j2\omega t_i})/N} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum x_i^2} \left\{ \frac{[\Re(\mathcal{T}\mathcal{F}_t(u\varphi(t)x(t)))]^2}{1 + \mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(u^2\varphi(t))} + \frac{[\Im(\mathcal{T}\mathcal{F}_t(u\varphi(t)x(t)))]^2}{1 - \mathcal{T}\mathcal{F}_t^{2\omega}(u^2\varphi(t))} \right\} \end{aligned}$$

Esta expresión se hace cero para señales potencia media finita, mientras que se hace necesario evaluarse para señales de energía finita (las cuales se analizan por medio de la DEE), con lo cual se demuestra que el periodograma LS converge, sin embargo no pasa lo mismo en el caso del periodograma desnormalizado (es divergente).

2.5.10 Cambio en el cálculo del valor medio en el periodograma LS

La fórmula convencional empleada en el periodograma LS para el cálculo de la media de una señal h , no es la más adecuada cuando el muestreo es irregular. Se recomienda entonces variar dicha definición con $\bar{h} = \sum_{i=1}^N h_i / (t_N - t_1)$ (media modificada), o implementar un algoritmo integrador en base a dos, tres, cuatro, cinco, seis o más puntos (INT1, INT2, INT3, INT4, INT5, respectivamente) de tal forma que $\bar{h} = \int_{t_1}^{t_N} h(t) / (t_N - t_1)$.

Figura 14. Error promedio de la medida de la media convencional y de los algoritmos integradores para una señal seno a diferentes frecuencias. (a) $f_s=10000$ Hz, (b) $f_s=100$ Hz



La figura 14 explica que a bajas frecuencias los algoritmos integradores (los cuales se comportan de manera similar) para una SIM con distribución normal proporcionan una disminución en el error de la medición de la media, sin embargo para altas frecuencias se comportan de la misma forma que la media tradicional. Los algoritmos integradores adicionan un incremento sustancioso en el tiempo de cálculo del periodograma a medida que la base es mayor, esto al combinarse con el promedio del error deja como mejor opción

la base que toma cuatro puntos (Simpson 3/8). La media modificada, mencionada anteriormente, fue omitida en las gráficas debido a que no presenta grandes mejoras.

Tabla 4. Valores del error en la estimación de la media para diferentes algoritmos

Valor	Media modificada	INT1	INT2	INT3	INT4	INT5
Error promedio	1,0010	0,8722	0,7196	0,6670	0,7854	0,8041
Varianza del error	1,0002	0,7002	0,5451	0,4366	0,5418	0,5649
Tiempo de cálculo	0,9589	4,3622	7,6558	11,1043	14,6694	14,7400

La tabla anterior muestra los valores normalizados, con respecto al valor de la media tradicional del error, la varianza del error y el tiempo de cálculo promedio resultantes de las estimaciones del valor medio para senoidales de 100 frecuencias diferentes con 100 muestreos irregulares de distribución normal (Frecuencia promedio de 100 y 1000 Hz).

2.5.11 Extrapolación del algoritmo LS para el cálculo del biespectro y la no linealidad

Cuando se desea caracterizar con mayor profundidad y exactitud la señal de interés se hace necesario incrementar el orden de los estadísticos empleados, en este caso el periodograma, al ser un estadístico de segundo orden puede ser sustituido por estadísticos de tercer orden.

Los estadísticos de tercer orden parten del concepto de cumulantes que realizan la misma tarea que la covarianza en los estadísticos de segundo orden. El cumulante de orden tres se define como $C_3(o,p)=M_3(o,p)-M_1[M_2(o)+M_2(p)+M_2(o-p)]+2M_1^3$, donde M_k denota el momento de orden k y el tercer momento se define como $M_3(o,p)=E[x_i(t)x_{i+o}(t)x_{i+p}(t)]$.

El biespectro indica la relación entre la densidad espectral existente entre diversas frecuencias y para su visualización se hace necesario emplear una gráfica en tercera dimensión o el uso de curvas de nivel, en la cual se emplea por conveniencia el valor normalizado del biespectro (o bicoherencia). Además, la información del biespectro puede ser empleada para verificar el grado de no linealidad de la señal analizada empleando la relación entre la traza y la sumatoria de todos los valores por fuera de la diagonal.

De forma análoga el biespectro se define como la TF doble del cumulante de orden tres o puede ser estimado como $B(\omega_k, \omega_l) = X(\omega_k)X(\omega_l)X(\omega_k + \omega_l)$, y puede ser implementado mediante el algoritmo de Lomb para SIM mediante la expresión matemática

$$B(\omega_k, \omega_l) = \left[\frac{\sum x_i \cos(\omega_k(t_i - \tau_k))}{\sum \cos^2(\omega_k(t_i - \tau_k))} + j \frac{\sum x_i \sen(\omega_k(t_i - \tau_k))}{\sum \sen^2(\omega_k(t_i - \tau_k))} \right] * \\ \left[\frac{\sum x_i \cos(\omega_l(t_i - \tau_l))}{\sum \cos^2(\omega_l(t_i - \tau_l))} + j \frac{\sum x_i \sen(\omega_l(t_i - \tau_l))}{\sum \sen^2(\omega_l(t_i - \tau_l))} \right] * \\ \left[\frac{\sum x_i \cos((\omega_k + \omega_l)(t_i - \tau_{k+l}))}{\sum \cos^2((\omega_k + \omega_l)(t_i - \tau_{k+l}))} + j \frac{\sum x_i \sen((\omega_k + \omega_l)(t_i - \tau_{k+l}))}{\sum \sen^2((\omega_k + \omega_l)(t_i - \tau_{k+l}))} \right].$$

Sin embargo, una medida del grado de no linealidad de una señal SIM más adecuada, parte de la generalización del método de sustitución de datos de *Theiler* (1992), implementada mediante el algoritmo de Lomb (se descarta el uso de la interpolación, ya que la estructura genuina es indistinguible de la no linealidad introducida por el proceso de interpolación) y se emplea un estadístico de prueba simple que mida la no linealidad a través de las

desviaciones de la invertibilidad de tiempo, es decir $\gamma = \sum_{i=2}^N \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^3 / ((N-1)(\sqrt{\sigma^2})^3)$.

Para un acercamiento no lineal de una señal, se necesitan firmas de no linealidad en el proceso generador entonces, la hipótesis nula que se emplea consiste en una generación de datos por un proceso estocástico lineal, posiblemente reescalado (descartando las correlaciones o una relación determinística entre los intervalos de la muestra y los datos).

Una aproximación general a la aleatorización por *Schreiber* (método de sustitución basado en una TF alterna y reescalado por escalón, 1998) describe una propiedad útil de la sustitución de datos expresada a través de una función de costo C , que alcanza un mínimo si la sustitución cumple una propiedad dada, y para una SIM puede definirse mediante el uso del algoritmo de Lomb, $C = \left[\sum_{k=1}^m |LS_{sust}(k\omega_0) - LS_{datos}(k\omega_0)|^q \right]^{\frac{1}{q}}$, donde q es la métrica.

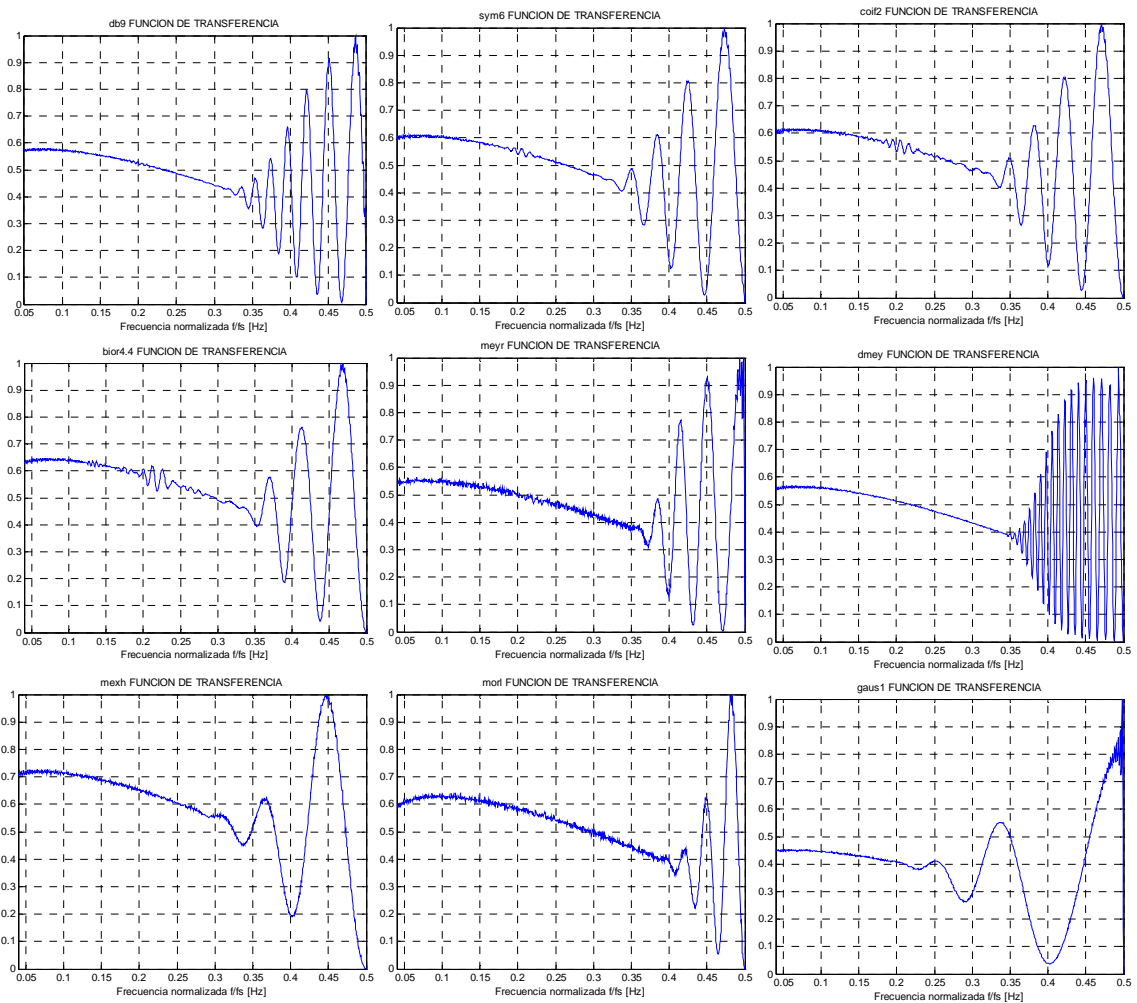
La función costo se minimiza por medio de moderadas simulaciones, empezando con una permutación aleatoria de la serie de tiempo original, la substitución se modifica intercambiando dos puntos escogidos al azar, aceptándose si toma un valor menor para la función de costo o una probabilidad $p = e^{-\Delta C/B}$, donde B disminuye para permitir un establecimiento lento de un mínimo. Como consecuencia de este procedimiento se puede imponer la estructura de la correlación lineal deseada a una señal substituida.

Como una última acotación se recalca el hecho de que sólo se han intercambiando los valores de x_i y los tiempos de muestreo han permanecido fijos, por lo cual se excluye los datos como los intervalos R-R de electrocardiogramas dónde se tiene la condición adicional $t_{i+1} = t_i + x_i$, para los cuales se necesita un procedimiento mucho más elaborado de substitución de datos, ya que se deben substituir tanto las amplitudes como la base de tiempo.

3 COMPARACIÓN ENTRE ESTIMADORES DE POTENCIA ESPECTRAL

Para dar inicio al cuadro comparativo entre los diversos estimadores espectrales, antes mencionados, como primera disposición se descartan todos los métodos que necesiten de un proceso interpolador para el procesamiento de una SIM, porque se reduce en la mayoría de los casos el ancho de banda efectivo para el estimador. Como segunda instancia se descarta el uso de Wavelets debido a que la función de transferencia asociada a la estimación espectral presenta un rasgo oscilatorio en la banda de alta frecuencia

Figura 15. Ganancias en la estimación espectral mediante la funciones Wavelet



En la figura 15 se muestra que es posible emplear la Transformada Wavelet para la estimación espectral de una SIM, siempre y cuando se trabaje en la banda casi lineal, teniendo como mejores opciones las *wavelets* db9, sym6 y morl.

Como tercera instancia se han seleccionado los métodos de *Lomb-Scargle* (LS), *Bloomfield*, *Burg* y *Czerny*, el método bayesiano de Q_i , un algoritmo para el método NUDFT, un algoritmo integrador basado en la definición de la densidad espectral y el periodograma clásico modificado para SIM (tomado como patrón), porque satisfacen en buena medida los requerimientos para la estimación espectral de una SIM.

Como primera medida de comparación se emplea la distorsión espectral de señales con ruido aleatorio con muestreo regular. En la tabla 5 se registran los valores promedios de las distorsiones espectrales de los 7 métodos seleccionados con respecto al periodograma clásico de 200 señales con 1000 datos para 4 casos. En el caso 1 la señal es ruido puro, en el caso 2 la señal es una senoidal de frecuencia 0,1 Hz y ruido, en el caso 3 la señal es una senoidal de frecuencia 0,25 Hz y ruido, en el caso 4 la señal es una senoidal de frecuencia 0,4 Hz y ruido. En los casos 2, 3 y 4 la relación de señal a ruido es de 0,1. En esta medida comparativa los métodos de *Bloomfield*, LS y NUDFT son los de mejor rendimiento, mientras que los métodos de *Burg*, Bayesiano e Integrador son los de peor rendimiento.

Tabla 5. Distorsión espectral de la estimación de potencia de ruido con muestreo regular

Método	Burg	Bayesiano	Integrador	Czerny	NUDFT	Bloomfield	LS
Caso 1	106.2131	53.7506	53.2110	10.4941	4.4842	0.0285	0.0276
Caso 2	106.9460	51.4342	54.2704	10.4004	3.0896	0.0313	0.0255
Caso 3	106.7713	55.3857	53.3101	8.5181	4.2991	0.0275	0.0319
Caso 4	103.8873	50.7038	53.2413	17.6020	4.4020	0.2347	0.2326

Como segunda medida de comparación se emplea el tiempo promedio de cálculo. Para esta medida se hace imprescindible la variación tanto de la cantidad de muestras como del número de frecuencias a evaluar (m) (no el uso de diferentes señales). En la tabla 6 se la duración promedio de la estimación espectral de 20 señales los métodos seleccionados.

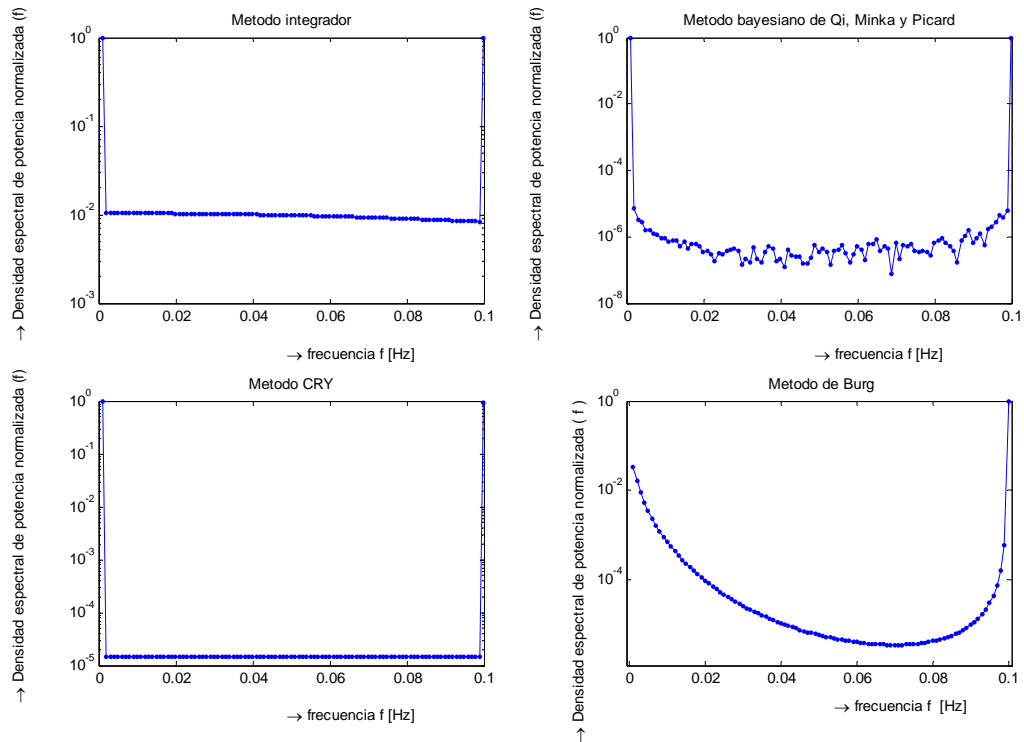
Tabla 6. Tiempo computacional en segundos de estimadores de potencia espectral

Característica		N=1000			m=500		
Método	*	m=100	m=200	m=500	N=2000	N=5000	N=10000
Burg (* Orden)	4	16,453	15,328	18,031	32,078	67,734	159,956
	6	35,156	28,547	32,594	66,250	212,782	353,489
	8	66,500	49,015	54,390	117,360	677,437	1079,725
	10	106,828	90,110	91,391	200,421	1064,062	2879,364
Bayesiano		18,094	106,500	680,703	2693,984	6573,417	12525,724
Integrador (* Base)	1	0,062	0,109	0,297	0,563	1,422	3,094
	2	0,079	0,141	0,360	0,656	1,750	3,718
	3	0,078	0,172	0,421	0,797	2,250	4,422
	4	0,093	0,187	0,500	0,953	2,547	5,188
	5	0,110	0,203	0,500	0,938	2,625	5,312
Czerny		0,187	0,360	0,953	1,812	6,187	13,640
NUDFT		0,203	0,406	1,062	2,094	7,110	16,047
Bloomfield		0,079	0,156	0,407	0,687	2,265	4,156
LS		0,109	0,219	0,563	1,016	3,031	6,375
Schuster		0,047	0,093	0,250	0,531	1,469	3,454

En la primera columna se varía la cantidad de frecuencias a evaluar (100, 200 y 500) mientras que se mantiene fija la cantidad de muestras. En la segunda columna se invierten los papeles y la cantidad fija de frecuencias es 500, mientras que la cantidad de muestras se varía desde 2000 hasta 10000 muestras ($N=1000$ también se puede ver en la primera columna). Los métodos de *Bloomfield*, LS e Integrador son los de mejor rendimiento y los métodos de *Burg*, Bayesiano y NUDFT son los de peor rendimiento en tiempo de cálculo.

La tercera y última medida de comparación consiste en el nivel de ruido que presenta la estimación espectral para los diferentes métodos. Este nivel de ruido alcanza valores apreciables para los métodos Bayesiano, NUDFT, Burg, e Integrador, dejando entrever una relación de señal a ruido de hasta 6, 5, 4 y 2 dB, respectivamente, mientras que la relación de señal a ruido típica para los demás algoritmos está cerca de los 10 dB. Empleando un gráfico en escala semi-logarítmica, en la figura 16 se muestra dichos niveles para los cuatro métodos de peor rendimiento optando por el cuarto orden para el algoritmo de *Burg* y el algoritmo Simpson 3/8 para el método integrador, en el cual se aprecia que el nivel de ruido para los métodos integrador y NUDFT es constante. (CRY corresponde a NUDFT).

Figura 16. Nivel de ruido presente en algunos métodos para la estimación de la DEP



Estas tres medidas dan pie para indicar que el algoritmo de *Lomb-Scargle* presenta un excelente comportamiento para el muestreo regular: presenta la menor distorsión espectral, un bajo nivel de ruido y a pesar de no ser el más rápido, presenta un bajo costo computacional con respecto a otros estimadores. En resumen el periodograma de Lomb es una buena aproximación del periodograma clásico cuando el muestreo es regular.

3.1 COMPARACIÓN ENTRE PERIODOGRAMAS: CLÁSICO VS *LOMB-SCARGLE*

El rasgo más valioso de la estimación espectral mediante el algoritmo de *Lomb-Scargle* es tener un comportamiento estadístico bien definido, al mismo tiempo que pierde propiedades descriptivas muy importantes referentes a la ventana espectral (o a la autocorrelación). Por otro lado, el periodograma de *Schuster* de una señal muestreada regularmente con pérdida de datos, satisface todas las relaciones fundamentales del análisis espectral clásico, pero sus propiedades estadísticas son complicadas comparado al caso de datos regulares.

Para clarificar la similitud entre los dos periodogramas *Vityazev* (1997) emplea el modelo $f(t) = \sum_{k=1}^2 a_k \phi_k(t)$, donde $\phi_1(t) = \cos(\omega t)$, y, $\phi_2(t) = \text{sen}(\omega t)$. Usando la notación $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^N p(t_i)q(t_i)/N$, y, $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$, el periodograma de *Schuster* puede ser escrito como $S(f) = \langle x, \phi_1 \rangle^2 + \langle x, \phi_2 \rangle^2$, lo cual indica que el periodograma de *Schuster*, hasta el límite del factor de normalización es el cuadrado del coeficiente de correlación entre los datos y una función armónica. Igualmente usando la notación $\widehat{\phi}_1(t) = \cos(\omega \widehat{t})$, y, $\widehat{\phi}_2(t) = \text{seno}(\omega \widehat{t})$, donde $\widehat{t} = t - \tau$, el periodograma de *Lomb-Scargle*

puede escribir como
$$LS(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle x, \widehat{\phi}_1 \rangle^2}{\langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_1 \rangle} + \frac{\langle x, \widehat{\phi}_2 \rangle^2}{\langle \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_2 \rangle} \right].$$

Se puede ver que los periodogramas difieren por definición, sin embargo la comparación se establece por medio del siguiente teorema: “Para el conjunto de frecuencias que satisfacen la ecuación $W(2\omega)=0$, donde la ventana espectral $W(f) = \left| \sum_{i=1}^N x_i e^{-j2\pi f t_i} \right|^2 / N$, el periodograma de *Schuster* y el periodograma de *Lomb-Scargle* son idénticos”

De tal forma que $W(\omega) = \frac{\text{sen}^2(N\omega\Delta t/2)\text{sen}^2(m\omega\Delta T/2)}{N^2 \text{sen}^2(\omega\Delta t/2)m^2 \text{sen}^2(\omega\Delta T/2)}$ es una ventana que se ajusta a

las características de un modelo con pérdida de datos de un conjunto de N datos y p pérdidas, ambas regulares (con un intervalo Δt) y m veces sucesivas, de tal forma que el periodo regular es $\Delta T = (N+p)\Delta t$, y es fácil declarar que a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/m\Delta T \mid k \in \mathbb{N}$ se satisface la ecuación $W(2\omega)=0$, previendo que $k \neq m/2, m, \dots$ si m es par y $k \neq m, 2m, \dots$ si m es impar. Al ser sucesivos tanto los datos como las pérdidas la ventana espectral se reduce a $W(\omega) = \frac{\text{sen}^2(N\omega\Delta t/2)\cos((N+p)\omega\Delta t)}{2N^2 \text{sen}^2(\omega\Delta t/2)}$, y la ecuación

$W(2\omega)=0$ se satisface para las frecuencias $\omega_k = \pi(k+0.5)/(N+p)\Delta T \mid k \leq p-1$.

Entonces, se puede decir que el periodograma de *Schuster* sólo difiere del periodograma de *Lomb-Scargle* en las frecuencias que satisfacen la condición $1-W(2\omega)\ll 1$, lo cual significa que la diferencia entre los periodogramas es grande cuando la serie de tiempo contiene un armónico, donde el doble de su valor frecuencial coincide con la frecuencia a la cual la ventana espectral tiene una cresta lateral grande.

La estimación del periodograma clásico también se puede ver como la minimización del trinomio $TR(f) = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\sum_{i=1}^N x_i (a \cos \omega t_i + b \sin \omega t_i) + N(a^2 + b^2)/2$, y difiere del error del modelo de LS por $TR(f) - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [(a^2 - b^2) \cos(2\omega t_i) + 2ab \sin(2\omega t_i)]$. De acuerdo a esto, la varianza de la estimación del periodograma es asintóticamente mayor que la estimación por mínimos cuadrados, indicando que la estimación del periodograma es sensible a la variabilidad en el tiempo de muestreo.

Para complementar esta comparación se desarrollan a continuación un conjunto de simulaciones que hacen uso de modelos armónicos simples con un vector de parámetros $\theta = (a, b, f) | \{a^2 + b^2, f\} \in [0, \infty)$ empleando muestreo irregular.

3.2 SIMULACIONES EMPLEANDO MUESTREO IRREGULAR

Para el muestreo irregular la frecuencia más alta solucionable es $f_{Nirr} = 1/2\bar{\delta t}$, la frecuencia fundamental (menor frecuencia solucionable) es $f_1 = 1/N\bar{\delta t}$, y el tiempo máximo de retraso es $N\bar{\delta t}$, donde $\bar{\delta t} = (t_N - t_1)/(N-1)$ es la resolución temporal (período promedio de muestreo).

Para continuar el desarrollo del cuadro comparativo se hace necesario indicar el tipo de muestreo irregular a evaluar, en este caso los tipos de muestreo seleccionados son el muestreo senoidal fluctuante y el muestreo regular con pérdida aleatoria de datos, debido a que son los dos tipos de muestreo irregular que se han estudiado con mayor profundidad. Se explica a continuación el modelo de muestreo fluctuante aleatorio.

3.2.1 Modelo de muestreo senoidal fluctuante o muestreo fluctuante aleatorio

Si se necesita un modelo que capture la esencia de la conducta en la cual hay una periodicidad en la distribución de los instantes de muestreo, que es perturbada al azar sobre los valores uniformemente espaciados, se puede emplear el modelo $t_i = i + \delta_i, |\delta_i| < \overline{\delta t}$, donde $\delta \in U$ es independiente e igualmente distribuido con función de densidad de probabilidad H , con media cero, y su distribución es independiente del ruido de la señal.

Este proceso de muestreo fluctuante no es estacionario y puede hacerse estacionario haciendo la escala de tiempo arbitraria (agregando la misma variable aleatoria $U[0,1]$ a todo el muestreo, y a medida que U aumenta la función de autocovarianza se hace periódica).

3.2.2 Simulación para la comparación entre periodogramas: Clásico Vs LS

Empleando el modelo senoidal fluctuante de una distribución normal con media cero, varianza σ^2 , $\delta_1 \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ y $\delta_2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de distribución uniforme, se genera 25 conjuntos de 2000 muestras, que sirven para realizar estimaciones de 250, 500, 1000 y 2000 muestras.

De las posibles simulaciones se muestran 3 casos desarrollados con amplitud constante $a^2 + b^2 = 1$, con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.04$. El caso 1 es una simulación con $f = 1.05 f_s^{irr}$ y cinco opciones de fase $[a, b] = \left\{ [1, 0], \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], [0, 1], \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], [-1, 0] \right\}$, el caso 2 es una simulación con $f = 0.25 f_s^{irr}$ y dos opciones de fase $[a, b] = \{ [1, 0], [0, 1] \}$, el ejemplo 3 es una simulación con $f = k f_s^{irr} / 2 \mid k \in \mathbb{Z}$ y dos opciones de fase $[a, b] = \{ [1, 0], [0, 1] \}$.

Las tablas a continuación muestran el valor promedio del sesgo dividido por su error estándar, varianza, y el error medio cuadrático normalizados de la estimación del periodograma de *Lomb-Scargle* con respecto al periodograma de *Schuster* para varias combinaciones de parámetros.

Tabla 7. Descripción de las características del periodograma de *Lomb* según la fase

δ_1	Fase	500 muestras			2000 muestras		
		Sesgo/Error	Varianza	EMC	Sesgo/Error	Varianza	EMC
Caso 1	[1,0]	0,4583	0,2102	0,2091	0,5204	0,1317	0,1306
	$[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$	1,5005	0,1589	0,1589	1,0566	0,1705	0,1714
	[0,1]	0,4975	0,1312	0,1258	1,4843	0,1652	0,1666
	$[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$	0,5544	0,1585	0,1573	0,8587	0,1237	0,1201
	[-1,0]	1,6282	0,1474	0,1480	0,6216	0,1578	0,1576
Caso 2	[1,0]	3,1011	0,4866	0,4740	5,7126	0,3973	0,4458
	[0,1]	1,9743	0,3973	0,3973	2,8746	0,4125	0,3952

Figura 17. Detalle de las características de acuerdo a la fase del caso 1 de la tabla 7.

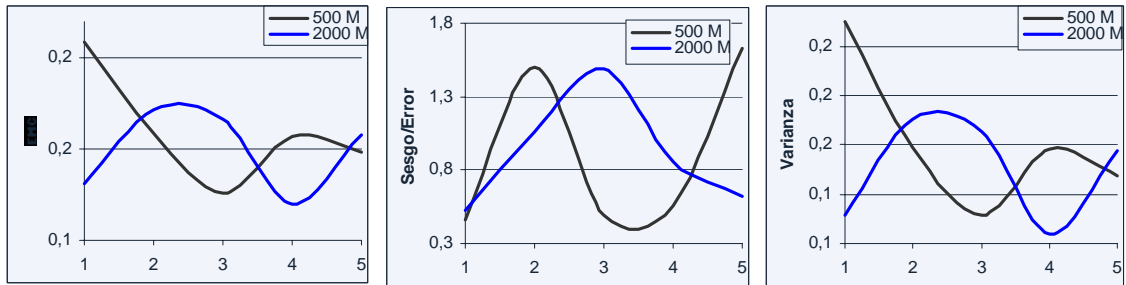


Tabla 8. Descripción de las características del periodograma de *Lomb* según N

Número de muestras	Caso 1, fase [1,0], δ_1			Caso 1, fase $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, δ_2		
	Sesgo/Error	Varianza	EMC	Sesgo/Error	Varianza	EMC
250	0,01809	1,02218	0,68543	0,01668	1,75346	0,11061
500	0,00623	1,29394	0,51149	0,05452	0,72603	0,61730
1000	0,11908	0,88000	0,51098	0,22672	1,20264	0,79787
2000	0,05204	1,06787	0,92668	0,31814	0,95590	0,91481

La tabla a continuación muestra el valor promedio del error medio cuadrático normalizado de la estimación del periodograma de *Lomb-Scargle* para las distribuciones δ_1 y δ_2

Tabla 9. Error medio cuadrático del periodograma de Lomb para $f = 0.5f_s^{irr}, f_s^{irr}$

f δ	Fase	Cantidad de muestras			
		250	500	1000	2000
f_s^{irr}, δ_1	[1,0]	0,39474	0,39078	0,28758	0,33808
	[0,1]	0,09444	0,13738	0,13682	0,15231
f_s^{irr}, δ_2	[1,0]	0,57040	0,46704	0,26033	0,15580
	[0,1]	0,66968	0,50813	0,11550	0,16095
$0.5f_s^{irr}, \delta_1$	[1,0]	0,59631	0,38985	0,62252	0,47763
	[0,1]	0,44805	0,40584	0,43964	0,29671
$0.5f_s^{irr}, \delta_2$	[1,0]	0,09666	0,26840	0,43364	0,29080
	[0,1]	0,09681	0,34307	0,44112	0,13807

3.2.3 Resumen de resultados usando el modelo senoidal fluctuante

Para la componente de continua, ambos periodogramas presentan convergencia al valor real (razón por la cual no se entra en detalles), las distribuciones de muestras finitas del periodograma y de la estimación de máxima probabilidad (LS) son consistentes con valores asintóticos para $f \neq f_s^{irr} \wedge f_s^{irr} k/2 | k \in \mathbb{Z}$. Para tres frecuencias que son múltiplos de $f_s^{irr}/2$ ($k = 1, 2$ y 3), el periodograma de *Lomb* parece ser consistente, mientras que la estimación del periodograma a veces es inconsistente, tendiendo hacia una frecuencia de pseudoalias (cercana a la frecuencia de Nyquist), en lugar de las verdaderas frecuencias.

Para frecuencias que no son múltiplo de $f_s^{irr}/2$, ambas estimaciones tienen varianzas similares, pero la estimación del periodograma tiene un sesgo mayor. En general, la estimación de probabilidad máxima tiene un mejor desempeño que la estimación del periodograma clásico, con un error medio cuadrático más bajo y una consistencia clara.

3.3 COMPARACIÓN ENTRE LAS VARIANTES DEL PERIODOGRAMA DE LOMB

Para proseguir con el cuadro comparativo de las variantes del método de *Lomb-Scargle*, se

han seleccionado el algoritmo de *Lomb-Scargle* clásico (LSc), el algoritmo pseudo-inverso (Base), el algoritmo rápido (Fast), el algoritmo de *Lomb-Welch* (LW), el algoritmo ponderado (LSp) (basado en el periodograma de *Lomb* para el caso no senoidal), el algoritmo inventanado (LSe) y su particularización, el algoritmo de *Lomb-Wavelet* (LSW).

Esta vez se toma como patrón el algoritmo LSc y se aplican las tres medidas de comparación iniciales: distorsión espectral, nivel de ruido y tiempo de cálculo. Para la medida de la distorsión espectral se empleó 250 conjuntos de datos con muestreo senoidal fluctuante, evaluando 100 frecuencias.

Tabla 10. Distorsión espectral de la estimación de potencia de ruido blanco

<i>N</i>	Método	Base	Fast	LSp	Lse	LSW mexh	LSW morl	LW ¼ duración	LW 1/8 dur
2000	Distorsión	22,714	0,082	23,901	28,812	29,382	28,908	36,760	34,208
	Varianza	9,713	0,011	17,015	12,985	9,141	9,126	9,223	10,025

Tabla 11. Distorsión espectral para estimadores que usan ventanas, $N=1000$, $m=100$

Ventana	Lomb ponderado	Lomb inventanado	Lomb-Welch 1/8 dur
Hanning	15,857	52,182	2729,3
Afilada ($\rho=0,1$)	37,749	39,204	2736,3
Barthann	15,802	52,054	2729,5
Barlett	15,370	50,641	2730,5
Blackman	17,886	51,638	2726,9
BlackmanHarris	18,433	51,457	2724,5
Bohman	18,341	51,5366	2726,4
Daniell	1,2921	52,301	2737,1
Gauss ($\alpha=1$)	16,372	51,912	2729,2
Hamming	15,126	51,974	2730,2
Kaiser ($\beta=1$)	4,013	51,714	2736,5
Nattall	18,515	51,438	2724,9
Parzen	11,477	50,798	2733,2
Triangular	15,340	50,642	2730,7

En la tabla 11 se emplea la ventana *Hanning* para los algoritmos de *Lomb* ponderado, enventanado y *Lomb-Welch*, en esta medida los algoritmos LSp, Base y Fast son los de mejor rendimiento, mientras que los algoritmos *Lomb-Welch* y *Lomb-Wavelet* son los de mayor distorsión. Las ventanas *Daniell* y *Kaiser* para el algoritmo de *Lomb* ponderado, la ventana *Barlett* y la función afilada para el algoritmo de *Lomb* enventanado y las ventanas *BlackmanHarris* y *Nattall* para el algoritmo *Lomb-Welch* presentan la menor distorsión.

El mayor nivel de ruido se presenta para los algoritmos *Lomb-Welch* y *Lomb-Wavelet*, mientras que el nivel de ruido del algoritmo de *Lomb* ponderado es similar al que muestra el algoritmo de *Lomb* clásico, Base o Fast. En la figura 18 se observa que el algoritmo de *Lomb-Welch* muestra una reducción significativa en la resolución frecuencial y falsos picos, y en la figura 19 se muestra que el nivel de ruido para los algoritmos *Lomb-Wavelet* y enventanado doblan el nivel de ruido con respecto al algoritmo de *Lomb* clásico

Figura 18. Nivel de ruido para 4 algoritmos de Lomb, $N=100$, $m=100$

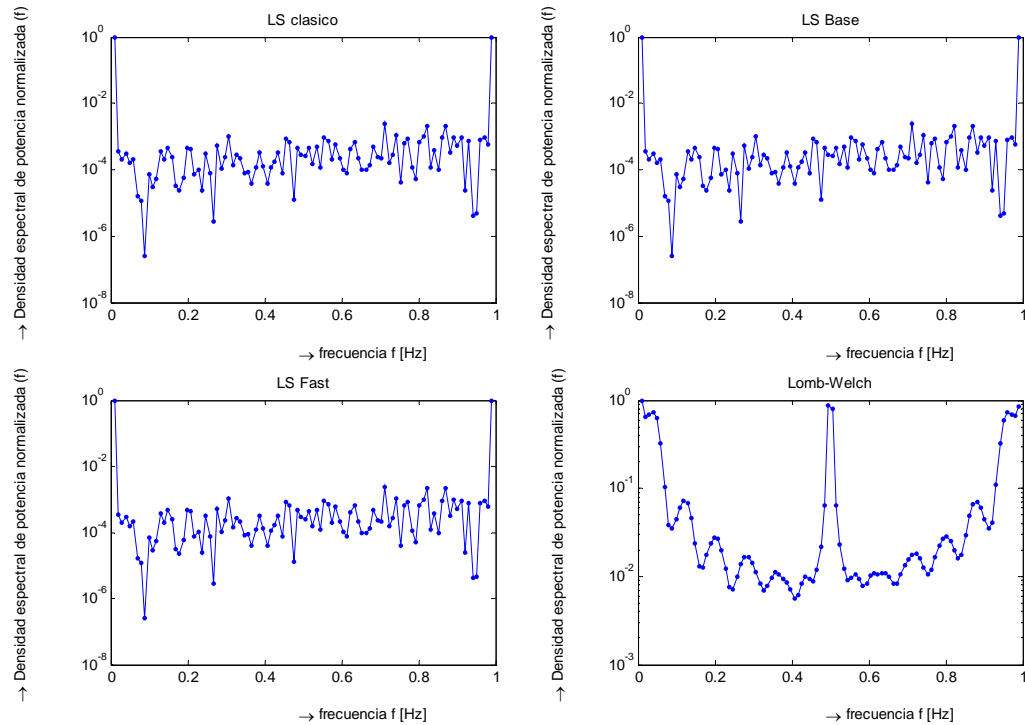


Figura 19. Nivel de ruido para 4 algoritmos de Lomb, $N=100$, $m=100$

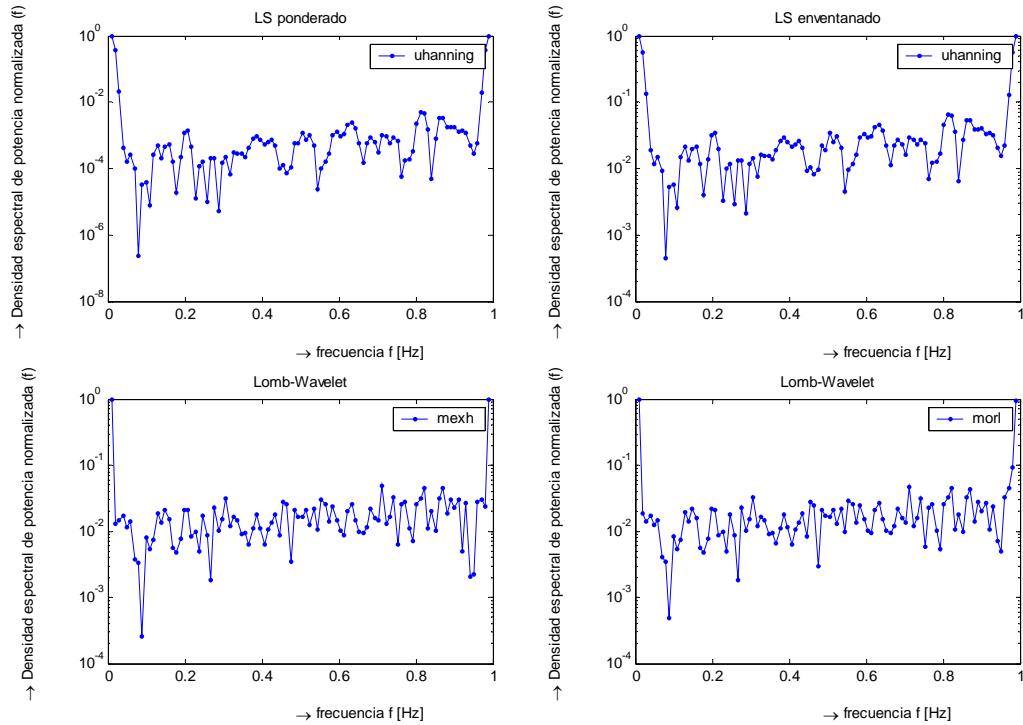


Tabla 12. Tiempo computacional en segundos para las variantes del algoritmo de Lomb

Parámetros	Base	Fast	LSp	Lse	LSW mexh	LSW morl	LW ½ duración	Clásico
$N=5000$, $m=500$	2.8280	2.125	2.6250	1.7970	2.3280	2.4530	4325.26	3.2040
$N=1000$, $m=100$	0.1250	0.078	0.1720	0.0780	0.0940	0.0940	31.6720	0.1720
$N=500$, $m=50$	0.0310	0.031	0.0780	0.0310	0.0320	0.0310	4.2970	0.0470

3.3.1 Resumen de los resultados de la comparación de las variantes del algoritmo de *Lomb*

No se recomienda el uso de filtros suavizantes, funciones ponderantes o enventanado. Al igual que la interpolación el filtrado siempre reduce el contenido de la información de la señal y hace que la forma del filtro domine sobre las características de la estimación. En efecto, es posible obtener una estimación espectral de cualquier conjunto de datos eligiendo un filtro apropiado, siendo el principal riesgo la mala interpretación de una estimación espectral sobre la base de las características del filtro.

No se recomienda la adición de ceros, que normalmente se usa para aumentar el número de muestras a una potencia de 2 y usar la FFT o para reducir de forma sistemática las desviaciones de la correlación entre bloques (ajustes del error de redondeo), debido a que produce otras desviaciones sistemáticas debido a la variabilidad de la base de tiempo.

3.4 COMPARACIONES PARA DIFERENTES TIPOS DE MUESTREOS

Debido a que el nivel de ruido y el tiempo computacional empleado sigue siendo aproximadamente el mismo para todos los casos, la medida comparativa empleada en este caso únicamente es la distorsión espectral (para lo cual se emplea 25 conjuntos de datos con $N=2000$ y $m=500$) y de igual manera el método que se toma como referencia sigue siendo el periodograma de *Schuster*. Posteriormente, se realiza una normalización con respecto al método de Lomb para simplificar el análisis de los datos.

Tabla 13. Distorsión espectral para los métodos seleccionados para muestreo irregular

Distribución	Burg	Bayesiano	Integrador	Czerny	NUDFT	Bloomfield	LS
Beta (1,2)	1,2126	0,9251	0,8560	1,1466	1,7105	0,5098	1
Beta (2,2)	1,1977	1,3270	1,5830	1,0398	1,8229	0,6145	1
Rayleigh (0,1)	3,1839	384,8011	23,6545	0,6766	52,7113	67,8147	1
Rayleigh (10)	23,4563	7,1764	9,6222	17,9176	3,5686	1,3214	1
γ^2 (0,1)	2,4489	1,8108	1,8957	2,2447	7,6808	3,4638	1
χ^2 (10)	7,1319	3,8183	4,2282	1,0984	2,1822	0,6887	1
Exponencial (0,1)	1,8527	75,8426	1,9983	0,6718	24,4486	29,9229	1
Exponencial (10)	6,6530	3,7666	4,1505	2,2923	2,1007	1,6347	1
Gamma (0,5 0,1)	1,3575	110,2780	0,5679	0,6717	18,6084	58,4404	1
Gamma (10 0,1)	1,3333	4,3033	0,8014	0,5410	2,5223	0,6444	1
Normal	1,1947	0,5926	0,5517	0,9637	1,1432	0,5759	1

De la tabla 13 se desprende que no siempre un estimador espectral es mejor que otro, debido a que es indispensable conocer el tipo de distribución de muestreo empleada para seleccionar el mejor método. A continuación se hace una breve explicación.

El resultado de las simulaciones muestra que los ajustes realizados a los hiperparámetros del método bayesiano no satisfacen los requerimientos de muchas distribuciones, pero sí lo hacen de manera excelente para una distribución normal y de manera aceptable para las distribuciones *Beta* y *Gamma*.

El método de *Burg* a pesar de tener una pésima respuesta cuando el muestreo es regular, mejora notoriamente excepto en el caso de una distribución *Rayleigh*, sin embargo aún sigue siendo superado por los demás métodos excepto el método bayesiano.

El método integrador es un buen estimador para la mayoría de las distribuciones, en especial la distribución normal y exceptuando la distribución *Rayleigh*. El método de *Czerny*, el cual supera al método integrador, es ideal cuando el muestreo tiene una distribución *Gamma*, pero presenta falencias para la distribución *Rayleigh*.

El método NUDFT no se vislumbra como un excelente estimador y al igual que el método de *Burg* no supera el rendimiento del método de *Lomb-Scargle* con respecto a la distorsión espectral en ninguno de las distribuciones de muestra empleadas.

El método de *Bloomfield* a pesar de ser el mejor estimador para una señal con distribución *Beta*, definitivamente deja mucho que decir porque se comporta de manera excelente en algunos casos y en otros sorprende con un comportamiento insignificante; mientras que el algoritmo de *Lomb-Scargle* mantiene un comportamiento estable para la mayoría de las distribuciones empleadas y muestra un comportamiento superior a los demás métodos cuando la distribución del muestreo es exponencial, χ^2 o *Rayleigh*.

Como última acotación, para el caso del muestreo senoidal fluctuante se conoce que el método de mejor desempeño es el método de *Lomb-Scargle*. Como observación final, las simulaciones se han desarrollado bajo el lenguaje de programación Matlab[®] y se han implementado todos los algoritmos que se mencionan en el desarrollo de los capítulos exceptuando el algoritmo de *Burg*, realizado por *De Waele*.

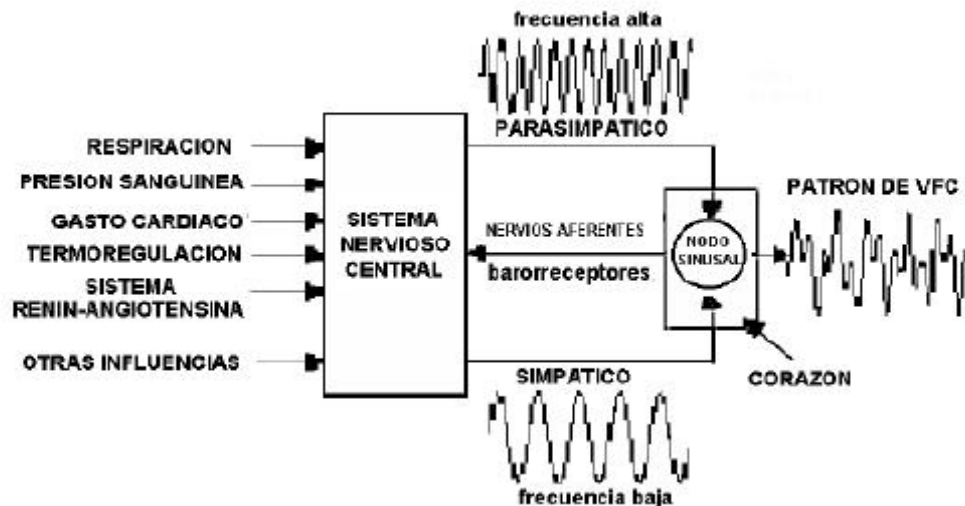
4 APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LOMB SOBRE VRC

La variabilidad del ritmo cardiaco (VRC o la variabilidad de la frecuencia cardiaca VFC) es un indicador cuantitativo, ampliamente usado, de la actividad autonómica del sistema nervioso. El sistema nervioso (SN) junto al sistema endocrino son los encargados de regir y coordinar todas las actividades conscientes e inconscientes del organismo humano.

El SN puede ser clasificado en: Sistema Nervioso Somático, mediante el cual se interactúa con el exterior y permite responder en forma voluntaria a señales sensoriales percibidas de manera consciente, y un Sistema Nervioso Vegetativo o Autónomo (SNA) que controla y regula la actividad interna del organismo (respiración, digestión, frecuencia cardiaca, presión circulatoria, temperatura corporal, metabolismo, etc., ver la figura 20).

El SNA se subdivide en dos ramas: el sistema *simpático* y el *parasimpático*, que actúan facilitando o inhibiendo las funciones de varios sistemas de órganos, que incluyen el cardiovascular, pulmonar, ocular, gastrointestinal, térmico, genital, urinario, etc, y además los sistemas simpático y parasimpático son normalmente considerados como antagonistas.

Figura 20. Descripción esquemática de la organización del sistema nervioso central



El SNA es conceptualmente un sistema de control con realimentación, por ejemplo, las demandas de sangre del cuerpo hacen que rápidamente responda el SNA para aumentar el flujo sanguíneo con un aumento de la frecuencia cardíaca y una vasoconstricción que aumenta la presión arterial; para tal labor, el corazón recibe inervaciones extrínsecas eferentes (motoras) y aferentes (sensoriales) de los sistemas simpático y parasimpático.

El ritmo cardíaco (o ritmo de despolarización) lo marca el nodo seno auricular o sinusal (SA) llamado el marcapaso intrínseco primario del corazón y está modulado principalmente por inervaciones del nervio vago (sistema parasimpático) y del sistema simpático. En el control del *ritmo cardíaco* un incremento de la actividad simpática aumenta el ritmo mientras que un incremento de la actividad parasimpática disminuye la frecuencia cardíaca, así el funcionamiento del SNA es el resultado de la interacción de ambos subsistemas.

Las terminaciones del nervio vago liberan el neurotransmisor acetilcolina el cual se une con receptores muscarínicos que activan los canales de potasio de las membranas celulares, esta activación disminuye el tiempo de despolarización del nodo SA, reduciendo el ritmo cardíaco. Las terminaciones de nervios del sistema simpático liberan noradrenalina que se combina con receptores β_1 , incrementando el ritmo de despolarización. Sin embargo, las señales aferentes de la actividad respiratoria también influyen en la respuesta eferente proveniente del nervio vago hacia el miocardio, modulando la respuesta cardíaca. La inspiración produce un aumento en el ritmo cardíaco, mientras que éste se reduce durante la expiración. Esta VRC producida por la respiración se conoce como arritmia respiratoria sinusal (RSA) y se atribuye a la actividad vagal.

Aunque existen pruebas más específicas y semi-invasivas para evaluar las funciones del SNA, como la prueba de reflejo autónomo cardiovascular, la VRC es la medición indirecta utilizada más ampliamente para evaluar la función del SNA relacionada con diversas patologías, y en particular enfermedades cardiovasculares, incluyendo taquicardias ventriculares, infarto de miocardio, isquemia y riesgo de muerte súbita, la mayoría asociadas a una **reducción** en la variabilidad del ritmo cardíaco¹⁵.

4.1 LA MEDICIÓN DE LA VARIABILIDAD DEL RITMO CARDIACO

4.1.1 Perspectiva histórica

Una de las primeras áreas en donde se demostró la utilidad del análisis de las fluctuaciones de la frecuencia cardiaca fue en el campo de la monitorización fetal. Con el desarrollo de los sistemas de monitorización fetales se pudieron analizar detenidamente las variaciones del ritmo cardiaco y se comprobó la existencia de una correlación entre disminución de la VRC y el riesgo de muerte para el feto.

Para explicar este comportamiento se postuló la existencia de una modulación de la frecuencia cardiaca por parte del sistema nervioso simpático y parasimpático. De este modo, un mal funcionamiento del sistema nervioso provocaría la desaparición de esta modulación y en consecuencia la presencia de un ritmo cardiaco casi constante.

Kitney y Ropelman (1980) editan el primer libro dedicado íntegramente a la VFC y la doctora *Akselrod* (1981) publica un artículo en la revista *Science* donde demuestra de forma científica las suposiciones relativas a la relación entre control neurovegetativo y la VFC. *Pagani* realiza un análisis de la VFC en hombres y perros sometidos a diversas terapias, colocados en distintas posturas y divididos por grupos de edades. *Baselli* describe el resultado del análisis de la VFC en pacientes hipertensos, diabéticos y con infarto de miocardio, comparándolos con un grupo de pacientes normales. *Berger* analiza el problema de la interpolación para obtener una señal de frecuencia cardiaca equiespaciada.

A partir del año 1990 se empieza a relacionar la fractalidad y la dinámica caótica con el ritmo cardiaco, a dudar de la validez de los estimadores espectrales utilizados hasta ese momento y a introducirse las distribuciones tiempo-frecuencia en el análisis de la VFC con *Ventura, Pola y Vila* (que añade un elemento nuevo: núcleos adaptativos). *Saul* (1994) analiza el caso de la arritmia sinusal respiratoria con la VRC y *Malik* (1996) describe las técnicas de procesado de la VRC y sus aplicaciones clínicas más relevantes.

En 1993, el Colegio Americano de Cardiólogos hizo eco de la necesidad de una estandarización de las técnicas de procesado del ritmo cardiaco y luego la Sociedad Europea de Cardiología publicó un primer intento de estandarización en este sentido. No obstante, éste todavía dista bastante de ser definitivo pues, por ejemplo, no contempla para nada la metodología para el análisis de fenómenos de muy corta duración o transitorios¹⁶.

4.1.2 Obtención de la señal de ritmo cardiaco o señal RR

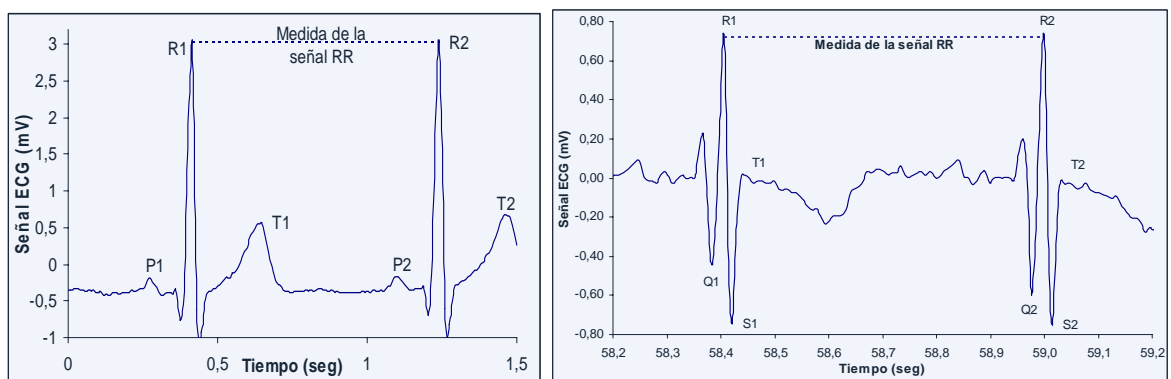
Los latidos del corazón son el producto del ciclo de contracción sincrona de las aurículas y los ventrículos, que pueden ser observados mediante el uso de un electrocardiógrafo como un conjunto de ondas características a saber: la onda P, que corresponde a la contracción de las aurículas, el complejo QRS, que corresponde a la contracción de los ventrículos y a la distensión de las aurículas (que está enmascarada), y la onda T, que corresponde a la distensión de los ventrículos. Dicho conjunto de ondas se muestra en la figura 4.2.

Si a cada latido se le asocia el lapso de tiempo al latido anterior, se obtiene una serie temporal RR o periodo instantáneo, que corresponde a la distancia entre las ondas R de cada latido y su unidad de tiempo es el milisegundo, y la inversa de la serie RR es la señal de frecuencia cardiaca instantánea (FC), cuya unidad de frecuencia está dada en mHz.

A pesar de que la relación entre la señal FC y RR no es lineal, sino hiperbólica, en principio no parece haber razones importantes que obliguen a usar una de estas series en particular. Esto conlleva a que si un paciente presenta un espectro y un valor RR medio determinado, y que en un momento dado el valor RR medio cambia sin cambiar la morfología de la señal, al trabajar en el dominio RR el espectro mantendrá unos valores similares (excepto la componente de continua), mientras que si se trabaja en el dominio de la FC se observaría una variación en la potencia de todos los componentes espectrales, induciendo una falsa conclusión, motivo por el cual siempre se debe indicar claramente la variable empleada para que no se traten de hacer comparaciones con estudios previos de otros autores que usen una variable distinta. Empero el uso directo de cualquiera es perfectamente válido.

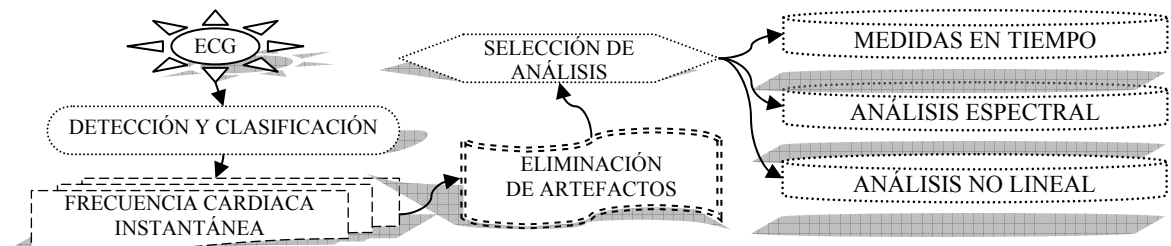
Recapitulando, la señal de ritmo cardiaco se obtiene directamente del electrocardiograma (ECG) a una frecuencia de muestreo mayor de 200 Hz, con una detección fiable de la posición de los distintos latidos y una adecuada clasificación de los mismos (ritmo normal o ectópico), dado que sólo los latidos normales deben de ser aceptados. Éste proceso suele ser automático y no está exento de errores de clasificación, por ello la serie de ritmo cardiaco resultante debe de ser convenientemente filtrada para eliminar los posibles artefactos.

Figura 21. Obtención de la señal RR para dos señales ECG



Hasta al momento ninguno de los algoritmos de detección y clasificación de latidos implementados es seguro y los errores más comunes que presentan son la pérdida de latidos debido a complejos QRS de baja amplitud, latidos extras (ondas T anormalmente altas), clasificación de otro tipo de latidos como latidos normales (ectópicos supraventriculares), pérdida o incorrecta clasificación de latidos normales debido a la presencia de ruido. Estos errores se denominan artefactos y hasta el momento los investigadores que más se han ocupado de este tema son *Malik* y *Sapoznikov*.

Figura 23. Etapas necesarias para la mediación de la VFC



Como resultado de las anteriores etapas, se dispone de una serie temporal RR no equiespaciada, sobre la cual se pueden realizar distintas medidas en el dominio temporal (media, coeficiente de variación) y en el dominio de la frecuencia (cuyo objetivo es tratar de inferir el estado del sistema neurovegetativo), así como analizar el posible comportamiento no lineal o caótico de la frecuencia cardíaca del paciente (entropía aproximada, exponentes de *Lyapunov*). Para complementar este análisis la mayoría de autores generan la serie RR aplicando un modelo denominado IPFM (modulación de la frecuencia por integración de pulsos), contrastando sus resultados con los de una FC real.

4.1.3 Análisis de la VRC en tiempo y en frecuencia

Tradicionalmente el análisis de la VRC se realiza tanto sobre segmentos de ECG de corta duración como sobre registros **holter** de 24 horas. El primer caso tiene la ventaja de operar sobre un conjunto reducido de datos necesitando la colaboración del paciente (respiración controlada y cambios posturales específicos) o de intervenciones invasivas por parte del personal médico. En el segundo caso, al tratar con registros tan largos se tiende a automatizar en lo posible todo el procesado destinado a obtener los índices de variabilidad.

El análisis de la VRC en el dominio temporal no tiene mayores dificultades y es aplicable, de una manera eficiente, para la evaluación de registros de 24 horas y se puede resumir en la tabla 14. El problema surge en el análisis espectral para lo cual la gran mayoría de investigadores optan por realizar algún tipo de interpolación y luego aplicar las técnicas habituales utilizando la FFT, otros autores optan por la estimación autorregresiva o utilizan una distribución tiempo-frecuencia distinta del espectrograma (con núcleo exponencial o una distribución de *Wigner-Ville* suavizada) con el fin de anular el efecto del muestreo.

Recientemente el espectro de *Lomb* se ha propuesto como nueva alternativa. *Moody* y *Laguna* han aplicado este algoritmo sobre señales reales de ritmo cardíaco comprobando que, cuando la serie está muy contaminada de ruido o de latidos ectópicos (provocando grandes huecos en la serie) el espectro de *Lomb* es mejor que el espectro clásico de *Fourier*,

y por el contrario, en situaciones más estables, en las cuales la frecuencia es casi constante, las características de ambos espectros son bastante similares; sin embargo, la potencia de falsos componentes es mucho más significativa en el espectro de Lomb, lo que es claramente negativo. Pero, finalmente la idea es comprobar que el método de Lomb permite mejorar apreciablemente el cálculo de la VRC.

Tabla 14. Medidas de VRC en el dominio del tiempo

Indice	Unidad	Descripción
SDNN	ms	Desviación estándar de la serie RR
SDANN	ms	Desviación estándar de la media de la serie RR en periodos de 5 minutos
SDNNIDX	ms	Media de SDNN en periodos de 5 minutos
pNN50		Porcentaje de valores de la serie RR que difieren del previo más de 50 mseg
r-MSSD	ms	Raíz cuadrada de la media de las diferencias al cuadrado entre los valores de la serie RR adyacentes
TINN	ms	Base del triángulo al que se ajusta el histograma
VRCindex		N/M siendo N el número de valores de la serie RR y M el máximo del correspondiente histograma
IRRR	ms	Diferencias entre los cuartiles tercero y primero de la serie RR
MADRR	ms	Mediana de las diferencias absolutas entre los valores adyacentes de la serie

Algunos investigadores se han preocupado por el análisis de fenómenos cardiovasculares de muy corta duración o análisis de transitorios, incluso inferior al minuto, donde la resolución espectral y la no estacionariedad se hace más importante todavía, por lo cual la estimación clásica del espectro no es aceptable y se debe utilizar otras alternativas como el modelado autorregresivo con un algoritmo de actualización de los coeficientes del modelo, o bien el uso de distribuciones tiempo-frecuencia con núcleo adaptativo (de uso especial cuando características espectrales de la señal cambian rápidamente).

En el espectro de la señal FC, controlada en gran medida por los sistemas nerviosos que se manifiestan con tiempos de respuesta diferentes, se observan unos picos en las frecuencias asociadas a cada uno de esos tiempos de respuesta. En un espectro de FC normal, se

observa un pico en torno a los 0,2-0,3 Hz (alta frecuencia, HF), que parece estar controlado por el parasimpático exclusivamente, en torno a los 0,1 Hz (baja frecuencia, LF) aparece otro pico que contiene influencias tanto del simpático como del parasimpático y la potencia por debajo de los 0,05 Hz (muy baja frecuencia, VLF), se explica por otros fenómenos, tales como mecanismos termorreguladores, efecto de cambios posturales, etc. En el análisis a largo plazo, algunos autores proponen una posible diferenciación, en la banda VLF, de una nueva componente espectral, a la que denominan ULF (Ultra Low Frequency) y que abarcaría desde 0 Hz hasta 0,003 Hz. Sin embargo, existen diferencias entre los diferentes investigadores al definir con exactitud los límites de las bandas (ver la tabla 15).

Tabla 15. Bandas de frecuencias para el análisis de la VFC

Autor	VLF	LF	HF
Myers	0,0167-0,05	0,05-0,15	0,15-0,35
Casolo	<0,03	0,04-0,12	0,22-0,32
Craelius		0,04-0,12	0,18-0,28
Bianchi	<0,03	0,03-0,15	0,18-0,4
Mainardi		0,05-0,15	0,18-0,45
Cerutti	<0,03	0,03-0,15	0,18-0,4
Akselrod	<0,09	0,09-0,15	0,2-0,4
Malliani	<0,03	0,04-0,13	0,25
Swenne	0,01-0,05	0,05-0,15	0,15-0,4
Vila Sobrino	<0,04	0,04-0,15	0,15-0,4

Para cuantificar la actividad del vago o parasimpático basta con analizar la potencia de HF, garantizando que la frecuencia respiratoria permanezca constante. Se recurre a la relación entre las potencias HF/(HF+LF) para cuantificar la actividad respiratoria. Mientras que la potencia de LF (asociada a la actividad barrefleja) obedece tanto a influencias del simpático como del parasimpático, por lo cual para analizar la actividad del simpático se recurre a la relación entre la potencia de LF y HF, de tal forma que si aumenta se presenta una activación del simpático y si disminuye se trata de una activación del vago; otro índice es empleado es la relación entre las potencias LF/(HF+LF).

Adicionalmente, la estimación espectral asume inherentemente que la señal es, por lo menos débilmente, estacionaria. Sin embargo la VRC real normalmente es no estacionaria, mostrando en la señal VRC tendencias suaves lineales o más complejas, que pueden causar distorsión en el análisis en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Se han usado dos tipos de métodos para abordar el problema de la no estacionariedad: *Weber* sugirió que deben probarse los datos de VRC sistemáticamente y que sólo segmentos estacionarios deben ser analizados, comparando en algunos casos la representatividad de estos segmentos con la señal VRC entera. El otro método llamado detrending intenta eliminar las tendencias no estacionarias lentas de la señal VRC antes del análisis y se basa normalmente en modelos polinómicos de primer orden o superior.

4.1.4 Detrending avanzado basado en aproximaciones previas suavizadas

El método es simple al uso, desde que la respuesta en frecuencia puede ajustarse adecuadamente a situaciones diferentes para un solo parámetro. Se puede considerar que las series RR estén compuestas por dos componentes: $RR = RR_{estacionaria} + RR_{variable}$ donde la componente $RR_{estacionaria}$ es aproximadamente la serie RR de interés y $RR_{variable}$ es la componente variable aperiódica de baja frecuencia. La componente variable puede ser modelada con un modelo lineal observable como $RR_{variable} = H\theta + v$ donde $H \in \mathfrak{R}^{(N-1) \times M}$ es la matriz de observación, $\theta \in \mathfrak{R}^M$ son los parámetros de regresión y v es el error de observación. La tarea consiste en estimar los parámetros por algún procedimiento para que la predicción $\widehat{RR}_{variable} = H\hat{\theta}_\lambda$ pueda usarse como la estimación de la tendencia.

Las propiedades de la estimación dependen fuertemente de las propiedades de los vectores de la base (las columnas de la matriz H) en el ajuste. El método ampliamente usado para la solución de la estimación $\hat{\theta}_\lambda$ es el método de los mínimos cuadrados y se puede emplear un acercamiento más general llamado mínimos cuadrados regularizado, así $\hat{\theta}_\lambda = \arg \left[\min_{\theta} \left(|H\theta - RR|^2 + \lambda |D_d(H\theta)|^2 \right) \right]$, donde λ es el parámetro de regularización y D_d

indica la aproximación discreta del operador d-ésima derivada. Esta modificación obvia de los mínimos cuadrados ordinarios solución la dirección para la cual la norma $|D_d(H\theta)|$ se hace más pequeña. De esta forma se puede implementar información previa sobre la predicción de RR para la estimación y la solución para $\hat{\theta}_\lambda$ puede escribirse en la forma:

$$\hat{\theta}_\lambda = (H^T H + \lambda^2 H^T D_d^T D_d H)^{-1} H^T RR.$$

Para que el método se base en aproximaciones previas la selección de la matriz de observación H puede implementarse de acuerdo a alguna información previa de los datos. Por ejemplo, se puede usar un conjunto genérico de una función con forma gaussiana, sin embargo para evitar los problemas que surgen de la selección de la base se usa la opción trivial de matriz de identidad para la matriz observación $H = I \in \mathfrak{R}^{(N-1) \times (N-1)}$. La parte de regularizada de $\hat{\theta}_\lambda$ puede emplearse para dibujar la solución del espacio nulo de la matriz de regularización D_d . El espacio nulo de la matriz de diferencia de segundo orden contiene todas las curvas de primer orden y así D_2 es una excelente opción para estimar la tendencia aperiódica de las series RR . La matriz de diferencia de segundo orden $D_d \in \mathfrak{R}^{(n-3) \times (n-1)}$ es de

la forma $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la serie estacionaria aproximadamente puede ser

rescrita como $RR_{estacionaria} = RR - H\hat{\theta}_\lambda = \left[I - (I + \lambda^2 D_2^T D_2)^{-1} \right] RR$.

4.1.5 Inconvenientes de los estimadores espectrales para el análisis de la VRC

Como la señal RR no es estacionaria es inadecuado usar directamente la TF o el uso de la FFT después de un remuestreo con interpolación para obtener su espectro, igualmente no es conveniente por su baja resolución (debido a la corta duración de la señal RR). Además la señal presenta *aliasing*, difusión espectral y necesita el uso de ventanas, localización temporal nula y absorción espectral de señales transitorias. El inventanado implícitamente

aplica una función de dilatación no lineal a intervalos de tiempo y para una serie de tiempo irregularmente muestreada la distorsión dependerá de la distribución de la irregularidad de la muestra, cambiando el índice LF/HF, por consiguiente el inventariado tampoco es aplicable a la señal RR. Mientras que el remuestreo de la señal RR a una frecuencia f_s , por debajo de la frecuencia de muestreo ECG original f_{ECG} , desplaza el punto de observación hasta $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_{ECG}} \right)$ segundos.

Otro inconveniente que presenta la señal RR es la pérdida de la independencia de la potencia asociada a las frecuencias espaciadas $1/\delta t$. El trasfondo matemático se basa en que la ortogonalidad de las funciones seno y coseno se pierde para el muestreo regular, esto parece indicar que no hay forma de restaurar la ortogonalidad sin transformar las funciones bases las cuales mezclan varias frecuencias juntas.

Las técnicas autorregresivas no funcionan demasiado bien para el caso de la señal RR debido a que ésta es una señal bastante ruidosa y que en la práctica en su espectro aparecen picos falsos como consecuencia del ruido de la señal hacen el espectro prácticamente ilegible y poco fiable, aparte de presentar la dificultad inherente de seleccionar el orden correcto del modelo.

Para el espectrograma es indispensable la cuasiestacionariedad y además no corresponde a una alta demanda de resolución temporal y frecuencial. Las representaciones tiempo-frecuencia tienen una larga lista de requisitos para su distribución: Real, positiva, invariante, marginal y con soporte infinito en tiempo y en frecuencia, por otro lado es importante seleccionar un tipo de núcleo que se ajuste a los posibles cambios de la señal.

Mientras que el algoritmo de *Lomb-Scargle*, además de ser ideal cuando el muestreo es irregular, puede trabajar con una baja relación de señal a ruido, permite que se restituya la ortogonalidad de las funciones seno y coseno (independencia en frecuencia) y no necesita ajustes ante posibles cambios de la señal ni que la señal sea estrictamente estacionaria.

4.1.6 Análisis fractal y no lineal de la VRC

La señal RR fluctúa de forma compleja y de manera errática en personas sanas, presentando características caóticas, especialmente fractales debido a que la estructura del ritmo es auto-similar al ser medida en distintas escalas temporales.

Así mismo, la DEP de la señal RR en escala bilogarítmica presenta un comportamiento $1/f$, similar a un comportamiento fractal, de tal forma que los pacientes con desórdenes cardiovasculares y muerte súbita cardíaca muestran en el gráfico espectral en escala bilogarítmica una mayor pendiente negativa β (0,003 y 0,1Hz). El análisis de fluctuaciones sin tendencias (detrended fluctuation analysis, DFA) es la técnica complementaria para cuantificar las propiedades de correlación fractal del ritmo cardíaco de la señal RR y es un método con buenos resultados en la predicción de riesgo de muerte súbita cardíaca (esta técnica no se empleará debido a que no guarda relación con el algoritmo de *Lomb*). El uso de las técnicas DFA y escalado espectral bilogarítmico han producido resultados prometedores en varios estudios de la VRC en registros RR de corta duración para evaluar alteraciones del sistema autónomo en arritmias malignas e infarto de miocardio.

Los métodos no lineales son las herramientas más poderosas para la caracterización de sistemas biológicos complejos y ellos tienen una gran promesa subsecuentemente que los fenómenos no lineales están ciertamente envueltos en el génesis de VRC. Para estudiar la dinámica del sistema cardiovascular se necesita colocar al paciente en una situación estable (tumbado o sentado, leyendo, respirando monótonamente) durante un tiempo considerable (mínimo 15 minutos, pero mejor una hora), grabar su ECG con un electrocardiógrafo, extraer la serie RR y, sobre ella, aplicar las correspondientes técnicas. Concluyendo que con estas técnicas se podría hacer análisis de VFC a largo plazo, pero no a corto plazo.

Debido a que el uso de la interpolación no es fiable para el análisis no lineal de la señal RR y que no existe una generalización de los métodos no lineales tales como los métodos del

cálculo de la dimensión, la entropía y los exponentes de *Lyapunov*, para poder tratar el caso de la señal RR, la característica no lineal será estudiada mediante el uso del biespectro, el cual es sin duda una medida más simple, pero segura al momento de la evaluación.

4.2 SIMULACIÓN CON SEÑALES SENOIDALES

Empleando los cuatro métodos de mejor rendimiento vistos en el capítulo anterior, el periodograma de *Lomb-Scargle*, el método NUDFT, el método de *Czerny* y el método de *Bloomfield*, e incluyendo a esta lista el estimador espectral vía FFT con interpolación lineal con factores de sobremuestreo 2 y 4, se opta por realizar un evaluación del comportamiento de los estimadores espectrales seleccionados con señales senoidales conocidas muestreadas tanto regular como irregularmente como etapa previa al análisis de la VRC de una señal real.

La referencia empleada para la comparación de los resultados de los estimadores espectrales sigue siendo el periodograma de *Schuster* y a cada señal RR estudiada se le asocia un disertación previa del comportamiento de la base de tiempo irregular, basada en la generación de cinco señales sintéticas empleando la misma base de tiempo: una señal de ruido puro (señal 1) y cuatro señales senoidales con una relación de señal a ruido de 3 dB asociadas a las frecuencias 0.025, 0.1, 0.25 y 0.4 Hz (señal 2, 3, 4 y 5 respectivamente). Se agregan tres medidas de error: error medio absoluto (EMA), error medio cuadrático (EMC) y la razón de la desviación media cuadrática (RDMC), empleando las fórmulas

$$EMA = \sum_{k=1}^m |P_{Schuster}(f_k) - P_{estimada}(f_k)| / m, \quad EMC = \sum_{k=1}^m [P_{Schuster}(f_k) - P_{estimada}(f_k)]^2 / m \quad y$$

$$RDMC = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [P_{Schuster}(f_k) - P_{estimada}(f_k)]^2 / \sigma^2(P_{Schuster}) \quad \text{para los cálculos.}$$

La tabla 16 muestra el comportamiento de los estimadores espectrales para las cinco señales de prueba mencionadas, en la cual se observa que el tiempo adicionado por el método de interpolación no es excusa para descartar el análisis de la VRC por vía FFT (aún cuando sí puede serlo para un estimador paramétrico).

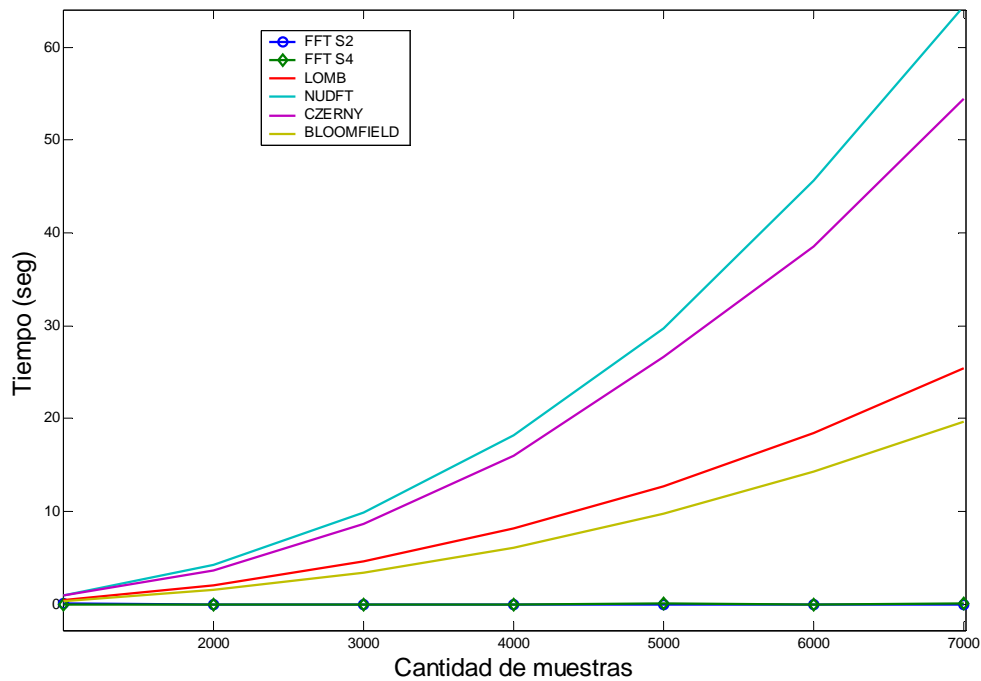
Tabla 16. Resultados de las cinco señales sintéticas *

Señal	Método	EMA	EMC	RDMC	DE	TC (seg)	NR (dB)
RUIDO PURO	FFT (FS=2)	0,0715	0,0121	0,0840	145,24	0,07190	-----
	FFT (FS=4)	0,0785	0,0143	0,0999	148,98	0,0780	-----
	LS	0,0003	0,0001	0,0004	0,8058	0,8430	-----
	NUDFT	0,0624	0,0098	0,0686	144,1525	1,5470	-----
	CZERNY	0,1921	0,0402	0,2800	321,77	1,5000	-----
	BLOOMFIELD	0,0021	0,0023	0,0160	0,8412	0,8440	-----
2	FFT (FS=2)	0	0	0	143,2	1,8590	4
	FFT (FS=4)	0	0	0	144,5	0,0780	4
	LS	0	0	0	0,7	0,7030	4
	NUDFT	0	0	0	149,0	1,4850	4
	CZERNY	0,0079	$0,7963 \cdot 10^{-4}$	0,0018	1243,2	1,4060	2
	BLOOMFIELD	0	0	0	1,0	0,7820	4
3	FFT (FS=2)	0	$2 \cdot 10^{-8}$	0	109,9	0,0620	4
	FFT (FS=4)	0,0001	$12 \cdot 10^{-8}$	0	100,2	0,0160	4
	LS	0	0	0	1,0	0,6560	4
	NUDFT	0	0	0	124,2	1,4220	4
	CZERNY	0,0080	$8282 \cdot 10^{-8}$	0,0019	1242,3	1,2340	2
	BLOOMFIELD	0	0	0	1,0	0,5470	4
4	FFT (FS=2)	0,0001	$123 \cdot 10^{-8}$	0	229	0	4
	FFT (FS=4)	0,0003	$703 \cdot 10^{-8}$	0,0002	537	0	4
	LS	0	0	0	0,9	0,6710	4
	NUDFT	0	0	0	326	1,4220	4
	CZERNY	0,0078	$7637 \cdot 10^{-8}$	0,0017	1241,4	1,2660	2
	BLOOMFIELD	0	0	0	1,0	0,5470	4
5	FFT (FS=2)	0,0005	$1319 \cdot 10^{-8}$	0,0003	246,7	0	4
	FFT (FS=4)	0,0009	$7456 \cdot 10^{-8}$	0,0017	304,5	0,0160	4
	LS	0	0	0	0,7	0,6560	4
	NUDFT	0,0001	$3 \cdot 10^{-8}$	0	135,8	1,4220	4
	CZERNY	0,0081	$8402 \cdot 10^{-8}$	0,0019	1236,1	1,2340	2
	BLOOMFIELD	0	0	0	0,9	0,5320	4

* Se usa las abreviaturas TC como tiempo de cálculo, DE como distorsión espectral y NR como nivel de ruido. Se emplearon 1000 muestras y $f_s=1$ Hz.

Lastimosamente la ventaja que toma el método por vía FFT se ve empañada por la distorsión espectral y los errores que muestra, sin embargo no es el método con el peor rendimiento, ya que este lugar lo toma el método de *Czerny* con un margen bastante amplio. Por el contrario los métodos NUDFT y *Czerny* duplican en tiempo al método de *Lomb-Scargle*, esto se puede ver en la figura 24.

Figura 24. Tiempo computacional para seis métodos de estimación espectral



El nivel de ruido es por lo general el mismo, siempre y cuando la señal esté contaminada de ruido, debido a que estos valores cambian (como puede verse en la figura 25) cuando la señal es senoidal pura, dejando entrever que los métodos NUDFT y FFT poseen el mismo nivel de ruido (6 dB), y que los métodos de *Bloomfield*, *Lomb-Scargle* y *Czerny* superan fácilmente los 15 dB para el nivel de ruido. La tabla 4.6 muestra la función de transferencia para el método de FFT con remuestreo, NUDFT y *Czerny* para 2000 muestras, en ella se observa que sólo el método de *Czerny* (junto con los métodos de *Lomb-Scargle* y *Bloomfield*) posee una característica de filtro pasatodo.

Figura 25. Estimación de la DEP de una señal senoidal sin ruido con muestreo regular

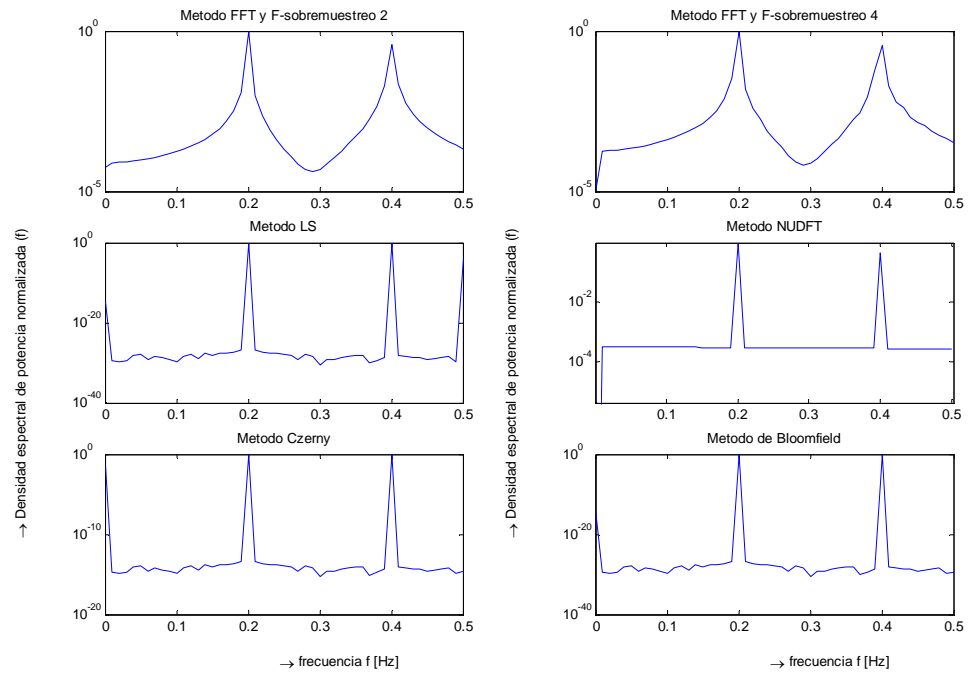
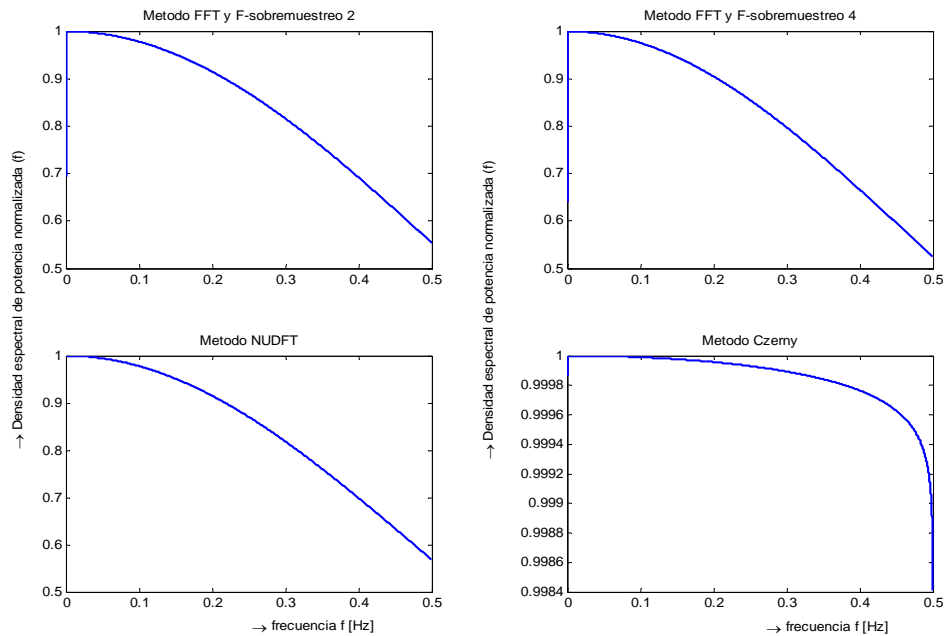


Figura 26. Función de transferencia para cuatro estimadores espectrales *



* Los métodos NUDFT y FFT con remuestreo claramente se presentan como filtros pasabajos

La tabla 17 muestra los resultados de simulación para el error medio absoluto y el promedio de la distorsión espectral de la estimación espectral de los seis métodos de prueba para una señal senoidal de 0,07 Hz junto con el 3^{er}, 5^{to}, 7^{mo}, o 9^{no} armónico, ambos de igual amplitud. En ambos casos de muestreo irregular se aprecia que la distorsión espectral con respecto al armónico disminuye para los métodos de FFT con remuestreo y la NUDFT (debido a que se comportan como filtros pasabajos), aumenta para el método de *Czerny* y es oscilatorio para los métodos de *Lomb* y *Bloomfield*.

Tabla 17. Errores de estimación para una señal senoidal y un armónico

Tipo de muestreo	Método	EMA				DE			
		3 ^{er} ar	5 ^{to} ar	7 ^{mo} ar	9 ^{no} ar	3 ^{er} arm	5 ^{to} arm	7 ^{mo} arm	9 ^{no} arm
Muestreo irregular con distribución exponencial	FFT (FS=2)	0,0092	0,0090	0,0091	0,0096	2012,8	1485,2	1336,4	1156,4
	FFT (FS=4)	0,0092	0,0090	0,0091	0,0096	2059,2	1544,5	1376,1	1199,9
	LS	0,0003	0,0003	0,0001	0,0005	9,6	14,4	9	9,2
	NUDFT	0,0092	0,0090	0,0087	0,0096	1939,1	1528,7	1387	1189,2
	CZERNY	0,0618	0,0587	0,0558	0,0596	1435,2	1459,6	1453,5	1459,1
	BLOOMFIELD	0,0001	0,0001	0,0001	0,0004	5	1	4,6	5,3
Muestreo irregular con distribución normal	FFT (FS=2)	0,0062	0,0062	0,0069	0,0073	1952,7	1416,2	1121,6	940,1
	FFT (FS=4)	0,0062	0,0062	0,0069	0,0073	2009,2	1479,3	1185,7	1001,6
	LS	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	7,1	9,6	10,1	9,7
	NUDFT	0,0062	0,0062	0,0069	0,0073	2023,8	1473,6	1187,5	1017,8
	CZERNY	0,0506	0,0519	0,0515	0,0517	1513,8	1528,6	1530,8	1527,4
	BLOOMFIELD	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,5	0,3	0,4	0,6
Muestreo regular	FFT (FS=2)	0,0009	0,0012	0,0017	0,0012	5	24,7	356,5	77,4
	FFT (FS=4)	0,0011	0,0015	0,0017	0,0015	320	74,5	642,9	151,8
	LS	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	3,1	3,1	3,1	3,1
	NUDFT	0,0005	0,0011	0,0017	0,0012	221,3	13,11	168,1	136,2
	CZERNY	0,0056	0,0079	0,0088	0,0081	1581,2	1410,8	1360,3	1397,7

El 9^{no} armónico corresponde a una frecuencia que presenta el fenómeno de *aliasing*. Las figuras 27 y 28 muestran el comportamiento de dicho fenómeno empleando muestreo regular y un muestreo irregular con distribución normal. El nivel de ruido presente en el método de *Lomb-Scargle* y en el método de *Bloomfield* es el más bajo cuando el muestreo

es regular, mientras que para el muestreo irregular presenta el mismo nivel de ruido que los métodos de NUDFT y FFT y remuestreo, pero la potencia asociada al 9^{no} armónico está plenamente diferenciada del ruido,

Figura 27. Efecto del *aliasing* para una señal con muestreo regular

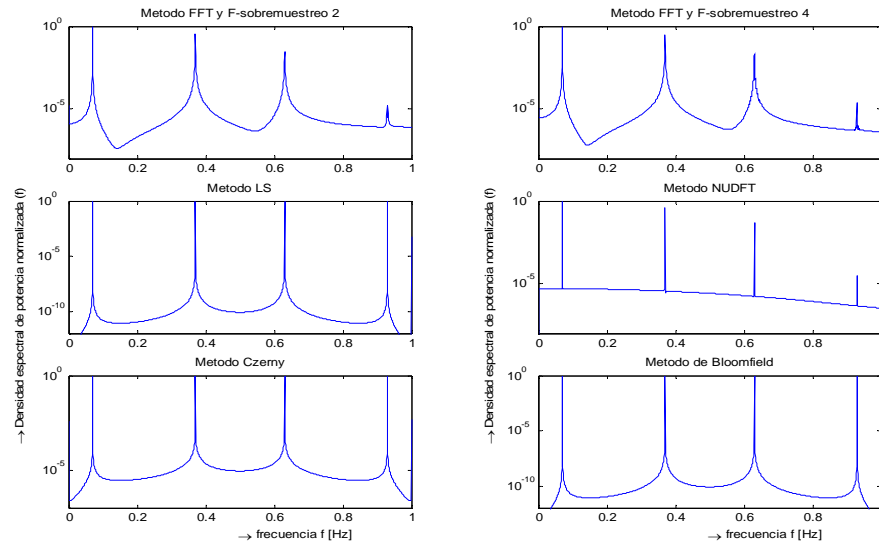
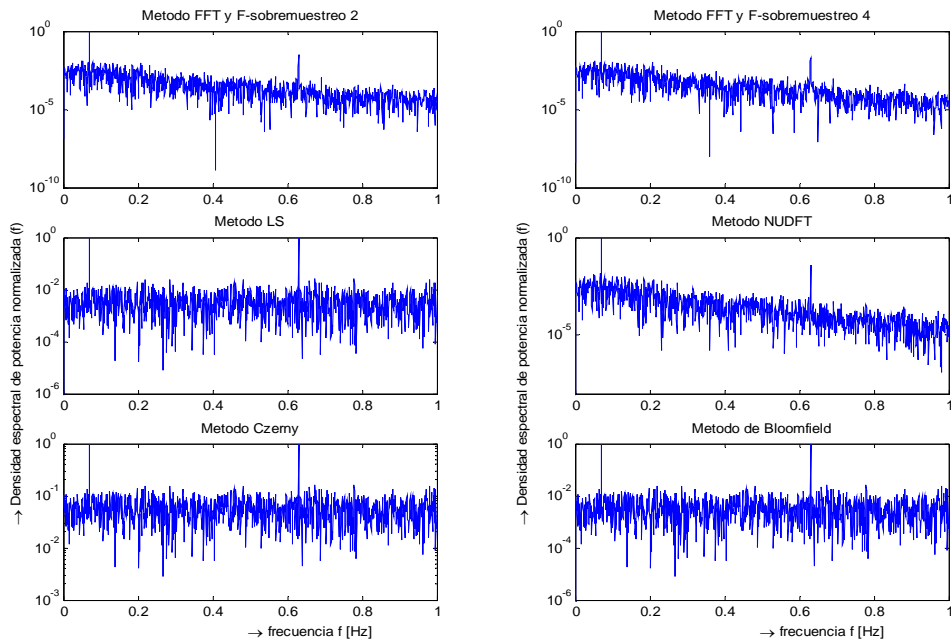


Figura 28 Efecto del *aliasing* para una señal con muestreo irregular.



4.3 ANÁLISIS DE LA VRC MEDIANTE EL ALGORITMO DE LOMB

Para realizar el siguiente análisis de la VRC se ha empleado los registros 16265, 16773 y 19140 normal ECG, 04015 y 04936 atrialfib (ECG con fibrilación atrial), chf01-failure (ECG con falla cardiaca), y sz01 y sz04 epilepsy (ECG con cuadro epiléptico) de la base de datos de la MIT; y sólo se mostrará los resultados obtenidos para el análisis espectral, el análisis no lineal y fractal de los datos mencionados.

Para el análisis fractal y no lineal sólo se emplea por preferencia el algoritmo de *Lomb-Scargle*, descartando a los demás métodos.

A continuación se presentan 8 tablas donde se muestra el error cometido al estimar el espectro de la señales RR mencionadas.

Tabla 18. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 16265 normal

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (seg)	0,0150	0,0160	0,1720	0,3600	0,3280	0,1400
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0,0940	0,0967	0,0014	0,0608	0,2027	0,0003
	EMC	0,0215	0,0229	0,0001	0,0106	0,0441	0
	RDMC	0,1310	0,1393	0,0007	0,0648	0,2684	0,0001
	DE	115,1971	116,3013	0,6351	64,9085	157,3446	0,6661
RUIDO	EMA	0,0566	0,0604	0,0006	0,0515	0,1926	0,0002
PURO	DE	84,9185	81,7756	0,8439	80,6309	170,1598	0,8377
2	EMA	0,0001	0,0001	0	0,0001	0,0130	0
	DE	82,5867	84,9235	1,0036	81,3436	641,3585	1,1585
3	EMA	0,0011	0,0016	0	0,0002	0,0258	0
	DE	91,0047	105,2248	0,7650	95,3631	543,0660	0,7636
4	EMA	0,0007	0,0012	0	0,0001	0,0162	0
	DE	21,4759	1,0912	0,7889	61,1479	620,0250	0,8756
5	EMA	0,0002	0,0004	0	0,0001	0,0112	0
	DE	6,9537	25,8599	1,1927	23,8929	651,3327	0,8692

Tabla 19. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 16773 normal

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (seg)	0,0160	0,0160	0,2650	0,2350	0,2340	0,1250
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0,0487	0,0552	0,0015	0,0419	0,1857	0,0005
	EMC	0,0066	0,0081	0	0,0051	0,0383	0
	RDMC	0,0434	0,0532	0,0003	0,0331	0,2511	0,0003
	DE	40,4657	36,2186	1,1885	39,2075	145,2353	0,7146
RUIDO PURO	EMA	0,0902	0,1038	0,0027	0,0132	0,0448	0
	DE	6,9301	6,5468	0,1230	6,8599	121,4201	0,5384
2	EMA	0,0002	0,0002	0	0,0002	0,0174	0
	DE	66,6135	64,4622	0,5651	68,9090	469,3949	0,9237
3	EMA	0,0007	0,0009	0	0,0002	0,0221	0
	DE	85,5901	90,2418	1,2264	80,7812	446,1691	0,9499
4	EMA	0,0009	0,0011	0	0,0002	0,0205	0
	DE	79,7513	91,0751	1,1310	32,2536	455,2829	1,0337
5	EMA	0,0009	0,0009	0	0,0002	0,0196	0
	DE	27,9192	39,7269	1,3044	0,1049	457,0947	0,9006

Tabla 20. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 19140 normal

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0,0160	0,0160	0,0930	0,2040	0,2030	0,0780
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0,0982	0,1244	0,0014	0,0803	0,1878	0,0004
	EMC	0,0216	0,0339	0	0,0147	0,0387	0
	RDMC	0,1846	0,2907	0,0003	0,1262	0,3319	0,0002
	DE	41,0880	53,5761	0,0693	29,2157	12,1518	0,7199
RUIDO PURO	EMA	0,0682	0,0763	0,0013	0,0625	0,1960	0,0004
	DE	39,2516	40,0714	0,5285	42,3147	121,6727	0,6738
2	EMA	0,0002	0,0002	0	0,0001	0,7166	0
	DE	87,4250	85,1748	1,0504	69,3799	446,5673	0,9255
3	EMA	0,0003	0,0004	0	0,0002	0,0160	0
	DE	62,0295	53,2331	0,671	70,9755	52,7665	0,8959
4	EMA	0,0005	0,0006	0	0,0002	0,6706	0
	DE	78,7979	94,4877	0,9139	49,6833	435,8045	1,0130
5	EMA	0,0040	0,0051	0,0001	0,0005	0,0308	0
	DE	7,5482	84,0082	0,5657	11,5558	388,3262	1,0327

Tabla 21. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 04015atrialfib

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0.0150	0.0160	0.0930	0.1720	0.1880	0.0940
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0.0278	0.0298	0.0052	0.0253	0.1539	0.0040
	EMC	0.0043	0.0044	0.0030	0.0041	0.0288	0.0030
	RDMC	0.0353	0.0366	0.0247	0.0339	0.2382	0.0246
	DE	30.3109	29.7592	2.8949	36.6252	171.4590	1.0729
RUIDO PURO	EMA	0.0700	0.0746	0.0024	0.0687	0.2017	0.0002
	DE	59.9705	65.9123	1.1900	68.5373	117.0876	0.7200
2	EMA	0.0007	0.0007	0	0.0007	0.0244	0
	DE	117.7401	174.3552	2.4309	164.9449	381.5983	0.9314
3	EMA	0.0014	0.0016	0	0.0012	0.0334	0
	DE	145.2413	138.9101	0.5966	171.9017	354.3956	1.0582
4	EMA	0.0027	0.0031	0.0001	0.0017	0.0407	0
	DE	162.0838	176.978	1.0203	128.6117	334.9397	0.8215
5	EMA	0.0013	0.0019	0	0.0008	0.0287	0
	DE	33.1894	15.0540	1.6169	75.799	369.0306	0.6217

Tabla 22. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG 04936 atrialfib

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0.0150	0.0150	0.0940	0.1870	0.1880	0.0780
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0.1454	0.1455	0.0009	0.0569	0.1948	0.0002
	EMC	0.0458	0.0463	0	0.0102	0.0410	0
	RDMC	0.2633	0.2663	0.0002	0.0585	0.2360	0
	DE	187.2935	188.308	0.3133	7.6129	118.5672	0.3177
RUIDO PURO	EMA	0.0664	0.0764	0.0005	0.0647	0.2023	0.0001
	DE	33.3045	33.4684	0.4027	17.2615	112.8710	0.3533
2	EMA	0.0001	0.0001	0	0.0001	0.0149	0
	DE	54.129	59.8437	0.9229	47.2623	443.4105	0.9922
3	EMA	0.0013	0.0021	0	0.0002	0.0263	0
	DE	23.9559	20.0122	0.8896	60.2216	400.6223	0.7963
4	EMA	0.0002	0.0004	0	0.0001	0.0130	0
	DE	9.7154	11.7055	0.5736	24.5613	453.5913	0.7613
5	EMA	0.0034	0.0041	0	0.0003	0.0270	0
	DE	40.3058	65.8631	0.7840	20.1838	392.2176	0.8799

Tabla 23. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG chf01 failure

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0.1250	0.0150	0.1100	0.2030	0.2500	0.0940
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0.0210	0.0218	0.0005	0.0174	0.1437	0.0001
	EMC	0.0046	0.0046	0	0.008	0.0241	0
	RDMC	0.0503	0.0504	0.0001	0.0086	0.2631	0
	DE	57.2828	53.2891	0.6508	53.008	186.0127	0.2357
RUIDO	EMA	0.0603	0.0690	0.0010	0.0559	0.2024	0.0002
PURO	DE	37.1757	36.5430	0.4118	27.6260	112.7417	0.3704
2	EMA	0.0001	0.002	0	0.0001	0.0152	0
	DE	65.2378	62.9975	1.3144	62.5015	443.8708	1.3836
3	EMA	0.002	0.003	0	0.0003	0.0258	0
	DE	44.0254	42.1707	0.8083	71.1168	399.1163	0.6323
4	EMA	0.0010	0.0016	0	0.0001	0.0167	0
	DE	10.1877	27.4333	0.8524	28.6694	434.4787	0.7774
5	EMA	0.0006	0.0004	0	0.0002	0.0169	0
	DE	7.4793	12.9760	0.5478	29.6807	439.0902	0.7536

Tabla 24. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG sz01

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0.0150	0.0150	0.1090	0.1880	0.2030	0.0940
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0.0460	0.0516	0.0012	0.0370	0.1812	0.0005
	EMC	0.0055	0.0066	0	0.0034	0.0368	0
	RDMC	0.0337	0.0405	0.0002	0.0208	0.2255	0.0001
	DE	39.5054	37.9732	0.6680	39.3304	141.3986	0.6333
RUIDO	EMA	0.0808	0.0897	0.0016	0.0706	0.1993	0.0003
PURO	DE	49.1875	50.9997	0.6870	47.9402	106.4212	0.8150
2	EMA	0.0002	0.0002	0	0.0002	0.0183	0
	DE	61.7986	57.1098	0.6220	66.6553	444.5769	0.9992
3	EMA	0.0004	0.0006	0	0.0002	0.0196	0
	DE	78.5231	78.3565	0.7118	49.1871	437.4802	1.0760
4	EMA	0.0002	0.0002	0	0.0001	0.0146	0
	DE	52.6292	35.5325	0.9464	32.8573	458.6679	0.8918
5	EMA	0.0014	0.0026	0	0.0002	0.0166	0
	DE	67.4725	91.3092	1.5018	12.2517	441.2434	0.6972

Tabla 25. Errores de la estima espectral de la señal RR para el registro ECG sz04

Señal	Medida	FFT (FS=2)	FFT (FS=4)	LS	NUDFT	CZERNY	BLOOMFIELD
RR	TC (s)	0.0140	0.0150	0.1400	0.2040	0.2500	0.1090
	NR (dB)	4	4	5	5	2	5
	EMA	0.0577	0.0593	0.0044	0.0546	0.1818	0.0025
	EMC	0.0076	0.0079	0.0009	0.0074	0.0370	0.0009
	RDMC	0.0431	0.0448	0.0053	0.0421	0.2094	0.0052
	DE	53.6871	46.7603	0.1345	46.7318	127.7936	0.8892
RUIDO PURO	EMA	0.1013	0.1107	0.0041	0.0894	0.1995	0.0006
	DE	20.2516	22.2697	0.9008	19.7683	99.9706	0.7773
2	EMA	0.0004	0.0004	0	0.0003	0.0199	0
	DE	113.5457	114.0168	2.2386	111.0820	395.1587	0.9117
3	EMA	0.0024	0.0033	0.0002	0.0013	0.0352	0
	DE	90.4488	99.4483	2.5083	94.8893	343.3285	0.7259
4	EMA	0.0020	0.0033	0	0.0005	0.0269	0
	DE	48.1478	30.9558	0.5541	87.2797	367.9465	0.7092
5	EMA	0.0010	0.0018	0	0.0005	0.0230	0
	DE	13.6193	37.8485	0.3995	13.6280	380.6345	1.0442

La información de las tablas 18 hasta la 25 muestra que el algoritmo de *Lomb-Scargle* tiene un comportamiento estable para el análisis de la VRC y que solamente es superado por el método de *Bloomfield* por manejar un menor tiempo de cálculo.

El método vía FFT e interpolación muestra errores bajos, pero una alta distorsión espectral y ambas medidas aumentan en general con el factor de sobremuestreo. El método sigue siendo válido para el análisis de la VRC si se considera que el tiempo de respuesta es la variable de mayor premisa, sin embargo debe descartarse al igual que el método de *Czerny* si la premisa consiste en obtener la menor distorsión espectral o el menor error en la estimación. El método NUDFT no se distingue en ninguna medida.

Estos resultados validan la selección del algoritmo de *Lomb* para el análisis de la VRC, siguiendo con esta idea se muestran los resultados, en la tabla 4.12, para el análisis no lineal empleando el biespectro, la característica fractal β empleando el diagrama bilogarítmico y el análisis por bandas de frecuencia empleando la clasificación de *Cerutti*.

Tabla 26. Análisis por bandas de frecuencia, no lineal y fractal de la VRC

Medida	Bandas de frecuencia						No lineal	Fractal
	TOTAL	VLF	LF	HF	LF/(HF+LF)	HF/(HF+LF)	%NL	β
16265normal	51,1294	1,6048	9,2701	12,8896	0,4183	0,5817	47.41	-4.6794
16773normal	30,1422	0,9530	5,1398	12,7624	0,2871	0,7129	64.22	-5.2811
19140normal	24,3975	0,7408	3,1557	7,1941	0,3049	0,6951	55.87	-1.9262
04015atrial	14,6288	1,5932	4,660	3,3549	0,5816	0,4184	87.56	-7.2085
04936atrial	34,8444	1,3639	8,356	14,1868	0,3729	0,6271	73.85	-8.0772
chf01	11,0361	2,3980	2,6005	2,9815	0,4659	0,5341	86.21	-12.077
sz01	28,2266	2,2437	6,9880	12,0929	0,3662	0,6338	79.30	-7.4003
sz04	29,1141	3,0511	7,8173	12,0262	0,3939	0,6061	86.90	-8.4902

De acuerdo a la información presentada en la tabla 26 la información por bandas de frecuencia no es concluyente y a duras penas se puede mencionar que la relación entre la potencia de las bandas VLF y LF con respecto a la potencia total es menor para las tres primeras señales (personas sanas). Mientras que si se puede indicar que el índice de no linealidad (%NL) para las personas sanas está por debajo del 65%, mientras que los valores por encima de éste corresponden a personas con problemas cardiacos. De manera similar se verifica que el coeficiente β se hace más negativo cuando se presenta una anomalía cardiaca, estimándose como valor de alerta si $\beta < -6$.

Las figuras 29 y 30 muestran el biespectro y el diagrama bilogarítmico de la densidad espectral de potencia para una persona sana y una persona que presenta una falla cardiaca. El biespectro característico de una persona enferma aumenta la potencia asociada a la banda LF, mientras que el biespectro de una persona sana tiende a distribuirse sobre la mayoría de las frecuencias y se aumenta la potencia asociada a la banda HF. El diagrama bilogarítmico de una persona sana no presenta grandes diferencias al de una persona enferma, exceptuando que una persona enferma presenta picos de potencia más altos en la banda LF que una persona sana, es decir, la misma información que se puede extraer del biespectro.

Figura 29. Biespectro y diagrama bilogarítmico de una persona sana: ECG 19140normal

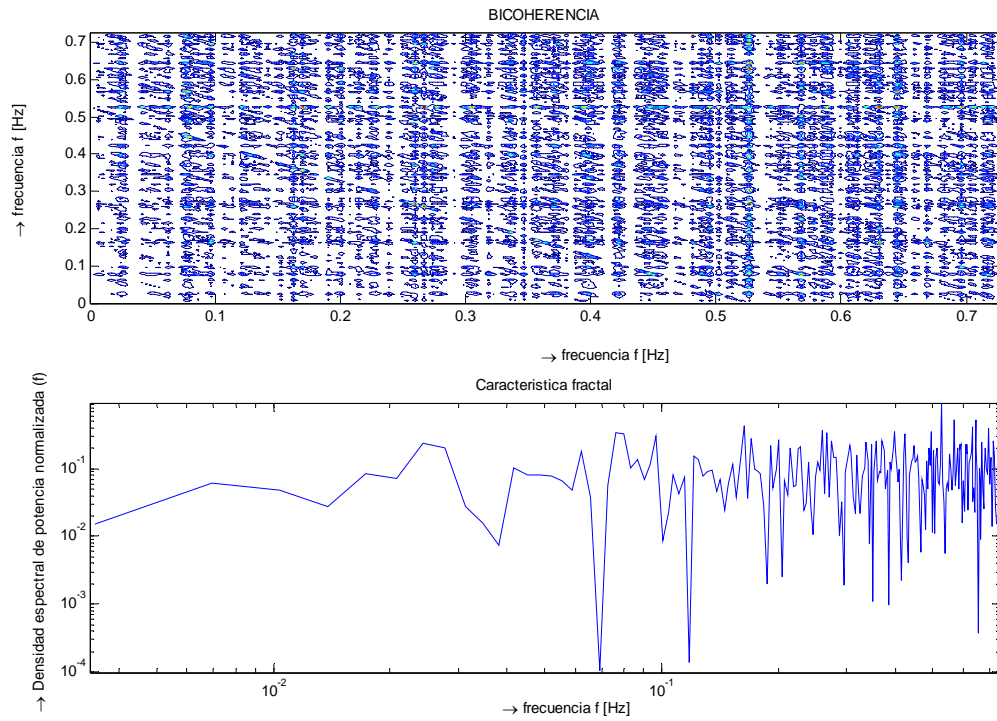


Figura 30. Biespectro y diagrama bilogarítmico de una persona enferma: ECG chf01

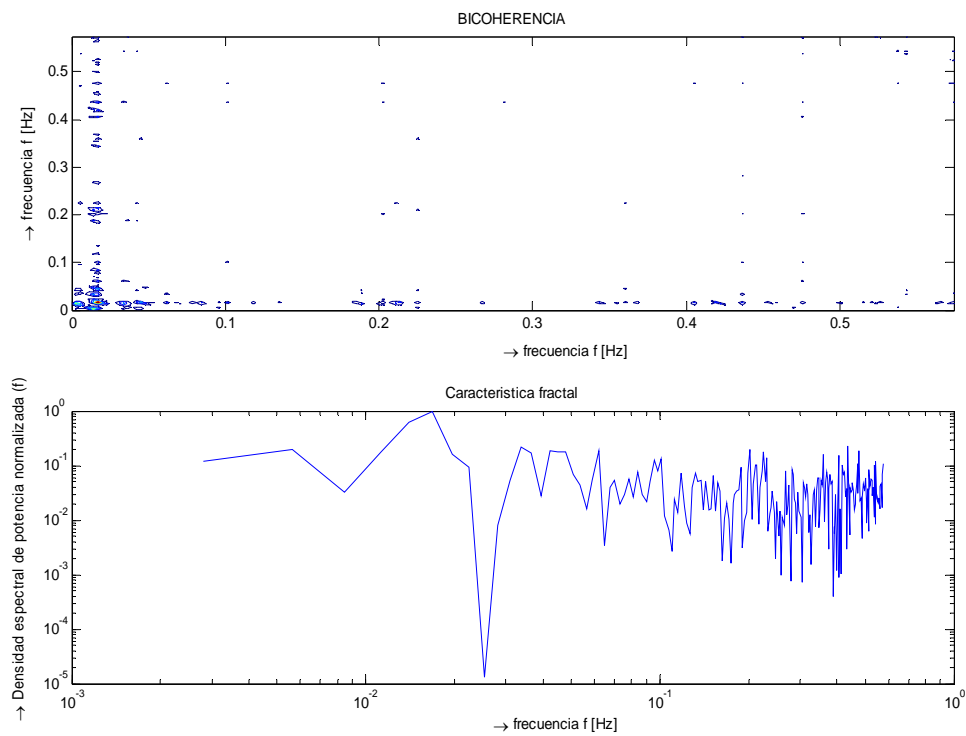


Figura 31. Estimación espectral de la señal RR de un paciente con epilepsia: ECG sz01

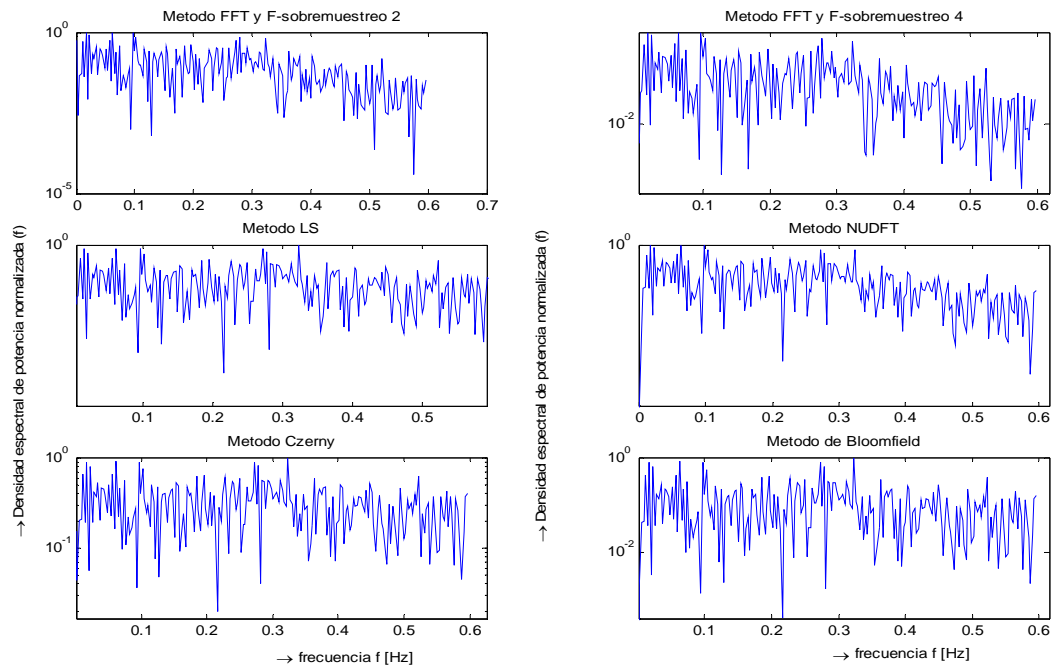
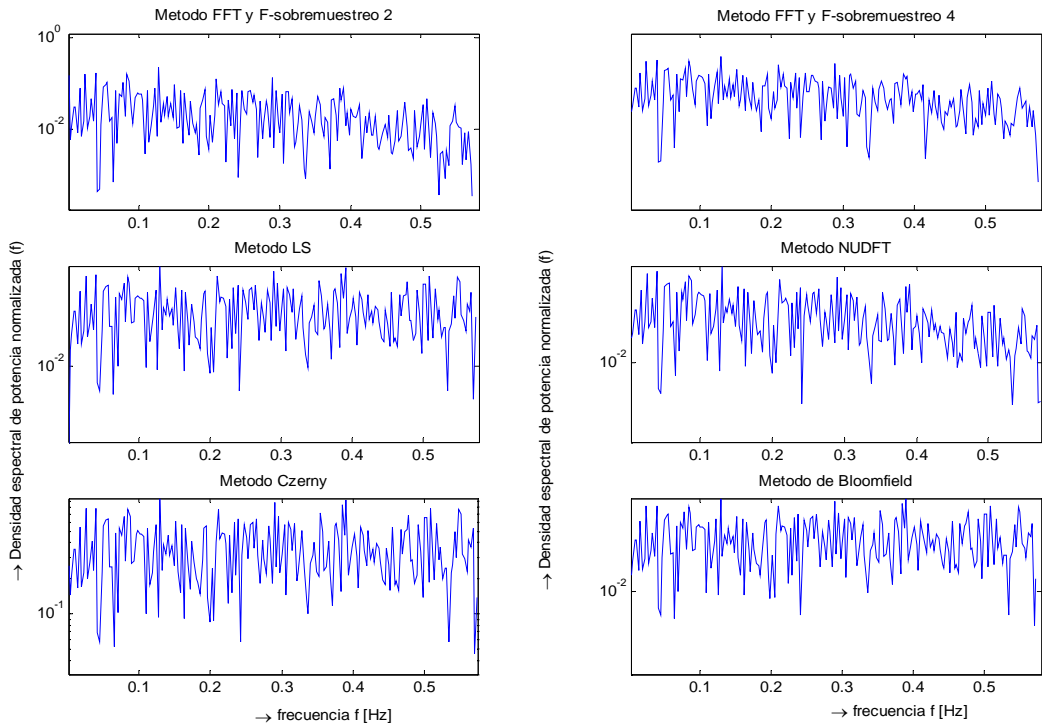
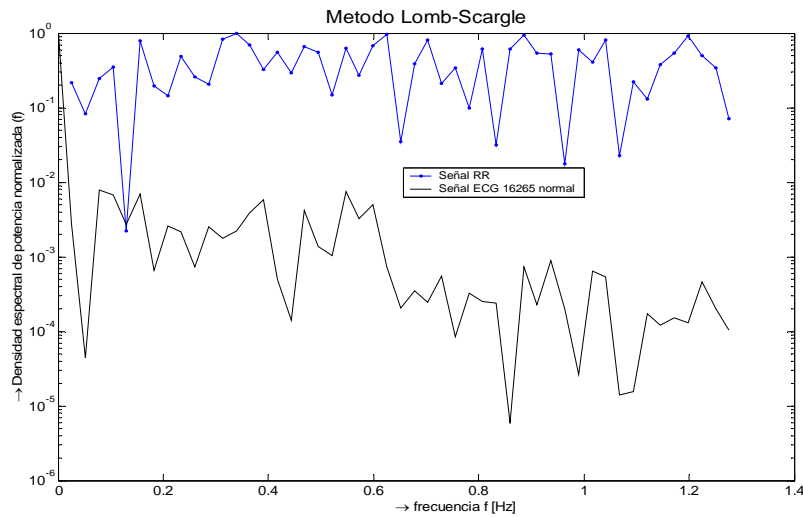


Figura 32. Estimación espectral de la señal RR de un paciente con fibrilación atrial: ECG 04015atrial



4.4 RELACIÓN ENTRE LOS ESPECTROS DE LAS SEÑALES ECG Y RR

Figura 33. Estimación espectral de la señal ECG y su respectiva señal RR



El espectro de la señal ECG se limita por debajo de la frecuencia de *Nyquist* usando un filtro electrónico y una frecuencia de muestreo mayor de $2f_{Nyquist}$, eliminando de paso el *aliasing* del análisis espectral. Pero un procedimiento similar no puede aplicarse al análisis espectral de intervalos RR, en este caso es posible encontrar el efecto de *aliasing*.

El análisis espectral de la señal ECG es más sensible y exacto comparado al análisis espectral de intervalos RR, por tanto se debe obtener la mejor forma de extraer la información sobre las influencias externas en la señal cardiaca, no necesariamente relacionada exclusivamente al análisis normal de ECG.

Así mismo, la información de alta frecuencia del espectro de la señal ECG (que emana como el resultado de la frecuencia respiratoria) reaparece en el espectro RR como una señal difundida que aumenta con la variación de la frecuencia de muestreo. Mientras que la información de la banda VLF presente en el espectro de la señal RR normalmente no se observa en el espectro de la señal ECG, entonces se puede sospechar que el *aliasing* es el agente actuante en dicha banda.

A diferencia de los dispositivos electrónicos, es muy difícil desarrollar procedimientos para descubrir el *aliasing* en los humanos. En los dispositivos electrónicos el *aliasing* puede descubrirse fácilmente cambiando la frecuencia de muestreo y en los humanos las fluctuaciones del ritmo cardiaco son del mismo orden que los cambios necesarios en las frecuencias de muestreo por lo cual se convierte en una tarea importante a desarrollar.

Al considerar el *aliasing* como una simetría perjudicial, producto del uso de una base incompleta que tiene simetrías intrínsecas incoherentes con las propiedades de la señal, el *aliasing* puede parcialmente impedirse reduciendo la simetría de la base. Entonces es posible emplear el algoritmo de *Lomb* para reducir el efecto de *aliasing* cuando el muestreo es irregular.

CONCLUSIONES

Cuando el muestreo es irregular, el periodo promedio de muestreo puede ser calculado de dos formas distintas: el promedio de los intervalos de tiempo o como la relación entre el intervalo total de observación y el número de muestras. Estos resultados por lo general son distintos (siendo el primero el de valor más bajo, con lo cual se obtiene una mayor resolución espectral), sin embargo se optó por emplear la relación entre el intervalo de observación y el número de muestras al ser la forma más empleada.

El efecto de *aliasing* característico para una señal con muestreo regular disminuye cuando la misma señal presenta muestreo irregular, esto se debe al hecho que la información de las componentes de la señal se desplaza irregularmente al realizar la convolución implícita en la transformada de Fourier. Esto garantiza que es posible obtener información del espectro de la señal por encima de la frecuencia de *Nyquist* asociada con la frecuencia promedio de muestreo.

Se deja claro que el remuestreo no es la alternativa más viable para el análisis espectral de potencia cuando el muestreo es irregular, gracias a que actúa como un filtro pasabajo y aumenta la varianza y el tiempo de cómputo al emplear métodos de interpolación de orden superior. Así mismo el sobremuestreo no garantiza una mejoría en la estimación espectral.

Dado que es posible encontrar fácilmente aplicaciones que presenten un muestreo irregular se hace indispensable emplear métodos generalizados para el análisis de señales que sean robustos y confiables y en el caso de la estimación espectral de potencia, el algoritmo de Lomb muestra un excelente comportamiento.

Al advertir que el periodograma de Lomb puede ser visto como una transformada, como ya lo menciona *Scargle*, se hace necesario demostrar que es posible implementar el algoritmo

de Lomb enventanado, Lomb ponderado y la variante *Lomb-Wavelet*, los cuales puede ser optimizados con un desarrollo más agudo. Sin embargo este trabajo muestra que sí es posible llevarlos a la práctica y tener resultados aproximados al periodograma de *Lomb-Scargle*.

Otra vía interesante que se ha expuesto en este trabajo es la generalización del algoritmo de *Lomb*, al igual que el algoritmo de *Lomb* exponencial (variante que incorpora el manejo de tiempo-frecuencia), cuyo uso es idéntico al periodograma de *Lomb* clásico y pueden ser empleadas en caso de que la aplicación lo requiera.

El periodograma de Lomb puede verse como la generalización del periodograma de *Schuster*, el cual no es óptimo para el muestreo irregular, dejando al algoritmo de *Lomb* como patrón de medidas. El algoritmo de *Lomb* expone una base matemática suficientemente sólida para que sea tomada como herramienta patrón para el cálculo de la densidad espectral de potencia, sin importar el tipo de muestreo empleado, y en particular muestra una mayor eficiencia cuando el muestreo presenta una distribución χ^2 .

El periodograma de *Lomb* es superado en algunos tipos de muestreo por su homólogo el periodograma de *Bloomfield*, el cual tiene como ventaja la reducción de los cálculos que emplean ambos algoritmos.

El periodograma de Lomb supera ampliamente a los demás algoritmos expuestos en este proyecto: el método bayesiano de *Qi*, el método de *Czerny*, el método NUDFT, el método de *Burg* modificado. Imponiéndose en primera medida por tener una distorsión espectral mínima y un nivel de ruido bajo.

Se hace necesario el ajuste de los hiperparámetros del método bayesiano, ya que es evidente que su respuesta no es óptima, su base teórica es fuerte y merece la pena mejorar la respuesta que se ha obtenido con dicho algoritmo. Los métodos de *Czerny* y NUDFT son

algoritmos estables, relativamente rápidos y pueden ser implementados fácilmente para una respuesta en tiempo real.

El método de *Burg* actúa como filtro selectivo eliminando datos cuando la base de tiempo regular no se ajusta a la base de tiempo de muestreo. Esto ocasiona una disminución en la resolución frecuencial y un aumento en la distorsión espectral, por lo que se cataloga como el peor algoritmo.

El método de remuestreo y FFT presenta mayores errores y un tiempo de cómputo inherentemente menor que el método de *Lomb-Scargle*. El sobremuestreo no mejora la estimación por vía FFT, aumentando los errores y la distorsión espectral.

A pesar de presentar una reducción en los términos cruzados se clarifica que es posible emplear una estimación conjunta con mínimos cuadrados pero es ineficiente computacionalmente, por lo cual se prefiere una estimación espectral por cada frecuencia.

De acuerdo con la bibliografía, los métodos espectrales son una buena herramienta para investigar con mayor detalle las causas que originan la variabilidad del ritmo cardíaco. Tras revisar los diversos métodos para la caracterización espectral se ha optado por el empleo del algoritmo de *Lomb* como la alternativa más fiable para el cálculo de la variabilidad del ritmo cardíaco, dejando de lado a los métodos de estimación de potencia con los que tradicionalmente se calcula dicha variabilidad.

También es posible derivar a partir del algoritmo de *Lomb* métodos para el cálculo de estadísticos de orden superior tales como el biespectro, coeficientes fractales e inclusive llevarse el desarrollo de un algoritmo bidimensional o tridimensional para el análisis de imágenes. El empleo del biespectro muestra que la no linealidad en la secuencia RR está presente casi siempre aunque el grado de no linealidad depende del sujeto y de la situación fisiológica. Respecto al análisis del índice de fractalidad se ha hallado que el coeficiente fractal de la señal es mayor en casos de falla cardíaca.

La distorsión espectral es la medida más confiable para la comparación entre estimadores espectrales porque es mucho más sensible que el error medio absoluto, el error cuadrático medio y la razón de la desviación media cuadrática.

BIBLIOGRAFÍA

- ¹ PRESS W., RYBICKI G., Fast algorithm for spectral analysis of unevenly sampled data. Astrophysical journal, Vol 338, págs 277-280. 1989
- ² LOMB N. R, Least-squares frequency análisis of unevenly spaced data. Astrophysical and space science, No 39, págs 447-462. 1976
- ³ KIVI, BLU, UNSER. Generalied sampling: A varitional approach. IEEE transations on signal processing, Vol 50, No 8. Agosto de 2002
- ⁴ DE WAELE Stiejen, BROERSEN Piet. Error measures for resampled irregular data. IEE transations of instruments measure, Vol 49, págs 216-222. Abril de 2000
- ⁵ WARE, Anthony. Fast aproimate Fourier transform for irregularly spaced data. SIAM, Rev 40, págs 838-856. 1998
- ⁶ OPPENHAIM A, SCHAFER R. Discrete-time signal processing. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall, 1989
- ⁷ DE WAELE Stiejen, BROERSEN Piet. The Burg algorithm for segments. IEE transations of signal processing, Vol 48, No 10, págs 2876-2880. Octubre de 2000
- ⁸ FEICHTINGER Gröchenig. Theory and practice of irregular sapling. Wavelets: mathematics and applications. Studies advanced of mathematics, págs 305-363. CRC, Boca Raton Florida, 1994

-
- ⁹ CASTLIGIONI P, DI RIENZO M, YOSH H. A computacional efficient algorithm for online spectral analysis of beat to beat signals. IEEE Computers in cardiology. Vol 29, págs 417-420. 2002
- ¹⁰ QI Yuan, MINKA Thomas, PICARD Rosalind. Bayesian spectrum estimation of unequally sampled nonstationary data. IEEE International conference on acoustic, speech and signal processing. Orlando, Florida. Mayo 17 de 2002
- ¹¹ SCHWARZENBERG – Czerny. Fast and statistically optimal period search in uneven sampled observations. The astrophysical journal. Vol 460, págs 107-110. Abril 1 de 1996
- ¹² SCARGLE J. D, Studies in astronomical time series Analysis II. Statial aspects of spectral analysis of unevenly sampled data. Astrophisicla journal, No 263, págs 835-853. 1982
- ¹³ THONG, Mc NAMES, ABOY, OKEN. Averaged Lomb Periodograms for nonuniform sampling. European Association for specch, Signal and image processing, 2004. Procedente de la 17^o Conferencia internacional EURASIP, Biosiganl 2004, Vol 17, págs 39-41
- ¹⁴ BETTHORST G Larry. Generalizing the Lomb-Scargle periodograma. 20^o Conferencia sobre máxima entropía y métodos bayesianos. Francia 2000.
- ¹⁵ MOODY G. Spectral analysis of heart rate witout resampling. Computers in cardiology. IEEE Computer society press, págs 71-718, Piscataway, NJ, 1993
- ¹⁶ MITOV I, DASKALOV I. Comparison of heart variability spectra using generic relationships of their inpu signals. Medical biological engineering computation, Vol 36(5), págs 573-580, 1998