

ANÁLISIS ASINTÓTICO PARA EL FLUJO DE
FERROFLUIDO INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO
ROTATORIO Y POR GRADIENTE DE PRESIÓN

SERGIO ALONSO FLÓREZ BARRETO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUIMICAS
ESCUELA DE INGENIERIA QUIMICA
BUCARAMANGA
2014

ANÁLISIS ASINTÓTICO PARA EL FLUJO DE
FERROFLUIDO INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO
ROTATORIO Y POR GRADIENTE DE PRESIÓN

SERGIO ALONSO FLÓREZ BARRETO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el
título de
Ingeniero Químico

Director

Arlex Chaves Guerrero

Ingeniero Químico, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUIMICAS
ESCUELA DE INGENIERIA QUIMICA
BUCARAMANGA
2014

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo, quiero dar las gracias al profesor Arlex Chaves Guerrero por aceptarme en la realización de este trabajo de grado, por su amabilidad, su infinita paciencia y dedicación.

También quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander y especialmente a la Escuela de Ingeniería Química, a sus docentes y a su personal administrativo que fueron pilares importantes en pro a mi formación personal y profesional.

Este trabajo va dedicado a todos mis amigos y personas allegadas, que me apoyaron durante el transcurso de mi carrera "las cuales nunca olvidaré", especialmente a mi madre Jannett Barreto, a mi padre Aurelio Florez, a mi hermana Laura Marcela, a mi hermano Elkin Florez que fue mi ejemplo a seguir y a mi novia Angela Garcia que siempre ha estado conmigo incondicionalmente.

A mis sobrinos que son lo que yo más amo en el mundo

Juan Pablo Otero y Samantha Florez.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN	12
1 MARCO TEÓRICO	17
1.1 Análisis del sistema	17
1.2 Ecuaciones Ferrohodinámicas	18
2 ANÁLISIS DE FLUJO	22
2.1 Método aplicado a las ecuaciones Ferrohodinámicas	22
2.2 Problema de Orden Cero	22
2.2.1 Problema magnético de orden cero.....	23
2.2.2 Fuerza magnética y densidad de torque magnético para el problema de orden cero	24
2.2.3 Problema hidrodinámico de orden cero	26
2.3 Problema de Primer orden	27
2.3.1 Problema magnético de primer orden	28
2.3.2 Fuerza Magnética y densidad de torque magnético para el problema de primer orden.....	30
2.3.3 Problema hidrodinámico de primer orden.....	31
3 RESULTADOS Y ANÁLISIS	33
3.1 Análisis de los perfiles de velocidad lineal y angular	33
4 CONCLUSIONES	38
5 RECOMENDACIONES	39
CITAS BIBLIOGRÁFICAS	40
BIBLIOGRAFÍA	42

Lista de Figuras

- 1-1** La ilustración muestra una capa de ferrofluido de espesor δ entre dos placas infinitamente largas. Los campos de velocidad traslacional v y de giro de las partículas ω es asumido que depende solo de la coordenada x . El campo magnético es modelado imponiendo un campo magnético en z y una densidad de flux magnético en x desde fuentes externas. Ambos campos son uniformes pero dependientes del tiempo.....**18**
- 3-1** Perfiles para la velocidad angular promedio de las partículas y la velocidad traslacional para los análisis de orden cero, uno y la solución asintótica compuesta obtenidas por el método de perturbación regular con $\epsilon = 0.108$ y $\kappa = 10$ obtenidas con las propiedades de un ferrofluido de ferrito de cobalto en agua.....**33**
- 3-2** Perfiles de momento angular de las partículas y velocidad lineal del ferrofluido para diferentes valores del parámetro κ con $H = 0.5$ mT, $\frac{d\tilde{p}}{dz} = 0$ y $\Omega = 150$ Hz.....**35**
- 3-3** Perfil de \tilde{v} compuesta ($\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \epsilon\tilde{v}_1$) obtenidos por el método de perturbación regular para diferentes valores de $\frac{d\tilde{p}}{dz}$ con $H = 0.5$ mT, $\kappa = 10$ y $\Omega = 150$ Hz con un campo magnético rotatorio.....**35**
- 3-4** Perfiles de velocidad para diferentes valores de a) frecuencia Ω_f con $\kappa = 3.3$ y $H = 4$ mT y b) amplitud del campo magnético H con $\kappa = 3.3$ y $\Omega_f = 150$ Hz.....**36**

Lista de Anexos

ANEXO A. Constantes de integración de los perfiles de cantidad de movimiento lineal y momento angular interno para el orden cero.....**44**

ANEXO B. Constantes de integración de los perfiles de cantidad de movimiento lineal y momento angular interno para el primer orden.....**45**

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS ASINTÓTICO PARA EL FLUJO DE FERROFLUIDO INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTATORIO Y UN GRADIENTE DE PRESIÓN¹

AUTOR: SERGIO ALONSO FLÓREZ BARRETO²

PALABRAS CLAVE: Ferrofluido, Perturbación regular, Ecuaciones ferrohídrodinámicas, campo magnético, soluciones numéricas, soluciones asintóticas.

Los ferrofluidos son soluciones coloidales que contiene nanopartículas no diluyentes en agua o en compuestos orgánicos. Han sido de gran estudio ya que con los avances en la tecnología, con el electromagnetismo pueden ser manipuladas variando la intensidad, dirección y tipo de campo magnético. Su gran aplicabilidad va en el uso sellos metálicos para discos en computadores y en otros dispositivos electrónicos. Están siendo estudiados ya que pueden ser usadas en la medicina para detectar cánceres, prevenir la ceguera tratando el desprendimiento de retina y en la parte automotriz en amortiguadores. Este proyecto de grado fue realizado con el propósito de dar a conocer la metodología para trabajar las ecuaciones ferrohídrodinámicas en un sistema coordenado cartesiano el cual se le induce un campo magnético rotatorio. El método asintótico que se aplica es el de perturbación regular y su solución es válida para bajos campos magnéticos. Ya que las ecuaciones a trabajar se vuelven muy complejas a medida que se avanza en el orden de la solución del sistema, se usa una herramienta para el cálculo de los perfiles, se trabajó el software de *MATHEMATICA@9.0*. Usando un parámetro de perturbación obtenido por Chaves *et al.*, se obtienen las gráficas resultantes a la solución asintótica del problema y estas son comparadas cualitativamente con las soluciones asintóticas obtenidas por Rinaldi *et al.*, y las soluciones numéricas obtenidas por Markus Zahn y Donald R. Greer.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ingenierías Físico Químicas. Escuela de Ingeniería Química. Director Arlex Chaves Guerrero.

ABSTRACT

TITLE: *ASYMPTOTIC ANALYSIS FOR FERROFLUID FLOW INDUCED BY A ROTATING MAGNETIC FIELD AND A PRESSURE GRADIENT*³

AUTHOR: *SERGIO ALONSO FLÓREZ BARRETO*⁴

KEY WORDS: Ferrofluid, regular perturbation, ferrohydrodynamic equations, magnetic field, numerical solutions, asymptotic solutions.

Ferrofluids are colloidal solutions containing no diluents nanoparticles in water or organic compounds. They have been of great study and that with advances in technology, with electromagnetism can be manipulated by varying the intensity, direction and type of magnetic field. Its wide applicability goes in the metal seals for use in computer disks and other electronic devices. They are being studied because they can be used in medicine to detect cancers, as carriers of drugs, trying to prevent blindness and retinal detachment in the auto part on cushions. This degree work was made with the purpose of publicizing the work methodology for the ferrohydrodynamics equations in a cartesian coordinate system which will induce a rotating magnetic field. The asymptotic method used is the regular perturbation and its solution is valid for low magnetic fields. Since working equations become very complex as it progresses in the order of the system solution, a tool for the calculation of the profiles is used, the working software was *MATHEMATICA*®9.0. Using a parameter perturbation obtained by Chaves *et al.*, The resulting graphs are obtained the asymptotic solution of the problem and these are compared qualitatively with the asymptotic solutions obtained by Rinaldi *et al.*, and numerical solutions obtained by *Markus Zahn* and *Donald R. Greer*.

³ Degree work

⁴ Faculty of Physical Chemical Engineering. Chemical Engineering School. Director Arlex Chaves Guerrero.

INTRODUCCIÓN

Los ferrofluidos o fluidos magnéticos, son suspensiones coloidales de nanopartículas magnéticas recubiertas de una capa de surfactante (que previene la aglomeración y pérdida de estabilidad) y suspendidas en agua o en compuesto orgánico dependiendo del tipo de aplicación en el cual van hacer usados.

Estos ferrofluidos no se dan de forma natural, es decir deben ser sintetizados y tienen como particularidad, que su comportamiento reológico es influenciado por fuerzas de polarización magnéticas así como por torques magnéticos que les ofrecen un comportamiento reológico particular entre el resto de fluidos.

Una característica magnetoreológica sobresaliente de los ferrofluidos es la posibilidad de generar su flujo por la acción de campos magnéticos rotatorios; como fue observado por primera vez por *Moskowitz y Ronsenweig* en 1967 [1]. En ese trabajo ellos describen un experimento donde un ferrofluido es puesto dentro de un recipiente cilíndrico el cual a su vez es instalado dentro de un estátor excitado de forma adecuada generando un campo magnético rotatorio y espacialmente uniforme. Este experimento, suscitó un gran interés por explicar el mecanismo generador del flujo llevando a varios investigadores a plantear diferentes teorías. Una de las más importantes teorías, y a la vez una de las más ensayadas, es la teoría de Difusión del Momento Angular Interno (DMAI) planteada por *Zaitsev y Shliomis* [2]. Esta teoría se fundamenta en el hecho que un campo magnético rotatorio genera un torque sobre el momento magnético de las partículas generando a su vez la rotación de estas en el fluido. El momento angular de las partículas, es entonces transmitido a través del fluido a través de transporte molecular, es decir por contacto directo entre elementos de fluidos contiguos. Según esta teoría, el momento angular interno y el momento lineal son interconvertidos el uno en el otro generando movimiento macroscópico. El transporte difusivo de momento angular interno es cuantificado por el coeficiente fenomenológico de "Spin Viscosity" η' en

un modo similar a como la viscosidad dinámica η cuantifica el transporte molecular de momento lineal en un fluido newtoniano. No obstante, esta teoría fue descartada como mecanismo generador de flujo por dos razones: *i*) la teoría no puede explicar la contra rotación entre el flujo y el campo magnético observada experimentalmente en la interface ferrofluido-aire; y *ii*) porque un estimado de η' obtenido a partir de un análisis de orden de magnitud por *Zaitsev y Shliomis* [2] y más recientemente por *Feng et al.*, [3] dan su magnitud el orden de 10^{-19} lo cual no podría generar flujo. Otra de las teorías planteadas fue propuesta por *Glazov* [4, 5] quien a partir de un análisis de flujo, en el cual tomó $\eta' = 0$ y una condición de frontera planteada por él, concluyó que el flujo observado experimentalmente, es generado por el efecto de armónicos espaciales de alto orden $m \neq 1$ (Ecn. (1.b)) producidos por imperfecciones del estátor usado para generar el campo magnético. Por consiguiente, campos magnéticos uniformes (generados por un estátor de dos polos $m = 1$ (Ecn. (1.a)) y modelados por una corriente superficial de la forma,

$$K_z(\theta, t) = \Re \left\{ K e^{j(\Omega_f - m\theta)} \right\}, \quad (1.a)$$

no pueden generar el flujo de un ferrofluido. Con el fin de verificar la validez de esta teoría, *Torres-Díaz y Rinaldi* [6] demostraron analíticamente que el flujo de un ferrofluido es cero si $\eta' = 0$, independiente del valor de m . Adicionalmente, ellos mostraron que *Glazov* obtuvo flujo en su análisis con $\eta' = 0$ como resultado de una condición de frontera incorrecta, para el campo de velocidad angular promedio de las partículas ω en la cual el ángulo fuera de fase entre los vectores de magnetización \mathbf{M} y de campo magnético \mathbf{H} incrementa con el valor de m . Aproximadamente, dos décadas después, *Rosensweig et al.*, [7] mostraron experimentalmente que la dirección de flujo de un ferrofluido puede ser cambiada respecto a la dirección de rotación del campo, cambiando la forma de la interface ferrofluido aire, es decir: contra rotación entre flujo y campo magnético para una interface cóncava y corrotación para una interfase convexa. Esta observación los

llevó a concluir que el flujo es generado por esfuerzos magnéticos superficiales más que por efectos volumétricos y que posiblemente no existiría flujo al interior del ferrofluido. Otra propuesta de mecanismo fue dada por *Shliomis* [8] quien sugirió que el flujo es generado por la disipación de calor producida por la rotación de las partículas en el líquido especialmente a altas frecuencias de rotación del campo Ω_f . Este calor liberado generaría gradientes de temperatura; que a su vez promueven gradientes en las propiedades magnéticas del ferrofluido generando fuerzas magnéticas de cuerpo que inducirían el flujo en dirección opuesta a la dirección de rotación del campo. Esta teoría fue posteriormente retomada por *Pschenichnikov et al.*, [9] quien predijo a partir de un análisis teórico que el flujo se produciría para $\Omega_f \leq 16 \text{ kHz}$ y que para el caso de bajas frecuencias y baja intensidad del campo magnético el flujo es generado por los esfuerzos superficiales en la interface ferrofluido aire. Posterior a estos trabajos *Chaves et al.*, [10] obtuvo por primera vez perfiles de velocidad al interior del ferrofluido con los cuales demostró que existen dos mecanismos que participan conjuntamente en la generación del flujo: el primero por esfuerzos volumétricos dándose al interior del ferrofluido; y el segundo por esfuerzos superficiales operando en la interface ferrofluido-aire. Esta conclusión fue obtenida a partir de los perfiles de velocidad que mostraron, que el flujo cerca de la interface fluye en la dirección contraria a la dirección de rotación del campo, mientras que el fluido al interior del recipiente (lejos de la interface) se mueve en la misma dirección del campo magnético conforme predice la teoría de DMAI. El experimento fue más allá, al mostrar que suprimiendo la interface ferrofluido-aire simplemente colocando una tapa, todo el fluido (lejos de la interface y cerca de esta) se movía en la dirección de rotación del campo magnético. Este experimento permitió mostrar que la teoría de DMAI estaba siendo evaluada de una manera incorrecta, ya que se usaban perfiles de velocidad tomados en la interface ferrofluido-aire, donde el flujo es afectado por esfuerzos superficiales para evaluar una teoría que aplica al interior del fluido. Posteriormente, a estos experimentos *Chaves et al.*, realizaron comparaciones de tipo cualitativo entre perfiles de

velocidad y predicciones de la teoría de DMAI para el flujo de un ferrofluido confinado en un contenedor cilíndrico y entre el espacio anular de dos cilindros concéntricos encontrando buen acuerdo. Por otro lado, obtuvieron un estimado del valor de η' en un rango de $10^{-8} - 10^{-12} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, el cual es aproximadamente 9 órdenes de magnitud mayor al estimado por *Zaitsev* y *Shliomis* desde un análisis dimensional. Estos experimentos también mostraron que gradientes de temperatura generados por generación de calor de los microvortices no son importantes en la generación del flujo ya que tan pronto se somete el ferrofluido a la acción del campo magnético el flujo inicia.

Se puede concluir de esta revisión del estado del arte, que cada una de las teorías propuestas ha sido evaluada comparando resultados experimentales contra las predicciones analíticas. Sin embargo, la teoría que mejor predice el comportamiento experimental es la teoría de DMAI de *Zaitsev* y *Shliomis*. No obstante, esta teoría aún requiere de más desarrollo ya que depende de coeficientes de transporte los cuales aún no han podido ser determinados como es el caso de parámetro de “*spin viscosity*” η' el cual caracteriza la difusión del momento angular interno y el parámetro de “*vortex viscosity*” ζ para el cual sólo existe una expresión para ferrofluidos en el límite de dilución infinita. Otro objeto de estudio en estos flujos ferrodinámicos, es el efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ de la ecuación de magnetización, el cual ha sido típicamente despreciado en muchos análisis con el fin de desacoplar el problema magnético del hidrodinámico y poder obtener una solución analítica. Con el objeto de estudiar el efecto de este término, *Zahn* y *Greer* [11] y posteriormente *Rinaldi* y *Zahn* [12] realizaron el análisis de flujo para un ferrofluido entre dos placas paralelas infinitamente largas por diferentes medios; los primeros resolvieron las ecuaciones ferrodinámicas numéricamente pero bajo la presunción que el término $\omega\tau \ll 1$ mientras los segundos realizaron el análisis usando el método de perturbación regular, tomando como parámetro de perturbación el producto de la escala de velocidad angular de las partículas y la escala de tiempo de relajación magnética del ferrofluido $\varepsilon \equiv \Omega\tau$. No obstante,

Rinaldi y *Zahn* no hacen una definición clara de cuál es la escala de la velocidad angular, por lo que ambos análisis son susceptibles de ser mejorados. En este sentido, en este trabajo se plantea retomar el mismo análisis planteado en los dos trabajos antes mencionados, pero usando el parámetro de perturbación obtenido por *Chaves et al.*, [13], el cual es dado por la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 \chi H^2 \tau}{\zeta}, \quad (1.b)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ es la permeabilidad magnética del vacío, χ es la susceptibilidad magnética del ferrofluido, H es la amplitud del campo magnético, τ es el tiempo efectivo de relajación de las partículas y ζ es el coeficiente fenomenológico de “*vortex viscosity*” del ferrofluido. Por tanto, este trabajo tiene como objetivo, obtener una solución para el flujo de ferrofluido entre dos placas paralelas infinitamente largas a partir de la teoría de DMAI usando como parámetro de perturbación el dado en la Ecn. (1.b) y que permita verificar el efecto del término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ sobre el campo de flujo.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1 Análisis del sistema

Como se mencionó antes, este análisis busca obtener una solución para el flujo de ferrofluido entre dos placas paralelas infinitamente largas separadas por una distancia δ . En este caso el flujo es generado por el efecto combinado de un gradiente de presión en la dirección z , y por un campo magnético uniforme que rota sobre el eje y , como es ilustrado en la Figura 1-1. En este trabajo se sigue el análisis de *Zahn y Greer* [11] para modelar el campo magnético, es decir; imponiendo un campo magnético en la dirección de z y se asume que este es generado imponiendo un campo magnético H_z y una densidad de flux magnético B_x dependientes del tiempo pero espacialmente uniforme. Dichos campos pueden ser modelados por las siguientes expresiones:

$$H_z = \Re\{h_z e^{j\Omega_f t}\}, \quad B_x = \Re\{b_x e^{j\Omega_f t}\}. \quad (1.1)$$

En las anteriores ecuaciones, \Re indica la parte real de la función compleja, h_z es la componente compleja del campo magnético en la dirección de z y b_x es la componente compleja del flux magnético en la dirección x ; j es el número imaginario definido como $j = \sqrt{-1}$. Bajo las condiciones de placas infinitamente largas, el vector de velocidad lineal y de velocidad angular de las partículas pueden ser aproximados como: $\mathbf{v} \approx v_z(x)\mathbf{i}_z$ y $\boldsymbol{\omega} \approx \omega_y(x)\mathbf{i}_y$.

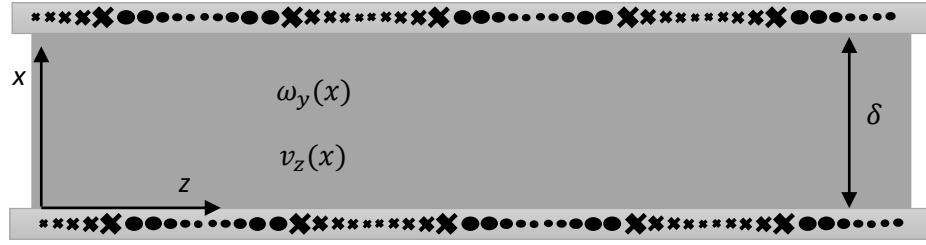


Figura 1-1: La ilustración muestra una capa de ferrofluido de espesor δ entre dos placas infinitamente largas. Los campos de velocidad traslacional v y de giro de las partículas ω es asumido que depende solo de la coordenada x . El campo magnético es modelado imponiendo un campo magnético en z y una densidad de flux magnético en x desde fuentes externas. Ambos campos son uniformes pero dependientes del tiempo.

1.2 Ecuaciones Ferrohidrodinámicas

El conjunto de ecuaciones ferrohidrodinámicas está constituido por la ecuación de continuidad para un fluido incompresible (1.2), la ecuación de momento lineal (1.3) y la ecuación de momento angular interno (1.4); ecuaciones que describen la parte hidrodinámica del problema. Adicionalmente se incluye para el problema magnético la ecuación de magnetización de *Shliomis* (1.5) y las ecuaciones de Maxwell en el límite magneto-cuasiestático (1.6).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.3)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + 4\zeta \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq}) \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 0 \quad (1.6)$$

Las condiciones de frontera para el campo magnético son: la continuidad para el componente normal de la inducción magnética $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H})$ Ecn. (1.7); y el salto

en la componente tangencial del campo magnético debido a una distribución de corriente superficial \mathbf{K} , Ecn. (1.8):

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b] = 0, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b] = \mathbf{K}, \quad (1.8)$$

Por otro lado, las condiciones de frontera para las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento es la típica condición de no deslizamiento y para el balance de momento angular interno se usa una condición generalizada llamada de deslizamiento de la velocidad angular de la partícula:

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_s = \frac{\gamma}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (1.9)$$

En la Ecn. (1.3) el segundo término del lado derecho representa la fuerza de cuerpo generada por un gradiente del campo magnético, el cuarto término tiene en cuenta la parte antisimétrica del tensor de esfuerzos que surge por la diferencia entre los vectores de vorticidad local del fluido $\left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}\right)$ y velocidad angular de rotación promedio local de las partículas $\boldsymbol{\omega}$ y que es caracterizado por el parámetro fenomenológico llamada viscosidad de vórtice ζ , para el cual *Brenner* [14] obtuvo una expresión para dispersiones coloidales en el límite de dilución infinita:

$$\zeta = 1.5 \phi_h \eta_0 \quad (1.10)$$

En la anterior ecuación, ϕ_h es la fracción volumétrica de las partículas en suspensión y η_0 es la viscosidad dinámica del fluido en el cual están suspendidas las partículas [15]. En la Ecn. (1.4), el primer término del lado derecho representa la densidad de torque magnético de cuerpo (es decir el torque generado por un campo externo) actuando sobre el momento magnético m de las partículas del ferrofluido; el segundo término, que también aparece en la ecuación de momento lineal demuestra que el esfuerzo antisimétrico es el mecanismo para transformar

momento lineal a momento angular interno y viceversa. Por último, el tercer término de la Ecn. (1.4) representa la forma en que el momento angular interno se transporta a través de un elemento diferencial de volumen por transporte molecular y que se constituye en el fenómeno principal de la teoría de difusión de momento angular interno. El parámetro que cuantifica este término es la viscosidad de rotación de las partículas o “*spin viscosity*” η' , para el cual sólo hay estimados de su magnitud que lo ponen en un orden de 10^{-19} ; y valores obtenidos por comparación de perfiles de velocidad experimentales con órdenes de magnitud que van en el orden de 10^{-9} a $10^{-12} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ y otros más recientes en el orden de $10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Esta discrepancia, en los valores de η' ha generado mucha controversia de tal forma que la teoría de DMAI ha sido rechazada por muchos investigadores entre ellos *Shliomis* [8], *Felderhof* [16], *Rosensweig* [7].

Con el fin de obtener un parámetro de perturbación ε que permita usar el método de perturbación regular para la solución de las ecuaciones ferrohídradinámicas, *Chaves et al.*, realizaron un análisis de escalas obteniendo como resultado las siguientes variables escaladas:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\chi_i \kappa}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{\kappa}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \delta \mathbf{V}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \tilde{t} = \Omega_f t \quad (1.11)$$

$$\tilde{p} = \frac{\zeta p}{\mu_0 \eta \chi_i K^2 \tilde{\Omega}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\zeta \boldsymbol{\omega}}{\mu_0 \chi_i K^2 \tilde{\Omega}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_0 \chi_i K^2 \tilde{\Omega} \delta} \quad (1.12)$$

Donde, $\tilde{\Omega} = \Omega_f \tau$ es la frecuencia adimensional. Usando las escalas (1.11) y (1.12) en las Ecn. (1.2) hasta la (1.6), y despreciando los efectos inerciales en las ecuaciones de momento lineal y angular interno se obtiene:

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\eta\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2 \frac{\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}}}{\tilde{\Omega}} + 2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (1.14)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi_i \kappa} \quad (1.15)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = 0 \quad (1.16)$$

Donde, se definió $\kappa^2 \equiv \frac{4\eta\delta^2\zeta}{\eta_e\eta'}$, $\eta_e \equiv \eta + \zeta$.

Capítulo 2

ANÁLISIS DE FLUJO

2.1 Método aplicado a las ecuaciones Ferrohodinámicas

Con el fin de usar el método de perturbación regular, se expanden cada una de las variables dependientes del problema por medio de una serie de potencias de la forma:

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\theta}_n \varepsilon^n \quad (2.1)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ representa las variables dependientes del problema $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{B}})$. Después de esto se reemplaza cada una de las variables expandidas en cada una de las ecuaciones ferrohodinámicas y sus condiciones de frontera. Posteriormente, se recolectan todos los términos de potencias iguales, obteniendo el problema de orden cero, orden uno, etc. En este método, la solución de la ecuación perturbada se acerca a la solución de la ecuación no perturbada cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2 Problema de Orden Cero

Usando el método de perturbación regular en las *Ecns.* (1.13) a (1.16), y agrupando los términos multiplicados por potencias de ε^0 se obtienen el problema de orden cero:

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\tilde{\Omega}\eta} \tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}_0 - \tilde{\nabla} \tilde{p}_0 + \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}_0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0 + 2\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}_0 - 4\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \quad (2.3)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}_0}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathbf{H}}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_0 \quad (2.4)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}}_0 + \tilde{\mathbf{H}}_0) = 0 \quad (2.5)$$

2.2.1 Problema magnético de orden cero

La solución al problema magnético fue obtenida por *Zahn* y *Greer*, sin embargo nosotros la retomamos aquí con el fin de explicar la metodología. Usando las escalas definidas en la Ecn. (1.11) en la Ecn. (1.1) se obtiene:

$$\tilde{H}_z(t) = \Re \{ \tilde{h}_z e^{j\tilde{t}} \}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{B}_x(t) = \Re \{ \tilde{b}_x e^{j\tilde{t}} \}, \quad (2.7)$$

La dependencia funcional de \tilde{H}_z y \tilde{B}_x con la suposición que la película de fluido es infinitamente larga en las direcciones y y z satisface las leyes de *Ampère* y *Gauss*:

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = -\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{x}} \mathbf{i}_y = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (2.9)$$

Por otro lado la magnetización generada por los campos impuestos hace que \tilde{H}_z y \tilde{B}_x dependan de la coordenada x . Estos argumentos permiten asumir que los vectores $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{M}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ tienen la forma funcional:

$$\tilde{\mathbf{H}}_0(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{h}_{x,0}(x) \mathbf{i}_x + \tilde{h}_{z,0}(x) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_0(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{m}_{x,0}(x) \mathbf{i}_x + \tilde{m}_{z,0}(x) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_0(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{b}_{x,0}(x) \mathbf{i}_x + \tilde{b}_{z,0}(x) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.12)$$

Donde \tilde{m}_x y \tilde{m}_z son las componentes complejas de magnetización. Reemplazando las Ecn. (2.10) y (2.11) en la ecuación de magnetización (2.4), se obtiene el sistema algebraico

$$\tilde{\Omega}j\tilde{m}_{x,0} = \tilde{h}_{x,0} - \tilde{m}_{x,0} \quad (2.13)$$

$$\tilde{\Omega}j\tilde{m}_{z,0} = \tilde{h}_{z,0} - \tilde{m}_{z,0} \quad (2.14)$$

cuya solución es,

$$\tilde{m}_{x,0}(x) = \frac{\tilde{h}_{x,0}(x)}{1 + j\tilde{\Omega}} \quad (2.15)$$

$$\tilde{m}_{z,0} = \frac{\tilde{h}_{z,0}}{1 + j\tilde{\Omega}} \quad (2.16)$$

La componente compleja del campo magnético en dirección x , puede ser obtenida usando la expresión adimensional del vector de densidad de flux magnético ($\tilde{\mathbf{B}} = \chi\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}$), y la Ecn. (2.15) obteniendo:

$$\tilde{h}_{x,0} = \frac{\tilde{b}_{x,0}(1 + j\tilde{\Omega})}{\chi + 1 + j\tilde{\Omega}} \quad (2.17)$$

En conclusión los vectores de campo magnético y de magnetización son uniformes para el problema de orden cero.

2.2.2 Fuerza magnética y densidad de torque magnético para el problema de orden cero

De las Ecn. (2.17) es fácil notar que el campo magnético para el orden cero es uniforme por tanto el vector de fuerza magnética es cero $\tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{0}$. No obstante, existe la componente y de la densidad de torque magnético la cual es dada por la expresión:

$$\tilde{l}_{y,0} = \tilde{H}_{x,0}\tilde{M}_{z,0} - \tilde{H}_{z,0}\tilde{M}_{x,0} \quad (2.18)$$

Luego considerando las componentes en las *Ecns.* (2.10) y (2.11), se reemplazan en (2.18), donde se obtiene

$$\tilde{l}_{y,0} = \Re\{\tilde{h}_{x,0}e^{j\tilde{t}}\}\Re\{\tilde{m}_{z,0}e^{j\tilde{t}}\} - \Re\{\tilde{h}_{z,0}e^{j\tilde{t}}\}\Re\{\tilde{m}_{x,0}e^{j\tilde{t}}\} \quad (2.19)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, el torque es dependiente del tiempo, mientras que los respectivos términos inerciales de las *Ecns* (2.2) y (2.3) han sido despreciados teniendo en cuenta que el flujo es de bajo número de Reynolds y el momento de inercia de las partículas magnéticas es pequeño. Por este motivo se usó el promedio en el tiempo de la componente y de la densidad del torque magnético para la cual se utilizó la identidad dada por *Melcher* [17] para el obtener el promedio espacial o temporal de dos funciones periódicas escritas en forma de funciones complejas:

$$\Re\{ae^{j\omega t}\}\Re\{be^{j\omega t}\} = \frac{1}{4}(ab^* + a^*b) \quad (2.20)$$

donde el superíndice asterisco denota el conjugado de la función compleja. Se utiliza también la ecuación de densidad de flux magnético (2.12) para obtener la expresión para el torque magnético $\langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t$

$$\langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t = -\frac{j\tilde{\Omega}\left[\left(1+\chi+\tilde{\Omega}^2-j\chi\tilde{\Omega}\right)\tilde{h}_{z,0}\tilde{b}_{x,0}^*-j\left(1+\chi-j\tilde{\Omega}\right)\left(-j+\tilde{\Omega}\right)\tilde{h}_{z,0}^*\tilde{b}_{x,0}\right]}{2\left(\tilde{\Omega}^2+1\right)\left[\left(1+\chi\right)^2+\tilde{\Omega}^2\right]} \quad (2.21)$$

Tomando $\tilde{h}_z = -1$ y $\tilde{b}_x = j$ se obtiene la expresión promediada en el tiempo para densidad de torque magnético del problema de orden cero:

$$\langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t = \frac{\tilde{\Omega}\left(1+\chi+\tilde{\Omega}^2\right)}{\left(\tilde{\Omega}^2+1\right)\left[\left(\chi+1\right)^2+\tilde{\Omega}^2\right]} \quad (2.22)$$

2.2.3 Problema hidrodinámico de orden cero

Teniendo en cuenta las suposiciones anteriormente mencionadas, la componente (z) del momento lineal y la componente (y) del momento angular interno son:

$$\frac{\eta_e}{\eta} \frac{d^2 \tilde{v}_{z,0}}{d\tilde{x}^2} + \frac{2\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_{y,0}}{d\tilde{x}} - \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \frac{d^2 \tilde{\omega}_{y,0}}{d\tilde{x}^2} - 2 \frac{d\tilde{v}_{z,0}}{d\tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_{y,0} + \frac{1}{\tilde{\Omega}} \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t = 0, \quad (2.24)$$

Como se puede observar de la Ecn. (2.23), se asume que el flujo es generado también por un gradiente de presión constante actuando en la dirección del flujo. Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones se integra la ecuación de momento lineal obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{d\tilde{v}_{z,0}}{d\tilde{x}} = \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} \right) \frac{\eta}{\eta_e} \tilde{x} - \frac{2\zeta}{\eta_e} \tilde{\omega}_{y,0} + \frac{\eta}{\eta_e} C_1 \quad (2.25)$$

La anterior expresión es ahora remplazada en la ecuación (2.24) para obtener una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes para la velocidad angular promedio de las partículas

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}_{y,0}}{d\tilde{x}^2} - \kappa^2 \tilde{\omega}_{y,0} = -\frac{\eta_e \kappa^2 \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t}{4\eta \tilde{\Omega}} + \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} \right) \tilde{x} + \frac{\kappa^2}{2} C_1 \quad (2.26)$$

cuya solución es:

$$\tilde{\omega}_{y,0}(\tilde{x}) = C_2 \text{Sinh}(\tilde{x}\kappa) + C_3 \text{Cosh}(\tilde{x}\kappa) - \frac{\tilde{x}}{2} \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} \right) + \frac{\eta_e \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t}{4\eta \tilde{\Omega}} - \frac{C_1}{2} \quad (2.27)$$

Introduciendo la Ecn. (2.27) en la Ecn. (2.25) e integrando de nuevo, se obtiene el perfil de velocidad translacional en la dirección de z :

$$\tilde{v}_{z,0}(\tilde{x}) = \frac{2\zeta}{\eta_e \kappa} [C_3 \text{Sinh}(\tilde{x}\kappa) - C_2 \text{Cosh}(\tilde{x}\kappa)] + \frac{\tilde{x}^2}{2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} + \tilde{x} \left(C_1 - \frac{\zeta \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t}{2\eta \tilde{\Omega}} \right) + C_4 \quad (2.28)$$

Por último, las constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4 , son obtenidas usando las condiciones de frontera

$$\tilde{x} = 0, \tilde{v}_{z,0} = 0, \tilde{\omega}_{y,0} = 0 \quad (2.29)$$

$$\tilde{x} = 1, \tilde{v}_{z,0} = 0, \tilde{\omega}_{y,0} = 0 \quad (2.30)$$

en las *Ecns* (2.27) y (2.28). Las expresiones resultantes para las constantes de integración se presentan en el anexo A.

2.3 Problema de Primer orden

Las ecuaciones ferrohodinámicas a resolver para el problema de primer orden son obtenidas agrupando los términos que tengan como coeficiente el parámetro ε^1 obteniendo:

$$0 = \frac{\zeta}{\tilde{\Omega}\eta} (\tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{H}}_0) - \tilde{\mathbf{V}}\tilde{p}_1 + \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\mathbf{V}}^2 \tilde{\mathbf{v}}_1 \quad (2.31)$$

$$0 = \frac{1}{\tilde{\Omega}} (\tilde{\mathbf{M}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_0) + 2\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{v}}_1 - 4\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\mathbf{V}}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \quad (2.32)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}_1}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{M}}_0 = \tilde{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \tilde{\mathbf{M}}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_1 + \tilde{\mathbf{H}}_1 + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_0}{10} |\tilde{\mathbf{H}}_0|^2 \quad (2.33)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{V}} \cdot (\chi_i \tilde{\mathbf{M}}_1 + \tilde{\mathbf{H}}_1) = 0 \quad (2.34)$$

En las anteriores ecuaciones de nuevo se deprecia los términos inerciales de las ecuaciones de balance de momento lineal y angular interno. Adicionalmente aquí resaltamos que el último término del lado derecho de la ecuación (2.33) surge de expandir la expresión de *Langevin* a una serie de potencias, con el fin de introducir el efecto de campos magnéticos altos conforme aumenta el orden del problema y entonces obtener una mejor aproximación.

2.3.1 Problema magnético de primer orden

Se procede a resolver el problema magnético de primer orden, similarmente como se hizo para el orden cero. Para esto asumimos ahora una forma funcional similar a la usada para el problema de orden cero, es decir:

$$\tilde{\mathbf{H}}_1(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{h}_{x,1}(x) \mathbf{i}_x + \tilde{h}_{z,1} \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_1(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{m}_{x,1}(x) \mathbf{i}_x + \tilde{m}_{z,1}(x) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1(x, t) = \Re \left\{ \left[\tilde{b}_{x,1} \mathbf{i}_x + \tilde{b}_{z,1}(x) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (2.37)$$

No obstante, cuando se evalúa el último término del lado derecho de la ecuación de magnetización de *Shliomis* (Ecn. (2.33)) se obtienen las siguientes expresiones para la componente x :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{x,0} \left(\tilde{H}_{x,0}^2 + \tilde{H}_{z,0}^2 \right) &= \frac{\chi^2}{10 \left((1+\chi)^2 + \tilde{\Omega}^2 \right)^5} \left\{ \tilde{\Omega} \right. \\ &\left. \left(- (1+\chi)^4 \left(\chi^2 (4+\chi) - 8 \right) - (1+\chi)^2 \left(-12 + \chi (\chi (4+3\chi) - 16) \right) \right) \tilde{\Omega}^2 \right. \\ &\left. + \left(24 + \chi (64 + (36 - 5\chi) \chi) \right) \tilde{\Omega}^4 + 8(1+2\chi) \tilde{\Omega}^6 \right\} \text{Cos}(5t) \\ &- \left. \left((1+\chi)^5 (2+\chi)^2 + (1+\chi)^3 \left(8 + \chi (32 + \chi (15+\chi)) \right) \right) \tilde{\Omega}^2 \right. \\ &\left. + 5\chi(1+\chi)(8 + \chi(11+2\chi)) \tilde{\Omega}^4 + \left(\chi(8+21\chi) - 8 \right) \tilde{\Omega}^6 - 4\tilde{\Omega}^8 \right\} \text{Sin}(5t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Y para la componente z :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{z,0} \left(\tilde{H}_{x,0}^2 + \tilde{H}_{z,0}^2 \right) &= \frac{\chi^2}{10 \left((1+\chi)^2 + \tilde{\Omega}^2 \right)^4} \\ &\left\{ - \left[(1+\chi)^4 (2+\chi)^2 + 2(1+\chi)^2 (2+\chi(8+3\chi)) \right] \tilde{\Omega}^2 + (-4 + \chi(4+9\chi)) \tilde{\Omega}^6 \right\} \text{Cos}(5t) \\ &- 4\tilde{\Omega} (1+\chi + \tilde{\Omega}^2) \left((1+\chi)^2 (2+\chi) + (2+3\chi) \tilde{\Omega}^2 \right) \text{Sin}(5t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por tanto este resultado nos dice que se debe tener en cuenta el quinto armónico en la forma funcional de los vectores de magnetización y campo magnético. Aunque

esto puede hacerse, el problema se torna complicado por lo que se tomará solo el primer término de la expansión de serie de potencias haciendo el análisis estrictamente valido para intensidades del campo magnético que tienden a cero. Teniendo en cuenta lo anterior las componentes x y z de la ecuación de magnetización son:

$$\tilde{\Omega} \frac{d\tilde{M}_{x,1}}{d\tilde{t}} = \tilde{\Omega} \tilde{M}_{z,0} \tilde{\omega}_{y,0} + \tilde{H}_{x,1} - \tilde{M}_{x,1}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{d\tilde{M}_{z,1}}{d\tilde{t}} = -\tilde{\Omega} \tilde{M}_{x,0} \tilde{\omega}_{y,0} + \tilde{H}_{z,1} - \tilde{M}_{z,1}, \quad (2.41)$$

Usando las *Ecns.* (2.10) y (2.11) en las anteriores ecuaciones, se obtiene el siguiente sistema algebraico

$$\tilde{\Omega} j \tilde{m}_{x,1} = \tilde{\omega}_{y,0} \tilde{m}_{z,0} - \tilde{m}_{x,1} + \tilde{h}_{x,1}, \quad (2.42)$$

$$\tilde{\Omega} j \tilde{m}_{z,1} = -\tilde{\omega}_{y,0} \tilde{m}_{x,0} - \tilde{m}_{z,1} + \tilde{h}_{z,1}, \quad (2.43)$$

del cual se pueden obtener las siguientes expresiones para las componentes de la magnetización y del campo magnético para el problema de primer orden:

$$\tilde{m}_{z,1}(x) = \frac{j \{1 + \chi + j\tilde{\Omega} [1 + \tilde{\omega}_{y,0}(x)]\}}{(1 + \chi + j\tilde{\Omega})(\tilde{\Omega} - j)} \quad (2.44)$$

$$\tilde{h}_{x,1}(x) = \frac{\tilde{\Omega}^2 - 1 + j\tilde{\Omega} [-2 + \chi \tilde{\omega}_{y,0}(x)]}{(1 + \chi + j\tilde{\Omega})(\tilde{\Omega} - j)} \quad (2.45)$$

$$\tilde{m}_{x,1}(x) = \frac{1 + j\tilde{\Omega} [1 + \tilde{\omega}_{y,0}(x)]}{(1 + \chi + j\tilde{\Omega})(\tilde{\Omega} - j)} \quad (2.46)$$

Para obtener la *Ecn* (2.46) se usó la expresión $\tilde{b}_{x,1} = \chi \tilde{m}_{x,1} + \tilde{h}_{x,1}$. Es de notar que a diferencia del orden cero, para el orden uno las componentes de la magnetización así como la componente x del campo magnético son dependientes de la coordenada x como consecuencias que ahora la ecuación de magnetización tiene en cuenta el término $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{M}_0$.

2.3.2 Fuerza Magnética y densidad de torque magnético para el problema de primer orden

Teniendo en cuenta que el campo magnético para el orden cero es uniforme, la forma vectorial de densidad de fuerza magnética se reduce a

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}_1 = \tilde{M}_{x,0} \frac{d\tilde{H}_{x,1}}{d\tilde{x}} \mathbf{i}_x \quad (2.47)$$

No obstante, la componente x de la fuerza no contribuye a la generación de flujo. Por otro lado, la densidad de torque magnético está dado ahora por la expresión:

$$\tilde{\mathbf{l}}_1 = \tilde{\mathbf{M}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_0 \quad (2.48)$$

Aunque no se extenderá en el procedimiento matemático para el cálculo del torque ya que es el mismo que se aplicó en el problema de orden cero se da la expresión final obtenida para este:

$$\langle \tilde{l}_{y,1} \rangle_t = 2 \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t - \Phi \tilde{\omega}_{y,0}(\tilde{x}) \quad (2.49)$$

Donde $\langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t$ es el torque para el orden cero definido en la *Ecn.* (2.22) y Φ es una constante definida como,

$$\Phi = \frac{[2 + \chi(2 + \chi) - 2\tilde{\Omega}^2] \tilde{\Omega}}{2(1 + \tilde{\Omega}^2)[(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}^2]} \quad (2.50)$$

Se observa que la *Ecn.* (2.49) es dependiente del momento angular interno del sistema de orden cero, lo que quiere decir que el torque para el primer orden es dependiente de la posición.

2.3.3 Problema hidrodinámico de primer orden

Considerando que la solución del sistema de primer orden se halla de igual forma como se realizó en el orden cero, se omitirán algunos sencillos pasos, pero si se nombraran los que tienen importancia en esta solución.

Considerando que el gradiente de presión del sistema de primer orden es el mismo que el de orden cero, se procede a hallar la primera integral de la ecuación de momento lineal,

$$-(\nabla \times \mathbf{v})_y = \frac{d\tilde{v}_{z,1}}{d\tilde{x}} = \frac{\eta}{\eta_e} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} \tilde{x} - \frac{2\zeta}{\eta_e} \tilde{\omega}_{y,1} + \frac{\eta}{\eta_e} C_5 \quad (2.51)$$

Esta se reemplaza en la ecuación de momento angular interno para obtener la siguiente ecuación,

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}_{y,1}}{d\tilde{x}^2} - \kappa^2 \tilde{\omega}_{y,1} = \frac{\kappa^2}{2} C_5 + \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} \right) \tilde{x} - \frac{\eta_e \kappa^2}{4\eta \tilde{\Omega}} \langle \tilde{l}_{y,1} \rangle_t \quad (2.52)$$

Comparando con la ecuación para el orden cero, vemos que se obtiene la misma ecuación diferencial pero con una diferente función de forzamiento. Por tanto la solución particular de la ecuación es también la misma de la ecuación (2.26) siendo diferente solo en la solución de la parte no homogénea. La solución de la Ecn. (2.52) es:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{y,1} = & \frac{1}{16\eta^2 \tilde{\Omega}^2} \{ \langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t \eta_e (8\eta \tilde{\Omega} - \eta_e \Phi) + 2\eta \tilde{\Omega} \left[C_1 \eta_e \Phi - 4C_5 \eta \tilde{\Omega} + \tilde{x} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} (\eta_e \Phi - 4\eta \tilde{\Omega}) \right] \\ & + \eta \tilde{\Omega} (2C_2 \tilde{x} \eta_e \kappa \Phi - C_3 \eta_e \Phi + 16C_7 \eta \tilde{\Omega}) \text{Cosh}(\tilde{x}\kappa) + \eta \tilde{\Omega} (2C_3 \tilde{x} \eta_e \kappa \Phi - C_2 \eta_e \Phi \\ & + 16C_6 \eta \tilde{\Omega}) \text{Sinh}(\tilde{x}\kappa) \} \quad (2.53) \end{aligned}$$

Con el fin de obtener el perfil de velocidad lineal para el problema de orden uno, se reemplaza la Ecn. (2.53) en la Ecn. (2.51) y se integra para obtener

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{z,1}(\tilde{x}) = & \frac{1}{8\eta^2\eta_e\kappa\tilde{\Omega}^2} \left\{ \tilde{x}\kappa \left[\left\langle \tilde{l}_{y,0} \right\rangle_t \zeta\eta_e(\eta_e\Phi - 8\eta\tilde{\Omega}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \eta\eta_e\tilde{\Omega} \left(8C_5\eta\tilde{\Omega} - 2C_7\zeta\Phi + \tilde{x} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} (4\eta\tilde{\Omega} - \zeta\Phi) \right) \right] \right. \\
& \left. + \zeta\eta\tilde{\Omega} \left[\left(3C_2\eta_e\Phi - 2(C_3\tilde{x}\eta_e\kappa\Phi + 8C_6\eta\tilde{\Omega}) \right) \text{Cosh}(\tilde{x}\kappa) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(3C_3\eta_e\Phi - 2(C_2\tilde{x}\eta_e\kappa\Phi + 8C_7\eta\tilde{\Omega}) \right) \text{Sinh}(\tilde{x}\kappa) \right] \right\} + C_8
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Con el fin de obtener las constantes C_5, C_6, C_7 y C_8 usamos las condiciones de frontera de no deslizamiento para el problema de orden uno:

$$\tilde{x} = 0, \tilde{v}_{z,1} = 0, \tilde{\omega}_{y,1} = 0 \tag{2.55}$$

$$\tilde{x} = 1, \tilde{v}_{z,1} = 0, \tilde{\omega}_{y,1} = 0 \tag{2.56}$$

Usando el software de *MATHEMATICA*® 9.0, se obtienen el valor de las constantes las cuales dependen también de las de orden cero, y sus valores se presentan en el anexo B.

Capítulo 3

RESULTADOS Y ANÁLISIS

3.1 Análisis de los perfiles de velocidad lineal y angular

En la Figura 3-1, se presentan los resultados de las soluciones de orden cero y uno para los perfiles de velocidad angular de las partículas y de velocidad lineal con gradiente de presión igual a cero. Los perfiles fueron obtenidos usando las propiedades físicas y magnéticas reportadas por Torres-Díaz *et al.*, [6] para un ferrofluido de ferrita cobalto (Tabla 3-1) y un valor de $k = 10$ y $e = 0.108$.

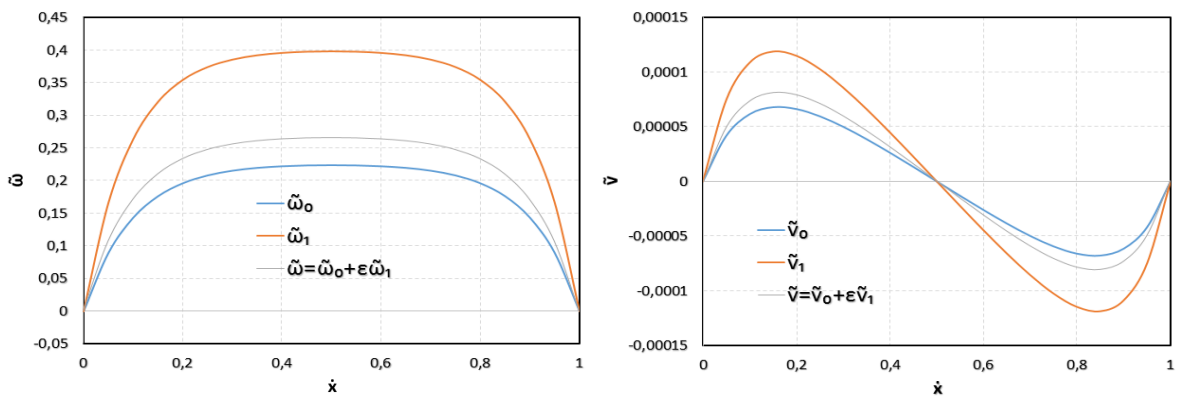


Figura 3-1: Perfiles para la velocidad angular promedio de las partículas y la velocidad translacional para los análisis de orden cero, uno y la solución asintótica compuesta obtenidas por el método de perturbación regular con $e = 0.108$ y $k = 10$ obtenidas con las propiedades de un ferrofluido de ferrita de cobalto en agua.

Propiedades Físicas	η (m·Pa·s)	η_0 (m·Pa·s)	ϕ	χ_i	τ (s)	D_p (nm)
WBF-1	1.03	1.02	0.213	0.106	1.67×10^{-5}	14.3

Tabla 3-1: Propiedades físicas del ferrofluido ferrita cobalto en agua. Obtenida de la referencia [6]

Como se puede ver de la figura, el análisis predice flujo del ferrofluido por la acción del campo magnético rotativo. De ambos perfiles, el angular y lineal, se puede observar que la única diferencia entre el orden cero y uno consiste en la magnitud de la respectiva velocidad, no obstante las características cualitativas de los perfiles se mantiene para cada orden. Adicionalmente el perfil de velocidad combinado resulta ser parecido en magnitud al del orden cero en virtud del pequeño valor del parámetro de perturbación. Por otro lado, es claro que obtener una solución para el problema de segundo orden solo incrementará la magnitud del flujo en un valor de magnitud despreciable debido a que el próximo término estaría multiplicado por e^2 lo que hace innecesario resolver el problema de segundo orden. El hecho de solamente necesitar un par de términos para obtener una buena aproximación del problema, es una de las principales cualidades del método de perturbación regular.

En cuanto a las características del flujo, los perfiles de velocidad lineal muestran que el flujo se dirige en la dirección positiva de z para valores de $0 \leq \tilde{x} \leq 0.5$ y en la dirección contraria para valores de \tilde{x} entre 0.5 y 1. Este contraflujo generado puede ser explicado usando el balance de momento angular interno de la siguiente forma: sobre las superficies de las placas la velocidad angular de las partículas es cero debido a la condición de frontera usada, por lo que el momento angular interno es balanceado por la vorticidad del fluido. Ya que el momento angular interno es positivo, la vorticidad es positiva cerca de ambas superficies y la única forma de que esto se dé es que la velocidad del fluido sea negativa en la vecindad de $x = \delta$ y positiva en los alrededores de $x = 0$.

En la Figura 3-2, se muestra el efecto del parámetro adimensional κ , el cuál es inversamente proporcional al coeficiente de *spin viscosity* a través de la definición:

$$\kappa^2 \equiv \frac{4\eta\delta^2\zeta}{\eta_e\eta'}$$

Tal parámetro resulta ser de importancia para análisis de flujo de ferrofluido, pues como se observa en la Figura 3-2, cuando no existe gradiente de presión, a medida

que disminuye el *spin viscosity* (lo que hace que κ aumente) se crea un perfil de velocidad de forma senosoidal entre las placas, hasta que se llega a un máximo punto en magnitud donde este perfil decae y se encuentra dirigido cada vez más cerca hacia las paredes de las placas. Cabe resaltar que cuando el parámetro κ tiende a cero ($\eta' \rightarrow \infty$), no se crea un perfil de velocidad, puesto que la viscosidad del fluido es tan grande que no permite que las nanopartículas roten y no se genere flujo lo cual va de acuerdo con la teoría de Difusión del Momento Angular Interno (DMAI).

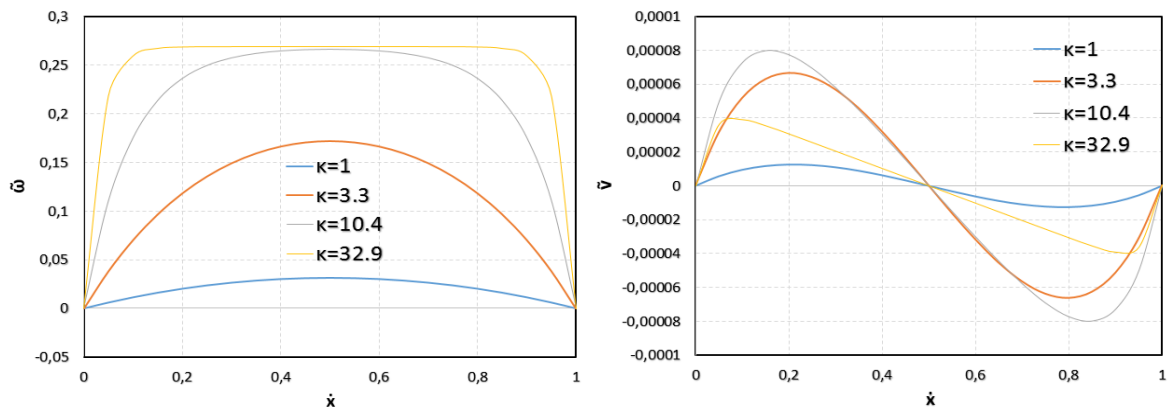


Figura 3-2: Perfiles de momento angular de las partículas y velocidad lineal del ferrofluido para diferentes valores del parámetro κ con $H = 0.5 \text{ mT}$, $\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} = 0$ y $\Omega_f = 150 \text{ Hz}$.

En la Figura 3-3, se presenta el perfil de velocidad del sistema compuesto según va teniendo en cuenta el efecto del gradiente de presión.

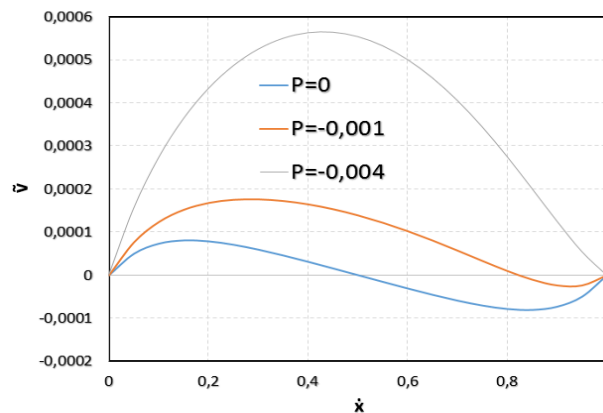


Figura 3-3: Perfil de \tilde{v} compuesta ($\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \varepsilon\tilde{v}_1$) obtenidos por el método de perturbación regular para diferentes valores de $\frac{d\tilde{p}}{dz}$ con $H = 0.5 \text{ mT}$, $\kappa = 10$ y $\Omega = 150 \text{ Hz}$ con un campo magnético rotatorio.

De esta figura, se puede observar que el flujo generado por el campo magnético es fácilmente opacado por el gradiente de presión, cambiando la forma del perfil de velocidad hasta llegar a una forma similar al obtenido por el flujo entre dos placas sin campo magnético.

Se hicieron graficas (Figura 3-4) de los perfiles de velocidad para evaluar el efecto de la frecuencia de rotación del campo y del campo magnético sobre el flujo.

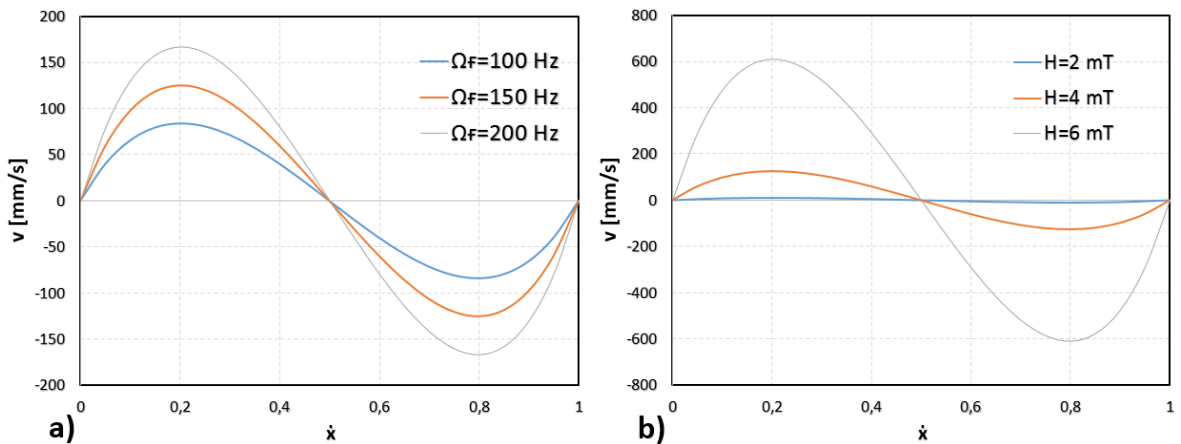


Figura 3-4: Perfiles de velocidad para diferentes valores de a) frecuencia Ω_f con $\kappa = 3.3$ y $H = 4 \text{ mT}$ y b) amplitud del campo magnético H con $\kappa = 3.3$ y $\Omega_f = 150 \text{ Hz}$.

De las anteriores graficas se puede observar que a medida que aumenta el campo magnético o la frecuencia del sistema, también lo hace el perfil de velocidad en magnitud puesto que las nanopartículas se sentirán más susceptibles a estos aumentos.

Por último, se realizó una comparación cualitativa con los perfiles de velocidad obtenidos por *Zanh* y *Greer*, encontrando buen acuerdo con ellos. No obstante, un estudio del efecto del término $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M})$ no puede ser realizado a cabalidad ya que el parámetro de perturbación multiplica este término en la ecuación de magnetización,

haciéndolo aún despreciable en comparación a los otros términos de la ecuación. Un análisis del efecto de este término solo podría ser llevado a cabo en soluciones validas a campos altos donde dicho término es relevante haciendo necesario una solución de tipo numérica. Por otro lado, la solución obtenida en este trabajo diverge de la solución obtenida por *Rinaldi y Zahn* [12] ya que su solución involucra funciones de senos y cosenos, mientras las de este análisis y el presentado por *Zahn y Greer* [11] involucran funciones hiperbólicas o exponenciales. Esto último posiblemente a las escalas obtenidas en su análisis.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

- Las soluciones obtenidas en este proyecto fueron realizadas utilizando el método de perturbación regular, con el cual se presenta un buen acuerdo cualitativo con respecto a la referencia [11].
- Se obtuvo una solución asintótica para el flujo de ferrofluido entre dos placas infinitamente largas inducido por un campo magnético. Los perfiles de velocidad lineal predicen contraflujo del ferrofluido situación muy diferente al flujo obtenido para un fluido no estructurado movido por un gradiente de presión.
- Se confirma una vez más que la teoría de DMAI predice el flujo del ferrofluido bajo las condiciones antes descritas. No obstante, la solución obtenida es restringida al caso de amplitudes del campo magnético que tiende a cero debido a la necesidad de incluir armónicos de alto orden en la forma funcional del campo magnético y la magnetización haciendo la solución más compleja.

Capítulo 5

RECOMENDACIONES

- Para determinar el efecto del término $(\omega \times \mathbf{M})$ requeriría obtener más términos de la solución asintótica por lo que se recomienda abordar este estudio desde una solución numérica.
- Se recomienda realizar un diseño experimental que permita validar las predicciones de la teoría de DMAI.

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Moskowitz, R., y R. Rosensweig. Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. *Applied Physics Letters* vol. 11, no. 10, 1967, p. 301-303.
- [2] Zaitsev, V. M., y Mark I. Shliomis. Entrainment of Ferromagnetic suspension by a rotating field. *Journal of Applied Mechanics and Technical and Physics*, 1969, p. 696-700.
- [3] Feng, S., A. Graham, J. Abbott, y H. Brenner. Antisymmetric stresses in suspensions: Vortex viscosity and energy dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006.
- [4] Glazov, O. A. Role of higher in ferrosuspension motion in a rotating magnetic field. *Magnitnaya Gidrodinamika*, 1975.
- [5] Glazov, O. A. Velocity profiles for magnetic fluids in rotating magnetic fields. *Magnitnaya Gidrodinamika*, 1982.
- [6] Torres Diaz, Isaac, y Carlos Rinaldi. Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field. *physics of fluids*. vol. 22, 2011.
- [7] Rosensweig, R. E., J. Popplewell, y R. J. Johnston. Magnetic Fluid motion in rotating field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1990, p. 171-180.
- [8] Shliomis, M. I. Stability of a fluid simultaneously rotated and heated from below against the timeperiodical perturbation. *Applied Math. and Mech.*, 1962, p. 267-272.
- [9] Pshenichnikou, A. F., A. V. Lebedev, y M. I. Shliomis. On the rotating Effect in Nonuniform Magnetic Fluids. *Magneto hydrodynamics*, 2000, p. 339-346.
- [10] Chaves Guerrero, Arlex, Carlos Rinaldi, S. Elborai, X. He, y M. Zahn. Bulk Flow in Ferrofluids in a Uniform Rotating Magnetic Field. *Physica Review Letters*, 2006.
- [11] Zahn, Marcus, y Donald Greer R. Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1995, p. 165-173.
- [12] Rinaldi, Carlos, y Markus Zahn. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *PHYSICS OF FLUIDS*. vol. 8, 2002, p. 2847-2870.

- [13] Chaves, Arlex, Markus Zahn, y Carlos Rinaldi. Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements. *Physics of Fluids*, 2008.
- [14] Brenner, H. Rheology of two-phase systems. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1970, p. 137-176.
- [15] Peña Cruz, Victor Alfonso, y Arlex Chaves Guerrero. Solución numperica para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotativo en el límite de cero amplitud del campo. Bucaramanga, 2011.
- [16] Felderhof, B. U. Entrainment by a rotating magnetic field of a ferrofluid contained in a sphere. *Physical Review E*, vol. 84, 2011.
- [17] Melcher, James R. *Continuum Electromechanics*. Massachusetts: MIT Press, 1981.

BIBLIOGRAFÍA

A. Franklin, Thomas. Ferrofluids Flow Phenomena. Massachusetts Institute of Technology, 2003.

Brenner, H. Rheology of two-phase systems. Annual Review of Fluid Mechanics, 1970, p. 137-176.

Chaves Guerrero, Arlex, Carlos Rinaldi, S. Elborai, X. He, y M. Zahn. Bulk Flow in Ferrofluids in a Uniform Rotating Magnetic Field. Physica Review Letters, 2006.

Chaves, Arlex, Markus Zahn, y Carlos Rinaldi. Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements. Physics of Fluids, 2008.

Chaves, Arlex, y Carlos Rinaldi. Interfacial Stress Balances in Structured Continua and Free Surface Flows in Ferrofluids. Bucaramanga, 2013.

Felderhof, B. U. Entrainment by a rotating magnetic field of a ferrofluid contained in a sphere. Physical Review E, vol. 84, 2011.

Feng, S., A. Graham, J. Abbott, y H. Brenner. Antisymmetric stresses in suspensions: Vortex viscosity and energy dissipation. Journal of Fluid Mechanics, 2006.

Glazov, O. A. Role of higher in ferrosuspension motion in a rotating magnetic field. Magnitnaya Gidrodinamika, 1975.

Glazov, O. A. Velocity profiles for magnetic fluids in rotating magnetic fields. Magnitnaya Gidrodinamika, 1982.

Hajiani, Pouya, y Faiçal Larachi . Ferrofluid Applications in Chemical Engineering. International Review of Chemical Engineering, Mayo, 2009, p. 221-237.

Hernando, A., P. Crespo, y M. A. García. Origin of Orbital Ferromagnetism and Giant Magnetic Anisotropy at the Nanoscale. Physica Review Letters, 2006.

Lehnlöcher, A. F., S. H. Mahmood, y J. M. Williams. On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant. Physica B. vol. 321, 2002, p. 159-162.

Melcher, James R. Continuum Electromechanics. Massachusetts: MIT Press, 1981.

Moskowitz, R., y R. Rosensweig. Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. Applied Physics Letters vol. 11, no. 10, 1967, p. 301-303.

Peña Cruz, Victor Alfonso, y Arlex Chaves Guerrero. Solución numérica para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotativo en el límite de cero amplitud del campo. Bucaramanga, 2011.

Pshenichnikou, A. F., A. V. Lebedev, y M. I. Shliomis. On the rotating Effect in Nonuniform Magnetic Fluids. *Magneto hydrodynamics*, 2000, p. 339-346.

Rinaldi, Carlos. "Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxation times of ferrofluids," Personal Communication. 2005.

Rinaldi, Carlos, Arlex Chaves, Shihab Elborai, Xiaowei (Tony) He, y Markus Zahn. *Magnetic fluid rheology and flows*. Elsevier, 2005, p. 141-157.

Rinaldi, Carlos, y Markus Zahn. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *PHYSICS OF FLUIDS*. vol. 8, 2002, p. 2847-2870.

Rosensweig, R. E., J. Popplewell, y R. J. Johnston. Magnetic Fluid motion in rotating field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1990, p. 171-180.

Rosenthal, A. D., Carlos Rinaldi, T. Franklin, y M. Zahn. Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids. *Journal of Fluids Engineering*. vol. 126, 2004, p. 198-205.

Shingareva, Inna, Martín G. García A., y José Ítalo Sánchez Gil. XXIV Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. 2007. <http://semana.mat.uson.mx/semanaxxiv/>.

Shliomis, M. I. Stability of a fluid simultaneously rotated and heated from below against the timeperiodical perturbation. *Applied Math. and Mech.*, 1962, p. 267-272.

Torres Diaz, Isaac, y Carlos Rinaldi. Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field. *physics of fluids*. vol. 22, 2011.

Zahn, Marcus, y Donald Greer R. Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1995, p. 165-173.

Zahn, Markus , y Loretta L. Pioch. Ferrofluid flows in AC and traveling wave magnetic fields with effective positive, zero or negative dynamic viscosity. *ELSEVIER*, 1999, p. 144-148.

Zaitsev, V. M., y Mark I. Shliomis. Entrainment of Ferromagnetic suspension by a rotating field. *Journal of Applied Mechanics and Technical and Physics*, 1969, p. 696-700.

Zaitzev, V. M., y M. I. Shliomis. Hydrodynamics of ferromagnetic fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, p. 24-26.

ANEXO A

Por no hacer tan extensas las Constantes, los términos nombrados como $\langle \tilde{l}_{y,0} \rangle_t$ y $\frac{d\tilde{p}_z}{d\tilde{z}}$ se nombraran como $\tilde{l}_{y,0}$ y P respectivamente.

Constantes de integración de los perfiles de cantidad de movimiento lineal y momento angular interno para el orden cero.

$$C_1 = \frac{1}{\left(4\zeta\eta\tilde{\Omega}(\text{Cosh}[\kappa]-1) - 2\eta\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\text{Sinh}[\kappa]\right)} (2\zeta(\tilde{l}_{y,0}\eta_e - P\eta\tilde{\Omega})(\text{Cosh}[\kappa]-1) + \eta_e\kappa(P\eta\tilde{\Omega} - \tilde{l}_{y,0}\zeta)\text{Sinh}[\kappa])$$

$$C_2 = \frac{\left(-\eta_e\kappa(\tilde{l}_{y,0}\eta + P\eta\tilde{\Omega}) + P\eta\tilde{\Omega}\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]^2 (\zeta\text{Sinh}[\kappa] - \eta_e\kappa)\right)}{\left(4\eta\tilde{\Omega}\left(2\zeta - \eta_e\kappa\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\right)\right)}$$

$$C_3 = \frac{\left(-2P\zeta\eta\tilde{\Omega}(\text{Cosh}[\kappa]-1) + \eta_e\kappa(\tilde{l}_{y,0}\eta + P\eta\tilde{\Omega})\text{Sinh}[\kappa]\right)}{\left(8\zeta\eta\tilde{\Omega}(\text{Cosh}[\kappa]-1) - 4\eta\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\text{Sinh}[\kappa]\right)}$$

$$C_4 = \frac{\left(\zeta\left(\eta_e\kappa(\tilde{l}_{y,0}\eta + P\eta\tilde{\Omega}) + P\eta\tilde{\Omega}\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]^2 (\eta_e\kappa - \zeta\text{Sinh}[\kappa])\right)\right)}{\left(2\eta\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\left(-2\zeta + \eta_e\kappa\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\right)\right)}$$

ANEXO B

Constantes de integración de los perfiles de cantidad de movimiento lineal y momento angular interno para el primer orden.

$$C_5 = -\frac{1}{\left(16\eta\left(\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\text{Cosh}\left[\frac{\kappa}{2}\right]-2\zeta\tilde{\Omega}\text{Sinh}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\right)^2\right)}\left(4P\eta\left(\eta_e^2\kappa^2-4\zeta^2\right)\tilde{\Omega}^2+2\tilde{l}_{y,0}\zeta\eta_e\left(\eta_e\kappa^2\Phi-4\left(\eta_e\kappa^2-4\zeta\right)\tilde{\Omega}\right)+\left(4P\eta\left(4\zeta^2+\eta_e^2\kappa^2\right)\tilde{\Omega}^2+\tilde{l}_{y,0}\zeta\eta_e\left(\eta_e\kappa^2\Phi-8\left(4\zeta+\eta_e\kappa^2\right)\tilde{\Omega}\right)\right)\text{Cosh}[\kappa]-\zeta\eta_e\kappa\left(3\tilde{l}_{y,0}\eta_e\Phi-16\tilde{l}_{y,0}\left(2\zeta+\eta\right)\tilde{\Omega}+16P\eta\tilde{\Omega}^2\right)\text{Sinh}[\kappa]\right)$$

$$C_6 = \frac{1}{64\eta\tilde{\Omega}^2}\left(P\tilde{\Omega}\left(16\eta\tilde{\Omega}-3\eta_e\Phi\right)\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]+\left(\eta_e\kappa\left(-6\tilde{l}_{y,0}\zeta\eta_e\Phi-64\tilde{l}_{y,0}\zeta\eta\tilde{\Omega}+\Phi\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\right)^2\right)+\eta_e\kappa\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\left(\tilde{l}_{y,0}\eta_e^2\kappa^2-P\left(4\zeta^2+\eta_e^2\kappa^2\right)\tilde{\Omega}-P\eta_e^2\kappa^2\tilde{\Omega}\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]^2\right)\right)/\left(\eta_e\kappa\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]-2\zeta\right)^2$$

$$C_7 = \frac{1}{\left(128\eta\left(\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\text{Cosh}\left[\frac{\kappa}{2}\right]-2\zeta\tilde{\Omega}\text{Sinh}\left[\frac{\kappa}{2}\right]\right)^2\right)}\left(P\left(\eta_e^2\kappa^2-4\zeta^2\right)\Omega\left(3\eta_e\Phi-16\eta\tilde{\Omega}\right)-\tilde{l}_{y,0}\eta_e^2\kappa^2\left(5\zeta\Phi-3\eta\Phi+32\eta\tilde{\Omega}\right)+\left(P\left(4\zeta^2+\eta_e^2\kappa^2\right)\tilde{\Omega}\left(3\eta_e\Phi-16\eta\tilde{\Omega}\right)-\tilde{l}_{y,0}\eta_e^2\kappa^2\left(\zeta\Phi-3\eta\Phi+32\eta\tilde{\Omega}\right)\right)\text{Cosh}[\kappa]+2\zeta\eta_e\kappa\left(3\tilde{l}_{y,0}\eta_e\Phi+32\tilde{l}_{y,0}\eta\tilde{\Omega}+2P\tilde{\Omega}\left(16\eta\tilde{\Omega}-3\eta_e\Phi\right)\right)\text{Sinh}[\kappa]\right)$$

$$C_8 = \frac{\zeta}{32\eta\tilde{\Omega}^2}\left(\frac{2P\tilde{\Omega}\left(8\eta\tilde{\Omega}-3\eta_e\Phi\right)\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]}{\eta_e\kappa}+\left(-64\tilde{l}_{y,0}\zeta\eta\tilde{\Omega}-2\tilde{l}_{y,0}\eta_e\kappa\left(\zeta\Phi+3\eta\Phi-16\eta\tilde{\Omega}\right)\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]+\Phi\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]^2\left(\tilde{l}_{y,0}\eta_e^2\kappa^2-P\left(4\zeta^2+\eta_e^2\kappa^2\right)\Omega-P\eta_e\kappa\tilde{\Omega}\text{Csch}\left[\frac{\kappa}{2}\right]^2\right)\right)\right)/\left(\eta_e\kappa-2\zeta\text{Sinh}[\kappa]\right)/\left(\eta_e\kappa\text{Coth}\left[\frac{\kappa}{2}\right]-2\zeta\right)^2$$