

Construcción del concepto de permutación en estudiantes de matemáticas desde la perspectiva de  
la Teoría APOE

Astrid Carolina Archila Prada

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Codirector

Javier Camargo García

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2025

### **Dedicatoria**

A Dios por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos; además de su infinita bondad y amor.

A mi mamá Nancy Prada, quien desde el cielo ha sido mi fortaleza y la razón para seguir adelante, recordándome siempre que los sueños se construyen con esfuerzo y amor. Aunque partiste cuando yo era pequeña, tu presencia vive en mi corazón y ha sido mi guía en cada paso de este camino.

A mi papá Alvaro Archila y mi hermano Alvaro Andrés, por ser pilares fundamentales en mi vida, por su apoyo incondicional, por confiar en mí incluso en los momentos más difíciles y por estar siempre a mi lado en este proceso lleno de retos y aprendizajes.

Y a mi pareja Diego Gamboa, por ser mi mayor apoyo tanto académico como emocional, por motivarme cuando las fuerzas flaqueaban, por las palabras de aliento, por creer en mí y por demostrarme que juntos podemos superar cualquier obstáculo.

A todos ustedes, dedico este logro, porque sin su amor, confianza y apoyo, este sueño no habría sido posible.

### **Agradecimientos**

En primer lugar, agradezco profundamente a mi directora de tesis, Solange Roa, por su invaluable asesoría, sus valiosas contribuciones y su constante apoyo durante el desarrollo de este trabajo. Su guía fue fundamental para superar los desafíos y alcanzar los objetivos de esta investigación.

A los profesores de la Maestría en Educación Matemática les extiendo mi gratitud por haber compartido su conocimiento, su tiempo y su experiencia, los cuales han sido esenciales para mi crecimiento académico y profesional.

A mis compañeros de maestría, Jaiver Rey, Maira Diaz y Jenny Millán, gracias por su camaradería, colaboración y motivación. Compartir este viaje con ustedes enriqueció enormemente la experiencia y me brindó momentos de aprendizaje, apoyo mutuo y amistad.

A mi familia, por ser mi pilar fundamental, por su amor inagotable, sus consejos y su confianza en mí. A mi pareja, por su paciencia, comprensión y por estar a mi lado en cada paso. A la familia de mi pareja, por abrirme las puertas de su hogar y brindarme su cariño y apoyo.

## Tabla de Contenido

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	11
1. Antecedentes .....	15
1.1 El concepto de Permutación en Matemáticas .....	16
1.2 El concepto de Permutación en Didáctica de las Matemáticas .....	20
2. Planteamiento del Problema .....	29
3. Objetivo.....	30
3.1 Objetivo General.....	30
4. Marco Teórico.....	31
4.1 Estructuras y Mecanismos mentales .....	32
4.2 Descomposición Genética.....	34
4.3 Ciclo de investigación de la Teoría APOE .....	35
5. Metodología .....	37
5.1 Análisis Teórico .....	38
5.2 Diseño e implementación de instrumentos .....	38
5.3 Recolección y Análisis de datos .....	40
6. Aplicaciones del Ciclo de investigación .....	41
6.1 Primera Aplicación del ciclo.....	45
6.1.1 Análisis Teórico uno ( <b>AT1</b> ).....	47
6.1.1.1 Revisión Histórico-Epistemológica del concepto de Permutación.....	48
6.1.1.2 Revisiones de investigaciones previas .....	78
6.1.1.3 Estructuras previas para la construcción del concepto de permutación.....	83
6.1.1.4 Descomposición Genética Hipotética ( <b>DGH0</b> ).....	84
6.1.2 Diseño e Implementación uno ( <b>DI1</b> ).....	86
6.1.2.1 Prueba diagnóstica. ....	86
6.1.2.1.1 Análisis A priori de la Prueba diagnóstica.....	87
6.1.2.2 Observación de la clase.....	95
6.1.3 Recolección y Análisis de datos uno ( <b>RD1</b> ) .....	100
6.1.3.1 Análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica. ....	100

6.1.3.2 Resultados de la Observación de clase .....	112
6.2 Segunda Aplicación del ciclo.....	113
6.2.1 Análisis Teórico dos ( <b>AT2</b> ) .....	113
6.2.1.1 Refinamiento del primer modelo cognitivo <i>DGH1</i> ). .....	113
6.2.2 Diseño e Implementación dos ( <b>DI2</b> ) .....	119
6.2.2.1 Taller 1 .....	119
6.2.2.1.1 Análisis A priori del Taller 1. ....	120
6.2.2.2 Continuación de la Observación de clase. ....	131
6.2.3 Recolección y Análisis de datos dos ( <b>RD2</b> ) .....	139
6.2.3.1 Análisis a posteriori del Taller 1 .....	139
6.2.3.1.1 Construcción Proceso 1.....	140
6.2.3.1.2 Construcción del Proceso 2.....	144
6.2.3.1.3 Coordinación de los Procesos (Construcción Proceso de Permutación). ....	146
6.2.3.2 Resultados de la Observación de clase. ....	149
7. Conclusiones .....	151
7.1 Descomposición Genética Validada .....	152
7.2 Posibles contribuciones metodológicas .....	157
7.3 Sugerencias para futuras investigaciones.....	159
Referencias Bibliográficas .....	161

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1 .....	43
Tabla 2 .....	88
Tabla 3 .....	89
Tabla 4 .....	91
Tabla 5 .....	120

**Lista de Figuras**

	<b>Pág.</b>
Figura 1 .....	32
Figura 2 .....	36
Figura 3 .....	41
Figura 4 .....	52
Figura 5 .....	53
Figura 6 .....	54
Figura 7 .....	57
Figura 8 .....	58
Figura 9 .....	59
Figura 10 .....	61
Figura 11 .....	61
Figura 12 .....	62
Figura 13 .....	64
Figura 14 .....	90
Figura 15 .....	92
Figura 16 .....	94
Figura 17 .....	95
Figura 18 .....	96
Figura 19 .....	97
Figura 20 .....	98
Figura 21 .....	98
Figura 22 .....	99
Figura 23 .....	100
Figura 24 .....	101
Figura 25 .....	102
Figura 26 .....	103
Figura 27 .....	104
Figura 28 .....	104
Figura 29 .....	105
Figura 30 .....	106
Figura 31 .....	107
Figura 32 .....	108
Figura 33 .....	109
Figura 34 .....	109
Figura 35 .....	110
Figura 36 .....	110
Figura 37 .....	111
Figura 38 .....	112
Figura 39 .....	125
Figura 40 .....	132
Figura 41 .....	133

Figura 42 .....	134
Figura 43 .....	135
Figura 44 .....	136
Figura 45 .....	137
Figura 46 .....	137
Figura 47 .....	138
Figura 48 .....	139
Figura 49 .....	140
Figura 50 .....	141
Figura 51 .....	142
Figura 52 .....	143
Figura 53 .....	143
Figura 54 .....	144
Figura 55 .....	145
Figura 56 .....	146
Figura 57 .....	147
Figura 58 .....	147
Figura 59 .....	148
Figura 60 .....	149
Figura 61 .....	153

## Resumen

**Título:** Construcción del concepto de permutación en estudiantes de matemáticas desde la perspectiva de la Teoría APOE\*

**Autor:** Astrid Carolina Archila Prada\*\*

**Palabras Clave:** Permutación, Teoría APOE, Ordenación, Función biyectiva

**Descripción:** Esta investigación se centra en la construcción del concepto de permutación tanto en la ordenación (en relación con técnicas de conteo) como función biyectiva (en el contexto de Teoría de Grupos y Matemática Discreta) en el curso de Matemática Computacional de la carrera de Matemáticas. Este concepto es esencial para el desarrollo de áreas como la Combinatoria, la Teoría de Grafos, entre otras. Sin embargo, los estudios en educación matemática han señalado que existen dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto de permutación, debido a la falta de aplicabilidad y a su alto grado de abstracción. Esto implica que los estudiantes no diferencian la permutación de otros conceptos de técnicas de conteo aplicando cualquier fórmula para la solución de la tarea, sin distinguir las características en cada tarea para identificar el concepto correcto. Es por ello que se propone diseñar una Descomposición Genética del concepto de permutación que describa las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de matemáticas, fundamentada en el diseño y aplicaciones del Ciclo de investigación de APOE.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Codirector: Javier Camargo García. Doctor en Ciencias Matemáticas.

**Abstract**

**Title:** Construction of the concept of permutation in mathematics students from the perspective of APOS Theory. \*

**Author(s):** Astrid Carolina Archila Prada<sup>1</sup>

**Key Words:** Permutation, APOS Theory, Ordering, Bijective function.

**Description:** This research focuses on the construction of the concept of permutation in both sorting (in relation to counting techniques) and bijective function (in the context of Group Theory and Discrete Mathematics) in the Computational Mathematics course of the Mathematics degree. This concept is essential for the development of areas such as Combinatorics, Graph Theory, among others. However, studies in mathematics education have pointed out that there are difficulties in teaching and learning the concept of permutation, due to the lack of applicability and its high degree of abstraction. This implies that students do not differentiate permutation from other concepts of counting techniques by applying any formula for the solution of the task, without distinguishing the characteristics in each task to identify the correct concept. It is therefore proposed to design a Genetic Decomposition of the concept of permutation that describes the mental structures and mechanisms constructed by mathematics students, based on the design and applications of the APOS Research Cycle.

---

\* Degree Work

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Codirector: Javier Camargo García. Doctor en Ciencias Matemáticas.

## Introducción

El concepto de permutación se desarrolló bajo el enfoque de los juegos de azar, problemas de conteo con aplicaciones en la música, poesía y luego en la Teoría de Grupos; esto permitió al concepto tomar un rol importante en diferentes áreas como: Estadística, Teoría de Grafos, Criptografía y Matemática Discreta, entre otras. Dicho concepto es un ejemplo de la estructura de Grupo, primera estructura identificada en el desarrollo epistemológico del álgebra abstracta. Como lo mencionan Terán y De Oleo (2021), dado al alto grado de abstracción, la comprensión del concepto de permutación en estudiantes es problemática; pues es una tarea difícil para los profesores contextualizar los contenidos y no centrarse en su aspecto puramente matemático, esto muestra la falta de aplicabilidad con las que son tratadas. Terán y De Oleo (2021) citando a Muñiz et al. (2014) plantean que: “Una alternativa para solucionar este problema es crear esos contextos de aprendizaje por medio de juegos donde se observen características que pueden ser explicadas desde las matemáticas” (p.11)

Teniendo en cuenta esta mirada, unos de los principales retos de esta investigación es dar una visión aplicada de los conocimientos abstractos matemáticos, donde el concepto de permutación tiene varias aplicaciones en diferentes contextos, como: en los juegos, los lenguajes de programación y los contextos de la vida real; el cual nos centraremos en contextos (juegos o situaciones de la vida real) para el diseño de tareas y los lenguajes de programación para la construcción del concepto de permutación.

La permutación en la Teoría de Grupos es de gran utilidad en diferentes áreas, ya que como afirma Felipe y Ortiz (2018) este uso ya no queda confinado solo al ámbito de la matemática pura. Por esta razón, la permutación como otros conceptos de álgebra abstracta desempeñan un papel

importante en diferentes ramas del saber científico, como en: química, física, ciencias de la computación, teoría de la información, arquitectura e incluso en ciencias humanas y sociales. Sin embargo, como señala Durand et al. (2015), a pesar de que los profesores son conscientes de las dificultades que entrañan los conceptos de álgebra abstracta, donde hace parte el concepto de permutación, se han realizado pocos trabajos sobre estas cuestiones. Por lo tanto, se puede decir que la profundidad y complejidad de la comprensión del concepto de permutación depende de la capacidad del estudiante para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen.

De esta manera, la presente investigación se centra en la construcción del concepto de permutación y sus conceptos derivados (tipos de permutaciones) como  $k$ -permutaciones (permutaciones de un subconjunto) y permutaciones con repetición (permutaciones de un multiconjunto), vistos como ordenaciones (arreglos o distribuciones) y como funciones de manera equivalente. Entender este concepto a partir de la equivalencia entre las ordenaciones y funciones, permite que el estudiante pueda llegar a concluir que éstas concepciones son las mismas para todos los tipos de permutaciones; todo esto a partir de los elementos que plantea la Teoría APOE (Arnon et al., 2014). En este sentido, se busca diseñar una Descomposición Genética (DG) del concepto de permutación, mediante la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que evidencian estudiantes de Matemáticas al desarrollar un curso de Matemática Computacional; teniendo en cuenta las aplicaciones del concepto en diferentes contextos y la utilidad de las herramientas tecnológicas, especialmente los lenguajes de programación que permiten la reflexión y abstracción para la construcción del concepto de permutación (Asiala et al., 1998).

Este documento está organizado en siete capítulos. En el capítulo 1 se exponen los Antecedentes, donde se realiza una revisión de diferentes investigaciones sobre el concepto de

permutación tanto en la Matemática, con el objetivo de observar las funciones que tiene el concepto en las diferentes áreas, especialmente en las diferentes ramas de las matemáticas. Como en la Educación Matemática, donde se muestra diferentes investigaciones que abordan la enseñanza y aprendizaje del concepto desde diversas perspectivas teóricas; teniendo en cuenta los desarrollos en diferentes áreas que tiene el concepto.

El capítulo 1 permite mostrar que existen diferentes perspectivas teóricas que abordan el concepto de permutación, en particular se muestra cómo diferentes investigaciones abordan el concepto de permutación basadas en la Teoría APOE; es decir, se muestran las conexiones que son posibles de definir a través de las estructuras y mecanismos mentales que propone la Teoría APOE, para abordar el concepto en la educación matemática. De esta manera en el capítulo 2 y 3, se presenta el Planteamiento del Problema y el Objetivo, donde se problematiza la complejidad del concepto de permutación, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, presentando así, la pregunta y el objetivo de investigación.

En el capítulo 4 denominado Marco Teórico, se describen los principales elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014), que fundamenta esta investigación y guía el proceso metodológico que nos permite llegar a responder la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo. Este proceso metodológico, es presentado en el capítulo 5 denominado Metodología, el cual explica el Ciclo de investigación que propone la Teoría APOE y menciona la utilización de las tres etapas del ciclo mediante una interacción continua. Como variación metodológica la aplicación del ciclo no se realiza una vez, como es común en las investigaciones que utilizan la Teoría APOE; sino que la aplicación del ciclo se hará dos veces, con el fin de llegar a la validación de la Descomposición Genética para responder a la pregunta de investigación.

El proceso metodológico se realiza en el capítulo 6, el cual consta de dos apartados; en cada apartado se describe la realización de cada aplicación del ciclo; es decir, como se usa cada una de las etapas del ciclo en cada aplicación. Así, en la primera aplicación, la primera etapa denominada Análisis Teórico permite el diseño de la primera Descomposición Genética Hipotética ( $DGH_0$ ), con base en este primer modelo cognitivo se continua con la segunda etapa del ciclo, Diseño e Implementación de instrumentos, en esta se diseña una prueba diagnóstica y se observa la clase del curso de Matemática Computacional, los resultados de estos instrumentos se analizan mediante la tercera etapa denominada Recolección y Análisis de datos.

Estos resultados generan un refinamiento del modelo cognitivo y permiten que se continúe aplicando el ciclo llegando así a la segunda aplicación de este, donde el segundo Análisis Teórico describe el segundo modelo cognitivo que se genera a partir del refinamiento de la primera DGH denominado  $DGH_1$ , este modelo permite el diseño del Taller 1 y la continuación de la observación con base en la  $DGH_1$ . Los resultados de los análisis del Taller 1 permiten la validación del modelo cognitivo refinado y la observación de la clase analizada bajo las estructuras de la DGH generan una variación de este modelo cognitivo, que se propone como un posible diseño para una futura investigación.

Finalmente, en el capítulo 7, se presentan las conclusiones y resultados que permiten responder la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo, el cual se basa en el diseño de una Descomposición Genética Validada que describa las estructuras y mecanismos mentales para la construcción del concepto de permutación. Además, se presentan algunas sugerencias para futuras investigaciones y posibles contribuciones metodológicas.

## 1. Antecedentes

En este capítulo, los antecedentes se presentan por medio de dos apartados que buscan determinar cómo se desarrolla el concepto de permutación tanto en las matemáticas como en la didáctica de las matemáticas. El primer apartado permite visibilizar una fracción del inicio y desarrollo del concepto de permutación; esto con la idea de mostrar que la permutación no solo aparece en los problemas de conteo, sino que también es parte importante en álgebra abstracta y otras áreas de las matemáticas.

Gracias al desarrollo matemático que se presentan en los antecedentes, se puede evidenciar que el concepto de permutación empieza como ordenaciones con ciertas características definiendo la permutación en diferentes tipos. A medida que se sigue utilizando la permutación, en especial la permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes para atender a diversas necesidades en otras aplicaciones de las matemáticas, se fue consolidando su definición, como función biyectiva de un conjunto finito sobre sí mismo, convirtiéndose en un primer ejemplo de estructura de Grupo; llegando a tomar un rol importante en lo que actualmente se conoce como Teoría de Grupos. Esto permite ver que la permutación es un concepto matemático abstracto, lo que puede generar dificultades cognitivas en los estudiantes, lo que lleva al segundo apartado de este capítulo, donde se muestran revisiones que se preocupan en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de permutación.

Dichas dificultades se ven en diferentes áreas de las matemáticas y en el transcurso de los niveles educativos. Una de las dificultades que tienen los estudiantes sobre el concepto, aparece en los problemas de conteo, al no poder diferenciar cuándo en un problema se aplica el concepto de combinación o de permutación; esto puede darse debido a la falta de énfasis en las

características de la permutación. En otras áreas, como el álgebra abstracta, se presentan dificultades debido a su complejidad y la poca aplicabilidad con la que es presentado el concepto de permutación. Por lo tanto, en este apartado se abordan investigaciones relacionadas con las dificultades reportadas.

Estas investigaciones abarcan el concepto de permutación por medio de dos concepciones aisladas, es decir solo como problemas de conteo viendo la permutación como ordenación; o solo como problemas en álgebra abstracta tomando el concepto como función biyectiva de un conjunto en sí mismo; sin mencionar que estas dos concepciones son equivalentes y que a partir de una se puede entender o construir la otra. Permitiendo entender como función y ordenación las permutaciones, las  $k$ -permutaciones y las permutaciones con repetición.

Algunas de estas investigaciones utilizan contextos como juegos y herramientas tecnológicas para mejorar la comprensión de las permutaciones. Por lo tanto, este trabajo tiene en cuenta los antecedentes, con el fin de desarrollar una investigación que describa las estructuras y mecanismos mentales del concepto de permutación que considere las dos concepciones; con el objetivo de que el estudiante logre establecer una equivalencia del concepto de permutación como ordenación y como función, mediante el uso de contextos y los lenguajes de programación.

### **1.1 El concepto de Permutación en Matemáticas**

Según Biggs (1979) y Dominguez (2016) el concepto de permutación se fue desarrollando simultáneamente junto con el concepto de combinación, para el uso y la implementación de problemas de conteo. Esto permitió que a lo largo de la historia se desarrollara interés por estos conceptos, definiendo características claves para cada uno de estos conceptos. Este desarrollo y su formalización motivó avances en diferentes áreas y promovió el desarrollo de nuevas teorías como: la combinatoria, la probabilidad y estadística, la teoría de juegos, entre otras.

El concepto de permutación comienza como ordenaciones, desarrollándose diversas características de este concepto, definiendo distintos tipos de permutaciones como: las permutaciones de un subconjunto ( $k$ -permutaciones), las permutaciones de un multiconjunto (permutaciones con repetición) y la más conocida como permutación sin repetición. Esta última permutación conocida como permutación de conjunto de  $n$  elementos diferentes es utilizado en otras áreas de las matemáticas, esto permitió que el desarrollo de este concepto tomará un valor muy importante en el álgebra abstracta, llegando a definirse como una función biyectiva, y así ser una de las primeras estructuras algebraicas.

Como lo mencionan Biggs (1979) y Piaget y García (1982) el concepto de permutación sin repetición se presenta como una herramienta para encontrar un método de solución, por medio de una sustitución que permitiera convertir la ecuación original en una ecuación “reducida” cuyo método de solución fuera conocido. Según Piaget y García (1982), el concepto de permutación de un conjunto finito empieza a tomar una transformación, ya que Cauchy empieza a considerar la “permutación” ( $A_1$ ) al orden de las letras (ordenación) y la “sustitución” como la transición de una permutación  $A_1$  a otra permutación  $A_2$  y la representa  $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ . Lo que Cauchy denomina sustitución, es lo que actualmente se entiende por permutación como la cantidad de funciones biyectivas de un

conjunto finito en sí mismo, denotada:

$$f: K \rightarrow K$$

$$A_1 \mapsto A_2$$

Este conjunto finito era entendido en esa época como  $n$  cantidades diferentes; lo que lleva a concebir las permutaciones como “funciones de  $n$  cantidades”. Esas cantidades ya empiezan a representarse como cantidades indeterminadas, definiendo la “multiplicación” de sustituciones (composición de permutaciones), la sustitución idéntica y la sustitución inversa (la inversa de una

permutación); lo que da paso a la constitución de la primera estructura algebraica, la estructura de Grupo.

Esta definición del concepto de permutación fue de gran ayuda para el desarrollo de lo que actualmente conocemos como Grupo, así la permutación toma un rol central en la Teoría de Grupos, lo que lleva al desarrollo de otras áreas ya mencionadas anteriormente. Esto permite observar cómo fue la construcción del concepto de permutación. Por esta razón, se realiza un análisis histórico-epistemológico como elemento del análisis teórico que será mencionado más adelante.

En este orden de ideas, este trabajo de investigación asume un enfoque del concepto de permutación no simplemente como ordenación; sino, además como una función. Esto permite comprender el concepto de permutación de tal manera que se puedan desplegar otros conceptos de álgebra abstracta y aplicaciones en otras áreas. Por esta razón, cuando se mencione el concepto de permutación se entiende por los distintos tipos de permutación tanto como ordenaciones y como función.

Un ejemplo de un tipo de permutaciones, como las permutaciones de  $n$  elementos finitos diferentes son los anagramas de palabras, estos son una reordenación de los elementos de un conjunto finito; vistos como una función biyectiva de un conjunto de letras sobre sí mismo. Sea  $\{a, m, o, r\}$  el conjunto de 4 letras del abecedario, una permutación de este conjunto en notación matemática de dos pisos es  $\begin{pmatrix} a & m & o & r \\ r & o & m & a \end{pmatrix}$ .

En este ejemplo, esta permutación también se puede ver como función, específicamente función biyectiva ya que no se repiten los elementos del conjunto. Viéndose de la siguiente manera: si a cada letra del conjunto finito le asigno una “posición”, es decir, si  $a$  está en la posición 1,  $m$  en la posición 2, y así respectivamente. Se puede observar que la permutación permite cambiar las

letras en diferentes posiciones, teniendo en cuenta que una letra no puede estar en dos posiciones al mismo tiempo y que cada posición solo debe tener una letra. Esta permutación analizándose como función cambia a  $a$  que estaba en la posición 1 a la posición 4 ( $f(1) = 4$ ), a  $m$  que estaba en la posición 2 la cambia a la posición 3 ( $f(2) = 3$ ), y así sucesivamente con todas las palabras del conjunto.

Con lo dicho anteriormente, y con los ejemplos mostrados se puede ver la equivalencia que hay entre la ordenación y la función, en las permutaciones. Sin embargo, como el concepto de permutación se ha desarrollado a lo largo de la historia en diferentes áreas, y se ha definido de diferentes maneras, puede llegar a existir dificultad en la terminología usada, lo que ha generado que se confunda con el concepto de combinación; como afirma Biggs (1979, Traducción propia):

Las palabras "permutación" y "combinación" han adquirido significados matemáticos precisos, pero tal precisión no se observa en el uso nativo. La dificultad se agrava, en los estudios históricos, por el hecho de que los traductores de obras antiguas tienden a utilizar los significados vagos y aleatorios, en lugar de los matemáticos. Así, hay que tener en cuenta que una obra que parece tratar de Permutaciones y Combinaciones puede, en realidad, no tratar de ninguno de estos temas, o de uno, o de ambos. (p. 111)

Una de las mayores confusiones que hay entre estos dos conceptos aparece en los problemas de conteo, por falta de distinción en las características de estos conceptos, como el orden, la repetición, entre otras (Dominguez, 2016; Salgado, 2007). Además de esta dificultad se han observado otras diversas dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto, que han sido estudiadas y abordadas desde diferentes investigaciones; a continuación, se presentan algunas.

## 1.2 El concepto de Permutación en Didáctica de las Matemáticas

Las permutaciones tienen diversas acepciones o definiciones dependiendo al contexto o el área donde es utilizado, debido a esto, se encuentran diversas dificultades asociadas a la comprensión del concepto. Al concebir el concepto de permutación como ordenación, se tiene como prioridad el orden, sin embargo, puede suceder que no se comprenda lo que implica dicho orden ni las características que tienen las permutaciones como la repetición. Una de las dificultades para los estudiantes es poder distinguir qué problemas de conteo se aborda la permutación con o sin repetición, la permutación de un subconjunto o la combinación con o sin repetición, esto se debe a no poder identificar el uso de cada concepto; por esta razón, es muy común que las permutaciones se entiendan como combinaciones.

Diversos investigadores como Dominguez (2016), Salgado (2007), Cartes et al. (2022), mencionan que una de las dificultades de los estudiantes desde el bachillerato hasta el nivel universitario, es diferenciar entre problemas relacionados con las permutaciones y las combinaciones en áreas como estadística y matemática discreta. Esto se debe a que no se comprende el concepto como un reordenamiento de un conjunto finito de elementos, es decir, a la cantidad total de funciones que se establecen entre los conjuntos.

Dominguez (2016) y Salgado (2007) se enfocan en la dificultad que tienen los estudiantes para aprender los conceptos de permutación y combinación, tanto en el área de probabilidad y estadística a nivel de bachillerato como en el área de la matemática discreta a nivel universitario. Aunque estos autores manejan este concepto en dos áreas diferentes y lo llaman de diferente manera (permutación u ordenación), se dirigen hacia los problemas de conteo, tomando en común la dificultad que tienen los estudiantes en diferenciar las combinaciones de las permutaciones. En particular dichos autores, muestran que los estudiantes no logran distinguir las

características relevantes del problema, es decir, si el problema es de orden o no y cuál de los dos conceptos usar. Dominguez (2016) y Salgado (2007) concluyen que los problemas de conteo son difíciles pues requieren de un análisis cuidadoso de su estructura para que el problema no se aborde de forma mecánica.

Por lo tanto, dichas investigaciones con el fin de responder a estas dificultades plantean propuestas didácticas, para promover la enseñanza y aprendizaje de las permutaciones y combinaciones apoyadas en la Teoría APOE. Esta teoría centra su atención en las construcciones mentales necesarias para la construcción de conocimiento matemático. Dominguez (2016) y Salgado (2007) buscan que los estudiantes logren deducir si en una situación hay orden y/o repetición, desarrollar generalizaciones con base en los procesos realizados sin utilizar fórmulas y resolver ejercicios de permutaciones. Por medio de las Descomposiciones Genéticas Validadas y las propuestas didácticas creadas, se concluye que la construcción de las estructuras y mecanismos mentales de los conceptos de permutación y combinación son una herramienta fundamental para una mayor comprensión de los estudiantes al abordar los problemas de conteo.

Como se ha mencionado, la permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes también se puede entender como la cantidad de funciones biyectivas que se establecen de un conjunto finito en sí mismo, y no solo son útiles en los problemas de conteo, sino en otras áreas que abarcan el álgebra abstracta. Así, por medio de la comprensión del concepto de permutación como ordenación, el estudiante puede lograr abstraer una definición más amplia del concepto, como una función. Por su parte, Asiala et al. (1998) se enfocan en comprender las construcciones mentales realizadas por los estudiantes que aprenden permutaciones y simetrías, y cómo estas construcciones sirven para promover la comprensión de otros conceptos, pero no toma en cuenta

que puede partir del concepto como una ordenación, sino que lo toma como función biyectiva, y a partir de la construcción de función, llegar a la construcción del concepto de permutación.

La investigación realizada por Asiala et al. (1998) es parte de un programa de investigación y desarrollo curricular, diseñado para aumentar la comprensión del desarrollo cognitivo de estudiantes universitarios, a medida que aprenden los conceptos fundamentales de Teoría de Grupos y Teoría de Anillos. Este modelo del concepto de permutación como función biyectiva, sirve de apoyo para la construcción del concepto de simetría sustentado en concebir las simetrías como grupos de permutaciones; y con esto, potenciar otros conceptos de álgebra abstracta como: ciclos, co-classes, subgrupo, subgrupo normal, entre otros. Este estudio fue realizado desde la perspectiva de la Teoría APOE, a partir de la aplicación del Ciclo de investigación, proponiendo una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede realizar para desarrollar la comprensión del concepto. Con base en esto se diseña una DG como resultado del Análisis teórico de los conceptos de permutaciones y simetrías, teniendo en cuenta la aplicación del concepto de función.

Asiala et al. (1998) sustentan el diseño e implementación en su investigación a través del desarrollo de clases tradicionales y clases informáticas, en estas utilizan el programa ISETL (Interactive SET Language) con el fin de fomentar una mayor exploración de los conceptos, asignándoles a los estudiantes tareas en este lenguaje de programación. Este lenguaje se usa con el objetivo de estimular la reflexión de los conceptos de permutación y simetrías, buscando abstraer conceptos que no se habían estudiado formalmente en la clase. La implementación del software se propone como una estrategia pedagógica más acorde con la forma en la que se cree que los estudiantes llegan a comprender los conceptos matemáticos. Siguiendo este orden de ideas, y de

acuerdo con Asiala et al. (1998) los lenguajes de programación son útiles porque permite que los estudiantes reflexionen y logren abstraer y construir mejor algunos conceptos matemáticos.

A pesar de que, esta herramienta tecnológica es de gran ayuda, y permite la reflexión del concepto, se debe pensar que debido a la abstracción del concepto es una tarea difícil contextualizarlo, por eso una de las dificultades es la falta de enfoque de estos contextos. Por lo tanto, diversas investigaciones (Felipe y Ortiz, 2018; Terán y De Oleo, 2021; Villareal, 2016; Carmona, 2013) se centran en abordar el concepto de permutación, enfocándose en la creación de diferentes contextos, que permita observar las aplicaciones que tiene el concepto en el desarrollo de juegos como el Cubo de Rubik, Puzzle 15, volteo de campanas, entre otros.

Dichas investigaciones, mencionan que una de las principales dificultades del aprendizaje del concepto de permutación es su alto grado de abstracción, esto conlleva que también sea una tarea difícil para los docentes contextualizar el concepto. Una de las maneras en que se ha abordado esta dificultad, es a través del estudio y creación de contextos de aprendizaje por medio de juegos; así como promover el uso de herramientas tecnológicas, como HTML, JavaScript, CSS, GAP, entre otros. Por medio de esto, se llega a ver la aplicabilidad del concepto de permutación en diferentes áreas como: cálculo de probabilidades, matemática discreta, criptografía, entre otras; donde cada investigación aborda esta dificultad desde diversas áreas y niveles de enseñanza.

A continuación, exponemos algunas de dichas investigaciones destacando los elementos de cada contexto. Como se ha mencionado anteriormente, el concepto de permutación se presenta en diferentes niveles de enseñanza, de esta manera, estas investigaciones se mostrarán en el orden educativo, es decir, empezando a nivel de bachillerato, posteriormente a nivel universitario y terminando en nivel de posgrado (maestría).

Villareal (2016) propone un recurso digital llamado “El rescate del Reino”, como una iniciativa que pretende contribuir significativamente al aprendizaje de las permutaciones sin repetición, dado que, para este autor el concepto de permutación suele ser enseñado de forma superficial o simplemente es excluido. El objetivo principal de este trabajo es determinar los aportes del uso de El rescate del Reino, como recurso educativo digital adaptivo. A partir de esto se busca mostrar modelos de aprendizaje y herramientas de la educación adaptiva, potencializando la enseñanza del concepto. Además, Villareal (2016) identifica cuáles son los saberes previos que necesita un estudiante de grado 11 (16 años edad promedio) para comprender el concepto de permutación sin repetición.

Uno de los mayores aportes del recurso digital es el favorecimiento de la educación inclusiva (educación para todos), que reconoce que los seres humanos aprenden de distinta manera y que en la escuela se debe valorar y abordar los diferentes estilos de aprendizaje. Así, El rescate del Reino, se basa en un entorno medieval fantástico donde un país es amenazado por el resurgir de unos caballeros negros que en el pasado estuvieron a punto de destruirlo. El usuario debe encargarse de salvar el reino, a través de la superación de algunas pruebas asociadas al aprendizaje y ejercitación del cálculo de permutaciones sin repetición.

Villareal (2016), inicialmente realiza dos pruebas: primero una prueba diagnóstica, donde identifica qué presaberes necesita el usuario para el aprendizaje del concepto, a partir de esto, se le asigna una ruta al usuario hasta nivelar los presaberes requeridos. La segunda prueba, lo clasifica según su estilo de aprendizaje, para esto utilizan la clasificación de Kolb, asignándole un personaje. Después de nivelar los presaberes necesarios, se empieza a cumplir cada nivel, las elecciones y respuestas que se van dando en el transcurso de la historia pueden variar su camino.

Para la recolección e interpretación de los datos Villareal (2016) plantea dos categorías: la Acción y el Conocimiento. En la primera categoría, la Acción, profundiza sobre aspectos relacionados con la inclusión. En la segunda categoría, el Conocimiento, analiza el aprendizaje de las permutaciones sin repeticiones, considerando los siguientes factores: i. Estrategias empleadas en la ordenación de elementos, ii. Uso de diferentes sistemas de representación, iii. Cálculo de permutaciones con o sin subgrupos, y iv. Diferenciación entre los conceptos de permutación y combinación. Con base en esto, Villareal (2016) crea cuatro instrumentos de recolección de datos, que menciona los presaberes, los problemas trabajados y preguntas para determinar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el concepto después de participar en el juego. Estos instrumentos fueron:

- Cuestionario sobre presaberes. Se indaga por el uso del símbolo factorial, evaluación de funciones, uso de diagramas de árbol, conteo y tablas de doble entrada.
- Cuestionario de problemas. Plantean tres situaciones problema para ser resueltas a través del cálculo de permutaciones básicas con subgrupos.
- Cuestionario de salida. Proponen una prueba sobre la ordenación manual de elementos y el cálculo de diferentes permutaciones sin repetición.
- Entrevista. Proponen las siguientes preguntas: ¿Qué son las permutaciones sin repetición?, ¿En qué se diferencia una permutación de una combinación?, ¿Cómo se calcula una permutación sin repetición?, ¿De qué otras formas se puede calcular una permutación sin repetición?

Como resultado de la implementación y el análisis de resultados, Villareal (2016) concluye que:

[...] en su mayoría, los estudiantes comprendieron los procedimientos asociados al cálculo de permutaciones desde las distintas representaciones y algoritmos; en especial lo que corresponde a la ordenación manual; no obstante, se evidencio que en preguntas indirectas o en ejercicios en los que el cálculo de permutaciones no es solicitado explícitamente mediante expresiones como “de cuantas maneras”, “de cuantas formas” o “cuantos arreglos se pueden formar” los estudiantes no utilizaron los métodos aprendidos. (p. 100)

La investigación desarrollada por Villareal (2016) muestra que es posible lograr el aprendizaje de las permutaciones sin repetición, si se atienden a los presaberes necesarios y se abordan procedimientos a través de las distintas estrategias que los sistemas de representación proveen.

El diseño de juegos es considerado un factor potente a la hora de construir nociones asociadas a la permutación. Siguiendo la línea del nivel de enseñanza, Terán y De Oleo (2021) proponen el uso del “Juego del 15” o Taken como una herramienta de motivación para profundizar en el aprendizaje de las permutaciones en estudiantes de nivel universitario; estos estudiantes están desarrollando un curso de álgebra moderna. Debido a la pandemia, se realiza la implementación del Juego del 15, por medio de una plataforma virtual, desarrollada con herramientas tecnológicas como HTML, JavaScript y CSS para adaptar el juego a las necesidades pedagógicas de ese momento. El uso del juego busca profundizar la enseñanza e incentivar la abstracción del concepto de permutación a través de sus propiedades.

Terán y De Oleo (2021) afirman que el uso del juego permite llegar a distintos niveles de conocimiento, que pueden ir desde dar la definición de los conceptos de permutación hasta utilizar algoritmos para determinar el número de permutaciones necesarias. El diseño planteado por los autores incluye instrumentos de evaluación que deben tener en cuenta: El entendimiento de los

conceptos matemáticos fundamentales con relación a permutaciones, la eficiencia de los algoritmos que utiliza para dar solución al juego, la capacidad para formular hipótesis de manera clara sobre las permutaciones e identificar las propiedades de las permutaciones inmersas en el juego.

El diseño incluye un cuestionario que debe ir completándose a medida que se juega, cuya función es evaluar la ejecución de movimientos, la interpretación de la relación de las permutaciones con el juego y la identificación de las propiedades. Terán y De Oleo (2021) proponen una rúbrica de evaluación que busca cuantificar el conocimiento logrado por los estudiantes sobre los conceptos teóricos y propiedades de las permutaciones, su habilidad para establecer algoritmos propios que le ayuden a resolver el juego y que puedan comunicar sus ideas haciendo uso correcto del lenguaje algebraico.

Siguiendo esta línea a nivel de enseñanza, Felipe y Ortiz (2018) realizan su investigación en la asignatura *Métodos Algebraicos y sus Aplicaciones*; esta asignatura está orientada en profundizar en el estudio de las principales estructuras algebraicas tratadas de forma abstracta y en el conocimiento de una visión más aplicada de dichas estructuras en ámbitos tan diversos como la criptografía, teoría de códigos, teoría de autómatas, lenguajes formales, etc. Con el fin de dar una visión más aplicada de los conocimientos abstractos matemáticos, utilizan juegos como el Cubo de Rubik y Puzzle 15, donde los diferentes movimientos llevan implícitos el concepto de permutación.

Este trabajo tiene dos objetivos en el aula, estos son: modelizar algunos puzzles y rompecabezas utilizando conceptos básicos de Teoría de Grupos e, ilustrar algunos métodos de resolución de estos mediante el uso del software GAP (*Groups, Algorithms and Programming*), especializado en la computación en Teoría de Grupos y Álgebra Discreta. Enfocándose en que los

estudiantes trabajen con aplicaciones reales de la Teoría de Grupos, mediante la formulación de problemas cotidianos que les son familiares, poniendo en valor el uso de la abstracción teórica y la modelización matemática. Por ejemplo, la resolubilidad del juego de puzzle, les permite motivar la introducción de la paricidad de las permutaciones y los grupos alternados. Para luego plantear ejercicios con otros juegos como los anillos tricolores de Rubik y el juego To Spin, que pueden modelizarse de una forma similar aplicando grupos de permutaciones.

Los contextos para abordar la dificultad en el concepto de permutación no solo son abordados por medio de juegos y herramientas tecnológicas, sino también se han encontrado situaciones de la vida real. Un ejemplo de ello es el trabajo de Albanese (2014) que realiza una investigación desde la Etnomatemática, cuyos objetivos son: describir y contextualizar artesanías de trenzados y estudiarlas. Esto lo hace por medio de la identificación de los constructos matemáticos implícitos en ellas; para encontrar el desarrollo de estos constructos, realiza un análisis del trenzado simple de tres hilos. Este análisis es descrito a través de una secuencia de dos permutaciones, cada una constituida por una sola transposición, lo que permite observar que uno de los principales constructos matemáticos implícitos en el trenzado es el concepto de permutación y sus propiedades.

Se pueden observar tres aspectos importantes para lograr la comprensión del concepto de permutación, según los resultados de las investigaciones expuestas: la construcción del concepto por medio de las estructuras y mecanismos mentales, la aplicabilidad del concepto por medio de contextos de juegos y la utilización de las herramientas tecnológicas para lograr la reflexión y comprensión del concepto. Estas investigaciones abordan la comprensión del concepto, mediante un aspecto de los mencionados anteriormente de manera aislada a los otros aspectos, o mediante

los aspectos de aplicabilidad en los contextos de juegos y la utilización de las herramientas tecnológicas; pero ninguna es abordada mediante los tres aspectos al tiempo.

Por lo tanto, estos trabajos serán de utilidad en el proceso de esta investigación que tomará el concepto de permutación como fue mencionado anteriormente. Queriendo lograr que los estudiantes construyan las estructuras y mecanismos mentales, de tal manera que puedan percibir que estas dos concepciones son equivalentes. Por medio de problemas de aplicabilidad que contengan la utilización de herramientas tecnológicas, como lo son los lenguajes de programación.

## **2. Planteamiento del Problema**

Partiendo de los elementos descritos en el capítulo anterior, el concepto de permutación comienza a desarrollarse desde el bachillerato, donde según Villareal (2016) “El estudio de las permutaciones sin repetición corresponde a el estándar básico de competencias en matemáticas: resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad-combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo” (p.16). Villareal aclara que estas permutaciones sin repetición suelen ser enseñadas de forma superficial o simplemente son excluidas. Sin embargo, esta relegación del concepto no es conveniente, pues este corresponde a un objeto matemático influyente en diversos campos de las matemáticas.

El concepto de permutación aparece a nivel universitario y de posgrado en diferentes áreas de las matemáticas, especialmente en Teoría de Grupos, donde es usada la permutación de un conjunto con  $n$  elementos diferentes, como función biyectiva potenciando el desarrollo de la estructura de Grupo. De allí con la estructura de los grupos de permutaciones se pueden entender otros conceptos de álgebra abstracta, ya que esta estructura aparece de manera natural al considerar

el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas que mantienen una estructura determinada, es decir los grupos de permutaciones generan una estructura.

Como lo mencionan diferentes autores como Dominguez (2016), Salgado (2007), Villareal (2016) y Felipe y Ortiz (2018) los estudiantes presentan dificultades en comprender el concepto de permutación debido a su alto grado de abstracción y la falta de aplicabilidad, centrándose en su aspecto puramente matemático. Esto sucede no solamente con el concepto de permutación, sino con la mayoría de los conceptos en el álgebra abstracta o Teoría de Grupos, donde se ha encontrado poca investigación, pero estas investigaciones en los últimos años han aumentado. Como menciona Okaç (2016): “Desde 2001 se ha producido un aumento en este tipo de estudios, aunque todavía se puede afirmar que el número de estudios publicados en esta área (álgebra abstracta) es escaso en comparación con otros a nivel de pregrado” (p.298)

Por ende, se plantea la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué estructuras y mecanismos mentales construyen estudiantes de un curso de matemática computacional sobre el concepto de permutación?*

Para dar respuesta a esta pregunta, en el siguiente capítulo se plantea el objetivo que guía el desarrollo de la presente investigación.

### **3. Objetivo**

#### **3.1 Objetivo General**

Diseñar una Descomposición Genética Validada del concepto de permutación que describa las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de un curso de matemática computacional.

Para responder a la pregunta y cumplir con el objetivo planteado en esta investigación, se considera como marco teórico, la Teoría APOE. A continuación, se presentan los elementos que se utilizarán para el desarrollo de la investigación.

#### **4. Marco Teórico**

La Teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema, (Arnon et al., 2014) tiene como interés estudiar la forma en que se construyen o aprenden los conceptos o nociones matemáticas. Como menciona Salgado (2007) la Teoría APOE da una base teórica al análisis de la forma en que las ideas matemáticas de los alumnos evolucionan y, al mismo tiempo, encuentra una manera para ayudar a los alumnos a estructurar las construcciones necesarias para que esta evolución tenga lugar y el aprendizaje de los conceptos sea mejor. Esto permite pensar en la teoría como una herramienta que ayuda a explicar los posibles modelos cognitivos que pueden ser construidos por un individuo; para así llegar a sugerir formas de aprendizaje y estrategias para una mejor comprensión de los conceptos o nociones matemáticas.

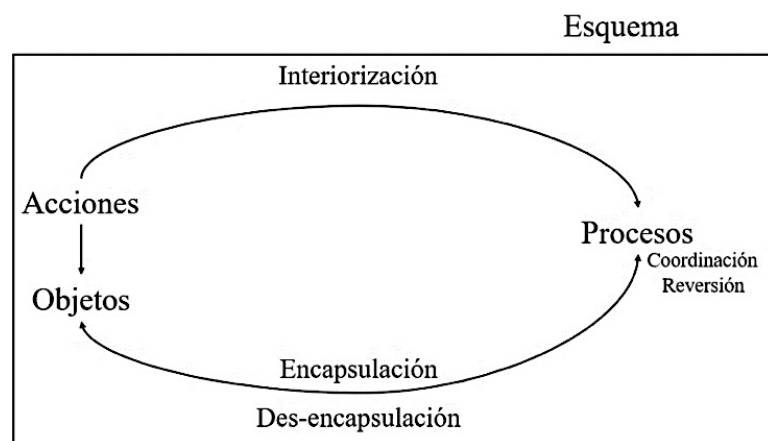
Esta teoría tiene como referencia epistemológica la Teoría de Piaget, puesto que toma las ideas Piagetianas sobre la manera de pasar de un estado de conocimiento a otro. Por esto, la Teoría APOE está compuesta por estructuras mentales denominadas: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Estas estructuras se construyen y se relacionan por medio de mecanismos mentales como: interiorización, encapsulación, coordinación, tematización, entre otras.

#### 4.1 Estructuras y Mecanismos mentales

Las estructuras y mecanismos mentales se organizan y reorganizan gracias a la experiencia de los estudiantes con nuevas situaciones matemáticas. En la Figura , se muestra la forma de relacionar las estructuras a partir de algunos mecanismos mentales.

#### Figura 1

*Estructuras y Mecanismos mentales de la Teoría APOE*



*Nota.* Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 18), por Arnon et al., 2014, Springer.

El proceso de construcción del conocimiento no es lineal, la Figura permite la explicación para la posible ruta de construcción de un Esquema mental asociado a un concepto o noción matemática. A continuación, se explica cada una de las estructuras mentales y la forma en que se relacionan y construyen con los mecanismos mentales, utilizando como ejemplo el concepto de función, que es de utilidad para esta investigación, debido a que una manera de definir el concepto de permutación es como una función.

Este ejemplo se menciona desde el punto de vista de Asiala et al. (1998), ilustrando cada estructura a la luz de la comprensión que pueden lograr los individuos sobre el concepto de función.

– *Acción:* Consiste en las transformaciones que un individuo puede realizar sobre objetos construidos previamente, esto es, cualquier operación mental repetible que transforma de alguna manera un objeto. Estas estructuras se manejan por influencias externas que requieren desarrollarse paso a paso y no implica una reflexión por parte del individuo.

Por ejemplo, para el concepto de función, Asiala et al. (1998, Traducción propia) señala que un estudiante tendrá la concepción de Acción “cuando se requiere que la función venga dada por una expresión que contenga instrucciones completas y explícitas sobre los pasos que hay que dar para evaluar la función en un punto” (p. 16)

– *Proceso:* Es la interiorización de las Acciones a través de una secuencia de repetición de la Acción, lo que permite que los individuos sugieran algún tipo de reflexión frente a algunas situaciones matemáticas; es decir, el individuo ha construido un Proceso si es consciente de la Acción, en lugar de seguir instrucciones externas.

Por lo tanto, según Asiala et al. (1998, Traducción propia) el estudiante tendrá la concepción Proceso “cuando sea capaz de pensar en una función como si recibiera una o más entradas, realizará una o más operaciones con las entradas y devolviera los resultados como salidas sin necesidad de calcularlos, realmente” (p.16)

– *Objeto:* Esta estructura es estática, a diferencia de la Acción y el Proceso que son dinámicas, ya que se reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso, toma el Proceso como una totalidad y se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre él, y es capaz de construir tales transformaciones. Esto quiere decir, que el individuo encapsula el Proceso en un

Objeto. Quien tiene una concepción Objeto logra des-encapsular el Objeto vuelta al Proceso del que procede con el fin de utilizar sus propiedades.

En el caso de las funciones según Asiala et. al (1998, Traducción propia), el estudiante tiene la concepción Objeto, “cuando el estudiante logra encapsular y des-encapsular, de tal manera que logre realizar Acciones o Procesos sobre funciones, como sumar, multiplicar funciones, o formar conjunto de funciones” (p.16)

– *Esquema*: Son las estructuras más grandes, que contienen otras estructuras y están relacionadas con un concepto matemático específico. Como afirma Trigueros (2005):

Los Esquemas son colecciones de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están relacionados consciente e inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que puedan ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. (p. 11)

La construcción de estas estructuras y mecanismos mentales permiten crear una Descomposición Genética que bajo la teoría es planteada como modelos cognitivos de construcción de conceptos o nociones matemáticas.

#### **4.2 Descomposición Genética**

La Descomposición Genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo realiza para construir un concepto o noción matemática específica. Es decir, tiene como fin la organización del conocimiento necesario para la construcción del concepto o noción matemática, por medio de una estructuración que orienta el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de comprensión del concepto o noción matemática.

Como menciona Asiala et al. (1996) se parte de una Descomposición Genética Hipotética (DGH), la cual es considerada como aquella que no ha sido aprobada experimentalmente. Luego la DGH debe refinarse o validarse con base en los resultados obtenidos, ya sea en la Implementación de actividades o en la Recolección y Análisis de datos con el uso de los instrumentos de recolección, y la interacción continua con el Análisis Teórico; que son etapas del Ciclo de investigación de la Teoría APOE.

Estas Descomposiciones Genéticas se fundamentan por medio de las experiencias de enseñanza o aprendizaje, los resultados de investigaciones previas, los análisis de libros de texto y el desarrollo histórico-epistemológico de los conceptos o nociones matemáticas, entre otros. Según Arnon et al. (2014) las Descomposiciones Genéticas de un concepto o noción matemática no son únicas, puesto que: “no proporcionan una forma única en la que todos los estudiantes construyan un concepto o noción matemática específica” (p. 40)

Para obtener una descripción más específica y próxima a la construcción de las estructuras y mecanismos mentales de los conceptos matemáticos que necesita el individuo, la teoría presenta un Ciclo de investigación que sirve como herramienta para explicar los posibles modelos cognitivos.

#### **4.3 Ciclo de investigación de la Teoría APOE**

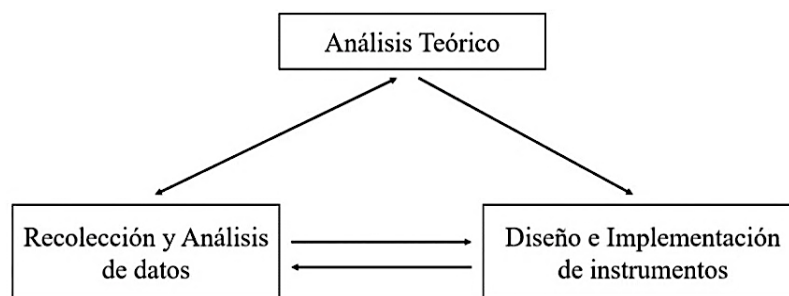
El Ciclo de investigación que propone la teoría APOE es una herramienta que puede usarse para explicar los modelos cognitivos que pueden construir los estudiantes, para la comprensión de algunos conceptos matemáticos y así sugerir formas en que los alumnos puedan aprender estos conceptos.

La Figura 2, muestra las tres etapas del Ciclo de investigación que propone la teoría APOE, este ciclo puede repetirse tantas veces como sea necesario para entender la epistemología del

concepto y obtener estrategias pedagógicas efectivas para ayudar a los estudiantes en el aprendizaje. La primera etapa denominada *Análisis teórico* intenta describir las construcciones mentales que los estudiantes deben hacer para entender el concepto, en este caso, el concepto de permutación. Esta etapa se realiza con base en: análisis epistemológicos, análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y resultados de investigaciones previas, entre otros.

## Figura 2

*Ciclo de investigación que propone la Teoría APOE*



*Nota.* Tomado de APOS theory: *A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 94), por Arnon et al., 2014, Springer.

El objetivo principal del Análisis Teórico consiste en diseñar una DGH del concepto que determine un camino viable, de tal manera, que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Así, por medio de este análisis y el diseño de una DGH, se puede abordar la segunda o la tercera etapa del Ciclo de investigación. La segunda etapa denominada Diseño e Implementación de instrumentos, consta del diseño de tareas, ejemplos de aplicaciones del concepto que se dan en clase y sirven para ayudar a los estudiantes a construir las estructuras y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje del concepto y que pueden ser encontradas también mediante la observación de la clase.

La tercera etapa del ciclo: *Recolección y Análisis de datos*, la cual puede ser abordada desde la primera o segunda etapa del ciclo, tiene como fin el refinamiento o validación de una DGH, esto se propone a través del diseño e implementación de talleres, cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y observaciones que permiten un análisis de la información obtenida para llegar a la formulación de una Descomposición Genética Validada (DGV).

## 5. Metodología

La presente investigación de corte cualitativo se centra en la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que evidencian estudiantes de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública colombiana, cuando abordan la construcción del concepto de permutación en un curso de Matemática Computacional.

Esta investigación utiliza el Ciclo de investigación que propone la Teoría APOE, tomando las tres etapas: i. Análisis Teórico, ii. Diseño e implementación de instrumentos y iii. Recolección y análisis de datos. La metodología se realiza a partir de la interacción entre las 3 etapas, como se ilustra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**; este ciclo se diseña y aplica más de una vez, con el objetivo de refinar una descomposición genética y alcanzar su mayor grado de validez (Arnon et al., 2014). En esta investigación, esto está determinado por la diversidad de contextos que son analizados en el curso de Matemáticas Computacional sobre el concepto de permutación y la visión del profesor y la investigadora, autora de este trabajo, lo que permite que los estudiantes estructuren el concepto desde diferentes ángulos durante el desarrollo de todo el curso.

## 5.1 Análisis Teórico

Esta investigación inicia con la primera etapa del ciclo que propone la Teoría APOE; es decir, el Análisis Teórico del concepto de permutación. Esta etapa se desarrolla a través del estudio de aspectos histórico-epistemológicos, la revisión de investigaciones previas, la experiencia de los investigadores; todos estos, sobre el concepto de permutación. A continuación, se explica el objetivo de cada uno de los elementos que son utilizados para la primera etapa del Ciclo:

- *Revisión histórico-epistemológica del concepto de permutación:* Busca identificar nociones o estructuras previas, desarrollos, retrocesos y obstáculos que dieron origen al concepto.
- *Experiencia de los investigadores:* Este elemento es de utilidad en el momento del diseño de la DGH.
- *Revisión de investigaciones previas:* Busca identificar las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de permutación y sus recomendaciones para abordarlos; esto es muy importante para el diseño de la DGH. Además, permite identificar descomposiciones genéticas del concepto de permutación o conceptos asociados a él.

Por estas razones, estos elementos son considerados como recursos importantes que permiten determinar cómo los estudiantes podrían llegar a comprender el concepto de permutación e identificar los conceptos previos y conexiones que intervienen en su construcción. De este modo, el desarrollo del Análisis Teórico permite proponer una Descomposición Genética Hipotética del concepto de permutación, el cual se profundiza en la sección 6.1.1, mostrando el desarrollo de esta etapa sobre el concepto de permutación.

## 5.2 Diseño e implementación de instrumentos

Esta etapa del ciclo de investigación se caracteriza por el diseño de instrumentos, como: cuestionarios, talleres, entrevistas, entre otros, que se basan en el diseño de tareas que permiten

evidenciar o complementar la formación de las estructuras y mecanismos mentales descritos en la Descomposición Genética Hipotética del concepto de permutación (Trigueros y Oktaç, 2019). Además, en esta etapa se realiza como instrumento de recolección y análisis de datos, la técnica de observación directa, ya que según Tamayo (2003, p.183) “es aquella en la cual el investigador puede observar y recoger datos mediante su propia observación”. En esta investigación la observación es guiada por las estructuras y mecanismos mentales de un modelo cognitivo del concepto de permutación dinámico, que evoluciona a través del desarrollo curso; lo que permite la interpretación y análisis de los resultados de la observación a partir de la definición de los constructos teóricos de APOE.

Basados en Chamorro (2003) las observaciones de clase se realizan por medio de grabaciones y transcripciones de estas. De esta manera, en esta investigación las interacciones entre las etapas ii. y iii. se definen a través del diseño y análisis de cuatro instrumentos: una prueba diagnóstica, dos talleres de clase, la observación de las clases y una entrevista semiestructuradas. Estos instrumentos sirven como medio importante para el análisis y el refinamiento del modelo cognitivo que permite profundizar sobre la evolución del razonamiento de un estudiante, con respecto a su progreso en la constitución de las estructuras necesarias para la comprensión del concepto de permutación, así como de los mecanismos que las promueven.

De tal manera que, la segunda etapa, Diseño e implementación de instrumentos, no se realiza de manera lineal. Cada vez que se aplica un instrumento se tiene en cuenta la interacción continua con las demás etapas, es decir, los instrumentos de recolección y análisis de datos se diseñan mediante un análisis continuo entre la primera y tercera etapa del ciclo de investigación.

### 5.3 Recolección y Análisis de datos

Esta tercera etapa del ciclo de investigación se mantiene en una interacción continua entre las otras etapas del ciclo, que permite ir y volver a cada etapa con la finalidad de lograr el diseño de una Descomposición Genética Validada, con el objetivo de describir las estructuras y mecanismos mentales que necesitan construir estudiantes de un programa de Matemáticas y Licenciatura en Matemática para comprender el concepto de permutación. Esta etapa del ciclo de investigación finaliza cuando la evidencia empírica de los estudiantes conduzca hacia las construcciones mentales de la Descomposición Genética Validada. Esta recolección y análisis de datos se realiza en diferentes implementaciones, ya que este modelo cognitivo tiene más de un refinamiento para poder llegar a la DGV.

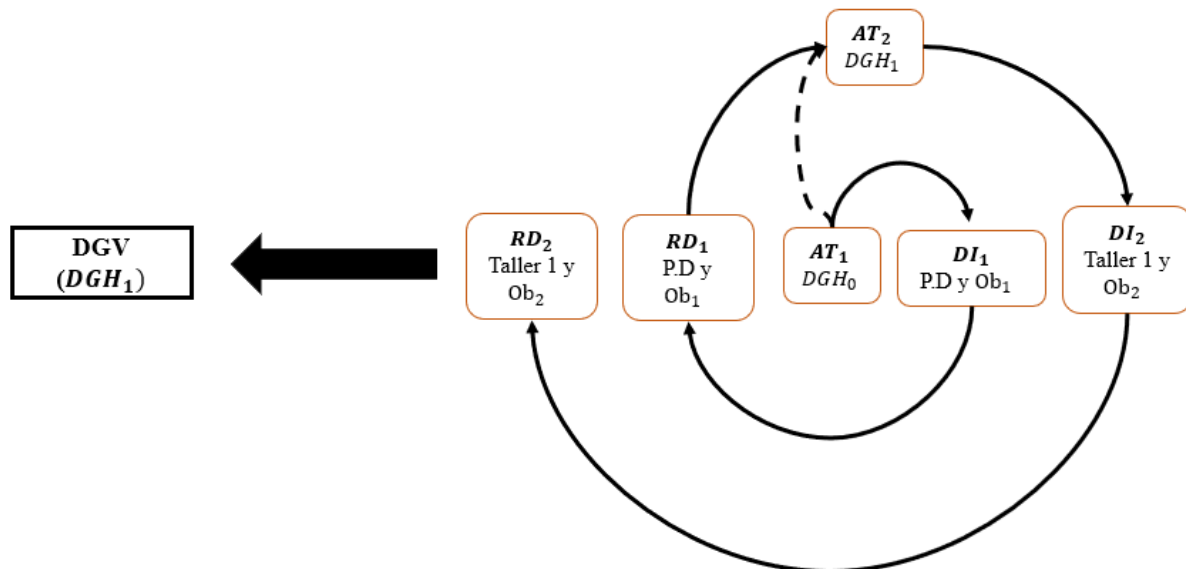
Para llegar a la validación de la Descomposición Genética del concepto de permutación se realiza la aplicación del ciclo dos veces, estas aplicaciones se pueden entender como un espiral (ver Figura 3), donde el centro de este espiral empieza con el primer Análisis Teórico ( $AT_1$ ), el cual este compuesto de la revisión histórico-epistemológica, la revisión de investigaciones previas y la experiencia de la investigadora; a partir de este análisis se diseña el primer modelo cognitivo ( $DGH_0$ ), el cual es refinado mediante el diseño y análisis de la Prueba Diagnóstica (PD) y las primeras observaciones de clase ( $Ob_1$ ); esto corresponde a el primer Diseño de Instrumentos ( $DI_1$ ) y la primera Recolección de Datos ( $RD_1$ ).

Teniendo en cuenta este modelo cognitivo refinado ( $DGH_1$ ) se diseña el primer taller (Taller 1) y se continua con la observación de las clases ( $Ob_2$ ); el análisis de estos instrumentos por medio del segundo Diseño de Instrumentos ( $DI_2$ ) y la segunda Recolección de Datos ( $RD_2$ ), permite la validación del modelo cognitivo  $DGH_1$  y una variación de este modelo cognitivo denominado  $DGH_{1.1}$ .

Por lo tanto, este espiral termina con la Descomposición Genética Validada ( $DGH_1$ ) y la variación del modelo validad, debido al análisis de las observaciones de clase; este se denomina como  $DGH_{1,1}$ .

### Figura 3

*Aplicaciones del ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE*



## 6. Aplicaciones del Ciclo de investigación

Esta investigación se desarrolla en una universidad pública de Colombia, durante el primer periodo académico del año 2024 (febrero-julio del 2024), con 17 estudiantes (18-25 años) de programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas que están cursando cuarto semestre; este grupo de estudiantes están tomando por primera vez el curso de Matemática Computacional. Basados en el plan de estudio del Programa, esta asignatura se incluye en el cuarto semestre, teniendo como requisito el curso de Teoría de números; además, se desarrolla de manera

simultánea con las asignaturas: Álgebra Moderna I y Estadística I. Dadas las condiciones de la malla curricular y las diferentes realidades de los estudiantes, algunos han cursado y aprobado previamente Álgebra Moderna y/o Estadística I.

El curso de Matemática Computacional está a cargo de un profesor externo a la investigación, esto permite a la investigadora participar en las clases como observadora, con el objetivo de: conocer la estructura del curso, analizar los conceptos definidos por el profesor e indagar sobre la evolución de los estudiantes. Esta estrategia de participación le permite a la investigadora, identificar y analizar de manera permanente las estructuras y mecanismos mentales que se ponen en juego en el curso, ya sea porque son promovidas por el discurso del profesor o por la participación de los estudiantes. Es importante mencionar que la disposición del profesor en esta investigación es fundamental, ya que inicialmente permite realizar la observación de todas sus clases; brinda toda la información necesaria sobre los estudiantes, la asignatura y el objetivo del curso.

La observación y el diseño del modelo cognitivo propicia una interacción constante entre el profesor y la investigadora sobre el diseño y desarrollo de la clase; esta interacción permite que se diseñen las clases a partir de las estructuras involucradas en el modelo cognitivo hipotético diseñado por la investigadora. La observación de las clases permite a la investigadora diseñar los tipos de tareas teniendo en cuenta el proceso de construcción del concepto y las estructuras que genera el profesor en los estudiantes en las clases. Este diálogo constante entre profesor e investigadora logra que el profesor realice énfasis en la relación que tiene el concepto de permutación con las funciones y fortalecer en ellos conceptos previos necesarios para esta construcción del concepto, como lo son los conceptos de conjunto, funciones, relaciones de equivalencia.

El curso de Matemática Computacional tiene como objetivo describir, analizar y diseñar algoritmos que permitan resolver computacionalmente problemas de diferente índole. Algunos de los propósitos de la asignatura son: explicar la terminología de la algoritmia y de la matemática discreta, conocer acerca de las aplicaciones que tiene la matemática computacional en otras ramas del conocimiento. Por tanto, el contenido inicial del curso diseñado por el profesor se desarrolla en tres grandes grupos (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**): preliminares, técnicas de conteo y aplicaciones.

**Tabla 1**

*Contenido del curso de matemática computacional realizado por el profesor*

Preliminares	Técnicas de conteo	Aplicaciones
Relaciones.	Principios combinatorios.	Grupos de permutaciones.
Funciones.	Permutaciones.	Grupo simétrico.
Cardinalidad.	Combinaciones.	Lema de Burnside.
Inducción y recursión.	Principio de inclusión y exclusión.	Teorema de Polya.
Relaciones de orden.		
Relaciones de equivalencia.		

Este curso empieza con las definiciones de conceptos preliminares como el de función y cardinalidad, donde viene implícitamente la noción de conjunto, la cual es de utilidad en la construcción y comprensión del concepto de permutación, ya que es una estructura previa necesaria. Después de abordar los conceptos preliminares, el contenido del curso avanza en los conceptos de combinatoria para el uso de aplicaciones en áreas como: matemática discreta y álgebra abstracta. Uno de los principales conceptos de combinatoria y técnica de conteo para la investigadora, es el concepto de permutación; el cual es abordado a partir de las ordenaciones y funciones, haciendo énfasis en que las permutaciones pueden entenderse como funciones. De esta manera, se estructura la equivalencia entre las definiciones del concepto de permutación y función; con el objetivo de comprender los conceptos de técnicas de conteo a partir de sus características y

expandirlas a una abstracción más general; lo que permite ampliar el campo de aplicabilidad del concepto.

A partir de la dinámica y contenidos del curso, en esta investigación se aplica tres veces el ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE, teniendo en cuenta que las tres etapas del ciclo mantienen una interacción continua entre ellas, esto permite el refinamiento del modelo cognitivo hasta llegar a la validación de este. Por lo tanto, las aplicaciones del ciclo (ver Figura 3) en el curso de matemática computacional del semestre 2024-2 se organizan de la siguiente manera:

- I. Como primera aplicación del ciclo, se empieza a desarrollar el primer Análisis teórico ( $AT_1$ ), con base en una revisión epistemológica y el estudio de modelos cognitivos sobre el concepto de permutación. A partir de este, surge el diseño de la  $DGH_0$ , en concordancia con este modelo cognitivo se diseña el primer instrumento denominado Prueba Diagnóstica; el objetivo de esta Prueba es analizar si los estudiantes evidencian las estructuras previas necesarias para la construcción del concepto. Además, se tiene en cuenta la observación directa del curso, con el fin de examinar cómo se construye el concepto mediante la interacción entre los estudiantes, profesor e investigadora. A partir del análisis de estos instrumentos interesa determinar si los estudiantes reconocen las permutaciones como funciones biyectivas u ordenaciones, así como establecer el tipo de tareas que abordan usando dichos acercamientos al concepto.
- II. En la segunda aplicación del ciclo, el Análisis Teórico se refuerza ( $AT_2$ ) mediante la interacción entre las tres etapas de la primera aplicación del ciclo que se realizaron a partir del análisis de la Prueba diagnóstica, la revisión histórico-epistemológica consolidada y el análisis de la observación de clase, permitiendo el refinamiento de la  $DGH_0$ . Todos estos

elementos de cada etapa del ciclo fueron analizados en conjunto; lo que permite el diseño de una segunda DGH denominada  $DGH_1$ . Para la validación o refinamiento de este nuevo modelo cognitivo ( $DGH_1$ ) se aplica de nuevo el ciclo, teniendo en cuenta el  $AT_2$  se diseña como instrumento el Taller 1. Este Taller tiene como objetivo fomentar en los estudiantes la coordinación de Procesos que permita construir un Proceso de permutación, donde se tiene en cuenta todas las características de este concepto (orden, tamaño, repetición), en especial los tipos de permutaciones. Dicha coordinación también se puede fomentar a partir de la creación de algoritmos en un lenguaje de programación; esto lo notamos gracias a la continuación de la observación de las clases, en las cuales el profesor hace uso de algoritmos en Python para mostrar la equivalencia entre la ordenación y función para el concepto de permutación. En esta segunda aplicación del ciclo, el análisis del Taller 1 y la observación permiten la validación del modelo cognitivo  $DGH_1$  y la descripción de una la variación del modelo cognitivo validado.

### **6.1 Primera Aplicación del ciclo**

Al tiempo en el que se realiza el Análisis teórico y el diseño del primer modelo cognitivo se desarrolla la observación de clase de las primeras sesiones; es decir, en la primera aplicación del ciclo, se observan siete sesiones de las 33 sesiones totales de clase. Cada sesión se llevó a cabo en un tiempo aproximado de dos horas; en un salón de cómputo lo que permite que las clases sean prácticas y teóricas. En la primera sesión del curso se informa a los estudiantes sobre la investigación que se llevará a cabo durante todo el semestre, se explica el rol de la investigadora como observadora, se menciona la implementación de talleres durante la clase, las grabaciones de las clases y la programación de entrevistas en espacios extraclase.

Después de la intervención de la investigadora, el profesor presenta la dinámica del curso, el contenido de este, enfatizando en los conceptos de técnicas de conteo y el objetivo del curso para la construcción y aplicación del concepto de permutación; finalmente, se muestra el método de evaluación el cual consta de retos semanales basados en tareas tanto tradicionales como informáticas (algoritmos y programación), la realización de trabajos y talleres que son realizados por la investigadora teniendo en cuenta los temas vistos y el modelo cognitivo diseñado en el momento. En cada aplicación del ciclo, se mantendrá una constante comunicación entre la investigadora y el profesor con el fin de potenciar la construcción del concepto en los estudiantes, prevaleciendo los temas importantes para esto.

En las primeras siete sesiones el profesor inicia con las definiciones de los conceptos previos que son mencionados en la parte de preliminares (ver Tabla 1), esto con el objetivo de familiarizar a los estudiantes y repasar conceptos como el de función, cardinalidad y recursión que son útiles e importantes en lo que respecta a las técnicas de conteo y la combinatoria. Ya que existen situaciones en las que los conceptos de combinatoria, especialmente el de permutación, pueden construirse en términos de funciones, teniendo en cuenta la cardinalidad de los conjuntos. También se definen las relaciones de orden, las relaciones de equivalencia y los conjuntos ordenados que son útiles para fomentar la comprensión del concepto de permutación, lo que permite que el estudiante estructure algoritmos para generar el total de permutaciones; por ejemplo, la creación del total de permutaciones a partir del orden lexicográfico.

En la cuarta sesión se implementa el primer instrumento denominado Prueba diagnóstica que es diseñado con base en el primer modelo cognitivo y el Análisis Teórico; esto con el objetivo de determinar si los estudiantes han estructurado los conocimientos previos necesarios para iniciar la construcción del concepto de permutación. Este instrumento permite analizar si el estudiante:

reconoce diferentes representaciones relacionadas con el concepto de permutación, identifica las permutaciones como ordenación o función biyectiva, hace uso de las diferentes representaciones para abordar la tarea y conoce e identifica fórmulas para las técnicas de conteo correctamente.

En esta primera aplicación del ciclo se realiza la observación de clase del curso de matemática computacional y se describen algunas secciones de clases que fueron relevantes para la investigación, ya que en estas secciones de clases se contemplan la construcción de algunas estructuras y mecanismos mentales del primero modelo cognitivo y cómo el profesor muestra la equivalencia de la ordenación y función para el concepto de permutación.

### ***6.1.1 Análisis Teórico uno (AT<sub>1</sub>)***

En este capítulo se desarrolla la primera etapa del Ciclo de investigación propuesta por la Teoría APOE. Con el objetivo de describir las estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, encapsulación, des-encapsulación, entre otros) que puede realizar un individuo para construir el concepto de permutación, viendo la equivalencia entre ordenación y función biyectiva para el concepto de permutación de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes; lo que le permitirá encontrar la aplicabilidad de la permutación en diversas áreas de las matemáticas. Con el fin de diseñar un modelo cognitivo llamado Descomposición Genética Hipotética del concepto de permutación que describa las construcciones mentales necesarias para la comprensión del concepto. Por otra parte, se espera que este modelo cognitivo sirva como punto de referencia para el diseño de actividades y modelos de enseñanza que involucren la comprensión de la permutación.

Para el diseño de este modelo cognitivo y en búsqueda de la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que puede realizar un individuo para construir el concepto de permutación, se plantean las siguientes preguntas: ¿Qué presaberes debe poseer un estudiante para construir el

concepto de permutación? ¿Qué concepciones tiene un estudiante sobre el concepto de permutación? Y finalmente, ¿Cómo estas concepciones pueden promover o no la construcción del concepto de permutación como ordenación y como función?

Las preguntas planteadas en el párrafo anterior conducen a profundizar sobre el objeto matemático, en este caso, el concepto de permutación. Por esta razón, se presenta una revisión histórico-epistemológica del concepto y cómo otras investigaciones han abordado este concepto para la enseñanza y aprendizaje (revisiones de investigaciones previas) lo que permite encontrar otras descomposiciones genéticas de este concepto tomado como ordenación o función biyectiva de manera aislada, sin tener en cuenta la equivalencia de estas concepciones para la comprensión del concepto de permutación.

**6.1.1.1 Revisión Histórico-Epistemológica del concepto de Permutación.** La construcción de este apartado se realiza a partir de la revisión de algunas publicaciones, artículos o libros sobre el concepto de permutación, entre ellos están: Salgado (2007), Biggs (1979), Piaget y García (1982), Wilson y Watkins (2013) y Chavarría (2014). Siguiendo estos trabajos, se presenta un recorrido histórico-epistemológico de la noción de permutación, partiendo del concepto como ordenación. A partir de esto, se analiza cómo se usa el concepto de permutación en otras áreas como la música, poesía, etc. Particularmente se profundiza en la solución de ecuaciones algebraicas, lo que permite que se defina posteriormente la permutación de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes como una función biyectiva de este conjunto en sí mismo. Como se conoce hoy en día, estas ideas y la definición del concepto de permutación como función biyectiva fomentaron una de las primeras estructuras algebraicas que da paso al desarrollo de la Teoría de Grupos. Como menciona Salgado (2007) citando a Biggs (1979):

Desde hace muchos años se habla de permutaciones y combinaciones; sin embargo, las palabras ordenación (permutación) y combinación han adquirido un significado muy preciso dentro de las matemáticas, pero fuera de ellas no. Esto ocasiona problemas en el estudio del origen de estas nociones, pues en las traducciones de trabajos antiguos no se hace uso de los términos en el sentido estrictamente matemático. Así, en la historia se encuentran trabajos que hablan de permutaciones y combinaciones cuando en realidad solo manejan una, ambas o ninguna de las nociones. (p. 6)

Estas definiciones se caracterizan por encontrar el número de arreglos que se forman a partir de los elementos de un conjunto dado, respetando ciertas reglas, como: el tamaño, el orden o la repetición. A continuación, definimos los conceptos que se destacan en este recorrido histórico-epistemológico y que se utilizan a lo largo de este trabajo de investigación:

Sea  $N$  un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes, entonces:

– *Permutación sin repetición o Permutación*: Este concepto tendrá dos definiciones que son equivalentes: la *definición intuitiva*, entendida como un ordenamiento de los  $n$  elementos del conjunto  $N$  y la *definición formal*, que se entiende como una función biyectiva del conjunto  $N$  en sí mismo. El número total de permutaciones es  $P_n = n!$ .

– *k-permutaciones o Permutaciones de un subconjunto*: Son permutaciones de los subconjuntos de  $k$  elementos del conjunto  $N$  con  $n$  elementos. El número total de las  $k$  –permutaciones con  $k \leq n$  es  $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Sea  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un multiconjunto finito con multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_k$  respectivamente, es decir  $x_1$  se repite  $m_1$  veces,  $x_2$  se repite  $m_2$  veces y así sucesivamente. Decimos que  $M$  tiene tamaño  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  entonces:

– *Permutación con repetición o Permutación de un multiconjunto*: Son las permutaciones de un multiconjunto  $M$ . El número total de  $n$ -permutaciones con repetición de  $k$  tipos es  $P(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$

A continuación, se muestra un recorrido histórico-epistemológico del concepto de permutación, éste se desarrolla inicialmente a través de las contribuciones de algunas culturas, para luego centrarse en los desarrollos logrados en el siglo XVII donde el total de ordenaciones (permutaciones) de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes se define a través de  $n!$ ; esta definición formal del número total de permutaciones en notación moderna con el uso del factorial aparece por primera vez en 1634 en el libro *Cursus Mathematicus* de *Herigonius* (Salgado, 2007).

A partir del siglo XVII realizamos el recorrido histórico-epistemológico señalando algunas aplicaciones en diversas áreas y contextos donde emergen las permutaciones. Esto permite que se estructure una concepción de permutación como función biyectiva de manera equivalente a la definición de ordenación, que más adelante motiva su estudio como una estructura algebraica.

El concepto de permutación se desarrolla principalmente en tres culturas, empezando por la cultura china, en esta cultura el concepto es netamente utilizado para el desarrollo en otras áreas como la astrología sin enfocarse en el desarrollo o evolución del concepto de permutación ni otros conceptos de la combinatoria. Siguiendo en las utilidades del concepto, la cultura india empieza a hacer uso de las permutaciones en áreas como la música, poesía, entre otras; además de esto, se empiezan a enfocar en la creación de algoritmos para hallar el número total de permutaciones, permitiendo realizar más fácilmente estas listas. Estos algoritmos permiten un acercamiento a las fórmulas de las permutaciones, y a encontrar y definir las características que tienen las

permutaciones, como el orden, la repetición, entre otras; para estos tipos de permutaciones, esta cultura encuentra formas para calcularlas.

Finalmente, en la cultura occidental se hace más importante el estudio del concepto de permutación, sus aplicaciones y la formalización de los tipos de permutaciones con sus fórmulas permitiendo evadir las extensas listas para saber el total de las permutaciones. En esta cultura aparece la definición de permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes como función biyectiva siendo una de las primeras estructuras algebraicas, entendiéndose  $n!$  como el total de funciones biyectivas de un conjunto de  $n$  elementos en sí mismo. A continuación, se muestra este desarrollo del concepto de permutación por culturas a más profundidad.

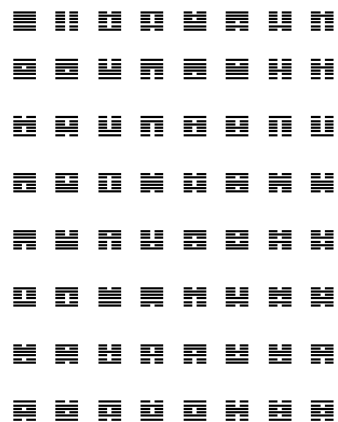
*CHINA:* Como menciona Salgado (2007) y Wilson y Watkins (2013), la fuente más antigua que habla sistemáticamente de permutaciones y combinaciones es la cultura China. El interés por combinar y ordenar dos elementos distintos como  $n$ -tuplas empieza aparecer a finales de la dinastía Zhou (III a.C.), esto es lo que actualmente se conoce como las *variaciones con repetición*: Sea  $N$  un conjunto finito con  $n$  objetos o elementos si se toman  $r$  elementos del conjunto  $N$ , con  $r < n$ , entonces el total de formas posibles de ordenar  $r$  elementos es  $n^r$ .

Como señalan Wilson y Watkins (2013) este resultado se menciona por primera vez en el libro chino *I Ching* (libro de los cambios); este libro es una compilación de material que data del siglo VII a.C. En este libro se encuentra como ejemplo de las variaciones con repetición un sistema basado en dos símbolos: el Yang (—) y el yin (— —); estos símbolos los combinan en secuencias de 3 y de 6 elementos. Así las variaciones con repetición encontradas son  $2^3 = 8$  secuencias de 3

símbolos denominados trigramas<sup>2</sup> y  $2^6 = 64$  secuencias de 6 símbolos denominados hexagramas<sup>3</sup>. Esta disposición estándar de las 64 posibilidades (ver Figura 4), se denomina *orden de King Wen*, porque el texto básico de este libro se ha atribuido tradicionalmente a *King Wen* (1100 a.C), el legendario progenitor de la dinastía Zhou.

#### Figura 4

*Lista de los 64 hexagramas de 6 símbolos realizados en el libro I Ching*



*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 4), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

Estas secuencias eran usadas para predecir cosas por medio de la astrología, por esta razón los símbolos usados era el Yin (— —) y el Yang (—) donde la secuencia más usada era la de seis símbolos, generando una lista de estas secuencias que se pueden observar en la Figura 4, según Wilson y Watkins (2013) esta forma de enlistar o generar las secuencia fue al principio de manera aleatoria, para luego organizarla de manera lexicográfica y permitiendo encontrar esta secuencia de 6 símbolos y otras cantidades de símbolos más eficaz y posiblemente sin errores.

<sup>2</sup> En el contexto del libro I Ching un trígama es una figura compuesta por tres líneas horizontales apiladas, en la cual cada línea es un Yang o un Yin.

<sup>3</sup> En el contexto del libro I Ching un hexagrama es una figura compuesta por seis líneas horizontales apiladas, en la cual cada línea es un Yang o un Yin.

Wilson y Watkins (2013) señalan que más adelante, hacia 1069, Shao Yung (1011-1077) introdujo una forma estrictamente lógica de ordenar los hexagramas, leyéndose cada hexagrama de abajo a arriba, lo que procede a un ordenamiento lexicográfico:  $\{\text{☰}, \text{☱}, \text{☲}, \text{☳}, \text{☴}, \dots, \text{☵}, \text{☶}\}$ . Se propone que este orden es más fácil de usar que el orden del rey Wen, ya que ahora se podía encontrar rápidamente un patrón de construcción. Si se representa el Yang (—) como 1 y el Ying (-- ) como 0, los anteriores hexagramas definen representaciones de números binarios (leyendo cada hexagrama de abajo hacia arriba), y al tomar este orden lexicográfico, se encuentran los números del 0 al 63 de forma binaria (ver Figura 5).

### Figura 5

*Representación binaria de los hexagramas*

$$\begin{aligned} \text{☰} &= (000000)_2 = 0 \\ \text{☱} &= (000001)_2 = 1 \\ \text{☲} &= (000010)_2 = 2 \\ &\vdots \\ \text{☵} &= (111110)_2 = 62 \\ \text{☶} &= (111111)_2 = 63 \end{aligned}$$

*Nota.* Elaboración propia de cómo se describe cada hexámetro en forma binaria

Según Wilson y Watkins (2013) el estudio de los hexagramas y trigramas sigue siendo de interés, en particular *Chen Houyao* (1648-1722) trata sistemáticamente los problemas de permutaciones y combinaciones en temas relacionados con: la adivinación con trigramas, la formación de hexagramas, y las combinaciones de los diez tallos celestes (tiangan) y las doce ramas terrestres (dizhi) para formar los ciclos astronómicos sexagesimales, con el objetivo de mejorar la eficiencia de los algoritmos de sus predecesores. Por ejemplo, en el caso de los hexagramas, la Figura 6 muestra un método de generar los hexagramas o configuraciones de 6

líneas a partir de los  $n$ -gramas anteriores con  $2 \leq n \leq 6$ , es decir que el cálculo de todos los arreglos posibles con repetición (ya que el yin y el yang se pueden repetir) puede obtenerse mediante la multiplicación sucesiva de las dos posibilidades.

### Figura 6

*Método para calcular los 64 hexagramas de 6 símbolos a partir de los  $n$ -agramas anteriores*

$$\begin{aligned} \text{number of configurations consisting of 2 lines} &= 2 \times 2 = 4; \\ \text{number of configurations consisting of 3 lines} &= 4 \times 2 = 8; \\ &\vdots \\ \text{number of configurations consisting of 6 lines} &= 32 \times 2 = 64; \end{aligned}$$

*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 71), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

En la Figura 6 se generan los hexagramas de la siguiente manera: Primero se buscan los arreglos o configuraciones de 2 líneas, es decir 2-gramas, para este hay  $2 \times 2 = 4$ . A partir del total de 2-gramas que son 4, se generan los 3-gramas (trigramas), donde la posibilidad de colocar un elemento en cada 2-grama era 2 y como el total de 2-gramas son 4, entonces el total de trigramas es  $4 \times 2 = 8$ . Este proceso se continúa de la misma manera para 4 líneas (4-gramas) que es  $8 \times 2 = 16$ , para los de 5 líneas (5-gramas) que es  $16 \times 2 = 32$ ; hasta llegar a los de 6 líneas (6-gramas o hexagramas) que es  $32 \times 2 = 64$ .

Esto muestra una idea de recursión que empieza a ser eficiente para este tipo de problemas, con estas ideas *Chen Houyao* usa los juegos de azar, como: el lanzamiento de dados y los juegos de cartas, como un vehículo para discutir algoritmos de cálculo de arreglos (o variaciones), con o sin repetición. Es decir, estos arreglos o variaciones dependiendo a sus características en cada problema o juego, se puede entender como permutaciones o combinaciones.

Esto permite mostrar que en China los juegos de azar y los problemas de adivinaciones y astrología proporcionaron un marco para el tratamiento matemático de algunos conceptos de

combinatoria. Pero como menciona Wilson y Watkins (2013) es dudoso que se diera un paso conceptual para sentar las bases de una teoría matemática de la probabilidad, puesto que estos autores mencionan que:

Ni el método de Chen, ni los algoritmos posteriores para calcular las combinaciones y permutaciones, parecieron inspirar ulteriores consideraciones teóricas sobre el azar, al menos a juzgar por las fuentes matemáticas conservadas. En China, la teoría de la probabilidad, que ahora es una parte importante de la estadística matemática y un campo que se basa en herramientas combinatorias, parece haber sido un área matemática totalmente importada de Occidente. (Traducción propia de Wilson y Watkins (2013), p. 72-73)

*INDIA:* La combinatoria, considerada en su sentido general como el conjunto de manipulaciones y el estudio de configuraciones (o arreglos), apareció relativamente pronto en ámbitos de la actividad intelectual árabe medieval, en áreas como: la astrología, la lexicografía, la música, la química e incluso la filosofía. Tras el resurgimiento de disciplinas tradicionales (como la geometría, la teoría de números y la astronomía) y el desarrollo de otras nuevas (como el álgebra, el cálculo indio y la trigonometría), surgieron entonces nuevas preocupaciones combinatorias, vinculadas al estudio de cuestiones teóricas (Wilson y Watkins, 2013).

El desarrollo de las fórmulas para encontrar la solución numérica a problemas de conteo, sin tener que enlistar todos los casos, fue un proceso gradual y se llevó a cabo en el transcurso de un largo periodo de tiempo (que culmina alrededor de 1634). Pero mientras ese proceso se desarrollaba, por otra parte, se creaban algoritmos o reglas para solucionar problemas de conteo. Por ejemplo, según Biggs (1979) en el libro de *Lilavati de Bhaskara* se encuentra una de las primeras definiciones para determinar el número total de permutaciones, esta es: “la multiplicación de la progresión aritmética, comenzando y aumentando por la unidad y continuada hasta el número

de lugares, estas son las variaciones de un número” (p. 117); esto es similar a la definición de factorial para el total de permutaciones ( $n!$ ) que conocemos hoy. Uno de los ejemplos (#269 del libro) que menciona Biggs (1979) que se encuentra en el libro de *Lilavati de Bhaskara*, donde hacen uso de esta definición para dar el total de permutaciones; es el siguiente:

Example: How many are the variations of form of the god Shambhu by the exchange of his ten attributes held reciprocally in his ten attributes held reciprocally in his several hands: namely the rope, the elephant’s hook, the serpent, the tabor, the skull, the trident, the bedstead, the dagger, the arrow, and the bow: as those of Hari by the exchange of the mace, the discus, the lotus and the conch?

Statement: Number of places 10. In the same mode as above shown, the variations of forma are found [to be] 3628800. So, the variations of form of Hari are 24. (p.117)

Este ejemplo involucra las 10 manos que tiene el dios Sambhu y plantea el problema de ordenar sus 10 atributos (la cuerda, el anzuelo del elefante, la serpiente, el tambor, la calavera, el tridente, el marco de la cama, la daga, la flecha y el arco) que aparecen en las distintas manos del dios. Entonces, se tiene que el número de puestos son 10 y 10 son los atributos del dios, así el número total de las variaciones de los dones es 3628800, lo que corresponde a  $10!$ . Una situación similar se presenta con los atributos del dios Hari, ya que el posee 4 manos, es decir cuatro lugares para ordenar los 4 atributos, con un total de 24 variaciones o arreglos, que corresponden a  $4!$ .

Según Wilson y Watkins (2013) en el transcurso de los siglos XII y XIII se reexaminan problemas que fueron planteados en el siglo VIII por la lingüística árabe, estos se abordan a través de la ciencia del cálculo. A partir de las necesidades de los lingüistas se plantearon y resolvieron problemas utilizando fórmulas y razonamientos de carácter combinatorio. Por ejemplo, *Ibn Munim* (-1228), matemático de Marrakech, en su tratado *Fiqh al-hisāb* (ciencia del cálculo), en la

undécima sección de este libro, titulada “*El recuento de palabras que son tales que el ser humano solo puede expresarse con una de ella*” describió su concepción sobre combinatoria.

En este libro presenta una generalización de los cálculos realizados anteriormente por *al-Khalīl Ibn Aḥmad*, que le permiten determinar combinaciones sin repetición de fonemas árabes. *Ibn Munim* continúa con estos estudios combinatorios teniendo un enfoque basado en la inducción, como se muestra en la Figura 7, establece fórmulas relativas a las permutaciones de un conjunto de  $n$  letras (ver (2) y (3) de la Figura 7), esto es equivalente a las fórmulas para el total de permutaciones (permutaciones sin repetición) y permutaciones con repetición (permutaciones de un multiconjunto) que usamos hoy.

### Figura 7

#### *Fórmulas de combinatoria establecidas por Ibn Munim*

##### Results established by Ibn Mun'im

- (1) Combinations in the arithmetical triangle:

$$C(n, k) = C(k - 1, k - 1) + \dots + C(n - 1, k - 1).$$

- (2) The number of permutations in a word of  $n$  distinct letters:

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n.$$

- (3) The number of permutations in a word of  $n$  letters of which  $p$  letters are repeated (respectively)  $k_1, k_2, \dots, k_p$  times:

$$P(n, k) = p_n / (p_{k_1} \times p_{k_2} \times \dots \times p_{k_p}).$$

- (4) The number of pronunciations of a word, taking note of vowels:

$$S_n = 4S_{n-1} - 3S_{n-3}, \text{ or equivalently } S_n = 3S_{n-1} + 3S_{n-2}.$$

*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 98), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

Estos planteamientos, resultados y comentarios realizados por *Ibn Munim* muestran un contexto más matemático, estos se pueden reconocer como nuevos resultados, en comparación con la tradición árabe. Como menciona Wilson y Watkins (2013) esta etapa marca el final de las practicas combinatorias por medio de la enumeración y creación de tablas; y señala el inicio de

una nueva etapa, la de la extensión de las fórmulas y creación de algoritmos que se extienden a diferentes aplicaciones.

Wilson y Watkins (2013), mencionan que más adelante, en una monografía titulada *Ganitakaumundī (El deleite del loto del cálculo)*, escrita por *nārāyaṇā paṇḍitā* (1340-1400) en 1356, aparece el estudio de la generación de permutaciones en los *sutras*<sup>4</sup> donde se definían algoritmos para enumerar todas las permutaciones de un conjunto de orden colexicográfico decreciente. Esto representa una ampliación de los algoritmos de *Śārngadeva* para que los conjuntos múltiples generales (conjuntos con elementos repetidos o multiconjunto) pudieran permutarse fácilmente.

Un ejemplo de esto es la organización de las permutaciones del conjunto  $\{1,1,2,4\}$  de manera colexicográficamente decreciente, ver Figura 8; esta organización consta de comparar las permutaciones en el último número en que difieren y colocar el mayor de primero. Por ejemplo, si tomamos las permutaciones 1124 y 1214, ellas difieren en la segunda y tercera posición, la tercera posición de la primera es 2 y la tercera posición de la segunda es 1 por lo tanto, 1124 va primero que 1214. Esta idea de organizar las permutaciones a partir de ciertas condiciones permite la creación de algunos algoritmos o reglas para crear la lista de todas las permutaciones; así, a partir del siglo XII se genera una evolución en el concepto de permutación, aunque no aparece aún la formalización de la fórmula para el total de permutaciones.

### **Figura 8**

*Lista de permutaciones de un conjunto de cuatro elementos con elementos repetidos*

1124, 1214, 2114, 1142, 1412, 4112, 1241, 2141, 1421, 4121, 2411, 4211,

---

<sup>4</sup> Textos en el hinduismo o el budismo que contienen colecciones de aforismos, es decir, colecciones de reglas o fórmulas.



algoritmo para encontrar el total de permutaciones de seis letras hebreas, no logró usarlo para generar la lista correcta de las 720 permutaciones.

A partir del siglo XII, los conceptos de combinatoria se extienden por toda Europa, se destaca el trabajo sobre las aplicaciones y contextos relacionados con la noción de permutación. Esto permitió que en el siglo XVII se estableciera la fórmula para determinar el total de permutaciones de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes, como  $n!$ . De esta manera, este recorrido histórico-epistemológico ya no será enfocado en las culturas, sino ahora se centra en las aplicaciones y contextos que toman una noción y/o concepto de permutación; estos contextos se relacionan con la música, la poesía, los juegos entre otros. Una de las aplicaciones más relevantes del concepto de permutación es en matemáticas, específicamente en el desarrollo del álgebra, en particular al abordar la solución de ecuaciones algebraicas.

Esto promovió una nueva manera de comprender el concepto de permutación, ahora, como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo. A esta nueva definición se le asigna unas características que le permite ser una de las primeras estructuras algebraicas, tomando un rol importante en la Teoría de Grupos. En las aplicaciones en el área de las matemáticas se irá mostrando los aportes que dieron diferentes matemáticos al concepto de permutación y otros, llegando a consolidar la combinatoria como una rama de las matemáticas.

Una de las primeras aplicaciones del concepto de permutación encontradas en Europa es en la poesía. Un verso en particular atrajo la atención de varios matemáticos en el siglo XVII, ya que, al tratar de encontrar el total de permutaciones de las palabras de este verso, se podían ejemplificar nociones relacionadas con la combinatoria conocidos hasta el momento. Este problema parte de un verso o tributo de una línea a la Virgen María, según Wilson y Watkins (2013), un sacerdote jesuita llamado *Bernard Bauhuis* (1575-1629) compuso un tributo a la Virgen

María en hexámetro latino (ver Figura 10) que traducido al español dice: Tienes tantas virtudes, Oh Virgen, como estrellas hay en el cielo.

### Figura 10

*Tributo de una línea a la Virgen María en hexámetro latino*

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera caelo.  
(Thou hast as many virtues, O Virgin, as there are stars in heaven.)

*Nota. Tomado de Combinatorics: Ancient & Modern (p. 22), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.*

Este verso o tributo que se puede tomar como una *poesía permutable*, fue una fuente de inspiración para *Erycius Puteanus* (1574-1646), profesor de la Universidad de Lovaina, ya que como menciona Wilson y Watkins (2013), en 1617 escribe un libro titulado: *Pietatis Thaumata* (Milagros de la piedad), en el que presenta 1022 permutaciones de las palabras del verso creado por *Bauhuis*. En la Figura 11 se presenta algunas de las permutaciones realizadas por *Erycius* en su libro, donde el número que está a la izquierda de la imagen indica la numeración de las permutaciones. Según Wilson y Watkins (2013) en este libro no aparecen el total de permutaciones que se pueden formar con las ocho palabras del verso a la Virgen María, ya que como se conoce actualmente el total de permutaciones de las ocho palabras del verso "*Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera caelo*" es de  $8! = 40.320$ .

### Figura 11

*Algunas permutaciones de las palabras escritas al tributo de María escritas por Erycius*

107 Tot dotes tibi, quot caelo sunt sidera, Virgo.  
270 Dotes tot, caelo sunt sidera quot, tibi Virgo.  
329 Dotes, caelo sunt quot sidera, Virgo tibi tot.  
384 Sidera quot caelo, tot sunt Virgo tibi dotes.  
725 Quot caelo sunt sidera, tot Virgo tibi dotes.  
949 Sunt dotes Virgo, quot sidera, tot tibi caelo.  
1022 Sunt caelo tot Virgo tibi, quot sidera, dotes.

*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 22), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

Según Wilson y Watkins (2013) *Erycius* había encontrado más permutaciones, pero no fueron escritas, ya que estas permutaciones no obedecían las estrictas reglas del hexámetro clásico<sup>5</sup>, siguiendo estas reglas, las ocho palabras del verso de *Bauhuis* pueden caracterizarse por los patrones que se muestran en la Figura 12. De esta manera, *Erycius* realiza estas 1022 permutaciones teniendo en cuenta estas reglas; de aquí surge la idea de construir permutaciones que obedezcan las reglas del hexámetro o permutaciones “útiles” como las etiquetaba Leibniz (1646-1716). Este enfoque consiste en desarrollar métodos generales para contar todas las permutaciones que son “útiles”, en situaciones en las que muchas permutaciones son “inútiles”. Según Wilson y Watkins (2013) Leibniz toma la idea del trabajo de *Erycius* para considerar varios ejemplos de versos de Proteo, enumerando correctamente algunos de los ejemplos más sencillos, pero cometiendo errores cuando las palabras eran más complicadas.

### Figura 12

*Las ocho palabras del verso con las dos reglas del hexámetro clásico*

$$\begin{aligned} \text{tot} = - , \text{ tibi} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}, \text{ sunt} = - , \text{ dotes} = --- , \\ \text{Virgo} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}, \text{ quot} = - , \text{ sidera} = - \cup - , \text{ and caelo} = --- . \end{aligned}$$

*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 23), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

Según Wilson y Watkins (2013) en las permutaciones sobre el verso de *Bauhuis* al tributo a la Virgen María, se sigue estudiando años más tarde. *Jean Prestet* (1648-1690) en su *Elémens des Mathématiques* de 1675 llega a la conclusión de que hay exactamente 2.196 permutaciones del verso de *Bauhuis* que cumplen las dos reglas del hexámetro adecuado. Sin embargo, Wilson y

---

<sup>5</sup> Son dos reglas para seguir en el hexámetro: i) Cada palabra consta de sílabas largas (- -) o cortas (U); ii) La sílabas de cada verso pertenecen a uno de los 32 patrones que existen.

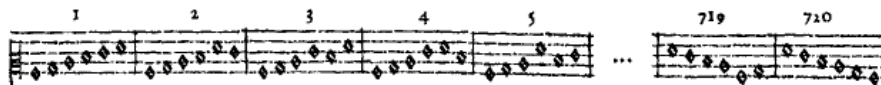
Watkins (2013) mencionan sobre lo realizado por *Prestet* en el verso de la siguiente manera: “se dio cuenta de que había olvidado contar bastantes casos, incluidas las permutaciones número: 270, 384 y 725” (p.24); dichas permutaciones se refieren a las permutaciones que aparecen en la Figura 10. Sin embargo, Wilson y Watkins (2013) afirman que *Prestet* más adelante se da cuenta de sus errores y reescribe el material en su obra publicada en 1689 *Nouveaux Elémens des Mathématiques*, demostrando que el número de permutaciones que cumplían las dos reglas era de 3276.

Según Wilson y Watkins (2013) este problema es también estudiado por John Wallis (1616-1703) en su Discurso de las combinaciones, explicando por qué creía que el número total de permutaciones que cumplen las reglas del hexámetro era de 3096. Finalmente, como menciona Wilson y Watkins (2013) *Jacob Bernoulli* (1655-1705) es quien encuentra el total de permutaciones que cumplen las reglas del hexámetro, un total de 3312 permutaciones, la demostración de esta afirmación aparece en la primera edición de su obra *Ars Conjectandi*, publicada en 1713, ocho años después de su muerte.

La música es otro contexto de aplicación del concepto de permutación, Wilson y Watkins (2013), comentan que, *Marin Mersenne* (1588-1648) expuso las 720 permutaciones de los seis tonos {*ut, re, mi, fa, sol, la*} en su *Traitez de la Voix et des Chants (Tratado de la voz y el canto)*, presentando también estos datos en notación musical (ver Figura 12). Las permutaciones de las tablas de Mersenne estaban ordenadas de manera lexicográficas con respecto al orden  $ut < re < mi < fa < sol < la$ , empezando por {*ut, re, mi, fa, sol, la*} y terminando por {*la, sol, fa, mi, re, ut*}. *Mersenne* también preparó un manuscrito “*grand et immense*” que enumeraba las 40.320 permutaciones de 8 notas en 672 páginas de folio, seguidas de algoritmos de clasificación y desclasificación.

**Figura 13**

*Lista de permutaciones presentada en notación musical por Marin Mersenne*



*Nota.* Tomado de *Combinatorics: Ancient & Modern* (p. 10), por Wilson y Watkins, 2013, Oxford.

Antes de continuar con las múltiples aplicaciones que tiene el concepto y de formalizarse el número total de permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos diferentes como  $n!$ , diferentes matemáticos estudiaron el concepto de permutación enfocándose en diversas características, como el orden, la repetición, entre otros. Según Wilson y Watkins (2013) *Cardano* (1501-1576) revela muchos conocimientos combinatorios en al menos cuatro de sus libros: *Practica Arithmeticae* (1539), *De Subtilitate* (1550), *Liber de Ludo Aleae* escrito hacia 1550 y su *Opus Novum de Proportionibus* (1570). A partir de estas ideas de Cardano sobre combinatoria, se empieza a utilizar sus resultados y a generar fórmulas con el uso de la regla del producto para las permutaciones y combinaciones.

Wilson y Watkins (2013) mencionan que *Christoph Clavius* (1538-1612) publicó una serie de libros de texto de matemáticas y comentarios sobre escritos antiguos y medievales para la educación matemática en los colegios jesuitas; utilizando algunos ejemplos de Cardano (permutaciones con letras), donde aparecen aún más expresiones (dicciones) si se pudieran permutar los elementos en cada conjunción. Así pues, concibió la noción de arreglos (permutaciones) considerando únicamente las permutaciones sin repetición de todos los elementos del conjunto finito (este caso es lo que actualmente se conoce como permutación de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes), las calculó mediante la fórmula de recursión. Este se considera

un gran avance y acercamiento a la consolidación de la fórmula del total de permutaciones sin repetición que es conocida actualmente como  $P_n = n!$ .

Según Biggs (1979) en 1634 aparece por primera vez la formalización para encontrar el número total de permutaciones, con la notación moderna  $n!$  en el libro *Cursus Mathematicus* de *Pierre Hérigone* (1580-1643). En dicha obra aparecen más construcciones sobre conceptos de la combinatoria como construcciones similares a lo que actualmente se conoce como el triángulo aritmético o triángulo de Pascal para el uso de las expansiones binomiales.

Con el establecimiento de la fórmula para determinar el total de permutaciones, diversos matemáticos hacen uso de ella para seguir formalizando ciertos ejemplos de permutaciones con algunas características, nos referimos a las que se definieron anteriormente como:  $k$ -permutación y permutaciones con repetición. Según Wilson y Watkins (2013) *Athanasius Kircher* (1602-1680) desarrolla sus ideas combinatorias con bases en las reglas de *Mersenne* para las permutaciones de  $n$  elementos (permutación  $P_n$ ) y las de un subconjunto con  $k \leq n$  elementos ( $k$ -permutaciones  $P_n^k$ ) y arreglos con repetición (también conocidas como variaciones con repetición).

A pesar de seguir las reglas o ideas de *Mersenne*, había una interpretación sobre las permutaciones en las que *Kircher* no estaba de acuerdo, *Mersenne* explica que sólo hay una permutación de  $n$  elementos iguales (permutación con repetición donde un elemento se repite  $n$  veces), dando el ejemplo que solo hay una permutación de nueve notas iguales; pero *Kircher* no estaba de acuerdo con esto. *Kircher* interpreta la noción de *mutatio* (permutación) en el sentido estricto de la palabra, y afirma que no puede haber ninguna permutación de  $n$  elementos iguales, pero esto contradice la idea que anteriormente mencionamos de *Mersenne*.

*Kircher* al no aceptar la permutación de un conjunto con todos los elementos iguales, negaba la fórmula de *Mersenne* sobre la regla de división de las permutaciones con repetición (esta

regla hace referencia a la fórmula de permutación de un multiconjunto que se escribió al inicio del análisis teórico), ya que al tener un conjunto con  $n$  elementos iguales utilizando esta regla se tiene que hay  $\frac{n!}{n!} = 1$  permutaciones, el cual *Kircher* menciona que para este caso no hay ninguna permutación.

Esta regla de la división que define *Mersenne* es conocida por diversos matemáticos sin haberse formalizado con la notación moderna actual, según *Wilson y Watkins (2013)* esta regla de división de las permutaciones ya era conocida por *Bhaskara* en su libro *Lilavati*; pero esta regla aparece en 1636 por *Mersenne* donde más tarde es explicada por *Wallis* en 1685, pero no se es claro si se es mencionada con la notación moderna; en una conversación entre *Leibniz y Bernoulli*, se anuncia como una regla para los coeficientes de las potencias de un multinomial, con la fórmula  $\frac{n!}{a!b!c!...}$ , para finalmente ser publicado por *Moivre* en 1698 como el coeficiente multinomial siendo de utilidad para el Teorema multinomial y las particiones.

Según *Wilson y Watkins (2013)* *Kircher* piensa en las combinaciones en términos de permutaciones, donde el conjunto a tratar tiene elementos de dos tipos diferentes. A partir de estas ideas y la fórmula de las permutaciones con repetición o regla de la división, *Kircher* calcula las permutaciones con el tipo de repetición  $(n - k, k)$  de  $n$  elementos de dos tipos. Esto conduce a lo que actualmente se conoce como la combinación de  $k$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = C(n, k)$$

*Wilson y Watkins (2013)* comentan que *Sebastián Izquierdo (1601-1681)* sigue con los estudios realizados por *Mersenne* y *Clavius*, escribiendo un tratado general de combinatoria muy claro y sistemático; sin embargo, no se encuentran demostraciones de los teoremas, sino que se

encuentran reglas que son ilustradas mediante tablas y ejemplos. Uno de sus aportes en combinatoria es la distinción de tres grandes grupos de combinaciones:

– *Las que difieren por la sustancia:* esta hace referencia a las combinaciones sin repetición; por ejemplo, sea el conjunto  $\{1,2,3,4\}$ , el total de 2-combinaciones de 4 elementos es  $\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$  y estas son  $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ . Se puede observar que las combinaciones resultantes todas difieren entre sí por la sustancia ya que al compararlas tiene al menos un elemento diferente.

– *Las que difieren por la posición:* esta hace referencia a las permutaciones o permutaciones sin repetición ya que el autor toma  $n$  elementos diferentes teniendo en cuenta su posición es decir el orden importa. Por ejemplo, sea  $\{a, b, c\}$  el conjunto con 3 elementos diferentes entonces el total de permutaciones sin repetición es  $3! = 6$ , así las ordenaciones que difieren por la posición son  $\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, b, a\}, \{c, a, b\}$ .

Según Wilson y Watkins (2013) estos tres grupos conducen a otros cuatro grupos de combinaciones:

– *Las que difieren por sustancia y posición:* este hace referencia a los arreglos o variaciones sin repetición; esto es lo que se conoce también como  $k$ -permutaciones, ya que dos arreglos sin repetición distintos difieren en al menos un elemento o difieren por el orden de los elementos. Por ejemplo, sea  $N = \{1,2,3\}$ ; el total de permutaciones de 3 elementos (3-permutaciones) son  $\frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$ .

– *Las que difieren por sustancia y repetición:* este hace referencia a las combinaciones con repetición ya que se tiene en cuenta si difiere en al menos un elemento o difieren en el número de veces que está repetido un elemento. Por ejemplo, sea el conjunto de

cuatro niños  $\{ana, luz, pepe, luis\}$ , entonces el total de formas para repartir 10 caramelos es

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!(13-10)!} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$

– *Las que difieren por posición y repetición:* estas hacen referencia a las permutaciones con repetición o permutaciones de un multiconjunto ya que se tiene en cuenta el orden y de cuántas veces se repiten los elementos de un multiconjunto. Por ejemplo, sea  $\{1,1,2\}$  el multiconjunto, donde el 1 se repite dos veces, el 2 se repite una vez; por lo tanto, el número total de formas de organizar estos elementos de 3 tipos es  $\frac{3!}{2!1!} = 3$  y estas son  $\{1,1,2\}, \{1,2,1\}, \{2,1,1\}$  ya que entre estas tres se diferencian por la posición y repetición.

– *Las que difieren por sustancia, posición y repetición:* estas hacen referencia a los arreglos con repetición ya que al referirse por la sustancia se tiene en cuenta si difiere en al menos un elemento o difieren en el número de veces que está repetido un elemento, en este caso el conjunto no tiene elementos repetidos, pero si importan la posición u orden y se pueden repetir en el momento de generar los arreglos. Por ejemplo, sea  $N = \{1,2,3\}$  el conjunto de 3 elementos, entonces el total de 2 arreglos del conjunto de 3 es  $3^2 = 9$ . Estos son:  $\{1,2\}, \{2,1\}, \{1,3\}, \{3,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}, \{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}$ .

El interés de la combinatoria en los juegos de azar permitió que los conceptos de combinatoria llegaran a nuevos métodos y fórmulas. Según Wilson y Watkins (2013) el matemático francés *Bernard Frénicle de Bessy* (1605-1675) dejó varios escritos que fueron publicados posteriormente; entre ellos, un *Abrégé des Combinaisons* (*Sinopsis de las combinaciones*) y un tratado sobre los cuadrados mágicos que hace uso de algunas reglas de *Mersenne* para el número de permutaciones y variaciones sin o con repetición, y para las combinaciones sin repetición. Este tratado de *Frénicle* sobre los cuadrados mágicos trataba de la

construcción de estos cuadrados cuando el orden es par y sus elementos pueden permutarse; incluyendo una tabla general con los 880 cuadrados mágicos de  $4 \times 4$ . Wilson y Watkins (2013) afirman que:

Sus ejemplos lingüísticos daban lugar a permutaciones sujetas a ciertas restricciones: se permutan  $n$  letras, pero  $m$  de ellas no deben escribirse una al lado de la otra, o no deben escribirse al principio o al final, y así sucesivamente; llegando a explicar que el número de permutaciones que no satisfacen la restricción debe restarse de  $n!$ . Esto es pensar en encontrar la negación y así realizar su complemento para encontrar la solución. (p. 151)

A continuación, se muestra que la evolución de la noción de permutación toma un rumbo definitivo cuando se relaciona con la solución de las ecuaciones algebraicas y otros problemas y contextos propios de las matemáticas, lo que permite que este concepto no solo se vea útil en la combinatoria sino en otras áreas de las matemáticas como la Teoría de Grupos. Esta descripción del desarrollo de la nueva definición equivalente a la ordenación que se realiza a continuación es basada en Salgado (2007), Piaget y García (1982), Wilson y Watkins (2013) y Chavarría (2014), entre otros.

Chavarría (2014) menciona que uno de los primeros usos de las permutaciones en álgebra aparece con *Cardano* (1501-1576), para encontrar la solución de ecuaciones algebraicas. En este contexto las operaciones que realizaba estaban respaldadas en una relación que se había estructurado entre las raíces y los coeficientes de la ecuación. Al respecto *Cardano* menciona que: “De esto es evidente que el coeficiente del cuadrado, en los tres ejemplos en los cuales hay tres soluciones para la cosa, es siempre la suma de las tres soluciones” (Chavarría, 2014, p.58).

Según Chavarría (2014) esta relación entre las raíces de grado tres y el coeficiente del término cuadrático es un resultado que se extiende a los restantes coeficientes de la ecuación,

teniendo la idea de lo que actualmente se conoce como polinomios simétricos. Estas relaciones permiten una forma de entender el problema de resolución de ecuaciones a partir del uso de sus coeficientes. Las relaciones entre las raíces y los coeficientes de la ecuación tienen como idea en permutar estas raíces y observar que no cambian su valor. Esto permitió ser de ayuda para la consolidación del concepto de polinomios simétricos, donde se hace uso del concepto de permutación como ordenaciones.

*Vieté* (1540-1603) muestra de manera simbólica y formal, las propiedades existentes entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes, llegando a definir los polinomios simétricos, los cuales se caracterizan por ser invariantes bajo cualquier permutación, es decir un polinomio simétrico de grado  $n$ ,  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un polinomio tal que al intercambiar o permutar alguna de las variables sigue siendo el mismo.

Como se ha mencionado anteriormente, los conceptos de permutación y combinación eran útiles en varias áreas de las matemáticas, una de ellas, el álgebra. Según *Stewart* (2007) es a partir del trabajo de *Lagrange* (1736-1813) que utiliza las permutaciones de las raíces para las soluciones de las ecuaciones de grado menor que cuatro. *Lagrange* se preocupó en cómo se comportaban ciertas expresiones algebraicas especiales formadas a partir de dichas soluciones cuando las propias soluciones eran “permutadas”, es decir, reordenadas.

Él sabía que cualquier expresión completamente simétrica era una expresión que permaneciera exactamente igual independientemente de cómo se intercambian las soluciones, así esta puede expresarse en términos de los coeficientes de la ecuación, haciéndola una cantidad «conocida». Más interesantes eran las expresiones que sólo tomaban unos pocos valores diferentes cuando las soluciones eran permutadas; estas parecían tener la clave para resolver la ecuación.

*Lagrange* utilizando la misma idea de las funciones «parcialmente» simétricas de las soluciones le permitían reducir una ecuación cúbica a una cuadrática. La cuadrática introducía una raíz cuadrada y el proceso de reducción podía ordenarse utilizando una raíz cúbica. Análogamente, cualquier ecuación cuártica podía reducirse a una cúbica, a la que él llamó la cúbica resolvente; por lo tanto, se podía resolver una cuártica utilizando raíces cuadradas y cúbicas para tratar la cúbica resolvente y raíces cuartas para relacionar la respuesta con las soluciones buscadas. Así, *Lagrange* llega a la fórmula para resolver la ecuación cúbica por medio de radicales, a través del proceso que hasta hoy se conoce como la resolvente de *Lagrange*. Pero cuando intenta extender su método para encontrar la forma de resolver por radicales la ecuación de quinto grado, se encuentra con dificultades y no logra llegar a la solución.

Aunque *Lagrange* intenta encontrar el método por medio de radicales para resolver la ecuación quintica, al finalizar su trabajo coloca en duda su demostración como cita Chavarría (2013) a (Lagrange, 1867-1869, p.305): “De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado pudieran dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado” (p.97). En el momento que *Lagrange* coloca en duda sus procedimientos se genera un cambio de perspectiva en lo que tiene que ver con la resolución de ecuaciones de quinto grado o mayor, pues se empieza a considerar que no es posible encontrar el método por medio de radicales para resolverlas.

Así como menciona Stewart (2007), a partir de los resultados de *Lagrange*, *Ruffini* (1765-1822) en su Teoría general de ecuaciones de 1799 presenta una demostración de que “la solución algebraica de ecuaciones generales de grado mayor que 4 es siempre imposible” (p.231). Pero su demostración era tan enorme, que nadie estaba dispuesto a comprobarla, especialmente porque había rumores de que contenía errores. Mas adelante, *Abel* (1802-1829) utiliza una estrategia

similar a la de *Ruffini*, haciendo uso de las permutaciones y en 1823 encuentra una demostración de la imposibilidad de resolver la quintica, siendo esta demostración totalmente correcta.

La contribución más importante de *Ruffini* consistió en darse cuenta de que las permutaciones pueden ser combinadas unas con otras. Hasta entonces, una permutación era una reordenación de una colección de símbolos. Por ejemplo, si numeramos las raíces de una quintica como (12345), entonces estos símbolos pueden ser reordenados como (54321) o (42153) o (23154) o cualquier otra cosa. Hay 120 ordenaciones posibles. *Ruffini* comprendió que había otra manera de ver una ordenación semejante: como una receta para reordenar cualquier otro conjunto de cinco símbolos. El truco consistía en comparar el orden estándar (12345) con el orden reordenado.

A modo de ejemplo, suponga que el orden reordenado era (54321) entonces la regla para pasar del orden estándar inicial al orden nuevo era simple: “invertir el orden”. Pero se puede invertir el orden de cualquier secuencia de cinco símbolos. Si los símbolos son (*abcde*), el inverso es (*edcba*); si los símbolos de partida son (23451), entonces su inverso es (15432). Esta nueva manera de ver una permutación significa que se podían realizar dos permutaciones una detrás de otra, como una especie de “multiplicación” de permutaciones. Esta nueva concepción de las permutaciones se puede ver que es similar a la de función biyectiva, pues se piensa con la idea de “invertir el orden”, aunque *Ruffini* tiene esta nueva concepción de la permutación no la define formalmente.

Más adelante esta idea de *Ruffini* aparece y se formaliza con *Cauchy* (1789-1857) que define de una nueva forma el concepto de permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes; como menciona *Piaget* y *García* (1982), el concepto de permutación empieza a tomar una transformación, las permutaciones ahora empiezan a ser consideradas como “funciones de  $n$

cantidades”, pero dichas cantidades empiezan a ser consideradas como letras que representan cantidades indeterminadas; de esta manera, *Cauchy* llama permutación al orden de las letras. Así, la transición de una permutación  $A_1$  a otra  $A_2$  la llama Sustitución y la representa con la notación  $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ . Luego define la multiplicación de sustituciones, y la sustitución idéntica, llegando así a la

introducción de la sustitución inversa  $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$ .

Es aquí donde empieza a conocerse el concepto de permutación sin repetición (permutación) como se conoce actualmente, como función biyectiva de un conjunto en sí mismo, denotada  $f: K \rightarrow K$   
 $A_1 \mapsto A_2$ . A partir de esto, *Cauchy* le da a la permutación una estructura algebraica que más adelante se convierte en estructura de Grupo; lo que fue de gran ayuda para demostrar un cierto número de teoremas que se pueden considerar como los antecesores de los teoremas generales sobre los grupos de permutaciones. Permitiendo que el concepto de permutación empiece a tomar un rol central en la Teoría de Grupos permitiendo ser de utilidad en otras áreas como la Teoría de Grafos, Matemática discreta, Criptografía entre otras.

Además de esta nueva concepción del concepto de permutación sin repetición de  $n$  elementos, las permutaciones se siguen desarrollando, donde aparecen nuevas reglas y características de las permutaciones, como la repetición en un conjunto o multiconjunto, la permutación circular, entre otras. Según Wilson y Watkins (2013), *Leibniz* sigue estudiando las permutaciones y en su obra titulada *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) utiliza algo similar al triangulo de Pascal para encontrar el número de combinaciones de un conjunto de  $n$  objetos al tomarlos de dos, tres, cuatro, etc; además, enseña cómo obtener el número de permutaciones de un

conjunto al tomar todos los objetos y logra determinar correctamente el número de permutaciones cíclicas de  $n$  elementos como  $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$ .

Más tarde, tales permutaciones volvieron a aparecer en los estudios de *Leibniz* sobre determinantes; por esta razón, la fórmula de los determinantes se le atribuye a *Leibniz*. Pero esta idea también aparece en el continente asiático, aunque no se tiene claro si esta idea de los determinantes con las permutaciones aparece antes o después de la de fórmula de *Leibniz*, pero es importante comentarla. Como menciona Wilson y Watkins (2013), este continente continuó con el estudio del concepto de permutación y de cómo poder generar todas las permutaciones sin omitir alguna. *Takakazu Seki* (1642-1708), un carismático profesor e investigador que revolucionó el estudio de las matemáticas en el Japón del siglo XVII, mientras estudiaba la eliminación de variables de ecuaciones homogéneas simultaneas, llega a expresiones como  $a_1b_2 - a_2b_1$  y  $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$ , que es lo que se conoce actualmente como los determinantes de una matriz  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$  respectivamente.

Además de esto, en 1683 publicó un folleto sobre este descubrimiento, en el que presentaba un ingenioso esquema para enumerar todas las permutaciones de forma que la mitad de ellas estuvieran “vivas” (pares) y la otra mitad “muertas” (impares). Empezando por el caso  $n = 2$ , cuando la permutación (12) estaba viva y la permutación (21) muerta, formuló las siguientes reglas para  $n > 2$ :

- Tome cada permutación viva para  $n - 1$ , aumente todos sus elementos en 1 e inserte 1 delante. Esto produce  $\frac{(n-1)!}{2}$  “permutaciones básicas” de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- A partir de cada permutación básica, forma otras  $2n$  mediante rotación y reflexión:  
 $a_2 \cdots a_{n-1}a_n, a_2 \cdots a_{n-1}a_n a_1, \dots, a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1};$

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1, a_1 a_n a_{n-1} \cdots a_2, \cdots, a_{n-1} \cdots a_2 a_2 a_n.$$

Si  $n$  es impar, los de la primera fila están vivos y los de la segunda muertos; si  $n$  es par, los de cada fila están alternativamente vivos, muertos, ... , vivos, muertos. Por ejemplo, para  $n = 3$ , se producen  $\frac{(3-1)!}{2} = 1$ , donde la única permutación básica es (123). Así, las permutaciones (123), (231), (312) están vivas (son pares), mientras que las permutaciones (321), (132), (213) están muertas (son impares), y hemos generado los seis términos de un determinante  $3 \times 3$ . Para  $n = 4$  existen  $\frac{(4-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3$  permutaciones básicas que son: (1234), (1342) y (1423), y a partir de algunas de esas permutaciones básicas, digamos (1342) se obtiene un conjunto de ocho que es  $+1342 - 3421 + 4213 - 2134 + 2431 - 1243 + 3124 - 4312$ , estos están alternativamente vivos (+) y muertos (-). Por tanto, un determinante  $4 \times 4$  incluye los términos  $a_1 b_3 c_4 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 + \cdots - a_4 b_3 c_1 d_2$ . Esta regla de *Seki* para la generación de permutaciones es bastante bonita, pero lamentablemente tiene un grave problema para  $n > 4$ .

Las permutaciones fueron cada vez más estudiadas e importantes para las matemáticas, donde buscan identificar ciertas características, utilidades y fórmulas útiles en este concepto. En 1685, Wallis (1616-1703) en su obra publicada *The Doctrine of Permutations and Combinations, being an essential and fundamental part of the Doctrine of Changes* (1795) menciona a las permutaciones como ordenaciones cuando se toman todos los elementos y encuentra todas las permutaciones de las letras en la palabra *roma* y en la palabra *meses* eliminando las palabras que no cambian al permutar las letras repetidas; lo que actualmente es conocido como permutación distinguible.

Además, como menciona Wilson y Watkins (2013) en la página 110 del libro *el Discurso de las combinaciones*, Wallis considera específicamente el caso nulo, donde menciona que la

combinación de las  $m$  cosas tomando 0 a la vez, de la siguiente manera: “Es evidente que, si no tomamos ninguna, es decir, si dejamos todas, no puede haber más que un caso, cualquiera que sea el número de cosas expuestas” (Traducción propia, p.20).

Wilson y Watkins (2013) menciona que Wallis sabía que  $C(0,0) = 1$ , pues mencionaba lo siguiente: “tomar todo, o dejar todo, no es más que un mismo caso” (Traducción propia, p.20). Sin embargo, cuando dio una tabla de  $n!$  para  $n \leq 24$ , no llegó a señalar formalmente que  $0! = 1$ , o que hay exactamente una permutación del conjunto vacío. Wallis expresó en palabras las reglas generales para el número de permutaciones de  $n$  elementos con y sin repetición, y las ilustró mediante el sonido de veinticuatro campanas y permutando las letras de las palabras o las palabras de los versos.

Según Wilson y Watkins (2013) en 1713, es publicada la obra *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli, la cual contiene temas de combinaciones y permutaciones; presentando diferentes tipos de permutaciones y combinaciones como las permutaciones distinguibles y las combinaciones de  $n$  objetos tomados de  $r$  en  $r$ ; además Bernoulli deduce algunos resultados que no habían sido mostrado por sus antecesores. Estos estudios siguen con Pierre Remond de Montmort (1678-1719) en su libro *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazards*, publicado en 1714. Esta obra habla sobre la teoría de las combinaciones y permutaciones, explica las propiedades del triángulo geométrico de Pascal y desarrolla muchos ejemplos en los que aplica las permutaciones y combinaciones a algunos problemas de probabilidad y teoría de juegos.

Como se ha observado el concepto de permutación empieza a ser útil no solo en las técnicas de conteo sino en diversas áreas como la música, poesía, el álgebra, la teoría de números, la combinatoria, entre otras. Esta utilización del concepto en las diversas áreas muestra la evolución que tuvo las permutaciones, empezando como ordenación y definiéndose luego como función

biyectiva; lo que permite observar la equivalencia entre estas dos definiciones. Caracterizando las permutaciones por sus reglas o propiedades, las cuales también se pueden entender como ordenación y función, aunque no necesariamente teniendo la biyección.

Esto permite observar la evolución del concepto y entender como han llegado a las definiciones y uso de todos los tipos de permutaciones, de tal manera que al resolver los problemas se pueda usar cualquier tipo de permutación como ordenación o como función, utilizándose la definición más útil para resolver el problema.

Basados en Wilson y Watkins (2013), a partir del siglo XVIII se empieza a hacer uso de las permutaciones en diversas aplicaciones y surge una disciplina denominada combinatoria enumerativa. Como se ha mencionado anteriormente ya se empiezan a reconocer las conexiones entre ciertos problemas combinatorios y las expansiones algebraicas, pero ahora, esto se explota más ampliamente; esto fue de ayuda para que, en el siglo XIX la teoría de grupos se desarrolle como materia.

En la primera mitad del siglo XX se empieza a reconocer las profundas interrelaciones entre la Teoría de Grupos, las permutaciones y la combinatoria. Esto fue de utilidad para aplicaciones en la química, ya que entre 1920 y 1930 se logró un progreso teórico en el conteo de moléculas, gracias al uso de las permutaciones y grupos de permutaciones en la Teoría de Grafos; ya que la teoría de los grupos de permutación era apropiada para la enumeración de isómeros, y sus ideas se desarrollan considerablemente en un artículo fundamental de Pólya, en el que se combina el método clásico de generación de funciones con la idea de un grupo de permutación para enumerar grafos y moléculas y muchas otras configuraciones que surgen en matemáticas (Wilson y Watkins, 2013).

Con base en Wilson y Watkins (2013), después de 1950, la llegada de los ordenadores electrónicos lo cambio todo, ya que, en el sentido de la combinatoria y las permutaciones, uno de sus objetivos era generar métodos y crear algoritmos para que los programas realizaran estas listas y algunos problemas de conteo.

La primera publicación orientada a los ordenadores sobre métodos de generación combinatoria fue una nota de 1956 de C.B. Tompkins, *Machine attacks on problems whose variables are permutations*. Así se fueron generando más estudios con la programación en estos temas; tres libros, en particular, fueron especialmente notables con respecto al establecimiento de principios generales: *Elementos of Combinatorial Computing*, de Mark B. Wells, especialmente el capítulo 5. *Combinatorial Algorithms* de Albert Nijenhuis y Herbert S. Wilf; luego en 1978 se publicó una segunda edición con material adicional, y Wilf escribió posteriormente *Combinatorial Algorithms: An update*. Además, Robert Sedgewick recopiló el primer estudio exhaustivo de los métodos de generación de permutaciones en *Computing Surveys*.

**6.1.1.2 Revisiones de investigaciones previas.** En esta sección se realiza una revisión de las investigaciones que abordan el concepto de permutación desde la perspectiva de la teoría APOE. A continuación, se muestran las descomposiciones genéticas encontradas sobre el concepto, éstas muestran dos modelos cognitivos con enfoques diferentes: uno como ordenación para las técnicas de conteo y otro, como función biyectiva para desarrollar otros conceptos de álgebra abstracta, en particular el concepto de simetría. Estas descomposiciones genéticas son estudiadas porque son de utilidad para el diseño de la primera etapa del ciclo de investigación; esto es, el planteamiento de una Descomposición Genética Hipotética del concepto de permutación.

Dado que esta investigación busca que el individuo comprenda dicho concepto a partir de la construcción de un Proceso de Ordenación que se coordina con un Proceso de Función para dar

paso al Proceso de Permutación. Como se muestra en el desarrollo de toda la investigación, este modelo permite la construcción del Objeto y da luces sobre la conformación del Esquema para este concepto que evoluciona gracias a la experiencia de los individuos con su aplicación en diversos contextos.

*Descomposición Genética de Salgado (2007).* El diseño de esta Descomposición Genética se realiza para estudiantes universitarios con el objetivo, de establecer las construcciones mentales que deben estructurar para comprender los conceptos de ordenación (permutación) y combinación dentro de la temática de conteo en un curso de Matemática Discreta. A partir de este modelo cognitivo los autores diseñan secuencias didácticas con el fin de refinar o validar la DGH a partir del análisis de las estructuras que evidencian los estudiantes sobre estos conceptos. A continuación, presentamos la descripción de las estructuras refinadas que propone Salgado (2007).

*Acción.* Los estudiantes tienen una concepción Acción cuando tienen la necesidad de: i. comparar distintos problemas con y sin orden para distinguir entre ambos tipos, ii. hacer Acciones necesarias para desglosar el ejemplo y poder contar físicamente; al desglosar los problemas son capaces de notar la diferencia entre un problema con orden de otro sin orden, iii. Usar fórmulas de memoria, es decir, utilizar las fórmulas de forma automática sin comprender su significado, lo que los lleva, frecuentemente, a usarlas incorrectamente, iv. Usar las técnicas de conteo únicamente paso a paso, lo que conlleva una incomprensión sobre dichas técnicas.

*Proceso.* Los estudiantes tienen una concepción Proceso cuando interiorizan las Acciones de: i. contar o las Acciones involucradas en la aplicación de fórmulas en un Proceso que les implica utilizar fórmulas y ejecutar las sumas y productos necesarios, sin necesidad de contar físicamente y sin utilizar memorización en la aplicación de fórmulas, ii. desglosa el problema de manera que les permite reconocer los casos válidos y efectuar el producto con los datos relevantes, iii.

Interioriza la Acción de distinguir un problema sin orden de otro con orden en un Proceso lo que los lleva a dividir la fórmula de ordenación para llegar a la fórmula de combinación que usarán para resolver problemas sin orden.

*Objeto.* Los estudiantes tienen una concepción Objeto cuando encapsulan los Procesos anteriores para construir el Objeto de conteo de combinación. Es decir, pueden comparar fórmulas, usar en un problema dos fórmulas distintas cuando es necesario, distinguir entre diversas situaciones, distinguir las fórmulas que deben emplear en cada caso. Además, pueden revertir el Objeto al Proceso o los Procesos que les dieron origen. En este momento podrán hacer comparaciones entre el Objeto ordenación y el Objeto combinación. (Salgado, 2007, p.32).

Dado que el objetivo de Salgado (2007) es crear secuencias didácticas a partir del diseño de la Descomposición Genética, la autora puede identificar si los estudiantes logran diferenciar las permutaciones de las combinaciones. De esta manera, el énfasis de su trabajo se basa en que los estudiantes comprendan qué implicaciones importa el orden, al construir el concepto de permutación y diferenciarlo de la combinación. Estos elementos en que enfatiza la autora en su investigación y el modelo cognitivo refinado sirven de guía para esta investigación de manera que las características de las permutaciones como el orden y la repetición se puedan estructurar de manera equivalente como una función. Esta visión permite el estudio de diversas aplicaciones de este concepto en Matemática discreta o Combinatoria y en Álgebra abstracta.

*Descomposición Genética de Asiala et al. (1998).* El modelo cognitivo presentado por Asiala et al. (1998) fue diseñado para explicar las construcciones mentales que pueden desarrollar los estudiantes cuando comprenden los conceptos de permutación (como función biyectiva) y de simetría. Esta investigación contempla el diseño e implementación de un modelo de clase en un curso de Álgebra Moderna, destinado a ayudar a los estudiantes universitarios a realizar las

construcciones del concepto de permutación y simetría, en relación con otros conceptos tratados en Álgebra Moderna, para esto se apoyan en el uso del lenguaje de programación ISETL.

El Análisis Teórico planteado por Asiala et al. (1998) contempla un análisis epistemológico de dichos conceptos, teniendo en cuenta su relación con el concepto de función. Asiala et al. (1998) mencionan que el Esquema de permutación debe incluir la coordinación de tres elementos cognitivos: el concepto de función y las propiedades uno a uno y sobreyectiva. A continuación, se presenta la interpretación de este modelo cognitivo propuesto por Asiala et al. (1998):

*Esquema de permutación:* El individuo incluye la coordinación de tres elementos cognitivos: el concepto de función y las propiedades de uno a uno y sobreyectiva.

1. *Función.* Interpreta la permutación de un conjunto finito mediante el concepto de función, de la siguiente manera:

*Acción:* Una concepción Acción muy primitiva de la permutación podría estar indicada por la dependencia de un sujeto de una fórmula u otra descripción mecánica para guiar sus Acciones. Por ejemplo, para una permutación del conjunto ordenado  $\{1,2,3,4\}$ , la Acción de la permutación (2341) podría describirse como “poner 1 a la derecha de 4” o “desplazar a la izquierda y retroceder”. Una concepción de la Acción también puede venir indicada por la necesidad del sujeto de averiguar todos los detalles de una permutación para considerar la descripción de la acción que realiza la permutación.

*Proceso:* Una concepción Proceso de la permutación podría estar indicada por la conciencia de un individuo de un movimiento mental. Por ejemplo, al decir que “4 va a 1”, tal concepción podría permitir al estudiante invertir el movimiento para obtener la inversa de la permutación.

*Objeto:* Una concepción Objeto de permutación podría estar indicada por la capacidad del individuo para concebir la formación del conjunto de todas las permutaciones de un conjunto dado, por ejemplo, como parte de la formación de un grupo de permutaciones. También podría indicarse

si un individuo puede pensar en la composición de dos permutaciones como una función que toma dos permutaciones y la combina de alguna manera para obtener una tercera.

2. *Uno a uno.* Se considera que esta propiedad forma parte del Esquema de un individuo para la permutación si, a partir de una concepción Proceso de la permutación, el individuo puede imaginar realizar el Proceso dos veces sobre dos objetos diferentes y considerar si es posible obtener la respuesta.
3. *Sobreyectiva.* Se considera que esta propiedad forma parte del Esquema de un individuo para la permutación si, a partir de una concepción Proceso de la permutación, el individuo puede considerar un elemento del codominio e invertir el Proceso para preguntarse si hay algo en el dominio que se corresponda con él. A continuación, esta inversión se interioriza en un Proceso de modo que el individuo pueda imaginar su aplicación para cada elemento del codominio. (p.17-18)

El modelo cognitivo descrito tiene como objetivo describir las estructuras mentales necesarias para la comprensión del concepto de permutación como función biyectiva. Este permite el diseño de una Descomposición Genética del concepto de simetría a partir del concepto de permutación; Asiala et al. (1998) explican que esto se aproxima a una aplicación del Esquema de función que puede estructurar un individuo.

Este modelo cognitivo permite observar otra manera de construir la permutación de un conjunto finito con  $n$  elementos diferentes, esto es como: función biyectiva; tomando como elementos cognitivos para coordinar el de función, y las propiedades de función inyectiva y sobreyectiva. Pero esta coordinación de los elementos cognitivos es mostrada de manera aislada, donde el modelo cognitivo de permutación está dentro del Esquema de función, pero en este Esquema no se incluye dentro de las propiedades de las funciones, específicamente la inyectividad

y sobreyectividad; sino que se explican como Esquemas a parte haciendo explicito que son parte para la concepción Proceso del concepto de permutación.

Este modelo cognitivo es de utilidad para esta investigación, sin embargo, creemos que dentro del Esquema de función está la clasificación de ellas, es decir, las propiedades de inyectividad y sobreyectividad de una función. De manera que si un estudiante tiene la concepción Proceso del concepto de Función logre distinguir, el dominio, codominio e identificar si en la tarea se hace uso de funciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Permitiendo hacer uso de estas características de las funciones en el uso de las características de las permutaciones en las técnicas de conteo, es decir en términos de las funciones y sus propiedades que implica que se tenga orden, repetición o no.

#### **6.1.1.3 Estructuras previas para la construcción del concepto de permutación.**

Teniendo en cuenta todos los elementos presentados en este capítulo respecto al concepto de Permutación, se considera necesario que un estudiante: construya los conjuntos como entradas y salidas, entienda la definición de un multiconjunto de manera que le permita distinguir que existen elementos repetidos como tipos, por ejemplo, en el multiconjunto  $\{a, a, a, b, b, c\}$  existen 3 elementos de tipo 1, 2 elementos de tipo 2 y 1 elemento de tipo 3. Estas estructuras le permiten al estudiante identificar si son permutación con repetición, sin repetición o de un subconjunto como funciones inyectivas, biyectivas, entre otras.

De esta manera, se tiene en cuenta el concepto de conjunto para la estructuración del concepto de función, con el objetivo de que el individuo logre realizar transformaciones como: realizar la composición de funciones, determinar cuándo una función es invertible y dado el caso calcular la función inversa; esto permite analizar las permutaciones como funciones, ya sean

inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Esta forma de concebir el concepto de permutación requiere por tanto de la construcción previa de las siguientes estructuras:

*Esquema de conjunto:* Un individuo tiene la concepción esquema de conjunto cuando puede trabajar con diversos tipos de conjuntos en diferentes situaciones matemáticas. Es decir, puede definir funciones que tienen como argumentos de entrada a conjunto, puede identificar qué es y qué no es un conjunto. (Cabrera, 2022, p.48)

*Proceso de función:* Un individuo con una comprensión de proceso de función construye un proceso mental para una función dada, piensa en términos de entradas, posiblemente no especificadas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas. (Dubinsky et al., 2005a, como se citó en Arnon et al., 2014, p. 21)

*Encapsulación del Proceso de función:* Para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como formar un conjunto de funciones, definiendo operaciones aritméticas en dicho conjunto, equipándolo con una topología, etc. (Dubinsky et al., 2005a, como se citó en Arnon et al., 2014, p. 21)

**6.1.1.4 Descomposición Genética Hipotética ( $DGH_0$ ).** El diseño de la  $DGH_0$  se realiza con base a un primer análisis de la revisión histórica-epistemológica y las descomposiciones genéticas mencionadas anteriormente. En este primer momento se estructura un modelo cognitivo de permutación, basándose en su equivalencia como ordenación y como función biyectiva. Se parte de una estructura Acción como ordenación y a partir de ella se promueve la interiorización en un Proceso que permite concebir el concepto de permutación como función biyectiva; este primer modelo cognitivo tiene en cuenta la permutación de un conjunto finito de elementos diferentes.

*Acción:* Esta estructura permite que el individuo determine el número total de permutaciones de un conjunto finito mediante la construcción de cada permutación; esta construcción está condicionada por el tipo de representación (lista, diagrama de árbol, tabla de contingencia, entre otras) y las estrategias que surgen ante la necesidad de determinar el número total de permutaciones. En esta estructura los individuos pueden hacer uso de fórmulas que recuerden sobre las técnicas de conteo, sin distinguir o diferenciar sus características; de manera que las utilizan mecánicamente sin ningún cuestionamiento, lo que puede llevarlos a utilizar las fórmulas equivocadas sin tener en cuenta las condiciones de la tarea.

El mecanismo de interiorización se produce cuando el individuo tiene la necesidad de crear formas generales de encontrar el número total de permutaciones; esta reflexión le permite al individuo reconocer las características o casos válidos en la tarea sin necesidad de enlistarlos uno a uno o hacer uso de los tipos de representación. Como resultado de dicha reflexión es posible que el individuo pueda crear algoritmos que le permita encontrar el número total de permutaciones.

*Proceso:* la interiorización de las Acciones le permite al individuo encontrar el número total de permutaciones como un producto; es decir, es posible que determine el total de permutaciones de un conjunto finito  $N$  de  $n$  elementos mediante la forma:  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ . Estructurar el Proceso como resultado de la interiorización de Acciones implica que el individuo construya el concepto como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, entendiendo las características del orden, tamaño y la no repetición por medio de la función biyectiva. Esto es resultado de su independencia del tipo de representación que puede promover una tarea específica relacionada con las permutaciones.

La encapsulación del Proceso se genera cuando el individuo determina que toda función biyectiva definida de un conjunto finito en sí mismo es una permutación del conjunto  $N$  con  $n$

elementos diferentes; es decir, pensar en el total de permutaciones de un conjunto finito  $N$  es equivalente a pensar en el total de funciones biyectivas del conjunto  $N$  en sí mismo. Esto le permite analizar este concepto como una estructura algebraica que tiene las mismas propiedades de las funciones.

*Objeto:* El encapsulamiento del Proceso le permite al individuo adaptar las propiedades de funciones hacia las permutaciones, ya que al ver la permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes como una función; el individuo logra realizar y entender la composición de permutaciones, determinar la inversa de una permutación como otra permutación, realizar el soporte de una permutación logrando caracterizarlas como pares e impares.

### **6.1.2 Diseño e Implementación uno ( $DI_1$ )**

En esta segunda etapa de la primera aplicación del ciclo se diseña como instrumento la Prueba diagnóstica, teniendo en cuenta el modelo cognitivo  $DGH_0$ ; por lo tanto, se realiza un Análisis a priori que contempla una forma de abordar cada tarea y la descripción de los objetivos de cada una de las tareas con base en las estructuras y mecanismos mentales de la  $DGH_0$ .

**6.1.2.1 Prueba diagnóstica.** Este instrumento tiene como objetivo estudiar las estructuras previas necesarias para la construcción del concepto de permutación; en particular interesa determinar si el estudiante evidencia una estructura *Proceso* que le permita identificar la permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes como función biyectiva. Se propone que esto le permite comprender las representaciones de dos pisos o cíclicas que son las más comunes en álgebra abstracta.

Igualmente interesa determinar a través de este instrumento si el estudiante hace uso del Esquema de conjunto para estructurar las características de los elementos del conjunto para las permutaciones; esto puede permitirle reconocer las distintas representaciones que tiene el

concepto. Por ejemplo, los diagramas de árbol, tablas de contingencia y listas; estas representaciones son importantes para analizar si el estudiante logra determinar la importancia de usarlas al resolver problemas relacionados con la permutación y por tanto describir su comprensión del concepto.

La Prueba diagnóstica se desarrolla durante dos horas de clase en un trabajo individual que consta de tres momentos:

i. Se entrega la primera parte de la prueba que consta de dos tareas cuyo objetivo es analizar si los estudiantes reconocen la información presentada en una tabla de contingencia y un diagrama de árbol. A partir de estas representaciones se espera que identifique el conjunto utilizado en la tarea; además, interesa determinar el uso que hace de dichas representaciones para responder a las preguntas, dando como instrucción explícita resolver la tarea por medio de la representación indicada.

ii. Se hace entrega de las definiciones de algunos tipos de representaciones útiles para abordar problemas sobre permutaciones y ejemplos de cómo se abordan.

iii. Se entregan cuatro tareas con el objetivo de determinar si los estudiantes hacen uso de las diversas representaciones, que hacen alusión a la estructura *Acción* y posiblemente a partir de estas *Acciones* los estudiantes las interioricen en una estructura *Proceso*, permitiendo que puedan determinar el número total de permutaciones según las instrucciones de la tarea mediante formas o algoritmos generales.

**6.1.2.1.1 Análisis A priori de la Prueba diagnóstica.** Con base en la información presentada hasta el momento, en esta sección se exponen las tareas diseñadas para la Prueba diagnóstica; así como las estructuras que se espera el estudiante establezca a partir de sus procedimientos frente a cada tarea.

En el Análisis A priori de cada tarea se presenta una solución normativa para luego describir las expectativas de cada una de ellas, a la luz de las estructuras y mecanismos mentales planteados en la  $DGH_0$ ; aunque es posible abordar las tareas desde diferentes perspectivas, en este análisis se muestran solo algunos caminos de solución. En la Tabla 2 se presentan las estructuras y mecanismos mentales que pueden emerger en la solución de cada tarea.

**Tabla 2**

*Uso de las estructuras de la  $DGH_0$  en cada tarea de la Prueba diagnóstica*

Tareas	Estructuras basadas en la $DGH_0$
Tarea 1 <b>¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.</b> y Tarea 2 <b>¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.</b>	Esquema de conjunto.
Tarea 3 y Tarea 4	Concepción Acción. Concepción Proceso. Mecanismo de interiorización.
Tarea 5 y Tarea 6	Proceso función. Esquema conjunto. Proceso permutación.

*Tarea 1* (Adaptada de Villareal, 2016). Una tabla de doble entrada o tabla de contingencia se usa generalmente, para comparar dos “cosas” respecto a una característica. Por ejemplo, el precio de tres productos de dos marcas diferentes. La marca 1 vende lápices, esferos y marcadores a \$800, \$1.000 y \$1.500 respectivamente. Mientras la marca 2 los vende a \$750, \$1.100 y \$1.450 respectivamente. Organiza los datos en una tabla de contingencia y responde las siguientes preguntas:

- Desea comprar 1 lápiz, 1 esfero y 1 marcador, ¿De qué marca compraría cada producto para ahorrar dinero y por qué?
- Si se compra un producto de cada marca, ¿En cuál marca se ahorró más dinero?

*Solución.* Una manera de organizar la información para resolver las preguntas de la Tarea 1, es por medio de una tabla de contingencia como se muestra en la Tabla 3; el uso de esta tabla permite la comparación de los productos dependiendo de las marcas.

### Tabla 3

*Tabla de contingencia para la organización de los datos de la Tarea 1*

	Marca 1	Marca 2
Lápices	\$ 800	\$ 750
Esferos	\$1.000	\$ 1.100
Marcadores	\$ 1.500	\$ 1.450
Total	\$3.300	\$3.300

Para el ítem a) se compara cada producto con las marcas respectivas; por ejemplo, la intersección entre el lápiz y la marca 1 es \$800, este valor es comparado con la intersección entre el lápiz y la marca 2 que es \$750. Esta comparación permite concluir que el lápiz de la marca 2 es más económico, por una diferencia de \$50. Este procedimiento se realiza con cada producto, donde la tabla de contingencia es de gran ayuda, ya que permite comparar los productos de manera más efectiva. Reuniendo esta información de los productos para responder al ítem a), es posible analizar los precios más económicos en estas comparaciones, deduciendo que, para ahorrar dinero se compra un lápiz de la marca 2, un esfero de la marca 1 y un marcador de la marca 2.

Para el ítem b) basta con sumar los precios del lápiz, el esfero y el marcador de cada marca y compararlo. Esto puede realizarse a través de la tabla de contingencia (ver Tabla 3), analizando los totales de cada marca, lo que permite concluir que el precio total de un producto de cada marca es el mismo.

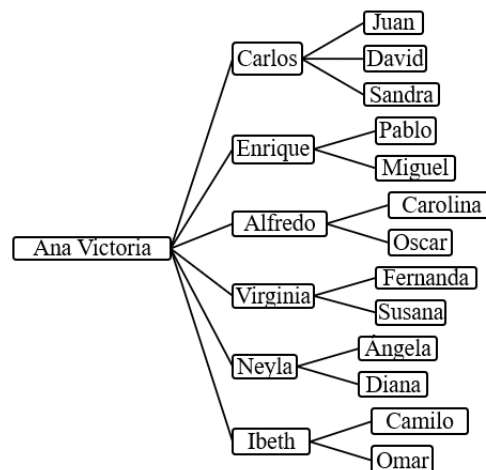
*Tarea 2* (Adaptada de Villareal, 2016). Al preguntarle a Camilo por su familia, él nos cuenta: la mamá de mi mamá se llama Ana Victoria. Ella tuvo seis hijos: Carlos que es el papá de Juan, David y Sandra; Enrique que es el papá de Pablo y Miguel; y Alfredo que es padre de

Carolina y Óscar. También tuvo a Virginia la mamá de Fernanda y Susana; a Neyla madre de Ángela y Diana y tuvo a Ibeth, mi madre y de mi hermano Omar. Representa mediante un diagrama la relación de parentesco que hay entre los integrantes de la familia de Camilo.

*Solución.* Para la información presentada en la tarea 2, la mejor manera de representarla es por medio de un diagrama de árbol, como se muestra en la Figura 14; esto permite distribuir los datos de la tarea de manera correcta, sin caer en el error de repetirlos u omitirlos.

### Figura 14

*Diagrama de árbol que representa la información de la Tarea 2*



Las Tareas 1 y 2 buscan determinar si el estudiante reconoce y hace uso correcto de las representaciones del concepto de permutación que se implementa en cada una; tales como: tablas de contingencia, diagramas de árbol y listas. Dado que más adelante necesitará utilizarlas en la solución de tareas relacionadas con el concepto de permutación.

Estas representaciones permiten identificar si los estudiantes tienen la estructura previa de conjunto, ya que para abordar la solución a la tarea se debe identificar los conjuntos y así determinar qué tipo de representación es más útil para la solución de la tarea. Aunque dichos conceptos son útiles para resolver problemas relacionados con el concepto de permutación, las

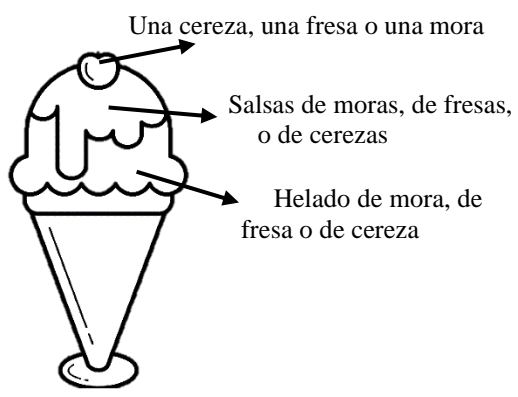
tareas permiten que cualquier estudiante las aborde, independientemente de su experiencia en el concepto.

Una vez los estudiantes se aproximan a las Tareas 1 y 2, se hace entrega de las definiciones de los diferentes tipos de representaciones del concepto de permutación y algunos ejemplos de cómo usar estas representaciones para resolver tareas; estas definiciones y ejemplos se pueden ver en el Anexo 1. Luego, se hace entrega de las Tareas 3, 4, 5, 6 y 7 diseñadas con el objetivo de potenciar las estructuras y mecanismos mentales del modelo cognitivo hipotético de la  $DGH_0$ . Además, se busca reconocer la estructura Proceso de función a partir de la identificación de los estudiantes de las diferentes notaciones que tiene el concepto de permutación de un conjunto finito de elementos diferentes; por ejemplo, la notación en ciclo y de dos pisos.

*Tarea 3* (Adaptada de Villareal, 2016). Una marca de helados impulsa tres sabores: fresa, mora y cereza, vendiendo conos. Cada cono tiene una bola de helado, una salsa y una fruta. En dos ciudades ofrecen promociones como indica la imagen de la Tabla 4.

**Tabla 4**

*Combinaciones de los sabores de helado en cada ciudad*

CIUDAD A		CIUDAD B		
		<b>¡Prueba 3 nuevos sabores !</b>		
#	<b>Helado + Salsa + Fruta</b>			
1	Fresa	Mora	Cereza	
2	Fresa	Cereza	Mora	
3	Cereza	Fresa	Mora	
4	Cereza	Mora	Fresa	
5	Mora	Fresa	Cereza	
6	Mora	Cereza	Fresa	
¡Hay 6 combinaciones diferentes!				

*Solución.* Esta tarea puede ser abordada a partir de algunas de las representaciones y el uso de las fórmulas identificando las características necesarias para los conceptos de técnicas de conteo. A continuación, se describen cada una de las posibles soluciones.

*Listas.* Teniendo en cuenta que en la ciudad A mencionan que, sí se admite la repetición de los sabores en cada capa del helado, se realiza la lista siguiendo el orden *Sabor de helado + Salsa + Fruta*, de la Tabla 4 de la Tarea 3. Por medio de este tipo de representación, se encuentran 27 combinaciones (ver Figura 15); esto permite concluir que las promociones no son iguales, ya que en la ciudad B se observan 6 combinaciones.

### Figura 15

*Listas de los 3 sabores para las 3 capas del helado de la Ciudad A*

CFC, CFF, CFM, CMC, CMF,	FCC, FCF, FCM, FMC, FMF,	MFC, MFF, MFM, MCC, MCF,
CMM, CCC, CCF, CCM,	FMM, FFC, FFF, FFM,	MCM, MMC, MMF, MMM

*Fórmula.* Para la ciudad A, al identificar que se pueden realizar repeticiones y si importa el orden, se hace uso de la fórmula de los arreglos con repetición encontrando que el total de las ordenaciones de los sabores para el helado es de  $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ . Para la ciudad B, se identifica por medio de la tabla dada en la tarea 3 mostrando que los sabores no se repiten y que el orden importa; de esta manera se hace uso de la fórmula de permutaciones sin repetición encontrando que el total de estas ordenaciones de los sabores para el helado es de  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ .

*Tarea 4.* Estas encerrado en una habitación cuyas paredes y techo se van reduciendo con el pasar del tiempo. Para poder salir de allí, debes abrir la única puerta que hay, determinando un código de 3 dígitos que permite abrir la cerradura. Para descubrir este código y abrir la puerta,

debes determinar el número total de permutaciones sin repeticiones de 2 elementos del conjunto  $\{1,2,3,4,5,6\}$ . Este es exactamente el código de la puerta.

*Solución.* Una de las posibles soluciones emerge cuando el estudiante puede identificar que esta tarea puede ser abordada a través de permutaciones de un subconjunto de elementos diferentes del conjunto finito; es decir, las  $k$ -permutaciones. Al identificar este tipo de permutación se realiza la tarea directamente con la fórmula ya establecida, como se muestra a continuación:

$$P_{(n,k)} = P_{(6,4)} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

Por lo tanto, el resultado del total de permutaciones de un subconjunto de 4 elementos del conjunto  $\{1,2,3,4,5,6\}$  es 360, siendo los 3 dígitos para abrir correctamente la puerta.

Otra de las posibles soluciones es a través del uso del diagrama de árbol, este permite encontrar las permutaciones de un subconjunto del conjunto finito; sin embargo, este tipo de representación lleva un tiempo más largo porque el total de estas permutaciones denotan una cantidad grande, de esta manera es más factible que se cometan errores realizando.

Las Tareas 3 y 4 se relacionan con una estructura *Acción* de permutación a través de la cual pueden hacer uso de las diferentes fórmulas asociadas al concepto de manera mecánica. Por tanto, es posible usar fórmulas de manera incorrecta, sin tener en cuenta las características de la tarea: el orden, el tamaño y la repetición. La estructura *Acción* también se relaciona con las posibles representaciones que el estudiante evidencia al abordar la tarea; los estudiantes pueden interiorizar estas *Acciones* cuando identifican las características en cada tarea, esto les permite señalar qué técnica de conteo es útil para abordar de manera exitosa cada tarea. Así, interiorizan estas *Acciones* en un *Proceso*, que se caracteriza por una reflexión previa de las condiciones de las tareas, que

permite encontrar o identificar un algoritmo o fórmula que se aplique correctamente para su solución.

*Tarea 5.* Una aplicación biyectiva de un conjunto finito  $X$  sobre sí mismo se llama permutación del conjunto  $X$ . Una notación del concepto de permutación es el de dos pisos:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

- Escriba esta permutación de dos pisos en la notación usual de función, escribiendo explícitamente las imágenes de todos los elementos del dominio.

*Tarea 5.* Una aplicación biyectiva de un conjunto finito  $X$  sobre sí mismo se llama permutación del conjunto  $X$ . Una notación del concepto de permutación es el de dos pisos:

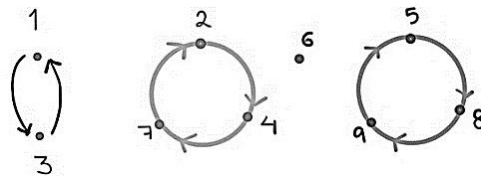
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

- Escriba esta permutación de dos pisos en la notación usual de función, escribiendo explícitamente las imágenes de todos los elementos del dominio.

*Tarea 6.* Ten en cuenta que estamos trabajando sobre el concepto de permutación. Observa la siguiente imagen:

### Figura 16

*Imagen que representa la permutación para la Tarea 6*



- ¿Qué representa esta imagen?
- ¿Esta imagen se puede representar de otra manera? Si es así, escríbala.

*Solución.* La representación de esta imagen de la Figura 16 se puede entender como los ciclos de una permutación o como un grafo dirigido. Al identificar la información presentada en la imagen de la permutación como ciclos, es posible definirla por medio de la notación cíclica  $(13)(247)(589)$  o en la notación de dos pisos  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ .

Las Tareas 5 y 6, se diseñan con el objetivo de analizar si los estudiantes logran identificar los conjuntos que se utilizan en la permutación; en este caso identificar como dominio el conjunto  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  y codominio él mismo. Así es posible empezar a estructurar la permutación como una función biyectiva de un conjunto en sí mismo, de tal manera que los estudiantes pueden identificar las flechas presentadas en la Tarea 6 como una equivalencia con la definición de permutación como función biyectiva; recordando o deduciendo otras notaciones para las permutaciones sin repetición. Como en este caso, la notación en ciclos y la notación en dos pisos. Todo esto contribuye en una estructura más robusta del *Proceso* que permite entender la permutación como un movimiento mental a partir de la estructura *Proceso* de función.

**6.1.2.2 Observación de la clase.** En esta sección se describen algunos fragmentos de clases que la investigadora consideró útil en la investigación, ya que el profesor hace referencia al concepto de permutación como una equivalencia entre las ordenaciones y las funciones; además define otros conceptos que no se habían tenido en cuenta pero que hacen parte del concepto. A continuación, se describen los fragmentos relevantes de la clase.

El profesor para empezar con las definiciones de enumeración de combinatoria escribe dos proposiciones (ver Figura 17) con sus respectivas demostraciones, con el fin de señalar que por medio de las funciones también es posible contar la distribuciones o variaciones de un conjunto.

**Figura 17**

Proposiciones dadas por el profesor sobre el total de funciones con ciertas propiedades

<p><b>Proposición:</b> Sea <math>N</math> un conjunto de <math>n</math> elementos, <math>M</math> un conjunto de <math>m</math> elementos (<math>n \geq 0, m \geq 1</math>). El número de todas las posibles funciones <math>f: N \rightarrow M</math> es <math>m^n</math>.</p> <p><b>Demostración:</b> Por inducción sobre <math>n</math>. Si <math>n=0</math>, entonces hay una única función definida sobre <math>N = \emptyset</math>. Esto satisface <math>m^0 = 1</math>. Suponga que la fórmula es válida para <math>n-1</math>, para algún <math>n \geq 1</math>. Veamos que es válida para <math>n</math>. Si <math>g: N \rightarrow M</math>, fije <math>a \in N</math>, entonces <math>g</math> se puede ver como la unión de dos funciones <math>f: N \setminus \{a\} \rightarrow M</math> y <math>f(a) = g(a)</math> para todo <math>x \in N \setminus \{a\}</math> y <math>f(a, g(a))</math>. Por hipótesis de inducción hay <math>m^{n-1}</math> funciones como <math>f</math> que van de <math>N \setminus \{a\}</math> en <math>M</math> y hay <math>m</math> elecciones para <math>g(a)</math>. En total, hay <math>m^{n-1} \cdot m = m^n</math> funciones de <math>N</math> en <math>M</math>.</p>	<p><b>Proposición:</b> Para cualesquiera conjuntos <math>N</math> y <math>M</math> con <math> N =n \geq 0</math> y <math> M =m \geq 1</math> existen exactamente <math>\prod_{i=0}^{n-1} (m-i)</math> funciones inyectivas <math>f: N \rightarrow M</math>.</p> <p><b>Demostración:</b> Si <math>n=0</math>, la única función inyectiva es la función vacía. Así que <math>\prod_{i=0}^{-1} (m-i) = 1 =  \{\emptyset\} </math>. Suponga que la fórmula es válida para <math>n-1</math>, con <math>n \geq 1</math>. Entonces debe ser válida para <math>n</math>. Si <math>g: N \rightarrow M</math> es inyectiva, considere <math>f: g \upharpoonright N \setminus \{a\}</math> y la función <math>f(a, g(a))</math>, <math>g = f \cup \{a, g(a)\}</math>. Dado que <math>f: N \setminus \{a\} \rightarrow M \setminus \{g(a)\}</math> hay <math>\prod_{i=0}^{n-2} (m-1-i)</math> funciones como <math>f</math>. Por otro lado, hay <math>m</math> funciones posibles como <math>f(a, g(a))</math>. Así que <math>m \cdot \prod_{i=0}^{n-2} (m-1-i) = m \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (m-i) = (m-0) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (m-i) = \prod_{i=0}^{n-1} (m-i)</math>.</p>
---	---

Para promover la comprensión sobre estas proposiciones, el profesor hace uso de diferentes ejemplos en los que busca señalar cómo se puede hacer uso de estas proposiciones en contextos de la vida real; uno de estos ejemplos se presenta en la Figura 18 que consta de las distribuciones o variaciones de los números en la placa de carros.

Figura 18

Ejemplo de arreglos sin repetición por medio de funciones

**Ejemplo:**  
Suponga que la placa de un carro comienza por ABC y ninguno de los dígitos de la segunda parte es un 8.  
a) ¿cuántas placas de tal tipo hay?  
b) ¿cuál es el total de placas con 3 letras y 3 dígitos?

**Solución:**  
a) observe que la elección de una placa se puede ver como la elección de una función  
 $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$   
Luego hay  $9^3$  placas.  
b) Este caso se puede entender como el total de funciones  
 $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{A, \dots, Z, 0, \dots, 9\}$   
Si  $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$  es menor que 3, entonces  $f(i) \in \{A, B, \dots, Z\}$  y si  $i \geq 3$ , entonces  $f(i) \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Por lo tanto, el total de placas es  $26^3 \cdot 10^3$ .

Después de definir estas proposiciones en el tablero, el profesor define los arreglos sin repetición a partir de las propiedades que caracterizan este tipo de distribución o arreglo, estas propiedades son la repetición y el orden. Esto le permite mostrar un ejemplo que busca propiciar en los estudiantes la comprensión sobre los tipos y objetos de un conjunto como un multiconjunto. Finalmente, da como observación que el total de arreglos con repetición también se puede entender como funciones de  $N = \{1, \dots, n\}$  en  $M = \{1, \dots, m\}$  (ver Figura 19); mostrando que el total de funciones  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  de la primera proposición de la Figura 18 es equivalente al total de arreglos con repetición, este total de funciones o total de arreglos con repetición se encuentran con la fórmula  $m^n$ .

### Figura 19

*Definición del profesor de arreglos con repetición y un ejemplo de este*

**Arreglos con repetición**

Suponga que tenemos  $m$  tipos de objetos diferentes. A partir de estos formamos todas las posibles distribuciones con  $n$  objetos. Pueden figurar objetos de un mismo tipo en una distribución y dos distribuciones son iguales si tienen los mismos tipos de objeto en el mismo orden.

**Ejemplo:**  
 $(\circ, \square, \triangle, \square)$  Son 3 tipos: Círculos  
 Rectángulos  
 Triángulos

Esta es una distribución de 5 objetos donde figuran objetos de un mismo tipo.

♥ las distribuciones del tipo anterior se denominan  **$n$ -arreglos con repetición de  $m$  tipos**. Denotamos al número total de estos arreglos por  **$A_n^m = m^n$**

**Note que:** la colección de  $n$ -arreglos de  $m$  tipos está en biyección con el conjunto de las funciones  $f: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$

Después de describir los principios combinatorios (regla de la suma, regla del producto y principio de inclusión-exclusión), el profesor define en el tablero: i. los arreglos sin repetición, que son lo que se establecieron en el análisis teórico como permutaciones de un subconjunto (ver

Figura 20); en esta definición se menciona que los arreglos sin repetición se pueden entender como funciones inyectivas. ii. las permutaciones o permutaciones sin repetición, mostrando la equivalencia de esta definición por medio de funciones biyectivas y dando dos ejemplos de este concepto como ordenación y como función (ver Figura 21).

**Figura 20**

*Definición y fórmula de los arreglos sin repetición (permutaciones de un subconjunto)*

**Arreglos sin repetición**

Se tienen  $n$  objetos diferentes  
 ¿Cuántos  $k$ -arreglos se pueden formar a partir de ellos?  
 Aquí dos  $k$ -arreglos son diferentes si difieren en al menos un elemento o tienen los mismos elementos pero dispuestos en un orden diferente. Estos son llamados **arreglos sin repetición.**

Por regla del producto, deducimos que el total de arreglos sin repetición es:

$$A_k^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

**Figura 21**

*Definición con fórmula y ejemplo del concepto de permutación*

Permutaciones	Permutaciones Factoriales
Si queremos contar el número de $n$ -arreglos sin repetición de $n$ objetos, consideramos estos, solo difieren entre sí por el orden de los elementos. Estos $n$ -arreglos son llamados Permutaciones y el total de permutaciones es:	$f: X \rightarrow X$ biyectiva $\rightarrow$ Permutación $f \mapsto (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ donde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$P_n = n! = A_n^n = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$	<b>Ejemplo:</b> Sea $X = \{a, b, c, d\}$ , una permutación $P: X \rightarrow X$ , podría ser:
<b>Ejemplo (Problema Torres):</b> ¿De cuántas maneras se pueden colocar 8 torres en el tablero de ajedrez de forma que ninguna puede atacar a la otra desde su posición: <b>Solución:</b> Debemos seleccionar un $n$ -arreglo sin repetición $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde los $a_i$ son índices de las columnas para el índice $i$ ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ). Se selecciona la columna $j$ tal que no hay una torre en $(i, j)$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$
$\rightarrow (1, 5, 2, 0, 4, 7, 3, 6)$ $P_8 = 8!$	

Mediante el concepto y la fórmula de permutación de un conjunto de  $n$  elementos diferentes, el profesor explica cómo se puede entender el concepto de permutaciones con repetición o permutaciones de un multiconjunto; esto permite que los estudiantes deduzcan la fórmula para el total de permutaciones con repetición a partir de la fórmula del total de permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos diferentes. Además, se muestra un ejemplo de este tipo de permutación (ver Figura 21) buscando que los estudiantes identifiquen las características de las permutaciones con repetición, estas son: la repetición y el orden.

### Figura 22

*Definición y fórmula de la permutación con repetición a partir de la fórmula  $n!$*

<p><b>Permutaciones con repetición</b></p> <p>Se tienen objetos de <math>k</math> tipos ¿cuántas permutaciones se pueden hacer tomando <math>n_k</math> objetos del primer tipo, <math>n_2</math> objetos del segundo tipo, ..., <math>n_k</math> objetos del <math>k</math>-ésimo tipo?</p> <p><b>Solución:</b></p> <p>El número de elementos de una permutación de estas es <math>n = n_1 + n_2 + \dots + n_k</math>.</p> <p>Si <math>k = n</math>, entonces todos los objetos serán diferentes y el número de estas permutaciones es <math>P_n = n!</math>.</p> <p>Si en un arreglo intercambiamos dos objetos del mismo tipo, no obtenemos un nuevo arreglo. Dado un arreglo de objetos de <math>k</math> tipos, el número de permutaciones como aplicación que dejan invariante a dicho arreglo es <math>n_1! n_2! \dots n_k!</math>.</p> <p>Así concluimos que el número de permutaciones con repetición en <math>k</math> tipos es</p> $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = P(n_1, \dots, n_k)$	<p><b>Ejemplo:</b></p> <p>¿cuántas palabras se pueden escribir con las letras de la palabra MISSISSIPPI?</p> <p><b>Solución:</b></p> <p><math>n_m = 1, n_i = 4, n_s = 4, n_p = 2</math>; entonces <math>n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11</math> y</p> $P(n_m, n_i, n_s, n_p) = \frac{11!}{1! 4! 4! 2!} = 34650$
--	---

Finalmente, el profesor define las combinaciones por medio de los tipos de permutaciones que se estructuraron con anterioridad, enfatizando en las características de este concepto. Esto permite señalar una de las principales diferencias entre las combinaciones y las permutaciones, la no importancia del orden en la combinación. Además de las definiciones, se muestran ejemplos de

cómo se aplica la fórmula de este concepto y cómo se deriva la fórmula para determinar el total de combinaciones a partir de las permutaciones (ver Figura 23).

**Figura 23**

*Definición de combinaciones a partir de las permutaciones*

Combinaciones	Combinaciones con repetición
<p>En los casos en los que no nos interesa el orden, sino solamente cuales elementos están en cierta distribución, decimos que la distribución es una <b>combinación</b>.</p> <p>Se llaman <b>k-combinaciones de n elementos</b> a las distribuciones de longitud k formadas a partir de dichos elementos y que se diferencian entre sí por los elementos que la componen, pero no por su orden.</p> <p>El número de k-combinaciones de elementos se denota por <math>C_k^n</math>.</p> <p>Para formar k-combinaciones de n elementos comenzamos considerando k-arreglos sin repetición de n elementos. Por cada k-combinación existen k! k-arreglos sin repetición que tienen los mismos elementos. Por lo tanto concluimos que:</p> $C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ <p><b>Nota:</b> Este resultado coincide con el número de Permutaciones con repetición en dos tipos: <math>n_1 = k, n_2 = n-k; P(k, n-k) = C_k^n</math></p>	<p>Se tienen objetos de n tipos diferentes ¿Cuántas k-distribuciones se pueden formar a partir de estos objetos si no se tiene en cuenta el orden de los elementos de la distribución? Dos distribuciones son diferentes en el número de objetos en al menos uno de los tipos. Estas distribuciones son llamadas <b>Combinaciones con repetición</b>.</p> <p><b>Ejemplo:</b> ¿Cuántas soluciones hay de la ecuación <math>u_1 + u_2 + \dots + u_n = k</math> donde <math>k \in \mathbb{N}</math> fijo, <math>u_1, \dots, u_n \geq 0</math>?</p> <p><b>Solución:</b> Sean k objetos indistinguibles y suponga que deseamos clasificarlos en n cajas enumeradas. Las combinaciones con repetición son el número de maneras en que podemos elegir los números de bolas en todas las cajas.</p> <p><math> \bullet\bullet\bullet   \bullet\bullet\bullet   \bullet\bullet\bullet  \rightarrow 01110111111011101111</math></p> <p>Por lo tanto <math>C_3^{18} = \frac{19!}{3!15!}</math>. El número de k-combinaciones en tipos con repetición es:</p> $C_k^n = C_{n-1}^{k-1} = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!}$

**6.1.3 Recolección y Análisis de datos uno (RD<sub>1</sub>)**

La recolección de datos de la Prueba diagnóstica se realiza con base en el análisis de las hojas de trabajo que contienen las producciones de los estudiantes. Luego, teniendo en cuenta la  $DGH_0$  y el análisis teórico consolidado ( $AT_1$ ), se analizan las respuestas de los estudiantes, a partir de los resultados obtenidos de la Prueba diagnóstica, esto se denomina Análisis a posteriori. Además del análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica se describen los resultados de la primera observación que son importantes para el refinamiento del primer modelo cognitivo.

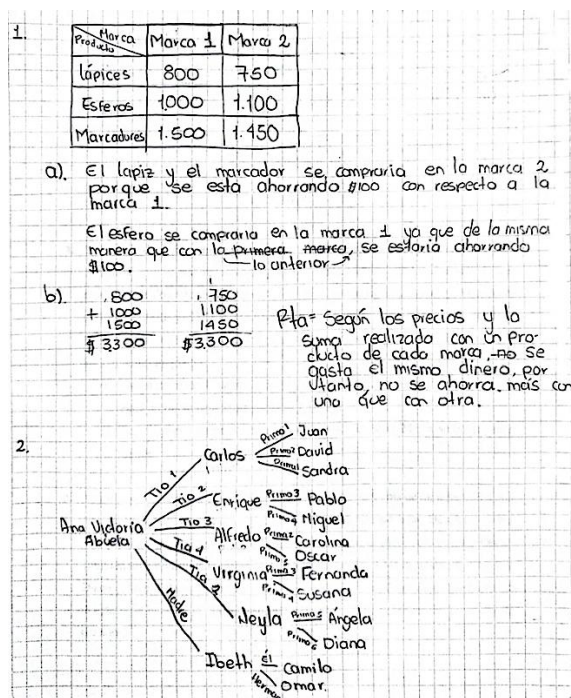
**6.1.3.1 Análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica.** En este apartado se presenta el análisis general de las respuestas que desarrollaron los 17 estudiantes a cada una de las tareas de la Prueba diagnóstica. Esto con el objetivo de presentar un informe de los conceptos previos

necesarios, las estructuras y mecanismos que se evidenciaron; teniendo en cuenta el modelo cognitivo  $DGH_0$  y el análisis a priori de las tareas.

En las Tareas 1 y 2, el 100% de los estudiantes hacen uso adecuado de los dos tipos de representaciones presentes en las tareas. Esto les permite estructurar la solución de las tareas correctamente, ya que comprenden cuales son los elementos del conjunto y cómo se usan a partir de las representaciones, mostrando una concepción Esquema de conjunto como estructura previa. Así, los 17 estudiantes evidencian que comprenden cómo hacer uso de las tablas de contingencia y los diagramas de árbol con los elementos de un conjunto finito; un ejemplo de cómo se abordan las Tareas 1 y 2 se muestra en la Figura 24.

**Figura 24**

*Resultado de un estudiante abordando la Tarea 1 y 2*



Las siguientes tareas son abordadas por los estudiantes después de entregarles las definiciones y el uso de las distintas representaciones que tiene el concepto de permutación. La

Tarea 3 fue solucionada por los estudiantes de formas diferentes, mostrando algunas estructuras y mecanismos mentales mencionadas en el modelo cognitivo y análisis a priori; a continuación, se destacan estos aspectos.

10 de los 17 estudiantes evidencian una concepción *Acción* del concepto de permutación, encontrando el total de formas de combinar las capas del helado, por medio de tres diferentes tipos de representaciones. 7 de los 10 estudiantes hicieron uso correcto de las diferentes representaciones, llegando a la respuesta correcta y encontrando el total de posibilidades de las combinaciones de los sabores del helado en cada ciudad, evidenciando una concepción *Acción*. En la Figura 25 se muestra una de las siete soluciones que se obtuvieron de los estudiantes, es necesario aclarar que no todos los estudiantes abordaron la tarea con el mismo tipo de representación.

**Figura 25**

*Resultado de un estudiante con una concepción Acción abordando la Tarea 3 correctamente*

3.	No	son	iguales	las	dos	permutaciones	veamoslo por
Tabla	de	contingencia.					
3.P3.	C	F	M			Teniendo en cuenta que	
CM	CMC	CMF	CMM			La primer letra es el	
CF	CFC	CFF	CFM			primer (helado del No. Saba	
CC	CCC	CCF	CCM			de helado, la segunda	
MC	MCC	MCF	MCM			el tipo de salsa y la	
MF	MFC	MFF	MFM			tercera la fruta entonces	
MM	MMC	MMF	MMM			las que estan	
FC	FCC	FCF	FCM			Subrayadas son las	
FM	FMC	FMF	FM			que ofrece la ciudad 2	
FF	FFC	FFF	FFM				
La ciudad 1	tiene	24	combinaciones diferentes contra 6.				
que tiene la	ciudad 2.						

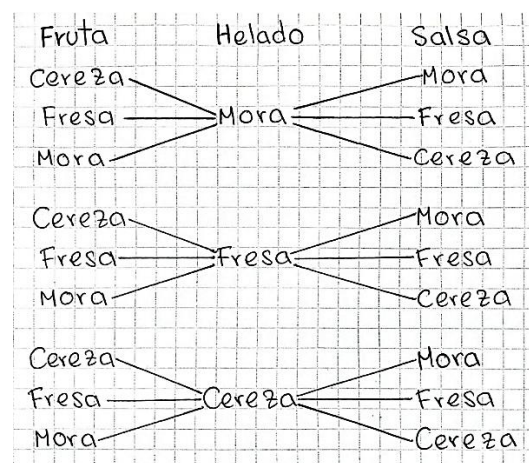
*Nota.* En esta imagen se muestra como un estudiante aborda la tarea por medio de una tabla de contingencia que le permiten encontrar el total de combinaciones de las dos ciudades.

3 de los 10 estudiantes abordaron la Tarea 3 por medio de los diferentes tipos de representaciones, pero de manera incorrecta, ya que omitieron algunos casos al realizar dichas representaciones. Esto puede explicarse ya que al hacer uso de algunos de los tipos de representaciones no se reflexiona sobre los elementos del conjunto y las características de la tarea.

Por ejemplo, en la Figura 26 el estudiante hace uso de la representación del diagrama de árbol, pero no considera que los elementos del conjunto se pueden repetir en cada capa del helado, esto no le permitió realizar esta representación por derivaciones de ramas, llegando a una construcción del diagrama de árbol de una manera incorrecta.

### Figura 26

*Mal uso del diagrama de árbol por un estudiante en la Tarea 3*

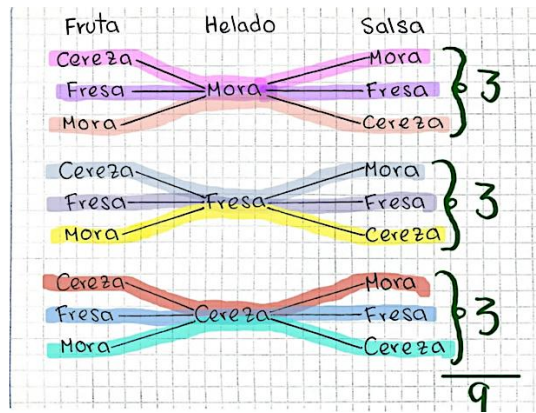


Esta construcción del tipo de representación no le permitió al estudiante entender la lectura correcta de la construcción realizada; es decir, en la construcción del diagrama de árbol que realiza el estudiante (ver Figura 26) se encuentran las 27 combinaciones de la ciudad A, pero esta mala interpretación y comprensión del tipo de representación no le permitió contar correctamente cada

combinación de las capas de helado. El estudiante cuenta las combinaciones en esta representación pensando que en cada nivel de su diagrama solo hay 3 combinaciones (ver Figura 27); pero en realidad, en esta representación se pueden encontrar las 27 combinaciones de los sabores de helado de la ciudad A, teniendo en cuenta que en capa del helado se pueden repetir para todos los sabores en las capas del helado, ya que en cada nivel del diagrama que realiza el estudiante se encuentran 9 combinaciones y no 3; esto se puede observar en la Figura 28.

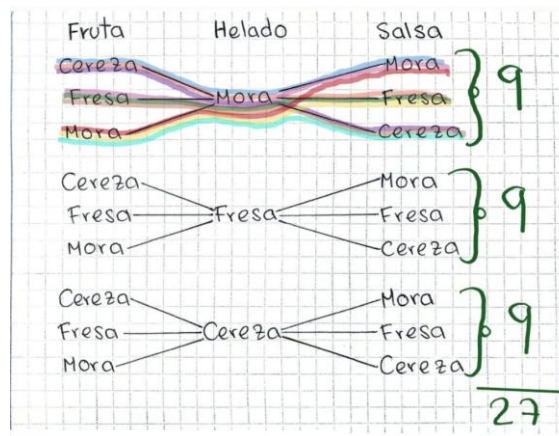
**Figura 27**

*Interpretación del conteo por el estudiante en la solución de la Tarea 3*



**Figura 28**

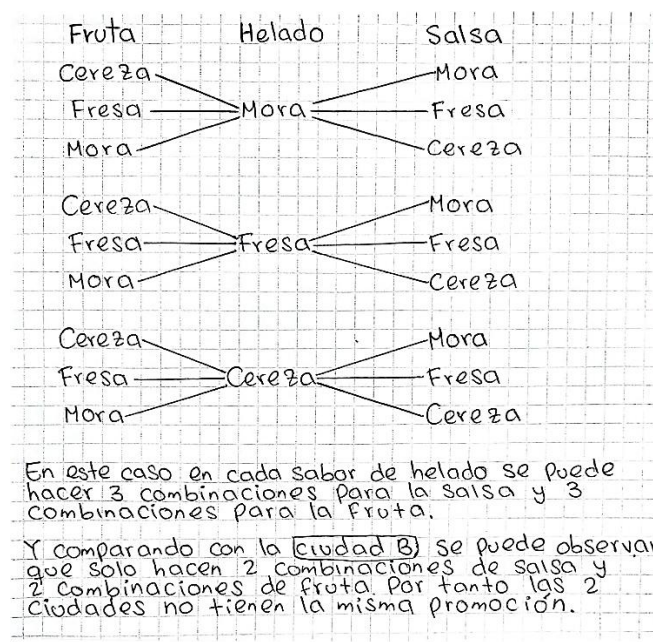
*Conteo correcto realizado por la investigadora*



Por lo tanto, la no comprensión del diagrama de árbol no le permitió al estudiante contar correctamente cada combinación de las capas del helado; llegando a encontrar el total de combinaciones en la ciudad A de manera incorrecta, pero respondiendo la primera parte de la tarea correctamente; la respuesta final de esta tarea por parte del estudiante se puede ver en el resultado verde de la Figura 29 concluyendo que: “las 2 ciudades no tienen la misma promoción”.

### Figura 29

Resultado de un estudiante en la concepción Acción abordando la Tarea 3 erróneamente



7 de los 17 estudiantes evidencian una concepción *Proceso*, ya que reconocen las características del problema e identifican el total de estas combinaciones por medio de un algoritmo o el uso de una fórmula que recuerden. 3 de los 7 estudiantes abordaron la Tarea 3 por medio de las *Acciones* interiorizándolas en un *Proceso*; es decir, empezaron solucionando la tarea a partir de algunas de las representaciones del concepto y esto les permitió identificar las características de la tarea, lo que los llevó a encontrar la fórmula correcta para la solución. Por ejemplo, en la Figura 30 el estudiante empieza con el diagrama de árbol y a partir de la realización

de este tipo de representación identifica que los sabores de las capas del helado se repiten, por lo tanto, el estudiante concluye que hay 3 posibilidades en cada capa viendo el total de combinaciones como el producto de cada posibilidad; es decir, deriva la expresión  $3^3 = 27$ .

### Figura 30

Resultado de un estudiante abordando la Tarea 3 a partir del mecanismo de Interiorización



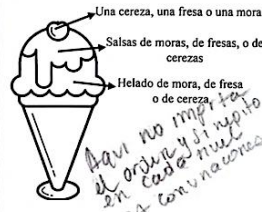
4 de los 7 estudiantes que abordaron la Tarea 3 evidencian una concepción *Proceso* ya que identifican las características o casos válidos en la tarea, sin necesidad de usar algún tipo de representación para encontrar todas las permutaciones. A partir de estas características (orden y repetición), los estudiantes determinaron el total de combinaciones del helado en la ciudad A, por medio de una fórmula relacionada con las técnicas de conteo.

Por ejemplo, en la Figura 31, ver el subrayado con color verde, el estudiante identifica que en la ciudad A el orden no importa y los elementos se pueden repetir, determinando el total de combinaciones de sabores calculado  $3 \times 3 \times 3 = 27$ ; además el estudiante escribe: “Aquí no importa el orden y si repito en cada nivel 27 combinaciones”. En cambio, para la Ciudad B el estudiante concluye que se tienen 6 combinaciones, para esto escribe: “Aquí es como una permutación importan el orden”, y calcula  $3 \times 2 \times 1 = 6$  (ver Figura 31, subrayado con azul). Asociando este cálculo como un algoritmo que funciona para determinar el total de permutaciones,

dado que en la Ciudad B el contexto hace referencia a permutaciones sin repetición. Este razonamiento lleva al estudiante a concluir que: “No son iguales las promociones”.

**Figura 31**

*Resultado de un estudiante con la concepción Proceso abordando la Tarea 3*

CIUDAD A	CIUDAD B																												
	<p><b>¡Prueba 3 nuevos sabores !</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>#</th> <th colspan="3">Helado + Salsa + Fruta</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Fresa</td> <td>Mora</td> <td>Cereza</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Fresa</td> <td>Cereza</td> <td>Mora</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Cereza</td> <td>Fresa</td> <td>Mora</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>Cereza</td> <td>Mora</td> <td>Fresa</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>Mora</td> <td>Fresa</td> <td>Cereza</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>Mora</td> <td>Cereza</td> <td>Fresa</td> </tr> </tbody> </table> <p>¡Hay 6 combinaciones diferentes!</p>	#	Helado + Salsa + Fruta			1	Fresa	Mora	Cereza	2	Fresa	Cereza	Mora	3	Cereza	Fresa	Mora	4	Cereza	Mora	Fresa	5	Mora	Fresa	Cereza	6	Mora	Cereza	Fresa
#	Helado + Salsa + Fruta																												
1	Fresa	Mora	Cereza																										
2	Fresa	Cereza	Mora																										
3	Cereza	Fresa	Mora																										
4	Cereza	Mora	Fresa																										
5	Mora	Fresa	Cereza																										
6	Mora	Cereza	Fresa																										

¿Son iguales las dos promociones? Explica tu respuesta mostrando cuántas y cuáles posibilidades hay en cada caso.

CIUDAD A  $\Rightarrow \frac{3}{\text{HELADO}} \times \frac{3}{\text{SALSA}} \times \frac{3}{\text{FRUTA}} = 27$  \* No son iguales las promociones.

CIUDAD B  $\Rightarrow \frac{3}{\text{HELADO}} \times \frac{2}{\text{SALSA}} \times \frac{1}{\text{FRUTA}} = 6$

4. Estas encerrarlo en una habla combinación combinaciones

Aquí es como contar el Permutacion importa el orden

Como se discutió en el Análisis a priori, las primeras tres tareas buscan a partir de la aplicación de *Acciones*, fomentar el mecanismo de interiorización y por tanto, encontrar las primeras evidencias de una estructura *Proceso*. La reflexión sobre dichas *Acciones* se realiza a través del uso de los tipos de representaciones para identificar las características de la tarea (orden y repetición), lo que permite que el estudiante pueda identificar un algoritmo apropiado para determinar el total de permutaciones.

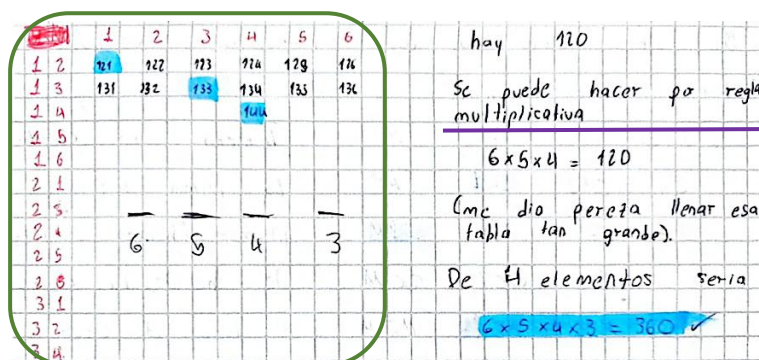
En la Tarea 4, 9 de 17 estudiantes evidenciaron una concepción *Proceso* de permutación, ya que identificaron las características de esta tarea como la no repetición y un subconjunto del conjunto; es decir, la repetición y el tamaño. La estructura *Proceso* permite que los estudiantes reconozcan qué técnica de conteo es exitosa para determinar el total de permutaciones de cuatro elementos del conjunto dado. Un ejemplo de la construcción de la estructura *Proceso* se puede observar en la Figura 32, donde el estudiante afirma: “Se puede hacer por la regla multiplicativa

$6 \times 5 \times 4 = 120$ ” (ver subrayado morado de la Figura 32). Este estudiante en la solución de la Tarea 4, empieza con la realización de una tabla de contingencia; además se observa que es el mismo estudiante que aborda la Tarea 3 por medio de uno de los tipos de representaciones definidas dentro de la Prueba diagnóstica, en este caso una tabla de contingencia (ver Figura 25).

Esto le permite al estudiante interiorizar estas *Acciones* en un *Proceso*, cuando escribe: “Me dio pereza llenar esa tabla tan grande” (ver Figura 32), puede reflexionar sobre la manera de determinar un algoritmo que le permita encontrar el código solicitado. El estudiante en la tabla de contingencia empieza a realizarlo para tres elementos del conjunto (ver recuadro verde de la Figura 32) y mediante el mecanismo de interiorización identifica que se pide para un subconjunto de cuatro elementos entendiéndolo que estos elementos no se pueden repetir, por lo tanto utiliza la regla del producto y dice “se puede hacer por regla multiplicativa” llegando a encontrar el total de permutaciones de un subconjunto por el algoritmo  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ , que se encuentra resaltado por el estudiante en color azul.

### Figura 32

*Resultado de un estudiante abordando la Tarea 4 mediante el mecanismo de Interiorización*

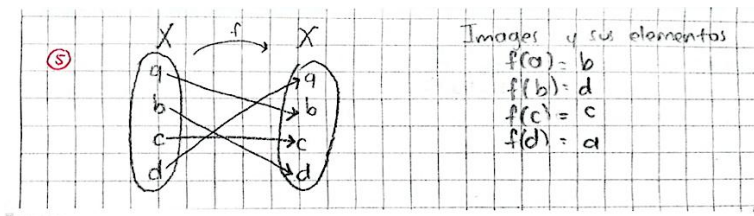


El restante de los estudiantes (8 de 17) por la mala interpretación del enunciado no entendieron correctamente la Tarea 4 y la abordaron por medio de representaciones, fórmulas y algoritmos incorrectos.

En las Tareas 5 y 6, 13 de los 17 estudiantes estructuran el concepto de permutación como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, viendo la permutación en notación de dos pisos como las imágenes de los elementos de un conjunto finito, identificando el dominio, codominio y las imágenes correspondientes de la permutación vista como función; esto le permite al individuo la construcción de la concepción Proceso de la  $DGH_0$  e identificar las estructuras previas de función y conjunto (ver Figura 33)

**Figura 33**

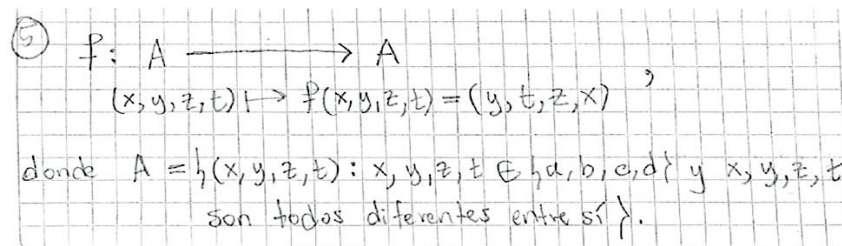
*Representación de la permutación por medio de una función conjuntista*



Además de identificar el dominio, codominio, el individuo reconoce que al convertir la permutación en una función de un conjunto con elementos diferentes (ver Figura 34), el individuo determina como " $rec(f)$ " (ver Figura 35) el total de todas las posibles funciones; esto se puede relacionar con encontrar la lista de todas las permutaciones de ese conjunto finito, para así encontrar el total de ellas.

**Figura 34**

*Representación de una permutación a partir de las funciones de una forma más general*



**Figura 35**

*Representación del total de permutaciones de un conjunto finito a partir de las funciones*

$$\text{rec}(f) = \{ (a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), \\ (a, d, b, c), (a, d, c, b), (b, a, c, d), (b, a, d, c), \\ (b, c, a, d), (b, c, d, a), (b, d, a, c), (b, d, c, a), \\ (c, a, b, d), (c, a, d, b), (c, b, a, d), (c, b, d, a), \\ (c, d, a, b), (c, d, b, a), (d, a, c, b), (d, a, b, c), \\ (d, b, a, c), (d, b, c, a), (d, c, a, b), (d, c, b, a) \}$$

De estos 13 estudiantes que empiezan en la construcción de la concepción Proceso del concepto de permutación, 9 de ellos identifican la permutación de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** de la Tarea 6 como una permutación en ciclos (ver subrayado azul de la Figura 36), logrando reescribirla en diferentes notaciones como la de ciclos y dos pisos (ver cuadro verde de la Figura 36) y representarla como funciones de un conjunto en sí mismo; además de mencionar que esta permutación es parte del grupo de simetría  $S_9$  (ver subrayado rojo de la Figura 36).

**Figura 36**

*Solución de un estudiante de la Tarea 6*

⑥ • Son permutaciones expresadas en ciclos

Es una función del conjunto al mismo conjunto

• Sí,  $(13)(247)(6)(589)$

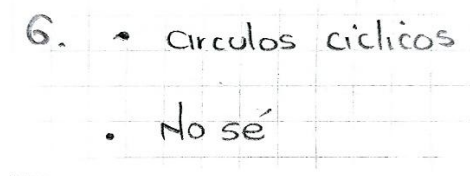
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	1	7	8	6	2	9	5

Es una representación de un elemento del grupo  $S_9$

Algunos estudiantes que realizan las Tarea 5, no identifican la Figura 16 de la Tarea 6 como una permutación, lo que no les permite representarla de otra manera (ver Figura 37); esto se debe a que no se ha llevado a cabo la construcción completa de la concepción Proceso del concepto de permutación, ya que no analiza aun la permutación como movimientos mentales que pueden ser representados por flechas, lo que los conlleva a no identificar otro tipo de notación a esta permutación.

### Figura 37

*Respuesta de un estudiante de la Tarea 6 que sí realizó la Tarea 5*

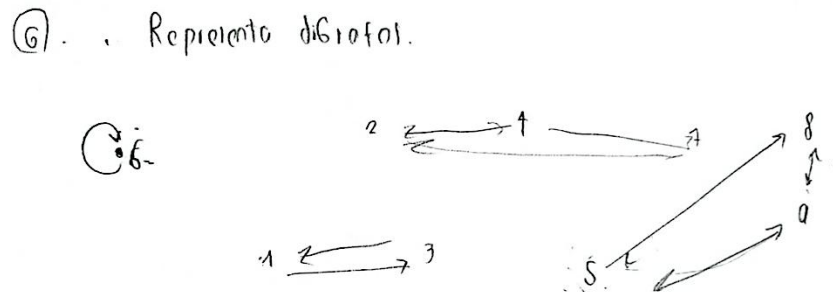


El restante de los estudiantes, 4 de los 17 estudiantes, no realizaron la Tarea 5 y la Figura 16 de la Tarea 6 la identifican como dígrafos, puede ser a conceptos que ha visto en otras áreas como álgebra moderna; pero a pesar de identificarla como otra noción, no logra describir otro tipo de notación de esta figura (ver Figura 38).

Esto se puede entender que los estudiantes recuerdan nociones de otras áreas, pero no entiende el origen de estas, ya que los grafos (algunos de ellos) pueden entenderse como permutaciones, además ese movimiento mental de la permutación que se consigue al pensar en este concepto por medio de la función no logra construirlo debido a que no realizan la Tarea 5 que tiene como objetivo empezar la interiorización de las Acciones hacia la construcción de la concepción Proceso.

**Figura 38**

*Respuesta de una estudiante de la Tarea 6 que no realizó la Tarea 5*



**6.1.3.2 Resultados de la Observación de clase.** Teniendo en cuenta las secciones de clase que se describieron anteriormente y con base en el Análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica, se determina que la  $DGH_0$  no se estaba teniendo en cuenta todos los conceptos o definiciones que abarca el concepto de permutación; es decir, no estaba tomando todos los tipos de permutación que se definen en matemáticas y cómo estos pueden construirse a partir de la permutación de un conjunto finito de elementos diferentes; lo que implica que también pueden entenderse como funciones.

Durante el desarrollo de la clase el profesor presenta diferentes tipos de permutación, como en la Figura 21 define los arreglos sin repetición, que también se pueden conocer como permutaciones de un subconjunto; además, en la Figura 23 se define otro tipo de permutación (permutación con repetición) a partir de la diferencia entre las características de la permutación sin repetición con estas, Mostrando así que la permutación con repetición o permutación de un multiconjunto se puede entender a partir de la regla de la división quitando a  $n!$  las permutaciones de los elementos de un mismo tipo.

Todo esto nos llevó a considerar un refinamiento del primer modelo cognitivo, por esto se decide diseñar un nuevo modelo cognitivo con base en los resultados del análisis de estos

instrumentos y aplicar nuevamente el ciclo de investigación. A continuación, se muestra la segunda aplicación del ciclo.

## **6.2 Segunda Aplicación del ciclo**

En la segunda aplicación del ciclo se refuerza el primer Análisis Teórico, este es denominado  $AT_2$  y es consolidado gracias a los resultados de la primera aplicación del ciclo. Lo anterior permite el diseño de un nuevo modelo cognitivo a partir del refinamiento de la  $DGH_0$  y es denominado  $DGH_1$ , el cual se valida por medio de la segunda aplicación del ciclo.

### **6.2.1 Análisis Teórico dos ( $AT_2$ )**

El Análisis Teórico, especialmente la revisión histórico-epistemológica del concepto de permutación permite determinar que existen otras características a parte de la no repetición y el orden en un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes, como el tamaño; estas características derivan otros tipos de permutaciones. La observación de clase reafirma estas variantes del concepto que se identifican a partir del Análisis Teórico, ya que el profesor define las permutaciones como arreglos o distribuciones con unas características particulares que permiten clasificarlas en diferentes tipos.

Con base en estas ideas y tomando en cuenta los resultados obtenidos en la primera aplicación del ciclo se realiza un refinamiento a la  $DGH_0$ . En particular, se incluyen en la descripción de las estructuras, la construcción de los diferentes tipos de permutaciones definidas por el orden, la repetición y el tamaño.

**6.2.1.1 Refinamiento del primer modelo cognitivo  $DGH_1$ ).** Producto del primer Análisis Teórico, la observación, y el análisis de la prueba diagnóstica se determina que el primer modelo cognitivo  $DGH_0$  no toma en cuenta otros tipos de permutaciones, solo la permutación de un conjunto finito de  $n$  elementos diferentes; es decir, la permutación sin repetición. Gracias a la

interacción entre las tres etapas del ciclo de investigación en la primera aplicación, se realiza el siguiente refinamiento de la primera Descomposición Genética Hipotética ( $DGH_0$ ). Para el diseño de este modelo cognitivo hipotético refinado ( $DGH_1$ ), se define la permutación de la siguiente manera:

Las permutaciones o distribuciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta características como: i. el orden, si influye o no el orden en la distribución; ii. el tamaño, cuántos elementos se toman del conjunto o si se toma todo el conjunto; iii. la repetición, cuando todos los elementos del conjunto son distintos o tienen elementos repetidos (multiconjunto). Así, las permutaciones pueden clasificarse de la siguiente manera:

1. *Permutación sin repetición*: Son los arreglos de los  $n$  elementos del conjunto  $N$ , donde importa el orden y la repetición. El total de estas permutaciones es  $P_n = n!$ . Por ejemplo,

$(1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23)$  es una *permutación sin repetición* del conjunto  $N = \{1,2,3\}$ , además, el total de permutaciones de este conjunto es  $n! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ .

2. *Permutaciones de un subconjunto o  $k$ -permutaciones*: Son los arreglos de un subconjunto de tamaño  $k \leq n$  del conjunto  $N$ , donde importa el tamaño, el orden y la repetición. El total

de estas permutaciones es  $\frac{n!}{(n-k)!}$ . Por ejemplo,  $(1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  es una *3-permutación* del conjunto  $N = \{1,2,3,4\}$ ; en este caso el total de permutaciones de este subconjunto se determina como:  $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$ .

3. *Permutaciones con repetición*: Son los arreglos de un multiconjunto finito  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  con multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , respectivamente; es decir,  $x_1$  se repite  $m_1$  veces,  $x_2$  se repite  $m_2$  veces y así sucesivamente, donde importa solo el orden y  $M$

tiene tamaño  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ . El número total de  $n$ -permutaciones con repetición de

$k$  tipos se establece como:  $P(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ . Por ejemplo,  $(1, 2, 1, 2, 3) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  es una 5-permutación con repetición de 3 tipos y el total de

permutaciones de este multiconjunto es  $P(2, 2, 1) = \frac{5!}{2! 2! 1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2} = 30$ .

El modelo cognitivo refinado  $DGH_1$  se basa principalmente en la aplicación de dos tipos de *Acciones*, que dan paso a la interiorización de dos *Procesos* que al coordinarse promueven una estructura *Proceso* de permutación. Este modelo cognitivo se describe de la siguiente manera:

*Acciones tipo 1*: esta estructura está enfocada en la permutación sin repetición establecida como una función biyectiva. En esta estructura el individuo no reflexiona sobre las características de la permutación en relación con las propiedades de las funciones. Es decir, no reconoce la no repetición como la inyectividad y al ser de un conjunto finito en él mismo, entonces el tamaño es el mismo en los conjuntos de entrada y salida; por lo tanto, la inyectividad y el tamaño del conjunto le atribuyen la biyectividad. De esta manera, el individuo no reflexiona acerca de estas características o propiedades lo que conlleva, por ejemplo, a hacer uso de la fórmula  $n!$  de manera mecánica para determinar el total de permutaciones de un conjunto finito de  $n$  elementos. Además, el individuo describe la permutación de manera mecánica como función sin comprender este concepto como un movimiento mental y, sin entender los elementos como elementos de los conjuntos de llegada y salida de la función; esto no le permite explicar que el total de estas funciones es el mismo total de las permutaciones ( $n!$ ). Por ejemplo, para una permutación del conjunto ordenado  $\{1, 2, 3, 4\}$ , la *Acción* de la permutación  $(3412)$  podría describirse como “poner 1 a la derecha de 4” o “desplazar a la izquierda y retroceder”.

El mecanismo de interiorización de las *Acciones* tipo 1, se genera cuando el individuo tiene la necesidad de averiguar los detalles de esta permutación entendiendo la inyectividad y sobreyectividad en relación con el concepto de permutación como características clave dentro de un determinado contexto. Esto le permite estructurar una permutación como una función donde el conjunto de entrada y salida es el mismo conjunto finito, y la regla de correspondencia o imágenes de la función corresponden a la permutación.

*Proceso 1 (Función biyectiva):* la interiorización de las *Acciones* tipo 1, le permite al individuo conceptualizar la permutación como un movimiento mental; esto implica que construye el concepto como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, entendiendo la biyectividad dentro de las características del concepto de permutación. Por ejemplo, en el conjunto  $\{1,2,3\}$  las permutaciones se pueden entender como el total de funciones biyectivas de este conjunto en sí mismo, así el individuo puede asociar al primer elemento del conjunto salida, cualquiera de los  $n$  elementos del conjunto llegada; para el segundo elemento del conjunto de salida, su imagen tiene la opción de ser cualquiera de los  $n - 1$  elementos del conjunto de llegada, ya que el primer elemento que se escogió no se puede usar; esto se da por la condición de inyectividad, es decir, esto implica la no repetición. Siguiendo de esta manera con todos los elementos del conjunto se tiene que para un conjunto de  $n$  elementos, el total de funciones es:  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$ , que corresponde al total de permutaciones.

*Acciones tipo 2:* estas *Acciones* están enfocadas en la ordenación, cuyo objetivo es encontrar las permutaciones a partir de los tipos de representaciones que tiene el concepto, por medio de estas representaciones, es posible determinar el total de permutaciones de cualquier tipo de permutación (con repetición, sin repetición o de un subconjunto). Esta estructura está condicionada por el tipo de representación en que puede abordar el individuo la tarea; ya sea a

través de listas, diagramas de árbol, tablas de contingencia, entre otras. Las *Acciones* tipo 2 permiten que los individuos hagan uso de fórmulas que recuerdan sobre las técnicas de conteo, sin distinguir o diferenciar sus características; de manera que las utilizan mecánicamente sin ningún cuestionamiento, lo que puede llevarlos a utilizar las fórmulas incorrectas sin tener en cuenta las condiciones del contexto en que aparece la permutación.

El mecanismo de interiorización de las *Acciones* tipo 2, se genera cuando el individuo tiene la necesidad de construir algoritmos que le permitan encontrar el número total de permutaciones de cualquier tipo de permutación. Esto le permite reconocer las características o casos válidos sin necesidad de enlistarlos uno a uno, así el individuo logra identificar los diferentes tipos de permutaciones y asignar sus respectivas características.

*Proceso 2 (ordenación):* la interiorización de las *Acciones* tipo 2 permite que el individuo determine formas generales a partir de las características que contienen los diferentes tipos de permutaciones, estas son: el orden, la repetición y el tamaño. Así puede encontrar un algoritmo para establecer el número total de permutaciones de cualquier tipo, sin necesidad de encontrar las permutaciones uno a uno. Estructurar el *Proceso 2* como resultado de la interiorización de *Acciones* de tipo 2, implica que el individuo reflexione sobre las características del contexto de la tarea en la que emerge la permutación, de manera que pueda aplicar una u otra fórmula de las técnicas de conteo conocidas. Esta reflexión no implica necesariamente que el individuo construya dichas fórmulas. Por ejemplo, al encontrar las 3-permutaciones del conjunto  $\{1,2,3,4\}$  el individuo determina como características: el orden, la no repetición y el tamaño. Esto le permite determinar que se piden permutaciones de tamaño 3, donde se utilizan todos los elementos del conjunto. Como resultado de su reflexión, puede distinguir que se trata de permutaciones de un subconjunto, y por

tanto decide aplicar la fórmula  $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$  o construir un algoritmo a partir de las características de la tarea; pero sin necesidad de construir o comprender el significado de esta fórmula a partir de dichas características.

El mecanismo de coordinación del *Proceso 1* con el *Proceso 2* se genera cuando el individuo pone juntas las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y otras propiedades de las funciones como características de la ordenación (la repetición, el tamaño, el orden); es decir entiende la no repetición como inyectividad y el tamaño para construir la sobreyectividad. Como resultado de este mecanismo mental, es posible que pueda crear algoritmos y derivar las fórmulas asociadas, de tal manera que logra encontrar el número total de permutaciones de cualquier tipo, a partir de la construcción de las permutaciones sin repetición.

*Proceso de Permutación:* la coordinación de estos dos Procesos permite que el individuo estructure la permutación sin repetición como una función biyectiva, donde la inyectividad se relaciona con la no repetición y la sobreyectividad con el tamaño del conjunto de entrada y de salida. Además, a partir de la construcción del total de permutaciones sin repetición como  $n!$  se derivan y construyen las fórmulas que permiten determinar el total de permutaciones para los diferentes tipos de permutaciones, teniendo en cuenta las características que las identifican. Por ejemplo, el individuo logra construir la fórmula de permutación con repetición de un conjunto  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  con multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_k$  a partir de  $n!$  teniendo en cuenta las repeticiones como las multiplicidades; es decir, el individuo logra establecer que si en una permutación se intercambian dos elementos del mismo tipo no se obtiene una nueva permutación. De esta manera puede establecer que dada una permutación de elementos de  $k$  tipos, el número de permutaciones que dejan invariante a dicho arreglo es  $m_1! m_2! \cdots m_k!$ , así esto es lo que se le quita

al  $n!$  por la regla de la división. Esta construcción permite que el individuo concluya que el total de permutaciones con repetición de  $k$  tipos o multiplicidades es  $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$ .

### 6.2.2 Diseño e Implementación dos ( $DI_2$ )

En esta segunda etapa de la segunda aplicación del ciclo, se diseña como instrumento el Taller 1 que está conformado por tareas que se fundamentan en el modelo cognitivo hipotético  $DGH_1$ . Se realiza un Análisis a priori de las tareas, este análisis contempla una forma de abordar cada tarea y la descripción de los objetivos de cada una con base en las estructuras y mecanismos mentales de la  $DGH_1$ . Además, se mantiene la observación de clase y se describen algunas secciones de estas observaciones teniendo en cuenta la construcción del modelo  $DGH_1$ .

**6.2.2.1 Taller 1.** Este segundo instrumento tiene como objetivo refinar o validar la  $DGH_1$ , en particular tiene como interés determinar si el estudiante evidencia la estructura *Proceso* por medio del mecanismo de coordinación del *Proceso 2* con el *Proceso 1*. Así, este mecanismo le permita al individuo identificar los diferentes tipos de permutaciones, a partir de las características encontradas y por medio del total de permutaciones sin repetición construir y/o entender las fórmulas para los diferentes tipos de permutaciones.

La implementación de este instrumento se realizó en la sesión número veintitrés del curso de matemática computacional, 17 estudiantes presentaron este taller como un parcial que se implementó en las dos horas de clase en un trabajo individual, en la cual se dieron las instrucciones y aclaraciones en las tareas que se plantearon. La recolección de datos de este instrumento se realiza a partir de las hojas de trabajo que contienen las producciones de los estudiantes; a continuación, se presenta un análisis a priori de las tareas que contempla la descripción de los objetivos de cada una y una forma de abordarla. Luego a partir de la  $DGH_1$  se analizan las

respuestas de los estudiantes, en un análisis a posteriori que es realizado a partir de los resultados obtenidos del Taller 1.

**6.2.2.1.1 Análisis A priori del Taller 1.** Con base en la información presentada hasta el momento, en esta sección se describe una solución de cada una de las tareas y los objetivos que sustentan el diseño de las tareas basados en la  $DGH_1$ . Aunque es posible abordar las tareas desde diferentes perspectivas, en esta investigación se muestran solo algunos caminos de solución; esto permite realizar el análisis de las producciones elaboradas por los estudiantes. En la Tabla 5 se presentan las estructuras y mecanismos mentales que pueden emerger en la solución de cada tarea.

**Tabla 5**

*Concepción de las estructuras y mecanismos mentales de la  $DGH_1$*

Tareas	Estructuras basadas en la $DGH_1$
Tarea 1 <b>¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.</b> y Tarea 2 <b>¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.</b>	Concepción Acción tipo 1.
Tarea 3	Proceso 1.
Tarea 4	Concepción Acción tipo 2. Mecanismo de interiorización.
Tarea 5	Mecanismo de interiorización. Proceso 2.
Tarea 6 y Tarea 7	Coordinación de los Procesos 1 y 2. Proceso.

*Tarea 1.* Sea  $\theta$  y  $\alpha$  las permutaciones

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar:

- a)  $\theta\alpha$
- b)  $\alpha^{-1}$  ¿Cómo comprueba que la inversa que usted encuentra es la correcta?
- c) Sea  $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , ¿Es posible calcular la inversa? Si es así calcula la inversa.
- d) Sea  $\gamma = (1235)(4)$  encuentre la inversa de esta permutación.
- e) Se  $\omega = (345)(1)(2)$  y  $\delta = (1543)(2)$  encuentre  $\omega\delta$ .

*Solución:* Para realizar estos ejercicios, la respuesta se coloca directamente ya que estos pueden realizarse mentalmente sin necesidad de colocar algún procedimiento.

$$\begin{aligned} \text{a) } \theta\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \alpha^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar si esta es la inversa correcta, se debe verificar que  $\alpha\alpha^{-1} = \text{identidad}$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) No es posible, porque este arreglo no es una permutación sin repetición ya que tiene un elemento repetido, por lo tanto, no se cumple la inyectividad; lo que conlleva a que no se pueda calcular la inversa.

- d) *Solución tipo 1*: escribir la permutación que está en notación cíclica a notación de dos pisos y luego determinar la inversa para luego escribirla en notación cíclica, de la siguiente manera:

$$(1235)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

de esta manera la inversa es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1532)(4)$$

Esta inversa se calcula a partir de la notación de dos ciclos intercambiando las filas y organizando los elementos de cada fila.

*Solución tipo 2*: Realizar la inversa con la notación cíclica, de la siguiente manera:

$$(1235)(4) = (5321)(4)$$

- e) *Solución tipo 1*: volver la permutación que está en notación cíclica a notación de dos pisos y luego realizar la compuesta para luego volverla a colocar en la notación cíclica, de la siguiente manera:

$$\omega = (345)(1)(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \delta = (1543)(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

de esta manera la compuesta es

$$\omega\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (13)(2)(4)(5)$$

*Solución tipo 2*: Realizar la compuesta directamente con la notación cíclica:

$$\omega\delta = (345)(1)(2) (1543)(2) = (13)(2)(4)(5)$$

Teniendo en cuenta las estructuras previas que necesitan los estudiantes, especialmente el del concepto de función; la Tarea 1 tiene como objetivo identificar las *Acciones* de tipo 1 que realizan los estudiantes, donde al pedir la compuesta de dos permutaciones no analizan estas

permutaciones como funciones, de esta manera no saben cómo aplicar la compuesta si de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. Al analizarla como función se puede entender que esta operación se realiza de derecha a izquierda y se entienden las composiciones de estas dos permutaciones en cada elemento como la imagen compuesta de cada elemento; por ejemplo  $\theta\alpha(1) = \theta(\alpha(1)) = \theta(2) = 3$ .

De igual manera para realizar la inversa si el individuo aplica *Acciones de tipo 1* aplica la inversa como volteando los pisos de la permutación, pero sin entender el por qué se realiza este procedimiento y sin verificar que esta permutación deba ser inyectiva para que se pueda realizar; más bien, empieza directamente a calcular o determinar la inversa. Sin embargo, al plantear la pregunta cómo se puede verificar si la función inversa que se encontró es la correcta y el individuo ¿piensa en verificarlo mediante  $\alpha^{-1}\alpha^{-1} = \text{identidad}$  están interiorizando estas *Acciones* y comprendiendo el concepto como función atribuyendo las propiedades de las funciones al concepto de permutación.

Además, en la Tarea 1 se pide la compuesta e inversa de otras permutaciones, pero con diferente notación, en este caso la notación cíclica. Al cambiar la notación los estudiantes pueden abordar esta tarea por medio de *Acciones* tipo 1 de tal manera que necesitan cambiar la notación para poder realizar la inversa o compuesta de las permutaciones; esto se debe a que no reflexionan en la permutación como una función y no entienden ese movimiento mental que representan las imágenes de la función (permutación).

La reflexión de estas *Acciones* permite que el estudiante no vea necesario cambiar el tipo de notación para calcular la inversa y compuesta, sino que analicen la inversa como “lo contrario”, es decir de derecha a izquierda y la compuesta pensándola como imágenes sin necesidad de cambiar la notación.

*Tarea 2* (Adaptada de Asiala et al, 1998). Por definición, el soporte de una permutación es el conjunto de números que no quedan fijos. Por ejemplo, el soporte de la permutación

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  es  $\{1,2,5,6,8\}$ . Escriba el soporte de las siguientes permutaciones:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 8 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

*Solución:* a) Soporte =  $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b) Soporte =  $\{\emptyset\}$

c) Soporte =  $\{1,2,3,4,5\}$

d) Soporte =  $\{2,3,4,6,7,9,11\}$

*Tarea 3.* Escriba un algoritmo tal que dada una permutación encuentre su soporte. Explique cómo funciona su algoritmo y especifique las condiciones de ingreso de la permutación.

La solución de esta tarea se puede realizar de diferentes formas, ya sea directamente con un código en un lenguaje de programación o una descripción del algoritmo; por lo tanto, en esta tarea no se muestra una solución de la Tarea 3.

En la Tarea 2 al calcular el soporte de la permutación se puede observar si el estudiante realiza esta tarea por medio de *Acciones* tipo 1 analizando elemento por elemento cuales son los diferentes o esas *Acciones* ya han sido interiorizadas y el individuo es capaz de identificar el soporte como el conjunto de los puntos o imágenes no fijos.

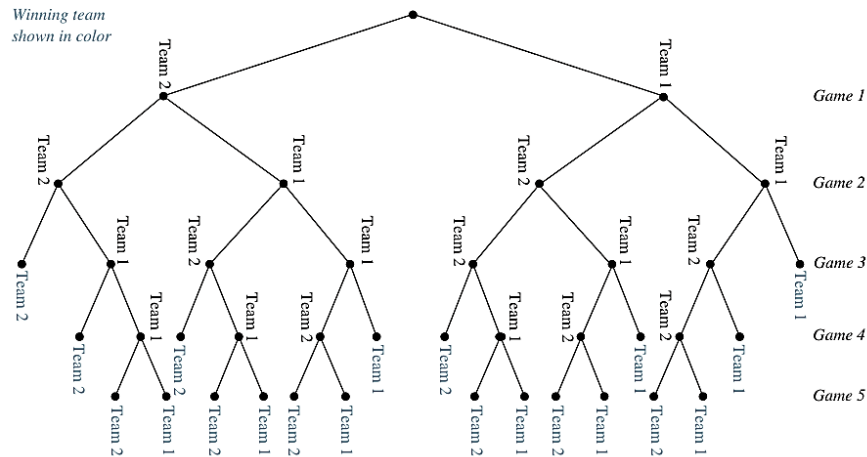
Al interiorizar estas *Acciones* de tipo 1 y entender el soporte como las imágenes fijas de una función, en la Tarea 3 se puede construir la estructura *Proceso* 1, el cual el individuo reflexiones sobre estas *Acciones* y logre crear o describir un algoritmo o programa para el cálculo del soporte de cualquier permutación sin repetición.

*Tarea 4* (Adaptada de Rosen y Krithivasan, 1999). Una eliminatoria entre dos equipos consta de un máximo de cinco partidos. El primer equipo que gane tres partidos gana la eliminatoria. ¿De cuántas formas distintas puede producirse el desempate? Es decir, ¿cuántas maneras hay que gane el equipo 1 o el equipo 2? En este caso en un partido no hay empate, debe ganar alguno de los dos equipos.

*Solución tipo 1:* La primera manera de abordar esta tarea es por medio del diagrama de árbol, donde cada piso del diagrama son los números de juegos y se dividen en ramas del equipo 1 o el equipo 2; las ramas finales del árbol muestran qué equipo ganaría. Por lo tanto, el total de ramas finales indican el número de partidos ganados de alguno de los dos equipos, de esta manera el total de formas posibles que gane al menos uno de los equipos es 100 (ver Figura 39).

**Figura 39**

*Solución de la Tarea 4 por medio del diagrama de árbol*



*Nota.* Adaptada de *Discrete mathematics and its applications* (p. 415-416) por Rosen, K. H., y Krithivasan, K, 2019, New York: McGraw-Hill.

*Solución tipo 2:* La Segunda forma de abordar esta tarea es entendiendo los 5 partidos de los 2 equipos por medio de las permutaciones con repetición, ya que determinar el total de formas posibles que gana el equipo 1; es equivalente a pensar en el total de formas posibles de permutar el conjunto  $\{E1, E1, E1, E2, E2\}$ , donde su cardinal es  $n = 3 + 2 = 5$  y existen dos tipos de elementos. Así, el total de formas que gane el equipo 1 es  $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ ; de la misma forma se puede pensar con el equipo 2, viendo el conjunto  $\{E2, E2, E2, E1, E1\}$  y haciendo uso de la permutación con repetición, dando como resultado  $\frac{5!}{3!2!} = 10$  formas de que gane el equipo 2.

*Tarea 5* (Fenton y Dubinsky, 1996). ¿Cuántas permutaciones diferentes de 3 letras se pueden hacer a partir de la palabra ALGEBRA?

*Solución:* Esta tarea se puede abordar por medio de tres situaciones de la siguiente manera:

- Caso 1: cuando la permutación no tiene la letra A.

Al no tener la letra A los elementos de este nuevo conjunto son todos diferentes y como se piden las permutaciones de tamaño o longitud 3; es pensar en las 3-permutaciones de este conjunto, donde el total de 3-permutaciones es  $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ .

- Caso 2: Cuando tiene solo una letra A.

Al tener una letra A se puede ver que hay tres maneras u opciones de posición para colocar la letra A, estas son: A \_ \_ ; \_ A \_ ; \_ \_ A. En estas opciones hay 5 letras de la palabra ALGEBRA que no son A y son todas diferentes; por lo tanto, las formas de ordenar y

permutar las 5 letras en cada una de las opciones son 2-permutaciones y en cada caso es  $\frac{5!}{(5-2)!} =$

$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$ . De esta manera el total de 3-permutaciones que contienen una letra

$A$  es  $3 \left( \frac{5!}{(5-2)!} \right) = 60$ .

- Caso 3: Cuando están las dos  $A$ 's.

Como en las palabras que se forman están las dos  $A$ 's, existen tres formas de ubicar estas dos  $A$ 's y son:  $\underline{A} \ \underline{A} \ \_$  ;  $\_ \ \underline{A} \ \underline{A}$  ;  $\underline{A} \ \_ \ \underline{A}$ . En cada caso, en el espacio en blanco se pueden colocar algunas de las 5 letras diferentes que se tienen; por lo tanto, el total de 1-permutación con las dos  $A$ 's es  $5 + 5 + 5 = 3 \left( \frac{5!}{(5-1)!} \right) = 15$ .

Así, teniendo en cuenta los tres casos, el total de permutaciones de tres letras de la palabra ALGEBRA es  $\frac{5!}{(5-3)!} + \frac{5!}{(5-2)!} + \frac{5!}{(5-1)!} = 60 + 60 + 15 = 135$ .

Las Tareas 4 y 5 tienen como objetivo que el estudiante construya la concepción *Proceso* 2 mediante la interiorización de las *Acciones* tipo 2; esto es, por medio de los tipos de representación como los diagramas de árbol para la Tarea 4 y listas para la Tarea 5. Estos tipos de representación fomentan la interiorización de *Acciones* tipo 2 de manera que los estudiantes pueden abordar las tareas determinando las características de cada contexto; este es el caso de la repetición para la Tarea 4, estructurando el conjunto como un multiconjunto y el tamaño para la Tarea 5, teniendo en cuenta también la repetición o no de la letra  $A$ .

Esto fomenta la concepción *Proceso* 2 creando algoritmos por medio de la identificación de las características o identificando los diferentes tipos de permutaciones que existen a partir de sus características. Ya que al establecer las características se pueden abordar las Tareas directamente con la fórmula de algún tipo de permutación, si se entiende cuál es el tipo de

permutación y se decide encontrar el total de posibilidades que permite encontrar la solución de las tareas.

*Tarea 6* (Adaptada de Rosen y Krithivasan, 2019). ¿Cuántas funciones uno a uno hay de un conjunto con  $m$  elementos a otro con  $n$  elementos? ¿Tiene alguna relación con las permutaciones? ¿por qué? Explique y justica su respuesta.

*Solución:* Para contar el total de funciones inyectivas o uno a uno se debe tener en cuenta el tamaño de los conjuntos, esto se puede analizar a través de diferentes situaciones como se muestra a continuación.

- Si  $m > n$  no hay funciones uno a uno de un conjunto de  $m$  elementos a un conjunto con  $n$  elementos.
- Si  $m < n$ , supongamos que los elementos del dominio son  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ; así, hay  $n$  maneras de elegir el valor de la función para el primer elemento del dominio ( $a_1$ ). Como la función es uno a uno, esto quiere decir que el primero elemento escogido ya no se puede repetir; así, hay  $n - 1$  maneras de elegir el valor de la función para el segundo elemento del dominio ( $a_2$ ). Teniendo en cuenta esto, en general hay  $n - m + 1$  manera de elegir el valor de la función para el  $m$ -ésimo elemento del dominio ( $a_m$ ). Por la regla de producto hay  $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - m + 2)(n - m + 1) = \frac{n!}{(n-m)!}$  Funciones uno a uno; esto hace referencia a las  $m$ -permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos.
- Si  $m = n$  se tiene la misma analogía que el ítem anterior reemplazando  $n = m$  al producto se tiene  $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ ; esto hace referencia a las permutaciones sin repetición.

Las Tarea 6 tienen como objetivo que el estudiante coordine los dos *Procesos* (*Proceso* de función biyectiva y *Proceso* de ordenación) de tal forma que el estudiante puede encontrar el total de funciones uno a uno teniendo en cuenta el tamaño del conjunto salida y el tamaño del conjunto entrada. Esto permite que identifique si el conjunto de salida es mayor que el conjunto de llegada; por lo tanto, las funciones que se forman ya no pueden ser inyectivas, es decir generan repeticiones de los elementos.

Cuando el conjunto de salida es menor que el conjunto de llegada, el estudiante logra identificar la restricción de inyectividad como la característica de la no repetición. Así estructura que a cada elemento del conjunto salida solo le corresponde un elemento del conjunto llegada sin repetir, aplicando la regla del producto llegar al algoritmo  $n(n - 1) \cdots (n - m + 1)$  como la fórmula de permutaciones de un subconjunto. Además, cuando los conjuntos de salida y llegada son iguales, el estudiante entiende que el total de funciones inyectivas de un conjunto en sí mismo es lo mismo que pensar en las permutaciones sin repetición.

*Tarea 7* (Adaptada de Rosen y Krithivasan, 2019). ¿Cómo le explicaría a un estudiante la fórmula o la noción de Combinación a partir del concepto de permutación? Recuerde que la fórmula de Combinación es  $C(r, n) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .

*Solución:* Estructurar las  $r$ -combinaciones ( $C(n, r)$ ) por medio de las permutaciones implica abordar dos tipos de permutaciones: las permutaciones de un subconjunto y las permutaciones con repetición, tal como se muestra a continuación.

- Con las permutaciones de un subconjunto ( $r$ -permutaciones):

Sabemos que las  $r$ -permutaciones son las formas de ordenar  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos donde el orden importa, y las  $r$ -combinaciones son las formas de ordenar  $r$  elementos

de un conjunto de  $n$  elementos donde el orden no importa. De esta manera, para el total de las  $r$ -combinaciones debemos quitarle las permutaciones ordenadas al total de  $r$ -permutaciones, estas permutaciones ordenadas son  $r!$ . En consecuencia, por la regla de la división se tiene que  $C_r^n =$

$$\frac{P_r^n}{P_r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

También se puede pensar que a partir de las  $r$ -combinaciones el orden no importa, por lo tanto, se deben ordenar los elementos en cada  $r$ -combinación y esto se puede hacer de  $P_r = r!$  maneras. En consecuencia, por la regla del producto se tiene que  $P_r^n = C_r^n \times P_r^r$  esto implica que

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{P_r^r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

- Con las permutaciones de un multiconjunto o permutaciones con repetición:

El conjunto con  $n$  elementos para las  $r$ -combinaciones se pueden ver como  $r$  elementos de un tipo y  $n - r$  elementos de otro tipo, es decir, en el conjunto de  $n$  elementos unos se repiten  $r$  veces y los otros se repiten  $n - r$  veces. De esta manera, aplicando las permutaciones con repetición tenemos que  $P(r, n - r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_r^n = \binom{n}{r}$ .

La Tarea 7 tiene como objetivo que los estudiantes puedan comprender la fórmula de las combinaciones a partir de algún tipo de permutación, en este caso, con el uso de permutaciones con repetición o de un multiconjunto. Al entender o derivar la fórmula de combinación a partir de alguna fórmula de permutación, el individuo coordina el *Proceso 1* con el *Proceso 2* de tal manera que identifica las características de cada concepto y los relaciona con las propiedades de las funciones. Es decir, el estudiante puede identificar el conjunto como un multiconjunto donde hay 2 tipos de elementos, del tipo  $r$  y del tipo  $n - r$ . Esto indica que el individuo asume la combinación

como un multiconjunto de dos tipos (él y su complemento), lo que permite que derive la fórmula de combinación por medio de la fórmula de permutación con repetición.

Otra manera es cuando el individuo identifica que las combinaciones son permutaciones de un subconjunto donde el orden no importa; por lo tanto, en las combinaciones no se cuenta cuando cambia el orden de una permutación, esto es,  $(n - r)!$ , como no se cuentan estas permutaciones se deben quitar del total de las permutaciones de un subconjunto, esto es entendido

en las funciones como el algoritmo de la división y así se tiene que  $C_r^n = \frac{P_r^n}{P_r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .

Esta reflexión permite que el individuo construya la concepción *Proceso de Permutación* a partir de la coordinación del *Proceso 1* con *el Proceso 2*, así el individuo identifica las características y las relaciona con las propiedades de las funciones.

**6.2.2.2 Continuación de la Observación de clase.** En esta sección se continua con la descripción de algunos fragmentos de las sesiones de clases que la investigadora considera útil en la investigación. Recordemos que los conceptos de permutaciones ya se han definido por el profesor, mostrando ejemplos, ejercicios y las definiciones del concepto de permutación mediante equivalencias; en estos fragmentos el profesor quiere mostrar esta equivalencia que hay entre las funciones y ordenaciones para el concepto de permutación mediante algoritmos en Python viendo estos conceptos por medio de las reglas de equivalencia.

Las clases se llevan a cabo de manera virtual porque la Universidad se vio obligada a retrasarlas debido a un cese de actividades motivado por el movimiento estudiantil, que impidió que se realizaran de forma presencial. Por esta razón, se decidió que todas las clases se impartieran en formato virtual. A continuación, se detallan los puntos clave de la clase para la investigación.

El profesor realiza un Notebook en Jupyter con el fin de definir de manera “formal” los elementos fundamentales de un problema combinatorio; esto es la misma idea de la investigación en la cual es importante pensar en las características del problema combinatorio, específicamente las características para el concepto de permutación. Así, este Notebook realizado por el profesor comienza con una introducción titulada Problemas y distribuciones combinatorias indicando que “En clase hemos tratado con diversos problemas combinatorios, donde se debe tratar de establecer las propiedades de ciertas distribuciones combinatorias...” (ver Figura 40, cuadro azul).

### Figura 40

*Inicio del Notebook realizado por el profesor*

## Problemas y distribuciones combinatorias.

En clase hemos tratado con diversos problemas combinatorios, donde se debe tratar de establecer las propiedades de ciertas distribuciones combinatorias, para entender cómo se deben contar los elementos distintos que conforman las soluciones a un cierto problema.

Por ejemplo, a veces se pedía encontrar el número cadenas de símbolos  $\{a, b, c, d, \dots\}$  que no poseen el la subcadena  $aa$ . Otras veces se pedía contar el número de caminos entre dos vértices en una malla, en un poliedro o un grafo. No siempre es obvio qué tipo de distribución es la que estamos contando. Queremos aclarar un método de solución general para diversos problemas combinatorias, es decir, queremos estudiar los elementos en común de una multitud de problemas combinatorios, tan dispares como los mencionados en el ejemplo arriba.

Es evidente que si contar sería muy fácil si pudiéramos hacerlo a una velocidad arbitrariamente grande. Podríamos simplemente contar los elementos uno por uno y llevar la cuenta. Entonces el problema combinatorio sería sólo cuestión de identificar el tipo de objeto que se está contando.

Estas propiedades de ciertas distribuciones [hace referencia a todas las ordenaciones] que menciona el profesor, es lo mismo que las características de una distribución; en el caso de la investigación son fundamentales las características de una permutación para encontrar que tipo de permutación es la que estamos contando, ya que como menciona el profesor (ver Figura 40, subrayado verde): “No siempre es obvio qué tipo de distribución es la que está contando”.

Estos algoritmos que realiza el profesor están enfocados en los problemas combinatorios como arreglos, los cuales se pueden entender de manera equivalente como funciones; estas funciones son vistas por el profesor como reglas de equivalencia [preliminares del contenido del

curso, ver Tabla 1] con el objetivo de crear un algoritmo general que construya el total de distribuciones y las cuente para cualquier tipo de problema combinatorio.

De esta manera, en la Figura 41 se observa como el profesor define las distribuciones como tuplas de números, teniendo en cuenta una relación de equivalencia que les permita identificar cuando dos tuplas son iguales (ver cuadro rojo de la Figura 41).

### Figura 41

#### Definición de distribución combinatoria con el fin de la creación de un algoritmo

##### Distribución combinatoria

Llamaremos *n*-distribución a  $(M, (a_1, a_2, \dots, a_n))$  con  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$  donde  $M$  es algún conjunto finito cuyos elementos llamamos los *tipos* de la distribución. Llamaremos al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  los objetos de la *n*-distribución (en lugar de *i* diremos "el objeto *i*", "el objeto *i*-ésimo" o "el objeto en la posición *i*"). Sabemos que las *n*-distribuciones están en biyección con las funciones  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow M$  y de hecho, con las funciones  $f : N \rightarrow M$  para  $N$  un conjunto de *n* elementos arbitrario.

$X$  es un espacio de búsqueda si  $X = (A, \sim)$  donde  $A$  es el conjunto de las distribuciones de tamaño  $n$  y  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre  $A$ . Por ejemplo, sean  $D_1 = (M_1, (a_1, a_2, \dots, a_j))$  y  $D_2 = (M_2, (b_1, b_2, \dots, b_k))$  si  $\sim$  es definida por

$$D_1 \sim D_2 \iff M_1 = M_2 \wedge j = k \wedge a_i = b_i \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Entonces lo que se compara que las tuplas de tipos sean iguales.  $X$  es entonces el espacio de los *n*-arreglos (con repetición). Otro ejemplo es el de las *n*-combinaciones (con repetición), en este caso  $\sim$  sería definida así:

$$D_1 \sim D_2 \iff M_1 = M_2 \wedge n = k \wedge |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i = m\}| = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : b_i = m\}| \text{ para todo } m \in M$$

es decir,  $D_1$  y  $D_2$  son iguales si tienen el mismo número de objetos de cada tipo.

De este modo para definir estas equivalencias, el profesor en el algoritmo define las propiedades y el comportamiento de la distribución; por ejemplo, la distribución tiene un tamaño y por lo tanto en el algoritmo el profesor lo define (ver cuadro marrón de la Figura 42), también define la repetición como multiconjunto (ver cuadro rosado de la Figura 42) con el fin de contar los tipos o repeticiones que tienen un elemento de un conjunto.

**Figura 42***Primera parte del algoritmo diseñado por el profesor*

Esto se puede representar en `python` así:

```

from typing import Generic, TypeVar, Dict, List, Tuple, Set, Optional, Any
from abc import ABC, abstractmethod
from collections import Counter
# Variable de tipo. Representa las clases que pueden tener los objetos en un
# problema combinatorio
M = TypeVar('M')

# Mipo para representar restricciones sobre objetos
R = TypeVar('R')

# Clase abstracta para definir una distribución de objetos combinatorios de tipo M
class Distribucion(Generic[M], ABC):
    # Implementamos las distribuciones de objetos combinatorios como tuplas genéricas (de tipo M)
    def __init__(self, ordenacion: Tuple[M]):
        self.ordenacion: Tuple[M] = ordenacion

    # Una distribución puede ser representada como un multiconjunto (aunque a veces se pierda información al hacerlo)
    def multiconjunto(self) -> Counter[M]:
        return Counter([m for m in self.ordenacion])

    # Las distribuciones combinatorias tienen un tamaño
    def __len__(self) -> int:
        return len(self.ordenacion)

    # Las tratamos como contenedoras
    def __contains__(self, m: M) -> bool:
        return m in self.ordenacion

    # Se puede agregar un objeto de tipo t a la distribución combinatorias
    def agregar(self, m: M) -> None:
        self.ordenacion += (m,)

    # Al imprimir las distribuciones serán representadas por tuplas
    def __repr__(self) -> str:
        return self.ordenacion.__repr__()

    def count(self, m: M) -> int:
        return self.ordenacion.count(m)

```

La Figura 43 es la continuación del algoritmo de la Figura 42 cuyo objetivo es definir tres métodos abstractos para especificar la relación de equivalencia; es decir, para identificar cuándo dos tuplas son iguales; por ejemplo, en el cuadro morado de la Figura 43 el profesor define como “def\_eq” para verificar si dos distribuciones son equivalentes o iguales, es decir, si tienen el mismo tamaño y los mismos elementos.

El profesor menciona que lo esencial para modelar el problema por medio de este algoritmo es el tamaño y la comparación o igualdad de dos distribuciones; estas son definidas en el código como “def\_len” (ver cuadro marrón de la Figura 42) y “def\_eq” (ver cuadro morado de la Figura 43).

### Figura 43

*Continuación del algoritmo para definir las clases por medio de las relaciones de equivalencia*

```
# Deben poder compararse entre sí, para saber si dos son iguales.
# Esta comparación depende de la instancia específica de la distribución.
# Se deja como un método abstracto a implementar en una clase concreta
@abstractmethod
def __eq__(self, otro: "Distribucion[M]") -> bool:
    ...

# Para automatizar el proceso de verificación de instancias repetidas de distribuciones de objetos
# combinatorios, utilizaremos códigos de identificación o hash. De esta un conjunto de distribuciones
# no contendrá elementos repetidos
@abstractmethod
def __hash__(self) -> int:
    ...

# Se pueden hacer copias de distrbuciones para facilitar construirlas recursivamente
def __copy__(self) -> "Distribucion[M]":
    ...
```

Así, teniendo en cuenta estas propiedades, el comportamiento y los tres métodos abstractos que se definieron como códigos, en la Figura 44 se muestra cómo el profesor define dos tipos de clases denominadas Arreglos y Combinación para poder encontrar las listas de las distribuciones y contar el total de estas.

**Figura 44**

*Código que define dos tipos de clases para el algoritmo final*

```

class Arreglo(Distribucion[M]):
    def __init__(self, ordenacion: Tuple[M] = ()):
        super().__init__(ordenacion)
        self.ordenacion = ordenacion

    def __len__(self) -> int:
        return super().__len__()

    def __contains__(self, m: M) -> bool:
        return super().__contains__(m)

    def agregar(self, m: M) -> None:
        return super().agregar(m)

    def __eq__(self, otro: "Arreglo[M]") -> bool:
        return self.ordenacion == otro.ordenacion

    def __hash__(self) -> int:
        return hash(self.ordenacion)

    def __copy__(self) -> "Arreglo[M]":
        return Arreglo(self.ordenacion)

class Combinacion(Distribucion[M]):
    def __init__(self, ordenacion: Tuple[M] = ()):
        super().__init__(ordenacion)
        self.ordenacion = ordenacion

    def __len__(self) -> int:
        return super().__len__()

    def __contains__(self, m: M) -> bool:
        return super().__contains__(m)

    def agregar(self, m: M) -> None:
        return super().agregar(m)

    def __eq__(self, otro: "Combinacion[M]") -> bool:
        return Counter([m for m in self.ordenacion]) == Counter([m for m in otro.ordenacion])

    def __hash__(self) -> int:
        return hash(tuple(sorted(Counter([m for m in self.ordenacion]).values()))))

    def __copy__(self) -> "Combinacion[M]":
        return Combinacion(self.ordenacion)

```

Para mostrar el algoritmo, el profesor primero describe de manera intuitiva el procedimiento que estructura en el código, mencionando que: “la búsqueda de distribuciones válidas se puede realizar como la navegación del árbol” (ver subrayado naranja de la Figura 45).

**Figura 45***Descripción intuitiva del algoritmo por parte del profesor*

Para solucionar estos problemas combinatorios en forma algorítmica podemos navegar el espacio de búsqueda, partiendo de una distribución vacía y de manera paralela, ir extendiendo distribuciones válidas para el problema. Cuando encontramos una distribución no válida, sabemos que no vale la pena extenderla más, así que sólo extendemos distribuciones válidas, y nos preguntamos si el resultado de la extensión sigue siendo válido. El proceso se detiene cuando se llega tener distribuciones de tamaño  $n$ .

El proceso de extensión se puede representar con un árbol. Entonces la búsqueda de distribuciones válidas se puede realizar como la navegación del árbol. La manera más usual de hacer esto, es por backtracking (o búsqueda por profundidad primero).

El código para plantear y resolver problemas combinatorios a través del computador, usando este enfoque es el siguiente:

Finalmente, en la Figura 46 se presenta el código final realizado por el profesor, que tiene como objetivo plantear y resolver problemas combinatorios a través de un lenguaje de programación.

**Figura 46***Código final realizado por el profesor de clase*

El código para plantear y resolver problemas combinatorios a través del computador, usando este enfoque es el siguiente:

```
# Clase que calcula soluciones a problemas combinatorios
class ProblemaCombinatorio(Generic[M],ABC):
    # Se inicializa un problema combinatorio genérico con el número de objetos a asignar, los tipos que pueden
    # ser asignados a los objetos, y las opciones de repetición u orden, que dan 4 tipos de distribución combinatorias
    # diferente.
    def __init__(self, num_objetos: int, tipos: List[M]) -> None:

        self.num_objetos: int = num_objetos
        self.tipos: List[M] = tipos
        self.restricciones: List[Restriccion[M,R]] = []
        self.soluciones: Set[Distribucion[M]] = set()

    def es_solucion(self, distribucion: Distribucion[M]) -> bool:
        return self.num_objetos == len(distribucion)

    def es_consistente(self, distribucion: Distribucion[M]) -> bool:
        for r in self.restricciones:
            if not r.satisfecha(distribucion):
                return False
        return True

    def agregar_restriccion(self, restriccion: Restriccion[M,R]):
        self.restricciones.append(restriccion)

    def backtrack(self, distribucion: Distribucion[M]) -> None:
        if self.es_solucion(distribucion):
            self.soluciones.add(distribucion)
        else:
            for m in self.tipos:
                distr: Distribucion[M] = distribucion.__copy__()
                distr.agregar(m)
                if self.es_consistente(distr):
                    self.backtrack(distr)
```

Después de explicar el proceso de creación del código, el profesor menciona que el algoritmo realiza las listas del arreglo y los compara mediante las características y/o restricciones que se encuentran en el problema o tarea. De esta manera, en la Figura 47 se observa cómo el profesor describe el procedimiento que está realizando el código para encontrar el total de permutaciones de un subconjunto (ver cuadro rojo de la Figura 47) y el total de combinaciones a partir de las permutaciones de un subconjunto (ver cuadro azul de la Figura 47)

**Figura 47**

*Proceso de construcción por el profesor de la permutación de un subconjunto y de la combinación*

El proceso de construcción de las distribuciones en un problema, es el mismo proceso que se usa para construir arreglos, pero verificamos ciertas condiciones y ciertas "simetrías" para contar adecuadamente las distribuciones que son solución al problema.

Para lo que sigue usaremos  $S_n$  para referirnos al conjunto solución de un problema combinatorio  $P = (X_n, \{R_i\})$  donde  $X_n$  representa cierto espacio de búsqueda de  $n$ -distribuciones.

Considere  $X_n$  como el espacio de búsqueda de los  $n$ -arreglos con tipos  $M$ . Claramente,  $(\emptyset)$  es el único arreglo de tamaño 0 con elementos en  $M$ , es decir,  $|S_0| = |M|^0 = 1$ . Por inducción sobre el tamaño  $n$  de los arreglos, suponga  $|S_n| = |M|^n$ . Evidentemente, un arreglo  $f' \in S_{n+1}$  se puede escribir  $f' = f + (f'_{n+1},)$  donde  $f = f' \setminus \{1, 2, \dots, n\} \in S_n$  y  $+$  representa la operación de concatenación entre arreglos. Entonces tenemos una biyección entre  $S_n \times M$  y  $S_{n+1}$ , de manera que  $|S_{n+1}| = |S_n \times M| = |S_n| \cdot |M| = |M|^n \cdot |M| = |M|^{n+1}$ .

Si se añade las restricciones necesarias para que estos arreglos no tengan repetición entonces podemos encontrar la fórmulas por un argumento muy similar, pero en cada paso inductivo debemos reducir el número de posibilidades. Entonces se encuentra una biyección entre  $S_{n+1}$  y  $S_n \times M$  donde  $S_n$  es el espacio solución de  $n$ -arreglos sin repetición (por hipótesis de inducción

$$|S_n| = \left| \prod_{i=1}^n M \setminus \{f'_{n+1-j}\}_{j \in \{1, 2, \dots, i\}} \right| = \prod_{i=1}^n |M| - i = \prod_{i=0}^{n-1} |M| \setminus \{f'_{n+1}\} - i$$

) de donde se obtiene que  $|S_{n+1}| = |S_n| \cdot |M| = \prod_{i=0}^n |M| - i$ .

Note que podemos escribir  $|S_n| = \prod_{i=0}^{n-1} |M| - i = \frac{|M|!}{(|M|-n)!}$

Para encontrar fórmulas para las combinaciones podemos partir de los arreglos y contar sólo los elementos que estén en diferentes clases de la relación  $\sim$  en la definición del espacio de búsqueda. Esto es más fácil en el caso de las combinaciones sin repetición, ya que en este caso todas las clases tienen el mismo tamaño. Note que si  $f$  es una  $n$ -combinación sin repetición, entonces la podemos ver como un  $n$ -arreglo representando una clase de equivalencia bajo  $\sim$ . En su clase de equivalencia deben estar todas aquellas que tengan los mismos elementos, y dado que cada elemento sólo sucede una vez, no es difícil ver que hay  $n!$  tales arreglos. Entonces si  $S_n$  es el conjunto solución del problema de  $n$ -combinaciones sin repetición, encontramos que

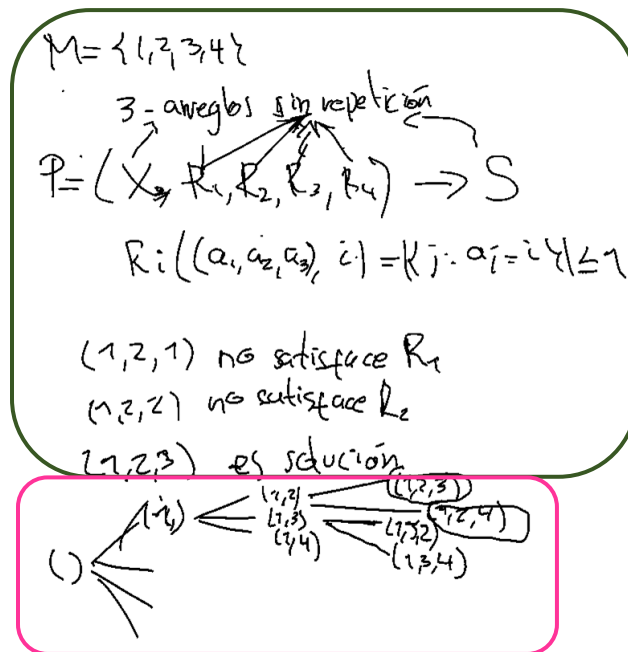
$$|S_n| \cdot n! = \frac{|M|!}{(|M|-n)!} \iff |S_n| = \frac{|M|!}{(|M|-n)! \cdot n!} = \binom{|M|}{n}$$

Luego, para entender el algoritmo de la Figura 47, el profesor realiza un ejemplo de permutaciones con papel y lápiz, con el objetivo de mostrar el paso a paso que realiza el algoritmo para la solución de un problema (ver Figura 48). El profesor menciona que el código realiza primero todas las posibles listas, pero las compara con las restricciones, en este caso del ejemplo, con la restricción o característica que los elementos no se pueden repetir; eliminando u omitiendo las que no satisfacen las restricciones (ver cuadro verde de la Figura 48). Así, enfatiza que este

proceso del algoritmo es similar a la construcción del diagrama de árbol (ver cuadro rosado de la Figura 48), diciendo que: “el algoritmo lo que hace es que dé un paso al siguiente el número de posibilidades de los vértices se baja en uno”.

**Figura 48**

*Ejemplo realizado por el profesor para explicar el algoritmo anterior*



**6.2.3 Recolección y Análisis de datos dos (RD<sub>2</sub>)**

La segunda Recolección de datos se realiza con base en el análisis de las hojas de trabajo que contienen las producciones de los estudiantes; teniendo en cuenta la  $DGH_1$  se analizan las respuestas de los estudiantes, a partir de las producciones obtenidas del Taller 1, esto se denomina Análisis a posteriori. Además de este análisis, se describen los resultados de la segunda observación de los fragmentos de clases descritos anteriormente con el objetivo de validar la  $DGH_1$  y generar una variación de este modelo cognitivo denominado  $DGH_{1.1}$ .

**6.2.3.1 Análisis a posteriori del Taller 1.** En esta sección se estudia los datos recolectados de las hojas de trabajo de cinco estudiantes ( $E1, E2, E3, E4, E5$ ) que participaron en el segundo

instrumento denominado Taller 1; esto con el objetivo de señalar las características que definen las estructuras *Acción*, *Proceso* y la forma en la que ocurre el mecanismo de interiorización y la coordinación de los *Procesos*. De esta manera, el análisis se presenta por medio de las construcciones de los dos *Procesos*, mostrando en cada proceso las concepciones y mecanismos encontrados para la construcción de cada uno; así, finalmente mostrar la coordinación de los dos *Procesos* y la concepción *Proceso* del concepto de permutación.

**6.2.3.1.1 Construcción Proceso 1.** En esta sección se muestra cómo los estudiantes construyen la concepción *Proceso 1* mediante las *Acciones* tipo 1 y el mecanismo de interiorización de estas *Acciones*.

Con una concepción *Acción* de tipo 1, el individuo no logra reconocer el concepto de permutación como un movimiento mental o como imágenes de una función donde su conjunto de llegada y salida son él mismo. Por ejemplo, en la Tarea 1 en el inciso a), el E4 se ve en la necesidad de escribir las permutaciones una al lado de la otra para realizar la combinación de estas dos permutaciones (ver Figura 49). A pesar de que el estudiante sabe que la composición de las permutaciones se maneja de manera similar al de las funciones, no logra ver mentalmente las imágenes de la compuesta de estas permutaciones y escribirlas directamente.

**Figura 49**

*Procedimiento de E4 en el punto 1. a) del Taller 1*

$$\begin{array}{l}
 1 \ a) \ \Theta \Psi \\
 \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cccccccc} 3 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 8 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccccccc} 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{array} \right) \\
 = \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cccccccc} 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Cuando el individuo realiza la compuesta de estas dos permutaciones sin un procedimiento escrito sino mentalmente está realizando la interiorización de estas *Acciones* tipo 1; sin embargo, el individuo debe tener en cuenta que la composición de las permutaciones al verse como funciones se hacen en el mismo orden que estas, es decir, de derecha a izquierda. Al no tener en cuenta este orden y realizar la compuesta de estas dos permutaciones en cualquier orden, el individuo está realizando *Acciones* de tipo 1, donde solo las identifica como movimientos sin aplicar las reglas de composición de las funciones que son heredadas por las permutaciones; por ejemplo, E3 aborda la solución de la Tarea 1. a) de manera incorrecta, ya que realiza la compuesta de izquierda a derecha (Ver Figura 50).

### Figura 50

*Procedimiento de E3 en el punto 1. a) del Taller 1*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \theta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{a)} \quad \theta \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 6 & 8 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sin embargo, realizar este procedimiento mentalmente para encontrar la composición de las permutaciones, teniendo en cuenta el orden de las composiciones de la permutación como el de las funciones genera como resultado la interiorización de las *Acciones* tipo 1. Este mecanismo de interiorización permite que el individuo realice la composición de permutaciones mentalmente sin importar el tipo de notación en el que este escrito; por ejemplo, el estudiante E1 realiza la compuesta mentalmente en el inciso a) de la Tarea 1 (ver cuadro rojo de la Figura 51) realiza la compuesta de dos permutaciones diferentes escritas en otra notación diferente a la de dos pisos

(notación de ciclos) del inciso e) de la Tarea 1 de manera mental, sin necesidad de convertir las dos permutaciones en notación de dos pisos para hallar la composición (ver cuadro verde de la Figura 51).

**Figura 51**

*Solución de la Tarea 1 de E1 mediante las Acciones tipo 1 y el mecanismo de interiorización*

a.  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

b. Para hallar  $\alpha^{-1}$ ,  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = Id$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Se comprobaba usando  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = Id$  y además  $\alpha$  es biyectiva por lo tanto tiene inversa.

c.  $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , no es posible hallar la inversa pues  $\lambda$  no es biyectiva.

d.  $\gamma = (1235) (4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

e.  $w = (345) (1) (2)$  y  $o = (1543) (2)$

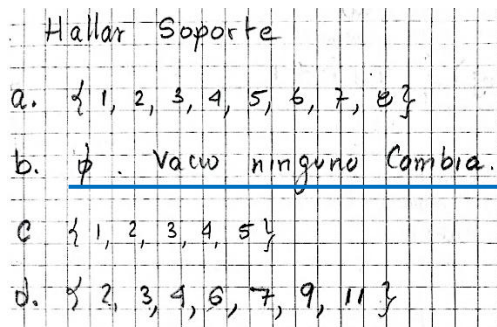
$$wo = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Una concepción Proceso 1, permite que el individuo estructure la permutación como un movimiento mental; esto implica que construye el concepto de permutación como una función biyectiva de un conjunto finito en sí mismo. Teniendo en cuenta que los estudiantes comienzan el mecanismo de interiorización de las *Acciones tipo 1* en la Tarea 1, otras *Acciones de tipo 1* se encuentran en la Tarea 2; donde estas *Acciones de tipo 1*, permiten que el individuo comience a entender el soporte de las permutaciones de la Tarea 2 como los puntos que no cambian, al estructurarlos como movimientos mentales. Esto se evidencia en los procedimientos realizados por

el estudiante E2 que encuentra todos los soportes correctamente y en el inciso b) plantea que el soporte es vacío, argumentando que ningún número cambia (ver subrayado azul de la Figura 52)

### Figura 52

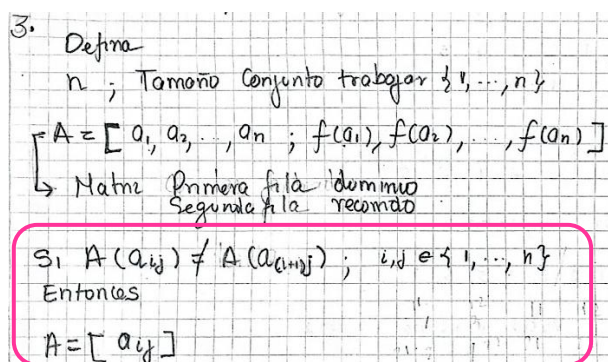
Solución de E2 para la Tarea 2



Esta interiorización que evidencia E2 le permite que se construya la concepción Proceso 1, ya que piensa en las permutaciones como movimientos mentales logrando solucionar la Tarea 3, realizando un algoritmo que calcular el soporte de la permutación (ver Figura 53). En este algoritmo ve la permutación como una matriz  $2 \times n$ , que recorre los elementos de la primera fila de la matriz comparándola con los elementos de la segunda fila de la matriz e imprimiendo o escogiendo si en esta comparación los elementos son diferentes (ver cuadro rosado de la Figura 53)

### Figura 53

Solución de E2 para la Tarea 3



**6.2.3.1.2 Construcción del Proceso 2.** En esta sección se muestra cómo los estudiantes construyen la concepción *Proceso 2* mediante las *Acciones* tipo 2 y el mecanismo de interiorización de estas *Acciones*.

Una *Acción tipo 2* permite que el individuo determine el total de permutaciones de cualquier tipo, encontrando todas las permutaciones por medio de alguna forma de representación, por ejemplo, diagramas de árbol, listas, tablas de contingencias entre otros. En particular, en la Tarea 4 el estudiante E4 para encontrar todas las posibilidades de que alguno de los equipos gane, realiza una lista de las formas posibles en que el equipo A gane 3 de los 5 partidos de cualquier forma posible (ver cuadro rojo de la Figura 54). Sin embargo, E4 no solo realiza la representación del problema para encontrar el total de posibilidades que gane alguno de los dos equipos; sino que a partir de esta representación el estudiante deriva la fórmula correcta para encontrar el total de posibilidades que gane el equipo A. De esta manera, E4 deriva el problema como una combinatoria; así estructura de cuántas maneras se puede combinar 3 partidos ganados de 5 partidos en total (ver cuadro azul de la Figura 54).

**Figura 54**

*Solución del E4 de la Tarea 4 a partir de las Acciones tipo 2 y la interiorización de estas Acciones*

¿De cuántas distintas formas puede producirse el desempate?

Equipo A:	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	/	/	/	/	/	/	/	X	X	/	/	X	/	/	/
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	X	X	/	/	/	X	/	/	X	/	/	X	X	/	/
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	/	/	X	/	/	/	X	/	X	/	X	/	X	/	/
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	X	/	/	X	/	X	/	/	X	/	X	/	X	/	/

Según la regla de combinatoria

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ si } n=5, \text{ y } r=3, \text{ entonces}$$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

Existen 10 formas para el Equipo A de poder ganar la eliminatoria.

Esta interiorización de las *Acciones tipo 2* se genera cuando el individuo tiene la necesidad de encontrar o derivar alguna fórmula a partir de las características que se definen en la tarea. Así, un individuo evidencia una estructura *Proceso 2* cuando reflexiona sobre esas *Acciones tipo 2* y logra abordar exitosamente Tareas a partir del uso de fórmulas adecuadas; es decir, identifica las características y reconoce qué fórmulas de las técnicas de conteo son correctas de usar para dichas características.

Por ejemplo, E2 aborda la Tarea 4 a partir de la fórmula de combinación, ya que entiende el problema como la forma de combinar 3 partidos ganados de 5 partidos en total (ver Figura 55).

### Figura 55

*Solución de la Tarea 4 de E2 con la concepción Proceso 2*

6. Un equipo puede ganar de

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{120}{12} = 10$$

La identificación de las características en los problemas de las Tareas se puede generar a partir de las representaciones de los tipos de permutaciones o a partir de la lectura del problema, sin necesidad de realizar estas representaciones. Por ejemplo, el estudiante E5 para solucionar la Tarea 4 identifica las características del problema, mencionando que responder a la pregunta es equivalente a: “determinar cuántos grupos de 3 objetos se pueden formar a partir de un conjunto de 5 objetos, ya que el orden importa” (ver subrayado verde de la Figura 56). Aunque el estudiante identifica una característica importante, no tienen en cuenta otra característica, la repetición de los elementos; es decir, hay 5 objetos de 2 tipos. Por lo tanto, hace uso de la fórmula incorrecta, debido a que no identifica todas las características del problema de la Tarea 4 (ver cuadro morado de la Figura 56).

Figura 56

Solución de la Tarea 4 de E5

b. A = Equipo 1 ; B = Equipo 2 Por la situación, no hay empates: o A gana o B gana por partido.

Esto es equivalente a determinar cuántas grupos de 3 objetos se pueden formar a partir de un conjunto de 5 objetos. Ya que el orden importa, pues no es lo mismo (sea  $g$ : ganar y  $p$ : perder) por ejemplo,  $gpg$  o  $gppg$ , se tiene que

$$\# \text{ Posibilidades} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{2} = 60 \quad \checkmark$$

otra justificación = Por principio multiplicativo:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 60 \quad \checkmark$$

**6.2.3.1.3 Coordinación de los Procesos (Construcción Proceso de Permutación).** En esta sección se muestra cómo los estudiantes construyen una estructura *Proceso de Permutación* mediante la coordinación de los *Proceso 1* y *Proceso 2*.

A partir de las estructuras *Proceso 1* y *Proceso 2*, el mecanismo de coordinación se genera cuando el individuo relaciona las características de la Tarea (*Proceso 2*) con las propiedades de las funciones, como la inyectividad y sobreyectividad (*Proceso 1*); es decir, coordina los dos *Procesos* de tal manera que asocia la no repetición como inyectividad y el tamaño como la sobreyectividad.

Así un individuo logra una estructura *Proceso* cuando a partir de la relación entre las características y las propiedades de las funciones, construye la permutación sin repetición como una función biyectiva; así a partir del total de permutaciones sin repeticiones ( $n!$ ) deriva y estructura las fórmulas del total de permutaciones para los diferentes tipos de permutación.

Por ejemplo, en la Tarea 6 el estudiante E3 resuelve la Tarea al relacionarla de manera equivalente a encontrar las formas posibles de escoger  $m$  elementos de un grupo de  $n$  elementos, especificando que: "... no puede haber repeticiones por (por la condición de la función)" (ver Figura 57). Así concluye que el total de formas es  $\frac{n!}{(n-m)!}$ .

**Figura 57***Solución de la Tarea 6 por el E3*

⑥ Este problema es equivalente al de encontrar cuántas formas diferentes hay de escoger  $m$  elementos de un grupo de  $n$ , donde no pueden haber repeticiones (por la condición de función). Entonces hay  $\frac{n!}{(n-m)!}$  formas.

Otra manera de evidenciar la coordinación de los Procesos es tratar los elementos en la tarea como funciones; por ejemplo, el estudiante E5 reflexiona sobre la característica de inyectividad y teniendo en cuenta esto, hace uso de la regla del producto, para determinar el total de funciones inyectivas como la productoria (ver subrayado verde de la Figura 58). A partir del producto  $m \times m - 1 \times m - 2 \times \dots \times m - n + 1$  deduce que esta operación equivale a la productoria y por lo tanto a la fórmula para el total de permutaciones de un subconjunto. Teniendo en cuenta esta fórmula E5 describe las características del problema como: “a medida que se van tomando posibilidades, se van reduciendo para evitar la repetición en los casos posible” (ver subrayado rojo de la ver Figura 58).

**Figura 58***Solución de la Tarea 6 por el E5*

8.  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$   $\xrightarrow{F}$   $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$S :=$  "conjunto de las funciones inyectivas"

$S = \{F \in B^A : F \text{ es inyectiva}\}$

Note que habrán  $\frac{m}{b_1} \times \frac{m-1}{b_2} \times \frac{m-2}{b_3} \times \dots \times \frac{m-n+1}{b_n}$  Funciones inyectivas, i.e.,

$|S| = \prod_{i=1}^m m-i+1 = \frac{m!}{(m-n)!} = MP_n$  (Por definición de permutación).

Esto sucede pues las permutaciones igualmente se basan en el principio multiplicativo, segunda ley de la combinatoria y a medida que se van tomando posibilidades, se van reduciendo para evitar la repetición en los casos posibles.

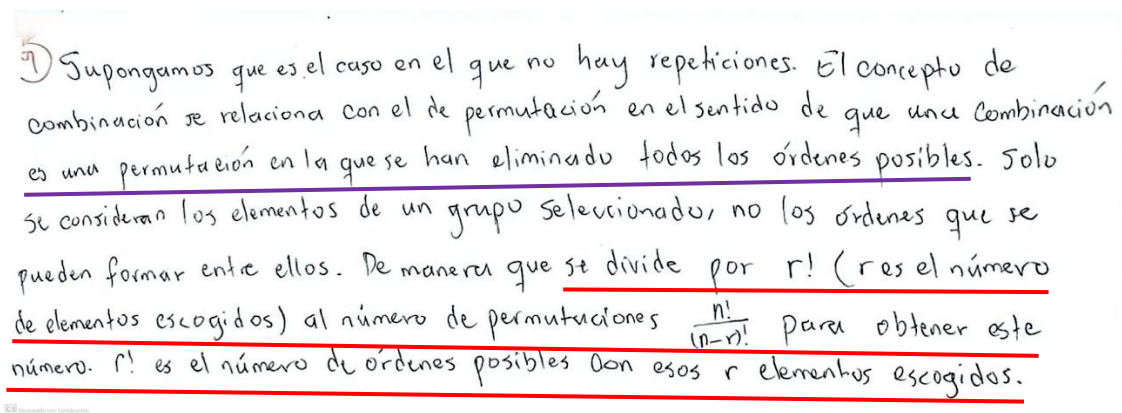
Cuando un individuo construye una estructura *Proceso de Permutación* logra determinar o derivar la fórmula de otros tipos de técnicas de conteo a partir de los tipos de permutaciones. Por

ejemplo, en la Tarea 7 se pide explicar la fórmula de combinación sin repetición a partir del concepto de permutación. El individuo que logra derivar esta fórmula a partir de las permutaciones evidencia que identifica las características de cada concepto y la diferencia entre ellos. De manera que comprende como quitar o agregar las distribuciones que se cuentan en una y en otra no; en este caso de la Tarea 7, la característica que tiene la combinación es que el orden no importa a diferencia de la permutación donde el orden sí importa.

Así, el estudiante E3 describe las combinaciones como: “una permutación en la que se han eliminado todos los órdenes posibles” (ver subrayado morado de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); esto le permite a E3 entender que a las permutaciones de un subconjunto se les debe quitar los órdenes que se pueden formar entre ellos, lo que lo lleva a concluir que: “se divide por  $r!$  ( $r$  es el número de elementos escogidos) al número de permutaciones  $\frac{n!}{(n-r)!}$  para obtener este número.  $r!$  Es el número de órdenes posibles con esos  $r$  elementos escogidos” (ver subrayado rojo de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

### Figura 59

#### Solución de la Tarea 7 de E3



Supongamos que es el caso en el que no hay repeticiones. El concepto de combinación se relaciona con el de permutación en el sentido de que una combinación es una permutación en la que se han eliminado todos los órdenes posibles. Solo se consideran los elementos de un grupo seleccionado, no los órdenes que se pueden formar entre ellos. De manera que se divide por  $r!$  ( $r$  es el número de elementos escogidos) al número de permutaciones  $\frac{n!}{(n-r)!}$  para obtener este número.  $r!$  es el número de órdenes posibles con esos  $r$  elementos escogidos.

Esta misma concepción del Proceso de permutación se puede observar en el estudiante E5 quien explica que el orden no importa en las combinaciones, mostrando como ejemplo: “la cadena  $a_1 a_2 \cdots a_n$  sería la misma que la combinación  $a_2 a_1 \cdots a_n$ ” llegando a concluir “por cada cadena habrá  $n!$  combinaciones iguales” lo que le permite deducir la fórmula para encontrar el total de combinaciones de  $k$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos, este es:  $C_n^k = \frac{P_n^k}{n!}$  (ver cuadro verde de la Figura 60).

**Figura 60**

*Solución de la Tarea 7 de E5*

Por definición, una combinación consiste en un arreglo el cual no importa el orden, tenemos que una permutación difiere en sí importante el orden. recordemos que la cantidad de permutaciones de  $n$  términos de un conjunto de  $k$  elementos viene dada por  $P_n^k = \frac{k!}{(k-n)!} = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1)!$

Ya que no importa el orden, por ejemplo, en el caso dado, la cadena  $a_1 a_2 \cdots a_n$  sería la misma que la combinación  $a_2 a_1 \cdots a_n$  ó  $a_n a_2 \cdots a_1$ ; en realidad por cada cadena habrá  $n!$  combinaciones iguales, así que se tendría

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{n!} = \frac{k!}{n! (k-n)!} = \frac{k!}{n! (k-n)!}$$

con lo cual obtenemos la fórmula de combinaciones de  $n$  elementos a partir de un conjunto de  $k$  elementos.

**6.2.3.2 Resultados de la Observación de clase.** A partir del análisis a posteriori del Taller 1 se observa una construcción del concepto de permutación a partir de dos Acciones que derivan dos Procesos que se coordinan en el Proceso de permutación.

Este análisis valida el modelo cognitivo  $DGH_1$ , sin embargo, en la observación de clase el profesor explica los diferentes tipos de permutaciones por medio de la construcción de un algoritmo de programación. A través de él hace énfasis en la construcción del concepto de permutación por medio de la función vista como regla de equivalencia, en la cual las características de cada tarea permiten clasificarla como uno u otro tipo de permutación.

El profesor describe y explica el código a partir de la comparación con el diagrama de árbol; por ejemplo, en el caso de la permutación sin repetición en cada nivel las ramas se van disminuyendo de a uno, ya que la repetición no es posible. Así este código realiza primero la lista de todas las permutaciones para luego, por medio de la regla de equivalencia y las características de las permutaciones, compararlas para imprimir aquellas cumplan las restricciones de la tarea.

Esta observación permite pensar en una variación del modelo cognitivo  $DGH_1$ , ya que la construcción del concepto de permutación se puede entender a partir de la construcción del proceso de función biyectiva de la permutación sin repetición para coordinarse con el Proceso de ordenación y sus características. Además, es posible realizar la construcción el concepto de permutación a partir de coordinación entre la estructura Proceso de función (estructura previa necesaria) y el Proceso de ordenación, de manera que se genere la construcción de todos los tipos de permutaciones; sin necesidad de tener primero la construcción de la permutación sin repetición.

Por ejemplo, construir la permutación de un subconjunto sin necesidad de hacer uso de la permutación sin repetición, como lo explica el profesor mediante el código (ver Figura 48); es decir, entender la permutación de un subconjunto como una función inyectiva donde las restricciones en la regla de equivalencia tienen que ver con el tamaño y la repetición, que son características que se identifican por medio de la construcción del Proceso de ordenación (*Proceso 2*).

Esta variación del modelo cognitivo se denomina  $DGH_{1,1}$  y se describe en el último capítulo como parte de las futuras investigaciones con el objetivo de que se pueda realizar el ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE para la validación de este modelo cognitivo hipotético.

## 7. Conclusiones

En este capítulo se describen los resultados de la investigación a la luz del marco teórico, el proceso metodológico y el análisis, todos estos sustentados por la Teoría APOE (Arnon et al., 2014).

Partiendo de la pregunta de investigación: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales construyen estudiantes de un curso de matemática computacional sobre el concepto de permutación?, este capítulo comienza con la presentación de la Descomposición Genética Validada del concepto de permutación que describe las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de un curso de matemática computacional, la cual cumple con el objetivo general de esta investigación.

Con base en este modelo cognitivo validado y los análisis de las observaciones de clase, se describe un nuevo modelo cognitivo como variación del modelo validado. Sin embargo, esta variación no se valida en esta investigación; por lo tanto, este último se presenta en la sección de futuras investigaciones con el fin de que se diseñe y aplique el ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE cuantas veces sea necesario para el refinamiento y validación de este modelo cognitivo.

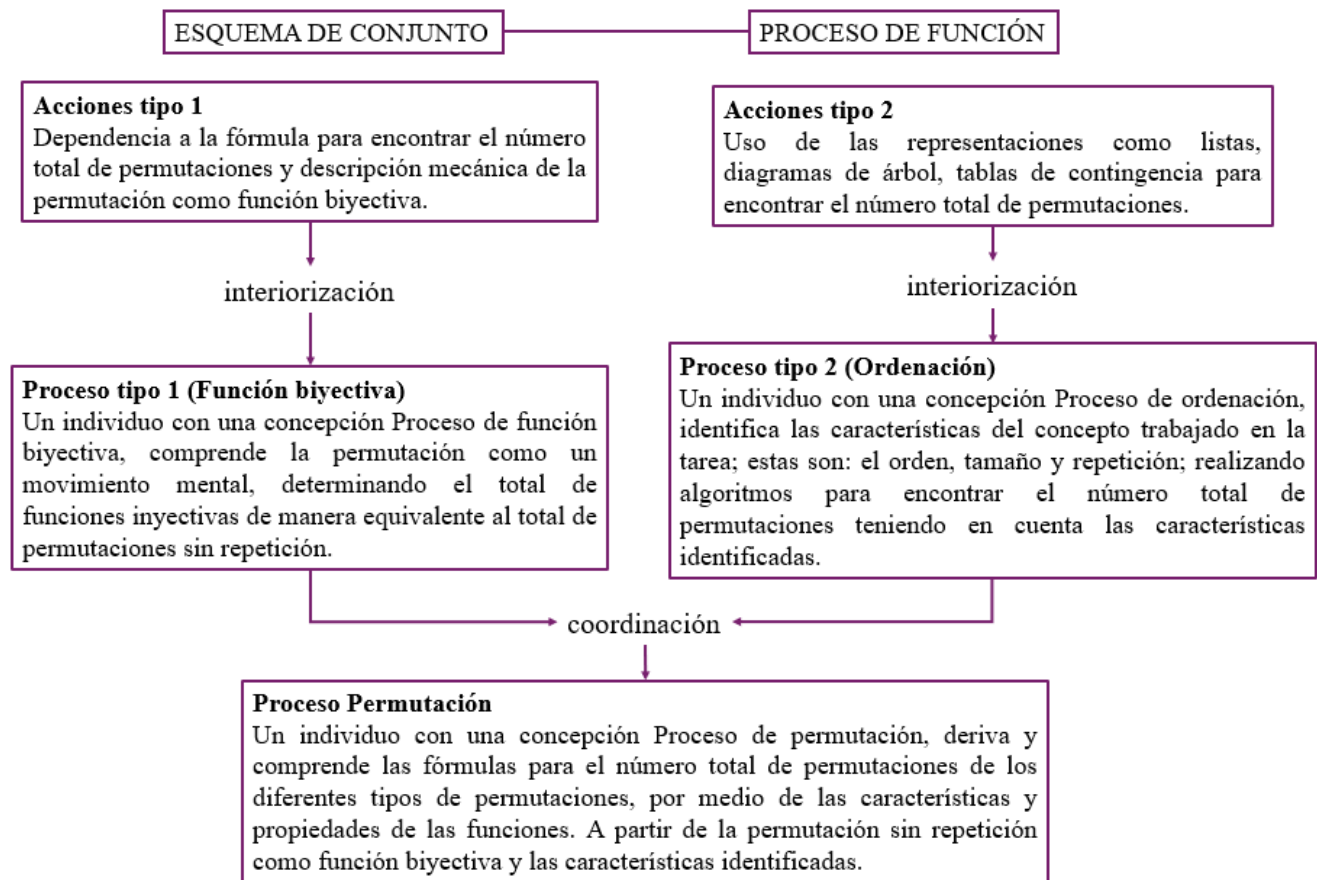
Finalmente, se presentan algunas contribuciones metodológicas, que surgen en el desarrollo de la investigación. Algunas de estas contribuciones se relacionan con la doble aplicación del ciclo mediante la interacción de las tres etapas, la observación directa de clase como instrumento para recolección y análisis de datos, la relación entre el profesor e investigadora que permitió promover la construcción de las estructuras y mecanismos en los estudiantes participantes.

### 7.1 Descomposición Genética Validada

De acuerdo con el análisis de los datos que se mostraron en las Aplicaciones del ciclo de investigación, en el capítulo anterior y gracias a la constante interacción entre las tres etapas del ciclo de investigación propuesta por la Teoría APOE se encuentra, que en el primer modelo cognitivo no se tenían en cuenta los diferentes tipos de permutación; aunque, en el análisis teórico sí se describen estas permutaciones por sus características, en el primer diseño del modelo cognitivo no se habían tenido en cuenta.

Como en el primer diseño de las estructuras y mecanismos mentales del primer modelo cognitivo no se especifica la construcción de todos los tipos de permutaciones en el concepto de permutación. Gracias a la Observación de clase y la relación entre profesor-investigadora se analiza que en la descripción de estas estructuras hacía falta la construcción de otros tipos de permutación y no solo el de permutación sin repetición. Esto genera la necesidad de una segunda aplicación del ciclo de manera que se refuerza el análisis teórico, mediante el refinamiento del primer modelo cognitivo ( $DGH_0$ ) y se mantiene la interacción continua entre las tres etapas para la segunda aplicación ciclo. De esta manera mediante la segunda aplicación del ciclo se valida el refinamiento del modelo cognitivo  $DGH_1$ . A continuación, se presenta la Descomposición Genética Validada del concepto de permutación.

Como se menciona anteriormente, uno de los resultados que se obtuvo de la reflexión de la doble aplicación del ciclo fue la necesidad de construir dos *Procesos* por medio de la *interiorización* de dos *Acciones* diferentes. A partir de la construcción de estos dos *Procesos* se realiza la coordinación de ellos, de manera que se construya la concepción *Proceso de Permutación* (ver Figura 61).

**Figura 61***Descomposición Genética Validada*

Teniendo en cuenta la Figura 61, la construcción del concepto de permutación inicia con la aplicación de dos tipos de Acciones. Para estas Acciones se tiene en cuenta como estructuras previas necesarias para el individuo el Esquema de conjunto y el Proceso de función, estos son:

**Esquema de conjunto:** Un individuo tiene la concepción esquema de conjunto cuando puede trabajar con diversos tipos de conjuntos en diferentes situaciones matemáticas. Es decir, puede definir funciones que tienen como argumentos de entrada a conjunto, puede identificar qué es y qué no es un conjunto. (Cabrera, 2022, p.48)

**Proceso de función:** Un individuo con una comprensión de proceso de función construye un proceso mental para una función dada, piensa en términos de entradas, posiblemente no

especificadas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas. (Dubinsky et al., 2005a, como se citó en Arnon et al., 2014, p. 21)

A partir de estas estructuras previas, el individuo construye el concepto de permutación sin repetición como una función biyectiva definida de un conjunto finito de  $n$  elementos en sí mismo, donde el total de estas funciones está determinado por  $n!$ . Para la construcción de este Proceso 1 de la permutación como función biyectiva, el individuo hace uso del concepto de permutación sin repetición como una fórmula sin entender el movimiento mental, sin comprender las propiedades de inyectividad y sobreyectividad; solo puede aplicar la fórmula de manera mecánica, para determinar el total de permutaciones. Sin embargo, la interiorización de estas Acciones permite que el individuo relacione la propiedad de inyectividad con la repetición y el tamaño de los conjuntos de entrada y salida. Esto le permite construir la expresión  $n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ , a partir de la regla del producto que se desarrolla en los cursos de Teoría de Conjuntos con relación a las funciones.

Esta estructura Proceso 1 de función biyectiva solo permite la construcción de las permutaciones sin repetición y como se ha mencionado existen otros tipos de permutaciones para el concepto de permutación. Así, surge la necesidad de construir el Proceso 2, en relación con la ordenación. Así es necesario que el individuo identifique las características del concepto que aparece en la tarea, esto permite la construcción de algoritmos o recordar las fórmulas de los diferentes tipos de permutaciones y usar la correcta a partir de estas características. La construcción del Proceso 2 se inicia con la interiorización de Acciones, las cuales se basan en realizar las diferentes representaciones que tiene el concepto (listas, diagramas de árbol, tablas de contingencia) para encontrar el total de permutaciones de cualquier tipo. La Acción repetida de la construcción de las representaciones del concepto para abordar la tarea, permite que el individuo

reflexione sobre las características de la tarea e identifique el tipo de permutación correcto sin necesidad de encontrar una a una las permutaciones para encontrar el número total de permutaciones.

Sin embargo, la construcción de estos dos Procesos por separado no permite que el individuo comprenda las fórmulas que permiten calcular el total de permutaciones de cualquier tipo y cómo o cuál permutación emerge en cada tarea. Por lo tanto, es necesaria la coordinación de estos Procesos, de forma que el individuo a partir de encontrar el total de permutaciones sin repetición (esto es  $n!$ ) y las características de cada tarea logre relacionarlas con las propiedades de funciones y por tanto pueda construir y comprender cada fórmula relacionada a cada tipo de permutación.

La concepción Proceso de permutación es suficiente para la comprensión de problemas donde se hace uso cualquier técnica de conteo; sin embargo, para el uso de este concepto en otras áreas es necesaria una concepción Objeto, pero esta concepción se desarrolla dependiendo del contexto que presenta cada tarea. Por esta razón la construcción del Objeto de permutación depende del contexto en el que se está utilizando; de esta manera, basados en Villabona et al. (2024) la Descomposición que se validó en esta investigación se determina como una Descomposición Genética Genérica. A partir de esta DG genérica a continuación se describen las posibles facetas que se pueden construir para la concepción Objeto en contextos de Estadística y Álgebra moderna I.

**Contexto de probabilidad en Estadística:** En este contexto, uno de los objetivos es hacer uso de conceptos de técnica de conteo, específicamente uso de los tipos de permutaciones para determinar todas las posibilidades que existen de que ocurra un fenómeno en determinadas circunstancias de azar. Un ejemplo de esta situación es el siguiente:

- Nia es 1 de 24 estudiantes en una clase. Cada mes, el maestro de Nia selecciona aleatoriamente a 4 estudiantes de su clase para actuar como presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de la clase. Ningún estudiante puede tener dos posiciones. En un mes dado, ¿Cuál es la probabilidad de que Nia sea elegida como presidente?

Para este tipo de problemas las Acciones están relacionadas con identificar qué tipo de permutación se hace uso, ya que por definición de probabilidad es  $\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Total de casos posibles}}$ . Así para encontrar el número de casos favorables, en este caso que Nia sea presidente, se deben aplicar Acciones que permita identificar la característica de tamaño y concluir que son 3-permutaciones de un conjunto de 23 elementos. Luego para el total de casos posibles, el individuo aplica Acciones de manera que identifica que son permutaciones de un subconjunto de 4 elementos del conjunto de 24. Esto le permite llegar a concluir que la probabilidad es  $\frac{P_3^{23}}{P_4^{24}}$ .

**Contexto de simetría en Álgebra Moderna:** En este contexto, uno de los objetivos es entender los grupos de simetrías, grupos cíclicos y transposiciones a partir del concepto de permutación sin repetición. Por ejemplo:

- Para encontrar el total de elementos de un grupo simétrico aplicar Acciones de manera que le permita entender estas simetrías como movimientos mentales, esto permite verlo de manera equivalente como el total de permutaciones sin repetición que se pueden realizar para esos elementos. Es decir, el grupo simétrico  $S_3$  es el total de permutaciones sin repetición de un conjunto de 3 elementos; esto son:  $(1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3)$ , para un total de  $3! = 6$ .

- Para entender las permutaciones sin repetición por medio de las permutaciones cíclicas, de manera que se realicen Acciones que permita que el individuo logre descomponer en ciclo disjuntos la permutación escrita en notación de dos pisos. Es decir, consideremos la permutación  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ , para descomponerla en ciclos disjuntos empezamos por 1 y nos da un ciclo (1 4 3), luego nos quedan los números 2,5,6,7,8,9,10. Empezamos por 2, y nos da otro ciclo que es (2 7 5 8), luego 6 es un punto fijo, entonces el tercer ciclo es (6). Por lo tanto, la descomposición en ciclos queda como (1 4 3)(2 7 5 8)(6).

La validación de estas posibles facetas para la concepción Objeto del concepto de permutación pueden ser estudios para futuras investigaciones.

## 7.2 Posibles contribuciones metodológicas

En esta investigación se potencian nuevos aspectos metodológicos, los cuales se considera pueden contribuir en precisar el ciclo de investigación de la Teoría APOE. A continuación, se describe cómo surgieron y porque pueden ser relevantes.

El primer aspecto que surge es el uso de la Observación Directa como instrumento para la recolección y análisis de datos; esto se dio dado que la investigadora no era la profesora del curso de matemática computacional. Por lo tanto, para analizar y fomentar la construcción de las estructuras y mecanismos mentales del concepto de permutación se decidió realizar la observación. Esta observación toma un rol importante en la investigación, ya que siempre es analizada a partir del modelo cognitivo diseñado y permite generar refinamientos de estructuras mentales en el modelo que la investigadora no había tenido en cuenta, pero el profesor que impartía la clase sí estaba haciendo uso de ellas.

Esto conlleva al segundo aspecto metodológico, el grupo de investigación incluye además de la autora del trabajo y la asesora de este, un profesor externo a la investigación, especialista en la temática matemática de interés. Por tanto, surge la relación entre profesor e investigadora que resulta relevante para la investigación, ya que se programan y desarrollan reuniones periódicas donde se comparten ideas tanto matemáticas como teóricas, con el objetivo de generar en los estudiantes las estructuras y mecanismos mentales necesarios para la construcción del concepto de permutación y otros conceptos de técnicas de conteo como la combinatoria.

Esta comunicación constante entre el profesor e investigadora fomenta una consolidación del análisis teórico; así, como el diseño de tareas que buscan fomentar la interiorización de Acciones y la coordinación de Procesos para su solución. Además, gracias al conocimiento del profesor se logra hacer uso de los lenguajes de programación, esto genera una reflexión más profunda para la comprensión del concepto de permutación como función, vista mediante las reglas de equivalencia. Esta visión permite identificar que el proceso que realiza el algoritmo es similar a la realización de un diagrama de árbol, enfatizando así en la importancia de los tipos de representaciones que son vista en la teoría como Acciones para la construcción de la concepción Proceso.

Finalmente, el tercer aspecto metodológico es la aplicación del ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE más de una vez. Esto se genera dado que en la última etapa del primer ciclo no se valida el modelo cognitivo; sino que a partir del análisis de la prueba diagnóstica y la observación de clase se genera un refinamiento del modelo cognitivo. Esto permite consolidar el Análisis Teórico con un segundo modelo cognitivo denominado  $DGH_1$ , lo que conlleva aplicar el ciclo nuevamente de manera que se refina o valida el modelo cognitivo; en este caso, la segunda aplicación del ciclo permite la validación del modelo.

Dado que estos aspectos metodológicos fueron de importancia para llegar a responder la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo, se considera que son posibles contribuciones metodológicas que se pueden llevar a cabo en otras investigaciones para reafirmar su utilidad.

### **7.3 Sugerencias para futuras investigaciones**

Esta investigación presenta una Descomposición Genética del concepto de permutación donde se considera la equivalencia de la ordenación con la función biyectiva, donde a partir de la permutación sin repetición, las propiedades de las funciones y las características de las ordenaciones se genera la construcción del concepto de permutación, en los que se incluye la construcción de todos los tipos de permutaciones en estudiantes de un curso de Matemática Computacional de la carrera de Matemáticas.

De esta manera, se plantea como aspecto interesante de abordar en futuras investigaciones, diseñar tareas que promueva la interiorización de Acciones, encapsulación de los Procesos y coordinación de ellos, a partir de la relación que tiene la ordenación con la función biyectiva para el concepto de permutación. También, es posible usar el modelo cognitivo validado  $DGH_1$  del concepto de permutación que se presenta en esta investigación, para diseñar secuencias de enseñanza de este concepto en cursos como álgebra moderna, estadística, matemática discreta y matemática computacional, que consideran contextos diferentes a los expuestos, para abordar la construcción del concepto de permutación.

Además, en este modelo cognitivo validado hace uso de la nueva perspectiva teórica realizada en el artículo de Villabona et al (2024) sobre la construcción de facetas del Objeto que se desarrollan cada vez que se aplica un nuevo tipo de Acción. Estas facetas se describen en la sección 7.1 pero no se validaron en la investigación. Por lo tanto, se considera que la validación

de estas facetas pueda ser validadas dependiendo al contexto que se describieron; es decir, validarse en un curso de estadística y de álgebra moderna.

Finalmente, debido al análisis de la observación de clase de la segunda aplicación del ciclo propuesto por la Teoría APOE, se considera una variación del modelo cognitivo validado  $DGH_1$ , en el cual se plantea la estructura Proceso de función (Dubinsky et al., 2005<sup>a</sup>); esta estructura Proceso permite la identificación de propiedades de las funciones. Se mantiene la construcción del Proceso 2 de ordenación a partir de la interiorización de las Acciones, las cuales permiten identificar las características del problema y relacionarla con los tipos de permutación. Así a partir de estas características y las propiedades de las funciones se genera la coordinación de los Procesos, el cual permite que el individuo construya la fórmula de todos los tipos de permutaciones mediante las propiedades y características del problema. Por ejemplo, que construya la permutación de un subconjunto vista como una función inyectiva donde el tamaño del conjunto de salida es mayor que el del conjunto de llegada; es decir, donde no se permiten repeticiones y el tamaño de las permutaciones no es el mismo al número de elementos del conjunto; esto le permite generar la regla del producto  $n \times n - 1 \times \dots \times n - k + 1 = \frac{n!}{(n-m)!}$  Llegando a la construcción de la fórmula para hallar el total de permutaciones de un subconjunto con  $k$  elementos o  $k$  –permutaciones.

**Referencias Bibliográficas**

- Albanese, V. (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las matemáticas en la formación docente*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada].
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA Notes*, 37-54.
- Asiala, M., Kleiman, J., Brown, A., y Mathews, D. (1998). The Development of Students' Understanding of Permutations and Symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(1), 13-43. <https://doi.org/10.1023/a:1009738109343>
- Biggs, N. L. (1979). The Roots of Combinatorics. *Historia Mathematica*, 6(2), 109-136.
- Carmona, I. (2013). *Juegos y teoría de grupos* [Tesis de doctorado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]

- Cartes, J.I., Soto, J.P., y Valencia, J.M. (2022). Estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes en los conceptos de permutación y combinación analizadas desde la teoría apõe. *South Florida Journal of Development*, 3(1), 2–8. <https://doi.org/10.46932/sfjdv3n1-001>
- Chamorro, M. (2003). Métodos alternativos de investigación en didáctica de las matemáticas: la observación. In *Actas del VI Simposio de la SEIEM: Logroño, 11-14 de septiembre de 2002* (pp. 73-94). Universidad de La Rioja.
- Chavarría, S. L. (2014). *De las ecuaciones a la Teoría de Grupos, algunos obstáculos epistemológicos* [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]
- Dominguez, D.L. (2016). *Secuencia didáctica que le permite a los estudiantes de octavo y noveno interpretar y usar las nociones de conteo en la solución de problemas de combinación y permutación* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]
- Durand, V., Hausberger T., y Spitalas C. (2015). Définitions et exemples: prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre modern. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 101-148. <https://doi.org/10.4000/adsc.2139>
- Felipe, M.J., Ortiz, V.M. (2018). Análisis de estructuras algebraicas mediante la modelización de puzzles y rompecabezas. En *IN-RED 2018. IV Congreso Nacional de Innovación Educativa y Docencia en Red*. Editorial Universitat Politècnica de València. 541-550. <https://doi.org/10.4995/INRED2018.2018.8593>

- Fenton, WE, y Dubinsky, E. (1996). *Introducción a las matemáticas discretas con ISETL*. Springer Science & Business Media.
- Gallian, J. (2021). *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC.
- Lunn, A. C., y Senior, J. K. (2002). Isomerism and configuration. *The Journal of Physical Chemistry*, 33(7), 1027-1079.
- Matoušek, J., Sánchez, A. L., y Neseřil, J. (2008). *Invitación a la matemática discreta*. Reverté.
- Muñiz, L., Alonso, P., y Rodríguez, L.J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 19-33.
- Oktaç, A. (2016). Abstract Algebra Learning: Mental Structures, Definitions, Examples, Proofs and Structure Sense, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 297-316.  
<https://doi.org/10.4000/adsc.844>
- Piaget, J., y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo veintiuno editores.
- Rosen, K. H., y Krithivasan, K. (2019). *Discrete mathematics and its applications*. New York: McGraw-Hill, 8(1).

Salgado, H.M. (2007). *Conteo: Una propuesta didáctica y su análisis* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los último 10000 años*. España: Crítica.

Tamayo, M. (2003). *El proceso de la investigación científica*. Editorial Limusa.

Terán, X., y De Oleo, A. (2021). Enseñanza de permutaciones a estudiantes de educación superior mediante el uso de un juego clásico. *IPSA Scientia, revista científica multidisciplinaria*, 6(2), 10-25. <https://doi.org/10.25214/27114406.1062>

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1), 5-31.

Trigueros, M., y Oktaç, A. (2019). Task design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55. doi:10.35763/aiem.v0i15.256

Villabona, D., Oktaç, A. y Roa-Fuentes, S. *Actuando sobre totalidades de procesos infinitos: construyendo facetas de una concepción de objeto*. ZDM Educación Matemática (2024). <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01631-6>

Villarreal, D.A. (2016). *Recurso educativo digital adaptativo “El rescate del Reino”: una estrategia para aprender permutaciones sin repetición* [Tesis de doctorado, Universidad de La Sabana]

Wilson, R & Watkins, J. (2013). *Combinatorics: ancient & modern*. OUP Oxford.