# EL TEOREMA CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN EN CATEGORÍAS

DIEGO ANDRÉS PERALTA REYES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2022

EL TEOREMA CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN EN CATEGORÍAS

DIEGO ANDRÉS PERALTA REYES

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Héctor Edonis Pindeo Tapia
Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2022

## DEDICATORIA

Dedicado a Gabriela & Jeimy, mi familia.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer a Dios, sin el cual no podría estar aquí, su amor y compasión han hecho que no desmayé a la fecha. Así mismo agradezco al profesor Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia por su paciencia e interés por este trabajo, estaré infinitamente agradecido por sus conocimientos como persona y matemático.

Evidentemente no me alcanzará una página para los agradecimientos que debo a cada una de las personas que me apoyaron en este proceso pero quisiera nombrar a Juan Carlos Basto Pineda, quien me enseñó la pasión y entrega por esta ciencia, Claudia Ines Granados Pinzon y Rocio Castillejo por sus constantes consejos y palabras de aliento, a los profesores que han ganado un espacio en mi corazón Jair Alexander Jaimes, Oscar Garzón, Wilson Olaya, Tulia Esther Rivera, Rafael Isaacs.

A mis amigos que no desmayaron y me apoyaron en cada una de mis recaidas, a todos ustedes, gracias.

**CONTENIDO**

## LISTA DE ANEXOS

## RESUMEN

**TÍTULO:** EL TEOREMA CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN EN CATEGORÍAS [*]

**AUTOR:** DIEGO ANDRÉS PERALTA REYES [**]

**PALABRAS CLAVE:** MONOMORFISMO, ISOMORFISMO.

**DESCRIPCIÓN:**
El estudio del isomorfismo abarca un gran número de disciplinas en las matemáticas, gracias a los teoremas de isomorfismo de grupos, anillos y módulos, estos problemas pueden ser resueltos con cierto grado de facilidad. Sin embargo, a veces estos teoremas se quedan cortos, entonces, volviendo a la idea del Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein consideramos un monomorfismo de la estructura A en una estructura B para establecer un isomorfismo entre ellas.


[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pindeo Tapia, Ph.D.

## ABSTRACT

**TITLE:** *

**AUTHOR:** DIEGO ANDRÉS PERALTA REYES **

**KEYWORDS:** monomorphism, isomorphism.

**DESCRIPTION:**
The study of isomorphism covers a large number of disciplines in Mathematics, thanks to the isomorphism theorems of groups, rings and modules these problems can be solved easily. However, sometimes these theorems are not enough, so, coming back to the idea of Cantor-Schroder-Bernstein Theorem we consider an A structure monophirsm in a B structure to establish an isomorphism between them.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pindeo Tapia, Ph.D.

# INTRODUCCIÓN

El concepto de isomorfismo se encuentra en casi todas las discisciplinas de la matemática, en contextos algebraicos como isomorfismos de orden, grupos, anillos, módulos, etc. En un intento por unificar distintos campos de la matemática, Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane introdujeron el concepto de categoría, el cual será fundamental para el estudio que se realizará en este trabajo. Es un problema de interés *comparar* estas estructuras y dar criterios para deducir cuando dos de ellas son la misma, estructuralemente hablando. En base a esto, se desarrolló este trabajo, con la motivación de extender el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, ya que en ocasiones los teoremas clásicos de isomorfismos, a pesar de su utilidad, resultan quedarse cortos a la hora de demostrar isomorfismos entre dos estructuras.

En las primeros secciones se dará la teoría necesaria para desarrollar el estudio de *isomorfismo* a partir de dos tipos especiales de morfismos, los monomorfismos y corretracciones, los cuales son extensiones naturales de funciones inyectivas en la teoría de conjuntos. Así como un estudio de los objetos irreducibles, para determinar si estos son únicos o no, salvo isomorfismos.

Es importante destacar que varios de los conceptos y teoremas mencionados en este documento están basados en la teoría desarrollada por Laackman [1], así como

---

[1] Don LAACKMAN. "The Cantor-Schroeder-Bernstein property in categories". En: ().

teoría y contraejemplos tomados de Oswaldo Lezama [2],[3] y [4]. Por su parte, el estudiante realizó de forma independiente las demostraciones de los Teoremas 2.1.3 y 4.3.10.

---

[2] O. LEZAMA. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 1: Grupos”. En: *SAC$^2$, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* ().

[3] O. LEZAMA. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 2: Anillos”. En: *SAC$^2$, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* ().

[4] O. LEZAMA. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 3: Módulos”. En: *SAC$^2$, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* ().

# 1. PRELIMINARES

## 1.1. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Empezaremos este texto describiendo los distintos tipos de estructuras que se trabajarán en él.

**Definición 1.1.1** *Sea $G$ un conjunto no vacío. Diremos que $(G,*)$ es un Grupo si posee las siguientes características:*

1. ** es una operación binaria interna en $G$, esto es una función $* : G \times G \to G$ del producto cartesiano de $G$ con $G$ en $G$, la cual denotaremos por $*((a,b)) := a*b$ o simplemente $ab$ si no hay confusión.*

2. *Se dice que la operación $*$ tiene la propiedad asociativa, si para cualesquiera elementos $a,b,c \in G$ se cumple la igualdad:*

$$a(bc) = (ab)c.$$

3. *Se dice que la operación $*$ posee un neutro, si existe en $G$ un elemento, el cual denotaremos por $e$ tal que para todo $a \in G$ se cumple la igualdad*

$$ae = ea = a.$$

4. *Para cada $a \in G$, existe un elemento $a^{-1}$, el cual llamaremos inverso de a, tal que*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

*Si además $G$ cumple que:*

5. *La propiedad conmutativa, es decir, para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene la igualdad:*

$$ab = ba,$$

*entonces diremos que $G$ es un grupo abeliano.*

**Ejemplo 1.1.2**

1. *Los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, con la operación de suma usual.*

2. *Las funciones biyectivas de un conjunto $A$ en sí mismo con la operación composición de funciones.*

3. *Consideremos un polígono regular de $n$ lados con sus rotaciones y reflexiones, resulta ser un grupo no abeliano.*

Para relacionar los distintos grupos tenemos las funciones que *preservan* su estructura.

**Definición 1.1.3** *Sean $G, H$ grupos, diremos que una función $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos si $f(ab) = f(a)f(b)$.*

**Ejemplo 1.1.4**

1. *La función exponencial es un homomorfismo de grupos entre los números reales bajo la adición y el grupo multiplicativo de los números reales no nulos, pues*

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2. *La función determinante, definida sobre el grupo multiplicativo de matrices invertibles (Grupo lineal) en los números reales no nulos, es un homomorfismo, pues*
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

**Definición 1.1.5** *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, $A \subset G$, $B \subset H$ y $e_H$ el elemento neutro de $H$. Se definen los siguientes conjuntos*

1. $f(A) := \{f(a) \in H : a \in A\}$.
2. $f^{-1}(B) := \{x \in G : f(x) \in B\}$.
3. $\mathrm{Im}\,(f) := f(G)$.
4. $\mathrm{Ker}\,(f) := f^{-1}(\{e_H\})$.

**Proposición 1.1.6** *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\mathrm{Ker}\,(f) = \{e_G\}$.
2. *$f$ es una función inyectiva.*
3. $f^{-1}(f(A)) = A$*, para todo* $A \subset G$.

**Definición 1.1.7** *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Diremos que $f$ es un isomorfismo de grupos si*

1. $\mathrm{Ker}\,(f) = \{e_G\}$.
2. $\mathrm{Im}\,(f) = H$.

Si entre $G$ y $H$ existe un isomorfismo, diremos que $G$ es isomorfo a $H$ y lo denotaremos por $G \cong H$.

**Definición 1.1.8** *Sea $A$ un conjunto no vacío. Se dice que $(A, +, \cdot)$ es un anillo, si en $A$ están definidas dos operaciones binarias internas notadas $+$ y $\cdot$ tales que:*

1. *$(A, +)$ es un grupo abeliano.*
2. *$(A, \cdot)$ cumple las condiciones $1, 2$ y $3$ de la Definición 1.1.1 con $e := 1_A$.*
3. *La operación $\cdot$ se distribuye con respecto a la suma, es decir, se cumplen las igualdades*

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$(b + c)d = bd + cd.$$

***Ejemplo 1.1.9*** *Nuevamente consideramos los anillos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, con la operación de suma y producto usual.*

***Definición 1.1.10*** *Sean $A_1, A_2$ grupos, diremos que una función $f : A_1 \to A_2$ es un homomorfismo de anillos si*

1. *$f(a + b) = f(a) + f(b)$.*
2. *$f(ab) = f(a)f(b)$.*

**Definición 1.1.11** *Sean $(M, +)$ un grupo abeliano y $(A, +, \cdot)$ un anillo. Se dice que $M$ tiene una estructura de módulo a la izquierda sobre el anillo $A$ si se ha definido un producto entre elementos de $M$ y de $A$, es decir, una función*

$$\cdot : A \times M \to M$$
$$(a, m) \mapsto a \cdot m,$$

*tal que para cualesquiera $m, m_1, m_2 \in M$ y $a, a_1, a_2 \in A$:*

1. $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$.

2. $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$.

3. $(a_1 a_2) \cdot m = a_1 \cdot (a_2 \cdot m)$.

4. $1 \cdot m = m$.

***Definición 1.1.12*** *Al igual que los grupos y anillos, se dice que un subconjunto no vacío $N$ de un módulo $M$ es un submódulo de $M$ si $N$ tiene estructura de módulo con las mismas operaciones que hacen de $M$ un módulo.*

***Ejemplo 1.1.13***

1. *Cada grupo abeliano $M$ es un módulo sobre el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ si se define $n \cdot m = m + m + \ldots + m$ ($n$ sumandos) para $n > 0$, $0 \cdot m = 0$, y $(-n) \cdot m = -(n \cdot m)$ para $n < 0$.*

2. *Sea $A$ un anillo, entonces $A$ tiene estructura natural de $A$-módulo.*

3. *Sea $N$ un submódulo de $M$, si definimos en $M/N = \{m + N : m \in M\}$ la aplicación*

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M/N &\to M/N \\ (a, m + N) &\mapsto a \cdot m + N, \end{aligned}$$

   *verifica los axiomas de $A$-módulo.*

*Destacamos dos clases especiales de submódulos a continuación.*

***Definición 1.1.14***

1. *Sea $N$ un submódulo de $M$, diremos que $N$ es maximal, si cada vez que exista $N \leq N_1 \leq M$ entonces $N_1 = M$.*

2. *Sea $N$ un submódulo de $M$, diremos que $N$ es minimal, si cada vez que exista $N_1 \leq N \leq M$ entonces $N_1 = \{0\}$.*

***Ejemplo 1.1.15*** *Sea $\mathbb{Z}_{2n} := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{2n-1}\}$ entonces los submódulos $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ son submódulos máximales y minimales respectivamente.*

*Al igual que los grupos, para relacionar los distintos $A$-módulos tenemos sus respectivos homomorfismos, definidos de la siguiente manera.*

***Definición 1.1.16*** *Sean $M_1, M_2$ $A$-módulos, diremos que una función $f : M_1 \to M_2$ es un homomorfismo de $A$-módulos si*

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

2. $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$.

***Ejemplo 1.1.17*** *Sea $N$ un submódulo de $M$, tomamos el homomorfismo canónico $j : M \to M/N$ dado por $j(m) = m + N$.*

*Presentamos ahora dos tipos especiales de $A$-módulos que serán importantes en secciones posteriores.*

**Definición 1.1.18** *Sea $M$ un $A$-módulo.*

1. *$M$ es noetheriano (artiniano) si cada conjunto no vacío de submódulos de $M$ tiene elemento maximal (minimal).*

2. *El anillo $A$ es noetheriano (artiniano) si el $A$-módulo es noetheriano (artiniano).*

En ocasiones la Definición 1.1.18 resulta no tan conveniente de implementar por lo cual presentamos en la siguiente proposición algunas equivalencias.

**Proposición 1.1.19** *(Proposición 1.1.2, [5]) Sean $M$ un $A$-módulo y $N \leq M$. Entonces,*

1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a*)* *$M$ es artiniano.*

   b*)* *$N$ y $M/N$ son artinianos.*

   c*)* *Cada cadena descendente*

   $$N_1 \geq N_2 \geq N_3 \dots$$

   *de submódulos de $M$ se detiene, es decir, existe $k \geq 1$ tal que $N_k = N_{k+i}$ para todo $i \geq 0$.*

   d*)* *Para cada conjunto $\{N_i : i \in I\} \neq \emptyset$ de submódulos de $M$ existe un subconjunto finito $I_0 \subset I$ tal que*

   $$\bigcap_{i \in I} N_i = \bigcap_{i \in I_0} N_i.$$

2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a*)* *$M$ es noetheriano.*

   b*)* *$N$ y $M/N$ son noetherianos.*

   c*)* *Cada cadena ascendente*

   $$N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \dots$$

[5] O. LEZAMA. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 6: Anillos y módulos”. En: *SAC*$^2$*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* ().

*de submódulos de $M$ se detiene, es decir, existe $k \geq 1$ tal que $N_k = N_{k+i}$ para todo $i \geq 0$.*

d*) Para cada conjunto $\{N_i : i \in I\} \neq \emptyset$ de submódulos de $M$ existe un subconjunto finito $I_0 \subset I$ tal que*

$$\sum_{i \in I} N_i = \sum_{i \in I_0} N_i.$$

Probaremos $1)$.

$a) \Rightarrow b)$ Puesto que cada conjunto no vacío de submódulos de $N$ es un conjunto no vacío de submódulos de $M$, entonces en dicho conjunto hay un elemento minimal, y así $N$ es artiniano. Sea $\{Q_i\}_{i \in I}$ un conjunto no vacío de submódulos de $M/N$ y sea $j : M \to M/N$ el epimorfismo canónico; $\{j^{-1}(Q_i)\}_{i \in I}$ es una familia no vacía de submódulos de $M$. Sea $j^{-1}(Q_{i_0})$ su elemento minimal. Veamos que $Q_{i_0}$ es minimal de $\{Q_i\}_{i \in I}$. En efecto, sea $Q_i \leq Q_{i_0}$, entonces $j^{-1}(Q_i) \leq j^{-1}(Q_{i_0})$ y, por la minimilidad, $j^{-1}(Q_i) = j^{-1}(Q_{i_0})$. De aquí resulta $j(j^{-1}(Q_i)) = j(j^{-1}(Q_{i_0}))$, es decir, $Q_i = Q_{i_0}$, gracias a la sobreyectividad de $j$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \ldots$ una cadena descendente de submódulos de $M$ y sea $j : M \to M/N$ el epimorfismo canónico. Sean $\Gamma := \{N_i : i = 1, 2, \ldots\}$, $j(\Gamma) = \{j(N_i) : i = 1, 2, \ldots\}$ y $\Gamma_N := \{N_i \cap N : i = 1, 2, \ldots\}$. Claramente estos conjuntos no son vacíos de submódulos, entonces en $j(\Gamma)$ y $\Gamma_N$ hay elementos minimales, digamos $j(N_l)$ y $N_m \cap N$. Sea $n := mx(l, m)$, entonces

$$j(N_n) = j(N_{n+i}), \;\; N_n \cap N = N_{n+i} \cap N, \;\; i = 1, 2, \ldots.$$

Se quiere probar que $N_n = N_{n+i}$, para $i = 1, 2, \ldots$. De $j(N_n) = j(N_{n+i})$ resulta

$$j^{-1}(j(N_n)) = j^{-1}(j(N_{n+i}))$$

$$N_n + N = N_{n+i} + N$$

$$(N_n + N) \cap N_n = (N_{n+i} + N) \cap N_n$$

luego

$$N_n = N_{n+i} + (N \cap N_n)$$

$$= N_{n+i} + (N_{n+i} \cap N) = N_{n+i}.$$

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que $M$ no es artiniano. Existe entonces un conjunto no vacío $\Gamma$ de submódulos de $M$ que no contiene elemento minimal. Para cada $N \in \Gamma$ existe $N' \in \Gamma$ tal que $N' < N$. Por el axioma de elección, podemos asignar a cada $N$ un $N'$. Sea $N_0$ un elemento cualquiera de $\Gamma$, entonces resulta la cadena descendente

$$N_0 > N_0' > N_0'' > \dots$$

la cual no se detiene, en contradicción con la condición $c)$.

$a) \Rightarrow d)$ En el conjunto de todas las posibles intersecciones finitas de submódulos $N_j$, $j \in I$, hay elemento minimal, digamos $D = \cap_{i \in I_0} N_i$, $I_0 \subset I$ finito. Para cada $j \in I$, $D \cap N_j$ está en el conjunto mencionado, pero por la minimalidad de $D$ se tiene que $D \cap N_j = D$, es decir, $D \leq N_j$. Entonces, $D \leq \cap_{j \in I} N_j \leq D$, es decir, $D = \cap_{j \in I} N_j$.
$d) \Rightarrow c)$ Sea $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \dots$ una cadena descendente de submódulos, existe $n$ tal que

$$\cap_{i=1}^{\infty} N_i = \cap_{i=1}^{n} N_i = N_n;$$

esto implica que $N_n = N_j$, $j \geq n$.

Probaremos $2)$.
$a) \Rightarrow b)$ Puesto que cada conjunto no vacío de submódulos de $N$ es un conjunto no vacío de submódulos de $M$, entonces en dicho conjunto hay un elemento maximal,

y así $N$ es noetheriano. Sea $\{Q_i\}_{i\in I}$ un conjunto no vacío de submódulos de $M/N$ y sea $j : M \to M/N$ el epimorfismo canónico; $j^{-1}(Q_i)_{i\in I}$ es una familia no vacía de submódulos de $M$. Sea $j^{-1}(Q_{i_0})$ su elemento maximal. Veamos que $Q_{i_0}$ es maximal de $\{Q_i\}_{i\in I}$. En efecto, sea $Q_i \geq Q_{i_0}$, entonces $j^{-1}(Q_i) \geq j^{-1}(Q_{i_0})$ y, por maximilidad, $j^{-1}(Q_i) = j^{-1}(Q_{i_0})$. De aquí resulta $j(j^{-1}(Q_i)) = j(j^{-1}(Q_{i_0}))$, es decir, $Q_i = Q_{i_0}$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \ldots$ una cadena ascendente de submódulos de $M$ y sea $j : M \to M/N$ el epimorfismo canónico. Sean $\Gamma := \{N_i : i = 1, 2, \ldots\}$, $j(\Gamma) = \{j(N_i) : i = 1, 2, \ldots\}$ y $\Gamma_N := \{N_i \cap N : i = 1, 2, \ldots\}$. Claramente estos conjuntos son no vacíos de submódulos, entonces en $j(\Gamma)$ y $\Gamma_N$ hay elementos maximales, digamos $j(N_l)$ y $N_m \cap N$. Sea $n := mn(l, m)$, entonces

$$j(N_n) = j(N_{n+i}), \;\; N_n \cap N = N_{n+i} \cap N, \;\; i = 1, 2, \ldots.$$

Se quiere probar que $N_n = N_{n+i}$, para $i = 1, 2, \ldots$. De $j(N_n) = j(N_{n+i})$ resulta

$$j^{-1}(j(N_n)) = j^{-1}(j(N_{n+i}))$$

$$N_n + N = N_{n+i} + N$$

$$(N_n + N) \cap N_n = (N_{n+i} + N) \cap N_n$$

luego

$$N_n = N_{n+i} + (N \cap N_n)$$

$$= N_{n+i} + (N_{n+i} \cap N)$$

$$= N_{n+i}.$$

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que $M$ no es noetheriano. Existe entonces un conjunto no vacío $\Gamma$ de submódulos de $M$ que no contiene elemento maximal. Para cada $N \in \Gamma$ existe $N' \in \Gamma$ tal que $N' > N$. Por el axioma de elección, podemos asignar a cada $N$ un $N'$. Sea $N_0$ un elemento cualquiera de $\Gamma$, entonces resulta la cadena descendente

$$N_0 < N_0' < N_0'' < \dots$$

la cual no se detiene, en contradicción con la condición $c)$.

$a) \Rightarrow d)$ En el conjunto de todas las posibles sumas de submódulos $N_j,\ j \in I$, hay elemento maximal, digamos $D = \sum_{i \in I_0} N_i,\ I_0 \subset I$ finito. Para cada $j \in I$, $D + \sum_{i \in I_0} N_j$ está en el conjunto mencionado, pero por la maximilidad de $D$ se tiene que $D + \sum_{i \in I_0} N_j = D$, es decir, $D \geq N_j$. Entonces, $D \leq \sum_{j \in J} N_j \leq D$, es decir, $D = \sum_{j \in I} N_j$.
$d) \Rightarrow c)$ Sea $N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de $M$, existe $n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = \sum_{i=1}^{n} N_i = N_n;$$

esto implica que $N_n = N_j,\ j \geq n$.

**Ejemplo 1.1.20**

1. *Los números enteros considerados como un $\mathbb{Z}$-módulo, resultan artinianos y noetherianos.*

2. *Los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, resultan artinianos y noetherianos.*

## 1.2. CATEGORÍAS

Algunas nociones de categorías, y en general, las primeras ideas de teoría de categorías, aparecieron en 1945 en el artículo de Samuel Eilenberg y Saunders Mac

Lane llamado “*General Theory of Natural Equivalences*"[6] . Dicho concepto, se obtuvo mediante el estudio del álgebra homológica, tratando de extender la idea de homomorfismo. En esta sección se mostrará la teoría de categorías necesaria para desarrollar apropiadamente el estudio de la propiedad CSB, la cual definiremos en el momento adecuado.

**Definición 1.2.1** *Una categoría es una colección $\mathcal{C}$ la cual posee:*

1. *Una colección no vacía de elementos que llamaremos objetos y la cual será denotada por Ob($\mathcal{C}$).*

2. *Para cada par de objetos $A, B$ existe una colección denotada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ o simplemente $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ si $\mathcal{C}$ es evidente, a sus elementos los llamaremos morfismos y denotaremos por $f$, $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.*

3. *Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ entonces estos determinan un único morfismo que pertenece a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, el cual denotaremos por $g \circ f$.*

   *La operación “$\circ$"definida entre morfismos compatibles cumple,*

i) *Asociatividad: Dados $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ morfismos, se cumple que:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

ii) *Para cada objeto $A$ en $\mathcal{C}$ existe $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que:*

$$1_A \circ f = f, \quad g \circ 1_A = g,$$

*para todos los morfismos $X \xrightarrow{f} A$ y $A \xrightarrow{g} Y$, con $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$.*

---

6 MACLANE S. EILENBERG S. “General theory of natural equivalences”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* ().

**Ejemplo 1.2.2** *La categoría de los conjuntos la llamaremos simplemente* ***Set****, donde $Ob($***Set***$)$ es la colección de todos los conjuntos y $\mathrm{Hom}\,(A, B) = B^A$.*

**Ejemplo 1.2.3** *La categoría de los grupos abelianos será denotada por* ***Grp$_A$****, donde $Ob($***Grp$_A$***$)$ es la colección de todos los grupos abelianos y $\mathrm{Hom}\,(G_1, G_2)$ los homomorfismos de grupos de $G_1$ en $G_2$.*

**Ejemplo 1.2.4** *La categoría de anillos, la cual será denotada por* ***Rings****, definida de manera análoga a la categoría* ***Grp$_A$****.*

**Ejemplo 1.2.5** *Dado $A$ un anillo fijo, definimos la categoría de $A$-módulos denotada por* ***A-mód****, donde $Ob($***A-mód***$)$ es la colección de todos los $A$-módulos y $\mathrm{Hom}\,(M_1, M_2)$ son los $A - homomorfismos$ de módulos de $M_1$ en $M_2$.*

## 1.3. TIPOS DE MORFISMOS

**Definición 1.3.1** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$.*

1. *Un monomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ es un morfismo tal que para todo objeto $X$ y todo par de morfismos $h, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se cumple que:*

   $$f \circ g = f \circ h \text{ implica que } g = h,$$

   *es decir, $f$ es cancelable a izquierda.*

2. *De manera dual definimos un epimorfismo $f$, si este es cancelable a derecha.*

3. *Si $f$ es monomorfismo y epimorfismo, diremos que $f$ es un bimorfismo.*

4. *Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es una corretracción, si existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $h \circ f = 1_X$, es decir, $f$ posee un inverso a izquierda.*

5. *De manera dual definimos una retracción como un morfismo el cual posee un inverso a derecha.*

6. *Si $f$ es corretracción y retracción simultaneamente diremos que $f$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, en cuyo caso el inverso a derecha e izquierda resulta ser el mismo y se denotará por $f^{-1}$.*

***Definición 1.3.2*** *Diremos que dos objetos $A$ y $B$ son isomorfos en $\mathcal{C}$, si existe un isomorfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, en cuyo caso lo denotaremos por $A \cong B$.*

***Proposición 1.3.3*** *(Proposición 1.1, [7]) Sea $A \xrightarrow{f} B$ en la categoría **Grp$_A$** o **A-mod**, de grupos y $A$-módulos respectivamente, entonces:*

1. *$f$ es inyectiva, si y solo si, $f$ es monomorfismo.*

2. *$f$ es sobreyectiva, si y solo si, $f$ es epimorfismo.*

.

*Probemos* $1)$

$\Rightarrow)$ *Sea $f : A \to B$ un morfismo de módulos o grupos. Si $f$ es inyectiva, entonces es cancelable a derecha en **Set**. Se sigue inmediatamente que $f$ es monomorfismo.*

$\Leftarrow)$ *Supongamos que $f : A \to B$ no es inyectiva, entonces $C = \ker(f) \neq \{0\}$. Sea $g$ el homomorfismo inclusión de $C$ en $A$, dado por $g(x) = x$. Entonces $f \circ g : C \to B$, ahora tomemos $h : C \to A$ el homomorfismo nulo. Entonces $h \neq g$ con $C \neq \{0\}$ pero $f \circ g = f \circ h$.*

*Probemos* $2)$

[7] N. JACOBSON. "Basic Algebra I". En: *2nd edition. W.H. Freeman and company, New York* (1989).

$\Rightarrow$) *Sea $f : A \to B$ un morfismo de módulos o grupos. Si $f$ es inyectiva, entonces es cancelable a izquierda en **Set**. Se sigue inmediatamente que $f$ es monomorfismo.*

$\Leftarrow$) *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo no sobreyectivo, consideremos $C = B/f(A) \neq \{0\}$ (donde $B/f(A)$ es el grupo cociente), pues $f(A) \neq B$. Sea $g$ el homomorfismo cánonico de $B$ en $B/f(A)$ y sea $h : B \to C$ el homomorfismo nulo. Entonces $g \neq h$ pero $g \circ f = h \circ f$.*

***Observación 1.3.4*** *Note que toda corretracción (retracción) es un monomorfismo (epimorfismo), pero el recíproco no se tiene.*

***Ejemplo 1.3.5*** *Consideramos $m \in \mathbb{Z} - \{\pm 1\}$ fijo, $m\mathbb{Z} := \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}-$módulos con el homomorfismo inclusión $i : m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, por ser $i$ inyectivo es monomorfismo, sin embargo, $i$ no tiene inverso a izquierda. Supongamos que existe $g : \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ tal que $g \circ i = 1_{m\mathbb{Z}}$. Si $g(1) = mt$ con $t \in \mathbb{Z}$ entonces $g(m) = m^2 t = g(i(m)) = m$, despejando tenemos $t = \frac{1}{m} \in \mathbb{Z}$, lo cual es absurdo.*

**Definición 1.3.6** *Un objeto $0 \in$ Ob$(\mathcal{C})$ es llamado objeto cero si $\operatorname{Hom}(0, X)$ y $\operatorname{Hom}(X, 0)$ consisten de un único elemento para cada objeto $X \in$ Ob$(\mathcal{C})$.*

**Observación 1.3.7** *Note que a partir de la definición de morfismo de objeto cero, es inmediato ver que dos objetos cero son necesariamente isomorfos. En efecto, si $0$ y $0'$ son objetos cero, $\operatorname{Hom}(0, 0') = \{f\}$, $\operatorname{Hom}(0', 0) = \{g\}$ por lo que $f \circ g = 1_{0'}$ y $g \circ f = 1_0$, así $0 \cong 0'$.*

**Ejemplo 1.3.8** *Tomemos la categoría **Set**, en dicha categoría el objeto cero es $0 = \emptyset$.*

**Definición 1.3.9** *Un morfismo $0_{XY} : X \to Y$ es llamado morfismo cero si para cualesquiera $g, h : Z \to X$ y $g', h' : Y \to W$ se tiene que $0_{XY} \circ g = 0_{XY} \circ h$ y $g' \circ 0_{XY} = h' \circ 0_{XY}$. De no haber confusión con el objeto $0$ se denotará $0_{XY} := 0$.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0_{XY}"] & Y \\
Z \arrow[u, "g", "h"'] \arrow[ur, "0_{XY}\circ g = 0_{XY}\circ h"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0_{XY}"] \arrow[dr, "g'\circ 0_{XY} = h'\circ 0_{XY}"'] & Y \arrow[d, "g'"', "h'"] \\
& W.
\end{tikzcd}
$$

**Proposición 1.3.10** *(Proposición 1.3.5.*[8]*) En una categoría con objeto* $0$*, para cada par de objetos* $X, Y$ *existe un único morfismo cero en* $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$*.*

*Existencia*. Nótese que si $f : X \to Y$ es un morfismo cero y $g : Y \to Z$ es un morfismo cero, entonces $g \circ f$ es un morfismo cero. En efecto, sean $h, k : Z \to W$ morfismos. Entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f = k \circ (g \circ f),$$

con lo cual $g \circ f$ resulta ser un morfismo cero a derecha. De manera análoga se establece que $g \circ f$ es morfismo cero a izquierda. Resulta entonces de la Definición 1.3.9 que la compuesta $0_{XY} : X \to 0 \to Y$ es un morfismo cero.

*Unicidad.* El morfismo encontrado $0_{XY}$ es factorizable a través del objeto cero y se tiene el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, "y"] & \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "0_{XY}"'] & & Y.
\end{tikzcd}
$$

Puesto que $x$ y $y$ son únicos, basta probar que cualquier morfismo cero $f : X \to Y$ es factorizable a través de cero. Consideremos el diagrama

8 O. LEZAMA. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 7: Categorías”. En: *SAC*$^2$*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* ().

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "y"] & & \\ X \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "0_{XY}"'] & & Y \arrow[r, shift left, "1_Y"] \arrow[r, shift right, "0_{YY}"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Puesto que $0_{YY}$ es morfismo cero se tiene que $0_{YY} \circ f = 0_{YY} \circ (y \circ x)$. También, como $f$ es morfismo cero, entonces $0_{YY} \circ f = 1_Y \circ f$. De las dos identidades anteriores resulta $0_{YY} \circ (y \circ x) = f$. Pero $0_{YY} \circ y = 1_Y \circ y$ por ser y morfismo cero a derecha. En total, $y \circ x = f$, lo cual queríamos demostrar.

## 1.4. SUBOBJETO E IMAGEN

Análogo a los conceptos de subgrupo, submódulo e imagen, las categorías admiten el concepto de *subobjeto* e *imagen* los cuales resultan ser únicos salvo isomorfismos y por tanto bien definidos. Estas definiciones se agregan para estudiar las distintas *descomposiciones* que puede tener un objeto salvo isomorfismo.

**Definición 1.4.1** *Sea $A$ un objeto de $\mathcal{C}$. Se llama subobjeto de $A$ a un par $(X, m)$ donde $X$ es un objeto y $m : X \to A$ es un monomorfismo. Usaremos $X \leq_m A$ para denotar que $X$ es un subobjeto de $A$ o simplemente $X \leq A$ si $m$ es evidente. Resulta a partir de la definición que si $X \leq_m Y \leq_n Z$ entonces $X \leq_{n \circ m} Z$.*

**Definición 1.4.2** *Para cada objeto $A$ denotaremos por Sub(A) la colección de todos los subobjetos de $A$. Si $(X_1, m_1)$ y $(X_2, m_2)$ son subobjetos de $A$, diremos que $(X_1, m_1)$ está incluido en $(X_2, m_2)$, lo cual denotaremos por $X_1 \leq_f^A X_2$, si existe un morfismo $f : X_1 \to X_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A & \\ X_1 \arrow[u, "m_1"] \arrow[r, "f"'] & X_2. \arrow[ul, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

**Observación 1.4.3** *Notemos que el morfismo $f$ es único y es un monomorfismo. En efecto, tenemos que $f \circ h = f \circ g$, con lo cual $m_2 \circ f \circ h = m_2 \circ f \circ g$, pero $m_2 \circ f = m_1$ así $m_1 \circ h = m_1 \circ g$ y por tanto $h = g$.*

**Definición 1.4.4** *Dos subobjetos de $A$, $(X_1, m_1)$ y $(X_2, m_2)$ se dicen equivalentes y escribimos $(X_1, m_1) \cong^A (X_2, m_2)$, si existen morfismos $f : X_1 \to X_2$ y $g : X_2 \to X_1$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X_2 \arrow[ur, "m_2"] \arrow[r, "g"'] & X_1 \arrow[u, "m_1"] \arrow[r, "f"'] & X_2. \arrow[ul, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

Resulta fácil ver que $\cong^A$ es una relación de equivalencia y por tanto podemos hablar del cociente $Sub(A)/\cong^A$. En efecto, vemos que cumple con:

1. *Reflexividad.* Sea $X \in Sub(A)$, consideramos $f = g = 1_X$.

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[u, "m"] \arrow[r, "1_X"'] & X. \arrow[ul, "m"'] \end{tikzcd}$$

   Por tanto $(X, m) \cong^A (X, m)$.

2. *Simetría.* Supongamos que $(X_1, m_1) \cong^A (X_2, m_2)$ entonces existen $f, g$ tales que

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X_2 \arrow[ur, "m_2"] \arrow[r, "g"'] & X_1 \arrow[u, "m_1"] \arrow[r, "f"'] & X_2, \arrow[ul, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
X_1 \arrow[ur, "m_1"] \arrow[r, "f"'] & X_2 \arrow[u, "m_2"'] \arrow[r, "g"'] & X_1, \arrow[ul, "m_1"']
\end{tikzcd}$$

también conmuta y así $(X_2, m_2) \cong^A (X_1, m_1)$.

3. *Transitividad.* Supongamos que $(X, x) \cong^A (Y, y)$ y $(Y, y) \cong^A (Z, z)$ con lo cual obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "y"'] \arrow[r, "g"'] & X, \arrow[ul, "x"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A & \\
Y \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "f'"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, "g'"'] & Y, \arrow[ul, "x"']
\end{tikzcd}$$

de donde

$$\begin{tikzcd}
 & & A & & \\
X \arrow[urr, "x"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[ur, "y"'] \arrow[r, "f'"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, "g'"'] & Y \arrow[ul, "y"] \arrow[r, "g"'] & X, \arrow[ull, "x"']
\end{tikzcd}$$

obteniendo así el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "f' \circ f"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, "g' \circ g"'] & X, \arrow[ul, "x"']
\end{tikzcd}$$

por tanto $(X, x) \cong^A (Z, z)$.

**Proposición 1.4.5** *(Proposición 1.3.5, [8]) Si $(X_1, m_1) \cong^A (X_2, m_2)$ entonces $X_1 \cong X_2$.*

Dado que $m_1 \circ g = m_2$, $m_2 \circ f = m_1$, se obtiene $(m_2 \circ f) \circ g = m_1 \circ g = m_2 =$

$m_2 \circ 1_{X_2}$. Como $m_2$ es un monomorfismo se tiene que $f \circ g = 1_{X_2}$. Simétricamente encontramos $g \circ f = 1_{X_1}$.

**Observación 1.4.6** *El recíproco en la proposición anterior no necesariamente es cierto. Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos, $n\mathbb{Z}$ y $m\mathbb{Z}$ con $m.c.d(n,m) = 1$, los cuales resultan ser módulos isomorfos. Sean $m_1 : m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $m_2 : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dados por las inclusiones. Supongamos que existen $f : m\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ y $g : n\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ tales que $m_2 \circ f = m_1$ y $m_1 \circ g = m_2$, si asumimos $f(m) = nt$ entonces $m_2(f(m)) = m_1(m)$, es decir, $m_2(nt) = m$ así $nt = m$, lo que implica $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ y llegamos a una contradiccón.*

**Definición 1.4.7** *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo. Un subobjeto $Y \leq_m B$ de $B$ se denomina imagen de $f$ si se cumple que:*

1. *$f$ se puede factorizar a través de $Y$, es decir, existe un morfismo $g : A \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "g"'] & & B . \\ & Y \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si $f$ se puede factorizar a través de otro subobjeto $Y' \leq_{m'} B$ de $B$, entonces existe un único morfismo $h : Y \to Y$ ´tal que $m' \circ h = m$.*

$$\begin{tikzcd} B & & \\ & Y \arrow[ul, "m"] \arrow[r, "h"] & Y'. \arrow[ull, "m'"'] \\ A \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "g'"'] & & \end{tikzcd}$$

**Observación 1.4.8** *Notemos que el morfismo $g$ es único, $h$ es un monomorfismo y $h \circ g = g'$. El objeto $Y$ lo denotaremos por $\mathrm{Im}\,(f)$ o $f(A)$.*

**Ejemplo 1.4.9** *Sean $M_1, M_2$ dos $A$-módulos y $f : M_1 \to M_2$ un homomorfismo de módulos, si $f(M_1) := \{m_2 \in M_2 :$ tal que existe $m_1 \in M_1$ y $f(m_1) = m_2\}$. En efecto $f$ se puede factorizar de la siguiente manera*

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "f|_{M_1}"'] & & M_2 \\
& f(M_1). \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

*Si $f$ se puede factorizar a través de otro subobjeto $Y' \leq_{m'} M_2$ de $M_2$, entonces existe un único morfismo $h : f(M_1) \to Y'$ tal que $m' \circ h = m$*

$$
\begin{tikzcd}
M_2 & & \\
& f(M_1) \arrow[ul, "i"'] \arrow[r, "h"] & Y' \arrow[ull, "m'"'] \\
M_1. \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "f|_{M_1}"] \arrow[urr, "g'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

**Proposición 1.4.10** *(Proposición 1.6.2, [8]) Si $Y \xrightarrow{m} B$ y $Y' \xrightarrow{m'} B$ son imágenes de $A \xrightarrow{f} B$, entonces*

$$(Y, m) \cong^B (Y', m')$$

*y en consecuencia $Y \cong Y'$.*

Como $Y$ y $Y'$ son imagenes entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
B & & & \\
& Y \arrow[ul, "m"] \arrow[r, "h"] & Y' \arrow[ull, "m'"] \arrow[r, "h'"] & Y \arrow[ulll, "m"'] \\
A. \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "g'"] \arrow[urrr, "g"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

de donde $m' \circ h = m$ y $m \circ h' = m'$, con $Y' \xrightarrow{h'} Y$ como en la Definición 1.4.7 teniendo a considerar que $Y' \overset{m'}{\to} B$ es también imagen de $f$.

Sea $Y \overset{m}{\to} B$ una imagen de $A \overset{f}{\to} B$ y $Y' \overset{m'}{\to} B$ un subobjeto de $B$ equivalente a $Y \overset{m}{\to} B$. Entonces , $Y' \overset{m'}{\to} B$ es también imagen de $A \overset{f}{\to} B$. Esta afirmación se sigue de la Definición 1.4.7.

## 1.5. PRODUCTO Y COPRODUCTO

El producto y la suma directa externa de módulos permiten generalizaciones categorícas arbitrarias por medio de los objetos producto y coproducto, respectivamente como veremos a continuación.

**Definición 1.5.1** *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Se denomina producto del conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ a un objeto de $C$ denotado por $\prod_{i\in I} A_i$ y el conjunto*

$$\left\{p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j\right\}_{j\in I},$$

*de morfismos llamados proyecciones, tales que para cada objeto $B$ de $\mathcal{C}$ y cada conjunto $\{f_j : B \to A_j\}_{j\in I}$ de morfismos existe un único morfismo $f$ tal que para cada $j \in I$, el siguiente diagrama conmunta*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_j"'] & A_j. \end{tikzcd}$$

**Ejemplo 1.5.2** *Sean $\{M_i\}_{i\in I}$, $\{\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j\}_{j\in I}$ y $N \in Ob($**A-mód**$)$ consideramos $\{f_j : N \to M_j\}_{j\in I}$ entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi_j"'] & M_j,
\end{tikzcd}$$

*con* $f(n) := (f_j(n))_{j\in I}$

**Proposición 1.5.3** *(Proposición 1.10.4,* [8]*) Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría en la cual para cada par de objetos* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ *existe el morfismo* $0$*,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *un conjunto no vacío de objetos de* $\mathcal{C}$ *y* $\{p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j\}$ *su producto. Al tomar* $j \in I$ *fijo y considerando el conjunto de morfismos* $\{A_j \xrightarrow{k_i} A_i\}$*, con*

$$k_i = \begin{cases} 0, & si \quad i \neq j \\ 1_{A_i}, & si \quad i = j \end{cases}$$

*existe un único morfismo* $q_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ *tal que*

$$p_i \circ q_j = \begin{cases} 0, & si \quad i \neq j \\ 1_{A_j}, & si \quad i = j \end{cases} \tag{1}$$

Los morfismos $\{q_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i\}$ unívocamente determinados por $(1.1)$ se denominan *inyecciones* del producto.

Al aplicar el principio de dualidad obtenemos el concepto de *coproducto* denotado por $\bigoplus_{i\in I} A_i$, considerando la familia de morfismos

$$\left\{ q_j : A_j \to \bigoplus_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I},$$

tales que para cada objeto $B$ de $\mathcal{C}$ y cada conjunto $\{f_j : B \to A_j\}$ de morfismos existe un único morfismo $f$ tal que para cada $j \in I$, el siguiente diagrama conmunta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f_j"] & \\ \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[u, "f"] & A_j. \arrow[l, "q_j"] \end{tikzcd}$$

## 1.6. FUNTORES

En la anterior sección, vimos como algunos objetos son únicos salvo isomorfismo, para este capítulo introduciremos la idea de funtor, la cual es una extensión de la noción de función para relacionar las distintas categorías.

**Definición 1.6.1** *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías, un funtor covariante, denotado $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ se define por:*

1. *Una aplicación*

$$\begin{aligned} F : Ob(\mathcal{B}) &\to Ob(\mathcal{C}) \\ B &\mapsto F(B). \end{aligned}$$

2. *Sean $A, B \in \mathcal{B}$ se define*

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), F(B)) \\ f &\mapsto F(f). \end{aligned}$$

*que además cumple:*

3. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

4. $F(1_B) = 1_{F(B)}$.

**Ejemplo 1.6.2** *El $funtor\ potencia$ en **Set**, que a cada conjunto $A$ le asigna su conjunto potencia $P(A)$ y para cada función $A \xrightarrow{f} B$, esta induce un mapeo $f_p$ en el cual cada subconjunto $X$ de $A$ es mandado en $f_p(X) \subset B$.*

**Definición 1.6.3** *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías y $F$ un funtor de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, diremos que:*

- $F$ *es fiel si para cada morfismo, el mapeo* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A),F(B))$ *es inyectivo.*

- $F$ *es pleno si para cada morfismo, el mapeo* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A),F(B))$ *es sobreyectivo.*

**Ejemplo 1.6.4** *Considere las categorías **Rings** y **Grp$_A$**. El funtor $F$ definido por*

$$F : Ob(\textbf{\textit{Rings}}) \to Ob(\textbf{\textit{Grp}}_{\textbf{\textit{A}}})$$
$$A \mapsto F(A) = A,$$

*olvidando así su estructura de anillo y restringiendose a su estructura de grupo.*

*Sean $A_1, A_2 \in$ **Rings** se define*

$$F : \mathrm{Hom}_{\textbf{\textit{Rings}}}(A_1, A_2) \to \mathrm{Hom}_{\textbf{\textit{Grp}}_{\textbf{\textit{A}}}}(F(A_1), F(A_2))$$
$$\varphi \mapsto F(\varphi) = \varphi,$$

*es un funtor fiel.*

# 2. LA PROPIEDAD CSB Y SUS GRADUACIONES

Como bien es sabido en la categoría de los conjuntos el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein afirma que si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$ entonces existe una función biyectiva $h : A \to B$. En este contexto los conjuntos $A$ y $B$ son *isomorfos*. En la presente sección trataremos de extender el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein a conjuntos con ciertas estructuras y mirar cuándo dos de ellas se pueden considerar *isomorfas* y en algunos casos, mostrar el isomorfismo explícitamente.

## 2.1. LA PROPIEDAD CSB

**Definición 2.1.1** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, diremos que $\mathcal{C}$ posee la propiedad CSB si para cada par de objetos $A, B$ se tiene que si existen monomorfismos $f : A \to B$ y $g : B \to A$ entonces $A \cong B$.*

**Ejemplo 2.1.2** *Consideremos por un momento la categoría **L.O.** de conjuntos linealmente ordenados y los morfismos como las funciones que preservan orden. Consideramos $A = (0, 1)$ y $B = [0, 1]$ con su orden usual y los monomorfismos, $i : A \to B$ dado por la inclusión junto con $f : B \to A$ dado por $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$. Claramente $A$ no es isomorfo a $B$ pues $A$ no tiene máximo ni mínimo pero $B$ si.*

**Teorema 2.1.3** *Sea **W.O.** la categoría de conjuntos bien odenados y sus morfismos nuevamente como las funciones que preservan orden, dicha categoría posee la propiedad CSB, es decir, si $A, B \in Ob($**W.O.**$)$ y $A \xrightarrow{\phi} B$, $B \xrightarrow{\psi} A$ son funciones inyectivas que preservan orden entonces existe un isomorfismo de orden entre $A$ y $B$. El anterior resultado fue tomado de [1] y demostrado por parte del estudiante como se sigue a continuación.*

Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ conjuntos bien ordenados, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] & \phi(A) \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \psi(\phi(A)) \arrow[d, "i"'] & \\
& B \arrow[r, "\psi"] & \psi(B) \arrow[r] & \phi(\psi(B))
\end{tikzcd}$$

notamos entonces que $\psi(\phi(A))$ es una sección inicial de $A$ (ver 4.3.11 ), además $A \cong \psi(\phi(A))$ (Teorema 4.62,[9]). De la contenencia $\phi(A) \subset B$ podemos deducir que $A = \psi(\phi(A)) \subset \psi(B) \subset A$, es decir, $\psi$ es un isomorfismo de orden entre $A$ y $B$.

**Observación 2.1.4** *Cabe destacar que en el teorema anterior, los monomorfismos $\phi, \psi$ implicados en la hipótesis fueron cada uno de ellos isomorfismos, esto nos permite pensar en un nivel de graduación más fuerte de la propiedad CSB, la cual abordaremos más adelante.*

No es difícil ver que para las distintas estructuras algebraicas finitas para las cuales los monomorfismos son funciones inyectivas y los isomorfismos son funciones biyectivas, se tiene la propiedad *CSB*. En efecto, si consideramos los monomorfismos $f, g$ en $\mathrm{Hom}\,(A, B), \mathrm{Hom}\,(B, A)$ respectivamente, por el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein se tiene que $|X| = |Y|$, así $f, g$ serían biyectivas.

Formalizamos el anterior párrafo con el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.5** *(Teorema 2.5, [1]) Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene un funtor fiel $F : \mathcal{C} \to$ **FinSet** donde **FinSet** es la categoría de conjuntos finitos, entonces $\mathcal{C}$ posee la propiedad CSB. Además, si $f$ y $g$ son los monomorfismos implicados en la hipótesis, entonces $f$ y $g$ son también isomorfismos.*

---

9 Charles C. PINTER. “A Book of Set Theory”. En: *Bucknell University, Dover Publications, Inc.* ().

Sean $C, D$ objetos de $\mathcal{C}$ y monomorfismos $C \xrightarrow{g} D$ y $D \xrightarrow{f} C$. Entonces tenemos que $F(g \circ f)$ es una función de $F(D) \to F(D)$; como $F(D)$ es finito por lo tanto existe un número finito de funciones en si mismo, así para algún $k < n \in \mathbb{Z}$, $(F(g \circ f))^n = (F(g \circ f))^k$ luego $F((g \circ f)^n) = F((g \circ f)^k)$. Dado que $F$ es $fiel$ así pues $(g \circ f)^n = (g \circ f)^k$, como $f, g$ son monomorfismos en consecuencia $g \circ f$ es un monomorfismo y así $(g \circ f)^{n-k} = g \circ (f \circ g \ldots g \circ f) = g \circ k = 1_D$. Por otra parte, si $g \circ k = 1_D$ se sigue que $g \circ (k \circ g) = 1_D \circ g = g \circ 1_C$, con lo cual $k \circ g = 1_C$. Por tanto $g$ es un isomorfismo.

## 2.2. LA PROPIEDAD FUERTE CSB

La propiedad CSB a menudo es muy útil en la categoría de conjuntos, como en la categoría de conjuntos bien ordenados los monomorfismos implicados en la hipótesis resultaron ser también isomorfismos, esto nos permite pensar en una variante de la propiedad CSB. Analizaremos más a fondo esta propiedad en la presente sección.

**Ejemplo 2.2.1** *Veamos que $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$ en **Set**. Primero veamos que*

$$\Delta := \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, \ldots) : \textit{para cada } i \in \mathbb{N}\textit{;}\ a_i = 1 \textit{ o } a_i = 0\ \}$$

*es no numerable. Supongamos que $\Delta$ es numerable, esto es*

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$$

*donde para cada $n$,*

$$\alpha_n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots)$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha_1: & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \dots \\
\alpha_2: & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots \\
\alpha_3: & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

*es una secuencia de $0's$ y $1's$. Construimos ahora la secuencia*

$$\beta(n) = 1 - \alpha_n^n$$

*por la construcción, para cada $\alpha_n$, $\beta \neq \alpha_n$. Así la supuesta enumeración $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ no enumera todo $\Delta$, pues $\beta \in \Delta$ y $\beta \neq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia de los anterior, obtenemos que $\mathbb{R}$ es no numerable, para esto definimos la secuencia de conjuntos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots$ de números reales con las siguientes condiciones*

1. $\mathcal{C}_1 = [0, 1]$.
2. *Cada $\mathcal{C}_n$ es la unión de $2^{n-1}$ intervalos cerrados y*

$$\mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_2 \supseteq \mathcal{C}_3 \supseteq \cdots \mathcal{C}_n \supseteq \mathcal{C}_{n+1} \supseteq \cdots .$$

3. *$\mathcal{C}_{n+1}$ es construido recursivamente, removiendo los conjuntos abiertos de la mitad, por ejemplo*

   - $\mathcal{C}_1 = [0, 1]$.
   - $\mathcal{C}_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.
   - $\mathcal{C}_3 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

*Así, tomamos cada* $[a,b] \subset \mathcal{C}_n$ *y lo dividimos en*

$$I[a,b] = \left[a, a + \frac{1}{3}(b-a)\right]$$

$$C[a,b] = \left(a + \frac{1}{3}(b-a), a + \frac{2}{3}(b-a)\right)$$

$$D[a,b] = \left[a + \frac{2}{3}(b-a), b\right],$$

*con lo cual*

$$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{[a,b]\subset \mathcal{C}_n} (I[a,b] \cup D[a,b])$$

*Ahora bien, para cada* $\delta \in \Delta$ *asociamos la secuencia de intervalos*

$$F_1^\delta, F_2^\delta, \ldots,$$

*por la siguiente recursión*

$$F_1^\delta = \mathcal{C}_1 = [0,1],$$

$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} IF_n^\delta & si \quad \delta(n) = 0 \\ DF_n^\delta & si \quad \delta(n) = 1 \end{cases}$$

*Así,* $F_n^\delta$ *es un intervalo cerrado de* $\mathcal{C}_n$ *de longitud* $3^{-n}$*, luego por el Teorema del encaje de Cantor (ver* [10]*, pág. 58-59), existe un único número real tal que* $\alpha = \cap_{n=1}^\infty F_n^\delta$*, definiendo así*

$$f(\delta) = \alpha = \bigcap_{n=1}^\infty F_n^\delta$$

*la función* $f : \Delta \to \mathcal{C} = \cap_{n=1}^\infty \mathcal{C}_n$ *resulta inyectiva, pues si* $\delta, \beta \in \Delta$ *con* $f(\delta) =$

---

[10] Donald R. BARTLE Robert G. Y SHERBER. “Introducción al análisis matemático de una variable”. En: *3a edición, Editorial Limusa, S.A. de C.V. Grupo Noriega editores* (2010).

*$f(\beta)$ y $\delta \neq \beta$, existe $n$ suficientemente grande tal que*

$$f(\delta) \in F^{\delta}_{n+1} = IF^{\delta}_{n}$$

$$f(\beta) \in F^{\beta}_{n+1} = DF^{\delta}_{n}$$

*con $IF^{\delta}_{n} \cap DF^{\delta}_{n} = \emptyset$, lo cual es claramente una contradicción y por tanto $f$ es inyectiva.*

*Si tomamos ahora $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, donde*

$$g(A) = \chi_A(n) = \begin{cases} 1 & si \quad n \in A \\ 0 & si \quad n \notin A \end{cases}$$

*resulta en $f \circ g : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y así $P(\mathbb{N}) \leq_{f\circ g} \mathbb{R}$.*
*Tomemos ahora $\varphi : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ dada por $\varphi(x) = \{p/q \in \mathbb{Q} : p/q < x\}$, así $\mathbb{R} \leq_{\varphi} P(\mathbb{Q}) \cong P(\mathbb{N})$. Luego por el Teorema de $Cantor - Schrder - Bernstein$ se tiene que $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$.*

**Definición 2.2.2** *Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene la propiedad fuerte CSB si cada vez que existan monomorfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$ entonces $f$ y $g$ son isomorfismos.*

**Ejemplo 2.2.3** *La categoría **EspFin**$_{\mathbb{K}}$ de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, con $\operatorname{Hom}(V,W) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ posee la propiedad fuerte CSB.*

Resulta muy útil en ocasiones caracterizar la categoría en general sabiendo cómo se comporta $\operatorname{Hom}(A,A)$ para un objeto arbitrario $A$, a continuación daremos una definición que será de vital importancia en nuestro estudio de la propiedad fuerte *CSB*.

**Definición 2.2.4** *Diremos que un elemento $A$ en una categoría $\mathcal{C}$ es Dedekind finito si todo endomorfismo mónico $A \xrightarrow{f} A$ es isomorfismo.*

**Ejemplo 2.2.5** *Si consideramos la categoría **FinSet**, por teoría de conjuntos sabemos que si $f : A \to A$ es inyectiva entonces $f$ es biyectiva. Así cualquier objeto en **FinSet** es Dedekind finito.*

**Proposición 2.2.6** *(Proposición 2.8, [1]) Una categoría $\mathcal{C}$ tiene la propiedad fuerte CSB si y sólo si todos los objetos en $\mathcal{C}$ son Dedekind finitos.*

$\Longrightarrow$) Sea un endomorfismo mónico $A \xrightarrow{f} A$ en una categoría con la propiedad fuerte CSB, si aplicamos definición de propiedad fuerte CSB tomando $A = B$ obtenemos inmediatamente que $f$ es un isomorfismo.Dado que escogimos $A$ un objeto arbitrario de $\mathcal{C}$, se tiene que todo objeto es Dedekind finito.

$\Longleftarrow$) Sean $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, tales que existen monomorfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$, dado que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad fuerte de CSB entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son isomorfismos. Tenemos entonces la existencia de morfismos $h, k, h'$ y $k'$ tales que:

$$f \circ (g \circ h) = 1_B,$$

$$(k' \circ g) \circ f = 1_A,$$

$$(k \circ f) \circ g = 1_B,$$

$$g \circ (f \circ h') = 1_A.$$

Así $f$ y $g$ son isomorfismos.

## 2.3. LA PROPIEDAD CSB FUERTEMENTE CINDIDA

Destaquemos por un momento que el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein fue pensado inicialmente solo para la categoría de conjuntos, en los cuales todos los monomorfismos resultan ser corretracciones, pero como ya habíamos mencionado en el Ejemplo 1.3.5 esto no siempre ocurre. En esta sección reformularemos todas las definiciones de la propiedad fuerte CSB en terminos de corretracciones.

**Definición 2.3.1** *Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene la propiedad CSB fuertemente cindida si cada vez que existan corretracciones $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$ implica que $f$ y $g$ son isomorfismos.*

**Definición 2.3.2** *Diremos que un objeto $A$ es Dedekind finito cindido si todas las corretracciones $A \xrightarrow{f} A$ son isomorfismos.*

**Ejemplo 2.3.3** *Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{Z}$, sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una corretracción en **Grp$_A$**, entonces existe $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$, en particular $g$ es epimorfismo. Si $f(1) = n$ y $g(n) = n \cdot g(1) = m$ entonces $g(f(1)) = 1 = g(n) = n \cdot g(1)$ por lo que $\frac{1}{n} = g(1)$ con lo cual $n \in \{-1, 1\}$, es decir, $f(n) = \pm n$ serían isomorfismos.*

**Observación 2.3.4** *Note que $\mathbb{Z}$ es un objeto Dedekind finitio cindido el cual no es Dedekind finito. En efecto, basta considerar el monomorfismo $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $\varphi(n) = 2n$.*

**Ejemplo 2.3.5** *Consideramos la categoría de cuerpos **Field** con sus homomorfismos de cuerpos. Si $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ es una corretración entonces existe $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ tal que $g \circ f = 1_{\mathbb{F}}$, con lo cual $g$ sería un homomorfismo de cuerpos sobreyectivo, en particular $g$ es un homomorfismo de anillos cuyo dominio es un cuerpo, por tanto $g$ es inyectivo, lo que implica que $g$ es un isomorfismo y en consecuencia $f$ también lo es.*

De manera análoga a la propiedad fuerte CSB, podemos estudiar la propiedad CSB fuertemente cindida analizando las corretraciones en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ para cada objeto $A$ de la categoría en cuestión.

**Proposición 2.3.6** *(Proposición 2.12, [1]) Una categoría $\mathcal{C}$ posee la propiedad CSB fuertemente cindida si y solo si todos los objetos en la categoría son Dedekind finitos cindidos.*

$\Longrightarrow)$ Sea una corretracción $A \xrightarrow{f} A$ tomando $A = B$ y asumiendo que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad CSB fuertemente cindida entonces $f$ es un isomorfismo. Dada la elección arbitraria de $A$, tenemos entonces que para todo objeto en $\mathcal{C}$, se tiene que es Dedekind finito cindido.

$\Longleftarrow$ Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} A$ corretracciones, $f \circ g$ y $g \circ f$ son corretracciones, por tanto existen morfismos $h, k, h', k'$ tales que:

$$f \circ (g \circ h) = 1_B,$$

$$(k' \circ g) \circ f = 1_A,$$

$$(k \circ f) \circ g = 1_B,$$

$$g \circ (f \circ h') = 1_A.$$

Así $f$ y $g$ son isomorfismos

# 3. CSB EN ALGUNAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

En esta sección nos concentraremos en aprovechar las herramientas construidas hasta el momento para aplicarlas a las estructuras algebraicas que nos interesan.

**Ejemplo 3.0.1** *La categoría* ***Grp$_A$*** *no posee la propiedad CSB. En efecto, sea* $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{2^i}$ *y* $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{4^i}$*. Definimos* $f : G \to H$ *tomando* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (2 \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y tome* $g : H \to G$ *como el homomorfismo inclusión. Ambos son monomorfismos pero* $G$ *y* $H$ *no son isomorfos. En* $G$ *existe el elemento* $x = (1, 2, 4, 8, \ldots)$ *tal que* $x + x = 0$ *y* $y + y \neq x$ *para todo* $y \in G$*, pero en* $H$ *no existe tal elemento.*

**Proposición 3.0.2** *(Proposición 3.5, [1]) La categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *de dimensión finita y las transformaciones lineales entre ellos tiene la propiedad fuerte CSB.*

Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, supongamos que existen $T_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ y $T_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(W, V)$ transformaciones lineales inyectivas. Por el Teorema de la dimensión tenemos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T_1)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\,(T_1))$, pero como $T_1$ es inyectiva $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T_1)) = 0$, así $V \cong \mathrm{Im}\,(T_1) \leq_i W$ (donde $i$ es la transformación inclusión). De lo anterior obtenemos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) \leq \dim_{\mathbb{K}}(W)$ y de manera análoga $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$. En consecuencia $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

$$V \cong \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(V)} \cong \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(W)} \cong W.$$

**Observación 3.0.3** *Si tomamos* $V$ *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensión infinita, es fácil ver que este no es Dedekind finito. En efecto, si asumimos* $X = \{v_1, v_2, \ldots\}$ *una base para* $V$ *y tomamos el endomorfismo dado por la función* $\psi(v_i) = v_{i+1}$*, el cual es inyectivo y no es sobreyectivo.*

Pensemos por un momento en cómo se comporta esta propiedad CSB para el caso particular de los espacios vectoriales de *dimensión finita*, tal como mencionamos en la Proposición 3.0.2, **EspFin**$_{\mathbb{K}}$ posee la propiedad fuerte CSB. Veremos que la condición de ser *finitamente generado*, junto con algunos teoremas de estructura nos darán las herramientas suficientes para ver que la propiedad CSB se cumple para grupos abelianos finitamente generados y dará ideas para trabajar sobre la categoría **A-mód**.

**Teorema 3.0.4** *(Teorema 3.2,* [1] *) La categoría de grupos abelianos finitamente generados posee la propiedad CSB.*

Por el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados (ver 4.3.12), ambos grupos son el producto de grupos finitos y algún número de copias de $\mathbb{Z}$. Sean $G_\tau$ y $H_\tau$ los subgrupos de torsión de $G$ y $H$ respectivamente, con lo cual

$$G \cong G_\tau \times \mathbb{Z}^g \text{ y } H \cong H_\tau \times \mathbb{Z}^h \text{ para } g, h \in \mathbb{N}$$

Sean $\phi : G \to H$ y $\psi : H \to G$ monomorfismos. Si $x \in G_\tau$ entonces

$$0_H = \phi(0_G) = \phi(|G_\tau| \cdot x) = |G_\tau| \cdot \phi(x).$$

Es decir $\phi(x) \in H_\tau$. Análogamente si $y \in H_\tau$ entonces $\varphi(y) \in G_\tau$ y por tanto $G_\tau \cong H_\tau$ (ya que $G_\tau$ y $H_\tau$ son finitos).

Sean $\pi_G$ y $\pi_H$ las proyecciones $\pi_G : G \to \mathbb{Z}^g$ y $\pi_H : H \to \mathbb{Z}^h$. Ambas resticciones, $(\pi_H \circ \phi)|_{\mathbb{Z}^g}$ y $(\pi_G \circ \psi)|_{\mathbb{Z}^h}$ son inyectivas, si $\pi_H(\phi(x)) = \pi_H(\phi(y))$, significa que $|H_\tau| \cdot \phi(x) = |H_\tau| \cdot \phi(y)$ entonces $\phi(|H_\tau| \cdot x) = \phi(|H_\tau| \cdot y)$, pero $\phi$ es inyectiva, así $|H_\tau| \cdot x = |H_\tau| \cdot y$ con $x$ y $y$ elementos de un grupo libre abeliano, con lo cual $x = y$. El mismo argumento es utilizado para $(\pi_G \circ \psi)|_{\mathbb{Z}^h}$. Entonces $(\pi_H \circ \phi)|_{\mathbb{Z}^g} : \mathbb{Z}^g \to \mathbb{Z}^h$

y $(\pi_G \circ \psi)|_{\mathbb{Z}^h} : \mathbb{Z}^h \to \mathbb{Z}^g$ son ambos monomorfismos entre grupos libres abelianos entonces $g \leq h$ y $h \leq g$. Entonces

$$G \cong G_\tau \times \mathbb{Z}^g \cong H_\tau \times \mathbb{Z}^g \cong H_\tau \times \mathbb{Z}^h \cong H$$

**Ejemplo 3.0.5** *La categoría **Field** de cuerpos y homomorfismos de cuerpos no posee la propiedad CSB. Considere el cuerpo $\mathbb{C}(x)$ de funciones racionales con coeficientes en el cuerpo de los complejos y $\mathbb{C}$. La clausura algebraica de $\mathbb{C}(x)$ tiene el cardinal del continuo al igual que $\mathbb{C}$ y por tanto $\overline{\mathbb{C}(x)} \cong \mathbb{C}$ (ver [11], página 3). Así, tomando $\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}(x)$ que envia cada complejo $a+bi$ en la función constante $a+bi$ y $\mathbb{C}(x) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$ dada por la restricción $\overline{\mathbb{C}(x)}|_{\mathbb{C}(x)}$. Claramente $\varphi$ y $\psi$ son monomorfismos, sin embargo $\mathbb{C}(x)$ y $\mathbb{C}$ no son isomorfos, ya que $\mathbb{C}(x)$ no es algebraicamente cerrado (tome $t^2 - x = p(t) \in \mathbb{C}(x)[t]$).*

## 3.1. DEDEKIND FINITO

Para esta sección, estudiaremos la propiedad CSB desde sus objetos particulares, aprovechando los Teoremas 2.2.6 y la Proposición 2.3.6.

**Definición 3.1.1** *Sea $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos, diremos que la $cadena$ descendente*

$$\ldots C_2 \subset C_1 \subset C,$$

*se estabiliza si para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_n = C_k$ con $n \leq k$.*

**Teorema 3.1.2** *(Teorema 4.1, [1]) En una categoría $\mathcal{C}$, donde los endomorfismos biyectivos son isomorfismos, los objetos que satisfacen la condición de cadena descendente son Dedekind finitos. Se dice que un objeto $C$ tiene la condición de cadena*

[11] Jean-Pierre SERRE. “How to Use Finite Fields for Problems Concerning Infinite Fields”. En: ().

*descendente en los subobjetos, si todas las cadenas de la forma*

$$\dots C_2 \subset C_1 \subset C.$$

*donde todas las inclusiones establecidas son funciones inyectivas que eventualmente se estabilizan.*

Si $C$ tiene la condición de cadena descendente entonces

$$C \supseteq f(C) \supseteq f^2(C) \supseteq \dots \supseteq f^n(C) = f^{n+1}(C) = \dots$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, se cumple que si $n \leq k$ entonces $f^k(C) = f^n(C)$. En particular si tomamos $k = 2n$ obtenermos

$$f^n(C) = f^{2n}(C) \implies f^{-1}(f^n(C)) = f^{-1}(f^{2n}(C)),$$

$$f^{n-1}(C) = f^{2n-1}(C) \implies \dots \implies C = f^n(C),$$

es decir,

$$C \supseteq f(C) \supseteq f^2(C) \supseteq \dots \supseteq f^n(C) = C = f^{n+1}(C) = \dots,$$

con lo cual $f$ sería una biyección.

**Observación 3.1.3** *Si bien la condición de cadena descendente garantiza que el objeto en cuestión sea Dedekind finito, el recíproco no es cierto como veremos a continuación.*

**Ejemplo 3.1.4** *Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{Q}$, dicho grupo es Dedekind finito ya que todos sus endomorfismos inyectivos son de la forma $\phi(x) = a \cdot x$ con $a \in \mathbb{Q}^*$. En efecto, sea $\varphi$ un endomorfismo de $\mathbb{Q}$, tenemos que si $n \neq 0$ entonces*

$$n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi(1)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(1)$$

*así*

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\varphi(1).$$

*Tomando $\varphi(1) = a$ y teniendo en cuenta que $\varphi$ es monomorfismo, $a \in \mathbb{Q}^*$. Con lo cual $\varphi$ sería un isomorfismo, pero claramente no cumple la condición de cadena descendente, más aún, $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo (ver[4] páginas 13-14).*

**Observación 3.1.5** *Note que la propiedad de cumplir la condición de cadena descendente nos dará un indicio de si la categoría en cuestión puede o no poseer la propiedad CSB.*
*Tal como observamos en el Ejemplo 2.1.2, si consideramos $A = [0, 1]$ y a dicho conjunto le aplicamos la función $f(x) = \frac{x}{2}$, la cadena*

$$A \supseteq f(A) \supseteq f^2(A) \supseteq \ldots \supseteq f^n(A) \supseteq \ldots$$

*resulta no detenerse, por lo cual podríamos sospechar que dicha categoría no poseía la propiedad CSB, no obstante si análizamos la categoría **W.O** de conjuntos bien ordenados, si tomamos una función inyectiva $\varphi : (A, \leq_A) \to (A, \leq_A)$ notamos que*

$$A \supseteq \varphi(A) \supseteq A.$$

*Esta última cadena de contenencias debido a el buen orden de $A$. Lo cual resultaría en una prueba alternativa del Teorema 2.1.3.*

**Proposición 3.1.6** *(Proposición 5.1, [1]) Un objeto $A$ en una categoría abeliana es Dedekind finito cindido si y solo si $A \cong A \oplus C$ implica que $C \cong 0$.*

$\Longrightarrow$) Si todos los endomorfismos cindidos son isomorfismos y $A \cong A \oplus C$ consideramos el endomorfismo inclución de $A \hookrightarrow A \oplus C$ es un isomorfismo, si $C$ es no trivial entonces $0_A + c \in A \oplus C$ no pertenece a la imagen de $f$, así $f$ no sería un isomorfismo.

$\Longleftarrow$) Si $A \cong A \oplus C$ implica que $C \cong 0$, consideramos el diagrama

$$0 \to A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi} A/f(A) \to 0$$

aplicando el lema de descomposición tenemos que $A \cong A \oplus A/f(A)$, pero por hipotesis $A/f(A) \cong 0$, con lo cual $f$ es un isomorfismo.

**Definición 3.1.7** *Sea $A$ un objeto de $\mathcal{C}$, diremos que $A$ es un objeto irreducible si cada vez que $A \cong B \oplus C$ entonces $B \cong 0$ o $C \cong 0$.*

**Teorema 3.1.8** *(Teorema 5.4, [1]) Si todos los objetos en una categoría $\mathcal{C}$ se pueden escribir únicamente como una suma directa contable de objetos irreducibles entonces un objeto es Dedekind finito cindido si y solo si cada componente irreducible aparece un número finito de veces.*

$\Longrightarrow$) Tomemos $A \in Ob(\mathcal{C})$ tal que almenos una de sus componentes irreducibles aparece infinitas veces

$$A = \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} R_1 \right) \bigoplus \left( \bigoplus_{j=2}^{\infty} R_j \right).$$

Si tomamos el endomorfismo de $A$ en $A$ dado por un desplazamiento para la componente $R_1$ y el resto de componentes iguales.

$\Longleftarrow$) Sea $A \in Ob(\mathcal{C})$ con

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \left( \bigoplus_{k=1}^{r_i} R_i \right)$$

donde $r_i \in \mathbb{N}$ y cada $R_i$ es irreducible. Ahora, si $f : A \to A$ es una corretracción entonces existe $g : A \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$, nos preguntamos entonces ¿$f(R_i) = R_j$ con $i \neq j$? Si aplicamos $g$ a ambos lados obtenemos $g(f(R_i)) = R_i = g(R_j)$ de donde $f(R_i) = R_j = f(g(R_j))$, es decir es una retracción y correctracción y por tanto isomorfismo.

# 4. CARACTERIZACIONES PARA A-MÓDULOS

En esta sección estudiaremos el caso particular para los módulos sobre un anillo $A$, más en particular los *DIP's* (Dominios de ideales principales), los módulos artinianos y noetherianos, aprovechando sus teoremas de estructura y todos los resultados ya mencionados en este texto.

## 4.1. CORRETRACCIONES Y RETRACCIONES EN A-MÓD

Para el caso específico de la categoría **A-mód**, en la presente sección daremos algunas caracterizaciones para las correctracciones y retracciones, con el fin de facilitar su clasificación en objetos reducibles o no reducibles.

**Definición 4.1.1** *Sea $A$ un anillo y $f : M_1 \to M_2$ un homomorfismo de $A$-módulos.*

1. *Si $f$ es monomorfismo, diremos que $f$ es un monomorfismo $hendido$ si $\mathrm{Im}\,(f)$ es un sumando directo de $M_2$.*
2. *Si $f$ es epimorfismo, diremos que $f$ es un epimorfismo $hendido$ si $\ker(f)$ es un sumando directo de $M_2$.*

**Proposición 4.1.2** *(Proposición 6.2.5, [4]) Sea $A$ un anillo y $f : M_1 \to M_2$ un homomorfismo de $A$-módulos.*

1. *$f$ es monomorfismo hendido, si y solo si, $f$ es corretracción.*
2. *$f$ es epimorfismo hendido, si y solo si, $f$ es retracción.*

Probemos $1)$.
$\Rightarrow)$ Sea $M_2'$ un submodulo de $M_2$ tal que $M_2 = M_2' \oplus Im(f)$. Para cada elemento

$m \in M_2$ exiten $m', y$ tales que $m = m' + y$. Como $f$ es monomorfismo, existeun único $x \in M_1$ tal que $f(x) = y$, luego $m = m' + f(x)$, donde $x$ depende de $m$. Si definimos

$$g : M_2 \to M_1$$

$$m \mapsto g(m) := x,$$

el cual resulta ser un homomorfismo por cómo se construyó.
Si $m_1 \in M_1$ se tiene que $g(f(m_1)) = g(0) + g(f(m_1)) = m_1$, es decir, $g \circ f = i_{M_1}$

$\Leftarrow$) Veamos que

$$M_2 = Ker(g) \oplus Im(f).$$

Si $y \in M_2$, entonces $y = y - f(g(y)) + f(g(y))$, note que $y - f(g(y)) \in Ker(g)$ y $f(g(y)) \in Im(f)$ con lo cual $M_2 = Ker(g) + Im(f)$. Ahora, si $t \in Ker(g) \cap Im(f)$ entonces $g(t) = 0$ y $t = f(x)$ para algun $x \in M_1$, lo que implica $g(t) = g(f(x)) = x = 0$ y así $t = 0$.

**Observación 4.1.3** *En virtud de la Definición 4.1.1 y la Proposición 4.1.2, considerando que nos interesan únicamente los monomorfismos los cuales tienen* $\mathrm{Im}\,(f) = M_2$*, nos serán muy útiles las caracterizaciones en corretraciones.*

**Corolario 4.1.4** *Sea* $M$ *un* $A$*-módulo y* $N$ *un submódulo de* $M$*. Entonces* $N$ *es sumando directo de* $M$ *si, y solo si, existe* $\pi \in End_A(M)$ *tal que* $\pi^2 = \pi$ *y* $\mathrm{Im}\,(\pi) = N$*.*

$\Rightarrow$) Sea $N'$ submódulo de $M$ tal que $M = N \oplus N'$. Consideremos en la primera parte de la proposición anterior $f := \mu$, donde $\mu$ es el homomorfismo inclusión de $N$ en $M$, $\mu$ es un A-homomorfismo inyectivo hendido y existe entonces $g : M \to N$ tal que $g \circ f = 1_N$. Según la demostración de la proposición anterior, $g$ es la proyección de $M$ sobre $N$. Dado que $m \in M$, se tiene que $m = n + n'$, con $n \in N$ y $n' \in N'$, luego $g(m) = n$. Tomando $\pi := \mu \circ g$, resulta $\pi^2(m) = \pi(\pi(m)) = \pi(n) = \pi(n + 0) = n =$

$\pi(m)$, es decir, $\pi^2 = \pi$. Además, $\pi(M) = N$.

$\Leftarrow$) Sean $\mu : N \to M$ la inclusión de $N$ en $M$ y $\pi : M \to M$ tal que $\pi(M) = N$ y $\pi^2 = \pi$. Para $g : M \to N$ definida por $g(m) := \pi(m)$, se tiene que $g \circ \mu = 1_N$ . En efecto, para $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $n = \pi(m)$, luego $\mu(n) = \pi(m)$, de donde

$$g(\mu(n)) = g(\pi(m)) = \pi(\pi(m)) = \pi(m) = n.$$

Entonces, $\mu$ es hendido con imagen $N$.

## 4.2. DEDEKIND FINITO E IRREDUCIBLE

En la presente sección se estudiarán los objetos Dedekind finitos e irreducibles en **A-mód** con la ayuda del Corolario 4.1.4 y el Teorema 3.1.2.

**Observación 4.2.1** *Pensemos por un momento en dos estructuras en particular, las cuales preservan algunas caracteristicas a través de sus monomorfismos.*

1. *Los espacios vectoriales de dimensión finita que posean un producto interno. Dado un espacio vectorial $V$ y un conjunto de vectores $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ los cuales sean ortogonales, es decir, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, no es difícil ver que $S$ resulta ser un conjunto linealmente independiente, con lo cual, si consideramos $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$ un monomorfismo, resulta que $T(S)$ es también linealmente independiente.*

2. *Consideremos a $A$ con estructura de $A$-módulo y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una familia de elementos idempotentes ortogonales, es decir, $e_i^2 = e_i$ y $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$, tales que*

$$e_1 + \ldots + e_n = 1$$

*tenemos entonces las descomposición en sumas directas de $A$ de la siguiente forma*

$$A = e_1 A \oplus \ldots \oplus e_n A.$$

*es decir, $e_i A \cap e_j A = \{0\}$ si $i \neq j$. Ver* [5] *pág 28,29.*

Note que el concepto de *ortogonalidad* se define para elementos de una estructura algebraica pero este concepto puede extenderse de manera natural a los objetos de la categoría **A-mód** como veremos a continuación.

**Definición 4.2.2** *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $A$-módulos, diremos que es una familia ortogonal de A-módulos, si $\operatorname{Hom}(M_i, M_j) = \{0_{M_i M_j}\}$ para $i \neq j$.*

**Ejemplo 4.2.3** *Sea $\{n_i\}_{i\in I}$ una familia de enteros tal que $n_i \geq 2$ y $mcd(n_i, n_j) = 1$ para $i \neq j$, entonces la familia de $\mathbb{Z}$-módulos $\{\mathbb{Z}_{n_i}\}_{i\in I}$ es ortogonal. En efecto, supongamos $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, con $f(\bar{1}) = \bar{u}$ entonces $f(\bar{n}) = f(\bar{0}) = \bar{n}\bar{u} = \overline{nu} = \bar{0}$, así $nu|m$ pero $m.c.d.(n, m) = 1$, por tanto $\bar{u} = \bar{0}$. Es decir, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{n_i}, \mathbb{Z}_{n_j}) = \{0_{\mathbb{Z}_{n_i}\mathbb{Z}_{n_j}}\}$ para $i \neq j$.*

**Observación 4.2.4** *Una prueba alternativa para el Ejemplo 4.2.3, sería utilizando el Teorema de Lagrange en virtud de trabajar con grupos finitos, tomando $\langle f(\bar{1})\rangle$ como subgrupo de $\mathbb{Z}_m$.*

**Teorema 4.2.5** *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia ortogonal de $A$-módulos, si cada $M_i$ es Dedekind finito entonces $\oplus_{i\in I} M_i$ es Dedekind finito.*

Sea $\phi : \oplus_{i\in I} M_i \to \oplus_{i\in I} M_i$ un monomorfismo, notemos que para cada elemento $m \in \oplus_{i\in I} M_i$ se tiene que $\phi(m) = \phi(\sum_{i\in I} m_i) = \sum_{i\in I} \phi(m_i)$, como la familia de $A$-módulos es ortogonal, para cada $m_i \in M_i$ tenemos que $\phi(m_i) \in M_i$, como se ilustra en el siguiente diagrama tomando $I = \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
M_1 & \oplus & M_2 & \oplus & M_3 & \oplus & \dots \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \phi|_{M_1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi|_{M_2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi|_{M_3}} & & \\
M_1 & \oplus & M_2 & \oplus & M_3 & \oplus & \dots
\end{array}
$$

por lo cual tenemos que $\phi(\oplus_{i\in I}M_i) = \oplus_{i\in I}\phi(M_i) = \oplus_{i\in I}M_i$, es decir, la suma directa de una familia ortogonal de $A$-módulos Dedekind finitos es Dedekind finito.

**Observación 4.2.6** *Pensemos ahora en el recíproco del Teorema 4.2.5, ¿Si $\oplus_{i\in I}M_i$ es Dedekind finito entonces $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia ortogonal?. ¿Si $\oplus_{i\in I}M_i$ es Dedekind finito entonces $M_j$ es Dedekind finito para cada $j \in J$.*

**Ejemplo 4.2.7** *Para nuestro contraejemplo tomaremos la familia $\{\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{2n}\}$, tenemos que $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ es dedekind finito y sin embargo la $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_{2n}$ no es ortogonal.*

Por otra parte nuestra segunda pregunta resulta ser verdadera como desmostraremos a continuación.

**Proposición 4.2.8** *Si $\oplus_{i\in I}M_i$ es Dedekind finito entonces $M_j$ es Dedekind finito $\forall j \in J$.*

Supongamos que existe $j \in J$ tal que $M_j$ no es Dedekind finito y $\oplus_{i\in I}M_i$ es Dedekind finito. Existe entonces un monomorfismo $\phi_j : M_j \to M_j$ tal que $\phi_j$ no es isomorfismo, así construimos un monomorfismo $\phi : \oplus_{i\in I}M_i \to \oplus_{i\in I}M_i$ tal que $\phi|_{M_j} = \phi_j$, con lo cual $\oplus_{i\in I}M_i$ no sería Dedekind finito.

**Lema 4.2.9** *Sea $R$ un $DIP$ entonces $R$ es un $R$-módulo irreducible.*

Del Corolario 4.1.4 podemos considerar $\pi(1) = r$ entonces $\pi^2(1) = r \cdot \pi(1)$ de donde $\pi(1) \cdot (1 - r) = 0$, con lo cual tenemos dos casos

- *Caso i)*: Si $\pi(1) = 0$ entonces $\mathrm{Im}\,(\pi) = 0$.

- *Caso ii)*: Si $1 - r = 0$ entonces $\pi(1) = r = 1$, lo cual implica $\mathrm{Im}\,(\pi) = R$.

Concluimos entonces que los únicos sumandos de $R$ son los triviales, es decir, $R$ es un $R$-módulo irreducible.

**Corolario 4.2.10** *Sea $R$ un $DIP$, $\pi \in End_R(R)$ tal que $\pi^2 = \pi$ y $\pi$ es monomorfismo entonces $\pi$ es isomorfismo.*

Por el Lema 4.2.9, tenemos que $\mathrm{Im}\,(\pi) = R$ o $\mathrm{Im}\,(\pi) = 0$, como $\pi$ es monomorfismo $\mathrm{Im}\,(\pi) \neq 0$, asi $\pi$ sería un isomorfismo.

**Proposición 4.2.11** *Sean $M$ un $A$-módulo y $B := End_A(M)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$M$ es un $A$-módulo irreducible.*

2. *0 y 1 son los únicos idempotentes de $B$.*

$2) \implies 1)$ Es claro a partir del Corolario 4.1.4.

$1) \implies 2)$ Sea $e$ un elemento idempotente de $B$, entonces $1 = e + (1 - e)$ y para todo $m \in M$ se tiene que $m = e \cdot m + (1 - e) \cdot m$. De donde $M = eM \oplus (1 - e)M$, como $M$ es irreducible entonces $0 = eM$ o $(1 - e)M = 0$, por tanto $e = 1$ o $e = 0$.

**Observación 4.2.12** *Del Teorema 4.2.10 y la Proposición 4.2.11 obtenemos que el endomorfismo $\pi$ en el Teorema 4.2.10 es exactamente la identidad. Resulta más interesante entonces el estudio de los $A$-módulos artinianos, los cuales cumplen la condición de cadena descendente vista en el Teorema 3.1.2.*

Entre muchas de las propiedades interesantes que cumplen los módulos artinianos, está una de especial interes para nosotros.

**Proposición 4.2.13** *Sea $M$ un $A$-módulo artiniano y $f$ un monomorfismo en $End_A(M)$ entonces se tiene que la cadena*

$$M \geq f(M) \geq f^2(M) \ldots,$$

*se estabiliza.*

Tomamos la familia de submódulos $\{f^k(M)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y aplicamos la Proposición 1.1.19.

**Corolario 4.2.14** *La categoría de $A$-módulos artinianos tiene la propiedad fuerte CSB.*

Sea $M$ un $A$-módulo artiniano y $f : M \to M$ un monomorfismo, si consideramos la familia de submódulos $\{f^k(M)\}_{k\in\mathbb{N}}$, a partir de la Proposición 4.2.13 y el Teorema 3.1.2, obtenemos que $f$ es isomorfismo.

**Teorema 4.2.15** *(Teorema 4.1.1, [5]) La categoría de $A$-módulos noetherianos tiene la propiedad CSB fuertemente cindida.*

Probaremos que cada objeto en dicha categoría se puede ver como suma directa de objetos irreducible para aplicar el Teorema 3.1.8.

La idea central es ir *reduciendo* desde el sumando directo *más grande* hasta el *más pequeño*. Supongamos que $M$ es un $A$-módulo noetheriano, consideramos entonces

$$\mathcal{A} = \{N \leq M : N \text{ es sumando directo no trivial }\}.$$

Con lo cual obtenemos dos casos

i) Si $\mathcal{A}$ es vacío, entonces los únicos sumandos directos de $M$ son los triviales. con lo cual $M$ sería irreducible.

ii) Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$, tomemos $M_1$ un elemento maximal de $\mathcal{A}$ (en virtud de la Proposición 1.1.19), entonces $M = M_1 \oplus N$, de donde $N$ es irreducible y no trivial (de lo contrario $M_1$ sería trivial). En efecto, supongamos que existen $N_1, N_2$ submódulos propios de $N$ tales que $N = N_1 \oplus N_2$, así $M = M_1 \oplus N_1 \oplus N_2$ lo cual contradice que $M_1$ sea máximal.

Sea

$$\lambda = \{K \leq M : K \text{ es sumando directo y } K = K_{s_1} \oplus \ldots \oplus K_{s_n}\},$$

con cada $K_{s_t}$ irreducible, $\lambda$ es no vacio pues $N \in \lambda$. Si tomamos $N_\lambda$ un maximal en $\lambda$ con $M = N_\lambda \oplus N_0$, si $N_0 = N_1 \oplus N_2$ con $N_2$ irreducible, entonces $N_\lambda$ no sería maximal. Por lo tanto

$$M = N_\lambda = M_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus M_{\lambda_n},$$

con cada sumando directo irreducible.

**Observación 4.2.16** *Aplicando un razonamiento dual en la demostración anterior, si cambiamos maximal por minimal, obtenemos el resultado para módulos artinianos.*

**Teorema 4.2.17** *(Teorema 4.1.1, [5]) La categoría de $A$-módulos artinianos tiene la propiedad CSB fuertemente cindida.*

Probaremos que cada objeto en dicha categoría se puede ver como suma directa de objetos irreducible para aplicar el Teorema 3.1.8.

Supongamos que $M$ es un $A$-módulo artiniano, consideramos entonces

$$\mathcal{A} = \{N \leq M : N \text{ es sumando directo no trivial }\}.$$

Con lo cual obtenemos dos casos

i) Si $\mathcal{A}$ es vacio, entonces los únicos sumandos directos de $M$ son los triviales. Con lo cual $M$ sería irreducible.

ii) Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$, tomemos $M_1$ un elemento minimal de $\mathcal{A}$ (en virtud de la Proposición 1.1.19), entonces $M = M_1 \oplus N$, de donde $M_1$ es irreducible y no trivial (de lo contrario $N$ sería trivial). En efecto, supongamos que existen $N_1, N_2$ submódulos propios de $M_1$ tales que $M_1 = N_1 \oplus N_2$, así $M = N \oplus N_1 \oplus N_2$ lo cual contradice que $M_1$ sea minimal.

   Definamos $\lambda = \{K \leq M$: $K$ es sumando directo de $M$ y $M = K \oplus K_{s_1} \oplus \ldots \oplus K_{s_n}$ $\}$ con cada $K_{s_t}$ irreducible, $\lambda$ es no vacio pues $M_1 \in \lambda$. Sea $N_\lambda$ un minimal en $\lambda$, notemos que $N_\lambda = 0$, sean $K_1, \ldots, K_j$ irreducibles no triviales tales que $M = N_\lambda \oplus K_1 \oplus \ldots \oplus K_j$. Si $N_\lambda > 0$ entonces recursivamente encontramos irreducibles no triviales $S_1, \ldots, S_r$ tales que $N_\lambda = S_\lambda \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$, es decir, $M = S_\lambda \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_r \oplus K_1 \oplus \ldots \oplus K_j$ pero entonces $N_\lambda$ no sería minimal. Con esto concluimos que

$$M = K_1 \oplus \ldots \oplus K_j,$$

   con cada $K_i$ irreducible.

**Observación 4.2.18** *Los Teoremas 4.2.17 y 4.2.15 son conocidos como el Teorema de Krull-Schmidt.*

## 4.3. MÓDULOS FINITAMENTE GENERADOS SOBRE DIP

A diferencia de los módulos sobre cuerpos, los módulos sobre anillos en general no poseen base; en dado caso que tengan base, esta no siempre posee el mismo número de elementos ([4], Ejemplo 7.3.6.), no obstante los $DIP$ resultan ser anillos con la propiedad $IBN$ ([12]), para los cuales está bien definido el concepto de dimensión, como el número de elementos de una base arbitraria. A continuación enunciamos un resultado importante para los módulos sobre $DIP's$, el cual utilizaremos para extender el Teorema 3.0.4.

**Proposición 4.3.1** *(Proposición 8.2.2, [4]) Sea $M$ un $R$-módulo libre de dimensión finita y sea $N \leq M$. Entonces $N$ es libre y $\dim(N) \leq \dim(M)$.*

Si $M = 0$, entonces $N = 0$ es libre de dimensión 0. Sea $M$ no nulo; sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de $M$, para cada $1 \leq k \leq n$, definimos

$$N_k := N \cap \langle x_1, \ldots, x_k \rangle.$$

Demostremos que $N_k$ es libre con dimensión $\leq k$. De esto resulta, en particular, que $N_n = N \cap \langle x_1, ..., x_n \rangle = N \cap M = N$ es libre con dimensión $\leq n$. Para $k = 1$ tenemos que $N_1 = N \cap \langle x_1 \rangle$; definimos $I_1 := (N : x_1) = \{r \in R : x_1 \cdot r \in N\}$. Nótese que $I_1$ es un ideal de $R$, y por tanto, $I_1 = \langle a_1 \rangle$. Además, $N_1 = \langle x_1 \cdot a_1 \rangle$: en efecto, sea $x \in N_1$, entonces $x = x_1 \cdot r \in N$, luego $r \in I_1$, y de esta forma, $r = a_1 s$. Esto garantiza que $x = (x_1 \cdot a_1) \cdot s \in \langle x_1 \cdot a_1 \rangle$, es decir, $N_1 \subset \langle x_1 \cdot a_1 \rangle$. De otra parte, por definición $x_1 \cdot a_1 \in N$, es decir, $x_1 \cdot a_1 N \cap \langle x_1 \rangle = N_1$, de donde $\langle x_1 \cdot a_1 \rangle \subset N_1$. Notemos que $N_1$ es libre con dimensión $\leq 1$.
Suponemos ahora que $N_k$ es libre de dimensión $\leq k$, y consideremos el caso $k + 1$. Sea $I_{k+1} := (N + \langle x_1, \ldots, x_k \rangle : x_{k+1}) = \{r \in R | x_{k+1} \cdot r \in N + \langle x_1, \ldots, x_k \rangle\}$. Existe entonces $a_{k+1} \in R$ tal que $I_{k+1} = \langle a_{k+1} \rangle$. Se tiene entonces que

$$x_{k+1} \cdot a_{k+1} = z + x_1 \cdot b_1 + \cdot + x_k \cdot b_k.$$

---

[12] O. LEZAMA. "Anillos dimensionales". En: *Boletín de Matemáticas* (1985).

con $z \in N$ y $b_i R$, $1 \leq i \leq k$. Vamos a mostrar que

$$N_{k+1} = N_k + \langle z \rangle.$$

En efecto, sea $x \in N_{k+1}$, entonces $x \in N$ y $x = x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_{k+1} \cdot c_{k+1}$, esto implica que $x_{k+1} \cdot c_{k+1} = x(x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_k \cdot c_k) \in N + \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$, o sea que $c_{k+1} \in I_{k+1}$, por tanto, $c_{k+1} = a_{k+1} d$. De esta forma, $x = x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_k \cdot c_k + x_{k+1} \cdot a_{k+1} d = x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_k \cdot c_k + z \cdot d + x_1 \cdot b_1 d + \ldots + x_k \cdot b_k d = x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_k \cdot c_k + x_1 \cdot b_1 d + + x_k \cdot b_k d + z \cdot d \in N_k + \langle z \rangle$ ya que $x_1 \cdot c_1 + \cdot + x_k \cdot c_k + x_1 \cdot b_1 d + \cdots + x_k \cdot b_k d = xz \cdot d \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \cap N$. Es decir, $N_{k+1} \subset N_k + \langle z \rangle$. Recíprocamente, como $N_k \subset N_{k+1}$ y $z \in N \langle x_1, \ldots, x_{k+1} \rangle$, entonces $z \in N_{k+1}$, y de esta forma, también $N_k + \langle z \rangle \subset N_{k+1}$. Con lo cual $N_{k+1} = N_k + \langle z \rangle$.

Si $z = 0$, $N_{k+1} = N_k$, y así, $dim(N_{k+1}) = dim(N_k) \leq k < k+1$. Sea $z \neq 0$; si $a_{k+1} = 0$, entonces $z \in N \cap \langle x_1, \ldots, x_k \rangle = N_k$, y nuevamente, $N_{k+1} = N_k$. Sea $a_{k+1} \neq 0$, veamos que en este caso la suma es directa. Sea $x \in N_k \langle z \rangle$, entonces $x = x_1 \cdot c_1 + \cdots + x_k \cdot c_k \in N$ y $x = z \cdot c$, luego $x = x_1 \cdot c_1 + \ldots + x_k \cdot c_k = (x_{k+1} \cdot a_{k+1}) \cdot c(x_1 \cdot b_1 + \cdot + x_k \cdot b_k) \cdot c$, y por la independencia lineal se tiene que $a_{k+1} c = 0$. Como $a_{k+1} \neq 0$, entonces $c = 0$, y de esta forma, $x = 0$. Se tiene entonces que $N_{k+1} = N_k \oplus \langle z \rangle$, con $z \neq 0$. Si $Y$ es una base de $N_k$, entonces $Y \cup \langle z \rangle$ es una base de $N_{k+1}$ (como $M$ es libre, entonces $M$ es un módulo sin torsión, luego $Ann(z) = 0$). Esto implica que $dim(N_{k+1}) \leq k+1$.

**Teorema 4.3.2** *La categoría de $R$-módulos libres finitamente generados, con $R$ un $DIP$ posee la propiedad $CSB$. En particular, tomando $R = \mathbb{Z}$ la categoría de grupos abelianos libres finitamente generados tiene la propiedad $CSB$.*

Supongamos que existen $\phi : A \to B$ y $\psi : B \to A$, $R$-homomorfismos inyectivos. Si tomamos $\dim(A) = n$ y $\dim(B) = m$ tenemos que $A \cong R^n$ y $B \cong R^m$, por otro lado

$\phi(A) \leq B$ y $\psi(B) \leq A$. Por la proposición anterior tenemos que

$$\dim(A) = \dim(\phi(A)) = n \leq \dim(B) = m,$$

$$\dim(B) = \dim(\psi(B)) = m \leq \dim(A) = n,$$

por tanto

$$A \cong R^n \cong R^m \cong B.$$

**Corolario 4.3.3** *La categoría de $R$-módulos libres finitamente generados, con $R$ un $DIP$ posee la propiedad CSB fuertemente cindida.*

**Definición 4.3.4** *Sea $R$ un $DIP$ y $M$ un $R$-módulo, definimos la torsión de $M$ como el siguiente conjunto*

$$\tau(M) = \{m \in M : \; existe \, r \in R, \; r \neq 0 \, tal \; que \, r \cdot m = 0\}.$$

**Observación 4.3.5** *Note que para el caso particular de los $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados, la descomposición dada por el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados*

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_g^{e_g}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H \cong \mathbb{Z}_{q_1^{s_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_h^{s_h}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}.$$

*implica la correspondencia entre las partes libres y las partes de torsión. Dado que $\tau(G)$, $\tau(H)$ resultan ser finitas y por tanto gracias a 2.1.4 isomorfas; hace que la categoría de grupos abelianos finitamente generados posea la propiedad CSB. No obstante para un $DIP$ en general no se puede garantizar que su parte de torsión sea finita.*

**Ejemplo 4.3.6** *Consideremos un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}[x]$ su anillo de polinomios, $V$ un $\mathbb{F}-$espacio vectorial de dimensión finita, si tomamos $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}(V)$, $V := V_T$ tiene estructura de $\mathbb{F}[x]$-módulo con la operación "$\cdot$" $: \mathbb{F}[x] \times V_T \to V_T$ dada por $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \cdot v := a_0 1_V(v) + \sum_{i=1}^{n} a_i T^n(v)$, el cual resulta ser de torsión y finitamente generado visto como $\mathbb{F}[x]$-módulo. En efecto, sea $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $V$ y $v \in V_T$ entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

*así, si $f_i(x) := \alpha_i$ entonces*

$$v = f_1(x)v_1 + f_2(x)v_2 + \ldots + f_n(x)v_n.$$

*Ahora bien, tomando $v \in V_T$, queremos hallar $p(x) \in \mathbb{F}[x] - \{0\}$ tal que $p(T) \cdot v = 0$. Como $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n$, entonces $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$, luego $\{1_V, T, \ldots, T^{n^2}\}$ es linealmente dependiente y por tanto existe $m < n^2$ tal que $\{1_V, T, \ldots, T^{m-1}\}$ es linealmente independiente y $\{1_V, T, \ldots, T^{m-1}, T^m\}$ es linealmente dependiente, así existen escalares $\alpha_0, \alpha_0 1, \ldots, \alpha_m - 1 \in \mathbb{F}$ no todos nulos tales que*

$$\alpha_0 1_V + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_{m-1} T^{m-1} + T^m = 0,$$

*de donde*

$$T^m = -\alpha_0 1_V + \alpha_1 T - \alpha_2 T^2 - \ldots - \alpha_{m-1} T^{m-1}.$$

*Si tomamos*

$$p(x) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^i,$$

*resulta en $p(T)$ una función no nula y $p(x) \cdot v = p(T)(v) = 0$, luego $V_T$ es de torsión. En conclusión, si $V_T$ es infinito su parte de torsión $\tau(V_T) = V_T$ sería infinita.*

**Ejemplo 4.3.7** *Tomemos en el Ejemplo 4.3.6 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $V = M_n$, con $M_n$ las matrices cuadradas de orden $n$. consideremos la matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*tenemos entonces que su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \ldots (\lambda - a_{nn})$, el cual, por el Teorema de Cayley-Hamilton anula la matriz $A$, es decir, $(A - a_{11} \cdot I_n)(A - a_{22} \cdot I_n) \ldots (A - a_{nn} \cdot I_n) = 0_n$. En conclusión $\tau(M_n)$ es infinito.*

**Observación 4.3.8** *Pensemos entonces en la descomposición general de un $R$-módulo, el cual es finitamente generado, con $R$ un $DIP$, se tienen las descomposiciones:*

$$M \cong \tau(M) \oplus R^r$$

*donde $\tau(M)$ es la parte de torsión, pero más aún, su parte de torsión puede ser descompuesta en una suma directa finita de sus componentes $p_i-$primarias de la siguiente forma*

$$\tau(M) \cong \tau(M)^{(p_1)} \oplus \ldots \oplus \tau(M)^{(p_n)}$$

*pero a su vez cada componente $p-$primaria puede descomponerse*

$$\tau(M)^{(p)} \cong R/\langle p^{n_1} \rangle \oplus \ldots \oplus R/\langle p^{n_t} \rangle$$

*donde cada $R/\langle p^{n_1} \rangle$ es cíclico y $Ann(x_i) = \langle p^{n_i} \rangle$ con $\tau(M)^{(p)} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Para un análisis más detallado de la descomposición de un $R$-módulo ver [4], Capítulo 8.*

**Proposición 4.3.9** *Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generado con $R$ un $DIP$. En $M$ cada cadena ascendente de submódulos se detiene, es decir, $M$ es noetheriano.*

Como $R$ es un $DIP$, cada cadena ascendente de ideales de $R$ se detiene ([3]). Aplicando el teorema de correspondencia ([4], Teorema 3.2.2.), se obtiene inmediatamente que en $R/I$, con $I$ un ideal de $R$, cada cadena ascendente de $R$-submódulos se detiene. Sea $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = x_1 \cdot R + \ldots + x_n \cdot R$. Para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene el $R - isomorfismo\ R/Ann(x_i) \cong x_i \cdot R$. Por tanto, cada $x_i \cdot R$ tiene la propiedad exigida. Resta probar que si $M_1$, $M_2$ son submódulos de $M$ que tienen la propiedad requerida, entonces $M_1+M_2$ también la tiene: $(M_1+M_2)/M_2 \cong M_1/(M_1 \cap M_2)$; como $M_1$ cumple la condición de cadena ascendente, entonces claramente $M_1/M_1 \cap M_2$ satisface también dicha condición y, en consecuencia, $(M_1 + M_2)/M_2$ goza también de la propiedad mencionada. El problema se reduce ahora a demostrar que si $N/L$ y $L$ son módulos con la condición, entonces $N$ es un módulo con condición de cadena asecendente: en efecto, sea $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ una cadena ascendente de submódulos de $N$; resultan en $L$ y $N/L$ las cadenas ascendentes

$$N_1 \cap L \subset N_2 \cap L \ldots,$$

$$(N_1 + L)/L \subset (N_2 + L)/L \subset \ldots.$$

Por consiguiente, existen $k, l$ tales que $N_k \cap L = N_{k+i} \cap L$ y $(N_l + L)/L = (N_{l+i} + L)/L$, para todo $i \geq 0$, luego $N_l + L = N_{l+i} + L$, para $i \geq 0$. Sea $n = mx\{l, k\}$, entonces $N_n + L = N_{n+i} + L$ y $N_n \cap L = N_{n+i} \cap L$, para $i \geq 0$. Resulta, $(N_n + L) \cap N_{n+i} = (N_{n+i} + L) \cap N_{n+i}$, de donde $N_n + (L \cap N_{n+i}) = N_{n+i}$, por tanto, $N_n + (L \cap N_n) = N_{n+i}$, y en consecuencia, $N_n = N_{n+i}$, para todo $i \geq 0$.

**Teorema 4.3.10** *La categoría de $R$-módulos finitamente generados, con $R$ un $DIP$ posee la propiedad $CSB$ fuertemente cindida.*

Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generados, con $R$ un $DIP$, entonces se tiene que

$$M \cong \tau(M) \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{r-veces}.$$

Por el Teorema 4.3.9, $M$ es noetheriano. En consecuencia $\tau(M)$ y $R^r$ también son noetherianos por la Proposición 1.1.19. Por lo tanto, si aplicamos el Teorema 4.2.15 a $\tau(M)$ obtendriamos que dicho submódulo se puede descomponer en suma directa finita de componentes irreducibles, así

$$M \cong \tau(M)_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \tau(M)_{\lambda_s} \oplus R \oplus \ldots \oplus R.$$

Con cada una de sus componentes irreducibles, luego por el Teorema 3.1.8, la categoría de $R$-módulos finitamente generados, con $R$ un $DIP$ posee la propiedad $CSB$ fuertemente cindida.

# BIBLIOGRAFÍA


BARTLE Robert G. Y SHERBER, Donald R. “Introducción al análisis matemático de una variable”. En: *3a edición, Editorial Limusa, S.A. de C.V. Grupo Noriega editores* (2010) (vid. pág. 40).

EILENBERG S., MACLANE S. “General theory of natural equivalences”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* () (vid. pág. 22).

GALLIAN, J. “Contemporary Abstract Algebra”. En: *8th edition, University of Minnesota Duluth* () (vid. pág. 70).

JACOBSON, N. “Basic Algebra I”. En: *2nd edition. W.H. Freeman and company, New York* (1989) (vid. pág. 24).

LAACKMAN, Don. “The Cantor-Schroeder-Bernstein property in categories”. En: () (vid. págs. 9, 36, 37, 42, 43, 45-47, 49, 50).

LEZAMA, O. “Anillos dimensionales”. En: *Boletín de Matemáticas* (1985) (vid. pág. 61).

— “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 1: Grupos”. En: *SAC*$^2$*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* () (vid. pág. 10).

— “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 2: Anillos”. En: *SAC*$^2$*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* () (vid. págs. 10, 66).

— “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 3: Módulos”. En: *SAC*$^2$*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* () (vid. págs. 10, 49, 52, 60, 61, 65, 66).

LEZAMA, O. “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 6: Anillos y módulos”. En: *SAC$^2$, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* () (vid. págs. 17, 55, 58, 59).

— “Cuadernos de Álgebra $N_o$ 7: Categorías”. En: *SAC$^2$, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá* () (vid. págs. 26, 29, 31, 33, 70).

PINTER, Charles C. “A Book of Set Theory”. En: *Bucknell University, Dover Publications, Inc.* () (vid. pág. 37).

ROTMAN, J. J. “An introduction to the theory of groups”. En: *Springer Science Business Media* (2012) (vid. pág. 70).

SERRE, Jean-Pierre. “How to Use Finite Fields for Problems Concerning Infinite Fields”. En: () (vid. pág. 47).

## ANEXOS

### Anexo A.

Presentamos algunas definiciones, teoremas y lemas que fueron usados a lo largo de este trabajo los cuales pueden ser consultados con más detalle en [8], [13] y [14].

**Definición 4.3.11** *Sea* $(A, \leq_A)$*un conjunto bien ordenado.Una sección inicial es un subconjunto* $U$ *con la propiedad de que, si* $x \in U$ *y* $y \leq_A x$*, entonces* $y \in U$*.*

**Teorema 4.3.12** *Sea* $G$ *un grupo abeliano finitamente generado entonces*

$$G \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \oplus G_\tau.$$

*Donde* $G_\tau = \{g \in G :$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *y* $g^n = e\}$*.*

**Definición 4.3.13** *Sean* $f$*,* $g : X \to Y$ *morfismos. Se llama coigualador de* $f$ *y* $g$ *a un morfismo* $h : Y \to Z$ *tal que*

1. $h \circ f = h \circ g$*.*
2. *Para cada morfismo* $h' : Y \to Z'$ *que cumpla el primer item, existe un único morfismo* $k : Z \to Z'$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & Z \arrow[d, "k"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

[13] J GALLIAN. “Contemporary Abstract Algebra”. En: *8th edition, University of Minnesota Duluth* ().

[14] J. J. ROTMAN. “An introduction to the theory of groups”. En: *Springer Science Business Media* (2012).

**Definición 4.3.14** *Sean $f$, $g : X \to Y$ morfismos. Se llama igualador de $f$ y $g$ a un morfismo $h : Z \to X$ tal que*

1. $f \circ h = g \circ h$

2. *Para cada morfismo $h' : Z' \to X$ que cumpla el primer item, existe un único morfismo $k : Z' \to Z$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "f", "g"'] & Y \\ Z' \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h'"'] & & \end{tikzcd}$$

**Observación 4.3.15** *En la Definición 4.3.14, $h$ resulta ser un monomorfismo y así $(Z, h) \cong^X (Z', h')$ y en virtud de la Proposición 1.4.5 se tiene que $Z \cong Z'$.*

**Definición 4.3.16** *El núcleo del morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es igualador de $f$ y $0_{AB}$:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "f", "0_{AB}"'] & Y \\ Z' \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h'"'] & & \end{tikzcd}$$

*así, denotaremos a $Z$ por $\ker(f)$. De manera dual definimos el conúcleo del morfismo $A \xrightarrow{f} B$ como el coigualador de $f$ y $0_{AB}$.*

Una categoría con cero morfismos se dice que posee núcleos (conúcleos), si cada morfismo tiene núcleo (conúcleo).

**Definición 4.3.17** *Se dice que el monomorfismo $A \xrightarrow{f} B$ es normal si $f$ es núcleo de algún morfismo. La categoría se dice normal si cada monomorfismo es normal. De manera dual se definen las categorías conormales.*

**Definición 4.3.18** *Una categoría $\mathcal{C}$ es exacta si posee núcleos y conúcleos finitos, es normal y conormal.*

**Definición 4.3.19** *Una categoría $\mathcal{C}$ se dice aditiva si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{C}$ tiene objeto cero.*
2. *$\mathcal{C}$ tiene coproductos finitos.*
3. *Para cada par de objetos $A$ y $B$ de $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano de tal forma que la composición de morfismos es bilineal con respecto a la adición de dichos grupos.*

**Definición 4.3.20** *Una categoría $\mathcal{C}$ es abeliana si es aditiva y exacta.*

**Lema 4.3.21** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, diremos que $S$ es una sucesión exacta cindida si una sucesión exacta de la forma*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

*donde $f$ es una corretracción entonces se tiene que $B \cong A \oplus C$.*

En particular si $f$ es una corretracción, tenemos la sucesión exacta cindida

$$0 \to A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi} A/f(A) \to 0.$$