

Dispersión de paquetes de ondas y aspectos espacio-temporales en la óptica

Zandra Yoana Lizarazo Mejía

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2010

Dispersión de paquetes de ondas y aspectos espacio-temporales en la óptica

Zandra Yoana Lizarazo Mejía

Tesis realizada como requisito parcial para obtener el
título de Doctora en Ciencias Naturales (Física)

Dirección:

Professeur Pierre Pellat-Finet

Codirección:

Doctor Yezid Torres Moreno

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2010

A mis hijas Laira y Amelie

Agradecimientos

- ▷ Agradezco al Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, a los profesores María del Carmen Lasprilla, Arturo Plata, Jaime Meneses, Jaime Salcedo, René Salazar, Yezid Torres, Jader Guerrero, por haberme permitido realizar mi formación de pregrado, maestría y doctorado en este grupo.
- ▷ Agradezco a COLCIENCIAS el apoyo financiero para realizar los estudios doctorales y la oportunidad de hacer una pasantía en el exterior en la universidad (Université de Bretagne Sud, Francia).
- ▷ Agradezco al profesor Pierre Pellat-Finet por haberme dado la oportunidad de desarrollar un sujeto de tesis basado en la teoría metaxial y el método de la transformación de Fourier fraccionaria. Agradezco su paciencia y bondad durante la realización de mi estadía en Francia, para conmigo y mi familia. Fue una experiencia maravillosa, no solo porque tuve la oportunidad de compartir muchas cosas académicas sino porque me permitió conocer su cultura, sus costumbres, disfrutar un buen aperitivo “chartreuse”, un buen paté, en fin...
- ▷ Agradezco al profesor Yezid Torres Moreno por haber estado presente durante estos varios años de mi formación en el grupo. Como resultado de su liderazgo y gran trayectoria en la formación del GOTS, tuve la oportunidad de tener contacto directo con científicos reconocidos como el profesor Pierre Pellat-Finet, la profesora Ángela Guzman, el profesor William Rhodes, entre otros. Agradezco su gestión y apoyo en los momentos más críticos de este doctorado.
- ▷ Agradezco al Dr. Rafael Serrano Sarmiento, rector de la Universidad de Santander, por haber cedido un tiempo valioso que me permitió culminar mi tesis.
- ▷ Agradezco a mis amigos con quienes he compartido todos estos años de formación, en especial estos últimos años, agradezco a: Martha y Nestor por regalarme su ejemplo de gran responsabilidad ante cualquier circunstancia de la vida, a Hernando por su serenidad y por ser un hombre cumplidor de su palabra, a toñis por su ejemplo de superación en las situaciones más adversas,

a “Tita puerquita” por su ejemplo de trabajador incansable, a Iño por ser tan particular. Agradezco su compañía durante estos años de “martirio”, gracias a ustedes los momentos más difíciles se hicieron más llevaderos.

- ▷ Agradezco a mis padres Alfonso y Leonor por brindarme su apoyo incondicional, sin su colaboración y entrega no hubiese sido posible llegar a estas instancias.
- ▷ Por último debo hacer un reconocimiento especial a Rafael. No podre enumerar todas las cosas que debo agradecerle, solo mencionare algunas, le doy gracias por regalarme su ejemplo de amor por la ciencia, el cual corresponde a una señal que ni siquiera se puede muestrear usando su famoso teorema del muestreo fraccionario. También agradezco sus infitos regaños académicos.

Índice general

Declaración de Autoría	4
Agradecimientos	7
Lista de Figuras	12
Resumen	13
Abstract	14
Introducción	15
I DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS	17
Introducción	18
1. MATERIALES DIELECTRICOS Y DISPERSIÓN	19
1.1. Propagación de Ondas Electromagnéticas en dieléctricos	19
1.1.1. Ecuaciones de Maxwell en dieléctricos	19
1.1.2. Ecuaciones de Maxwell en la materia	20
1.1.3. Ecuación de onda en un medio homogéneo, lineal e isótropo	21
1.1.3.1. Ondas electromagnéticas en dieléctricos	23
1.1.4. Modelo de Lorentz	23
1.2. Absorción	25
1.2.1. Medio con absorción débil	26
1.3. Sistema lineal invariante al corrimiento y causal	27
2. PAQUETES DE ONDAS DE ESPECTRO ESTRECHO	30
2.1. Dispersión cromática en líneas dispersivas	30
2.1.1. Definición de la envolvente compleja	32
2.1.2. Propagación de la envolvente compleja	33

2.1.3. Representación de la propagación por una transformación de Fourier fraccionaria	34
2.2. Pérdidas y dispersión en líneas de transmisión	35
2.2.1. Paquetes de ondas de espectro estrecho	35
2.3. Transformación de Fourier fraccionaria compleja	38
2.4. Casos particulares	39
2.5. Dispersión y pérdidas de paquetes de ondas gaussianos	39
2.6. Conclusiones	41
II ÓPTICA TEMPORAL	44
Introducción	45
3. Analogía dispersión difracción	46
3.1. Difracción Metaxial	46
3.1.1. Parámetros y equivalencias gráficas	47
3.1.2. Transformación de Fourier	47
3.2. Haces gaussianos y paquetes de ondas gaussianos	49
3.3. Compensación de dispersión en fibras ópticas	50
3.4. Teorema del muestreo y peinilla temporal	52
3.5. Distribución de Wigner	54
3.6. Conclusiones	55
4. Estenope	56
4.1. Estenope espacial	56
4.2. Casos particulares	61
4.3. Pinhole temporal	62
4.4. Conclusiones	62
5. Coherencia del campo dispersado	64
5.1. Convolución y correlación fraccionaria	65
5.1.1. Correlación fraccionaria	65
5.2. Teorema de Wiener-Kintchinne	65
5.2.1. Notación	66
5.2.1.1. Potencia promedio	66
5.2.2. Densidad α -espectral de potencias	66
5.2.3. Señales aleatorias α -estacionarias	67
5.2.4. Teorema del muestreo fraccionario para señales aleatorias α -estacionarias	69
5.2.4.1. Prueba del teorema (5.2.3)	70
5.3. Coherencia del campo dispersado	71
5.4. Conclusiones	73
Conclusiones generales	73

5.5. Prospectivo	76
A. Distribución Heaviside	78
A.1. Señal analítica y frecuencia instantánea	79
A.1.1. Frecuencia instantánea	80
B. Teoría metaxial	83
B.1. Coordenadas sobre emisores y receptores esféricos	83
B.1.1. Transparencia de curvatura	84
B.1.2. Difracción de Fraunhofer	85
B.1.3. Difracción de Fresnel	86
C. Convolución y Correlación	87
C.1. Convolución fraccionaria	87
C.1.1. Definición integral de la convolución fraccionaria	87
C.2. Correlación fraccionaria	88
Bibliografía	89

Lista de Figuras

2.1.	Curva solo dispersión. La curva en línea a trazos corresponde a una distancia $z = 10km$, y La curva en línea continua corresponde a una distancia $z = 300km$	42
2.2.	Curva de dispersión y pérdidas. La curva en línea a trazos corresponde a una distancia $z = 10km$, y La curva en línea cotinua corresponde a una distancia $z = 300km$	43
3.1.	a) Un incremento de frecuencia corresponde a un radio de curvatura: $VC > 0$ (Arriba), b) Una disminución de frecuencia corresponde a un radio de curvatura: $VC < 0$ (Abajo)	48
3.2.	Equivalencia entre difracción de Fresnel y la propagación de un paquete de onda en una línea de transmisión dispersiva	48
3.3.	Equivalencia entre paquetes de ondas gaussianos <i>chirpeados</i> y haces gaussianos	50
3.4.	Transportando un has gaussiano con lentes. Si $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_1$. . .	51
3.5.	a) Una lente convergente transforma una onda esférica divergente en una convergente. b) Una “lente temporal” puede hacerse con dos fibras ópticas con coeficientes de dispersión β_2 con signos opuestos .	51
3.6.	Transportando un paquete de ondas con una “lente temporal”. El paquete se ensancha y es periódicamente mantenido tal que la dispersión es compensada. La compensación de la dispersión en enlaces de fibras ópticas puede lograrse usando fibras ópticas como lentes temporales.	52
3.7.	Fibras desplazadas	53
3.8.	Esquema Peinilla temporal	53
3.9.	Peinilla temporal simulada	54
4.1.	Estenope	57
4.2.	“Ley de conjugación” para el estenope	57
4.3.	Concordancia con el principio de Huygens-Fresnel	60
B.1.	Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A}	84
B.2.	Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A}	84
B.3.	Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A}	85
B.4.	Transferencia general por difracción de un emisor \mathcal{A} cualquiera a un receptor \mathcal{B} cualquiera.	86

TITULO: DISPERSIÓN DE PAQUETES DE ONDAS Y ASPECTOS ESPACIO-TEMPORALES EN LA ÓPTICA¹

Autor: Zandra Yoana Lizarazo Mejía²

Palabras Claves: Dispersión cromática, transformación de Fourier fraccionaria, cámara oscura, señales aleatorias, convolución y correlación fraccionarias

RESUMEN

Algunos aspectos temporales de la propagación del campo presentan una estructura matemática análoga a los aspectos espaciales ya conocidos por ejemplo, en paquetes de ondas de espectro estrecho propagándose en fibras ópticas se produce dispersión cromática intramodal la cual se puede escribir por una integral de Fresnel.

El objetivo de esta tesis en su primera parte, es estudiar la dispersión y la propagación de paquetes de onda de espectro estrecho en medios dispersivos. Se desarrolla un modelo para tratar la propagación de paquetes de ondas teniendo en cuenta la dispersión cromática y las pérdidas a la vez. Posteriormente se prueba que una aproximación de segundo orden de estos fenómenos permite describirlos mediante integrales del tipo Fresnel, lo cual se expresa matemáticamente por una transformación de Fourier fraccionaria.

En una segunda parte, se desarrolla lo que se llama óptica temporal, con base en la analogía entre difracción y dispersión. La primera de estas es el estenope tanto en el dominio espacial como en el dominio temporal. También se muestra lo que puede llamarse una peinilla temporal. Con base en las definiciones de correlación y convolución fraccionarias dadas por Torres-Amarís se introduce el concepto de señales α -estacionarias, se define la densidad α -espectral de potencia, se enuncia el teorema de Wiener-Kintchine para la transformación de Fourier fraccionaria y se muestra un teorema del muestreo para este tipo de señales.

¹Tesis

²Facultad de Ciencias, Doctorado en Física, Dirección: Pr. Pierre Pellat-Finet, Codirección: Dr. Yezid Torres Moreno

TITLE: WAVE PACKETS DISPERSION AND SPATIO-TEMPORAL ASPECTS
IN OPTICS¹

Author: Zandra Yoana Lizarazo Mejía²

Keywords: Chromatic dispersion, fractional Fourier transformation, pinhole camera, random signals, fractional convolution and correlation

ABSTRACT

An phenomenon important in the packets wave propagations of narrow spectrum in transmission lines is the chromatic dispersion producing negative effects in telecommunications. This phenomenon may be represented by a Fresnel integral, which can be a tool for dispersion compensate.

The subject of this thesis is to analyze the mathematical aspects involucrated in the description of phenomenon chromatic dispersion. We treated wave propagation of narrow band in dispersive lines and we propose one mathematical model for wave packet propagation take account chromatic dispersion and losses.

We demostrated that under secon order aproximation for this phenomenon can be write by type Fresnel Integral. This integral is expresated by the fractional Fourier transform in both cases, only chromatic dispersion and chromatic dispersion plus losses.

In the second part we develop what we call temporal optics, where we show some applications based on the analogy between diffraction and dispersion take account that this physical phenomenon are expresed with fractional Fourier transform. We deal the temporal pinhole in the spacial and temporal domain. We show an notion for temporal comb. Using correlation and convolution definition realized by Torres-Amarís. We has introduced the concept for α -stationary signals, also we define power α -spectrum and we state of Wiener-Kintchinne theorem for fractional Fourier transformation, also we showed the sampling theorem for this signals.

¹Tesis

²Facultad de Ciencias, Doctorado en Física, Dirección: Pr. Pierre Pellat-Finet, Codirección: Dr. Yezid Torres Moreno

Introducción

Es conocido que el fenómeno de dispersión cromática para propagación de paquetes de ondas en líneas de transmisión produce un ensanchamiento del paquete, limitando así la cantidad de información a enviar por el canal [16]. Por lo cual, se ha trabajado para suprimir este efecto. El problema se abordó de forma técnica, cambiando los perfiles de índices de refracción del material que compone la fibra, lo cual se sabe que produce un corrimiento de la curva característica de la dispersión del material, hasta el punto que hoy día se encuentran en el mercado fibras ópticas a dispersión cero alrededor de una frecuencia particular [13, 33, 34, 49, 50, 26].

Si bien se han hecho avances en las técnicas para compensar la dispersión, en este trabajo se trata la dispersión no como un efecto indeseable sino más bien como la oportunidad de hacer uso de ella, con el interés de hallar nuevas aplicaciones. Esta motivación se encuentra basada en la muy conocida analogía entre la difracción de Fresnel y la dispersión cromática.

Con la intención de encontrar aplicaciones donde la dispersión juegue un papel central, se hace uso de las analogías entre los fenómenos de difracción y dispersión [10, 25, 46]. Así, se busca trasladar parte de las aplicaciones conocidas en difracción al dominio temporal mediante un rediseño de estas. Esto conduce a lo que se llama óptica temporal.

Un elemento adicional que puede ser introducido en la óptica temporal es la transformación de Fourier fraccionaria [37]. Se conoce que esta transformación traduce matemáticamente la difracción de Fresnel [41, 44]. Con base en la analogía entre la difracción y dispersión, se muestra que la dispersión cromática se traduce por una transformación de Fourier fraccionaria. Lo cual permite definir operaciones de correlación, convolución, teorema del muestreo temporal, entre otras. Este conjunto

de elementos permiten adaptar más fácilmente los resultados dados en difracción a los fonómemos en dispersión.

La primera parte de esta tesis se dedica al estudio de la dispersión, donde se muestran los desarrollos para escribir una transformación de Fourier fraccionaria a partir de la dispersión cromática. Posteriormente se hace un mismo tratamiento para el problema de dispersión cromática y pérdidas de paquetes de ondas de espectro estrecho, resultando que también se puede expresar como una transformación de Fourier fraccionaria.

En la segunda parte, se muestran algunas analogías, como lentes temporales, haces gaussianos, compensación de dispersión, entre otras. También se muestra una aplicación clásica como es el estenope desde el punto de vista ondulatorio, con base en la óptica metaxial, enfoque desarrollado por Pellat-Finet, para luego hacer la adaptación a la óptica temporal. Se describen las operaciones de correlación y convolución fraccionarias y se enuncia un teorema de Wiener-Kintchine para la transformación de Fourier fraccionaria, lo que permite estudiar el grado de coherencia para usarse en aplicaciones como tomografía óptica coherente.

Parte I

DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS

Introducción

Se conoce que la transformación de Fourier fraccionaria de orden real y complejo permite representar algunos fenómenos o sistemas ópticos [10, 11, 25, 46]. En particular ha sido útil en la descripción de fenómenos de difracción en el régimen de Fresnel.

La analogía entre difracción de Fresnel y dispersión cromática en la propagación de paquetes de ondas en líneas de transmisión dispersivas, en una aproximación de segundo orden, ha sido ampliamente estudiada [7, 6, 19, 44].

Sin embargo, en esta analogía no se ha tomado en cuenta el efecto producido por las pérdidas en la propagación del campo, las cuales siempre van a presentarse cuando se estudian fenómenos de dispersión, de acuerdo con las relaciones de Kramers-Kronig [48].

Siguiendo la misma analogía se muestra un tratamiento que permite abordar tanto el problema de dispersión como el de pérdidas bajo una misma descripción. Aquí se encuentra que la propagación del campo se puede expresar como una integral de Fresnel de variable compleja, la cual se puede escribir como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α complejo [45].

Se estudia el caso donde las pérdidas no están presentes en la propagación y se vuelve al caso de solo dispersión cromática [43]. Como ilustración se trata el caso de la propagación de un paquete de onda gaussiano.

Capítulo 1

MATERIALES DIELÉCTRICOS Y DISPERSIÓN

En este capítulo se hará un estudio de las ecuaciones de Maxwell en medios dieléctricos, los cuales son de interés en el transcurso del trabajo. Con base en las ecuaciones de Maxwell se estudian las propiedades de estos materiales como la susceptibilidad eléctrica, a partir de la cual se deduce el índice de refracción del material [15, 32]. Para esto se toma el modelo de oscilador de Lorentz para describir la interacción de la materia con la radiación electromagnética.

1.1. Propagación de Ondas Electromagnéticas en dieléctricos

1.1.1. Ecuaciones de Maxwell en dieléctricos

Las ecuaciones de Maxwell en su forma general se escriben

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{total} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Aquí

$$\rho_{total} = \rho_{libre} + \rho_{polarización} , \quad (1.5)$$

$$\mathbf{J}_{total} = \mathbf{J}_{libre} + \mathbf{J}_{magnetización} + \mathbf{J}_{polarización} , \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

las densidades de carga y densidades de corriente eléctrica respectivamente, donde

$$\rho_{polarización} = -\nabla \cdot \mathbf{P} , \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J}_{polarización} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} , \quad (1.9)$$

$$\mathbf{J}_{magnetización} = \nabla \times \mathbf{M} , \quad (1.10)$$

siendo \mathbf{M} y \mathbf{P} la magnetización y la polarización respectivamente.

Adicional a estas ecuaciones, para los conductores óhmicos, tenemos la Ley de Ohm

$$\mathbf{J}_{libre} = \sigma \mathbf{E} , \quad (1.11)$$

donde σ es la conductividad eléctrica.

1.1.2. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Se definen

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (1.12)$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} , \quad (1.13)$$

donde \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico y \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético. Luego, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre} , \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{libre} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (1.17)$$

1.1.3. Ecuación de onda en un medio homogéneo, lineal e isótropo

Aquí se tratarán medios isótropos, bajo condiciones tales que los efectos no lineales pueden ser despreciados, es decir, se tomarán intensidades de campo eléctrico por debajo del umbral no lineal, entonces se tiene

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.18)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.19)$$

Se dice lineal porque tanto \mathbf{P} como \mathbf{M} son proporcionales a los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} respectivamente y no a una potencia superior de estos. Se dice isótropo porque las susceptibilidades eléctrica $\chi_e(\mathbf{r})$ y magnética $\chi_m(\mathbf{r})$ no dependen de la posición, es decir, no son matrices (tensores), en este caso son campos escalares. De esto resulta

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad (1.21)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ es la permitividad eléctrica del medio y $\mu = \mu_0(1 - \chi_m)$ es la permeabilidad magnética del medio. Utilizando las ecuaciones (1.14)-(1.17) y (1.20) a (1.21) resulta

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_{libre}, \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.24)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J}_{libre} + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Para medios homogéneos, se tiene

$$\nabla \epsilon(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.26)$$

$$\nabla \frac{1}{\mu(\mathbf{r}, \omega)} = 0, \quad (1.27)$$

en un régimen estacionario la permitividad del medio (ϵ) es independiente del tiempo, por tanto de

$$\frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.28)$$

las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon}, \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_{libre} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Tomando el rotacional en la ecuación (1.31), se encuentra

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (1.33)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{J}_{libre} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

y una situación estacionaria en μ (es decir, ϵ y μ independientes explícitamente de t), es

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \left(\frac{\rho_{libre}}{\epsilon} \right) + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{libre}}{\partial t}. \quad (1.36)$$

Tomando el rotacional en la ecuación (1.32), se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu \nabla \times \left(\mathbf{J}_{libre} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.37)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mu \nabla \times \mathbf{J}_{libre} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (1.38)$$

$$(1.39)$$

Empleando las ecuaciones. (1.30) y (1.31), se consigue

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}_{libre}. \quad (1.40)$$

Utilizando la ecuación (1.11), se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\rho_{libre}}{\epsilon} \right), \quad (1.41)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.42)$$

Estas dos ecuaciones constituyen las ecuaciones de onda electromagnéticas en los medios transparentes, lineales, isótropos y homogéneos; en condiciones de estacionariedad.

1.1.3.1. Ondas electromagnéticas en dieléctricos

Para este caso, se tiene $\sigma = 0$ y $\rho_{libre} = 0$, con esto

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.43)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.44)$$

Se tiene para los campos eléctrico y magnético en la materia dos ecuaciones de onda, cuya velocidad de fase está dada por $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

Se define el índice de refracción por

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \quad (1.45)$$

en un medio no-magnético $\mu_r = 1$, así

$$n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \chi_e}. \quad (1.46)$$

1.1.4. Modelo de Lorentz

Para estudiar la interacción del campo electromagnético con la materia se hace uso del modelo clásico de Lorentz. En este modelo se considera un electrón en el átomo o molécula, ligado al núcleo mediante una fuerza elástica. La fuerza elástica de un muelle, para desplazamientos pequeños sobre la posición de equilibrio, es proporcional al desplazamiento (ley de Hooke), y esta fuerza debe ser igual a la

fuerza de Coulomb producida por el campo eléctrico sobre el electrón, lo cual se expresa de la siguiente forma

$$kx = qE, \quad (1.47)$$

donde x es el desplazamiento y q la carga del electrón. Para campos variantes en el tiempo la ecuación (1.47) debe sustituirse por la segunda ley de Newton para escribir todas las fuerzas que intervienen en la interacción, quedando

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + q\vec{E}, \quad (1.48)$$

donde $-kx$ es la fuerza elástica y $-b \frac{dx}{dt}$ es un término de amortiguamiento. La ecuación (1.48) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Aplicando un campo eléctrico de la forma $E_0 e^{i\omega t}$ resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{qE_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (1.49)$$

siendo

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \quad (1.50)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.51)$$

donde ω_0 es la frecuencia propia del oscilador. Para un régimen estacionario la solución particular de la ecuación diferencial es de la forma

$$x(t) = B e^{i(\omega t + \phi_0)}, \quad (1.52)$$

reemplazando la ecuación (1.52) en la ecuación diferencial (1.48), resulta

$$B [(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma\omega] e^{i\phi_0} = \frac{qE_0}{m}, \quad (1.53)$$

tomando en cuenta que la polarización es

$$P_0 = NqB e^{i\phi_0}, \quad (1.54)$$

donde N es la densidad de dipolos se llega

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma\omega] P_0 = \frac{Nq^2}{m} E_0, \quad (1.55)$$

teniendo en cuenta que

$$P_0 = \epsilon_0 \chi(\omega) E_0, \quad (1.56)$$

la expresión para la susceptibilidad eléctrica χ , se escribe

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \left(\frac{Nq^2}{k\epsilon_0} \right) \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma\omega}, \\ \chi(\omega) &= \chi_0 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma\omega}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Nótese que en la ecuación (1.57), la susceptibilidad eléctrica es compleja, donde la parte imaginaria corresponde a las pérdidas a través del parámetro γ , además de esto, la susceptibilidad eléctrica depende de la frecuencia, lo que caracteriza un medio dispersivo. Como consecuencia de la dependencia de la susceptibilidad con la frecuencia, se mostrará que tanto el índice de refracción como la velocidad de la luz en el medio también dependen de la frecuencia.

1.2. Absorción

De acuerdo a la ecuación (1.57), un material dieléctrico que absorbe luz se representa por una susceptibilidad eléctrica compleja, de la siguiente forma

$$\chi = \chi' + i\chi'', \quad (1.58)$$

siendo χ' la parte real y χ'' la parte imaginaria de la susceptibilidad eléctrica compleja, por lo que la permitividad eléctrica es compleja $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$. Tomando en cuenta las siguientes relaciones

$$\omega = ck_0, \quad (1.59)$$

siendo k_0 el número de onda en el espacio libre y c la velocidad de la luz en el vacío. El número de onda en el medio es

$$k = ck_0 \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} k_0 = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} k_0, \quad (1.60)$$

siendo ϵ_r y μ_r la permitividad relativa y la permeabilidad relativa respectivamente. En este trabajo se consideran medios no magnéticos por tanto $\mu_r \approx 1$, luego

$$k = \sqrt{\epsilon_r} k_0 = (1 + \chi)^{1/2} k_0 = (1 + \chi' + i\chi'')^{1/2} k_0. \quad (1.61)$$

Una onda plana viajando en este medio en la dirección z se describe por la amplitud compleja $U = A \exp(-ikz)$. Donde k es complejo, ambos la magnitud y la fase de U varia con z .

El número de onda k en términos de su parte real e imaginaria es

$$k = \beta - i\frac{1}{2}\gamma, \quad (1.62)$$

γ representa el coeficiente de absorción o atenuación y β es la rata a la cual cambia la fase con z , es decir, la constante de propagación, estas dos cantidades son reales.

Usando la expresión (1.61) se obtiene

$$\beta - i\frac{1}{2}\gamma = k_0(1 + \chi' + i\chi'')^{1/2}. \quad (1.63)$$

El medio tiene un índice de refracción efectivo definido por

$$\beta = nk_0, \quad (1.64)$$

y la onda viaja con una velocidad de fase $v = c/n$. Sustituyendo la ecuación (1.64) en (1.63), se halla una expresión que relaciona el índice de refracción n con la parte real de la susceptibilidad χ' y el coeficiente de absorción con la parte imaginaria de la susceptibilidad χ'' , así

$$n - i\frac{\gamma}{2k_0} = (1 + \chi' + i\chi'')^{1/2}. \quad (1.65)$$

1.2.1. Medio con absorción débil

Este es un medio para el cual $\chi' \ll 1$ y $\chi'' \ll 1$, $(1 + \chi' + i\chi'')^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(\chi' + i\chi'')$, tal que 1.65 se vuelve

$$n \approx 1 + \frac{1}{2}\chi', \quad (1.66)$$

$$\gamma \approx -k_0\chi''. \quad (1.67)$$

1.3. Sistema líneal invariante al corrimiento y causal

La ecuación (1.49) muestra que el medio dieléctrico responde de forma líneal a un campo eléctrico aplicado, por tanto puede tratarse como un sistema líneal en donde la entrada es un campo eléctrico y la respuesta del sistema es una polarización. Ahora, este sistema se caracteriza por una respuesta percusional que corresponde a la susceptibilidad eléctrica multiplicada por la permitividad eléctrica en el vacío, siendo

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega), \quad (1.68)$$

la representación temporal corresponde a la convolución (*) entre la susceptibilidad eléctrica y el campo aplicado, por tanto

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\tilde{\chi} * \tilde{E}](\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \tilde{E}(\vec{r}, t') \tilde{\chi}(t - t') dt', \quad (1.69)$$

entonces $\tilde{\chi}$ es estrictamente real. Como el sistema es causal, entonces $\chi = 0$ para $t < 0$.

La parte par χ_P e impar χ_I de la susceptibilidad eléctrica se escribe como

$$\chi_P = \frac{1}{2} [\tilde{\chi}(t) + \tilde{\chi}(-t)], \quad (1.70)$$

$$\chi_I = \frac{1}{2} [\tilde{\chi}(t) - \tilde{\chi}(-t)], \quad (1.71)$$

quedando la susceptibilidad eléctrica

$$\tilde{\chi} = \chi_P + \chi_I, \quad (1.72)$$

usando la función *Signum* para obtener la parte par χ_P e impar χ_I

$$\chi_P = \chi_I \operatorname{sgn}(t), \quad (1.73)$$

$$\chi_I = \chi_P \operatorname{sgn}(t), \quad (1.74)$$

Tomando la transformada de Fourier de la función *Signum* (ver apéndice A), de la parte par P y de la parte imaginaria I , resulta

$$\mathcal{F}[\text{sgn}] = v.p. \frac{1}{\nu}, \quad (1.75)$$

$$\mathcal{F}[\chi_P] = v.p. \frac{1}{\nu} * \chi_I, \quad (1.76)$$

$$\mathcal{F}[\chi_I] = v.p. \frac{1}{\nu} * \chi_P, \quad (1.77)$$

donde $v.p.$ es el valor principal. Usando las propiedades de simetría para la transformación de Fourier de funciones pares e impares, se tiene

$$\mathcal{F}[\chi_P] = \chi', \quad (1.78)$$

$$\mathcal{F}[\chi_I] = \chi'', \quad (1.79)$$

las relaciones anteriores quedan

$$\chi' = v.p. \frac{1}{\nu} * \chi'', \quad (1.80)$$

$$\chi'' = v.p. \frac{1}{\nu} * \chi', \quad (1.81)$$

explícitamente

$$\chi'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (1.82)$$

$$\chi''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.83)$$

Por comodidad en la notación, valor principal $v.p.$ se denota por \mathcal{f} . Como la respuesta impulsional es real su transformada de Fourier debe ser simétrica y debe cumplirse $\overline{\chi(-\omega)} = \chi(\omega)$.

Racionalizando las ecuaciones (1.82) y (1.83) y usando las propiedades de simetría, se llega

$$\begin{aligned} \overline{\chi(-\omega)} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ &- i \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega' \chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + i \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega \chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \end{aligned} \quad (1.84)$$

de lo que resulta

$$\chi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + i \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega \chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (1.85)$$

donde

$$\chi'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (1.86)$$

$$\chi''(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega \chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (1.87)$$

donde las ecuaciones (1.86) y (1.87) corresponden a las relaciones de Kramers-Kronig [48]. Estas dos expresiones muestran que si hay dispersión necesariamente hay pérdidas, es decir, que los dos fenómenos se presentan simultáneamente.

Capítulo 2

DISPERSIÓN Y PÉRDIDAS DE PAQUETES DE ONDAS DE ESPECTRO ESTRECHO

En este capítulo se muestra que la propagación de paquetes de ondas de espectro estrecho en una línea de transmisión se expresa como una integral de Fresnel, la cual se traduce por una transformación de Fourier fraccionaria de orden real [42]. Posteriormente a este tratamiento se adicionan las pérdidas dependientes de la frecuencia, hallándose que la propagación corresponde a una integral de Fresnel de variable compleja [29], la que se puede escribir como una transformación de Fourier fraccionaria de orden complejo [45, 30]. Como caso particular no se toman en cuenta las pérdidas y se llega a las expresiones de solo dispersión [43, 18]. También se ilustra la propagación de un paquete de ondas gaussiano para el caso de solo dispersión y el caso de dispersión más pérdidas.

2.1. Dispersión cromática en líneas dispersivas

El interés es calcular la amplitud del campo eléctrico, luego que se ha propagado una distancia z en una línea de transmisión. Lo cual se escribe

$$E_z(t) = \int e_0(\nu) e^{i(\beta(\nu)z - 2\pi\nu t)} d\nu, \quad (2.1)$$

la componente espectral a la distancia z está relacionada con la componente espectral en $z = 0$ por

$$e_z(\nu) = e_0(\nu)e^{-i\beta(\nu)z}, \quad (2.2)$$

luego

$$E_z(t) = \int e_z(\nu)e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (2.3)$$

y de esta forma la componente espectral del campo a la distancia z es

$$e_z(\nu) = \int E_z(t)e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (2.4)$$

Para tener una noción del campo luego de haberse propagado es necesario conocer la constante de propagación β . Este tratamiento se va hacer para paquetes de ondas de espectro estrecho. Bajo estas condiciones se justifica una expansión en series de Taylor alrededor de una frecuencia $\tilde{\nu}$, limitada al segundo orden

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 + \dots, \quad (2.5)$$

donde $\beta_0 = \beta(\tilde{\nu})$ es la constante de propagación, $\beta_1 = d\beta/d\nu|_{\tilde{\nu}}$ y $\beta_2 = d^2\beta/d\nu^2|_{\tilde{\nu}}$, el parámetro β_2 es el responsable de la dispersión cromática. Reemplazando las expresiones anteriores en (2.1), se obtiene

$$E_z(t) = \int e_0(\nu)e^{-i\beta_0 z}e^{-i\beta_1(\nu-\tilde{\nu})z}e^{-i\frac{\beta_2}{2}(\nu-\tilde{\nu})^2 z}e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (2.6)$$

utilizando

$$e_0(\nu) = \int E_0(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \quad (2.7)$$

la amplitud del campo toma la forma

$$\begin{aligned} E_z(t) &= e^{-i(\beta_0 - \beta_1\tilde{\nu})z} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} E_0(t')e^{i\beta_1\nu z}e^{-i\frac{\beta_2}{2}(\nu-\tilde{\nu})^2 z}e^{2i\pi\nu t}e^{-2i\pi\nu t'} d\nu dt' \\ &= e^{-i(\beta_0 - \beta_1\tilde{\nu})z} \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\beta_2}{2}(\nu-\tilde{\nu})^2 z}e^{i2\pi\nu(t-t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi})} d\nu dt', \end{aligned} \quad (2.8)$$

haciendo los siguientes cambios de variables

$$\begin{aligned} u &= t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} \\ v &= \nu - \tilde{\nu}, \end{aligned}$$

se escribe

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-i\frac{\beta_2}{2}zv^2} e^{2i\pi(v+\nu)u} dv \\
&= e^{2i\pi\tilde{\nu}u} e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}u^2} \int e^{i\frac{\beta_2}{2}z\left(v-\frac{2\pi}{\beta_2 z}u\right)^2} dv,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

se llega a

$$I = e^{2i\pi\tilde{\nu}u} e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}u^2} \sqrt{\frac{2\pi}{i\beta_2 z}}, \tag{2.10}$$

resultando

$$I = e^{2i\pi\tilde{\nu}\left(t-t'-\frac{\beta_1}{2\pi}z\right)} e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}\left(t-t'-\frac{\beta_1}{2\pi}z\right)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(\beta_2 z)}. \tag{2.11}$$

Finalmente, la amplitud del campo a la distancia z es

$$\begin{aligned}
E_z(t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(\beta_2 z)} e^{-i(\beta_0 - \beta_1\tilde{\nu})z} \int E_0(t') e^{2i\pi\tilde{\nu}\left(t-t'-\frac{\beta_1}{2\pi}z\right)} e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}\left(t-t'-\frac{\beta_1}{2\pi}z\right)^2} dt' \\
&= e^{-i\beta_0 z} e^{2i\pi\tilde{\nu}t} \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(\beta_2 z)} \int E_0(t') e^{-2i\pi\tilde{\nu}t'} e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}\left(t-t'-\frac{\beta_1}{2\pi}z\right)^2} dt'.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.1. Definición de la envolvente compleja

El campo a la distancia z se puede expresar

$$E_z(t) = A_z(t) e^{2i\pi\tilde{\nu}t}. \tag{2.13}$$

donde A_z es la amplitud compleja. Usando las ecuaciones (2.12) y (2.13) se encuentra la amplitud compleja a la distancia z

$$A_z(t) = e^{-i\beta_0 z} \int \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(\beta_2 z)} A_0(t') \exp\left[\frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} \left(t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi}\right)^2\right] dt'. \tag{2.14}$$

Se define B_z de la forma

$$A_z(t) = e^{-i\beta_0 z} B_z \left(t - \frac{\beta_1}{2\pi}z\right) \tag{2.15}$$

luego

$$B_z(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(\beta_2 z)} \int_{\mathbb{R}} B_0(t') e^{i\frac{2\pi^2}{\beta_2 z}(t-t')^2} dt'. \quad (2.16)$$

Con base en esta definición escribimos la amplitud del campo a la distancia z

$$E_z(t) = e^{-i\beta_0 z} e^{2i\pi\tilde{\nu}t} B_z\left(t - \frac{\beta_1}{2\pi}z\right). \quad (2.17)$$

Para los cálculos posteriores solo se tendrá en cuenta la envolvente compleja $B_z(t)$, a partir de la cual se puede calcular tanto la amplitud compleja A_z como el campo E_z . Se puede apreciar que la envolvente compleja se propaga a la velocidad de grupo $v_g = 2\pi/\beta_1$.

2.1.2. Propagación de la envolvente compleja

En muchas situaciones se encuentra que la envolvente compleja se encuentra modulada línealmente en frecuencia, por tal razón se estudiará la propagación de la envolvente compleja en estas condiciones

$$U_0(t) = B_0(t) e^{\frac{i\pi}{\Lambda t_z} t^2}, \quad (2.18)$$

$$U_z(t) = B_z(t) e^{\frac{i\pi}{\Lambda t_0} t^2}. \quad (2.19)$$

Se introduce el parámetro

$$Z = \frac{\beta_2 z}{2\pi\Lambda}, \quad (2.20)$$

donde Λ es una longitud de onda temporal que corresponde $\Lambda = \mathfrak{s}(\beta_2)/\tilde{\nu}$, siendo $\mathfrak{s}(\beta_2)$ el signo de β_2 y z la distancia de propagación. Con base en las relaciones anteriores se escribe la envolvente compleja

$$\begin{aligned} U_z(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda Z}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathfrak{s}(Z)} \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda}\left(\frac{1}{t_z} + \frac{1}{Z}\right)t^2\right] \\ &\times \int U_0(t') \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda}\left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{t_0}\right)t'^2\right] e^{-i\frac{2\pi}{\Lambda Z}tt'} dt'. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esta expresión es análoga a una integral de Fresnel en el dominio temporal.

2.1.3. Representación de la propagación por una transformación de Fourier fraccionaria

Dado que la propagación de la envolvente compleja se hace a través de una integral de Fresnel, esto permite que se escriba matemáticamente como una transformación de Fourier fraccionaria con base en la analogía con un fenómeno de difracción.

Sea ε un número real tal que $\varepsilon t_0 > 0$. Sea α en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{t_0 - Z}{Z}, \quad \alpha Z \geq 0. \quad (2.22)$$

Se eligen las variables reducidas

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \Lambda t_0}} t', \quad (2.23)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \Lambda t_0}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) t, \quad (2.24)$$

y las funciones reducidas

$$V_0(\tau') = U_0(\sqrt{\varepsilon \Lambda t_0} \tau'), \quad (2.25)$$

$$V_z(\tau) = U_z \left(\frac{\sqrt{\varepsilon \Lambda t_0}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \tau \right). \quad (2.26)$$

La relación (2.21) se escribe

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \exp \left[i\pi \left(\frac{1}{t_z} + \frac{1}{Z} \right) \frac{\varepsilon t_0 \tau^2}{(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2} \right] \int_{\mathbb{R}} \exp[i\pi \tau'^2 \cot \alpha] V_0(\tau') d\tau' \quad (2.27)$$

Se tendrá una transformación de Fourier fraccionaria si

$$\left(\frac{1}{t_z} + \frac{1}{Z} \right) \frac{\varepsilon \Lambda t_0 \tau^2}{(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2} = \cot \alpha \quad (2.28)$$

la ecuación (2.28) se cumple si

$$t_z = \frac{\varepsilon^2 (t_0 - Z)^2 + Z^2}{\varepsilon^2 (t_0 - Z) - Z}. \quad (2.29)$$

El campo reducido a la distancia z es

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_0](\tau). \quad (2.30)$$

La relación (2.30) muestra que la propagación de la amplitud compleja modulada línealmente en una línea de transmisión dispersiva se escribe por una transformación de Fourier fraccionaria. Este resultado es equivalente al obtenido en el caso de la difracción.

2.2. Pérdidas y dispersión en líneas de transmisión

Como se vió en las relaciones de Kramers-Kronig cuando se presenta un fenómeno de dispersión también se presentan pérdidas. Por lo cual también se justifica una expansión a segundo orden en series de Taylor del coeficiente de pérdidas γ .

En un medio con dispersión cromática y pérdidas, el número de onda $k(\nu)$ es complejo [48], y se escribe

$$k(\nu) = \beta(\nu) - \frac{i}{2}\gamma(\nu), \quad (2.31)$$

donde β es la constante de propagación que corresponde a la parte real del número de onda y γ es el coeficiente de absorción o atenuación que corresponde a la parte imaginaria. El campo a la distancia z se escribe

$$E_z(t) = \int_{\mathbb{R}} e_0(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{-i\beta(\nu)z} e^{-\frac{\gamma(\nu)z}{2}} d\nu. \quad (2.32)$$

Para tener una noción del campo luego de haberse propagado es necesario conocer la funciones para el coeficiente de absorción y la constante de propagación. Un caso que se puede tratar es cuando se trabaja con paquetes de ondas de espectro estrecho.

2.2.1. Paquetes de ondas de espectro estrecho

Tratando con ondas a espectro estrecho, se permite hacer una expansión a segundo orden, alrededor de una frecuencia $\tilde{\nu}$, tanto de la constante de propagación β como

del coeficiente de absorción γ , por lo tanto

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2, \quad (2.33)$$

$$\gamma(\nu) = \gamma_0 + \gamma_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\gamma_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2, \quad (2.34)$$

donde $\gamma_0 = \beta(\tilde{\nu})$ son las pérdidas, $\gamma_1 = d\gamma/d\nu|_{\tilde{\nu}}$ y $\gamma_2 = d^2\gamma/d\nu^2|_{\tilde{\nu}}$. Sustituyendo las ecuaciones (2.33) y (2.34) en la ecuación (2.32), se obtiene

$$\begin{aligned} E_z(t) = & \int_{\mathbb{R}} e_0(\nu) \exp[i2\pi\nu t] \exp\left[-iz\left(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2}\right)\right] \exp[-i\beta_1(\nu - \tilde{\nu})z] \exp\left[-\frac{i\beta_2 z}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{\gamma_1 z}{2}(\nu - \tilde{\nu})\right] \exp\left[-\frac{\gamma_2 z}{4}(\nu - \tilde{\nu})^2\right] d\nu, \end{aligned} \quad (2.35)$$

reescribiendo la expresión anterior

$$\begin{aligned} E_z(t) = & \exp\left[-i\left(\beta_0 + i\frac{\gamma_0}{2}\right)z\right] \exp\left[i\left(\beta_1 - i\frac{\gamma_1}{2}\right)\tilde{\nu}z\right] \int E_0(t') \int \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\beta_2 - i\frac{\gamma_2}{2}\right)(\nu - \tilde{\nu})^2 z\right] \\ & \times \exp\left[i2\pi\nu\left(t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} + i\frac{\gamma_1 z}{4\pi}\right)\right] d\nu dt'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Se define

$$I(t - t') = \int \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\beta_2 - i\frac{\gamma_2}{2}\right)(\nu - \tilde{\nu})^2 z\right] \exp\left[i2\pi\nu\left(t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} + i\frac{\gamma_1 z}{4\pi}\right)\right] d\nu \quad (2.37)$$

entonces

$$E_z(t) = \exp\left[-iz\left(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2}\right)\right] \int_{\mathbb{R}} E_0(t') I_z(t - t') dt', \quad (2.38)$$

nótese que el campo a la distancia z se escribe como una convolución entre el campo inicial $E_0(t)$ y la función $I_z(t)$, como sigue

$$E_z(t) = e^{-iz(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2})} [E_0 * I_z](t). \quad (2.39)$$

Haciendo los cambios de variables para resolver la integral I

$$u = t - t' - \frac{\beta_1 z}{2\pi} + i\frac{\gamma_1 z}{4\pi} \quad (2.40)$$

$$v = \nu - \tilde{\nu}, \quad (2.41)$$

la integral I queda

$$I(t-t') = \int \exp\left(-\frac{i}{2}mv^2z\right) \exp[i2\pi(v+\tilde{\nu})u]dv, \quad (2.42)$$

donde $m = \beta_2 - i\frac{\gamma}{2}$. Resolviendo se llega

$$I_z(t-t') = e^{-i\pi/4}(Z-Z'^2)^{1/4}e^{i/2\arctan\left(\frac{z'}{Z}\right)} \exp\left[\frac{i\left((t-t') + \frac{\beta_1z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1z}{4\pi}\right)^2}{\frac{\beta_2z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2z}{4\pi}}\right] \quad (2.43)$$

con $Z' = \gamma_2z/4\pi$. Reemplazando la expresión (2.43) en (2.38), se obtiene la propagación del campo a la distancia z , tal que

$$E_z(t) = e^{-i\pi/4}(Z-Z'^2)^{1/4}e^{i/2\arctan\left(\frac{z'}{Z}\right)} \exp\left[-iz\left(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2}\right)\right] \\ \times \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \exp\left[\frac{i2\pi^2\left(t-t' - \frac{\beta_1z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1z}{4\pi}\right)^2}{\frac{\beta_2z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2z}{4\pi}}\right] dt'. \quad (2.44)$$

Se define la envolvente compleja

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4}(Z-Z'^2)^{1/4}e^{i/2\arctan\left(\frac{z'}{Z}\right)} \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \exp\left[\frac{i2\pi^2(t-t')^2}{\frac{\beta_2z}{2\pi} - \frac{i\gamma_2z}{4\pi}}\right] dt' \quad (2.45)$$

resultando

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4}(Z-Z'^2)^{1/4}e^{i/2\arctan\left(\frac{z'}{Z}\right)} \exp\left[-i\mathfrak{s}(Z-iZ')\frac{\pi}{4}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda}\frac{t^2}{(Z-iZ')}\right] \\ \times \int E_0(t') \exp\left[\frac{i\pi t'^2}{\Lambda(Z-iZ')}\right] \exp\left[\frac{-i2\pi tt'}{\Lambda(Z-iZ')}\right] dt'. \quad (2.46)$$

La propagación del campo en términos de la envolvente compleja se expresa

$$E_z(t) = \exp\left[-iz\left(\beta_0 - \frac{i\gamma_0}{2}\right)\right] B_z\left(t - \frac{\beta_1z}{2\pi} - \frac{i\gamma_1z}{4\pi}\right). \quad (2.47)$$

La expresión (2.46) guarda gran similitud con la integral de difracción de Fresnel, con la diferencia que para este caso las variables son complejas. Entonces, el estudio de la propagación del campo consiste en la evolución de su envolvente compleja B_z , como se nota en la ecuación (2.47). Como ilustración se estudia el efecto de las pérdidas en la propagación de un paquete de ondas gaussiano.

2.3. Transformación de Fourier fraccionaria compleja

Es evidente la analogía entre la ecuación (2.69) y la definición de Namias [37], la cual permite definir una transformación de Fourier fraccionaria de orden α complejo. Para que exista una apropiada correspondencia entre estas dos expresiones es necesario hacer lo siguiente: se define el parámetro adimensional η complejo, el cual está directamente relacionado con las variables físicas del problema, de la siguiente forma

$$\eta = \frac{Z - iZ'}{t_0}, \quad (2.48)$$

se define el orden fraccional α complejo, como sigue

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1 - \eta}{\eta}. \quad (2.49)$$

Se encuentran otras relaciones importantes, donde

$$\eta = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \quad (2.50)$$

y

$$\sin^2 \alpha = \frac{\eta^2}{\eta^2 + \varepsilon^2(1 - \eta)^2}. \quad (2.51)$$

Las definen las variables reducidas de la siguiente forma

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) t, \quad (2.52)$$

$$\tau' = \frac{t'}{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}}, \quad (2.53)$$

las amplitudes de los campos en términos de las variables reducidas, se escriben

$$V_0(\tau') = U_z(\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0} \tau'), \quad (2.54)$$

$$V_z(\tau) = U_0 \left(\frac{\sqrt{\Lambda \varepsilon t_0}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \tau \right). \quad (2.55)$$

La ecuación (2.21) es una transformación de Fourier fraccionaria si la curvatura temporal de llegada t_z es de la siguiente forma

$$t_z = \frac{\eta^2 t_0 [\eta^2 + \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]}{\varepsilon^2 (1 - \eta) - [\eta^2 + \varepsilon^2 (1 - \eta)^2]}. \quad (2.56)$$

La amplitud del campo a la distancia z , corresponde a

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} e^{-i\mathfrak{s}(t_0/\eta)} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_0](\tau). \quad (2.57)$$

La expresión (B.2) muestra que la propagación del campo a través de una línea dispersiva que incluye el efecto de las pérdidas también se puede expresar como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α complejo [45].

2.4. Casos particulares

Para el caso en el cual no se tenga en cuenta el efecto de las pérdidas, es decir $Z' = 0$, se vuelve al caso de solo dispersión cromática. En este caso la propagación de la envolvente compleja a través de la línea dispersiva se representa por una transformación de Fourier fraccionaria de orden α real [43], por tanto

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_0](\tau). \quad (2.58)$$

2.5. Dispersión y pérdidas de paquetes de ondas gaussianos

Se mostrará el efecto de las pérdidas al propagarse un paquete de ondas gaussiano en un medio con dispersión cromática [1]. La envolvente gaussiana se escribe

$$E_0(t) = \exp \left[-\frac{\pi t^2}{(\Delta T)^2} \right]. \quad (2.59)$$

Para esta función se calcula la envolvente compleja luego de propagarse una distancia z . Introduciendo esta función en la expresión (2.46), resulta

$$B_z(t) = e^{-i\pi/4}(Z - Z'^2)^{1/4} e^{i/2 \arctan(\frac{Z'}{Z})} \exp\left[-i\mathfrak{s}(Z - iZ') \frac{\pi}{4}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda} \frac{t^2}{(Z - iZ')}\right] \\ \times \int \exp\left[-\frac{\pi t'^2}{(\Delta T)^2}\right] \exp\left[\frac{i\pi t'^2}{\Lambda(Z - iZ')}\right] \exp\left[\frac{-i2\pi t t'}{\Lambda(Z - iZ')}\right] dt', \quad (2.60)$$

definiendo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\pi \left(\frac{1}{i(\Delta T)^2} - \frac{1}{\Lambda(Z - iZ')}\right) t'^2\right] \exp\left[-\frac{i2\pi t t'}{\Lambda(Z - iZ')}\right] dt' \quad (2.61)$$

haciendo

$$a = -\frac{i}{(\Delta T)^2} - \frac{1}{\Lambda(Z - iZ')}, \quad (2.62)$$

$$b = \frac{t}{\Lambda(Z - iZ')}, \quad (2.63)$$

entonces

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [-i\pi(at'^2 + 2bt')] dt' \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\pi/4} \exp\left[\frac{i\pi b^2}{a}\right], \quad (2.64)$$

en términos de las variables iniciales

$$I = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2(Z^2 + Z'^2) + (\Delta T)^4}} (c^2 - d^2)^{1/4} e^{i/2 \arctan(\frac{d}{c})} \\ \times \exp\left[-\frac{i\pi(\Delta T)^2 \Lambda(Z - iZ') t^2}{\Lambda(Z - iZ') [i\Lambda(Z - iZ') + (\Delta T)^2]}\right], \quad (2.65)$$

siendo

$$c = \Lambda(\Delta T)^2((\Delta T)^2 - \Lambda Z'), \quad (2.66)$$

$$d = -\Lambda^2(\Delta T)^2 Z, \quad (2.67)$$

desarrollando la integral de (2.65) resulta

$$\begin{aligned}
I = & e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2(Z^2 + Z'^2) + (\Delta T)^4}} (c^2 - d^2)^{1/4} e^{i/2 \arctan(\frac{d}{c})} \\
& \times \exp \left[-\frac{\pi(\Delta T)^2[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda^2 Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\
& \times \exp \left[-\frac{i\pi Z(\Delta T)^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda^2 Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Luego de sustituir la expresión (2.68), la envolvente compleja se escribe

$$\begin{aligned}
B_z(t) = & e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2(Z^2 + Z'^2) + (\Delta T)^4}} (c^2 - d^2)^{1/4} e^{i/2 \arctan(\frac{d}{c})} \\
& \times \exp \left[-\frac{\pi(\Delta T)^2[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\
& \times \exp \left[-\frac{i\pi Z(\Delta T)^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]t^2}{\Lambda[(Z^2 - Z'^2)\Lambda - Z'(\Delta T)^2]^2 + \Lambda Z^2 [2Z'\Lambda + (\Delta T)^2]^2} \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i\pi Z t^2}{\Lambda(Z^2 + Z'^2)} \right] \exp \left[-\frac{\pi Z' t^2}{\Lambda(Z^2 + Z'^2)} \right]. \quad (2.69)
\end{aligned}$$

A continuación se muestran unas curvas simuladas para el caso de dispersión y pérdidas y solo dispersión. Los parámetros para estas curvas son $\Delta T = 200 \times 10^{-5} s$, $\beta_2 = 20 \times 10^{-5} s^2/km$, $\gamma_2 = 10 \times 10^{-12} s^2/km$;

De la figura (2.2), se aprecia que al incluir las pérdidas en el modelo el ancho de la gaussiana se modifica notablemente. Cuando no se toman en cuenta las pérdidas $Z' = 0$, se vuelve al caso de solo dispersión [43], ver figura (2.1).

2.6. Conclusiones

La propagación de un paquete de ondas en una línea de transmisión se reduce al calculo de la evolución de la envolvente compleja B_z . Se encuentra que el paquete de ondas viaja a la velocidad de grupo. Para dos medios con pendientes iguales, alrededor de $\tilde{\nu}$ tendrán iguales velocidades de grupo, es decir, β_1 es el mismo para ambos medios.

Se muestra un modelo con base en la teoría metaxial, para tratar tanto dispersión cromática como pérdidas de paquetes de ondas de espectro estrecho.

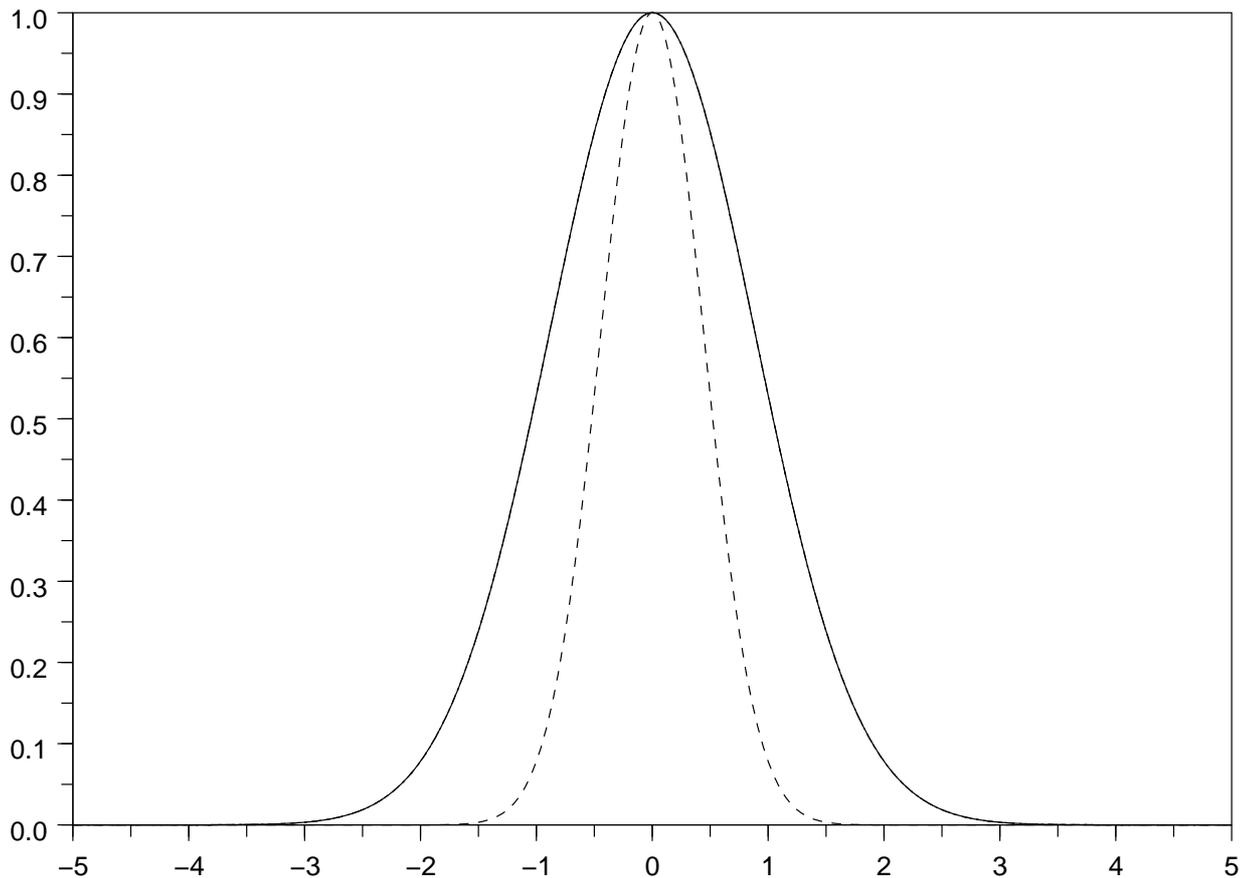


FIGURA 2.1: Curva solo dispersión. La curva en línea a trazos corresponde a una distancia $z = 10km$, y La curva en línea continua corresponde a una distancia $z = 300km$.

Se encuentra que la propagación de la envolvente compleja de un paquete de ondas, para un medio con dispersión y pérdidas corresponde a una integral de Fresnel de variable compleja, la cual se traduce como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α complejo. Cuando no se toman en cuenta las pérdidas se encuentra que la propagación de la envolvente compleja se expresa por una integral de Fresnel de variable real y una transformación de Fourier fraccionaria de orden α real. Esto indica que la transformación de Fourier fraccionaria permite tratar los fenómenos simultáneamente o por separado, simplemente haciendo un cambio en los ordenes fraccionarios.

Con base en la ilustración de la propagación de un paquete de ondas gaussiano se concluye que el incluir las pérdidas en el modelo modifica el ancho de la gaussiana, es decir, se incluye un ensanchamiento adicional al producido en el caso de solo dispersión. Este resultado puede introducir un límite en la cantidad de información

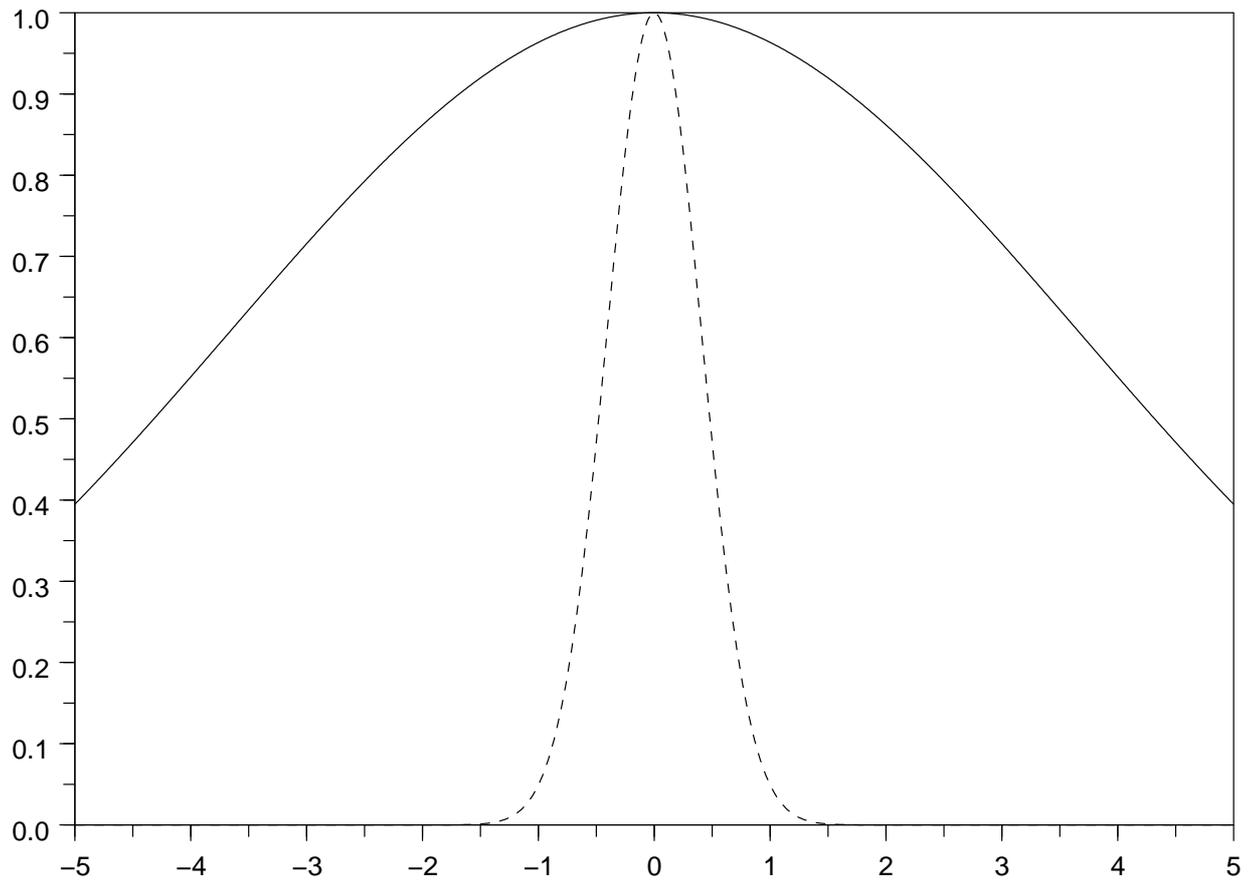


FIGURA 2.2: Curva de dispersión y pérdidas. La curva en línea a trazos corresponde a una distancia $z = 10km$, y La curva en línea cotinua corresponde a una distancia $z = 300km$.

que se puede enviar por una canal de comunicación, a través del parámetro BL , el cual se calcula con base en el ancho del paquete luego de la propagación.

Parte II

ÓPTICA TEMPORAL

Introducción

Típicamente en la detección de señales se desea recuperar una información que porta la misma, la cual ha sido corrompida por la transmisión en un canal ruidoso. Además la señal al ser *a priori* desconocida puede ser vista también como un ruido. Esto conduce al problema de separar un ruido de otro ruido, y al modelo de las señales por funciones aleatorias, cuyo formalismo es también aplicable en el caso de señales deterministas.

En el tratamiento de fenómenos espacio–temporales es útil llevar el problema a un espacio de variables reducidas. La función $f(t)$, del tiempo, se escala tal que $f'(t') = f(t/\Lambda)$, donde t' es una variable adimensional y Λ es un factor de escala que tiene dimensiones de tiempo. Así, el tratamiento que sigue es en variables reducidas, pero se seguirá escribiendo t en lugar de t' para aliviar la notación y recordar que se trata de una variable asociada al tiempo.

En el capítulo 4 se aborda una aplicación clásica en óptica; el estenope desde un punto de vista ondulatorio con base en la teoría metaxial y la transformación de Fourier fraccionaria. Se ha retomado el concepto de estenope para en aplicaciones de super resolución de imágenes [58], también en aplicaciones como “Photon Sieve”, la cual consiste en un cantidad de huecos ubicados de forma aleatoria que permiten focalizar rayos-X. Este tipo de aplicaciones no pueden tratarse con óptica convencional por la alta absorción de los materiales.

Con el propósito de formalizar las bases para un tratamiento de señales aleatorias, mediante un análisis de Fourier fraccionario, se consideran algunos elementos que se consideran básicos en tales tratamientos [35]. En el capítulo 3 se desarrollan algunos conceptos básicos de funciones aleatorias, para luego en el capítulo 5 deducir un teorema del muestreo para señales aleatorias de α -banda limitada. La convolución y correlación fraccionaria puede ser útiles para tratar el filtrado de señales aleatorias.

Capítulo 3

Analogía dispersión difracción

La analogía entre el fenómeno de difracción (ver apéndice B) y dispersión ha sido ampliamente tratada. De acuerdo a esta analogía y al enfoque dado por Bonnet y Pellat-Finet [9, 8, 43], se muestran algunos elementos espacio-temporales de la óptica, como son haces gaussianos y paquetes de ondas gaussianos, compensación de dispersión en fibras ópticas [49]. Usando los trabajos realizados por R. Torres, donde desarrolla el teorema del muestreo fraccionario, se puede mostrar su equivalente temporal [56].

3.1. Difracción Metaxial

Sea \mathcal{A} un emisor esférico con radio de curvatura R_A y \mathcal{B} un receptor esférico de radio de curvatura R_B a una distancia D (medida de vértice a vértice). Un punto sobre la esfera \mathcal{A} es representado por un vector bidimensional $\vec{r} = (x, y)$ de módulo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, siendo $dr = dx dy$. Según la teoría escalar de la difracción, si λ es la longitud de onda, la transferencia del campo desde el emisor \mathcal{A} hasta el receptor \mathcal{B} (ver apéndice B), se escribe como

$$U_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \int_{R^2} \exp \left[-\frac{i}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r} \right] U_A(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.1)$$

3.1.1. Parámetros y equivalencias gráficas

La analogía entre la ecuación (2.21) y (3.1) es directa, se diferencian en que la primera es unidimensional y la segunda es bidimensional (la diferencia de signos proviene de la definición de la transformada de Fourier temporal y espacial con signos opuestos). El parámetro temporal t_z es equivalente al radio de curvatura en el caso espacial y $1/t_z$ equivale al radio de curvatura, lo cual se llamará radio de curvatura temporal. El parámetro Z es un tiempo, el cual está relacionado con la distancia de propagación z en la línea de transmisión; esto es equivalente a la distancia de propagación D desde el emisor al receptor en el fenómeno de difracción.

CUADRO 3.1: Equivalencia entre variables y parámetros en difracción y en líneas de transmisión

VARIABLES Y PARÁMETROS ESPACIALES:	\vec{r}	\vec{s}	λ	D	R_A	R_B
VARIABLES Y PARÁMETROS TEMPORALES:	t'	t	Λ	Z	t_0	t_z

Una equivalencia gráfica entre funciones *chirpeadas* en teoría de la difracción y en teorías de líneas de transmisión se muestra en la figura 3.1. La equivalencia entre difracción de Fresnel y la propagación en una línea de transmisión ver figura (3.2). La difracción toma lugar entre un emisor esférico \mathcal{A} y un receptor esférico \mathcal{B} , separados una distancia D . En la teoría de dispersión en líneas de transmisión, la amplitud del campo sobre \mathcal{A} se reemplaza por la amplitud compleja *chirpeada* $U_0(t)$ a la abscisa $z = 0$ y la amplitud del campo sobre \mathcal{B} se reemplaza por la amplitud compleja *chirpeada* $U_z(t)$ a la abscisa z .

3.1.2. Transformación de Fourier

Una transformada de Fourier corresponde a una difracción de Fraunhofer y puede ser observada en infinito si el emisor es un emisor plano. En el dominio temporal, un paquete de onda es un plano si su amplitud compleja no está *chirpeada*. Se concluye que la transformada de Fourier de una amplitud compleja no *chirpeada* puede ser observada en infinito, esto es, en la práctica se consigue al final de una línea de transmisión muy larga. La transformada de Fourier es observada a una distancia z finita si a la entrada la amplitud compleja ha sido multiplicada por

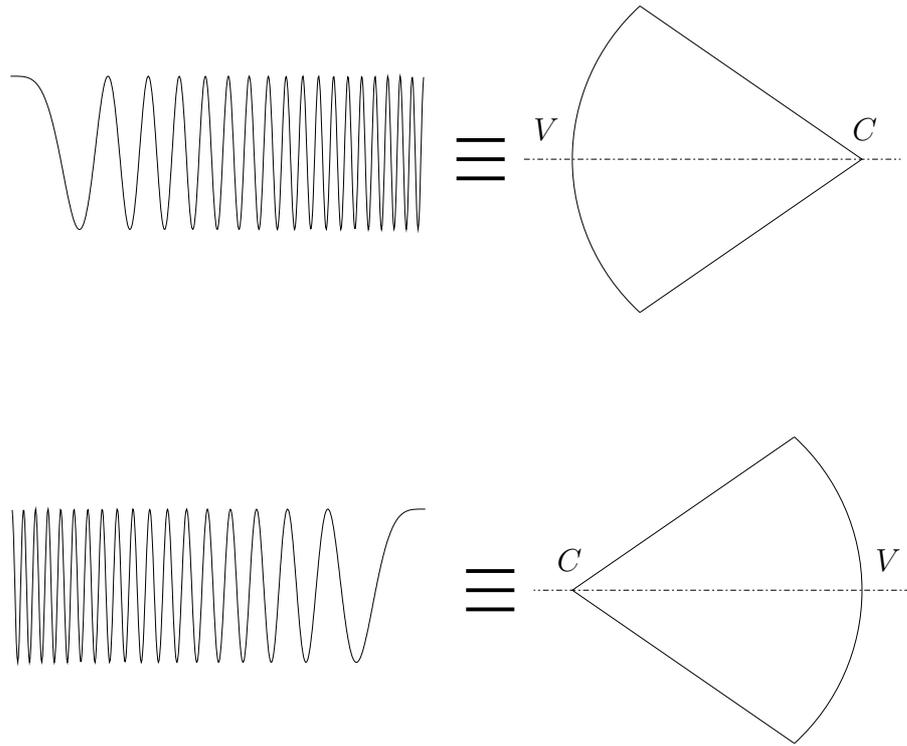


FIGURA 3.1: a) Un incremento de frecuencia corresponde a un radio de curvatura: $VC > 0$ (Arriba), b) Una disminución de frecuencia corresponde a un radio de curvatura: $VC < 0$ (Abajo)

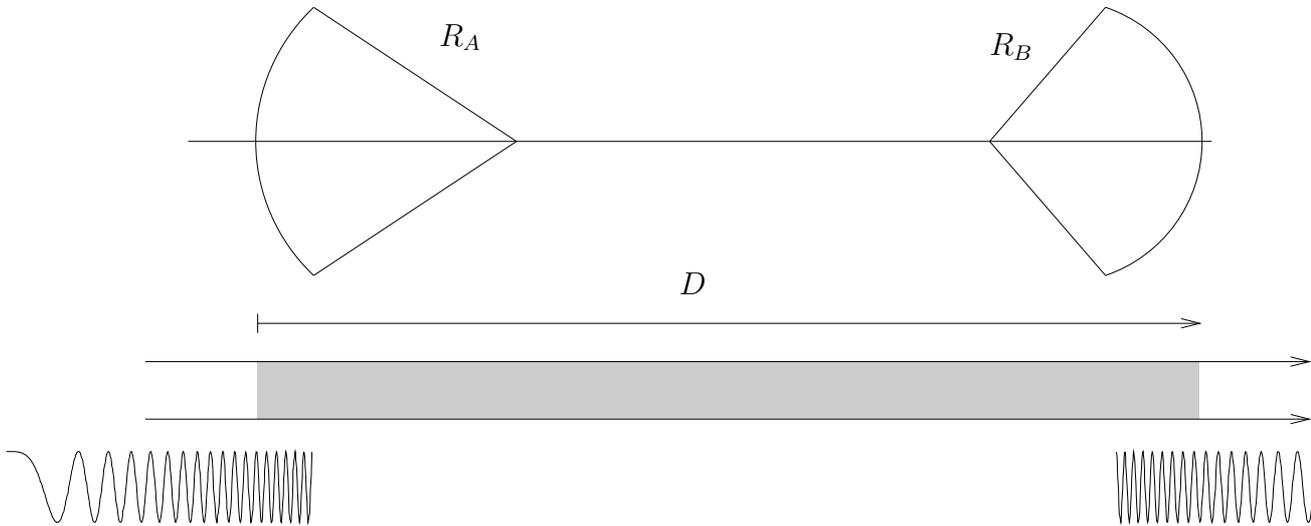


FIGURA 3.2: Equivalencia entre difracción de Fresnel y la propagación de un paquete de onda en una línea de transmisión dispersiva

una función chirp, cuyo radio de curvatura es t_0 , tal que $t_0 = Z = \beta_2 z / 2\pi\Lambda$; a la distancia z el radio temporal de curvatura de la amplitud compleja es $t_z = -t_0$

3.2. Haces gaussianos y paquetes de ondas gaussianos

Un haz gaussiano puede ser considerado como un rayo ortogonal a una familia continua de superficies de onda esféricas, no concéntricas, sobre las cuales las amplitudes de los campos son descritas por funciones gaussianas $\exp[-(x^2 + y^2)/w^2s]$; el parámetro w es el radio transversal del haz sobre s . Un haz gaussiano tiene una “cintura” \mathcal{W}_0 , que se encuentra sobre un plano y cuyo radio transversal es $w_0 = \text{Min}(w)$. Se usará la siguiente propiedad de los haces gaussianos. A una distancia d desde el plano de la cintura, el radio de curvatura de la superficie de onda (esférica) es R y el radio transversal del haz, es decir w , está dada por

$$R = -d - \frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2 d}, \quad w^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2 w_0^2}. \quad (3.2)$$

La equivalencia entre haces gaussianos y paquetes de ondas gaussianos se ilustra en la figura (3.3). Por analogía entre difracción y dispersión, se concluye que la propagación de un paquete de ondas en una línea de transmisión, cuya amplitud compleja es gaussiana, tiene un “cintura temporal” a alguna distancia z desde la línea de entrada, esto es, un ensanchamiento temporal mínimo. Si la distancia temporal Z correspondiente a z es positiva, el paquete de onda se vuelve más estrecho, hasta que alcanza su cintura; entonces este se vuelve a ensanchar. Si $Z < 0$, la “cintura temporal” es virtual y el paquete de onda solo puede ensancharse. Se denota L al ancho medio temporal (o ensanchamiento) de el paquete de ondas a la distancia z y L_0 a la distancia $z = 0$, entonces se puede trasponer la ecuación (3.2) al dominio temporal: Cuando un paquete de onda gaussiano de ancho $2L_0$ se propaga a lo largo de la distancia z en la línea de transmisión, su ancho al final de la línea es $2L$ tal que

$$L^2 = L_0^2 + \frac{\Lambda^2 Z^2}{\pi^2 L_0^2}. \quad (3.3)$$

Este tiene una modulación chirp dada por

$$t_z = -Z - \frac{\pi^2 L_0^2}{\Lambda^2 Z}. \quad (3.4)$$

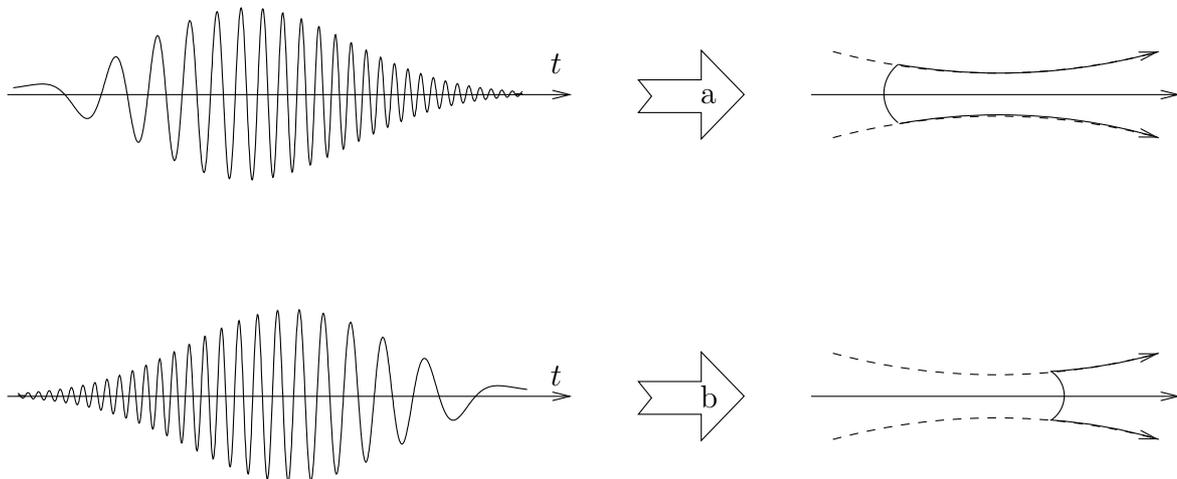


FIGURA 3.3: Equivalencia entre paquetes de ondas gaussianos *chirpeados* y haces gaussianos

La usual forma de la ecuación (3.3), como es usada en comunicaciones ópticas, es deducida desde las definiciones de Λ y Z como

$$L^2 = L_0^2 + \frac{\beta_2^2 z^2}{4\pi^4 v_0^2 L_0^2}. \quad (3.5)$$

Puede mostrarse que para un z dado hay un valor $L_0 = L_m$ tal que el ensanchamiento $\Delta L = L - L_m$ es mínimo:

$$L_m = \sqrt{\frac{|\beta_2 z|}{2\pi^2 v_0}}. \quad (3.6)$$

3.3. Compensación de dispersión en fibras ópticas

Una forma usual de transportar haces gaussianos con lentes es como se muestra en la figura (3.4). La cintura del haz es periódicamente mantenido tal que la divergencia del haz se mantiene durante una gran distancia desde el haz inicial. La configuración puede ser traspuesta periódicamente manteniendo el ancho temporal de un paquete de onda gaussiano, usando “lentes temporales” como se mostrará.

Cómo obtener una lente temporal? Una solución involucra dos fibras ópticas cuyo parámetro de dispersión de segundo orden tiene signo opuesto. Lo cual puede

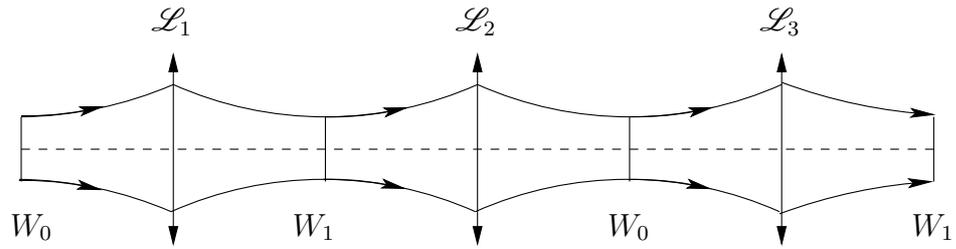


FIGURA 3.4: Transportando un haz gaussiano con lentes. Si $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_1$

entenderse con ayuda de la figura (3.1). Cambiando el signo de β_2 se cambia el signo de la curvatura de la esfera. El efecto es indicado en la figura (3.5). (La noción de “lente temporal” ha sido introducido en [24]. Implementaciones ópticas han sido también propuestas; las cuales son diferentes a lo aquí expuesto).

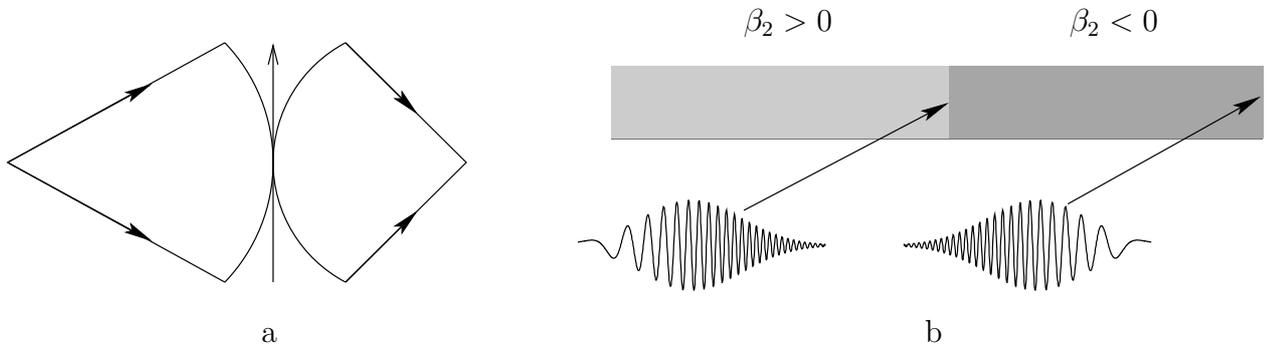


FIGURA 3.5: a) Una lente convergente transforma una onda esférica divergente en una convergente. b) Una “lente temporal” puede hacerse con dos fibras ópticas con coeficientes de dispersión β_2 con signos opuestos

La compensación de dispersión en fibras ópticas para comunicaciones ópticas puede hacerse usando “lentes temporales” como se muestra en la figura (3.6). Los dispositivos de compensación de dispersión como es usado en links de comunicaciones [34, 50], pueden ser interpretados usando esta analogía.

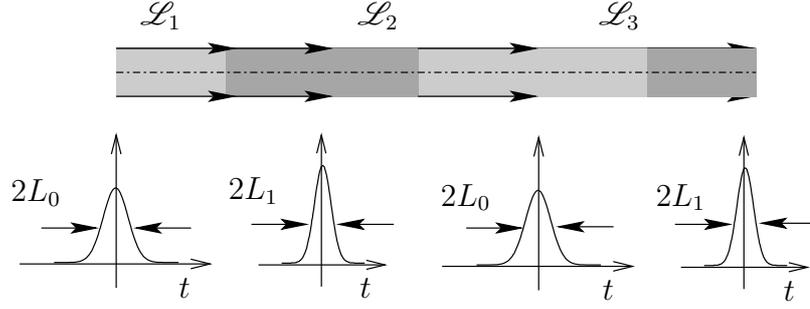


FIGURA 3.6: Transportando un paquete de ondas con una “lente temporal”. El paquete se ensancha y es periódicamente mantenido tal que la dispersión es compensada. La compensación de la dispersión en enlaces de fibras ópticas puede lograrse usando fibras ópticas como lentes temporales.

3.4. Teorema del muestreo y peinilla temporal

Sea V un función α -banda limitada con ancho de banda B , el teorema del muestreo fraccionario se expresa

$$V(\tau) = e^{i\pi\tau^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) e^{-i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(\tau - n \frac{\sin \alpha}{B}\right), \quad (3.7)$$

una versión muestreada de V se escribe

$$\hat{V}(\tau) = V(\tau) \frac{\sin \alpha}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - n \frac{\sin \alpha}{B}\right), \quad (3.8)$$

$$= V(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-2i\pi\tau n \frac{B}{\sin \alpha}\right] \quad (3.9)$$

donde $\sin \alpha/B$ es la tasa óptima de muestreo según el teorema del muestreo fraccionario.

Tomando en cuenta la expansión en series de Taylor de la constante de propagación β

$$\beta(\nu) = \beta_o + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}_0) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu}_0)^2 + \dots \quad (3.10)$$

Para dos fibras ópticas i y j desplazadas una cantidad $\Delta\nu \ll B$ ver figura (3.7), los parámetros $\beta_1^{(i)} \approx \beta_1^{(j)}$ y $\beta_2^{(i)} \approx \beta_2^{(j)}$, así para m desplazamientos, tal que $m\Delta\nu \ll B$

se tiene que todas las constantes de propagación y sus respectivas velocidades de grupo son aproximadamente iguales, entonces

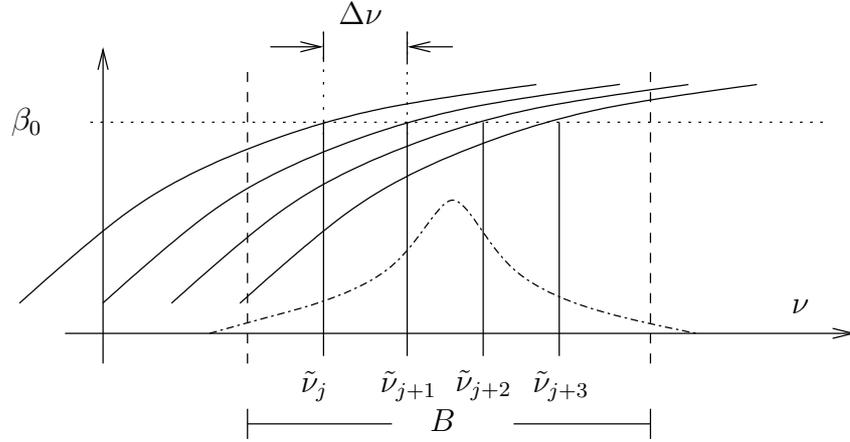


FIGURA 3.7: Fibras desplazadas

$$\beta^{(n)}(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}_n) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu}_n)^2 + \dots \quad (3.11)$$

donde $\tilde{\nu}_n = \tilde{\nu}_0 + n\Delta\nu$. Luego la amplitud del campo a la distancia z para cada fibra queda

$$E_z(t)^{(n)} = e^{-i\beta_0 z} e^{2i\pi(\nu_0 + n\Delta\nu)t} B_z \left(t - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right). \quad (3.12)$$

Al incidir un paquete de ondas sobre un divisor de haz que produce m paquetes de ondas.

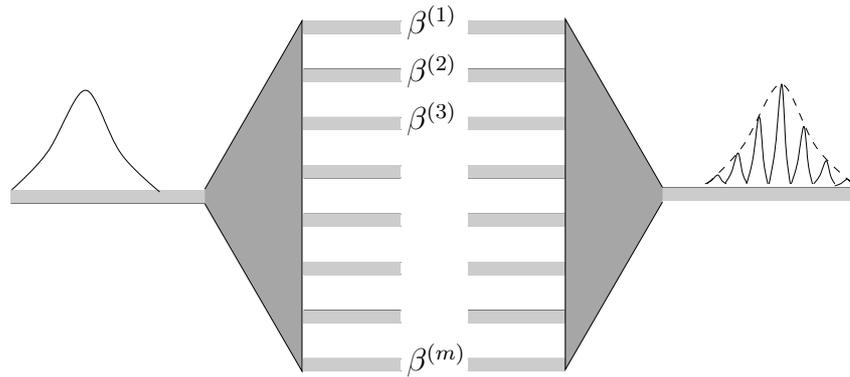


FIGURA 3.8: Esquema Peinilla temporal

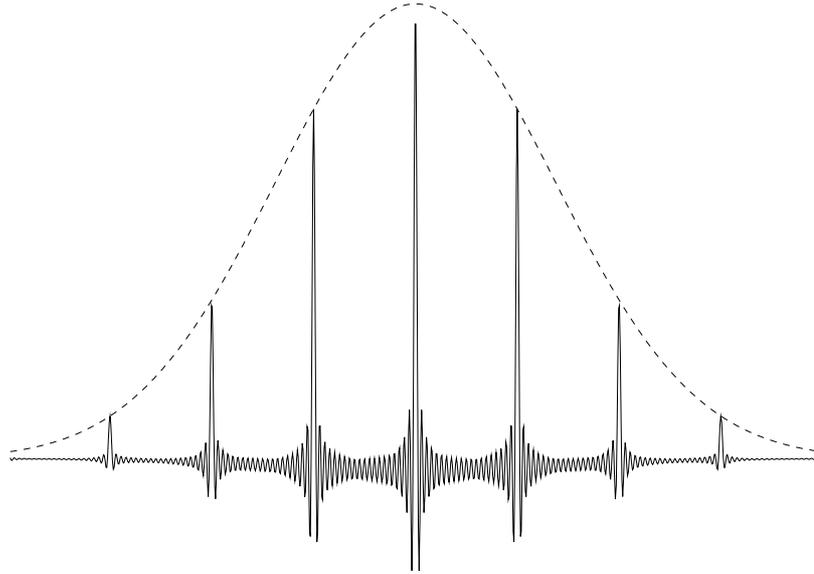


FIGURA 3.9: Peinilla temporal simulada

Si cada paquete de onda se propaga, por una fibra de dispersión trasladada, una distancia z según lo expuesto antes y luego son recombinados para obtener

$$E_z(t) = e^{-i\beta_0 z} B_z \left(t - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right) e^{2i\pi\nu_0 t} \sum_{n=1}^m e^{2i\pi n \Delta \nu t}, \quad (3.13)$$

esta sumatoria es aproximadamente una peinilla de Dirac temporal, ver figura (3.8), [21, 22].

En la figura (3.9) se simula una peinilla de Dirac temporal, solo se muestra la suma de unos cuantos armónicos y se aprecia que empiezan a aparecer las muestras.

3.5. Distribución de Wigner

La distribución de Wigner para la envolvente compleja de un paquete de ondas, se puede definir en el sistema de variables reducidas τ y τ' , en la siguiente forma

$$W_{V_0}(\tau, \tau') = \int V_0(\tau + \tilde{\tau}/2) V_0^*(\tau - \tilde{\tau}/2) e^{-i2\pi\tau'\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}, \quad (3.14)$$

de igual forma a la distancia z

$$W_{V_z}(\tau, \tau') = \int V_z(\tau + \tilde{\tau}/2) V_z^*(\tau - \tilde{\tau}/2) e^{-i2\pi\tau'\tilde{\tau}} d\tilde{\tau}, \quad (3.15)$$

se puede probar que

$$W_{V_z}(\tau, \tau') = W_{V_0}(\tau \cos \alpha - \tau' \sin \alpha, \tau \sin \alpha + \tau' \cos \alpha), \quad (3.16)$$

donde α es el ángulo correspondiente a la distancia z

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{t_0 - \beta_2 z}{\beta_2 z}, \quad (3.17)$$

la dispersión se puede tratar como una rotación de la distribución de Wigner [39].

3.6. Conclusiones

Aunque las técnicas de compensación de la dispersión han encontrado aplicaciones que son sin lugar a dudas importantes, aquí se ha visto que trabajar con las dispersión también arroja posibles aplicaciones que de otro modo pueden ser remotas, un ejemplo de ello es la noción de peinilla temporal.

Aquí se muestra que estas analogías pueden extenderse hasta el punto que buena parte de los resultados conocidos en difracción encuentran su equivalente en dispersión, como teorema del muestreo fraccionario, convolución fraccionaria, lo que conduce a lo que se llama óptica temporal basada en el fenómeno de dispersión.

Es interesante analizar que una “lente temporal” puede representarse por una interface entre dos dieléctricos de constante de propagación de signos opuestos, esto concuerda muy bien con la técnica clásica de compensación de dispersión mediante fibras compuestas por dispersiones alternadas ver figura 3.6, equivalente a la colimación de haces gaussianos en el espacio.

Una posible aplicación se basa en el teorema del muestreo cuyo equivalente en el dominio temporal se puede implementar haciendo uso de divisores de haz a fibra óptica. Esta técnica puede ser utilizada en el diseño de peinillas temporales para la medición de tiempos cortos, también puede usarse en la producción de pulsos ultra cortos.

Una representación de Wigner de los paquetes de onda puede ser implementada, con base en este enfoque se pueden formalizar múltiples tratamientos, como por ejemplo, analizadores de espectro, además de tratamientos asociados a filtrados.

Capítulo 4

Estenope

Aquí se trata con un fenómeno clásico en óptica, como es el estenope [26, 47]. Se aborda desde un punto de vista ondulatorio con base en la teoría metaxial, encontrándose las condiciones para formar la imagen del objeto, el cual en este trabajo, se considera no centrado en el hueco. En una primera parte se desarrollan los cálculos en el dominio espacial y luego se hace la trasposición al dominio temporal. Por último se calcula el tamaño del hueco apropiado usando el criterio de Rayleigh.

4.1. Estenope espacial

El interés es hallar el compromiso entre distancia objeto, distancia imagen y el tamaño del hueco de tal forma que el campo $U_B(\mathbf{r}')$ sobre la esfera de radio de curvatura R_B , corresponda al campo imagen de $U_A(\mathbf{r})$ ubicado sobre la esfera de radio de curvatura R_A , luego de haberse propagado pasando a través del hueco ubicado en el plano P [27, 28], ver figura (4.1). Para resolver el estenope se trata el caso donde el objeto y la imagen no se encuentran centrados sobre el hueco, ver figura (4.2).

Para hallar el campo U_B , primero se encuentra el campo sobre la curva \mathcal{C}

$$U_C(\mathbf{s}) = -\frac{i}{\lambda d} \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_C} \right) s^2 \right] \int U_A(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda d} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

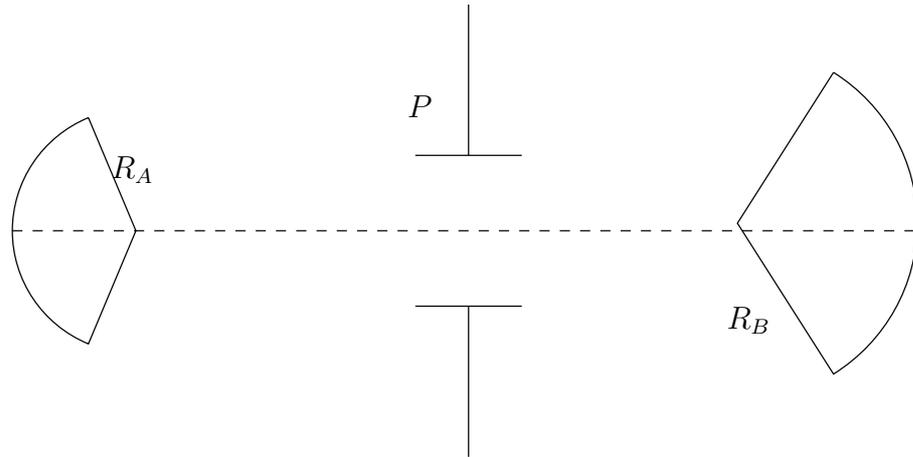


FIGURA 4.1: Estenope

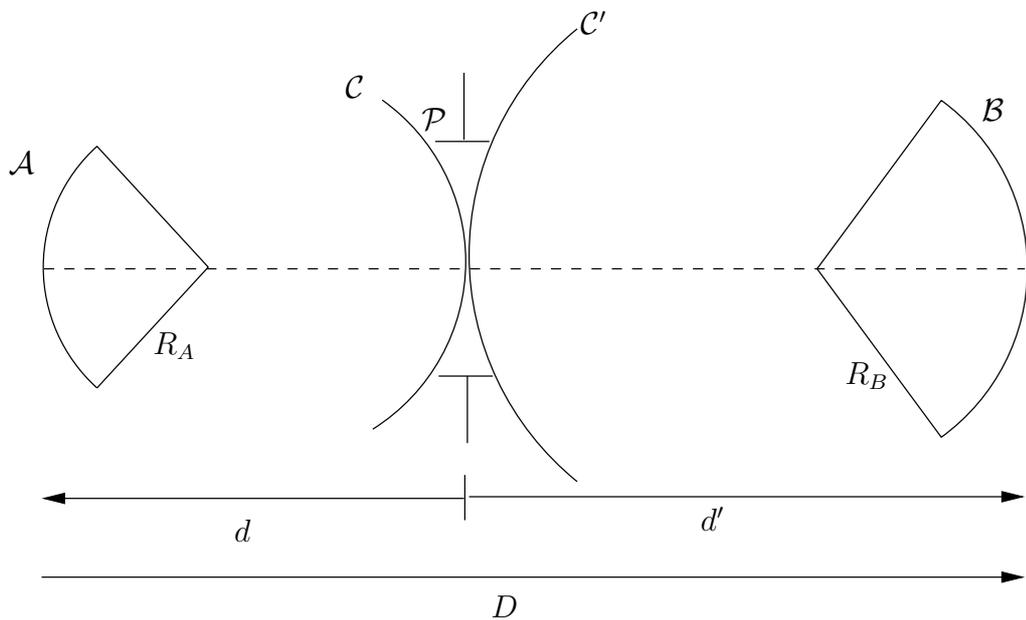


FIGURA 4.2: “Ley de conjugación” para el estenope

luego se calcula el campo de la curva \mathcal{B}

$$U_B(\mathbf{r}') = \frac{i}{\lambda d'} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right] \int U_{C'}(\mathbf{s}) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_{C'}} - \frac{1}{d'} \right) s^2 \right] \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda d'} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}' \right] ds. \quad (4.2)$$

Para expresar la transferencia general del campo desde la esfera \mathcal{A} hasta la esfera \mathcal{B} , se asume que las dimensiones transversales de las curvas \mathcal{C} y \mathcal{C}' son pequeñas con respecto a las dimensiones transversales del hueco que cumple el criterio de

Rayleigh, de tal forma que el campo $U_{C'} \approx U_C$

$$U_B(\mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^2 dd'} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right] \int U_A(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \\ \times \int \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_{C'}} - \frac{1}{R_C} - \frac{1}{d'} \right) s^2 \right] \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \mathbf{s} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{d'} - \frac{\mathbf{r}}{d} \right) \right] ds \quad (4.3)$$

Se define

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_{C'}} - \frac{1}{R_C} - \frac{1}{d'} \right) s^2 \right] \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \mathbf{s} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{d'} - \frac{\mathbf{r}}{d} \right) \right] ds, \quad (4.4)$$

luego

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = ie^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{d'} - \frac{1}{d} - \frac{1}{R_{C'}}}} \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(\frac{\mathbf{r}'}{d'} - \frac{\mathbf{r}}{d})^2}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{d'} - \frac{1}{d} - \frac{1}{R_{C'}}} \right], \quad (4.5)$$

sustituyendo $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en la expresión dada para el campo imagen ecuación (4.3), resulta

$$U_B(\mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^2 dd'} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right] \int U_A(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] d\mathbf{r} \quad (4.6)$$

Para que $U_B(\mathbf{r}')$ corresponda a una versión escalada de $U_A(\mathbf{r})$, es necesario que la función $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sea un delta de dirac. Para tal propósito se tomará en cuenta la siguiente definición

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{1}{c}} e^{i\pi u^2/c}. \quad (4.7)$$

Se define

$$c = \frac{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{d'} - \frac{1}{d} - \frac{1}{R_{C'}}}{\lambda} \\ u = \frac{\frac{\mathbf{r}'}{d'} - \frac{\mathbf{r}}{d}}{\lambda}, \quad (4.8)$$

por tanto

$$I(u) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{c}} \exp \left[\frac{i\pi u^2}{c} \right], \quad (4.9)$$

en el límite cuando $c \rightarrow 0$ se tiene $I(u) = \delta(u)$. Bajo estas condiciones se escribe la amplitud del campo imagen

$$\begin{aligned} U_B(\mathbf{r}') &= \frac{1}{\lambda^2 d^2 g_v} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right] \int U_A(\mathbf{r}) \delta \left(\frac{\mathbf{r}'}{g_v} - \mathbf{r} \right) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 d^2 g_v} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{d'} - \frac{1}{R_A g_v^2} - \frac{1}{d g_v^2} \right) r'^2 \right] U_A \left(\frac{\mathbf{r}'}{g_v} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $g_v = \frac{d'}{d}$. De la ecuación (4.10) se nota que la imagen se encuentra sobre una esfera de radio

$$R_B = \frac{d' d R_A g_v^2}{d'(d + R_A) - d R_A g_v^2} = \frac{d'^2 R_A}{d(d + R_A) - R_A d'}, \quad (4.11)$$

y

$$R_A = \frac{d^2 R_B}{d'(d' + R_B) - R_B d}. \quad (4.12)$$

Finalmente el campo imagen se escribe

$$U_B(\mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^2 d^2 g_v} U_A \left(\frac{\mathbf{r}'}{g_v} \right), \quad (4.13)$$

siendo U_B la imagen geométrica de U_A , con un aumento lateral de los vértices dado por g_v , con

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{R_C'} + \frac{1}{R_C} - \frac{1}{d} = 0. \quad (4.14)$$

Esta expresión corresponde a una “ley de conjugación” para el estenope. La cual da una relación entre la distancia imagen d' y la distancia objeto d , pero hace falta conocer R_C la cual es una curva intermedia entre \mathcal{A} y \mathcal{B} , como se muestra en la figura (4.2). Esta curva debe cumplir el principio de Huygens-Fresnel.

Hallando el campo imagen por el método de la transformación de Fourier fraccionaria, ver figura (4.2), este método permite describir la propagación del campo desde \mathcal{A} hasta \mathcal{B} mediante una transformación de Fourier fraccionaria de orden γ , de igual manera describir la propagación del campo de \mathcal{A} a \mathcal{C} con un orden α y de \mathcal{C} a \mathcal{B} por un orden β . Se puede hablar de la composición de estas dos transformaciones si la curva \mathcal{C} cumple el principio de Huygens-Fresnel. La curva \mathcal{C} debe ser tal que cumpla el principio de Huygens-Fresnel [20]

$$R_C = \frac{d(R_B + d')(R_A - D) + d'(R_B + D)(R_A - d)}{d(R_A - D) + d'(D + R_B)}, \quad (4.15)$$

para esta curva se cumple la composición de los índices, que se escriben como $\gamma = \alpha + \beta$, ver figura (4.3). Teniendo en cuenta que las curvas \mathcal{C} y \mathcal{C}' son pequeñas con respecto a las dimensiones transversales del hueco que cumple el criterio de Rayleigh, el campo $U_{\mathcal{C}'} \approx U_{\mathcal{C}}$, de igual manera el orden fraccionario asociado a la propagación de \mathcal{C}' a \mathcal{B} es $\beta' \approx \beta$.

En la propagación de \mathcal{A} a \mathcal{C} se tiene, [20, ecuación 14]

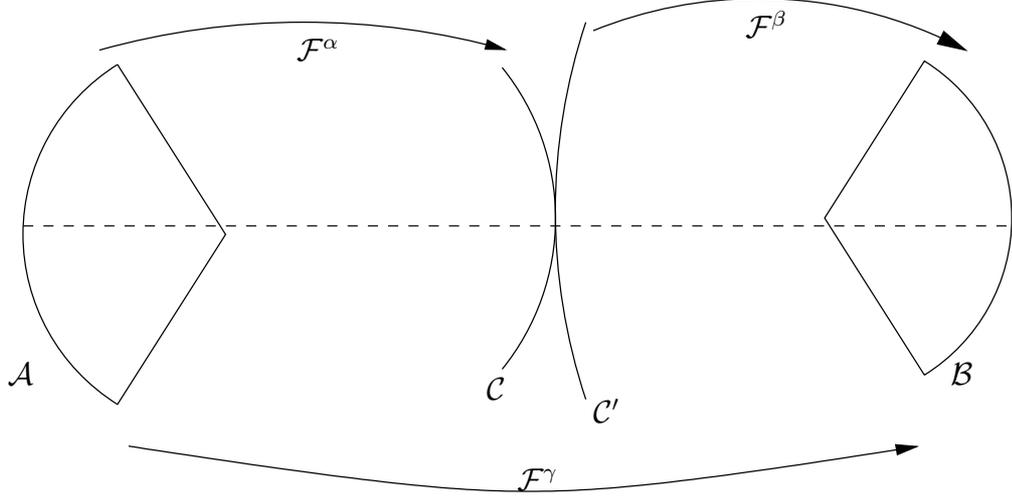


FIGURA 4.3: Concordancia con el principio de Huygens-Fresnel

$$\cot^2(\alpha) = \frac{(D + R_B)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_B)}, \quad (4.16)$$

teniendo en cuenta que $\alpha = \pi - \beta$, se encuentra

$$\cot^2(\alpha) = \varepsilon'^2 \frac{(\mu' - 1)^2}{\mu'^2}, \quad (4.17)$$

igualando las ecuaciones (4.16) y (4.17)

$$\frac{(D + R_B)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_B)} = \varepsilon'^2 \frac{(\mu' - 1)^2}{\mu'^2}, \quad (4.18)$$

donde $\mu' = \frac{d'}{R_{C'}}$, de [20, ecuación 34] se obtiene ε'

$$\varepsilon'^2 = \left[\varepsilon \frac{d(R_A - D) + d'(R_B + D)}{D(D + R_B)} \right]^2, \quad (4.19)$$

con estas relaciones se encuentra

$$R_{C'} = \frac{d'[d(R_A - D) + d'(R_B + d)] - d'(R_A - D)(D + R_B)}{d(R_A - D) + d'(R_B + D)}. \quad (4.20)$$

Nótese que R_C de la ecuación (4.15) y $R_{C'}$ de la ecuación (4.20) son diferentes.

En la propagación desde \mathcal{C} a \mathcal{C}' , se tiene

$$U_{C'}(\mathbf{s}) = U_C(\mathbf{s}) \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_{C'}} - \frac{1}{R_C} \right) s^2 \right] = U_C(\mathbf{s}) \exp[-i\phi(\mathbf{s})], \quad (4.21)$$

para que U_C sea igual a $U_{C'}$ se debe cumplir el criterio de Rayleigh para la fase $\phi \leq \pi/2$ [12], permitiendo despreciar los cambios de fase bajo dimensiones transversales dadas por

$$s = \sqrt{\frac{\lambda R_C R_{C'}}{2(R_C - R_{C'})}}. \quad (4.22)$$

El diámetro máximo del hueco h es

$$h = \sqrt{\frac{2\lambda R_C R_{C'}}{(R_C - R_{C'})}}. \quad (4.23)$$

Para poder escribir el tamaño del hueco en términos de la distancia imagen y distancia objeto es necesario usar la relación de conjugación para el estenope expresada en la ecuación (4.14), resultando

$$h = \sqrt{\frac{2d}{d-d'}} \sqrt{\lambda d'}. \quad (4.24)$$

Esta es una forma explícita de la formula de Jozef Petzval y Lord Rayleigh.

4.2. Casos particulares

- $R_A = -d$ (Objeto centrado en el hueco)

$$R_B = -d', \quad (4.25)$$

lo que significa que tanto el objeto como la imagen se encuentran centrados en el hueco.

- Para $R_A \rightarrow \infty$

$$\lim_{R_A \rightarrow \infty} R_B = \frac{d'^2}{d - d'}. \quad (4.26)$$

- Para $R_B \rightarrow \infty$

$$R_A = \frac{d^2}{d' - d} \quad (4.27)$$

4.3. Pinhole temporal

El equivalente temporal para el tamaño del hueco, corresponde

$$\phi = \sqrt{\frac{2Z}{Z - Z'}} \sqrt{\Lambda Z'}, \quad (4.28)$$

en términos del coeficiente de dispersión β_2

$$\phi = \sqrt{\frac{\beta_2 z z'}{z - z'}}, \quad (4.29)$$

siendo z la distancia objeto y z' la distancia imagen.

Tomando el signo del coeficiente de dispersión β_2 en la ecuación (4.29), se encuentra lo siguiente

- ▷ Cuando hay dispersión normal ($\beta_2 > 0$), con z negativo y z' positivo, el tamaño del hueco es real.
- ▷ Cuando hay dispersión anómala ($\beta_2 < 0$), con z negativo y z' positivo, se obtiene un tamaño de hueco imaginario, lo cual no corresponde a un estenope.

4.4. Conclusiones

Se encuentra lo que se llama una “ley de conjugación”, dada por la expresión (4.14), la cual incluye las curvas R_C , $R_{C'}$ y es a través de esta relación que se puede calcular el radio de curvatura R_B , sobre el cual se encuentra la imagen.

En este capítulo se desarrolla de forma original un tratamiento para el estenope basado en óptica ondulatoria. Como resultado se encuentra el tamaño del hueco, dado en la ecuación (4.24), en términos de la distancia objeto y distancia imagen que cumple el criterio de Rayleigh.

Un aporte de este tratamiento es la determinación del radio de curvatura sobre el cual se encuentra la imagen, ecuación (4.11). La determinación de este radio toma importancia cuando se requiera hacer registros holográficos, si no se conoce la fase apropiada entonces el holograma no registra la información deseada. También es útil cuando se tienen sistemas ópticos en cascada. Por ejemplo si en alguna etapa del sistema se necesita hacer algún filtrado, si no se tiene en cuenta esta fase entonces se va a deteriorar la información ya que va a producir una convolución adicional.

Uno de los posibles usos del estenope temporal es la eliminación de la dispersión, creando la imagen del paquete de ondas usando una ventana temporal de acuerdo a lo calculado en la ecuación (4.29).

Capítulo 5

Coherencia del campo dispersado

El análisis de Fourier fraccionario ha probado ser una herramienta muy útil, en campos como la óptica, tratamiento de señales y mecánica cuántica, entre otras [37,31,44,38,20,39] y estas aplicaciones han tenido un incremento continuo durante la última década [14].

La transformación de Fourier fraccionaria puede ser interpretada como una rotación de la distribución de Wigner [31]. Esta propiedad permite tratar la eliminación de ruidos tipo chirp, se conoce que este ruido no es estacionario. Se ha concentrado la atención en el tratamiento de señales deterministas, para esto se han definido operaciones de correlación, convolución fraccionarias [36, 5, 59, 2, 55], espectro de potencia fraccionario [4, 40, 3] y el teorema del muestreo fraccionario [57, 17, 54] han sido reportados.

Las señales aleatorias no son funciones bien definidas y su aleatoriedad puede cambiar en el tiempo por lo tanto técnicas estadísticas son necesarias para analizar su comportamiento. Tao et al. [51] han mostrado una aplicación de la transformación de Fourier fraccionaria a las señales aleatorias, con base en el teorema de convolución fraccionario propuesto por Zayed [59]. Sin embargo en este trabajo se han usado las definiciones de convolución y correlación fraccionaria definidos por [55, 53], la cual es una forma completamente equivalente.

Aquí se encuentra una expresión explícita de la covarianza y la autocorrelación fraccionaria estadística. Primero se introduce el concepto de señales aleatorias α estacionarias y luego se muestra el teorema del muestreo para señales aleatorias.

Algunos trabajos se han realizado en coherencia y la transformación de Fourier fraccionaria [52]. En este capítulo se muestra un estudio de la coherencia del campo luego que se ha dispersado, hallando una relación entre la densidad espectral de potencia y la densidad espectral de potencia fraccionaria.

5.1. Convolución y correlación fraccionaria

Ya que la dispersión de un paquete de ondas se puede escribir como una transformación de Fourier fraccionaria puede ser útil definir la operación de convolución fraccionaria [53] (ver apéndice C) para dos envolventes complejas f y g

$$[f *_{\alpha} g](\tau) = \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\mathcal{F}_{\alpha}[f](\tau') \mathcal{F}_{\alpha}[g](\tau') e^{i\pi\tau'^2 \cot \alpha} \right] (\tau). \quad (5.1)$$

Esta operación tiene su forma integral dada por

$$[f *_{\alpha} g](\tau) = \int f(\tilde{\tau}) g(\tau - \tilde{\tau}) e^{i2\pi\tilde{\tau}(\tau - \tilde{\tau}) \cot \alpha} d\tilde{\tau}. \quad (5.2)$$

en $\alpha = \pi/2$ se encuentra la convolución estándar.

5.1.1. Correlación fraccionaria

La correlación fraccionaria para dos envolventes complejas se escribe

$$[f \otimes_{\alpha} g](\tau) = \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\mathcal{F}_{\alpha}[f](\tau') \overline{\mathcal{F}_{\alpha}[g](\tau')} e^{-i\pi\tau'^2 \cot \alpha} \right] (\tau), \quad (5.3)$$

y su forma integral es

$$[f \otimes_{\alpha} g](\tau) = \int f(\tilde{\tau}) \overline{g(\tilde{\tau} - \tau)} e^{-i2\pi\tilde{\tau}(\tilde{\tau} - \tau) \cot \alpha} d\tilde{\tau}. \quad (5.4)$$

5.2. Teorema de Wiener-Kintchinne

Aquí se encuentra una expresión explícita de la covarianza y la autocorrelación fraccionaria estadística. Primero se introduce el concepto de señales aleatorias α

estacionarias y se define la densidad α espectral de potencia y luego se muestra el teorema del muestreo para señales aleatorias.

5.2.1. Notación

La letra E es usada para denotar el valor esperado de una variable aleatoria. Sea $U(x)$ un proceso aleatorio, donde $U(x_1)$ es una variable aleatoria y $u(x)$ es una función de muestra. Se denota por $E\{U(x)\}$ el valor esperado de la variable $U(x)$. La función de covarianza se denota

$$K(x_2, x_1) = E\left\{U(x_2)\overline{U(x_1)}\right\}. \quad (5.5)$$

Si el proceso es estacionario de segundo orden entonces

$$[U \otimes U](\tau) = K(x_2 - x_1), \quad (5.6)$$

es la función de autocorrelación, donde $\tau = x_2 - x_1$. El promedio temporal de una función de muestra u se define

$$\langle u(x) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(x) dx. \quad (5.7)$$

5.2.1.1. Potencia promedio

$$\mathcal{P} = \langle |u(x)|^2 \rangle, \quad (5.8)$$

si $\mathcal{P} < \infty$ esto se llamará potencia de la señal.

5.2.2. Densidad α -espectral de potencias

Para la función de muestra $u(x)$ la función truncada u_T , tal que

$$u_T(x) = \begin{cases} u(x) & -\frac{T}{2} \leq x < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}. \quad (5.9)$$

Se define la densidad α -espectral de potencia de una función de muestra u por

$$S_u^\alpha(x') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{F}_\alpha[u_T](x')|^2}{T}. \quad (5.10)$$

Si el límite anterior existe, en este caso, la densidad α -espectral de potencia del proceso es definida

$$S_U^\alpha(x') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \{ |\mathcal{F}_\alpha[u_T](x')|^2 \}}{T}. \quad (5.11)$$

5.2.3. Señales aleatorias α -estacionarias

Siendo $U(x)$ un proceso aleatorio y F una función determinista, tal que si

$$F[U(x)] = U(x)e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \quad (5.12)$$

es estacionaria, entonces se dice que $U(x)$ es α -estacionaria de primer orden, Similarmente si

$$G[U(x)] = U(x)\overline{U(x-\tau)}e^{-2i\pi\tau(x-\tau)\cot \alpha}, \quad (5.13)$$

es estacionaria, siendo G también una función determinista, entonces se dice que $U(x)$ es α -estacionaria de segundo orden. Se define la función de autocovarianza fraccionaria para una señal aleatoria $U(x)$, por

$$K_U^\alpha(x, x-\tau) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E \left\{ u(x)\overline{u(x-\tau)}e^{-2i\pi\tau(x-\tau)\cot \alpha} \right\}, \quad (5.14)$$

si U es α -estacionaria de segundo orden, se tiene que $K_U^\alpha(x, x-\tau) = \Gamma_U^\alpha(\tau)$, donde Γ_U^α es la función de autocorrelación estadística fraccionaria.

Teorema 5.2.1. Si un proceso U es α -estacionario de segundo orden, la función de autocorrelación estadística fraccionaria $\Gamma_U^\alpha(\tau)$ y la densidad α -espectral de potencia S_U^α forman un par de transformadas de Fourier fraccionarias, tal que

$$\mathcal{F}_\alpha[\Gamma_U^\alpha](x') = C_\alpha S_U^\alpha(x')e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}. \quad (5.15)$$

desde (5.11) se escribe

$$\begin{aligned}
S_U^\alpha(x') &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_\alpha}{T} E \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} u(x) e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} e^{\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}} dx \right. \\
&\quad \left. \times \overline{C_\alpha} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{u(y)} e^{i\pi y^2 \cot \alpha} e^{\frac{-2i\pi x' y}{\sin \alpha}} dy \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_\alpha \overline{C_\alpha}}{T} \iint_{-T/2}^{T/2} dx dy e^{\frac{-2i\pi x' y}{\sin \alpha}} e^{\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}} \\
&\quad \times E \left\{ u(x) \overline{u(y)} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} e^{i\pi y^2 \cot \alpha} \right\}, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

x es reemplazada por t y y by $t - \tau$ entonces

$$\begin{aligned}
S_U^\alpha(x') &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_\alpha \overline{C_\alpha}}{T} \iint_{-T/2}^{T/2} dt d\tau e^{\frac{2i\pi \tau x'}{\sin \alpha}} e^{-i\pi \tau^2 \cot \alpha} \\
&\quad \times E \left\{ u(t) \overline{u(t - \tau)} e^{-2i\pi \tau(t - \tau) \cot \alpha} \right\}, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

usando la ecuación (5.14), se expresa

$$\begin{aligned}
S_U^\alpha(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} K_U^\alpha(t, t - \tau) dt \\
&\quad \times e^{\frac{2i\pi \tau x'}{\sin \alpha}} e^{-i\pi \tau^2 \cot \alpha} d\tau, \tag{5.18}
\end{aligned}$$

resultando

$$S_U^\alpha(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \langle K_U^\alpha(t, t - \tau) \rangle e^{\frac{2i\pi \tau x'}{\sin \alpha}} e^{-i\pi \tau^2 \cot \alpha} d\tau. \tag{5.19}$$

Si la señal es aleatoria es α -estacionaria de segundo orden.

$$\langle K_U^\alpha(t, t - \tau) \rangle = \Gamma_U^\alpha(\tau), \tag{5.20}$$

así, finalmente se tiene

$$\mathcal{F}_\alpha[\Gamma_U^\alpha](x') = C_\alpha S_U^\alpha(x') e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}. \tag{5.21}$$

Corollary 5.2.2. El teorema 5.2.1 se reduce al teorema de Wiener-Khinchin para $\alpha = \pi/2$. En este caso la estacionariedad es en el sentido usual.

5.2.4. Teorema del muestreo fraccionario para señales aleatorias α -estacionarias

Una aplicación del teorema (5.2.1) es el teorema del muestreo fraccionario para señales aleatorias α -estacionarias, el cual es útil en la estimación de un proceso aleatorio.

Teorema 5.2.3. Sea U una señal aleatoria α -estacionaria de segundo orden, con una densidad α -espectral de potencia S_U^α la cual es α -banda limitada, tal que $S_U^\alpha(x') = 0$ para $|x'| > B/2$. Por el teorema (5.2.1), la función de autocorrelación estadística fraccionaria Γ_U^α y la densidad α -espectral de potencia forman un par de transformaciones de Fourier fraccionarias, por consiguiente, se puede aplicar el teorema del muestreo fraccionario [54] a la función de autocorrelación estadística fraccionaria, así

$$\begin{aligned} \Gamma_U^\alpha(x) &= e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) \\ &\quad \times e^{-i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} \\ &\quad \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(x - n \frac{\sin \alpha}{B}\right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \widehat{U}(x) &= e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) e^{-i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} \\ &\quad \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(x - n \frac{\sin \alpha}{B}\right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

La $U\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right)$ son variables aleatorias y en lugar de una fórmula de interpolación es una estimación punto a punto de la señal aleatoria U .

5.2.4.1. Prueba del teorema (5.2.3)

Por el teorema 5.2.1, se puede escribir

$$\begin{aligned}\Gamma_U^\alpha(x) &= e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) \\ &\quad \times e^{-i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} \\ &\quad \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(x - n \frac{\sin \alpha}{B}\right).\end{aligned}\quad (5.24)$$

Siendo τ una constante arbitraria, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_U^\alpha(x) &= e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau\right) \\ &\quad \times e^{-i\pi \left(\frac{n \sin \alpha}{B} - \tau\right)^2 \cot \alpha} \\ &\quad \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(x + \tau - n \frac{\sin \alpha}{B}\right),\end{aligned}\quad (5.25)$$

para $x = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma_U^\alpha(0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau\right) \\ &\quad \times e^{-i\pi \left(\frac{n \sin \alpha}{B} - \tau\right)^2 \cot \alpha} \\ &\quad \times \text{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(\tau - n \frac{\sin \alpha}{B}\right).\end{aligned}\quad (5.26)$$

La función de autocorrelación estadística fraccionaria se expresa

$$\Gamma_U^\alpha(0) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E \left\{ U(x) \overline{U(x)} \right\} . \quad (5.27)$$

Definiendo

$$f_\alpha(U) = U(x) \overline{\mathcal{J}_{n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau; \alpha} [U]}(x) e^{i\pi n^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} , \quad (5.28)$$

resulta

$$\mathcal{J}_{\tau; \alpha} \Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E \left\{ f_\alpha(U) \right\} , \quad (5.29)$$

por lo cual, se puede escribir

$$\begin{aligned}\Gamma_U^\alpha\left(n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau\right) &= C_\alpha \overline{C_\alpha} E \left\{ f_\alpha(U) \right\} \\ &\quad \times e^{-2i\pi \tau \left(n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau/2\right) \cot \alpha} .\end{aligned}\quad (5.30)$$

Reemplazando (5.27) and (5.30) en (5.26), se tiene

$$E \left\{ U(x) \overline{U(x)} \right\} = E \left\{ U(x) \overline{\widehat{U}(x)} \right\}, \quad (5.31)$$

donde se define

$$\widehat{U}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{n \frac{\sin \alpha}{B} - \tau; \alpha} [U](x) \operatorname{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(\tau - n \frac{\sin \alpha}{B} \right), \quad (5.32)$$

entonces

$$\begin{aligned} \widehat{U}(x) &= e^{-i\pi\tau^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U\left(-n \frac{\sin \alpha}{B} + x + \tau\right) \\ &\quad \times e^{-i\pi n^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} e^{2i\pi n \frac{\sin \alpha}{B} (x+\tau) \cot \alpha} \\ &\quad \times e^{-2i\pi x \tau \cot \alpha} \operatorname{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(\tau - n \frac{\sin \alpha}{B} \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

escogiendo $\tau = -x$, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{U}(x) &= e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U\left(n \frac{\sin \alpha}{B}\right) e^{-i\pi n^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{B^2}} \\ &\quad \times \operatorname{sinc} \frac{B}{\sin \alpha} \left(x - n \frac{\sin \alpha}{B} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Las señales aleatorias de primer y segundo orden α -estacionarias son introducidas. Para estas señales se demuestra una versión del teorema de Wiener-Khinchin, este teorema se usa para hallar un teorema fraccionario para señales aleatorias α -banda limitadas. El teorema del muestreo fraccionario permite hacer un estimado de un proceso aleatorio.

5.3. Coherencia del campo dispersado

Comúnmente se trata con paquetes de ondas *chirpeados* que se representan como

$$\mathcal{E}_o(t) = U_o(t) \exp \left[-\frac{i\pi t^2}{\Lambda t_o} \right], \quad (5.35)$$

la envolvente compleja luego que de propagarse una distancia z , es

$$U_z(t) = e^{i\pi t^2/\Lambda Z} \int U_o(t') e^{i\pi t'^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t'^2/\Lambda t_o} e^{-i2\pi t t'/\Lambda Z} dt'. \quad (5.36)$$

La autocorrelación estándar para el campo U_z , corresponde

$$U_z \otimes U_z(\tau) = \int U_z(t') \overline{U_z(t' - \tau)} dt', \quad (5.37)$$

la autocorrelación para la ecuación (5.36) resulta

$$\begin{aligned} U_z \otimes U_z(\tau) &= \int \left[e^{i\pi t'^2/\Lambda Z} \int U_o(t'') e^{i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{i\pi t''^2/\Lambda t_o} e^{-i2\pi t' t''/\Lambda Z} dt'' \right] \\ &\quad \times \left[e^{-i\pi(t' - \tau)^2/\Lambda Z} \int \overline{U_o(t''')} e^{-i\pi t'''^2/\Lambda Z} e^{i\pi t'''^2/\Lambda t_o} e^{i2\pi(t' - \tau)t'''/\Lambda Z} dt''' \right] \\ &= \int \int U_o(t'') \overline{U_o(t''')} e^{i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t''^2/\Lambda t_o} e^{-i\pi \tau^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{i\pi t'''^2/\Lambda t_o} e^{-i2\pi \tau t'''/\Lambda Z} \\ &\quad \times \int e^{-i2\pi t' t''/\Lambda Z} e^{-i2\pi t' \tau/\Lambda Z} e^{i2\pi t' t'''/\Lambda Z} dt' dt'' dt''' \\ &= \int \int U_o(t'') \overline{U_o(t''')} e^{i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t''^2/\Lambda t_o} e^{-i\pi \tau^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{i\pi t'''^2/\Lambda t_o} e^{-i2\pi \tau t'''/\Lambda Z} \\ &\quad \times \delta(t'' - \tau - t''') dt'' dt''' \\ &= \int U_o(t'') \overline{U_o(t'' - \tau)} e^{i\pi t''^2/\Lambda Z} e^{-i\pi t''^2/\Lambda t_o} e^{-i\pi \tau^2/\Lambda Z} e^{-i\pi(t'' - \tau)^2/\Lambda Z} e^{i\pi(t'' - \tau)^2/\Lambda t_o} \\ &\quad \times e^{-i2\pi \tau(t'' - \tau)/\Lambda Z} dt'' \\ &= \int U_o(t'') \overline{U_o(t'' - \tau)} e^{-i2\pi \tau t''/\Lambda t_o} e^{i\pi \tau^2/\Lambda t_o} dt''. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Con base en los definición de autocorrelación fraccionaria definida por Torres-Amarís, la autocorrelación estándar expresada en la ecuación (5.38) es equivalente a

$$[U_z \otimes U_z](\tau) = e^{-i\pi \tau^2/\Lambda t_o} [U_o \otimes_\alpha U_o](\tau), \quad (5.39)$$

es decir, la autocorrelación estándar del campo luego de propagarse por un medio dispersivo una distancia z es igual a la autocorrelación fraccionaria de orden α del campo de entrada $U_o(t)$.

Tomando la transformada de Fourier en la ecuación (5.39), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[U_z \otimes U_z](\nu) &= \int [U_o \otimes_\alpha U_o](\tau) e^{-i\pi \tau^2/\Lambda t_o} e^{2i\pi \tau \nu/\Lambda t_o} d\tau \\ S_{U_z}(\nu/\Lambda t_o) &= S_{U_o}^\alpha(\nu/\Lambda t_o), \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde $S_{U_z}(\nu/\Lambda t_0)$ es la densidad espectral de potencia a la distancia z y $S_{U_0}^\alpha(\nu/\Lambda t_0)$ es la densidad α -espectral de potencia del campo de entrada.

Este resultado es interesante porque la densidad espectral de potencia en z es igual a la densidad α -espectral de potencia en $z = 0$, es decir, del campo sin sufrir dispersión. Con base en el teorema de Wiener-Kintchinne fraccionario que enuncia que la densidad α -espectral de potencia y la función de autocorrelación estadística fraccionaria son pares de Fourier fraccionarias y la relación (5.40), puede ser un método para recuperar la información contenida en la interferencia entre un campo de muestra y un campo objeto en un interferómetro tipo Michelson a fibra óptica, útil en tomografía óptica coherente [23].

5.4. Conclusiones

Un resultado importante es la definición de convolución y correlación fraccionarias. Estas definiciones son importantes porque permiten tratar aplicaciones como filtrado, encriptación.

De las características útiles para determinar señales que en general son aleatorias se encuentra la coherencia y en el caso temporal el grado de coherencia. Para hacer uso de esta noción es indispensable el conocido teorema de Wiener-Kintchinne. Para adaptar aquí tales tratamientos se desarrollaron las nociones de señales aleatorias α -estacionarias, además de un teorema de Wiener-Kintchinne para la transformación de Fourier fraccionaria. A partir de aquí, se encontró una noción de coherencia fraccionaria asociada a la correlación fraccionaria.

Una de las aplicaciones de un teorema del muestreo para señales α -estacionarias es el filtrado de la coherencia.

Conclusiones generales

La propagación de un paquete de ondas en una línea de transmisión se reduce al cálculo de la evolución de la envolvente compleja B_z . Se encuentra que el paquete de ondas viaja a la velocidad de grupo. Para dos medios con pendientes iguales, alrededor de $\tilde{\nu}$ tendrán iguales velocidades de grupo, es decir, β_1 es el mismo para ambos medios.

Se muestra un modelo con base en la teoría metaxial, para tratar tanto dispersión cromática como pérdidas de paquetes de ondas de espectro estrecho.

Se encuentra que la propagación de la envolvente compleja de un paquete de ondas, para un medio con dispersión y pérdidas corresponde a una integral de Fresnel de variable compleja, la cual se traduce como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α complejo. Cuando no se toman en cuenta las pérdidas se encuentra que la propagación de la envolvente compleja se expresa por una integral de Fresnel de variable real y una transformación de Fourier fraccionaria de orden α real. Esto indica que la transformación de Fourier fraccionaria permite tratar los fenómenos simultáneamente o por separado, simplemente haciendo un cambio en los ordenes fraccionarios.

Con base en la ilustración de la propagación de un paquete de ondas gaussiano se concluye que el incluir las pérdidas en el modelo modifica en el ancho de la gaussiana, es decir, se incluye un ensanchamiento adicional al producido para el caso de solo dispersión. Este resultado introduce un límite en la cantidad de información que se puede enviar por una canal de comunicación, a través del parámetro BL , el cual se calcula con base en el ancho de la gaussiana luego de la propagación.

Aunque las técnicas de compensación de la dispersión han encontrado aplicaciones que son sin lugar a dudas importantes, aquí se ha visto que trabajar con la dispersión también arroja posibles aplicaciones que de otro modo pueden ser remotas, un ejemplo de ello es la noción de peinilla temporal.

Aquí se muestra que estas analogías pueden extenderse hasta el punto que buena parte de los resultados conocidos en difracción encuentran su equivalente en dispersión, como teorema del muestreo fraccionario, convolución fraccionaria, lo que conduce a lo que se llama óptica temporal basada en el fenómeno de dispersión.

Es interesante analizar que una “lente temporal” puede representarse por una interface entre dos dieléctricos de constante de propagación de signos opuestos, esto concuerda muy bien con la técnica clásica de compensación de dispersión mediante fibras compuestas por dispersiones alternadas ver figura 3.6, equivalente a la colimación de haces gaussianos en el espacio.

Una posible aplicación se basa en el teorema del muestreo cuyo equivalente en el dominio temporal se puede implementar haciendo uso de divisores de haz a fibra óptica. Esta técnica puede ser utilizada en el diseño de peinillas temporales para la medición de tiempos cortos, también puede usarse en la producción de pulsos ultra cortos.

Una representación de Wigner de los paquetes de onda puede ser implementada, con base en este enfoque se pueden formalizar múltiples tratamientos, como por ejemplo, analizadores de espectro, además de tratamientos asociados a filtrados.

Se encuentra lo que se llama una “ley de conjugación”, dada por la expresión (4.14), la cual incluye las curvas R_C , $R_{C'}$ y es a través de esta relación que se puede calcular el radio de curvatura R_B , sobre el cual se encuentra la imagen.

En este mismo capítulo se desarrolla de forma original un tratamiento para el estenope basado en óptica ondulatoria. Como resultado se encuentra el tamaño del hueco, dado en la ecuación (4.24), en términos de la distancia objeto y distancia imagen que cumple el criterio de Rayleigh.

Un aporte de este tratamiento es la determinación del radio de curvatura sobre el cual se encuentra la imagen, ecuación (4.11). La determinación de este radio toma importancia cuando se requiera hacer registros holográficos, si no se conoce la fase apropiada entonces el holograma no registra la información deseada. También es

útil cuando se tienen sistemas ópticos en cascada. Por ejemplo si en alguna etapa del sistema se necesita hacer algún filtrado, si no se tiene en cuenta esta fase entonces se va a deteriorar la información ya que va a producir una convolución adicional.

Uno de los posibles usos del estenope temporal es la eliminación de la dispersión, creando la imagen del paquete de ondas usando una ventana temporal de acuerdo a lo calculado en la ecuación (4.29).

Un resultado importante es la definición de convolución y correlación fraccionarias. Estas definiciones son importantes porque a través del teorema de la convolución fraccionario es que se pueden tratar aplicaciones como filtrado, encriptación.

De las características útiles para determinar señales que en general son aleatorias se encuentra la coherencia y en el caso temporal el grado de coherencia. Para hacer uso de esta noción es indispensable el conocido teorema de Wiener-Kintchinne. Para adaptar aquí tales tratamientos se desarrollaron las nociones de señales aleatorias α -estacionarias, además de un teorema de Wiener-Kintchinne para la transformación de Fourier fraccionaria. A partir de aquí, se encontró una noción de coherencia fraccionaria asociada a la correlación fraccionaria.

El teorema de Wiener-Kintchinne fraccionario puede usarse para recuperar la información contenida en la interferencia entre un campo de muestra y un campo objeto en un interferómetro tipo Michelson a fibra óptica, útil en tomografía óptica coherente.

Una de las aplicaciones de un teorema del muestreo para señales α -estacionarias es el filtrado de la coherencia.

5.5. Prospectivo

En el modelo de los medios homogéneos e isotropos y lineales, hay la posibilidad de plantear otro modelo basado en la convolución fraccionaria, en la forma

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(i\pi\omega^2/\tilde{\omega}), \quad (5.41)$$

donde hace falta encontrar cual es el valor de $\tilde{\omega}$ que adapte la variables reducidas. Tal modelo permite adaptar los retardos presentes en la respuesta del medio frente un campo aplicado.

En la propagación de paquetes de ondas en líneas dispersivas se puede extender la expansión de la constante de propagación β a órdenes superiores, como por ejemplo, ir hasta el término cúbico, para así poder hacer una interpretación de lo que sucede al paquete de ondas luego de propagarse en un medio con estas características.

Hay que estudiar de forma detallada cada uno de los coeficientes de la expansión a segundo orden de las pérdidas para paquetes de ondas de espectro estrecho.

Apéndice A

Distribución Heaviside

La distribución Heaviside se define por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x). \quad (\text{A.2})$$

Para calcular la transformada de Fourier de H , primero se define la distribución

$$x \cdot \text{v.p.} \frac{1}{x} = 1, \quad (\text{A.3})$$

donde v.p. denota el valor principal de Cauchy, la noción de valor principal de Cauchy de una integral (es una distribución). Se recuerda que para una función prueba φ cualquiera (función de clase C^∞ y de soporte compacto) se tiene

$$\langle \text{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right]. \quad (\text{A.4})$$

luego, la transformada de Fourier de esta se escribe

$$\mathcal{F} \left[x \cdot \text{v.p.} \frac{1}{x} \right] (\nu) = \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{d\nu} \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{x} \right] (\nu), \quad (\text{A.5})$$

así

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}\left[\text{v.p.}\frac{1}{x}\right](\nu) &= -2i\pi\delta(x) \\ &= -2i\pi\frac{d}{d\nu}H(\nu),\end{aligned}\tag{A.6}$$

lo cual nos permite escribir

$$\mathcal{F}\left[\text{v.p.}\frac{1}{x}\right](\nu) = -2i\pi H(\nu) + \text{cte},\tag{A.7}$$

dado que la transformada de Fourier de una función impar es también impar, en consecuencia

$$\mathcal{F}\left[\text{v.p.}\frac{1}{x}\right](\nu) = -2i\pi H(\nu) + i\pi,\tag{A.8}$$

finalmente tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}[H](x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \text{v.p.}\frac{i}{2\pi x},\tag{A.9}$$

y similarmente

$$\mathcal{F}[H](\nu) = \frac{1}{2}\delta(\nu) - \text{v.p.}\frac{i}{2\pi\nu}.\tag{A.10}$$

A.1. Señal analítica y frecuencia instantánea

En general existen infinitas formas de definir una función compleja cuya parte real corresponda a una función real dada. Pero de todas estas nos interesa un procedimiento que mantenga invariante el espectro de la señal. Gabor, observando que las funciones $\sin \omega x$ y $\cos \omega x$ se transforman en $e^{i\omega x}$ si solo se consideran las componentes positivas del espectro, es decir, eliminando las frecuencias negativas.

Sea f una función cuya transformada de Fourier es F , la función que se compone de solo las componentes positivas se define

$$\begin{aligned}f_a(x) &= 2 \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu)e^{2i\pi\nu x} d\nu \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} H(\nu)F(\nu)e^{2i\pi\nu x} d\nu \\ &= [\mathcal{F}^{-1}[H] * f](x),\end{aligned}\tag{A.11}$$

luego

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x') \left[\delta(x - x') + \text{v.p.} \frac{i}{\pi(x - x')} \right] dx' \\ &= f(x) + \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x')}{(x - x')} dx'. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Se define la transformación de Hilbert de la función f por

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x')}{(x' - x)} dx', \quad (\text{A.13})$$

por lo cual

$$f_a(x) = f(x) - i f_H(x). \quad (\text{A.14})$$

La función f_a es llamada la función analítica, asociada a f , la cual es una función compleja.

A.1.1. Frecuencia instantánea

La noción de señal analítica permite asociar a la función f una amplitud y una fase instantánea. Se puede descomponer la señal analítica en módulo y fase

$$f_a(x) = \rho(x) e^{i\Phi(x)}, \quad (\text{A.15})$$

si llamamos $F_a = \mathcal{F}[f]$, podemos calcular la frecuencia media por

$$\begin{aligned} \langle \nu \rangle \equiv \tilde{\nu} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \overline{F_a(\nu)} \nu F_a(\nu) d\nu}{\int_{\mathbb{R}} |F_a(\nu)|^2 d\nu} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)} \frac{d}{dx} f_a(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dado que $\tilde{\nu}$ debe ser real

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}(x) \right] f_a(x) dx, \quad (\text{A.17})$$

por lo cual se define la frecuencia instantánea

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}(x). \quad (\text{A.18})$$

Es fácil probar que para el segundo momento la igualdad no se cumple

$$\langle \nu^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 \right\rangle + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 dx, \quad (\text{A.19})$$

por esto, se debe tener cuidado en la interpretación de esta noción como una frecuencia en el sentido estricto de la palabra, de hecho para algunos casos puede resultar negativa y en general puede no tener sentido.

Esta noción es bien interesante en el caso donde f_a sea de espectro estrecho, para esto se define

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}(x) = \tilde{\nu} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dx}(x), \quad (\text{A.20})$$

donde

$$\frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = 0, \quad (\text{A.21})$$

luego

$$\Phi(x) = 2\pi\tilde{\nu}x + \phi(x), \quad (\text{A.22})$$

así la función analítica toma la forma

$$f_a(x) = \rho(x)e^{i\phi(x)}e^{2i\pi\tilde{\nu}x}, \quad (\text{A.23})$$

donde la función $e^{2i\pi\tilde{\nu}x}$ se le llama portadora y la modulación está dada por $\rho(x)e^{i\phi(x)}$.

Nótese que como

$$\rho(x)e^{i\phi(x)}e^{2i\pi\tilde{\nu}x} = \int_0^\infty F_a(\nu)e^{2i\pi\nu x} d\nu, \quad (\text{A.24})$$

lo cual permite escribir

$$\rho(x)e^{i\phi(x)} = \int_0^\infty F_a(\nu)e^{2i\pi(\nu-\tilde{\nu})x} d\nu, \quad (\text{A.25})$$

haciendo el cambio de variable $v = \nu - \tilde{\nu}$, se tiene

$$\rho(x)e^{i\phi(x)} = \int_{-\tilde{\nu}}^\infty F_a(v + \tilde{\nu})e^{2i\pi vx} dv. \quad (\text{A.26})$$

Se concluy de que si f_a es de banda limitada con $\frac{\Delta\nu}{\tilde{\nu}} \leq 1$, entonces las funciones ρ y ϕ deben ser funciones de variación lenta dado que el espectro $F_a(v + \tilde{\nu})$ esta compuesto por solo bajas frecuencias. En realidad se puede considerar que las

funciones ρ y ϕ deben ser prácticamente constantes para

$$\Delta x \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (\text{A.27})$$

Apéndice B

Teoría metaxial

B.1. Coordenadas sobre emisores y receptores esféricos

La teoría utilizada en este trabajo se basa en emisores y receptores esféricos. Usar este tipo de geometría implica realizar aproximaciones de segundo orden con respecto a los parámetros de apertura (dimensiones laterales y ángulos). Las aproximaciones a primer orden son propias de la óptica geométrica *paraxial*.

Los emisores y receptores esféricos pueden considerarse como fuentes o detectores de luz, y así como en óptica, también existen emisores esféricos reales o virtuales.

Para localizar un punto sobre la esfera \mathcal{A} de vértice V ; siendo M un punto sobre la esfera y m su proyección ortogonal sobre el plano \mathcal{P} tangente a V , ver figura (B.1). Las coordenadas de m en el plano \mathcal{P} definen el punto M sobre \mathcal{A} .

Las amplitudes de los campos en M y m son

$$U(M) = U_A(x_m, y_m) = U_A(\vec{r}), U(m) = U_P(x_m, y_m) = U_P(\vec{r}), \quad (\text{B.1})$$

los puntos m y M tienen las mismas coordenadas (x, y) , pero los campos son distintos, el campo en M se encuentra en la esfera \mathcal{A} en cambio el campo en m se encuentra en el plano \mathcal{P} .

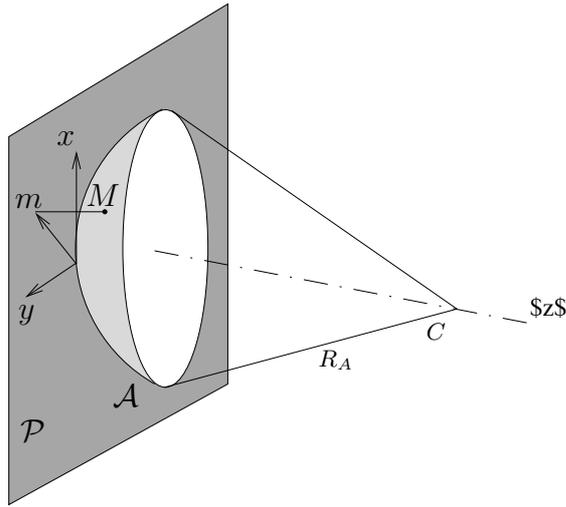


FIGURA B.1: Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A} .

B.1.1. Transparencia de curvatura

Se consideran dos esferas \mathcal{A} y \mathcal{B} , de radios de curvaturas R_A y R_B respectivamente, las cuales tienen un plano tangente común, denotado por \mathcal{P} . Interesa hallar el campo en el punto M sobre \mathcal{A} y su proyección m sobre el plano \mathcal{P} , ver figura (B.2). Al segundo orden se tiene

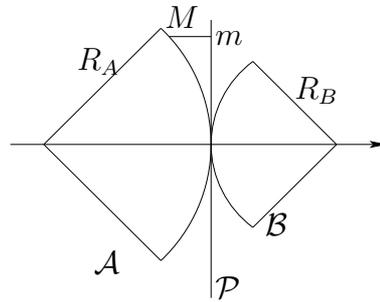


FIGURA B.2: Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A} .

$$\overline{Mm} = -\frac{r^2}{2R_A}, \quad (\text{B.2})$$

siendo $r^2 = x^2 + y^2$. La diferencia de fase corresponde

$$\varphi = \frac{2\pi\overline{Mm}}{\lambda} = -\frac{\pi r^2}{\lambda R_A}, \quad (\text{B.3})$$

la amplitud del campo sobre el plano es

$$U_p(\vec{r}) = U_A(\vec{r}) \exp\left[\frac{i\pi r^2}{\lambda R_A}\right]. \quad (\text{B.4})$$

Esta relación es válida para la esfera \mathcal{B} y el plano \mathcal{P} . El campo sobre la esfera \mathcal{B} se expresa

$$U_B(\vec{r}) = U_A(\vec{r}) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right) r^2\right]. \quad (\text{B.5})$$

La transferencia del campo desde \mathcal{A} hasta \mathcal{B} se hace a través de una transparencia de curvatura. Se llama transparencia porque los campos entre las dos esferas sólo se diferencian en una fase cuadrática que desaparece cuando se considera la iluminación, la transparencia no atenúa la onda. De curvatura porque permite una adaptación entre curvas.

B.1.2. Difracción de Fraunhofer

Siendo un emisor \mathcal{A} , de vértice V , radio de curvatura R_A y de centro C ; y siendo \mathcal{F} una esfera de centro V y vértice C , se dice que \mathcal{A} y \mathcal{F} son esferas confocales. Se supone que se conoce el campo sobre la esfera \mathcal{A} y se pretende calcular el campo sobre la esfera \mathcal{F} . El radio de curvatura de \mathcal{F} es $R_F = -R_A$, ver figura (B.3).

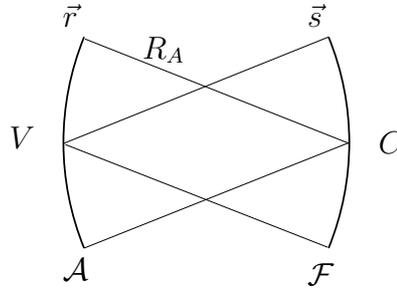


FIGURA B.3: Coordenadas sobre una esfera \mathcal{A} .

$$U_F(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \vec{s} \cdot \vec{r}}{\lambda R_A}\right] U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (\text{B.6})$$

U_F es la transformada de Fourier óptica de U_A . Para pasar de la esfera \mathcal{A} a la esfera \mathcal{F} se usa transformación de Fourier y un cambio de variables. Se dice que \mathcal{F} es la esfera de Fourier de \mathcal{A} .

B.1.3. Difracción de Fresnel

Se considera un emisor \mathcal{A} de radio de curvatura R_A , vértice V y un receptor \mathcal{B} , de radio de curvatura R_B y vértice V' , situado a la distancia D de \mathcal{A} , ver figura (B.4).

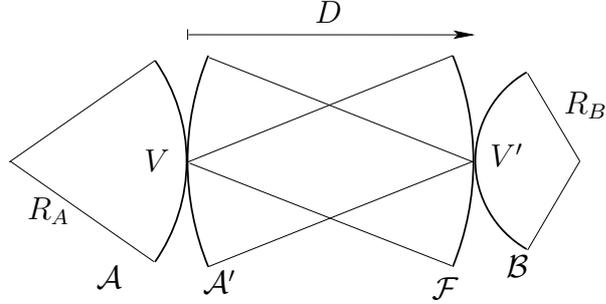


FIGURA B.4: Transferencia general por difracción de un emisor \mathcal{A} cualquiera a un receptor \mathcal{B} cualquiera.

La transferencia del campo desde el emisor \mathcal{A} hasta el receptor \mathcal{B} se descompone en tres operaciones:

1. Una transparencia de curvatura de \mathcal{A} a \mathcal{A}' .
2. Una transformación de Fourier óptica de \mathcal{A}' a \mathcal{F} .
3. Una transparencia de curvatura de \mathcal{F} a \mathcal{B} .

El resultado se escribe

$$U_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \int_{R^2} \exp \left[-\frac{i}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r} \right] U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (\text{B.7})$$

Apéndice C

Convolución y Correlación

Para la transformación de Fourier fraccionaria se han extendido las propiedades y operaciones definidas para la transformación de Fourier estándar. Se han definido los productos de correlación y convolución fraccionarias.

C.1. Convolución fraccionaria

C.1.1. Definición integral de la convolución fraccionaria

Se define la convolución fraccionaria según

$$[f *_{\alpha} g](x) = \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\mathcal{F}_{\alpha}[f](x_{\alpha}) \mathcal{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha}) e^{i\pi x_{\alpha}^2 \cot \alpha} \right] (x), \quad (\text{C.1})$$

y en su forma integral por

$$[f *_{\alpha} g](x) = \int f(u)g(x-u)e^{i2\pi u(x-u)\cot \alpha} du. \quad (\text{C.2})$$

Se reduce a la convolución estándar para $\alpha = \pi/2$.

C.2. Correlación fraccionaria

Se define la correlación fraccionaria según

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) = \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\mathcal{F}_{\alpha}[f](x_{\alpha}) \overline{\mathcal{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})} e^{-i\pi x_{\alpha}^2 \cot \alpha} \right] (x), \quad (\text{C.3})$$

y en su forma integral por

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) = \int f(u) \overline{g(u-x)} e^{-i2\pi x(u-x) \cot \alpha} du. \quad (\text{C.4})$$

Para la convolución se tiene

$$[f *_{\alpha} g](x) \Big|_{\alpha=\pi/2} = [g * f](x), \quad (\text{C.5})$$

$$[f *_{\alpha} g](x) \Big|_{\alpha=0} = f(x)g(x)\delta(x), \quad (\text{C.6})$$

$$[f *_{\alpha} g](x) = [g *^{\alpha} f](x), \quad (\text{C.7})$$

$$[f *_{\alpha} \delta](x) = f(x), \quad (\text{C.8})$$

$$[f *_{\alpha} \delta_{\xi}](x) = f(x - \xi) e^{i2\pi \xi(x-\xi) \cot \alpha}, \quad (\text{C.9})$$

$$[f \circledast_{\alpha} f](0) = [f \circledast f](0) = \int |f(u)|^2 du, \quad (\text{C.10})$$

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) \Big|_{\alpha=\pi/2} = [g \circledast f](x), \quad (\text{C.11})$$

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) \Big|_{\alpha=0} = f(x) \overline{g(x)} \delta(x). \quad (\text{C.12})$$

Bibliografía

- [1] G. P. AGRAWAL. “Nonlinear Fiber Optics”. Academic Press (1995).
- [2] O. AKAY Y G.F. BOUDREAUX-BARTELS. Fractional convolution and correlation via operator methods and application to detection of linear fm signals. *IEEE Trans. Sign. Proc.* **49**, 979–993 (2001).
- [3] T. ALIEVA, M. J. BASTIAANS Y L. STANKOVIC. Signal reconstruction from two close fractional fourier power spectra. *IEEE Trans. Sign. Proc.* **51**, 112–123 (2003).
- [4] L.B. ALMEIDA. The fractional fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Trans. Sign. Proc.* **42**, 3084–3091 (1994).
- [5] L.B. ALMEIDA. Product and convolution theorems for the fractional fourier transform. *IEEE Sign. Proc. Lett.* **4**, 15–17 (1997).
- [6] L. M. BERNARDO. Talbot self-imaging in fractional fourier plane of real and complex orders. *Opt. Comm.* **140**, 195–198 (1997).
- [7] L. M. BERNARDO Y O.D.D. SOARES. Optical fractional fourier transform with complex orders. *Appl. Opt* **35**, 3163–3166 (1996).
- [8] G. BONNET. Introduction à l’optique métaxiale. deuxième partie: systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants). En “Ann. Télécomm.”, tomo 33, páginas 225–243. (1978).
- [9] G. BONNET. Introduction à l’optique métaxiale. première partie: diffraction métaxiale dans un espace homogène: trilogie structurale, dioptré sphérique. En “Ann. Télécomm.”, tomo 33, páginas 143–165. (1978).

- [10] G. BONNET. Au-delà d'une vitesse de groupe: vitesse d'onde et vitesse de signal. première partie: l'opérateur vitesse de groupe en l'absence d'affaiblissement. En "Ann. Télécomm.", tomo 38, páginas 345–366. (1983).
- [11] G. BONNET. déformation de l'amplitude et influence de l'affaiblissement. En "Ann. Télécomm.", tomo 38, páginas 473–487. (1983).
- [12] M. BORN Y E. WOLF. "Principles of Optics". Series in electrical engineering. Pergamon Press, 5^a ed. edición (1997).
- [13] S. D. BRENER, F. KÜPPERS, A. MATTHEUS, E. G. SHAPIRO, I. GABITOV Y S. K. TURITSYN. Symmetrical dispersion compensation for standard monomode-fiber-based communication systems with large amplifier spacing. *Opt. Lett.* **22**, 982–984 (1997).
- [14] A. BULTHEEL Y H. MARTÍNEZ SULBARAN. Recent developments in the theory of the fractional Fourier transforms and linear canonical transforms. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin* **13**, 971–1005 (2007).
- [15] J. M. CABRERA, F. J. LÓPEZ Y F. A. LÓPEZ. "Óptica Electromagnética", tomo 1 y 2. Addison-Wesley, España (1998).
- [16] J. CAPMANY Y F. J. FRAILE-PELÁEZ. "Fundamentos de Comunicaciones Ópticas", tomo 1 y 2. Síntesis, España (1998).
- [17] Ç. CANDAN Y H. OZAKTAS. Sampling and series expansion theorems for fractional fourier and other transforms. *Sign. Process.* **83**, 2455–2457 (2003).
- [18] S. COËTMELLE, C. M. BRUNEL, D. LEBRUN Y J. LECOURT. Group velocity dispersion with fractional-order fourier formalism. *J. Opt. A : Pure Appl. Opt* **5**, 26–30 (2003).
- [19] S. P. DIJAILI, A. DIENES Y J. S. SMITH. ABCD matrices for dispersive pulse propagation. *IEEE J. Quant. Elect.* **26**, 1158–1164 (1990).
- [20] É. FOGRET Y P. PELLAT-FINET. Agreement of fractional fourier optics with the Huygens-Fresnel principle. *Opt. Comm.* **272**, 281–288 (2007).
- [21] J. L. HALL. Defining and measuring optical frequencies: The optical clock opportunity-and more (nobel lecture). (2005).

- [22] H. W. HÄNSCH. Passion for precision (nobel lecture). (2005).
- [23] M. R. HEE. “Handbook of Optical Coherence Tomography”. Marcel Dekker (2002).
- [24] B. H. KOLNER Y M.ÑAZARATHY. Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.* **14**, 630–632 (1989).
- [25] B.H. KOLNER. Space-time duality in the theory of temporal imaging. *IEEE J. Quant. Elect.* **38**, 1951–1963 (1994).
- [26] B.H. KOLNER. The pinhole time camera. *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 3349–3357 (1997).
- [27] Z. LIZARAZO, P. PELLAT-FINET, P-E. DURAND Y E. FOGRET. Fractional fourier optics theory of the pinhole camera. i - the spatial pinhole camera. *Sometiendo a Opt. Comm.* (2010).
- [28] Z. LIZARAZO, P. PELLAT-FINET, P-E. DURAND Y E. FOGRET. Fractional fourier optics theory of the pinhole camera. ii - the spatial pinhole camera. *Sometiendo a Opt. Comm.* (2010).
- [29] Z. LIZARAZO, P. PELLAT-FINET Y Y. TORRES. Tratamiento unificado para la propagación de paquetes de ondas a espectro estrecho en medios dispersivos. En “IV Congreso internacional de ingeniería eléctrica y electrónica” (Octubre 2009).
- [30] Z. LIZARAZO, P. PELLAT-FINET, Y. TORRES Y R. TORRES. Dispersión-pérdidas en líneas de transmisión y la transformación de fourier fraccionaria. En “A someterse en 7th Ibero-American Conference on Optics (RIO); 10th Latin-American Meeting on Optics, Lasers and Applications (OPTILAS)” (Septiembre 2010).
- [31] A. W. LOHMANN. Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2181–2186 (1993).
- [32] P. LORRAIN Y D. CORSON. “Electromagnetic Fields and Waves”. W. H. Freeman and Company, second edition edición (1970).
- [33] H.-H. LU. Performance comparison between dcf and rdf dispersion compensation in fiber optical catv systems. *IEEE Trans. Broadcasting* **48**, 370–373 (2002).

- [34] F. MOUSAVI MADANI Y K. KIKUCHI. Performance limit of long-distance wdm dispersion-managed transmission system using higher order dispersion compensation fibers. *IEEE Photonics Techn. Lett.* **11**, 608–610 (1999).
- [35] J. MAX. “Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques”. MASSON, tercera edición (1981).
- [36] D. MENDLOVIC, Y. BITRAN, R. DORSCH Y A.W. LOHMANN. Optical fractional correlation: experimental results. *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1665–1670 (1995).
- [37] VICTOR NAMIAS. The fractional fourier tranform and it’s aplication to quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.* **25**, 241–265 (1980).
- [38] H. OZAKTAS Y D. MENDLOVIC. Fractional fourier optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 743–751 (1995).
- [39] H.M. OZAKTAS, Z. ZALEVSKY Y M.A. KUTAY. “The fractional Fourier transform”. Jhon Wiley & Son, LTD. (2001).
- [40] S.-C. PEI Y J.-J. DING. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications. *IEEE Tran. Sign. Proc.* **49**, 1638–1655 (2001).
- [41] P. PELLAT-FINET. Fresnel diffraction and the fractional-order fourier transform. *Opt. Lett.* **19**, 1388–1390 (1994).
- [42] P. PELLAT-FINET. “Lecciones de óptica de Fourier”. División Editorial y de Publicacioness UIS (2004).
- [43] P. PELLAT-FINET. “Optique de Fourier. Théorie métaxiale et fractionnaire”. Springer, Paris (2009).
- [44] P. PELLAT-FINET Y G. BONNET. Fractional order fourier transform and fourier optics. *Opt. Comm.* **111**, 141–154 (1994).
- [45] P. PELLAT-FINET Y É. FOGRET. Complex order fractional fourier transforms and their use in diffraction theory. application to optical resonators. *Opt. Comm.* **258**, 103–113 (feb 2006).

- [46] P. PELLAT-FINET, Z. LIZARAZO Y R. TORRES. On the analogy between fresnel diffraction and dispersion in transmission lines and some of its applications. En “6th Ibero-American Conference on Optics (RIAO); 9th Latin-American Meeting on Optics, Lasers and Applications (OPTILAS)”, tomo 992, páginas 1129–1134 (2008).
- [47] J. P. PÉREZ. “Optique”. Dunod, Paris (2000).
- [48] B. E. SALEH Y M. C. TECH. “Fundamentals of Photonics”. Jhon Wiley & Sons, INC. (1991).
- [49] A. G. STRIEGLER Y B. SCHMAUSS. Compensation of intrachannel effects in symmetric dispersion-managed transmission systems. *J. Lightwave. Techn.* **22**, 1877–1882 (2004).
- [50] K. TANAKA, T. TSURITANI, N. EDAGAWA Y M. SUZUKI. 320 gbits/s (32 10 7 gbits/s) error-free transmission over 7 280 km using dispersion flattened fibre link with standard smf and slope compensating dcf. *Electr. Lett.* **35**, 1860–1862 (1999).
- [51] R. TAO, F. ZHANG Y Y. WANG. Fractional Power Spectrum. *IEEE Trans. Sign. Proc.* **56**, 4199–4206 (septiembre 2008).
- [52] C. TORRES Y Y. TORRES. The van cittert-zernike theorem: a fractional order fourier transform point of view. *Opt. Comm.* (2004).
- [53] R. TORRES, Z. LIZARAZO, Y. TORRES Y M. LASPRILLA. Filtro vander lugt para dominios de fourier fraccional: holograma de fourier fraccional. *Revista de la Sociedad Colombiana de Física* **38**(4), 1587–1590 (2006).
- [54] R. TORRES, P. PELLAT-FINET Y Y. TORRES. Sampling theorem for fractional bandlimited signals: A self-contained proof. application to digital holography. *IEEE Sign. Proc. Lett.* **13**(11), 676–679 (2006).
- [55] R. TORRES, P. PELLAT-FINET Y Y. TORRES. Fractional convolution, fractional correlation and their traslation invariance properties. *Soumis à Signal Processing. An International Journal of the European Association for Signal Processing (EURASIP)* (2008).
- [56] R. TORRES, P. PELLAT-FINET Y Y. TORRES. Fractional shifting and sampling in the fractional domain. application to digital holography. En “6th

Iberoamerican Meeting on Optics and 9th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications”, tomo 992 de “Presented at the Institute of Physics (IOP) Conference”, páginas 168–173. N.U. Wetter and J. Frejlich (April 2008).

- [57] X-G. XIA. On bandlimited signal with fractional fourier transform. *IEEE Sign. Proc. Lett* **3**, 72–74 (1996).
- [58] Z. ZALEVSKY Y J. GARCÍA. All optical super resolved and extended depth of focus imaging with random pinhole array aperture. *Opt. Comm.* **281**, 953–957 (2008).
- [59] A. I. ZAYED. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. *IEEE Sign. Proc. Lett.* **5**, 101–103 (abril 1998).