

FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE HIPERESPACIOS DE SUCESIONES  
CONVERGENTES.

ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2023

FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE HIPERESPACIOS DE SUCESIONES  
CONVERGENTES.

ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN

Trabajo de Grado para optar al título de  
Magíster en Matemática

Director:

Javier Enrique Camargo García  
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2023



## **Agradecimientos**

Agradezco al profesor Javier Enrique Camargo García por su apoyo, tiempo y explicaciones que me dio para la realización de este trabajo. A mi madre, padre, hermana, amigos y compañeros por el apoyo durante este camino.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
1.1. Nociones básicas	12
1.1.1. Funciones entre continuos	12
1.2. Hiperespacios	21
1.3. Hiperespacios de sucesiones convergentes no triviales	23
<b>2. FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE LOS HIPERESPACIOS <math>2^X</math> y <math>\mathcal{S}_c(X)</math>.</b>	<b>26</b>
2.1. Funciones inducidas	26
2.2. Funciones inducidas abiertas.	28
2.2.1. Funciones inducidas semiabiertas	32
2.2.2. Funciones inducidas casi abiertas	34
<b>3. HIPERESPACIO <math>\mathcal{S}(X)</math></b>	<b>36</b>
3.1. Propiedades generales	36
3.2. Funciones inducidas entre hiperespacios de sucesiones convergentes.	44
<b>4. Preguntas</b>	<b>52</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>55</b>

## LISTA DE FIGURAS

		<b>pág.</b>
Figura 1.	Función no semiabierta ni casi abierta	17
Figura 2.	Función no cuasi interior	19
Figura 3.	$f$ finita-1 pero $S_c(f)$ no es finita-1	28

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Funciones abiertas	32
Tabla 2. Funciones semiabiertas	33
Tabla 3. Funciones casi abiertas	34

## RESUMEN

**TÍTULO:** FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE HIPERESPACIOS DE SUCESIONES CONVERGENTES. \*

**AUTOR:** ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN \*\*

**PALABRAS CLAVE:** CONTINUO, SUCESIÓN CONVERGENTE, HIPERESPACIO, FUNCIÓN ABIERTA, FUNCIÓN SEMIABIERTA, FUNCIÓN CASI ABIERTA, FUNCIÓN MONÓTONA.

### DESCRIPCIÓN:

Los hiperespacio de un continuo es una colección de subconjuntos cerrados del continuo bajo algunas condiciones, los hiperespacios que se estudiarán es el hiperespacio de sucesiones convergentes triviales  $\mathcal{S}_c(X)$ , donde este contiene todas las sucesiones convergentes no triviales de  $X$ . Además, definimos un nuevo hiperespacio de sucesiones converges  $\mathcal{S}(X)$ , que contiene todas las sucesiones convergentes de  $X$ . En este trabajo estudiamos algunas relaciones entre una función definida entre continuos y su función inducida definida entre dos hiperespacios cuando una de estas pertenecía a alguna clase de funciones, entre las clases de funciones que estudiamos estaban las funciones abiertas, semiabiertas, casi abiertas, monótonas y entre otras. En el tercer capítulo se introduce la definición de un nuevo hiperespacio, del cual se obtuvieron varios resultados respecto a algunas propiedades como su conexidad, arco conexidad y conexidad local. Por último, en el último capítulo proveemos una serie de preguntas abiertas para aquellos que quieren continuar con esta investigación.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

## ABSTRACT

**TITLE:** INDUCED MAPPINGS BETWEEN HYPERSPACES OF CONVERGENT SEQUENCES \*

**AUTHOR:** ÁLVARO JAVIER ANDRADE DURÁN ORTIZ. \*\*

**KEYWORDS:** CONTINUUM, CONVERGENT SEQUENCE, HIPERSPACE, OPEN MAP, SEMI-OPEN MAP, ALMOST-OPEN MAP, MONOTONE MAP.

**DESCRIPTION:**

The hyperspace of a continuum is a collection of closed subsets of the continuum under some conditions. The hyperspaces to be studied is the hyperspace of trivial convergent sequences  $\mathcal{S}_c(X)$ , where it contains all non-trivial convergent sequences of  $X$  and a new hyperspace of convergent sequences  $\mathcal{S}(X)$ , which contains all convergent sequences of  $X$ , is defined. In this document, we studied some relations between a mapping defined between continua and its induced mappings defined between two hyperspaces when one of these belonged to some class of functions, among the classes of functions we studied were open map, semi-open map, almost-open map, monotone map and other maps. In the third chapter, we introduce the definition of a new hyperspace, from which several results were obtained regarding some properties such as its connectedness, arc connectedness and local connectedness. Finally, in the last chapter we provide a series of open questions for those who want to continue with this research.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

## INTRODUCCIÓN

La Teoría de Continuos es la rama de la topología que estudia los continuos, esto es, espacios métricos, compactos, conexos y diferentes del vacío. A finales del siglo XIX en un contexto de los espacios euclidianos, el matemático ruso Georg Cantor introduce el término “continuo”, para referirse a cierta clase de subespacios del plano, que adicionando la compacidad, coincide con la definición de continuo que mencionamos anteriormente. Fue a comienzos del siglo XX que los matemáticos Fréchet, Borel, Hausdorff, Alexandroff y Urysohn, formalizaron el concepto de continuo, tal como lo describimos y conocemos actualmente.

El estudio de familias de subconjuntos de un espacio topológico, como espacio topológico, se conoce como Teoría de Hiperespacios. Los primeros hiperespacios fueron estudiados por los matemáticos Hausdorff y Vietoris, que a su vez, introducirían una topología sobre estas familias. Desde ese momento, los hiperespacios se han convertido en una fuente de ejemplos, un material de investigación de propiedades topológicas y una búsqueda constante de interpretar geoméricamente, estos espacios topológicos, por investigadores en el área de la Topología.

Por otra parte en 1989, en el artículo “induced mapping between hyperspaces”<sup>1</sup>, el profesor Hosokawa inicia un estudio sobre ciertas clases de funciones definidas entre hiperespacios de continuos, llamándolas, funciones inducidas. El profesor Hosokawa estudio el comportamiento de las relaciones existentes entre las funciones y sus funciones inducidas cuando éstas son: homeomorfismos, monótonas, abiertas o confluentes. Después de este trabajo pionero, se han dedicado muchas investigaciones alrededor de la funciones inducidas. En el capítulo 8 del libro *Topics on continua*

---

<sup>1</sup> H. Hosokawa. “Induced mappings on hyperspaces”. En: *Tsukuba Journal of Mathematics* 21.1 (1997), págs. 239-250.

<sup>2</sup>, el profesor Sergio Macías hace una recopilación de los trabajos de investigación relacionados con las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos.

En el capítulo dos de nuestro trabajo estudiamos el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales sobre continuos definido en “The hyperspace of convergent sequences” de 2015, por S. García Ferreira y Y.F. Ortiz Castillo <sup>3</sup>. Adicionalmente ampliamos algunos resultados estudiados en el artículo “Induced mappings on the hyperspaces of convergent sequences” **Induhyp**, donde los profesores David Maya, Patricia Pellicer Covarrubias y Roberto Pichardo Mendoza estudian diferentes clases de funciones inducidas en este hiperespacio.

Dado que en el Capítulo dos para que la función inducida definida entre los hiperespacios de sucesiones convergentes no triviales estuviera bien definida, era necesario que las funciones sean finita-1. En el Capítulo tres introducimos un nuevo hiperespacio liberándonos de esa fuerte condición.

Con este nuevo hiperespacio llamado hiperespacio de sucesiones convergentes, obtuvimos una gran cantidad de resultados, respecto a su conexidad, conexidad local y su arco conexidad. Adicionalmente en el Capítulo tres, anexamos una serie de resultados obtenidos a lo largo de nuestra investigación sobre la relación entre función inducida entre este hiperespacio y la función definida entre los continuos cuando una de estas pertenece a una clase de funciones.

---

<sup>2</sup> S. Macías y Holland. *Topics on continua*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005.

<sup>3</sup> S. García-Ferreira e Y. F. Ortiz-Castillo. “The hyperspace of convergent sequences”. En: *Topology and its Applications* 196 (2015), págs. 795-804.

## 1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es entrar en contexto sobre la temática en la cual se fundamenta este trabajo de grado; se presentarán conceptos, lemas y teoremas de las funciones entre continuos y de los hiperespacios de sucesiones convergentes, que son necesarios para entender correctamente los alcances de este trabajo de investigación.

### 1.1. Nociones básicas

Con el fin de recordar nociones básicas para el desarrollo de esta tesis, dividimos esta sección en tres: una referente a las funciones entre continuos, otra a hiperespacios de un continuo y finalmente, una donde nos enfocamos en el hiperespacio de las sucesiones convergentes no triviales.

**1.1.1. Funciones entre continuos** Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico. Empezaremos definiendo algunas clases de funciones en las cuales nos enfocaremos más adelante.

**Definición 1.1.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Entonces  $f$  es llamada:

1. finita-1, si  $f^{-1}(y)$  es finito para cada  $y \in Y$ ;
2. ligera, si  $f^{-1}(y)$  es totalmente desconexo;
3. monótona, si  $f^{-1}(y)$  es conexo para cada  $y \in Y$ ;
4. abierta, si  $f(U)$  es abierto en  $Y$  para todo  $U$  abierto de  $X$ ;

5. semiabierta, siempre que  $\text{int}f(U) \neq \emptyset$  para todo abierto no vacío  $U$  de  $X$ ;
6. casi abierta, si para cada  $y \in Y$ , existe  $x \in f^{-1}(y)$  tal que  $y \in \text{int}_Y(f(U))$ , para cada abierto  $U$  de  $X$ , con  $x \in U$ ;
7. cuasi interior, si para cada  $y \in Y$ ,  $L$  componente de  $f^{-1}(y)$  y  $U$  abierto de  $X$  tal que  $L \subseteq U$ , tenemos que  $y \in \text{int}_Y(f(U))$ ;
8. sequence-covering, si para cada sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$  en  $Y$ , existe una sucesión convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que  $x_n \in f^{-1}(y_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
9. 1-sequence-covering, si para cada  $y \in Y$  existe  $x \in f^{-1}(y)$  satisfaciendo que cada sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$ , existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x$  tal que  $x_n \in f^{-1}(y_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;
10. confluyente, si para cada subcontinuo  $Q$  en  $Y$  y cada componente  $C$  de  $f^{-1}(Q)$ , tenemos que  $f(C) = Q$ ;
11. débilmente confluyente, si para cada subconjunto  $Q$  en  $Y$ , existe una componente  $P$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que  $f(P) = Q$ ;
12. MO, si  $f = h \circ g$  donde  $h$  es monótona y  $g$  es abierta;
13. OM, si  $f = h \circ g$  donde  $h$  es abierta y  $g$  es monótona.

De las anteriores definiciones podemos extraer varias implicaciones. Por ejemplo, toda función abierta es semiabierta, casi abierta y MO. En el Diagrama I, que presentamos al final de esta sección, mostramos todas las implicaciones conocidas relacionadas con estas clases de funciones.

A continuación enunciaremos una serie de resultados en los cuales mostraremos algunas relaciones entre las funciones definidas anteriormente las cuales serán de utilidad en nuestro trabajo.

La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en <sup>4</sup>, usando el hecho de que todo espacio métrico es 1-numerable.

**Proposición 1.1.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

[(1)]  $f$  es casi abierta;  $f$  es 1-sequence-covering;  $f$  es sequence-covering.

**3. Demostración.** Veamos que (1) implica (2). Sea  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente a  $y$  en  $Y$ . Supongamos que la sucesión consiste en puntos distintos, en caso contrario el resultado es inmediato. Como  $f$  es casi abierta, existe  $x \in f^{-1}(y)$  tal que  $y \in \text{int}f(U)$  para todo abierto  $U$  con  $x \in U$ . Sea  $F_n = f^{-1}(y_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y sea  $\{U_i: i \in \mathbb{N}\}$  una colección decreciente de abiertos tal que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{x\}$ . Entonces para cada  $i$  existe un entero  $m(i)$  tal que  $F_n$  intersecta a  $U_i$  para todo  $n \geq m(i)$ . Tome  $x_j \in F_j \cap U_i$  para todo  $j$  tal que  $m(i) \leq j < m(i+1)$ . Entonces,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$  y  $x_n \in f^{-1}(y_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora, mostraremos que (2) implica (1). Sean  $y \in Y$  y  $x \in f^{-1}(y)$  tal que  $x$  cumple con la hipótesis de 1-sequence-covering. Sea  $U \subseteq X$  abierto con  $x \in U$ . Supongamos que  $y \notin \text{int}f(U)$ . Así, existe una sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$  tal que  $y_n \notin f(U)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f$  es 1-sequence-covering existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x$  donde  $f(x_n) = y_n$ . Así, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in U$  para todo  $n \geq n_0$ . Luego  $y_n \in f(U)$ , lo cual es absurdo. Por tanto,  $f$  es casi abierta.

Claramente (2) implica (3). Mostremos que (3) implica (2). Supongamos que  $f$  no es 1-sequence-covering. Luego existen  $y \in Y$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones convergentes a  $y$  tal que si  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes tales que  $f(q_n) = z_n$  y  $f(x_n) = y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ . Definamos  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  por  $w_{2n} = y_n$  y  $w_{2n+1} = z_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Notemos que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$ . Por

---

<sup>4</sup> F. Siwiec. "Sequence-covering and countably bi-quotient mappings". En: *Topology and its Applications* 1 (1971), 143–154.

lo anterior, no existe una sucesión convergente  $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que  $f(w'_n) = w_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Lo cual es absurdo puesto que  $f$  es sequence-covering. Por tanto,  $f$  es 1-sequence-covering.  $\square$

Notemos que, de la anterior proposición, ser casi abierta es equivalente a 1-sequence covering en espacios métricos.

De <sup>5</sup> y <sup>5</sup> tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 1.1.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos. Si  $f$  es cuasi interior, entonces  $f$  es confluyente.

**Proposición 1.1.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos. Entonces,  $f$  es cuasi interior si, y solo si,  $f$  es *OM*.

El siguiente lema nos será de utilidad más adelante.

**Lema 1.1.5.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Si  $f$  es semiabierta, entonces para todo abierto  $U \subseteq X$ , existe un abierto  $V \subseteq U$  tal que  $f(V) = \text{int}f(U)$ .

*Demostración.* Sea  $U \subseteq X$  un abierto. Definamos  $V = f^{-1}(\text{int}f(U)) \cap U$ . Notemos que  $V$  es abierto y no vacío ya que  $f$  es semiabierta y continua. Ahora, veamos que  $f(V) = \text{int}f(U)$ . Es claro que  $f(V) \subseteq \text{int}f(U)$ . Mostremos que  $\text{int}f(U) \subseteq f(V)$ . Sea  $y \in \text{int}f(U)$ . Dado que  $\text{int}f(U) \subseteq f(U)$ , existe  $x \in f^{-1}(\text{int}f(U)) \cap U$  tales que  $f(x) = y$ . De este modo,  $y \in f(V)$  y  $f(V) = \text{int}f(U)$ .  $\square$

Con la siguiente proposición mostramos una propiedad interesante de las funciones semiabiertas.

---

<sup>5</sup> A. Lelek y D. Read. "Compositions of confluent mappings and some other classes of functions". En: *Colloquium Mathematicum* 29 (1974), págs. 101-112.

**Proposición 1.1.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva entre continuos. Si  $f$  es semiabierta, entonces

$$L = \{x \in X : f(x) \in \text{int}(f(U)) \text{ para todo abierto } U \text{ con } x \in U\}$$

es denso.

*Demostración.* Sea  $U$  abierto en  $X$ . Probemos que  $U \cap L \neq \emptyset$ . Como  $X$  es normal y usando el Lema 1.1.5, podemos garantizar que existe un abierto  $V_1$  tal que  $V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U$  y  $f(V_1)$  es abierto. De igual manera, existe un abierto  $V_2$  tal que  $V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq V_1$  y  $f(V_2)$  es abierto. Procediendo de forma inductiva, construimos una sucesión de abiertos  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$  y  $f(V_{n+1})$  es abierto para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que podemos suponer además que existe  $x \in X$  tal que  $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ . Así, para todo abierto  $W$  con  $x \in W$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in V_N \subseteq W$ . Esto implica que  $f(x) \in \text{int} f(W)$  ya que  $f(V_N)$  es abierto y  $f(V_N) \subseteq f(W)$ . Por tanto,  $x \in U \cap L$  y  $U \cap L \neq \emptyset$ .  $\square$

Notemos que del anterior resultado se tiene que  $f(L)$  es denso. Además, si definimos por ejemplo  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  por

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \frac{3}{2} - t, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que  $f$  es semiabierta y  $L = [0, 1)$ . Ver la gráfica de  $f$  en la Figura 2.

El siguiente resultado es sencillo de demostrar, como no encontramos una demostración en la literatura, incluimos una prueba de esto a continuación.

**Teorema 1.1.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $f$  es ligera y cuasi interior, entonces  $f$  es abierta.

*Demostración.* Sea  $U$  un abierto de  $X$ . Probemos que  $f(U)$  es abierto. Sea  $y \in f(U)$ . Luego, existe  $x \in U$  tal que  $f(x) = y$ . Dado que  $f$  es ligera, tenemos que  $\{x\}$  es una componente de  $f^{-1}(y)$ . Así,  $y = f(x) \in \text{int} f(U)$ , puesto que  $f$  es cuasi interior. Por la arbitrariedad de  $y$  concluimos que  $f(U)$  es abierto, y por tanto,  $f$  es abierta.  $\square$

A partir de aquí mostraremos una serie de ejemplos resaltando algunas implicaciones que no vamos a tener entre las funciones introducidas en la Definición 1.1.1.

**Ejemplo 1.1.8.** Existe una función  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  monótona, que no es semiabierto, casi abierta ni sequence covering.

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}), & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

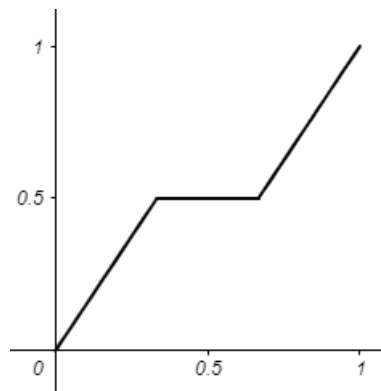


Figura 1. Función no semiabierto ni casi abierta

Fácilmente podemos verificar que  $f$  es monótona, pero no es casi abierta ni semiabierto. Veamos que no es sequence-covering. Sean  $\frac{1}{2} \in [0, 1]$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión

tal que  $y_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$  si  $n$  es par y  $y_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{n}$  si  $n$  es impar. Observe que  $(f^{-1}(y_{2n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente a  $\frac{2}{3}$  y  $(f^{-1}(y_{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente a  $\frac{1}{3}$ . Por lo tanto  $f$  no es sequence-covering.

**Ejemplo 1.1.9.** Existe una función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$ , donde  $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ , finita-1 y semiabierta, que no es casi abierta ni sequence-covering.

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$  definamos como  $f(t) = e^{2\pi ti}$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Notemos que la restricción  $f|_{(0,1)}: (0,1) \rightarrow \mathcal{S}^1 \setminus \{1\}$  es un homeomorfismo. Además,  $f(0) = f(1) = 1$ . Así, es inmediato verificar que  $f$  es finita-1, semiabierta y no es casi abierta. Mostremos que  $f$  no es sequence-covering. Sea  $y = e^{2\pi i} = f(1)$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión en  $\mathcal{S}^1$  definida por  $y_n = e^{(2\pi - \frac{1}{n+1})i}$  si  $n$  es par y  $y_n = e^{\frac{1}{n+1}i}$  si  $n$  es impar. Notemos que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$ . Además,  $(f^{-1}(y_{2n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión que converge 0, y  $(f^{-1}(y_{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión que converge a 1. Por lo tanto,  $f$  no es sequence-covering.

Veamos ahora que existe una función sequence-covering que no es confluyente.

**Ejemplo 1.1.10.** Existe una función  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  casi abierta y por tanto sequence-covering, que no es confluyente.

Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

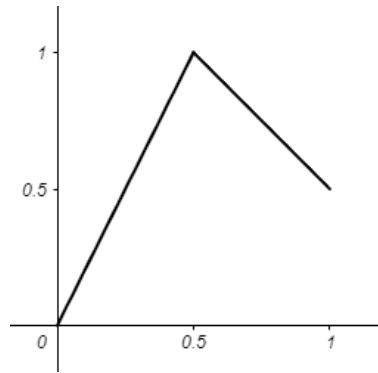


Figura 2. Función no cuasi interior

Sea  $A = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ . Note que  $f^{-1}(A) = C_1 \cup C_2$ , donde  $C_1 = [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$  y  $C_2 = [\frac{5}{6}, 1]$ . Como  $f(C_2) = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$  tenemos que  $f$  no es confluyente. Como  $f|_{[0, \frac{1}{2}]}: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$  es un homeomorfismo, es inmediato verificar que  $f$  es casi-abierto.

Por último enunciaremos un par de resultados que serán de utilidad más adelante, los cuales, nos dan caracterizaciones de las funciones abiertas entre continuos. Una demostración del siguiente teorema se puede consultar en <sup>6</sup>.

**Teorema 1.1.11.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios métricos. Entonces  $f$  es abierta si, y solo si, para cualquier sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$  en  $Y$  tenemos que  $\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$ .

Observemos que  $f^{-1}(y_n)$  y  $f^{-1}(y)$  son conjuntos, luego el límite enunciado en el teorema anterior debe entenderse como mostramos más adelante en la Definición 1.2.2.

De forma inmediata del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

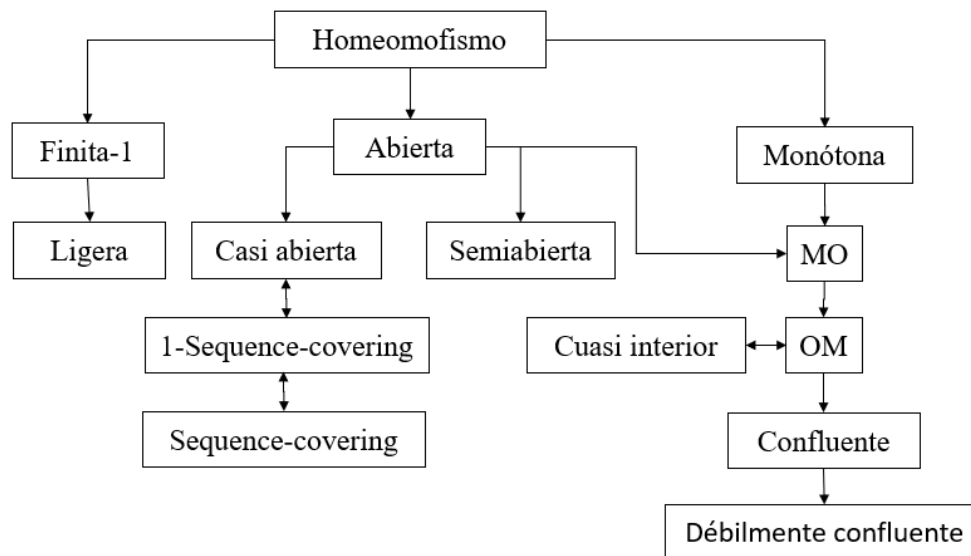
**Teorema 1.1.12.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos. Entonces  $f$  es abierta, si y solo si, para cualquier sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$  en  $Y$  y para cualquier

---

<sup>6</sup> Whyburn G. T. *Analytic Topology*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1942.

punto  $x \in f^{-1}(y)$  existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  y  $f(x_n) = y_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

De los resultados anteriormente expuestos tenemos el siguiente diagrama, donde se muestran algunas relaciones entre las funciones anteriormente definidas (ver Definición 1.1.1).



**Diagrama I**

## 1.2. Hiperespacios

En esta sección, dado un continuo  $X$ , se definirá el hiperespacio de cerrados no vacíos de  $X$ , que denotamos por  $2^X$ , ya que más adelante definiremos los hiperespacios  $\mathcal{S}_c(X)$  y  $\mathcal{S}(X)$ , espacios donde desarrollamos nuestro trabajo, como subespacios de  $2^X$ .

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Un hiperespacio de  $X$  es una colección específica de subconjuntos cerrados de  $X$ . En particular, denotamos por:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado de } X\}$ ;
- $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ ; y
- $\mathcal{F}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es finito}\}$ .

Notemos que  $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$  y  $\mathcal{F}(X) \subseteq 2^X$ . Además,  $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{F}_{n+1}(X)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

La topología con la que dotaremos el hiperespacio  $2^X$  es la *Topología de Vietoris*, la cual definimos a continuación. Naturalmente, los espacios  $\mathcal{F}(X)$  y  $\mathcal{F}_n(X)$  se dotarán con la topología de subespacio de  $2^X$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. La topología de Vietoris, denotada por  $\tau_V$ , es la topología para  $2^X$  generada por la base que consta de todos los subconjuntos de la forma  $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ , donde  $U_1, U_2, \dots, U_n$  son subconjuntos abiertos de  $X$  y

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

No es difícil mostrar que la colección dada en la definición anterior es, en efecto, una base de topología.

De la Definición 1.2.2, podemos ver fácilmente que  $\mathcal{F}(X)$  es denso en  $2^X$ .

Sea  $X$  un espacio métrico y compacto con métrica  $d$ , definimos la métrica de Hausdorff sobre  $2^X$  para cualesquiera  $A, B \in 2^X$  como:

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}, \text{ para todo } A, B \in 2^X$$

La siguiente proposición es muy conocida en la teoría de los hiperespacios de continuos <sup>7</sup>.

**Proposición 1.2.3.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Entonces la topología de Vietoris es equivalente a la generada por la métrica de Hausdorff.

De <sup>8</sup> tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.4.** Si  $X$  es un continuo, entonces  $2^X$  es un continuo.

En la siguiente observación, mostraremos que  $\mathcal{F}_n(X)$  preserva algunas propiedades del espacio producto  $X^n$  (ver <sup>9</sup>).

Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Consideremos la función  $\phi: X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ , definida como

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

---

<sup>7</sup> A. Illanes y S. Nadler. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. Monographs, Textbooks in pure y applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., 1989.

<sup>8</sup> S. Nadler. *Continuum Theory: An Introduction*. Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992.

<sup>9</sup> K. Borsuk y S. Ulam. "On symmetric products of topological spaces". En: *American Mathematical Society. Bulletin* 37 (1931), págs. 875-882.

Esta función es continua y la imagen de cada punto es un conjunto de a lo más  $n$  puntos. Notemos que si  $X$  es conexo, arco conexo o localmente conexo,  $X^n$  también lo será. Así, de la continuidad y sobreyectividad de  $\phi$ ,  $\mathcal{F}_n(X)$  tendría estas propiedades; es decir, si  $X$  es conexo, arco conexo o localmente conexo, entonces  $\mathcal{F}_n(X)$  también lo será.

Una demostración del siguiente resultado se puede encontrar en <sup>10</sup>.

**Lema 1.2.5.** Sean  $C_1, \dots, C_m$  subconjuntos cerrados, disjuntos dos a dos, conexos y no vacíos de  $X$ . Supongamos que  $m \leq n$ . Entonces  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{F}_n(X)$  es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de  $\mathcal{F}_n(X)$ .

La teoría de hiperespacios es un área muy estudiada dentro de la teoría de continuos. En <sup>7</sup> se puede consultar una completa recopilación para el lector interesado en estudiar acerca de los hiperespacios de continuos.

### 1.3. Hiperespacios de sucesiones convergentes no triviales

Dado  $X$  un espacio métrico y compacto introduciremos el hiperespacio de sucesiones convergentes  $\mathcal{S}_c(X)$  definido en <sup>3</sup> por los profesores S. García-Ferreira y Y.F. Ortiz-Castillo. En este artículo se estudian algunas propiedades como la conexidad, la conexidad local o la arco conexidad. Este estudio se amplía en <sup>11</sup>. En trabajos posteriores, los profesores David Maya, Patricia-Covarrubias y Roberto Pichardo-Mendoza en <sup>12</sup> continúan el estudio de algunas propiedades generales sobre este hiperespacio.

---

<sup>10</sup> G. Higuera. "Funciones inducidas en productos simétricos". Tesis de Pregrado (Matemático). México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

<sup>11</sup> S. García-Ferreira y R. Rojas-Hernández. "Connected like properties on the hyperspace of convergent sequence". En: *Topology and its Applications* 230 (2017), págs. 639-647.

<sup>12</sup> Pellicer-Covarrubias P. Maya D. y R. Pichardo-Mendoza. "General properties of the hyperspaces of convergent sequences". En: *Topology Proceedings* 51 (2018), págs. 143-168.

Dado un espacio métrico compacto  $X$ , un subconjunto  $S$  de  $X$  es una sucesión convergente no trivial en  $X$  si  $S$  es infinito numerable y existe  $x \in X$  tal que  $S \setminus U$  es finito para cada abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ . Cuando esto sucede, el punto  $x$  es llamado punto límite de  $S$  y diremos que  $S$  converge a  $x$  y escribiremos  $\lim S = x$ . Por definición, cada sucesión convergente no trivial es un espacio compacto. Así, la colección de estas sucesiones convergentes no triviales de  $X$  es un subconjunto de  $2^X$  y lo denotaremos como  $\mathcal{S}_c(X)$ ; es decir:

$$\mathcal{S}_c(X) = \{S \in 2^X : S \text{ es una sucesión convergente no trivial}\}.$$

El hiperespacio  $\mathcal{S}_c(X)$  será considerado subespacio de  $2^X$ . En particular, una base para la topología de  $\mathcal{S}_c(X)$  consiste en todos los conjuntos de la forma

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \mathcal{S}_c(X),$$

donde  $U_1, \dots, U_n$  son abiertos no vacíos de  $X$ . Usaremos la notación  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c$  para referirnos a  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \mathcal{S}_c(X)$ .

Una demostración del siguiente resultado la podemos encontrar en <sup>12</sup>. Esta proposición muestra que la base de Vietoris la podemos tomar con abiertos disjuntos. Este hecho nos facilitará algunas pruebas en el desarrollo de nuestro trabajo.

**Proposición 1.3.1.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Entonces, la colección

$$\mathcal{B}_V(X) = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c : U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos no vacío y disjuntos dos a dos de } X\},$$

es una base de  $\mathcal{S}_c(X)$ .

A continuación enunciaremos algunos resultados en relación a la conexidad, cone-

xidad local y la arco conexidad.

Una demostración de los siguientes resultados se podrán encontrar en <sup>11</sup>.

**Proposición 1.3.2.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Entonces  $\mathcal{S}_c(X)$  es conexo si, y solo si,  $X$  es conexo.

**Proposición 1.3.3.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Entonces  $\mathcal{S}_c(X)$  es localmente conexo si, y solo si,  $X$  es localmente conexo.

**Proposición 1.3.4.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $\mathcal{S}_c(X)$  es arco conexo, entonces  $X$  es arco conexo.

En <sup>3</sup> muestran un espacio métrico, compacto y arco conexo  $X$  tal que  $\mathcal{S}_c(X)$  no es arco conexo. Así, la implicación inversa de la proposición anterior no se tiene.

El siguiente resultado será útil más adelante para continuar con el estudio de la conexidad en hiperespacios.

**Proposición 1.3.5.** Si  $X$  es un continuo, entonces  $\mathcal{S}_c(X)$  es denso en  $2^X$ .

*Demostración.* Sean  $U_1, \dots, U_n$  abiertos no vacíos de  $X$ . Veamos que

$$\mathcal{S}_c(X) \cap \langle U_1, \dots, U_n \rangle \neq \emptyset.$$

Como que  $X$  es un continuo, podemos encontrar un punto de acumulación  $x$  en  $U_1$ . Luego, existe una sucesión convergente no trivial  $S_1$  contenida en  $U_1$ . Ahora, para todo  $i \in \{2, \dots, n\}$  tomemos  $x_i \in U_i$ . Note que si  $S = S_1 \cup \{x_2, \dots, x_n\}$ , entonces  $S \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c$ . De lo anterior, concluimos que  $\mathcal{S}_c(X)$  es denso en  $2^X$ .  $\square$

Notemos que si  $X$  fuera un espacio métrico compacto con un punto aislado, el resultado anterior no se tendría.

## 2. FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE LOS HIPERESPACIOS $2^X$ y $\mathcal{S}_c(X)$ .

En este capítulo entraremos en contexto con las funciones inducidas definidas entre los hiperespacios de sucesiones convergentes, siendo este una de las temáticas principales de nuestro trabajo de grado; presentaremos conceptos, lemas y teoremas, donde la mayoría de los resultados que se mostrarán fueron establecidos por los profesores David Maya, Patricia Pellicer-Covarrubias y Roberto Pichardo-Mendoza en **Induhyp**, de los cuales ampliamos como parte de nuestro trabajo de investigación.

### 2.1. Funciones inducidas

En esta sección estudiamos las posibles relaciones que tiene una función definida entre continuos y su función inducida definida entre los hiperespacios de sucesiones convergentes no triviales, cuando las funciones están en alguna clase de las dadas en la Definición 1.1.1.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Definamos la función  $2^f$  la función inducida definida entre los hiperespacios  $2^X$  y  $2^Y$  por:

$$2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X.$$

Además, se define que  $\mathcal{S}_c(f) = 2^f|_{\mathcal{S}_c(X)}$ . Tenemos que  $2^f$  es continua puesto que  $f$  lo es (ver <sup>13</sup>).

Note que es posible que  $\mathcal{S}_c(f)(A)$  no esté en  $\mathcal{S}_c(Y)$  cuando  $A \in \mathcal{S}_c(X)$ ; es decir,

---

<sup>13</sup> M. Ernest. "Topologies on spaces of subspaces". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 71 (1951), págs. 152-182.

existen funciones continuas entre continuos  $f$ , tales que  $\mathcal{S}_c(f)$  no es una función entre  $\mathcal{S}_c(X)$  y  $\mathcal{S}_c(Y)$ . Para evitar este problema tenemos el siguiente teorema. Una demostración de este resultado se puede encontrar en <sup>12</sup>.

**Teorema 2.1.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $f$  es finita-1;
- $\mathcal{S}_c(f): \mathcal{S}_c(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(Y)$  está bien definida.

Además de que  $\mathcal{S}_c(f)$  esté bien definida si  $f$  es finita-1, en **Induhyp** podemos encontrar una demostración del siguiente teorema, el cual será de utilidad más adelante en el estudio de las funciones monótonas.

**Teorema 2.1.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Si  $f$  es finita-1, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  es ligera.

En el siguiente ejemplo mostramos que ser una función finita-1 no implica que la función inducida  $\mathcal{S}_c(f)$  también lo sea.

**Ejemplo 2.1.3.** Defina  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Observe que  $f$  es continua y  $f^{-1}(y)$  es finito para cada  $y \in [0, 1]$ . Luego,  $f$  es finita-1.

Sea  $S = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{2}\}$ . Mostraremos que  $\mathcal{S}_c(f)^{-1}(\mathcal{S}_c(f)(S))$  es infinito.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $Q_n = S \cup \{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\}$ . Observe que  $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}_c(f)^{-1}(\mathcal{S}_c(f)(S))$ . Por lo tanto,  $\mathcal{S}_c(f)$  no es finita-1.

A partir de aquí seguiremos estudiando las relaciones que hay entre la función  $f$  y su función inducida  $\mathcal{S}_c(f)$ . Es importante resaltar que cuando nos referimos a la

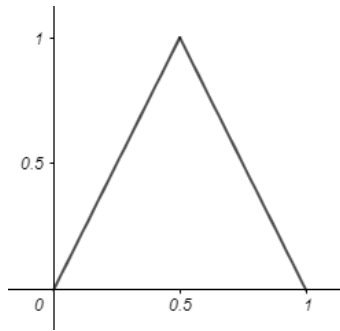


Figura 3.  $f$  finita-1 pero  $S_c(f)$  no es finita-1

función inducida  $S_c(f)$ , esta será una función entre los hiperespacios  $S_c(X)$  y  $S_c(Y)$ ; es decir,  $f$  será una función finita-1 y por tanto  $S_c(f)$  será ligera, de acuerdo con los teoremas 2.1.1 y 2.1.2.

El siguiente teorema se sigue directamente de la Definición 1.1.1.

**Teorema 2.1.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y finita-1 definida entre continuos. Entonces,  $f$  es sequence-covering si, y solo si,  $S_c(f)$  es sobreyectiva.

En consecuencia de los teoremas anteriores toda función  $f$  definida entre  $X$  y  $Y$  será finita-1 y sequence-covering.

## 2.2. Funciones inducidas abiertas.

En esta sección, estudiaremos las funciones abiertas, semiabiertas y casi abiertas. El principal resultado en esta sección es el Teorema 2.2.3 donde mostramos que  $f$  es abierta si, y solo si, su función inducida  $S_c(f)$  es abierta.

La demostración del siguiente teorema la tomamos de <sup>1</sup>.

**Teorema 2.2.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces  $f$  es abierta si, y solo si  $2^f$  es abierta.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es abierta. Sea  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $2^Y$  tal

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ , para algún  $B \in 2^Y$ . Como  $2^f$  es continua, tenemos que:

$$\limsup(2^f)^{-1}(B_n) \subseteq (2^f)^{-1}(B).$$

Ahora, probemos que  $(2^f)^{-1}(B) \subseteq \liminf(2^f)^{-1}(B_n)$ . Sean  $A \in (2^f)^{-1}(B)$  y  $U_1, U_2, \dots, U_m$  abiertos en  $X$  tales que  $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$ . Como  $X$  es un continuo, existen abiertos  $V_1, V_2, \dots, V_m$  en  $X$  tales que  $A \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle$  y  $\text{cl}_X(V_i) \subseteq U_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Como  $f$  es abierta,  $\langle f(V_1), \dots, f(V_m) \rangle$  es un abierto en  $2^Y$  y  $B \in \langle f(V_1), \dots, f(V_m) \rangle$ . Además, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $B_n \in \langle f(V_1), \dots, f(V_m) \rangle$  para todo  $n \geq n_0$ . Definamos  $A_n = f^{-1}(B_n) \cap (\bigcup_{i=1}^m \text{cl}_X(V_i))$  para cada  $n \geq n_0$ . Esto implica que si  $n \geq n_0$ ,  $A_n \in (2^f)^{-1}(B_n) \cap \langle U_1, \dots, U_m \rangle$ . De esta forma  $A \in \liminf(2^f)^{-1}(B_n)$ . Así,

$\lim(2^f)^{-1}(B_n) = (2^f)^{-1}(B)$  y  $2^f$  es abierta, por el Teorema 1.1.12.

Ahora supongamos que  $2^f$  es abierta. Sean  $U$  un abierto en  $X$  y  $x \in U$ . Claramente,  $\langle U \rangle$  es abierto en  $2^X$  y  $\{x\} \in \langle U \rangle$ . Como  $2^f$  es abierta,  $2^f(\langle U \rangle)$  es abierto. Ahora, mostraremos que  $2^f(\langle U \rangle) = \langle f(U) \rangle$  y  $\{f(x)\} \in \langle f(U) \rangle$ , lo cual será suficiente para decir que  $f(U)$  es una vecindad de  $f(x)$ . Notemos que  $2^f(\langle U \rangle) \subset \langle f(U) \rangle$ . Veamos que  $\langle f(U) \rangle \subseteq 2^f(\langle U \rangle)$ . Sea  $A \in \langle f(U) \rangle$ . Supongamos que  $(2^f)^{-1}(A) \cap \langle U \rangle = \emptyset$ . Así, para todo  $C \subseteq U$  con  $f(C) = A$  existe  $s \in \text{cl}_X(C) \setminus C$  tal que  $f(s) \notin A$ . Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente a  $s$ . Por la continuidad de  $f$  tenemos que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(s)$  con  $f(x_n) \in A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $A$  es cerrado,  $f(s) \in A$ , lo cuál es absurdo. Por tanto,  $\langle f(U) \rangle \subseteq 2^f(\langle U \rangle)$ , es decir  $2^f(\langle U \rangle) = \langle f(U) \rangle$  con  $\{f(x)\} \in \langle f(U) \rangle$ . Así,  $f(x) \in \text{int}_Y(f(U))$ . Como  $x$  fue un punto arbitrario,  $f(U)$  es abierto en  $Y$  y  $f$  es una función abierta.  $\square$

Algunas de las relaciones que estudiamos en este trabajo fueron presentadas por los profesores David Maya Escudero, Patricia Pellicer Covarrubias y Roberto Pichar-

do Mendoza en **Induhyp**. De este artículo tomamos los resultados que mostramos en esta sección.

La demostración del siguiente resultado hace parte del desarrollo de nuestro trabajo por ello se mostrará a continuación.

**Lema 2.2.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y finita-1 definida entre continuos. Si  $f$  es abierta, entonces para todo abierto  $U$  en  $X$  tenemos que

$$\langle f(U) \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U \rangle_c).$$

*Demostración.* Tomemos  $S \in \langle f(U) \rangle_c$ , esto es,  $S$  es una sucesión convergente y  $S \subseteq f(U)$ . Sea  $S = \{y_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$  una enumeración de  $S$ , donde  $\lim y_n = y$ . Como  $f$  es abierta, por el Teorema 1.1.12, para cada  $x \in f^{-1}(y) \cap U$  existe una sucesión  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x$ , con  $z_n \in f^{-1}(y_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $U$  es abierto existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $z_n \in U$ .

Definamos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la siguiente forma  $x_n \in f^{-1}(y_n) \cap U$  para todo  $n < n_0$  y  $x_n = z_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Note que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ , y si  $Q = \{x_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  tenemos que  $Q \subseteq U$  y  $\mathcal{S}_c(f)(Q) = S$ . Así,  $\langle f(U) \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U \rangle_c)$ .  $\square$

Como resultado de **Induhyp** y del Lema 2.2.2 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, finita-1 y sequence-covering definida entre continuos. Entonces,  $f$  es abierta si, y solo si,  $\mathcal{S}_c(f)$  es abierta.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{S}_c(f)$  es abierta. Sea  $U \subseteq X$  abierto. Veamos que  $f(U)$  es abierto.

Sea  $a \in U$ . Ahora, sea  $S \in \langle U \rangle_c$  con  $a \in S$ . Como  $\mathcal{S}_c(f)$  es abierta, existe  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c \in \mathcal{B}_V(Y)$  tal que  $\mathcal{S}_c(f)(S) \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U \rangle_c)$ . Notemos que  $f(a) \in \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Mostraremos que  $\bigcup_{i=1}^n U_i \subseteq f(U)$ . Si  $b \in \bigcup_{i=1}^n U_i$ , entonces

$\mathcal{S}_c(f)(S) \cup \{b\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c$ . Por lo tanto, existe  $P \in \langle U \rangle_c$  tal que  $\mathcal{S}_c(f)(P) = \mathcal{S}_c(f)(S) \cup \{b\}$ . Como  $P \cap f^{-1}(b) \neq \emptyset$ ,  $b \in f(U)$ . Por tanto,  $f$  es abierta.

Supongamos que  $f$  es abierta y mostraremos que  $\mathcal{S}_c(f)$  también es abierta. Sea  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c \in \mathcal{B}_V(X)$ . Será suficiente probar que

$$\langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c);$$

puesto que si  $S \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c$ , tenemos que  $\mathcal{S}_c(f)(S) \in \langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_c$ . Sean  $Q \in \langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_c$  y  $U_k$  tal que  $\text{lím} Q \in f(U_k)$ . Como  $f(U_k)$  es abierto tenemos que  $Q \setminus f(U_k)$  es finito. Por el Teorema 1.1.12 existe  $S_1 \in \langle U_k \rangle_c$  tal que  $\mathcal{S}_c(f)(S_1) = Q \cap f(U_k)$ . Sea

$$S_2 = \{x \in X : x \in f^{-1}(Q \setminus f(U_k)) \cap U_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ con } i \neq k\}.$$

Notemos que  $S_2$  es finito ya que  $f$  es finita-1. Así, si  $S = S_1 \cup S_2$ , entonces tenemos que  $S \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c$  con  $\mathcal{S}_c(f)(S) = Q$ . Por lo tanto,  $Q \in \mathcal{S}_c(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_c)$ . Luego,  $\mathcal{S}_c(f)$  es abierta. □

Como consecuencia del Teorema 1.1.7, Teorema 2.1.2 y Teorema 2.2.3 tenemos los siguientes resultados.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, finita-1 y sequence-covering definida entre continuos. Si  $f$  es cuasi interior, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  es abierta.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, finita-1 y sequence-covering definida entre continuos. Entonces  $f$  es monótona si, y sólo si,  $\mathcal{S}_c(f)$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es monótona. Así, dado que  $f$  es finita-1. por el Teorema 1.1.7,  $f$  es un homeomorfismo. Fácilmente podemos verificar que  $\mathcal{S}_c(f)$  es

una biyección. Así, por el Teorema 2.2.3 tenemos que  $\mathcal{S}_c(f)$  es un homeomorfismo. Ahora, supongamos que  $\mathcal{S}_c(f)$  es un homeomorfismo. Veamos que  $f$  es monótona, para ello se mostrará que es inyectiva. Sean  $a, b \in X$  y  $S \in \mathcal{S}_c(X \setminus \{a, b\})$ . Como  $\mathcal{S}_c(f)$  es inyectiva, tenemos que  $\mathcal{S}_c(f)(S \cup \{a\}) \neq \mathcal{S}_c(f)(S \cup \{b\})$ , por lo tanto  $f(a) \neq f(b)$ . Así, por el Teorema 2.2.3,  $f$  es abierta y biyectiva; es decir,  $f$  es un homeomorfismo y por tanto monótona.  $\square$

En la siguiente tabla se encontrará un resumen de las relaciones mostradas anteriormente entre  $f$ ,  $2^f$  y  $\mathcal{S}_c(f)$  cuando una de estas es abierta.

Abierta	$2^f$	$\mathcal{S}_c(f)$	$f$
$2^f$	✓	Teorema 2.2.3	Teorema 2.2.1
$\mathcal{S}_c(f)$	Teorema 2.2.3	✓	Teorema 2.2.3
$f$	Teorema 2.2.1	Teorema 2.2.3	✓

Tabla 1. Funciones abiertas

**2.2.1. Funciones inducidas semiabiertas** En esta sección se estudiarán las funciones semiabiertas, siendo esta una condición más débil que la de ser función abierta (ver Definición 1.1.1).

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en <sup>14</sup>.

**Teorema 2.2.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces  $f$  es semiabierta si, y solo si,  $2^f$  es semiabierta.

Ahora veamos qué sucede cuando la función inducida  $\mathcal{S}_c(f)$  es semiabierta. El siguiente resultado hace parte nuestra investigación.

---

<sup>14</sup> Z. Xianjiu H. Fanping y Z. Gengrong. "Semi-openness and Almost openness of Induced Mappings". En: *Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities. Ser. B.* 20.1 (2005), págs. 21-26.

**Teorema 2.2.5.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es semiabierta, entonces  $f$  es semiabierta.

*Demostración.* Sea  $U$  un abierto no vacío en  $X$ . Por hipótesis existe  $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_c \in \mathcal{B}_V(Y)$  tal que  $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U \rangle_c)$ . Sean  $S \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_c$  y  $\lim S = y$ . Supongamos que  $y \in U_1$ . Ahora, si  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente a  $y$ , entonces, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$  tenemos que  $z_n \in U_1$ . Así, definamos una sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $y_n \in U_n$  para  $n \leq m$ , y para  $n > m$  tenemos que  $y_n = z_{n_0+n}$ . Sea  $Q = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ . Nótese que  $Q \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{S}_c(f)(\langle U \rangle_c)$ . Luego, existe  $R \in \langle U \rangle_c$  tal que  $\mathcal{S}_c(f)(R) = Q$ , es decir,  $f(R) = Q \subseteq f(U)$ . Por la arbitrariedad de  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  concluimos que  $y \in \text{int}_Y(f(U))$ . Por tanto,  $f$  es semiabierta.  $\square$

Por los teoremas 2.2.4 y 2.2.5, se sigue el siguiente corolario.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es semiabierta, entonces  $2^f$  es semiabierta.

De forma natural surge la pregunta sobre la implicación inversa al anterior teorema.

**Pregunta 2.2.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es semiabierta (o  $2^f$  es semiabierta), entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  es semiabierta?

En la siguiente tabla se encontrará un resumen de las relaciones mostradas anteriormente entre  $f$ ,  $2^f$  y  $\mathcal{S}_c(f)$  cuando una de estas es semiabierta.

Semiabierta	$2^f$	$\mathcal{S}_c(f)$	$f$
$2^f$	✓	Pregunta 2.2.6	Teorema 2.2.4
$\mathcal{S}_c(f)$	Corolario 2.2.1	✓	Teorema 2.2.5
$f$	Teorema 2.2.4	Pregunta 2.2.6	✓

Tabla 2. Funciones semiabiertas

**2.2.2. Funciones inducidas casi abiertas** Una demostración de la relación que mostramos en la siguiente proposición se puede encontrar en <sup>14</sup>.

**Teorema 2.2.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces  $2^f$  es casi abierta si, y solo si,  $f$  es casi abierta.

Para funciones casi abiertas tenemos la siguiente implicación. La demostración de estos resultados se pueden encontrar en **Induhyp**. Sin embargo, como consecuencia directa de la Proposición 2.1.4 y del Teorema 1.1.2 se tiene otra demostración.

**Teorema 2.2.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1. Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es casi abierta, entonces  $f$  es casi abierta.

*Demostración.* Notemos que  $\mathcal{S}_c(f)$  es sobreyectiva ya que esta es casi abierta. Así, de la Proposición 2.1.4 y de la Proposición 1.1.2, se tiene que  $f$  es casi abierta.

□

De igual manera surge la pregunta sobre la implicación inversa al anterior teorema.

**Pregunta 2.2.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es casi abierta, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  es casi abierta?

Casi abierta	$2^f$	$\mathcal{S}_c(f)$	$f$
$2^f$	✓	Pregunta 2.2.9	Teorema 2.2.7
$\mathcal{S}_c(f)$	Teorema 2.2.8	✓	Teorema 2.2.8
$f$	Teorema 2.2.7	Pregunta 2.2.9	✓

Tabla 3. Funciones casi abiertas

Como consecuencia de la Observación 1.1.1 y del Teorema 2.2.8 para las funciones que son 1-sequence-covering tenemos la siguiente implicación.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es 1-sequence-covering, entonces también lo es  $f$ .

Como consecuencia del Corolario 2.2 y de su demostración tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.10.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es monótona;
2.  $S_c(f)$  es monótona;
3.  $f$  es un homeomorfismo;
4.  $S_c(f)$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Claramente (4) implica (2). Por el Corolario 2.2 tenemos que (1), (3) y (4) son equivalentes. Por el Teorema 2.1.2 (2) implica (1) ya que  $S_c(f)$  por ser monótona y ligera, es inyectiva. Así,  $S_c(f)$  es biyectiva. Por el Corolario 2.2,  $f$  es un homeomorfismo. □

### 3. HIPERESPACIO $\mathcal{S}(X)$

El objetivo de este capítulo es introducir un nuevo hiperespacio de sucesiones convergentes y en el cual se presentarán; conceptos, lemas y teoremas en relación a este nuevo hiperespacio y las funciones inducidas definida entre estos hiperespacios. Este capítulo hace para de nuestra investigación independiente.

Cabe resaltar que la introducción de este nuevo hiperespacio de sucesiones convergentes nace de la necesidad de ampliar nuestros ejemplos y resultados expuestos en el Capítulo 2.

#### 3.1. Propiedades generales

En esta sección empezaremos mostrando algunos propiedades del hiperespacio de sucesiones convergentes, dando algunas equivalencias en relación a la conexidad, arcoconexidad y la conexidad local.

**Definición 3.1.1.** Sea  $X$  un continuo. Definamos el siguiente hiperespacio:

$$\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}_c(X) \cup \mathcal{F}(X).$$

El hiperespacio  $\mathcal{S}(X)$  será considerado subespacio de  $2^X$ . Por ello, una base para la topología de  $\mathcal{S}(X)$  está dada por los conjuntos  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \mathcal{S}(X)$ , denotados por  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}}$ .

De la Proposición 1.3.1 tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.2.** Sea  $X$  un continuo. Entonces, la colección

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(X) = \{ \langle U_1, \dots, U_n \rangle_c : U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos no vacíos} \\ \text{disjuntos dos a dos de } X \},$$

es una base de  $\mathcal{S}(X)$ .

*Demostración.* Como  $X$  es un continuo, se tiene que para cualquier  $A \in \mathcal{F}(X)$  y  $\mathcal{U}$  abierto en  $\mathcal{S}(X)$  con  $A \in \mathcal{U}$  podemos encontrar una familia de abiertos  $U_1, \dots, U_n$  abiertos disjuntos con  $|U_i \cap A| = 1$  tal que  $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{U}$ . Por tanto, de lo anterior y de la Proposición 1.3.1,  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$  es una base de  $\mathcal{S}(X)$ .  $\square$

Si  $X$  es un continuo, por la Proposición 1.3.2,  $\mathcal{S}_c(X)$  es conexo. Usando este hecho tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $X$  es conexo, entonces  $\mathcal{S}(X)$  es conexo.

*Demostración.* Por la Proposición 1.3.5, tenemos que

$$\mathcal{S}_c(X) \subseteq \mathcal{S}(X) \subseteq \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{S}_c(X)).$$

Como  $\mathcal{S}_c(X)$  es conexo, por la Proposición 1.3.2, tenemos que  $\mathcal{S}(X)$  también lo será.  $\square$

**Proposición 3.1.4.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $\mathcal{S}(X)$  es conexo, entonces  $X$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es desconexo. Entonces existen abiertos no vacíos y disjuntos  $U$  y  $V$ , tales que  $X = U \cup V$ . Notemos que  $\mathcal{S}(X) = \langle U \rangle_{\mathcal{S}} \cup \langle X, V \rangle_{\mathcal{S}}$  con  $\langle U \rangle_{\mathcal{S}} \cap \langle X, V \rangle_{\mathcal{S}} = \emptyset$ . Observemos que si  $S \in \mathcal{S}(X)$  y  $x \in V$ , tenemos que  $S \cup \{x\} \in \langle X, V \rangle_{\mathcal{S}}$ . Además,  $\{z\} \in \langle U \rangle_{\mathcal{S}}$  para cada  $z \in U$ . Luego, los abiertos  $\langle U \rangle_{\mathcal{S}}$  y  $\langle X, V \rangle_{\mathcal{S}}$  son no vacíos, contradiciendo la conexidad de  $\mathcal{S}(X)$ . De lo anterior,  $X$  es conexo.  $\square$

Como resultado de las proposiciones 1.3.2, 3.1.3 y 3.1.4, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.5.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $X$  es conexo;
- (2)  $\mathcal{S}_c(X)$  es conexo;
- (3)  $\mathcal{S}(X)$  es conexo.

De igual forma nos preguntamos la relación entre  $X$ ,  $\mathcal{S}_c(X)$  y  $\mathcal{S}(X)$  si alguno de estos es localmente conexo. En consecuencia de lo anterior, tenemos los siguiente resultados.

**Proposición 3.1.6.** Si  $X$  es localmente conexo, entonces  $\mathcal{S}(X)$  es localmente conexo.

*Demostración.* Sea  $S \in \mathcal{S}(X)$  y  $\mathcal{O}$  una vecindad de  $S$  en  $\mathcal{S}(X)$ . Como  $X$  es localmente conexo, existen  $V_1, V_2, \dots, V_n$  abiertos conexos de  $X$  con

$$S \in \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}.$$

Veamos que  $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$  es conexo. Notemos que  $\mathcal{F}(V_i)$  es conexo para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  (ver Observación 1.2). Así,  $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}(V_i)$  es conexo.

Sea  $u: \prod_{i=1}^n \mathcal{F}(V_i) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  la función definida por

$$u(F_1, \dots, F_n) = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n, \text{ para todo } (F_1, \dots, F_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}(V_i).$$

Es fácil verificar que  $u$  es continua. Notemos que  $u(\prod_{i=1}^n \mathcal{F}(V_i)) = \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$ .

Luego,  $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$  es conexo. Como  $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$  es denso en  $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}}$ , tenemos que  $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}}$  es conexo. Por tanto,  $\mathcal{S}(X)$  es localmente conexo.  $\square$

Como consecuencia de <sup>15</sup>, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.7.** Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $\mathcal{S}(X)$  es localmente conexo, entonces  $X$  es localmente conexo.

De las proposiciones 1.3.3, 3.1.6 y d 3.1.7, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.8.** Sea  $X$  un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $X$  es localmente conexo;
- (2)  $\mathcal{S}_c(X)$  es localmente conexo;
- (3)  $\mathcal{S}(X)$  es localmente conexo.

A continuación definiremos la función inducida  $\mathcal{S}(f)$  para demostrar los siguientes resultados. Esta definición servirá como introducción para la siguiente sección.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Definamos la función  $\mathcal{S}(f)$  como  $\mathcal{S}(f) = 2^f|_{\mathcal{S}(X)}$ . Dado que  $f$  es continua,  $2^f$  es continua y por tanto,  $\mathcal{S}(f)$  también lo será (ver <sup>13</sup>).

De la definición de sequence-covering tenemos el siguiente resultado.

**Lema 3.1.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces  $f$  es sequence covering si, y solo si,  $\mathcal{S}(f)$  es sobreyectiva.

En la siguiente sección estudiaremos más a profundidad esta clase de funciones. Sin embargo, el siguiente resultado será de gran ayuda en la Proposición 3.1.14.

---

<sup>15</sup> Pellicer-Covarrubias P. Escobedo R. y V. Sánchez-Gutiérrez. "The hyperspace of totally disconnected sets". En: *Glasnik Matematički* 55.1 (2020), págs. 113-128.

**Proposición 3.1.10.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es.

*Demostración.* De la Proposición 1.1.2 y por el Lema 3.1.9 tenemos que  $\mathcal{S}(f)$  es sobreyectiva. Veamos que es inyectiva. Sean  $S, Q \in \mathcal{S}(X)$  tales que  $\mathcal{S}(f)(S) = \mathcal{S}(f)(Q)$ ; es decir,  $f(S) = f(Q)$ . Como  $f$  es inyectiva se tiene que  $S = Q$ . Por tanto,  $\mathcal{S}(f)$  es una biyección.

Ahora mostraremos que  $(\mathcal{S}(f))^{-1} = \mathcal{S}(f^{-1})$ . Sean  $Q \in \mathcal{S}(Y)$  y  $S \in \mathcal{S}(X)$ , tales que  $(\mathcal{S}(f))^{-1}(Q) = S$ . Luego,  $\mathcal{S}(f)(S) = Q$  y así,  $f(S) = Q$ . Como  $f$  es biyectiva, tenemos que  $f^{-1}(Q) = S$ ; es decir,  $\mathcal{S}(f^{-1})(Q) = S$ . Por tanto,  $(\mathcal{S}(f))^{-1} = \mathcal{S}(f^{-1})$ .

Dado que  $f^{-1}$  es continua, tenemos que  $(\mathcal{S}(f))^{-1}$  también lo es (ver <sup>13</sup>). Por lo tanto,  $\mathcal{S}(f)$  es un homeomorfismo.  $\square$

Una demostración del siguiente resultado se asemeja a la de <sup>12</sup>, por ello, no se agregará su demostración.

Denotaremos el intervalo  $[0, 1]$  como  $I$  con el fin de agilizar la escritura.

**Lema 3.1.11.** Sean  $X$  un continuo. Si  $\alpha: I \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es un camino, entonces para cada  $p \in \alpha(0)$  existe un camino  $\beta: I \rightarrow X$  tal que  $\beta(t) \in \alpha(t)$ , donde  $t \in I$  y  $\beta(0) = p$ .

**Proposición 3.1.12.** Sea  $X$  un continuo. Si  $\mathcal{S}(X)$  es arco conexo, entonces  $X$  también lo es.

*Demostración.* Sea  $p, q \in X$ . Como  $\mathcal{S}(X)$  es arco conexo, existe un camino  $\alpha: I \rightarrow \mathcal{S}(X)$  tal que  $\alpha(0) = \{p\}$  y  $\alpha(1) = \{q\}$ . Por el Lema 3.1.11, existe un camino  $\beta: I \rightarrow X$  con  $\beta(0) = p$  y  $\beta(1) = q$ . Por lo tanto,  $X$  es arco conexo.  $\square$

De <sup>15</sup> tenemos que la implicación inversa de la proposición anterior es falsa.

**Lema 3.1.13.**  $\mathcal{S}(I)$  es arco conexo.

*Demostración.* Sabemos que  $\mathcal{S}_c(I)$  y  $\mathcal{F}(I)$  son arco conexos por <sup>16</sup> y <sup>9</sup>. Probaremos que existe un arco  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}(I)$  tal que  $\alpha(I) \cap \mathcal{S}_c(I) \neq \emptyset$  y  $\alpha(I) \cap \mathcal{F}(I) \neq \emptyset$ . Sean  $S \in \mathcal{S}_c(I)$ , donde  $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$  con  $\lim S = x_0$ . Definamos

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathcal{S}(I) \\ t &\rightarrow \alpha(t) = t \cdot S = \{t \cdot x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \end{aligned}$$

Fácilmente podemos ver que  $\alpha$  está bien definida. Mostremos que  $\alpha$  es continua. Sean  $r \in I$  y  $U_1, \dots, U_m$  abiertos en  $I$  tales que  $r \cdot S \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_S$ . Notemos que  $\{I \setminus S, U_1, \dots, U_m\}$  es una cubierta abierta de  $I$ . Sea  $\delta > 0$  un número de Lebesgue para esta cubierta. Sea  $t \in (r - \delta, r + \delta) \cap I$ . Notemos que para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $d(r \cdot x_n, t \cdot x_n) \leq |t - r| < \delta$ . Como  $r \cdot S \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_S$ , para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tenemos que  $B(r \cdot x_n, \delta) \subseteq U_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

De esta forma,  $t \cdot S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(r \cdot x_n, \delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$ ; además,  $t \cdot S \cap U_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  ya que para cada  $U_i$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $r \cdot x_n \in U_i$  y así,  $t \cdot x_n \in U_i$ . Por lo tanto,  $t \cdot S \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_S$ . Esto implica que  $\alpha$  es continua,  $\alpha(0) = \{0\}$  y  $\alpha(1) = S$ . Por tanto  $\mathcal{S}(I)$  es arco conexo. □

**Proposición 3.1.14.** Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $\mathcal{S}_c(X)$  es arco conexo, entonces  $\mathcal{S}(X)$  también lo es.

*Demostración.* De <sup>11</sup> tenemos que  $X$  es arco conexo. Por lo tanto, existe un encaje  $\alpha : I \rightarrow X$ . Por la Proposición 3.1.10,  $\mathcal{S}(\alpha(I))$  es arco conexo con  $\mathcal{S}(\alpha(I)) \cap \mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$  y  $\mathcal{S}(\alpha(I)) \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$ .

Por lo anterior,  $\mathcal{S}(X)$  es arco conexo, dado que  $\mathcal{S}_c(X)$  es arco conexo, además, como  $X$  también lo es, tenemos que  $\mathcal{F}(X)$  es arco conexo (ver Observación 1.2). □

---

<sup>16</sup> R. Engelking. *General topology*. Sigma series in pure mathematics, 1989.

De la anterior proposición surge de forma natural la siguiente pregunta.

**Pregunta 3.1.15.** Sea  $X$  un espacio métrico. ¿Si  $\mathcal{S}(X)$  es arco conexo, entonces  $\mathcal{S}_c(X)$  también lo es?

Como consecuencia de las proposiciones 3.1.12 y 3.1.14, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.16.** Sea  $X$  un espacio métrico. Dadas las siguientes afirmaciones:

- (1)  $X$  es arco conexo;
- (2)  $\mathcal{S}_c(X)$  es arco conexo;
- (3)  $\mathcal{S}(X)$  es arco conexo.

Tenemos que (2) implica (3) y (3) implica (1).

A continuación mostraremos que cuando  $X$  es contráctil vamos a tener que el hiperespacio  $\mathcal{S}(X)$  también lo será, para ello empezaremos dando la definición de espacio contráctil.

**Definición 3.1.17.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es contráctil si existen un punto  $p \in X$  y una función  $H: X \times I \rightarrow X$  continua tales que  $H(x, 0) = x$  y  $H(x, 1) = p$  para todo  $x \in X$ .

**Proposición 3.1.18.** Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es contráctil, entonces  $\mathcal{S}(X)$  es contráctil.

*Demostración.* Dado que  $X$  es contráctil, existen un punto  $p$  y una función  $H: X \times I \rightarrow X$  continua tales que  $H(x, 0) = x$  y  $H(x, 1) = p$  para todo  $x \in X$ .

Dado que  $H$  es continua, la función inducida  $\mathcal{S}(H): \mathcal{S}(X \times I) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  es continua.

Definamos

$$\begin{aligned} l: \mathcal{S}(X) \times I &\rightarrow \mathcal{S}(X \times I) \\ (S, t) &\rightarrow l(S, t) = S \times \{t\}. \end{aligned}$$

Primero veamos que  $l$  está bien definida. Sea  $S \in \mathcal{S}(X)$  y  $t \in I$ . Si  $S \in \mathcal{F}(X)$  es claro que  $l(S, t) \in \mathcal{S}(X \times I)$ . Sea  $S = \{x_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  con  $\lim x_n = x$ . Sea  $U$  un abierto de  $X$  y  $V$  un abierto en  $I$  tal que  $x \in U$  y  $t \in V$ . Como  $\lim x_n = x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $(x_n, t) \in U \times V$ . Así, por la arbitrariedad de  $U$  y  $V$  tenemos que  $S \times \{t\} \in \mathcal{S}(X \times I)$  con  $\lim S \times \{t\} = (x, t)$ . Por tanto,  $l$  está bien definida.

Ahora, probaremos que  $l$  es continua. Sean  $U_1, \dots, U_n$  abiertos en  $X$  y  $V_1, \dots, V_n$  abiertos en  $I$ . Notemos que  $\bigcap_{j=1}^n V_j \neq \emptyset$ , de lo contrario

$$l^{-1}(\langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S) = \emptyset.$$

Si  $(Q, t) \in l^{-1}(\langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S)$ , entonces  $Q \times \{t\} \in \langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S$ , de esta forma  $Q \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_S$  y  $t \in \bigcap_{j=1}^n V_j$ . Ahora, veamos que

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle_S \times (\bigcap_{j=1}^n V_j) \subseteq l^{-1}(\langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S).$$

Dado  $(S, r) \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_S \times (\bigcap_{j=1}^n V_j)$  tenemos que  $S \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_S$  y  $r \in \bigcap_{i=1}^n V_i$  por lo tanto,  $S \times \{r\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n (U_j \times V_j)$  y  $S \times \{r\} \cap (U_j \times V_j) \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Es decir,  $S \times \{r\} \in \langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S$ . Por la arbitrariedad de  $(Q, t)$  mostramos que existe un abierto tal que

$$(Q, t) \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_S \times (\bigcap_{j=1}^n V_j) \subseteq l^{-1}(\langle U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \rangle_S).$$

Ahora, definamos  $G: \mathcal{S}(X) \times I \rightarrow \mathcal{S}(X)$  como  $G(S, t) = (\mathcal{S}(H) \circ l)(S, t)$ . Notemos

que  $G$  es continua dado que  $\mathcal{S}(H)$  y  $l$  lo son; además,

$$G(S, 0) = S \text{ y } G(S, 1) = \{p\} \text{ para toda } S \in \mathcal{S}(X).$$

Por lo tanto,  $\mathcal{S}(X)$  es contráctil. □

Como pudimos ver, en esta sección se introdujo la función inducida  $\mathcal{S}(f)$  dada una función entre continuos  $f$ . En la siguiente sección se mostrarán algunas relaciones entre la funciones  $f$  y su función inducida  $\mathcal{S}(f)$ .

### 3.2. Funciones inducidas entre hiperespacios de sucesiones convergentes.

De igual forma que en capítulo anterior, mostraremos algunas relaciones entre  $f$  y  $\mathcal{S}(f)$  cuando pertenecen a una de las clases de funciones definidas en el Capítulo 1 (ver Definición 1.1.1).

De la Proposición 3.1.10 tenemos que si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es. Fácilmente se puede demostrar la implicación inversa; solo basta con mostrar que  $f$  es inyectiva dado que  $f$  es una función continua definida entre continuos. Por tal razón no se anexará su demostración.

**Proposición 3.2.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es un homeomorfismo, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

En el siguiente teorema nos dará una caracterización para  $\mathcal{S}(f)$  cuando esta es abierta.

**Teorema 3.2.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Entonces  $f$  es abierta si, y solo si,  $\mathcal{S}(f)$  es abierta.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{S}(f)$  es abierta y veamos que  $f$  también lo es. Sean  $U$  un subconjunto abierto en  $X$  y  $a \in U$ . Luego, existen  $V_1, \dots, V_n$  subconjuntos abiertos de  $Y$  tal que

$$\mathcal{S}(f)(\{a\}) \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}(f)(\langle U \rangle_{\mathcal{S}}).$$

Notemos que  $f(a) \in \bigcap_{i=1}^n V_i$ . Veamos que  $V \subseteq f(U)$ , donde  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ . Si  $y \in V$ , se tiene que  $\{y\} \in \mathcal{S}(f)(\langle U \rangle_{\mathcal{S}})$ . Así, existe  $Q \in \langle U \rangle_{\mathcal{S}}$  con  $\mathcal{S}(f)(Q) = \{y\}$ . De modo que para cualquier  $x \in Q$  tenemos que  $x \in U$  y  $f(x) = y$ . Por tanto,  $V \subseteq f(U)$ ; es decir,  $f$  es abierta.

Supongamos que  $f$  es abierta. Veamos que  $\mathcal{S}(f)$  también lo es. Sea  $U_1, \dots, U_n$  una familia de abiertos disjuntos en  $X$ . Notemos que

$$\mathcal{S}(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}}) \subseteq \langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_{\mathcal{S}}.$$

Mostraremos que

$$\langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}}).$$

Sea  $Q \in \langle f(U_1), \dots, f(U_n) \rangle_{\mathcal{S}}$ . Si  $Q$  es finito, es claro que  $Q \in \mathcal{S}(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}})$ . Supongamos que  $Q \in \mathcal{S}_c(Y)$ . Sean  $y = \lim Q$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $y \in f(U_k)$ . Como  $f$  es abierta, tenemos que  $Q \setminus f(U_k)$  es finito. Por el Teorema 1.1.12, existe  $S_1 \in \langle U_k \rangle_{\mathcal{S}}$  tal que  $f(S_1) = Q \cap f(U_k)$ . Notemos que existe  $S_2$  finito tal que  $S_2 \in \langle U_1, \dots, U_k, U_{k+1}, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}}$  y  $f(S_2) = Q \setminus f(U_k)$ . Luego, si  $S = S_1 \cup S_2$ , entonces  $S \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}}$  y  $\mathcal{S}(f)(S) = Q$ . Por tanto,  $Q \in \mathcal{S}(f)(\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{S}})$ . Así,  $\mathcal{S}(f)$  es abierta.  $\square$

De forma análoga como probamos las proposiciones 2.2.5 y 2.2.8, se pueden de-

mostrar los siguientes resultados.

**Proposición 3.2.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es semiabierta, entonces  $f$  es semiabierta.

**Proposición 3.2.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es casi abierta, entonces  $f$  es casi abierta.

Tenemos las siguientes preguntas:

**Pregunta 3.2.5.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es semiabierta, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

**Pregunta 3.2.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es casi abierta, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

Para las funciones cuasi interior (ver Definición 1.1.1), tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  sequence-covering entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es cuasi interior, entonces  $f$  es cuasi interior.

*Demostración.* Sean  $y \in Y$  y  $K$  una componente de  $f^{-1}(y)$ . Tomemos un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $K \subseteq U$ . Luego, por la Proposición 3.1.3 tenemos que  $\mathcal{S}(K)$  es un conexo con  $\mathcal{S}(K) \subseteq \langle U \rangle_{\mathcal{S}}$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente conexas de  $\mathcal{S}(f)^{-1}(\{y\})$  tal que  $\mathcal{S}(K) \subseteq \mathcal{C}$ .

Veamos que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}(K)$ . Supongamos que existe  $S \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}(K)$ . Tome  $x \in S \setminus K$ . Como  $K$  es cerrado y  $f^{-1}(y)$  es compacto en  $X$  por <sup>17</sup> existen compactos  $M$  y  $N$  tales que  $f^{-1}(y) = M \cup N$ ,  $K \subseteq M$  y  $x \in N$  con  $M \cap N = \emptyset$ . Por la normalidad de  $X$ ,

---

<sup>17</sup> E. CAMARGO J & VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020.

existen abiertos  $U_1$  y  $U_2$  disjuntos tal que  $M \subseteq U_1$  y  $N \subseteq U_2$ . De este modo, tenemos que

$$\mathcal{C} \subseteq \langle U_1 \rangle_{\mathcal{S}} \cup \langle X, U_2 \rangle_{\mathcal{S}},$$

con  $\mathcal{S}(K) \subseteq \langle U_1 \rangle_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{C}$  y  $S \in \langle X, U_2 \rangle_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{C}$ . Esto contradice la conexidad de  $\mathcal{C}$ . Por tanto,  $\mathcal{C} = \mathcal{S}(K)$ .

De lo anterior,  $\mathcal{C} \subseteq \langle U \rangle_{\mathcal{S}}$ , y por lo tanto existen abiertos  $V_1, \dots, V_n$  de  $X$  tales que

$$\{y\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}(f)(\langle U \rangle_{\mathcal{S}}).$$

Si  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ , entonces  $y \in V$ . Probemos que  $V \subseteq f(U)$ . Sea  $b \in V$ . Observe que  $\{b\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle_{\mathcal{S}}$ . Así,  $\{b\} \in \mathcal{S}(f)(\langle U \rangle_{\mathcal{S}})$ , y por tanto existe  $Q \in \langle U \rangle_{\mathcal{S}}$  con  $\mathcal{S}(f)(Q) = \{b\}$ . Ahora, para  $a \in Q$  tenemos que  $a \in U$  y  $f(a) = b$ . De esta forma  $V \subseteq f(U)$  y por lo tanto,  $f$  es cuasi interior.  $\square$

**Pregunta 3.2.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence-covering definida entre continuos. ¿Si  $f$  es cuasi interior, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también es cuasi interior?

Como vimos en el Capítulo dos, estudiar las funciones monótonas no tenía mucho sentido ya que la función definida entre los continuos  $f$  era finita-1 y la función inducida  $\mathcal{S}_c(f)$  era ligera. Aquí sin esas fuertes condiciones, tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 3.2.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  sequence-covering entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es monótona, entonces  $f$  es monótona.

*Demostración.* Sean  $y \in Y$  y  $K = f^{-1}(y)$ . Como  $\mathcal{S}(f)$  es monótona tenemos que  $\mathcal{S}(f)^{-1}(\{y\})$  es conexo. Notemos que  $\mathcal{S}(K) = \mathcal{S}(f)^{-1}(\{y\})$ . Así, por la Proposición 3.1.4,  $K$  es conexo. Por lo tanto,  $f$  es monótona.  $\square$

**Proposición 3.2.10.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  sequence-covering entre continuos. Si  $f$  es monótona, entonces  $\mathcal{S}(f)$  es monótona.

*Demostración.* Dado que  $f$  es una función monótona, mostraremos que  $\mathcal{S}(f)$  es monótona. Sea  $B \in \mathcal{S}(Y)$ . Probemos que  $\mathcal{S}(f)^{-1}(B)$  es conexo. Tenemos los siguientes dos casos:

**Caso 1.**  $B \in \mathcal{F}(Y)$ . Sean  $y_1, \dots, y_m$  en  $Y$  tales que  $B = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Como  $f$  es monótona,  $C_i = f^{-1}(y_i)$  es conexo y cerrado para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Así, por el Lema 1.2.5,  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{F}(X)$  es conexo y cerrado en  $\mathcal{F}(X)$ . Como  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{F}(X) \subseteq \langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{S}(X) \subseteq \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{F}(X))$ , tenemos que  $\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{S}(X)$  es conexo en  $\mathcal{S}(X)$ . Notemos que,  $\mathcal{S}(f)(\langle C_1, \dots, C_m \rangle \cap \mathcal{S}(X)) \subseteq \{B\}$ . Veamos que  $\mathcal{S}(f)^{-1}(B) \subseteq \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ . Sea  $A \in \mathcal{S}(f)^{-1}(B)$ . De la definición de  $\mathcal{S}(f)$ ,  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m C_i$  y  $A \cap C_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; es decir,  $A \in \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ . Se sigue que  $\mathcal{S}(f)^{-1}(B) = \langle C_1, \dots, C_m \rangle$ . De lo anterior,  $\mathcal{S}(f)^{-1}(B)$  es conexo.

**Caso 2.**  $B \in \mathcal{S}_c(Y)$ . Escribamos  $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$  donde  $\lim B = y_0$ . Para cada  $n$ , tenemos que  $C_n = f^{-1}(y_n)$  y  $C_0 = f^{-1}(y_0)$  son continuos ya que  $f$  es monótona. Veamos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$  es compacto. Sea  $(x_n)$  un sucesión convergente en  $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ . Si existe un  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $C_j$  tiene infinitos elementos de la sucesión, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in C_j \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ . Supongamos que existe  $J \subseteq \mathbb{N}$  tal que la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  interseca a  $C_i$  para cada  $i \in J$ . Por la continuidad de  $f$  tenemos que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $B$ , por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in f^{-1}(y_0)$ . Luego,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$  es compacto en  $X$ .

Definamos  $\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{S}(X) : S \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \text{ y } S \cap C_n \neq \emptyset \text{ para todo } n\}$ . Claramente tenemos que  $\mathcal{C} = \mathcal{S}(f)^{-1}(B)$ .

Veamos que  $\mathcal{C}$  es conexo. Sean  $S_z, S_w \in \mathcal{C}$ , donde  $z = \lim S_z$  y  $w = \lim S_w$ . Notemos que  $z, w \in C_0$ , ya que  $\lim B = \lim f(S_z) = \lim f(S_w)$  por la continuidad de  $f$ .

Definamos

$$\mathcal{R}_1 = \{S \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{C} : S \cap C_i = S_z \cap C_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Veamos que  $\mathcal{R}_1$  es conexo. Sea  $g: \langle C_1 \rangle \cap \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{R}_1$  dada por  $g(F) = F \cup S_z$  si  $F \in \langle C_1 \rangle \cap \mathcal{F}(X)$ . Claramente  $g$  está bien definida. Mostremos que  $g$  es continua. Sea  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\langle C_1 \rangle \cap \mathcal{F}(X)$  que converge a  $F \in \langle C_1 \rangle \cap \mathcal{F}(X)$ . Tomemos  $U_1, \dots, U_m$  abiertos no vacíos de  $X$  tal que  $g(F) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$ . Sean  $m_1, \dots, m_j \in \{1, \dots, m\}$  tales que  $F \in \langle U_{m_1}, \dots, U_{m_j} \rangle$ . Por la convergencia, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $F_n \in \langle U_{m_1}, \dots, U_{m_j} \rangle$ . Así,  $g(F_n) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$  para todo  $n \geq N$ . De la arbitrariedad de los abierto  $U_1, \dots, U_m$ ,  $g$  es continua.

Notemos que si  $S \in \mathcal{R}_1$ ,  $C_1 \cap S$  es finito ya que, de lo contrario,  $\text{lím} S \in C_1$  ya que  $C_1$  es compacto, pero esto es absurdo dado que  $\text{lím} S = z$  y  $z \in C_0$ . Esto implica que  $g$  es continua y sobreyectiva. Por el Lema 1.2.5 tenemos que  $\mathcal{R}_1$  es conexo. Observe que  $S_z \in \mathcal{R}_1$ .

Definamos  $S_2 = (S_w \cap C_1) \cup (S_z \setminus C_1)$ . Sea

$$\mathcal{R}_2 = \{S \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{C}: S \cap C_i = S_2 \cap C_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \setminus \{2\}\}.$$

De igual forma que para  $\mathcal{R}_1$ , obtenemos que  $\mathcal{R}_2$  es conexo sabiendo que  $\langle C_2 \rangle \cap \mathcal{F}(X)$  es conexo. Notemos que  $S_2 \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ .

De manera inductiva, definimos  $S_n = (S_w \cap C_{n-1}) \cup (S_{n-1} \setminus C_{n-1})$  y

$$\mathcal{R}_n = \{S \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{C}: S \cap C_i = S_n \cap C_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \setminus \{n\}\}.$$

Observe que  $\mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_{n+1} \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$  es conexo. Como  $\text{lím}_{n \rightarrow \infty} S_n = S_w \cup \{z\}$ . Es decir,  $S_w \cup \{z\} \in \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{R})$ .

Ahora, sea

$$\mathcal{L} = \{S \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{C}: S = S_w \cup \{x\} \text{ con } x \in C_0\}.$$

De igual forma a como mostramos que  $\mathcal{R}_1$  es conexo, tenemos que  $\mathcal{L}$  es conexo. Además,  $S_w \cup \{z\} \in \mathcal{L} \cap \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{R})$  y  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}(f)^{-1}(B)$ . Así,  $\mathcal{L} \cup \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{R})$  es conexo en  $\mathcal{S}(f)^{-1}(B)$  y  $S_w, S_z \in \mathcal{L} \cup \text{cl}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{R})$ . Por la arbitrariedad de  $S_w$  y  $S_z$ , tenemos que

$\mathcal{S}(f)^{-1}(B)$  es conexo.

De esta forma, por los casos considerados se concluye que  $\mathcal{S}(f)$  es monótona.  $\square$

A continuación enunciaremos otras relaciones entre la función  $f$  y su función inducida  $\mathcal{S}(f)$ .

**Proposición 3.2.11.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence-covering entre continuos. Si  $\mathcal{S}(f)$  es ligera, entonces  $f$  es ligera.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es ligera; es decir, existe  $y \in Y$  y  $K$  una componente no degenerada de  $f^{-1}(y)$ . Por la Proposición 3.1.3, tenemos que  $\mathcal{S}(K)$  es un conexo no degenerado con  $\mathcal{S}(K) \subseteq \mathcal{S}(f)^{-1}(\{y\})$ . De lo anterior concluimos que  $\mathcal{S}(f)$  no es ligera, absurdo. Por tanto,  $f$  es ligera.  $\square$

Fácilmente se puede mostrar el siguiente resultado como consecuencia del Teorema 2.1.2.

**Proposición 3.2.12.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence-covering entre continuos. Si  $f$  es finita-1, entonces  $\mathcal{S}(f)$  es ligera.

**Proposición 3.2.13.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence-covering entre continuos. Si  $f$  es MO, entonces  $\mathcal{S}(f)$  es MO.

*Demostración.* Veamos que  $\mathcal{S}(f)$  es MO. Dado que  $f$  es MO, existen un continuo  $Z$ , y funciones  $g$  y  $h$ , tales que  $g: X \rightarrow Z$  es abierta,  $h: Z \rightarrow Y$  es monótona y  $f = h \circ g$ . De este modo,  $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(h) \circ \mathcal{S}(g)$ . Por las proposiciones 3.2.2 y 3.2.10 tenemos que  $\mathcal{S}(g)$  es abierta y  $\mathcal{S}(h)$  es monótona. Por lo tanto,  $\mathcal{S}(f)$  es MO.  $\square$

De la proposición anterior surge la siguiente pregunta.

**Pregunta 3.2.14.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence covering ente continuos. ¿Si  $\mathcal{S}(f)$  es MO, entonces  $f$  también lo es?

De forma análoga a la anterior demostración y como consecuencia de las proposiciones 3.2.2 y 3.2.10 se puede demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.15.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence-covering entre continuos. Si  $f$  es OM, entonces  $\mathcal{S}(f)$  es OM.

De igual manera surge la pregunta sobre la implicación inversa de la proposición anterior.

**Pregunta 3.2.16.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función sequence covering entre continuos. ¿Si  $\mathcal{S}(f)$  es OM, entonces  $f$  también lo es?

## 4. Preguntas

En este capítulo anexaremos las preguntas abiertas que surgieron a lo largo de este trabajo. Aunque en el desarrollo de esta tesis incluimos algunas preguntas, en este capítulo recopilamos estas preguntas y las listamos para que sirvan de punto de partida para futuras investigaciones.

**Pregunta 4.0.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es semiabierta, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es semiabierta, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es casi abierta, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es semiabierta, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.5.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es casi abierta, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

Recordemos que el capítulo dos no tenía mucha relevancia estudiar las funciones cuasi interior dado que  $f$  era finita-1, y por lo tanto abierta (ver Teorema 1.1.7).

**Pregunta 4.0.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es cuasi interior, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

En la Proposición 1.1.4 vimos que entre continuos toda función es cuasi interior si, y solo si, es OM. Esta equivalencia no la tenemos si los espacios no son compactos. Si tuviéramos la equivalencia sin la condición de que la función debe estar definida en un compacto, la pregunta anterior tendría una respuesta afirmativa.

En el siguiente ejemplo mostraremos que existe una función monótona y por tanto OM que no es cuasi interior (ver <sup>5</sup>).

**Ejemplo 4.0.7.** Sea  $f: [0, 1) \rightarrow \mathcal{S}^1$  definida por  $f(t) = e^{2\pi ti}$ . Notemos que  $f$  es inyectiva y por tanto monótona. Además, se puede mostrar fácilmente que no satisface la condición de ser cuasi interior en  $f(0)$ .

A continuación enunciaremos otras preguntas que surgieron a lo largo de nuestra investigación.

**Pregunta 4.0.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es confluyente, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es confluyente, entonces  $f$  también lo es?

**Pregunta 4.0.10.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $f$  es débilmente confluyente, entonces  $\mathcal{S}_c(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.11.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es débilmente confluyente, entonces  $f$  también lo es?

**Pregunta 4.0.12.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es confluyente, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.13.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}(f)$  es confluyente, entonces  $f$  también lo es?

**Pregunta 4.0.14.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $f$  es débilmente confluyente, entonces  $\mathcal{S}(f)$  también lo es?

**Pregunta 4.0.15.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es débilmente confluyente, entonces  $f$  también lo es?

**Pregunta 4.0.16.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos finita-1 y sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}_c(f)$  es MO (o OM), entonces  $f$  también lo es?

**Pregunta 4.0.17.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre continuos sequence-covering. ¿Si  $\mathcal{S}(f)$  es MO (o OM), entonces  $f$  también lo es?

## BIBLIOGRAFÍA

- BING, RH. "Some characterizations of arcs and simple closed curves". En: *American Journal of Mathematics* 70.3 (1948), págs. 497-506.
- Borsuk, K. y S. Ulam. "On symmetric products of topological spaces". En: *American Mathematical Society. Bulletin* 37 (1931), págs. 875-882 (vid. págs. 22, 41).
- CAMARGO J & VILLAMIZAR, E. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020 (vid. pág. 46).
- CAMARGO J. & ISAACS, R. "Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos". En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 47.1 (2013), págs. 67-81.
- Engelking, R. *General topology*. Sigma series in pure mathematics, 1989 (vid. pág. 41).
- Ernest, M. "Topologies on spaces of subspaces". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 71 (1951), págs. 152-182 (vid. págs. 26, 39, 40).
- Escobedo R., Pellicer-Covarrubias P. y V. Sánchez-Gutiérrez. "The hyperspace of totally disconnected sets". En: *Glasnik Matematički* 55.1 (2020), págs. 113-128 (vid. págs. 39, 40).
- García-Ferreira, S. e Y. F. Ortiz-Castillo. "The hyperspace of convergent sequences". En: *Topology and its Applications* 196 (2015), págs. 795-804 (vid. págs. 11, 23, 25).

- García-Ferreira, S. y R. Rojas-Hernández. “Connected like properties on the hyperspace of convergent sequence”. En: *Topology and its Applications* 230 (2017), págs. 639-647 (vid. págs. 23, 25, 41).
- Higuera, G. “Funciones inducidas en productos simétricos”. Tesis de Pregrado (Matemático). México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2009 (vid. pág. 23).
- Hosokawa, H. “Induced mappings on hyperspaces”. En: *Tsukuba Journal of Mathematics* 21.1 (1997), págs. 239-250 (vid. págs. 10, 28).
- Illanes, A. y S. Nadler. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. Monographs, Textbooks in pure y applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., 1989 (vid. págs. 22, 23).
- ILLANES A & NADLER, S. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. New York y Basel: Monographs, Textbooks in pure y applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., 1999.
- Kuratowski, K. *Topology*. Academic Press y Warsaw: PWN, 1968.
- KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. 2. New York–London: Academic Press y Warsaw: PWN, 1968.
- Lelek, A. y D. Read. “Compositions of confluent mappings and some other classes of functions”. En: *Colloquium Mathematicum* 29 (1974), págs. 101-112 (vid. págs. 15, 53).
- LEONEL, R. “Shore points of a continuum”. En: *Topology and its Applications* 161 (2014), págs. 433-441.

MACÍAS, S. *Topics on continua*. Springer-Chan, 2018.

Macías, S. y Holland. *Topics on continua*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005 (vid. pág. 11).

Maya D., Pellicer-Covarrubias P. y R. Pichardo-Mendoza. “General properties of the hyperspaces of convergent sequences”. En: *Topology Proceedings* 51 (2018), págs. 143-168 (vid. págs. 23, 24, 27, 40).

MONTEJANO, L e I PUGA. “Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces”. En: *Topology and its Applications* 46.1 (1992), págs. 41-54.

NADLER, S. *Continuum Theory: An Introduction*. Marcel Dekker-New York-Basel-Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992.

Nadler, S. *Continuum Theory: An Introduction*. Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992 (vid. pág. 22).

Siwec, F. “Sequence-covering and countably bi-quotient mappings”. En: *Topology and its Applications* 1 (1971), 143–154 (vid. pág. 14).

T, Whyburn G. *Analitic Topology*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1942 (vid. pág. 19).

THOMAS, ES. “Monotone decompositions of irreducible continua”. En: (1966).

Xianjiu H. Fanping, Z. y Z. Gengrong. “Semi-openness and Almost openness of Induced Mappings”. En: *Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universities. Ser. B.* 20.1 (2005), págs. 21-26 (vid. págs. 32, 34).