

# La Noción de Auto semejanza Local

Carlos Alfonso Castro Tirado

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2013

# La Noción de Autosemejanza Local

**Carlos Alfonso Castro Tirado**

Trabajo de grado para optar el título de:

**Magister en Matemáticas**

Directora:

PhD. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2013

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al ser supremo que me apoyo internamente, agradezco eternamente a una persona que siempre ha estado a mi lado apoyándome en la buenas y en las malas, ha una persona que admiro y quiero demasiado, a mi MAMÁ, también a mi papá, mis dos hermanos y mis sobrinos, mi novia y toda mi familia por ese gran animo que me manifestaban, a mi directora de proyecto, gracias por esa gran paciencia y colaboración, a mis calificadores, a la escuela de matemáticas y a la UIS por brindarme siempre las herramientas para poder ser un buen profesional, a todos mis compañeros de estudio y de trabajo, a mis amigos, a todas y cada una de las personas que están a mi lado, pues, aunque parecía imposible lo hice realidad gracias a ustedes.

De corazón, Este logro enorme en mi vida y antes impensable se los dedico a todos.

**RESUMEN**

**Título:** La Noción de Auto semejanza Local\*

**Autor:** Carlos Alfonso Castro Tirado \*\*

**Palabras clave:** Topologías, Auto semejanza, local, vecindad, homeomorfismo.

**Resumen.**

Un espacio topológico  $X$  es **Auto semejante Topológicamente** si todo abierto no vacío contiene un subespacio homeomorfo al espacio  $X$ .

Sea  $X$  un espacio topológico,  $a \in X$ , diremos que,  $X$  es **Localmente Auto semejante Débil** notado “LAD” en  $a \in X$ , si  $a$  admite un sistema fundamental de vecindades,

cada una de ellas auto semejante. Diremos  $X$  es un espacio **Localmente Auto semejante Débil** notado “LAD” si para todo punto  $a \in X$ , se tiene que  $X$  es localmente auto semejante débil en  $a$ .

Llamaremos a  $X$  un espacio **Localmente Auto semejante Fuerte** en  $a \in X$ , si  $a$  admite un sistema fundamental de vecindades tal que cada una de ellas es homeomorfa a  $X$ . Diremos que  $X$  es un espacio **Localmente Auto semejante Fuerte** “LAF” si para todo  $a \in X$ ,  $X$  es localmente auto semejante fuerte en  $a$ .

Se analiza las implicaciones entre las tres definiciones. Se presentan varios ejemplos y se demuestran algunas propiedades, por ejemplo, que si el espacio es  $T_1$  tiene 0, 1, 2 o infinitos puntos LAF.

---

\*Tesis de grado.

\*\*Facultad de ciencias, Escuela de matemáticas, Directora:PhD. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

## ABSTRACT

**Title:**The Notion of Self-similarity Local\*

**Author:**Carlos Alfonso Castro Tirado\*\*

**Keywords:** self-similar, local, neighborhood, homeomorphism

### Abstract:

A space topological  $X$  is **Topologically self-similar** if not all open empty set contains a subspace homeomorphic to the space.

Let  $X$  be a topological space and given a point  $a \in X$ , we say that  $X$  is **Locally self-similar weak** “LAD” in  $a \in X$ , if  $a$  admits a fundamental system of neighborhoods. call

$X$  is a topological space, we say that  $X$  is **Locally self-similar weak** “LAD” if  $X$  is LAD at all points.

Let  $X$  be a topological space and given a point  $a \in X$ , we say that  $X$  is **Locally self-similar strong** “LAF” in  $a \in X$ , if  $a$  admits a fundamental system of neighborhoods.

$X$  is a topological space, we say that  $X$  is **Locally self-similar weak** “LAD” if  $X$  is LAF at all points.

It analyzes the implications of the three definitions. Several examples are shown and some properties, for example, that if the space is T1 has 0, 1, 2 or infinite LAF points.

---

\*Degree Work.

\*\*Faculty of Science, Mathematics School, Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1. Breve Reseña Histórica . . . . .	14
1.2. Preliminares . . . . .	18
<b>2. AUTOSEMEJANZAS</b>	<b>23</b>
2.1. Definiciones . . . . .	23
2.2. Definiciones locales . . . . .	28
2.3. Implicaciones . . . . .	33
2.4. Topologías . . . . .	38
<b>3. PROPIEDADES LAF</b>	<b>47</b>
3.1. Proposiciones . . . . .	48
3.2. Cardinalidad . . . . .	51
<b>4. CONTINUOS</b>	<b>56</b>
4.1. Continuos . . . . .	56

**ÍNDICE GENERAL** **9**

---

4.2. C-Y Semejanza . . . . .	64
<b>5. Preguntas Abiertas</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Vecindades de $\{0\}$ . . . . .	18
1.2. Curva de Koch (3 iteraciones del SIF) . . . . .	20
2.1. Subconjunto $V \approx X$ de cualquier abierto. . . . .	24
2.2. Intervalo Semiabierto. . . . .	25
2.3. Conjunto de Cantor . . . . .	26
2.4. Triángulo de Sierpinski . . . . .	26
2.5. Función Arcotangente . . . . .	29
2.6. Vecindades del Rayo . . . . .	29
2.7. Intervalos disconexos. . . . .	30
2.8. Vecindades del Triodo. . . . .	31
2.9. Vecindades en la barra limite . . . . .	32
2.10. Un rayo convergiendo a $S^1$ . . . . .	33

---

2.11. Vecindades en $S^1$ . . . . .	33
2.12. Triángulo de Sierpinki . . . . .	35
2.13. Vecindad en el punto de corte $a$ . . . . .	35
2.14. Contenencias de Autosemejanzas. . . . .	37
3.1. Ninguna vecindad en $a$ puede ser homeomorfa a $S^1$ . . . . .	51
3.2. Cuadrados con un único punto L.A.F. . . . .	52
3.3. Triángulo de Sierpinski . . . . .	53
4.1. Cono de Cantor . . . . .	57
4.2. vecindades en el cono de Cantor . . . . .	57
4.3. vecindades en el peine de cantor . . . . .	58
4.4. $S^1 \times D^1$ . . . . .	58
4.5. Esponja de Menger . . . . .	60

## INTRODUCCIÓN

En topología es común estudiar propiedades tanto a nivel “*global*” como a nivel “*local*”. Por ejemplo : compacidad y compacidad local, conexidad y conexidad local. La noción de autosemejanza topológica surge al intentar extender la noción de autosimilitud, del contexto de los espacios métricos al contexto de los espacios topológicos. Es por esto, que nace la inquietud de estudiar sistemáticamente esta noción a nivel local, lo cual al parecer no se ha realizado de manera profunda y detallada.

Esta idea surge de una pregunta abierta propuesta en la tesis de Doctorado de S. Sabogal [1], la cual se centra, en una parte, sobre el estudio de los espacios *Autosemejantes*. Por consiguiente este trabajo toma como principal referente y ayuda la mencionada tesis.

Este documento consta de cuatro capítulos y varias secciones buscando la formalización de la noción de *Autosemejanza* a nivel “*local*” y estudiando como principal concepto el de espacios **LAF** (Localmente Autosemejante Fuerte).

En el Capítulo 1 se presentan la introducción en donde se explica las razones que generaron el estudio del siguiente trabajo, junto con una breve reseña histórica del concepto de autosemejanza, así como una sección dedica a conceptos necesarios para el desarrollo y entendimiento del mismo.

En el Capítulo 2 se presentan definiciones de **Autosemejanza Topológica** y **Autosemejanzas Locales**, en las que en este trabajo se definieron como Localmente Autosemejante Débil **LAD** y Localmente Autosemejante Fuerte **LAF** Se realizan las implicaciones entre las definiciones, ejemplos y algunas observaciones cuando a ciertos espacios se les cambia la Topología.

---

En el Capítulo 3 se presentarán proposiciones sobre los espacios que cumplen la propiedad **LAF**, basados en resultados sobre *Autosemejanza* propuestos en S. Sabogal [1], y otras proposiciones nuevas resultado del estudio de esta tesis.

En el Capítulo 4 se presentan nuevas definiciones sobre Autosemejanza Local más general llamadas **C-Semejanza** y **C-Y-Semejanza**, utilizando dichas definiciones para exponer ciertas relaciones con los espacios topológicos vistos y la definiciones de autosemejanza local anteriormente propuestas. También se hace un estudio sobre los espacios **continuos**.

### 1.1. Breve Reseña Histórica

Esta sección tiene como objetivo hacer un breve resumen del origen y evolución de la noción de autosemejanza principalmente en el contexto de los espacios métricos y sobre las nociones de autosemejanza local .

La noción intuitiva de autosemejanza (o autosimilitud) es muy sencilla y natural, muy seguramente todos la hemos percibido en algún momento y de alguna manera en diversos contextos. Por ejemplo, al observar diferentes objetos de la naturaleza como los árboles, algunas clases de helechos, una cabeza de coliflor, las nubes, las olas del mar, entre muchos otros. Se encuentra también claro está, en el contexto de la matemática: algunas fracciones continuas, conjuntos cuyos elementos son conjuntos, hoy ejemplos clásicos de conjuntos autosimilares como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch. En todos estos entes se percibe de alguna forma y en mayor o menor grado la siguiente característica: el todo está formado por varias copias de sí mismo, solo que reducidas y colocadas en diferente posición, o, dicho de otra manera:

el todo es igual a sus partes salvo un factor de escala.

La mención explícita quizá más remota en la historia sobre el fenómeno de autosemejanza, se remonta al siglo V a. de J:C: al examinar las ideas del filósofo jonio Anaxágoras de Clazoméne (500 - 428 a. de J:C:). Según Anaxágoras, el universo fue un caos de innumerables semillas (spermata), al cual la mente (nus), mediante un movimiento de rotación (perichoresis), dio orden y forma. Estas “*semillas*” no son elementos pues cada una es tan compleja como el todo. La alusión a la autosemejanza es clara, según Anaxágoras, “todo el universo y sus partes, por pequeñas que sean, son homogéneos; sus diferencias son solo diferencia de tamaño, no de composición”. Así cada semilla o spermata, no es más simple que el resto, ni esencialmente distinta en su composición, Ejemplos de conjuntos autosemejantes son conocidos desde hace mucho tiempo. A una buena parte de ellos se les denomina actualmente conjunto fractales. La prehistoria de este tipo de conjuntos se remonta a finales del siglo pasado y principios del presente siglo, con el descubrimiento de fenómenos como el movimiento Browniano y de conjuntos extraños o situaciones que en esa época fueron consideradas “patológicas”, tales como el Conjunto de Cantor (1883), el triángulo de Sierpinski (1916), las funciones continuas y nunca diferenciables (1872), la curva de Koch (1904), las curvas de Peano que llenan el espacio (1890), entre otros.

En 1918 Gaston Julia (1893-1978) publica sus trabajos sobre sistemas dinámicos complejos y lo mismo hace en 1926 el matemático francés Pierre Joseph Louis Fatou. (1878-1929). En la década de los setenta Benoit Mandelbrot (1924-2010) rescata dichos trabajos con la ayuda de las computadoras. Sin embargo, Mandelbrot, más ingeniero que matemático, hace un tratamiento muy informal de su teoría, por ejemplo, respecto a la noción de autosemejanza, que él denomina “escalante” propone la siguiente definición: "Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que estén a diferente escala y pueden estar lige-

ramente deformadas".

En 1981, John E. Hutchinson, publica su artículo *Fractals and self-similarity* expone una teoría muy formal y bien fundamentada de los que el llama conjuntos estrictamente autosimilares. En 1985 K.J. Falconer dedica en su libro *The Geometry of fractal sets*, una sección a los conjuntos autosimilares. En 1985 Michael Barnsley y S. Demko publican su artículo *Iterated function systems and global construction of fractal* aproximando allí una aproximación a los fractales autosimilares, en 1988 M. Barnesley amplia esta aproximación en su libro *Fractal Everywhere*. (Tomado de [1])

En 1994 W.J. Charatonik & A. Dilks escriben un artículo en la revista *Topology and applicates*. llamado *On self-homeomorphic spaces*, (No. 55, 215-238). donde se presenta de manera formal los espacios *Autosemejantes* en forma puntual y local, en el introduce el concepto de vecindades y sistema fundamental de vecindades **S.F.V.**

En el 2000 la profesora Sonia Sabogal, escribió su Tesis de Doctorado, *Autosemejanza en topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone*, de la Universidad Nacional de Colombia, relacionando la noción de *Autosemejanza* y algunas de sus propiedades, de allí queda como tarea estudiar la noción en forma local.

En el año 2005, T. Banak & D. Ripovs escriben un artículo llamado *Onlinearrealizations and local self-similarity of the universal zarichny map*, en la revista *Houston Journal of Mathematics* (vol. 31 N. 4) allí usan una definición similar de L.A.F para analizar ciertos espacios, llamados *the universal zarichny map* para luego explicar algunas aplicaciones.

En los últimos dos años se ha hecho una búsqueda de material bibliográfico de temas relacionados con *Autosemejanza Local*, en las principales revistas nacionales e interna-

cionales, encontrándose escaso material de investigación topológica, ya que la mayoría de artículos se basan en realizar aplicaciones, usando diversos temas de análisis matemático, como ecuaciones diferenciales parciales entre otros.

Se considera un material mas completo y organizado hasta ahora hecho, sobre autosemejanza local, la culminación de este proyecto, con la colaboración, por supuesto de la profesora Sonia Sabogal, (directora), la profesora brasilera Elaine Gouvea actualmente profesora de la Universidad del Valle y el profesor Rafael Isaacs docente de la Universidad industrial de Santander. (calificadores)

## 1.2. Preliminares

**Definición 1.1** (Vecindad).  $V$  es una **Vecindad** de  $x$  en  $X$ , si  $x \in V$  y si existe  $U$  subconjunto abierto de  $V$  tal que  $x \in U$ .

**Definición 1.2** (Sistema fundamental de vecindades (SFV)). Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ , un **Sistema Fundamental de Vecindades** de  $x$ , es una familia de vecindades  $(V_i)_{i \in I}$  de  $X$  tal que para cualquier vecindad  $B$  de  $x$  existe  $V_i, i \in I$ , tal que  $x \in V_i \subset B$ .

**Ejemplo 1.1.** Sea  $X = \mathbb{R}$ , para el punto 0 se puede construir un SFV

$$(V_i)_{i \in \mathbb{N}} = (-1/n, 1/n)$$

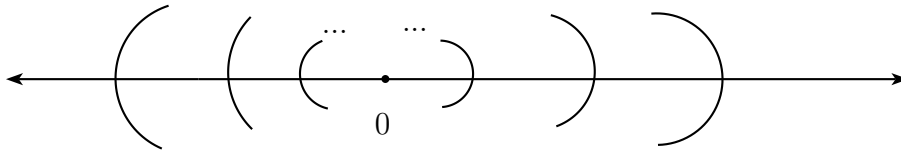


Figura 1.1: Vecindades de  $\{0\}$

**Definición 1.3.** Sean  $Y$  un espacio topológico y  $p \in Y$ , decimos que  $p$  es un punto de corte de  $Y$  si  $Y - \{p\}$  no es conexo.

**Definición 1.4.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Un punto  $x \in X$  se dice un punto de acumulación de  $A$  si para toda vecindad  $V$  de  $x$  se tiene que:

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$A'$  representa el conjunto de acumulación de  $A$ .

**Definición 1.5.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subset X$ .  $A$  se dice perfecto si es cerrado y todo punto de  $A$  es un punto de acumulación de  $A$ .

Es decir un espacio perfecto es un espacio que no tiene puntos aislados.

**Definición 1.6.** Sea  $X$  un espacio topológico diremos que  $X$  es un espacio homogéneo si para cualesquiera dos puntos  $x_1, x_2 \in X$  existe un homeomorfismo  $f_{x_1, x_2} : X \rightarrow X$ , tal que  $f_{x_1, x_2}(x_1) = x_2$

**Ejemplo 1.2.**  $S^1$  es un espacio homogéneo, pues dado dos puntos  $p$  y  $q$  de  $S^1$ , existe una rotación que lleva de  $p$  a  $q$  y las rotaciones son homeomorfismos.

A continuación se presentarán algunas definiciones las cuales se usan para construir fractales. Además nos da otra opción de definir formalmente la noción de autosemejanza.

**Definición 1.7 (SIF).** Un **Sistema Iterado de Funciones SIF**, es una estructura de la forma  $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$ , donde  $X$  es un espacio métrico completo y cada  $f_i : X \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , es una contracción en  $X$ .

**Definición 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Notemos  $\mathbb{H}(X)$  la familia de todo los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ , es decir:

$$\mathbb{H}(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ es compacto}, K \neq \emptyset\}.$$

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un SIF.

**Teorema 1.1.** Dado  $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$  un SIF, se define

$$F : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$$

$$K \mapsto F(K) = \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$$

Entonces existe un único  $A \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$

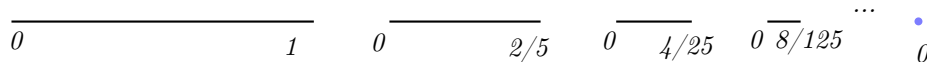
Además para cualquier  $K \in \mathbb{H}(X)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(K) = A$$

.

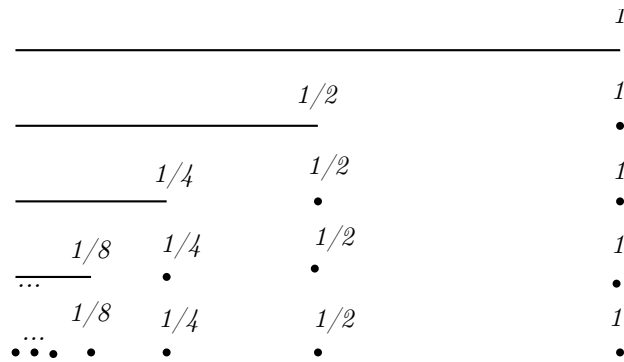
El conjunto  $A$  lo llamaremos el **atractor** del SIF. (Ver [4] pag. 86)

**Ejemplo 1.3.** Sea el SIF  $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$



El atractor del SIF es  $A = \{0\}$ .

**Ejemplo 1.4.** Tomemos el SIF  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, 1\}$



El atractor del SIF es  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$ .

**Ejemplo 1.5.** La curva de Koch debe su nombre al matemático Helge Von Koch, quien lo construyó por primera vez en 1904. Sea  $I$  un intervalo cerrado, consideremos a  $I \subset \mathbb{C}$ , y el SIF:

$$\{X; f_1(z) = \frac{1}{3}z, f_2(z) = \frac{1}{3}ze^{i\pi/3}, f_3(z) = \frac{1}{3}ze^{-i\pi/3}, f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\}$$

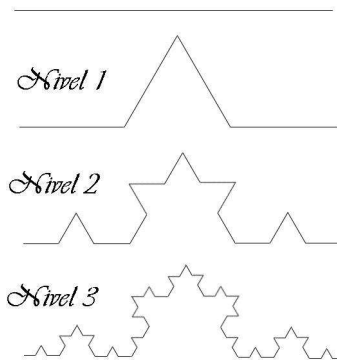


Figura 1.2: Curva de Koch (3 iteraciones del SIF)

Se presentará nuevos conceptos muy útiles en el estudio de los fractales, llamado el **espacio de los códigos** y **función de direccionamiento**, los cuales nos dan otra opción de como probar y entender demostraciones sobre autosemejanzas y LAF

**Definición 1.9.** Sea un  $N \in \mathbb{N}$ , y notaremos  $\Sigma$  un alfabeto con  $N$  objetos. Supongamos  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \dots, N - 1\}$ . Llamaremos un **código** a una sucesión donde cada coordenada es un objeto del alfabeto  $\Sigma$ , también llamado **palabra semi-infinita** de  $\Sigma$ . Entonces llamaremos el **espacio de los códigos**

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{x = x_1x_2x_3\dots | x_i \in \Sigma\}$$

Con métrica  $d$  definida así:

$$d(x_1x_2x_3\dots y_1y_2y_3\dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x - y|}{(N + 1)^i}$$

**La función de direccionamiento**(tomado de [4]): Esta función permitirá, entre otras cosas, asociar a cada punto del atractor de un SIF, un código, es decir un elemento del espacio de los códigos.

En primer lugar veamos cómo el atractor de un SIF determina un espacio de los códigos, de acuerdo con el número de contracciones del SIF.

**Definición 1.10.** (El espacio de los códigos asociados a un SIF). Dado un SIF  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$  se define su **espacio de los códigos asociado** como el espacio métrico  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  donde  $\Sigma = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

**Lema 1.1.** Sea un SIF  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ,  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de los códigos asociados al SIF. Sea:

$$\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \rightarrow X$$

definida por:

$$\phi(\alpha, n, x) := f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x)$$

Ahora podemos definir la función de direccionamiento.

**Teorema 1.2.** (La función  $\varphi$ ) Sean  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un SIF y  $A$  su atractor. Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de los códigos asociado al SIF. Para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$ , sea

$$\varphi(\alpha) := \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x).$$

Entonces  $\varphi(\alpha)$  siempre existe, pertenece a  $A$ , es independiente de  $x$  y la función:

$$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$$

$$\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$$

La función  $\varphi$  es una función continua y sobre.

Ver demostración en [4].

**Definición 1.11.** Sean  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un SIF y  $A$  su atractor. Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de los códigos asociado al SIF. Sea  $a \in A$ ; llamaremos una **dirección** o **código** de  $a$ , a cualquier elemento del conjunto:

$$\varphi^{-1}(a) = \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a\}$$

El conjunto  $\varphi^{-1}(a)$  lo llamaremos el **conjunto de las direcciones** de  $a$  y la función  $\varphi$  la llamaremos la **función de direccionamiento** del atractor del SIF.

Es decir todo punto de un fractal, lo puedo ubicar por medio de su función de direccionamiento.

**Proposición 1.1.** Si  $k$  es un entero positivo fijo y  $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , entonces **la bola** con centro en  $x$  y radio  $\frac{1}{(N+1)^k}$  para algún  $N \in \mathbb{N}$  esta dado por:

$$B(x, \frac{1}{(N+1)^k}) = \{y \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid x_i = y_i, \forall i = 1, 2, \dots, k\}$$

Esta bola también se puede denotar por  $\langle w \rangle$ , quiere decir el subespacio de todos los códigos que empiezan por la “palabra”  $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ .

Las familia de todas las bolas actúan como conjuntos abiertos y vecindades. Además forman una base para la topología de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . Es decir: sea  $B_w$  una bola de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  se define  $B_w$  como todos los códigos de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  que inician con la palabra  $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ .

$$B_w := \{a_1 a_2 a_3 \dots a_k x_1 x_2 x_3 \dots \mid a_i, x_j \in \Sigma^{\mathbb{N}}\}$$

donde  $i=1,2,3,\dots,k$ .  $j=1,2,3,\dots$

**Ejemplo 1.6.** Sea  $\Sigma = \{p, q, r\}$ . Tomemos un punto  $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $x = (p, q, r, r, r, r, \dots)$ , entonces la bola con centro en  $x$  y radio  $1/16$ , (donde  $N=3$ ), entonces:  $B(x, 1/16)$ ,  $(N+1)^k = 16$ , y  $N=3$ ,  $(4)^k = 16$  luego  $k = 2$ . lo que quiere decir:  $B(x, 1/16)$  son todos lo códigos que inician con la palabra  $w=pq$ .

$$B(x, 1/16) = B_w$$

Por ejemplo  $x_1 \in B_w$ , puede ser  $x_1 = (p, q, p, q, p, q, p, q, \dots)$ ,

$x_2 \in B_w$ ,  $x_2 = (p, q, r, q, q, r, p, r, \dots)$  ...etc.

## CAPÍTULO 2

## AUTOSEMEJANZAS

En este capítulo se presentarán diferentes definiciones y conceptos acerca de la autosemejanza, se expondrán relaciones que existan entre ellas y se mostrarán diversos ejemplos para ilustrar dichos conceptos.

### 2.1. Definiciones de Autosemejanzas

**Definición 2.1** (Autosemejanza Topológica). *Sea un espacio cualquiera diremos que el espacio es **Autosemejante Topológicamente** si todo abierto no vacío del conjunto contiene un subespacio homeomorfo al espacio, es decir:*

$X$  es autosemejante topológicamente  $\Leftrightarrow$  para todo  $U$  subconjunto abierto de  $X$ ,  $U \neq \emptyset$ ,  $\exists V \subset U$  tal que  $V \approx X$ .

**Ejemplo 2.1.** *Trabajando con la topología usual,  $\mathbb{R}^n$  y las  $n$ -celdas abiertas o cerradas de  $\mathbb{R}^n$  también son espacios Autosemejantes Topológicamente.*

Los subespacios abiertos  $U \subset X$  no necesariamente tienen que ser conexos. Supongamos que tenemos un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  que puede ser uniones arbitrarias disconexas

de subconjuntos abiertos, pero siempre va a existir un subconjunto  $V$  contenido en dicho abierto que sea homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ ,  $V \approx \mathbb{R}^2$ .

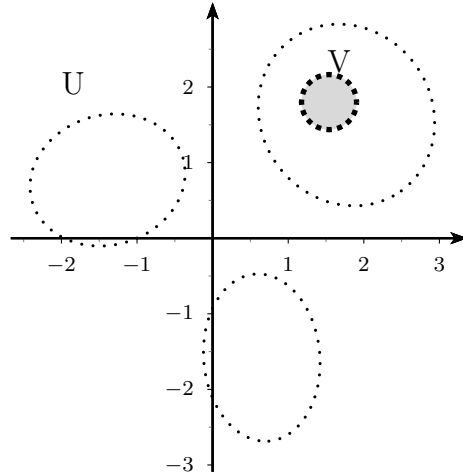


Figura 2.1: Subconjunto  $V \approx X$  de cualquier abierto.

El espacio  $V$  siempre debe tener las mismas propiedades topológicas que el espacio  $X$ .  
Ver figura 2.1

**Definición 2.2** (Semiabierto).  $H$  es **semiabierto** si existe  $O$  abierto tal que

$$O \subseteq H \subseteq \overline{O}$$

**Proposición 2.1.** tomado de ([1]) La autosemejanza se hereda por semiabiertos

*Demostración.* Sea  $X$  autosemejante  $O \subset^{ab} X$ .  $H$  tal que  $O \subseteq H \subseteq \overline{O}$ . Se probará que  $H$  es autosemejante.

Si  $O = \emptyset$  entonces también  $H = \emptyset$  que es autosemejante.

Si  $O$  no es vacío, sea  $A \cap H$  un abierto no vacío del subespacio  $H$ , (es decir se está tomando  $A$  un abierto de  $X$ ). Sea  $x \in A \cap H$ , entonces  $A$  es una vecindad de  $x$  y  $x \in \overline{O}$  luego  $O \cap A$  es un abierto no vacío de  $X$ , sea entonces  $X'$  homeomorfo a  $X$  y  $X' \subseteq O \cap A$ , sea  $H' \subseteq X'$  tal que  $H'$  es homeomorfo a  $H$ , como  $X' \subseteq O \cap A$  y  $O \cap A \subseteq A \cap H$  entonces  $H' \subseteq A \cap H$ , lo que prueba que  $H$  es autosemejante.  $\square$

**Ejemplo 2.2.** Un ejemplo para ilustrar la demostración anterior. Sabemos que  $\mathbb{R}$  es un espacio autosemejante y tomemos el subespacio semiabierto  $H = [0, 1)$  entonces  $H \subset \mathbb{R}$ ,  $H$  también es autosemejante ya que siempre en todo subconjunto abierto de  $H$  se puede encontrar un subconjunto  $V$  homeomorfo a  $H$ , como lo muestra la figura 2.2

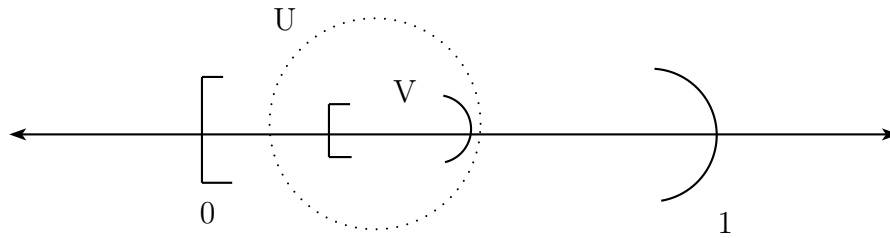


Figura 2.2: Intervalo Semiabierto.

La siguiente proposición 2.6 y los ejemplos 2.7, 2.8 y 2.9 son tomados del libro *Una introducción a la geometría fractal* [5]

**Proposición 2.2.** *El atractor de un SIF cuyas contracciones son inyectivas, es autosemejante.*

Ahora se presenta algunos ejemplos, exhibiendo su SIF, como aplicación de esta proposición.

**Ejemplo 2.3.** *Un intervalo o un arco, supongamos el SIF  $=\{X; f_1, f_2\}$  donde  $X = [0, 1]$ ,  $f_1 = \frac{1}{2}x$ ,  $f_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  entonces el atractor del SIF es  $A = [0, 1]$*

**Ejemplo 2.4.** *El **Conjunto de Cantor**: Una idea de la formación del conjunto de Cantor se da en las siguientes gráficas. Sea  $X = [0, 1]$  y Consideremos el siguiente SIF  $=\{X; f_1, f_2\}$  donde:*

$$f_1 = \frac{1}{3}x; f_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

El conjunto de Cantor es el límite del proceso del SIF. Entonces el conjunto de Cantor tiene cada contracción inyectiva, por la proposición 2.6 el conjunto de Cantor (y/o un espacio que sea homeomorfo a Cantor) es Autosemejante.

**Ejemplo 2.5.** *El **triángulo de Sierpinski**, generado con un SIF de tres funciones inyectivas. Consideremos a  $X \subset \mathbb{C}$ , como el triángulo relleno de vertices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ . Si tomamos el SIF*

$$\{X; f_1(z) = \frac{1}{2}z, f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\}$$

*se obtiene:*

Entonces el triángulo de Sierpinski tiene cada contracción inyectiva, por la proposición 2.6 el triángulo de Sierpinski es autosemejante.

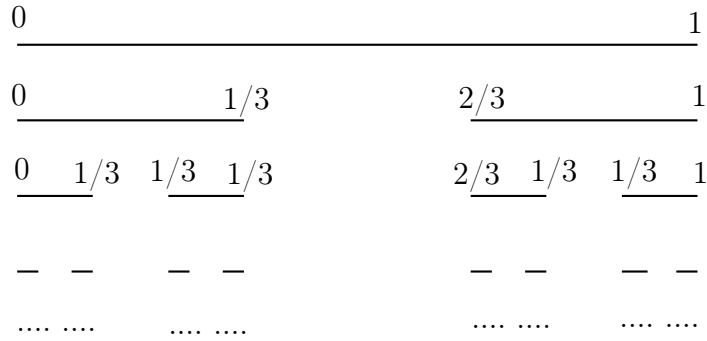


Figura 2.3: Conjunto de Cantor

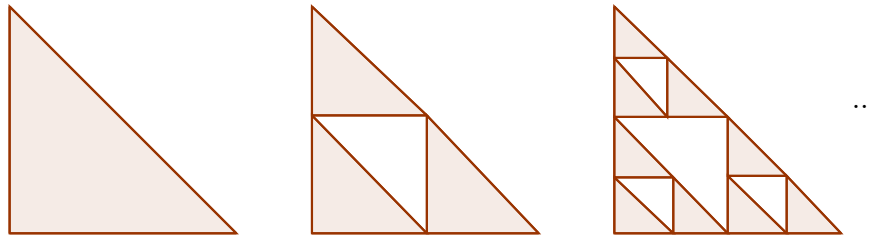


Figura 2.4: Triángulo de Sierpinski

La siguiente proposición nos da una herramienta para generar nuevos espacios autosemejantes, además nos permite demostrar de una forma directa y sencilla la propiedad de autosemejanza de los espacios fractales.

**Proposición 2.3.** (Tomado de [1]) Si  $X$  es un espacio topológico cualquiera y  $Y$  es un conjunto infinito, entonces  $X^Y$  es autosemejante.

*Demostración.* Sea  $O = O_{y_1} \times O_{y_2} \times \dots \times O_{y_n} \times \prod_{y=y_i} X_y$  un abierto básico de  $X^Y$ ; por tener las propiedades de topologías producto, lo que quiere decir que cada  $O_{y_i}$  es un abierto de  $X$  y como  $X_y = X$  para cada  $y = y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ . ahora supongamos  $(x_y)_y \in Y$  un punto de  $O$ . Entonces

$$(x_y)_y \in C = x_{y_1} \times x_{y_2} \times \dots \times x_{y_n} \times \prod_{y=y_i} X_y \subseteq O$$

y se tiene que  $C \approx X^Y$  . □

La proposición que acabamos de demostrar proporciona otro método para probar que el espacio de Cantor es autosemejante. Tomando en cuenta que  $\mathbb{N}$  es un conjunto infinito.

---

Se sabe que el conjunto de Cantor es Homeomorfo a  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  y en general Cantor es homeomorfo  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  donde  $\Sigma$  es un alfabeto con finitas palabras. (ver [8] cap. 6, pag. 121). Por lo tanto el conjunto de Cantor es autosemejante.

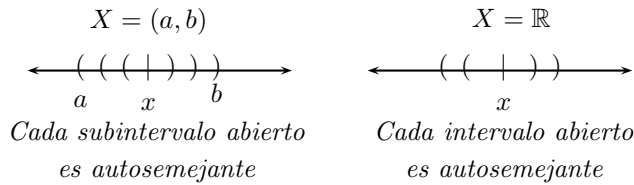
Así se puede generalizar para probar que cualquier espacio con el atractor del SIF tal que sus puntos tengan un **código único asociado** en  $\{0,1,2,3,\dots\}^{\mathbb{N}}$  entonces es un espacio autosemejante.

## 2.2. Definiciones locales

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y dado un punto  $a \in X$ , diremos que,  $X$  es **Localmente Autosemejante Débil** en  $a \in X$ , si  $a$  admite un sistema fundamental de vecindades, cada una de ellas autosemejante.

**Definición 2.4.** Sea  $X$  un espacio topológico, llamaremos a  $X$  un espacio **Localmente Autosemejante Débil** “LAD” si para todo punto  $a \in X$ , se tiene que  $X$  es localmente autosemejante débil en  $a$ .

**Ejemplo 2.6.** Intervalos abiertos o todo  $\mathbb{R}$ .



*Demostración.* Cada subintervalo o intervalo ellos mismos sirven como el subespacio homeomorfo a cualquier otro intervalo abierto. Por ejemplo si tomamos un abierto cualquiera alrededor de  $x$ , digamos  $(x - a, x + a)$  existe un homeomorfismo

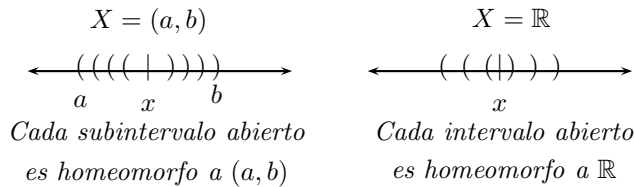
$$f : (x - a, x + a) \rightarrow (0, 1)$$

y así  $(0, 1)$  es homeomorfo a cualquier otro intervalo abierto. □

**Definición 2.5.** (basados en [2]) Sea  $X$  un espacio topológico, llamaremos a  $X$  un espacio **Localmente Autosemejante Fuerte** en  $a \in X$ , si  $a$  admite un sistema fundamental de vecindades tal que cada una de ellas es homeomorfa a  $X$ .

**Definición 2.6.**  $X$  es **Localmente Autosemejante Fuerte** “LAF” si para todo  $a \in X$ ,  $X$  es localmente autosemejante fuerte en  $a$ .

**Ejemplo 2.7.** Al igual que los ejemplos anteriores, los intervalos abiertos o  $\mathbb{R}$  cumplen con la definición de LAF.



*Demostración.* Cada subintervalo o intervalo ellos mismo sirven como el subespacio homeomorfo a cualquier otro intervalo abierto. Por ejemplo si tomamos un abierto cualquiera alrededor de  $x$ , digamos  $(x - a, x + a)$  existe un homeomorfismo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$$

$$x \mapsto f(x) = \arctan(x)$$

□

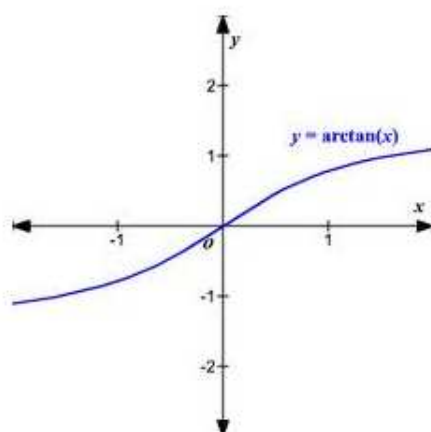


Figura 2.5: Función Arcotangente

Los intervalos para que sean *L.A.F* o *L.A.D.* pueden ser semiacotados, por ejemplo tomando a  $X$  como un rayo o semirecta.

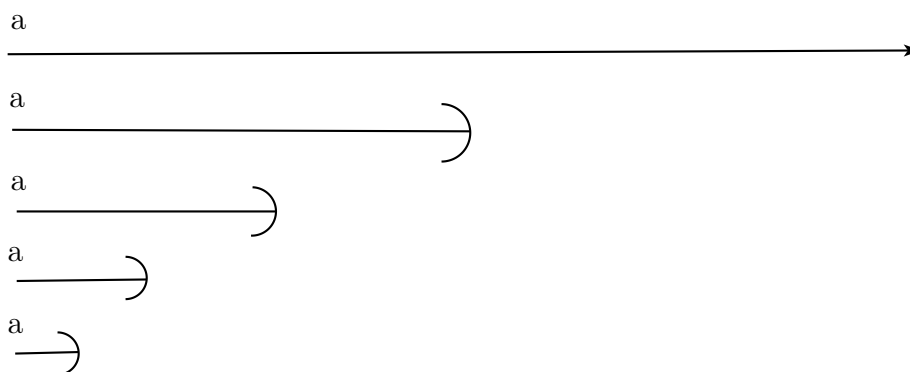


Figura 2.6: Vecindades del Rayo

En cualquier punto  $a$  se pueden construir un SFV autosemejantes y también homeomorfos al rayo. (ver figura 2.4)

Los espacios *L.A.F* o *L.A.D.* pueden ser no conexos, como dos intervalos disjuntos.

Para cada  $a \in X$ , debe existir un SFV tal que cada una de las vecindades de  $a$ ,  $(V_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  debe ser también dos intervalos disjuntos, para que  $X$  sea LAF (ver figura 2.5)

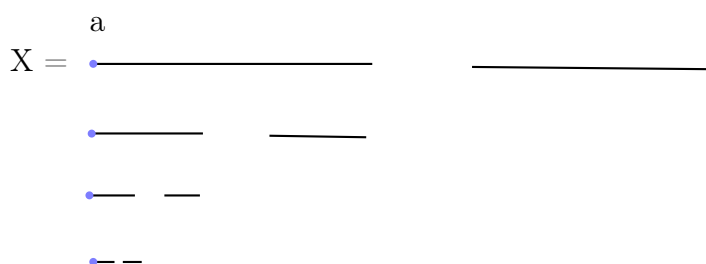
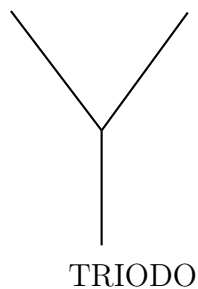


Figura 2.7: Intervalos disconexos.

Como podemos observar en los ejemplos anteriores, existen espacios que cumplen las condiciones de espacio autosemejante, LAF y LAD, también podemos presentar un ejemplo que no cumple ninguna de las propiedades de autosemejanza.

**Ejemplo 2.52.** El *triodo*, es la unión de tres arcos, con un punto de ramificación que los une. Este espacio no es ninguno de los tres espacios mencionados anteriormente.



Como se puede observar si analizamos el punto de ramificación, no cumple con la condición de LAD ni tampoco la definición de espacio autosemejante, ya que toda vecindad de ese punto no es autosemejante, puesto que si tomamos adecuadamente un conjunto abierto en una rama, no existe un subconjunto que sea homeomorfo al espacio completo que es el triodo.

Curiosamente ese mismo punto de ramificación, donde el espacio no es LAD ni espacio autosemejante, es el único punto en el cual el espacio es LAF; ya que se puede construir vecindades las cuales son triodo (cada vez más pequeños) que son homeomorfos al

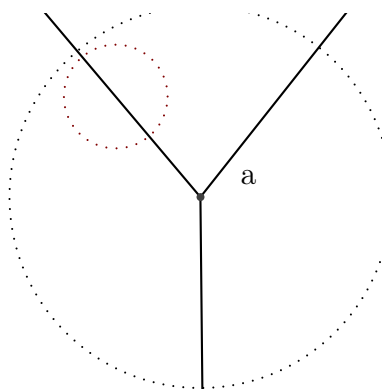


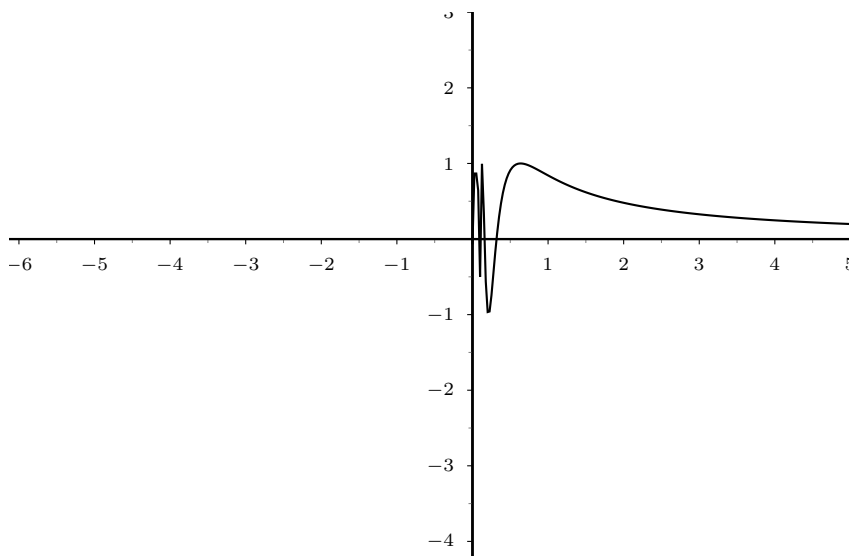
Figura 2.8: Vecindades del Triodo.

espacio completo, pero en cualquier otro punto, las vecindades serían intervalos los cuales no contienen espacios homeomorfos a  $X$ , como ya sabemos un intervalo no puede ser homeomorfo a un triodo, pues, ser un punto de ramificación es una propiedad topológica.

Otro ejemplo famoso en el estudio de la topología es la llamada curva seno del topólogo.

$$f(x) = \text{sen}(1/x)$$

Unido con el intervalo que va desde  $(0,-1)$  a  $(0,1)$ .



La cual no cumple ninguna de las tres definiciones en ciertos puntos. Por ejemplo en los

puntos del rayo, es LAD, ya que se pueden formar vecindades homeomorfas a los arcos, pero en los puntos límites de la barra, no se puede construir vecindades ni homeomorfas a el espacio completo, ni autosemejantes a sí mismas.

Si nos ubicamos en los puntos de la barra límite y hacemos un zoom, nos da la siguiente gráfica.

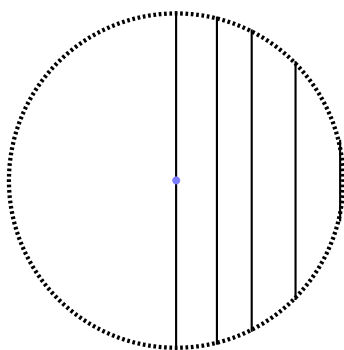


Figura 2.9: Vecindades en la barra límite

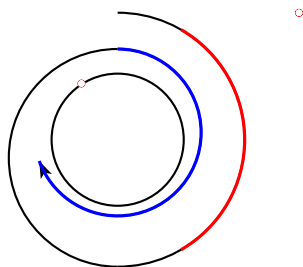
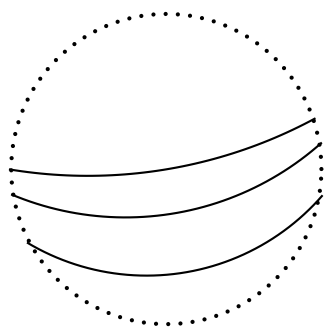
Lo que vemos es que toda vecindad no es conexa, y el espacio  $X$  es conexo. Por lo tanto no es un espacio LAF

Otro espacio topológico que no cumple, las tres definiciones es  $S^1$  y un rayo que converge a  $S^1$ .

ver gráfica 2.10.

Ocurre lo mismo en los puntos que pertenecen a  $S^1$ , todas las posibles vecindades quedan disconexas, como lo muestra la gráfica 2.11.

Por lo tanto dichas vecindades no son homeomorfas al espacio completo, luego el rayo con  $S^1$  no es LAF

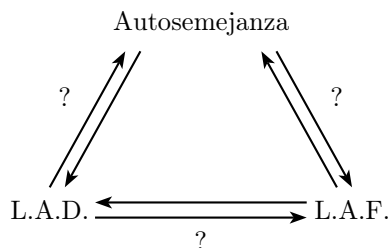
Figura 2.10: Un rayo convergiendo a  $S^1$ Figura 2.11: Vecindades en  $S^1$ 

## 2.3. Implicaciones entre Auto semejanzas

El objetivo de esta sección consiste en analizar propiedades, diferencias, similitudes o relaciones que puedan existir entre las definiciones.

1. Auto semejanza
2. LAD
3. LAF

Empezaremos probando o estudiando las implicaciones entre ellas. Es decir analizaremos el siguiente diagrama.



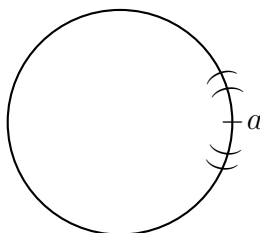
**Proposición 2.52.** *Si  $X$  es autosemejante, entonces  $X$  es LAD*

*Demostración.* Probaremos que para todo  $a \in X$ ,  $a$  admite un  $S.F.V$  todas autosemejantes.

Sea  $(V_i)_{i \in I}$  un SFV de  $a \in X$ , entonces cada  $V_i$  contiene un  $U_i$  subconjunto abierto de  $V_i$ , con  $a \in U_i$ , por ser  $V_i$  vecindad, ahora usando la hipótesis,  $X$  es Autosemejante y como todo abierto es un semiabierto, entonces los  $U_i$  forman un SFV cada una autosemejante (proposición 2.4) por lo tanto  $X$  también es LAD  $\square$

**Ejemplo 2.53.** *Si  $X$  es LAD no implica que  $X$  sea Autosemejante*

Sea  $X = S^1$



Para todo  $a \in X$  existe un SFV y son intervalos abiertos que son autosemejantes, pero no se puede hallar dentro de un intervalo, un subconjunto homeomorfo a  $S^1$ .

**Ejemplo 2.54.** *(Tomado de [2]) Si  $X$  es autosemejante, no implica LAF*

Ilustraremos un ejemplo muy conocido en los fractales.

Sea  $X = \text{Triángulo de Sierpinski}$ .

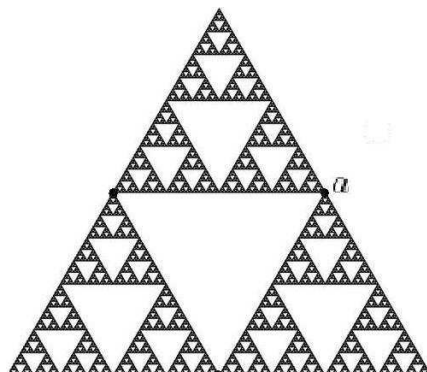


Figura 2.12: Triángulo de Sierpinkí

$X$  es Autosemejante pero no es LAF, ya que por ejemplo en el punto  $a$ , toda vecindad de  $a$  tiene un punto de corte o de desconexión que es el mismo  $a$ , mientras que todo  $X$  no tiene ningún punto de corte.

Ser punto de corte es una propiedad topológica.



Figura 2.13: Vecindad en el punto de corte  $a$

Luego no puede existir un SFV, de  $a$  que sean homeomorfas a  $X$ .

**Proposición 2.53.** *Si  $X$  es LAF, entonces es  $X$  es autosemejante.*

*Demostración.* Por hipótesis para todo  $a \in X$ ,  $a$  admite un SFV,  $(V_i)_{i \in I}$ , donde cada  $V_i$  es homeomorfo a  $X$ . Vamos a probar que para todo  $U$  subconjunto abierto de  $X$  debe existir  $V \subset U$  tal que  $V \approx X$ .

Para todo  $U$  subconjunto abierto de  $X$  siempre existe un  $a \in U$  ( $U \neq \emptyset$ ), como  $U$  es abierto,  $U$  sirve como una vecindad de  $a$ , y como vecindad debe contener un  $V_j$  tal que  $V_j \in (V_i)_{i \in I}$ , entonces como  $X$  es LAF,  $V_j \approx X$  luego, como  $V_j \subseteq U$  y  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces  $X$  es autosemejante.  $\square$

**Proposición 2.54.** *LAF implica LAD.*

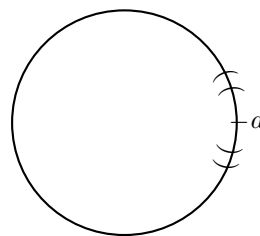
*Demostración.* LAF implica autosemejanza y autosemejanza implica LAD. Entonces se tiene que LAF implica L.A.D..  $\square$

El siguiente ejemplo demuestra que no se tiene la siguiente implicación.

**Proposición 2.55.** *L.A.D. no implica LAF.*

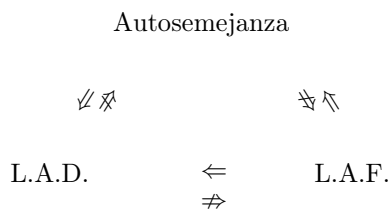
Contraejemplo:  $X = S^1$

Las vecindades de  $a$  son autosemejantes, pero ninguna vecindad es homeomorfa a  $S^1$ .



cada vecindad es homeomorfa a un arco, pero ningún arco contiene un espacio homeomorfo a  $S^1$ , por eso no es LAF ni tampoco es autosemejante.

Las implicaciones dan como resultado.



Que se puede representar en forma de diagrama.

Como se puede observar LAF implica Auto semejanza y *L.A.D.*

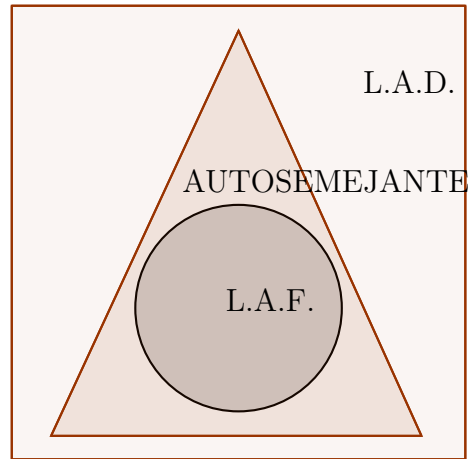


Figura 2.14: Contencencias de Auto semejanzas.

por lo cual se considera a LAF la auto semejanza local más fuerte, es por eso nos concentraremos en la propiedad LAF

## 2.4. Topologías

Hasta ahora hemos trabajado conjuntos conocidos tomando los abiertos como los abiertos “usuales”; ahora estudiaremos conjuntos conocidos pero cambiando las topologías para observar cómo se comportan.

Empezaremos observando las dos topologías triviales.

### Topología Trivial o Indiscreta

Como los únicos subconjuntos abiertos son  $\{\emptyset, X\}$ , entonces todo espacio  $X$  con la topología trivial es LAF, ya que en todo punto  $a \in X$ , un SFV de  $a$  es el mismo  $X$ , (además es el único SFV) en el cual obviamente existe un subespacio homeomorfo a todo el espacio:  $X \approx X$ .

Como LAF implica autosemejante, entonces todo espacio  $X$  con la topología trivial también es autosemejante.

### Topología Discreta

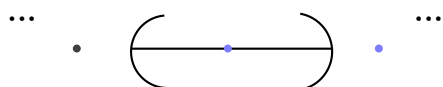
Esta topología toma a todos los subconjuntos unitarios como subespacios abiertos del espacio, por lo tanto, depende de la cardinalidad del espacio para probar si es o no LAF existen dos posibilidades:

- \* Si  $|X| = 1$ , por ejemplo  $X = \{a\}$  se comporta como la topología anterior (Trivial) por lo tanto es LAF y a su vez Autosemejante.
- \* Si  $|X| \geq 2$ , entonces  $X$  no es LAF ni es Autosemejante; ya que para todo  $a \in X$ ,  $\{a\}$  es una vecindad de  $a$  que no puede contener una vecindad homeomorfa a  $X$ , sin importa el espacio  $X$  que se tome.

A continuación se trabajará en  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  y  $\mathbb{R}$  verificando las definiciones de LAF y autosemejanza; las topologías que se van a analizar son: Topología usual, limite inferior, colas a derecha, complementos finitos, complementos enumerables

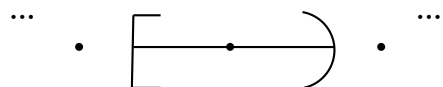
1.  $X = \text{Números Naturales } \mathbb{N}$ :

$\Delta$  **Topología usual:** Se pueden crear abiertos los cuales se comporta como la topología discreta ya que los elementos son puntos aislados.



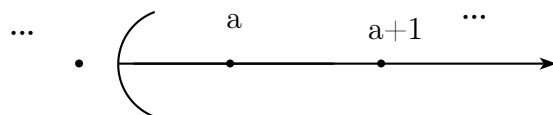
Por tanto no es LAF ni autosemejante.

$\Delta$  **Limite inferior:** Se comporta de la misma manera que la topología usual.



Luego no es LAF ni autosemejante.

$\Delta$  **Colas a derecha** Se puede crear un SFV dado un  $a \in \mathbb{N}$ , con un solo abierto, de la siguiente manera.



El homeomorfismo sería la función  $f : \mathbb{N} \rightarrow V$  definido como  $f(n) = a + n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . entonces el espacio es LAF

$\Delta$  **Complementos finitos:** Sí es LAF ya que toda los espacios  $X$  y  $X - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  tienen la misma cardinalidad por lo cual siempre se puede crear una una biyección.

Para probar que cualquier biyección  $f : X \rightarrow X - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  también es bicontinua se puede observar:

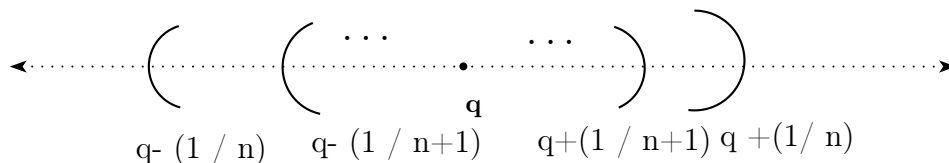
Si se toma un abierto en el conjunto  $X - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , supongamos el conjunto  $X - \{a_1, a_2, \dots, a_n, j\}$  al aplicar la función inversa, se llega al conjunto  $X - \{f^{-1}(j)\}$  el cual es un subconjunto abierto, entonces es continua.

Para probar que es abierta se toma un abierto en  $X$ , digamos  $X - \{a\}$  llega al conjunto  $X - \{a_1, a_2, \dots, a_n, f(a)\}$ , el cual también es un conjunto abierto en  $X$ , por lo tanto es una función bicontinua y biyectiva implica que es un homeomorfismo.

$\Delta$  **Complementos enumerables:** El conjunto de  $\mathbb{N}$  No es LAF, por ejemplo, si quiero analizar la definición en un  $a \in \mathbb{N}$  una vecindad sería el mismo punto  $\{a\}$  ya que  $\mathbb{N} - \{a\}$  es el complemento enumerable, entonces resulta la topología discreta con cardinal mayor que uno, la cual no es LAF.

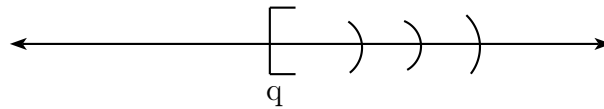
## 2. $X = \text{Números Racionales } \mathbb{Q}$ :

$\Delta$  **Topología Usual:** Sí es LAF y autosemejante, ya que en cualquier  $q \in \mathbb{Q}$ , se puede crear un sistema fundamental de vecindades haciendo intervalos abiertos alrededor de  $q$ .  $V_i = \cup(q - i/n, q + i/n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

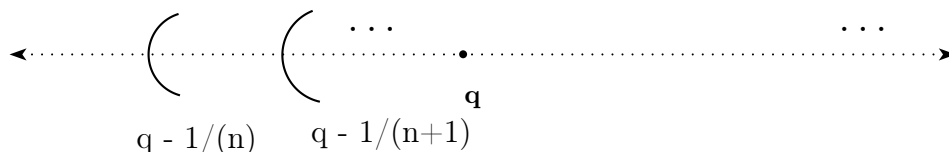


Cada intervalo es homeomorfo a  $\mathbb{Q}$ .

△ **Límite inferior:** No es LAF y tampoco es autosemejante, ya que toda vecindad en un punto  $q \in \mathbb{Q}$  es de la forma  $[q, q + 1/n)$ , por tener primer elemento no es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .



△ **Colas a derecha:** Sí es LAF se debe tomar desde un número irracional hasta acercarse al número racional  $q$ , por ejemplo con los puntos  $q - 1/n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



△ **Complementos finitos:** Sí es LAF, Como ya se sabe existe una biyección entre los racionales y los naturales,  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  se hace una composición obteniendo una nueva función biyectiva y bicontinua.

$$g : \mathbb{Q} - P \rightarrow \mathbb{N} - f(P)$$

y ya sabemos que  $\mathbb{N} - P$  es un conjunto abierto con la topología de complementos finitos.

Donde  $P$  es un conjunto con finitos puntos.

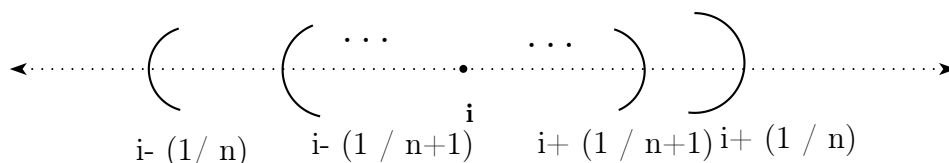
△ **Complementos enumerables:** No es LAF ni Autosemejante, debido a que si se toma cualquier número racional me sirve como un abierto y vuelve a tener la topología discreta, entonces  $\mathbb{Q}$  no es LAF..

3.  $\mathbb{X} = \mathbb{I}$  = Números Irracionales

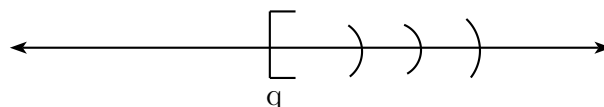
$\Delta$  **Topología Usual:**  $\mathbb{I}$  Los irracionales se comporta de la misma manera que los racionales, lo único que se debe tener en cuenta es que se debe cambiar los límites inferiores.

$\mathbb{I}$  es LAF y Autosemejante, ya que en cualquier  $i \in \mathbb{I}$ , se construyen un sistema fundamental de vecindades haciendo intervalos abiertos alrededor de  $i$ .

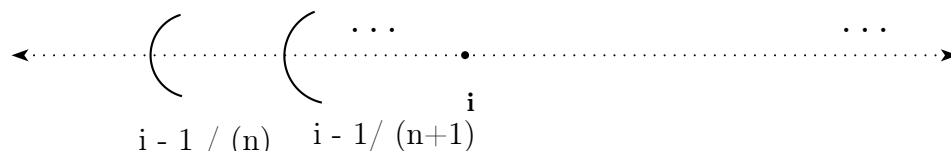
$V_i = \bigcup (i - 1/n, i + 1/n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  :



$\Delta$  **Límite inferior:** No es LAF ni es Autosemejante, ya que toda vecindad en un punto  $i \in \mathbb{I}$  es de la forma  $[i, i + 1/n)$ , por tener primer elemento no es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .



$\Delta$  **Colas a derecha:** Si es LAF se debe tomar desde un número racional hasta aproximarse al número irracional  $i$ , por ejemplo con los puntos  $i - 1/n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



$\Delta$  **Complementos finitos:** Si es LAF debido a una propiedad de las topologías de complementos que dice; sea un conjunto infinito  $Y$ , fijando  $\alpha$  cardinal infinito,

$\alpha \leq |Y|$ , y tomando como abiertos los subconjuntos cuyo complemento tiene cardinal estrictamente menor que  $\alpha$ , se puede crear un homeomorfismo de los subconjuntos abiertos de  $Y$  al espacio  $Y$ . (ver [1] pag. 24)

#### 4. $X = \text{Números Reales } \mathbb{R}$ :

$\Delta$  Topología usual o de Hausdorff.

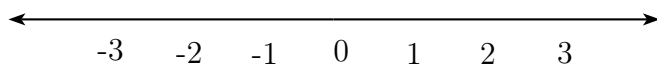
Como ya se había estudiado si es LAF.

$\Delta$  **Limite inferior:** De acuerdo a lo estudios realizados se puede conjeturar que  $\mathbb{R}$  no es LAF con la topología del limite inferior, ya que en todo punto  $a \in \mathbb{R}$  debe tener un SFV que debe ser de la forma o estar contenido en intervalos  $[a, 1/n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y no hay forma de definir claramente un homeomorfismo.

$$f : [a, 1/n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Delta$  **Complementos finitos:**

Recta Real  $\mathbb{R}$ .



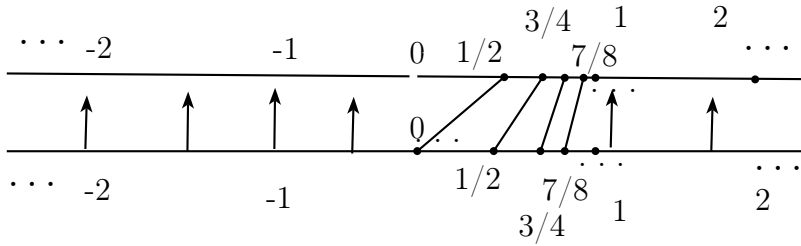
Vamos a suponer (sin pérdida de generalidad) un subconjunto abierto  $\mathbb{R} - \{0\}$  y vamos a realizar la biyección.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

La función  $f$  esta definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x = 1 - \frac{1}{2^n}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots \\ f(x) = x, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es decir se trasladan los punto medios  $1 - \frac{1}{2^n} \mapsto 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$  convergiendo hacia 1.



Claramente esta función es  $1 - 1$  y *sobre*, por ende está asegurado la biyección.

Se puede ampliar la función cuando el conjunto abierto sea,  $\mathbb{R} - \{1, 2, 3, \dots, m\}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ , haciendo los desplazamientos correctamente entre un  $k$  y  $k + 1$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, (m - 1)$ . como se hizo con 0 y 1

Para probar que toda biyección es bicontinua, vamos a generalizar la función:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$ .

Primero probaremos que es continua y luego abierta.

- Sea  $U = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, p\}$ , entonces  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , si aplicamos la preimagen de  $U$ ,  $f^{-1}(U) = \mathbb{R} - \{f^{-1}(p)\}$  el cual es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ , entonces  $f$  es continua.
- Sea  $V = \mathbb{R} - \{k\}$ , entonces  $V$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ , si aplicamos la imagen de  $V$ ,  $f(V) = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f(k)\}$ , el cual sería un subconjunto abierto de  $\mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , entonces  $f$  es abierta

---

Sea  $V = \mathbb{R} - \{k\}$ , entonces  $V \subset^{ab} \mathbb{R}$ , si aplicamos la imagen de  $V$ ,  $f(V) = \mathbb{R} - \{f(k)\}$ , el cual sería un subconjunto abierto de  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$\Delta$  **Complementos enumerables:** Sí es LAF por la misma razón que  $\mathbb{I}$  es LAF.

Las anteriores resultados cambiando topologías se resumen en la siguiente tabla.

Topología Espacio	Usual	Colas der.	Limite Inf.	ComFin.	ComEnum
Naturales	NO	LAF	NO	LAF	NO
Racionales	LAF	LAF	NO	LAF	NO
Irracionales	LAF	LAF	NO	LAF	LAF
Reales	LAF	LAF	???	LAF	LAF

En conclusión, se muestra que poseer o cumplir algunas de las definiciones de autosemejanza no depende exclusivamente de la forma del espacio, si no también de sus abiertos o sus topologías.

## CAPÍTULO 3

## PROPIEDADES LAF

Las dos primeras proposiciones que se presentan a continuación, tienen como base fundamental, la cardinalidad de los espacios. La primera definición es sacada de un libro de problemas abiertos en topología.

**Definición 3.1. *Espacio de Toronto*** : *Un espacio topológico se dice de Toronto si es homeomorfo a cualquiera de sus subespacios del mismo cardinal.*

### **Ejemplos:**

★ Los número naturales,  $\mathbb{N}$ , con la topología de complementos finitos  $Cof$ , ya que para cualquier subconjunto de  $\mathbb{N}$  de cardinal  $\aleph_0$ , se puede crear la biyección con  $\mathbb{N}$  y la función es bicontinua. por ende son homeomorfos.

★ Un ejemplo con cardinal  $\aleph_1$ , puede ser los números irracionales  $\mathbb{I}$  o los números reales  $\mathbb{R}$ , pero con la topología discreta.

Del anterior ejemplo se deduce la pregunta aún abierta que esta presentada en "Open problems in topology" (1990). **Pregunta Abierta:** ¿Todos los espacios de

Hausdorff, que son espacios de Toronto de cardinalidad  $\aleph_1$  son espacios discretos?.

### 3.1. Proposiciones LAF

Las siguientes proposiciones son basadas en las propiedades planteadas en [1].

Ahora se demostrarán las proposiciones en espacios LAF

**Proposición 3.1.** *Si  $X$  es LAF entonces  $|\mathbf{O}| = |X|$ , para todo  $\mathbf{O}$  subconjunto abierto no vacío y de  $X$ .*

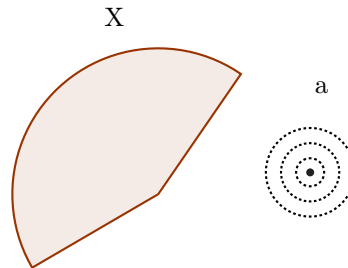
*Demostración.* Sea  $x \in \mathbf{O}$ , como  $\mathbf{O} \subset X$ ,  $x \in X$ , entonces  $x$  admite un sistema fundamental de vecindades, SFV,  $(V_i)_{i \in I}$ , tal que  $V_i \subseteq \mathbf{O}$ , para algún  $i \in I$  y además  $V_i \approx X$ , por ser  $X$  LAF. Luego  $|V_i| = |X|$ , por ser espacios homeomorfos, luego por contenencias,  $|V_i| \leq |\mathbf{O}|$ ,  $|\mathbf{O}| \leq |X|$  entonces se concluye  $|\mathbf{O}| = |X|$ .  $\square$

**Proposición 3.2.** *Si  $|\mathbf{O}| = |X|$  para todo  $\mathbf{O}$  abierto no vacío,  $\mathbf{O} \subset X$  y  $X$  un espacio de Toronto, entonces  $X$  es LAF*

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbf{O}$ , entonces podemos crear un SFV,  $(V_i)_{i \in I}$ , tomando todos los conjuntos abiertos de  $X$  que contengan a  $x$ , es decir  $V_i$  subconjunto abierto de  $X$  y  $x \in V_i$  para todo  $i \in I$ , ahora como todo subconjunto abierto tiene el mismo cardinal de  $X$  y además por ser  $X$  de Toronto entonces cada  $V_i \approx X$ , por lo tanto  $X$  es LAF  $\square$

**Proposición 3.3.** *Un espacio LAF con más de un punto es perfecto.*

*Demostración.* Se demostrará por contradicción. Supongamos que no es perfecto y que  $|X| > 1$ . Sea  $a$  un punto aislado, entonces existe  $\mathbf{O}$  abierto diferente de vacío de  $X$ , tal que  $a \in \mathbf{O}$ , y  $|\mathbf{O}| = 1$ , además todo sistema fundamental de vecindades de  $a$  contiene a  $\mathbf{O}$ ,  $\{\mathbf{O}\} \subseteq (V_i)_{i \in I}$ .



Como  $X$  es LAF debería  $\mathbf{O} \approx X$ , como  $|\mathbf{O}| = 1$ ,  $|X| > 1$  no es posible que  $\mathbf{O} \approx X$ . Por lo tanto  $X$  no tiene puntos aislados, entonces es perfecto.  $\square$

**Proposición 3.4.** *La propiedad de LAF es una propiedad topológica*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio LAF y sea una función  $f$  un homeomorfismo,  $f : X \rightarrow Y$ , para probar que  $Y$  es LAF se escoge cualquier  $y \in Y$ , se aplica la preimagen  $f^{-1}(y) = x$ , para algún  $x \in X$  se construye un SFV,  $(V_i)_{i \in I}$  de  $x$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que:  $V_i \cong X$ , se aplica la función a cada  $V_i$ ,  $f((V_i)_{i \in I}) = W_i$ , tal que cada  $W_i$  es una vecindad del punto  $y$ , luego por la propiedad transitiva  $f$  es un homeomorfismo.

$$W_i \approx V_i, V_i \approx X, X \approx Y$$

Entonces existe SFV  $(W_i)_{i \in I}$  tal que cada  $W_i$  es homeomorfa a  $Y$ . Por lo tanto  $Y$  es LAF  $\square$

**Proposición 3.5.** *LAF se hereda por semiabierto, es decir que un subespacio semiabierto de un espacio LAF, es LAF.*

*Demostración.* Sea  $X$  espacio LAF y  $H$  subconjunto semiabierto de  $X$ , por la proposición 2.4  $H$  es autosemejante, lo que quiere decir que para todo  $U$  subconjunto abierto de  $H$ , existe un subconjunto  $V \subset U$  tal que  $V \approx H$ .

Sea un  $h \in H$  existe un S.F.V,  $(V_i)_{i \in I}$  tal que  $h \in U_i$  y  $U_i$  es un subconjunto abierto de  $H$ . Entonces existe un  $V_i \subset U_i$  tal que  $V_i \approx H$ . Además  $V_i$  es un semiabierto porque  $H$  es un semiabierto.

Como cada  $V_i$  es un semiabierto, entonces contiene un abierto (definición de semiabierto) lo que quiere decir que  $V_i$  sirve como una vecindad de  $h$ , entonces se puede construir un S.F.V,  $(V_i)_{i \in I}$  tal que cada vecindad es homeomorfa a  $H$ . Por lo tanto  $H$  cumple con la definición de espacio LAF.  $\square$

**Proposición 3.6.** *Si  $\{X_\alpha\}_\alpha$  es una familia de espacios LAF, entonces el espacio producto  $\Pi_\alpha X_\alpha$  es LAF*

*Demostración.* Sea  $a = (a_\alpha)_\alpha \in \Pi_\alpha X_\alpha$  y consideremos el subespacio  $V = V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2} \times \dots \times V_{\alpha_n} \times \Pi_\alpha X_\alpha$ , ( $\alpha \neq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ ) una vecindad de  $a$  en  $X = \Pi_\alpha X_\alpha$ , entonces  $a_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Como  $X_{\alpha_i}$  es LAF para todo  $\alpha_i$  entonces:

$$V_{\alpha_i} \approx X_i$$

por lo tanto:

$$V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2} \times \dots \times V_{\alpha_n} \approx X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \dots \times X_{\alpha_n}$$

De esta manera tenemos:

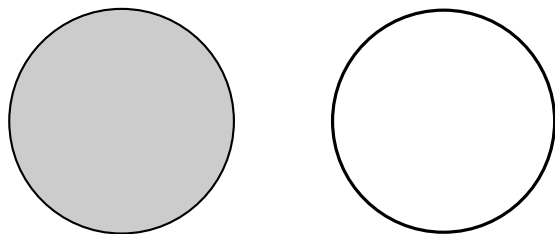
$$a_\alpha \in U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \dots \times U_{\alpha_n} \times \Pi_\alpha X_\alpha \approx \Pi_\alpha X_\alpha$$

$\therefore$  El espacio  $\Pi_\alpha X_\alpha$  es LAF  $\square$

**Proposición 3.7.** *En general LAF no se preserva por subespacios, sumas, ni cocientes.*

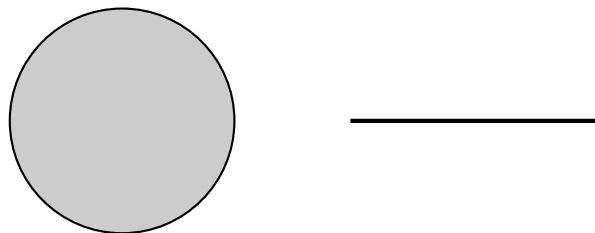
**EJEMPLOS:**

- El disco  $D^1$  es un espacio LAF pero si tomamos el subespacio  $S^1$

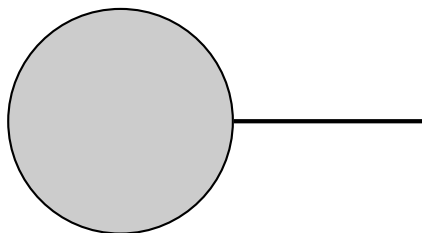


Ya se sabe que  $S^1$  no es LAF

- El espacio  $D^1$  y el intervalo son espacios LAF

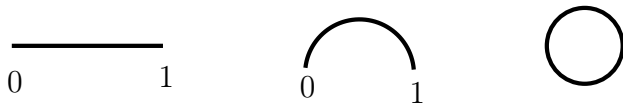


Pero si hacemos una unión como la colombina, el espacio nuevo ya no es LAF



Ya que en cualquier punto sobre la barra no se puede construir vecindades homeomorfas a la colombina.

- El intervalo  $[0,1]$  es LAF pero si identificamos el cero con el 1, nace  $S^1$ .



$S^1$  no es LAF

## 3.2. Cardinalidad LAF

A continuación se ilustrarán ejemplos donde varía la cantidad de puntos LAF de cada espacio, por ello surge una nueva definición que nos llevará a presentar una nueva proposición.

- No tener ningún punto LAF.

$$X = S^1$$

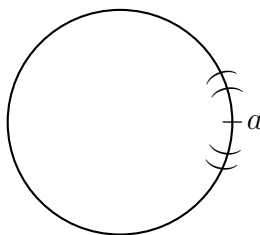
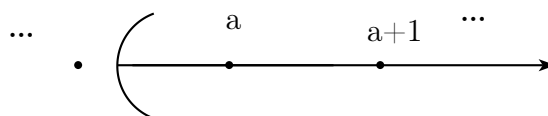


Figura 3.1: Ninguna vecindad en  $a$  puede ser homeomorfa a  $S^1$

- Tener un solo punto LAF.

En la siguiente gráfica únicamente el punto inferior es el punto LAF del espacio completo, es donde convergen los cuadrados.

- Tener exactamente  $\aleph_0$  puntos LAF, Los números naturales  $\mathbb{N}$ , con la topología de colas a derecha.



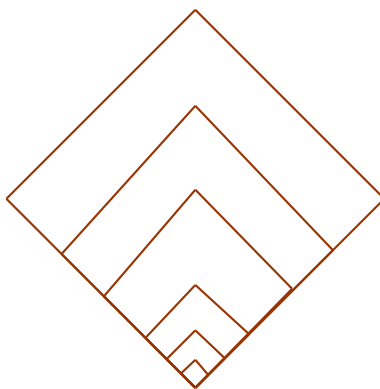
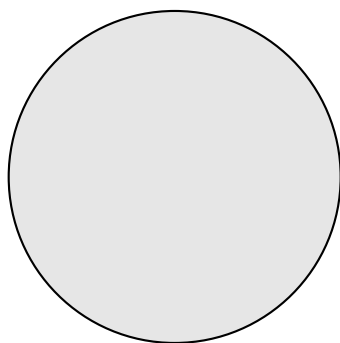


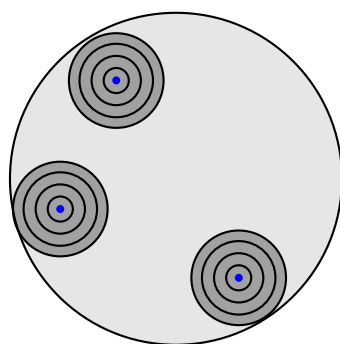
Figura 3.2: Cuadrados con un único punto L.A.F.

Para todo Punto  $a \in \mathbb{N}$  se puede crear una vecindad que puede servir como su propio SFV la cual es homeomorfa a  $\mathbb{N}$ .

- Tener  $\aleph_1$  puntos LAF El disco  $D^1$ .



En todo punto de  $D^1$  se puede construir un SFV homeomorfas a  $D^1$ .



Esto hace sospechar que no existen espacios topológicos con finitos puntos LAF mayor o igual a 2.

- En el triángulo de *Sierpinski* ya vimos que no es un espacio LAF, puesto que tiene infinitos puntos que no son puntos LAF, que son precisamente los puntos de intersección entre 2 triángulos (copias reducidas del triángulo de Sierpinski) como el punto  $a$ .

Es decir, todos los puntos que no son puntos de intersección de dos triángulos o que tienen un solo **código** asociado son puntos LAF.

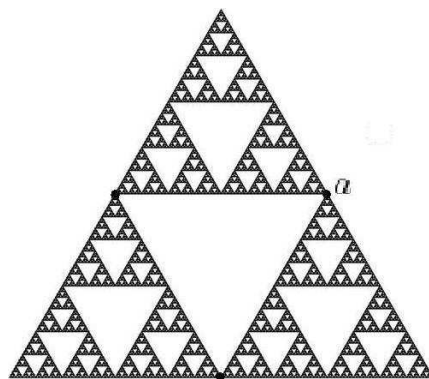


Figura 3.3: Triángulo de Sierpinski

Por ejemplo sea  $t \in \mathbb{R}^2$  y que pertenece al triángulo de *Sierpinski*, donde  $t = (1, 0)$  entonces  $t$  tiene un único código asociado.

$$\varphi^{-1}(t) = (1, 1, 1, , 1, 1, \dots)$$

Supongamos un SFV de  $t$  digamos  $V_i$ , definida de la siguiente manera.

$$V_1 = \langle 1 \rangle$$

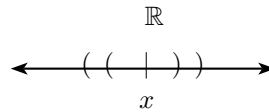
$$V_2 = \langle 1, 1 \rangle$$

$$V_3 = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ V_n = \langle 1, 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle \\ \vdots \end{array}$$

Donde  $i \in \mathbb{N}$ , es decir por la proposición 1.20, (cap.1 pag.14) las vecindades  $V_i$  consiste en las bolas que empiezan con la palabra  $(1,1,1,\dots)$  las cuales sirven como vecindades homeomorfas del punto  $\varphi^{-1}(t)$  con el triángulo de Sierpinski, por lo tanto. Sierpinski tiene infinitos puntos LAF.

- La recta real  $\mathbb{R}$  tiene  $\aleph_1$  puntos LAF, debido a que todos sus puntos son LAF y el cardinal de  $\mathbb{R}$  es  $\aleph_1$ .



Cada punto de  $x \in \mathbb{R}$   
tiene un SFV cada una homeomorfa a  $\mathbb{R}$

**Definición 3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico, entonces el subconjunto de  $X$  que llamaremos  $PA(X)$ , son los puntos de Autosemejanza Local Fuerte de  $X$  definido de la siguiente manera:

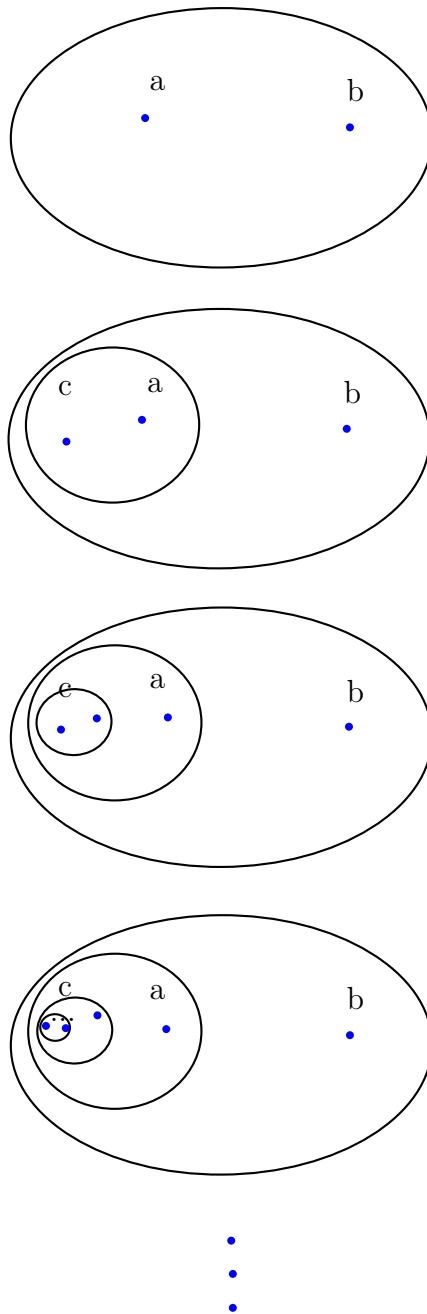
$$PA(X) = \{x \in X \mid X \text{ es LAF en } x\}$$

Esta proposición se aplica a espacios que sean  $T1$ .

**Proposición 3.8.** Para todo espacio topológico  $X$ ,  $(T1)$  entonces el cardinal de  $PA(X)$  es:

$$|PA(X)| = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \text{mayor o igual que } \aleph_0 \end{cases} .$$

*Demostración.* Supongamos que  $|PA(X)|$  es mayor que 1. Sean  $a, b \in X$  tal que  $X$  es LAF en  $a, b$  y sea  $V_a$  una vecindad de  $a$  tal que  $b$  no pertenece a  $V_a$  y  $V_a \approx X$ . entonces  $V_a$  contiene 2 puntos LAF diferentes de  $b$ , digamos el punto  $a$  y otro nuevo punto  $c$ , luego repetimos el proceso y construimos una nueva vecindad  $V_c$  tal que  $a$  y  $b$  no pertenecen a  $V_c$  y además  $V_c \approx X$  entonces existe un nuevo punto que es LAF y así se sucesivamente se repite las nuevas vecindades generando nuevos puntos LAF lo que quiere decir que el espacio  $X$  tiene infinitos puntos LAF □



Cada nuevo punto LAF puede generar una nueva vecindad que a su vez va generando infinitos puntos  $L.A.F$

## CAPÍTULO 4

## CONTINUOS

### 4.1. Continuos

En este capítulo se retomarán algunas definiciones topológicas, enfatizadas mas en los espacios *Continuos*, para relacionarlos con los conceptos de autosemejanzas tratados anteriormente.

**Definición 4.1.** *Un espacio no vacío  $X$  es un continuo si es un espacio métrico conexo y compacto.*

A continuación presentaremos algunos espacios continuos famosos y se estudiará su Autosemejanza.

**Ejemplo 4.1.** *El cono de Cantor, toma como base el conjunto de Cantor y se unen arcos sobre Cantor con un punto de intersección.*

El cono de cantor no es LAF en todos sus puntos, únicamente tiene un punto LAF es el punto Norte o de intersección de los arcos. Si nos ubicamos en cualquier punto del cono de Cantor diferente al punto de intersección, toda vecindad sería infinitos segmentos disjuntos, como lo muestra la siguiente figura.

El cono de Cantor tiene vecindades disconexas y como el cono completo sí es conexo entonces el cono de cantor no es LAF.

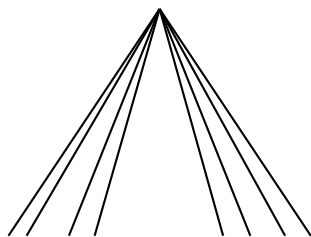


Figura 4.1: Cono de Cantor

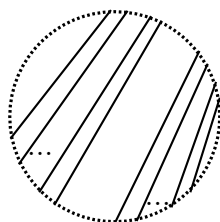
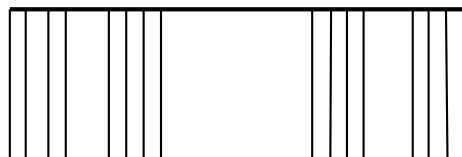


Figura 4.2: vecindades en el cono de Cantor

**Ejemplo 4.2.** *El Peine de Cantor, también toma como base el conjunto de Cantor y se proyectan de cada punto de cantor un arco o segmento a una barra horizontal.*



El peine de Cantor tiene vecindades disconexas y como el peine de cantor es conexo entonces el peine de cantor no es L.A.F.

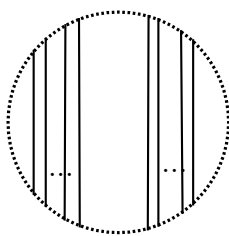
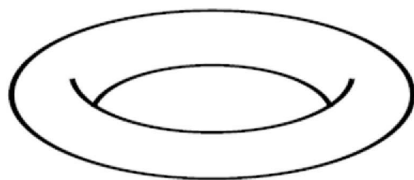


Figura 4.3: vecindades en el peine de cantor

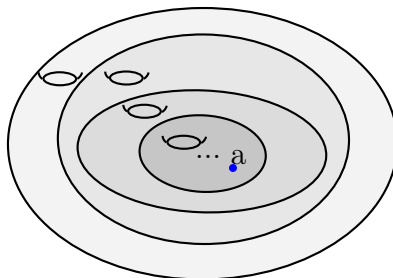
**Ejemplo 4.3.** Sea  $X = S^1 \times D^1$ , es el disco como un solido de revolución sobre una circunferencia.

El espacio  $X \subset \mathbb{R}^3$ , es un espacio como un toro relleno, una dona o un anillo. En  $X$  se pue-

Figura 4.4:  $S^1 \times D^1$ 

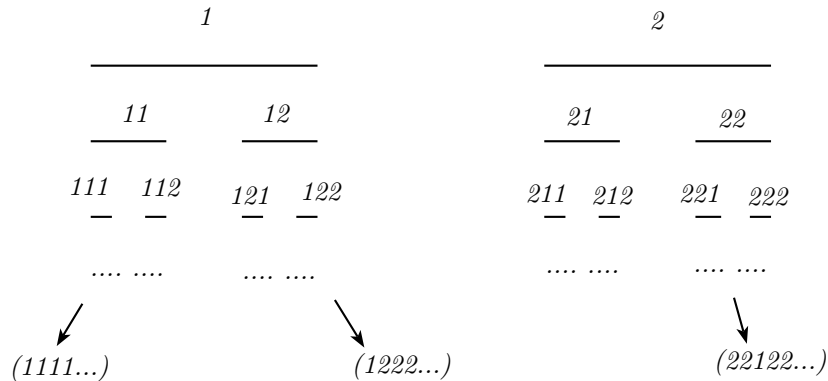
de construir vecindades, construyendo una esfera que contenga al punto  $a$  y perforando la esfera sin tocar al punto  $a$ . dicho proceso se puede repetir infinitas veces creando SFV.

El hueco o la perforación se puede trasladar o reducir y sigue siendo homeomorfo, entonces en un punto  $a \in S^1 \times D^1$  se pueden crear las vecindades adecuadamente moviendo la perforación central donde cada una de ellas son homeomorfas a  $S^1 \times D^1$ .



Se expondrán espacios continuos que a su vez son espacios fractales, se probarán que son *LAF* usando el **espacio de códigos** (ver preliminares)

**Ejemplo 4.50.** *El conjunto de Cantor, se ilustrará la ubicación de los códigos (tomado de [4])*



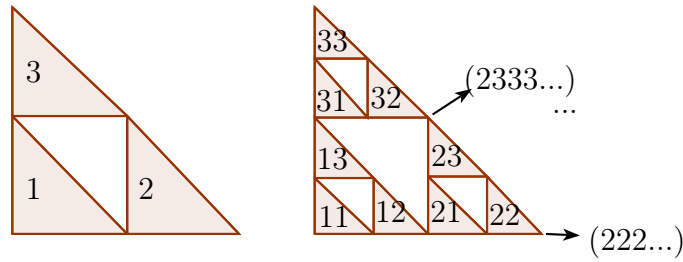
Para probar que el conjunto de Cantor es LAF se toma un punto cualquiera y se construye una vecindad homeomorfa.

Sea  $a$  un punto en Cantor, entonces debe tener un **código** asociado (ver cap. 1, pag. 13). Supongamos  $\varphi^{-1}(a) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  donde  $a_i \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ , entonces usando la proposición 1.20, un SFV de  $a$  seria:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \langle a_1 \rangle \\
 V_2 &= \langle a_1, a_2 \rangle \\
 V_3 &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \\
 &\vdots \\
 V_n &= \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

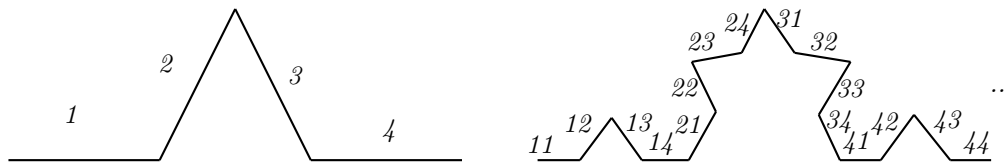
cada vecindad  $V_n$  son los códigos que empieza con la palabra  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

**Ejemplo 4.51.** *El triángulo de Sierpinski y sus **códigos** asociados.*



Ya sabemos que el triángulo de Sierpinski no es LAF (proposición 2.20) precisamente los puntos que no son LAF son los puntos que tienen asociado dos códigos. Por ejemplo  $\varphi(3, 2, 2, 2, \dots) = \varphi(2, 3, 3, 3, \dots)$ .

**Ejemplo 4.52.** La curva de Koch, cada punto se puede representar con un **código**.



La curva de Koch es un espacio homeomorfo a un arco, por ende es LAF.

**Ejemplo 4.53.** La **Esponja de Menger** es un espacio que esta contenido en  $\mathbb{R}^3$ , donde tiene su **espacio de códigos** en  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^{\mathbb{N}}$

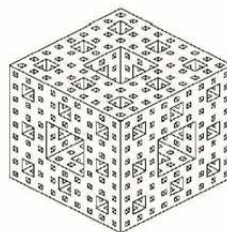


Figura 4.5: Esponja de Menger

Este es un espacio LAF ya que en un punto  $a$  de una esquina puede tener el código  $\varphi^{-1}(a) = (1, 1, 1, 1, \dots)$  y construyendo las bolas (proposición 1.20) sirven como un SFV de

$a$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle 1 \rangle \\ V_2 &= \langle 1, 1 \rangle \\ V_3 &= \langle 1, 1, 1 \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Gráficamente es como si se fueran reduciendo copias de la esponja en forma de sucesión con límite en  $a$ , las cuales sirven como un SFV.

La esponja de Menger es un espacio Homogéneo (ver definición en cap. 1, pag. 10), es decir que se puede asociar que todos sus puntos del espacio a nivel local son topológicamente iguales.

La prueba donde se presenta que la esponja de Menger es homogéneo se encuentra en: R. D. Anderson, “*A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity*” Ann. Math., 67 (1958), 313-324.

En conclusión, como La esponja de Menger es homogéneo y se identifico un punto LAF (el de la esquina  $a=(1,1,1, \dots)$ ), entonces los demas puntos del espacio también son LAF. por lo tanto la esponja de Menger es LAF.

Lo anterior no significa que todo espacio homogéneo sea autosemejante o LAF por ejemplo el espacio  $S^1$ , es homogéneo pero no cumple las propiedades de autosemejantes ni de LAF.

**Proposición 4.50.** *Sea  $X$  un espacio topológico LAF y sea  $P$  una propiedad topológica. Si  $X$  satisface la propiedad  $P$  entonces  $X$  es localmente  $P$*

*Demostración.* Como  $X$  es LAF entonces  $x$  admite un sistema fundamental de vecindades  $S.F.V = \{V_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  para todo  $x \in X$ , donde cada  $V_i$  es homeomorfo a  $X$ , luego por ser cada vecindad homeomorfa a  $X$ , comparten las mismas propiedades topológicas, es decir, si  $X$  tiene la propiedad topológica  $P$ , entonces todas las vecindades del  $S.F.V$  también tienen la propiedad  $P$ , por lo tanto cada  $V_i$  tiene la propiedad  $P$ , de modo que  $X$  es localmente  $P$ .  $\square$

El recíproco de la proposición 3.4 es falso, es de decir:

Sea  $X$  es un espacio topológico LAF. Si  $X$  satisface localmente la propiedad  $P$  no implica que  $X$  satisface la propiedad  $P$ .

**Ejemplo 4.54.** Sea  $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ ,  $X$  es localmente conexo. pero el espacio completo  $X$  no es conexo.

Si  $X$  es un continuo LAF, entonces  $X$  es localmente conexo y localmente compacto.

*Demostración.* Aplicar la definición de continuo y aplicar la proposición.  $\square$

**Proposición 4.51.** Sea  $X$  un continuo convexo de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X$  es LAF.

*Demostración.* Vamos a probar que para todo  $a \in X$ , existe un SFV tal que cada vecindad es homeomorfa a  $X$ .

Sea  $a$  un punto cualquiera de  $X$ , luego para todos los puntos de  $X$  se les resta  $a$ , es decir, obtenemos el conjunto  $U = X - (a) = \{x - a | x \in X\}$  de esta manera hemos construido  $U$  que es  $X$  trasladando el punto  $a$  en el origen.

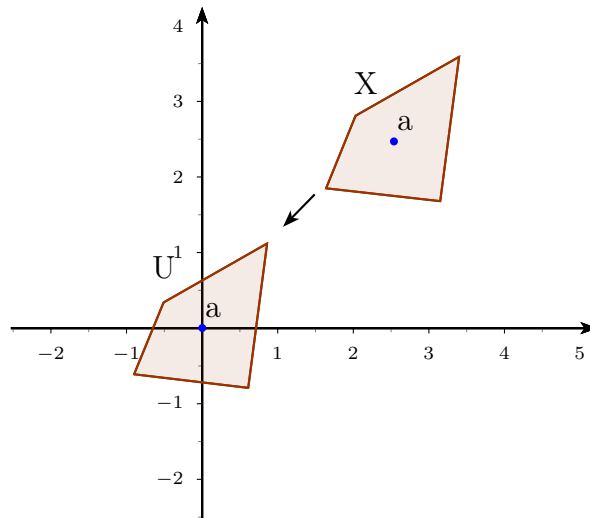
Entonces se pueden construir un SFV de  $a$ , que notaremos  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  así:

$$V_i = (1/i)U + (a)$$

es claro que cada uno de estos  $V_i$  es una vecindad copia de  $X$  a una escala de  $\frac{1}{i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, \dots$  y por lo tanto homeomorfa a  $X$ .  $\square$

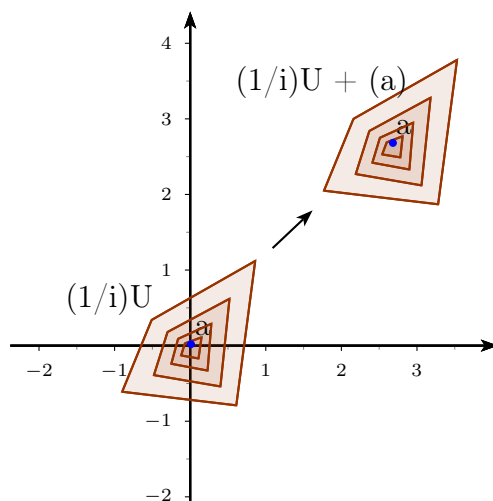
Se expondrá un ejemplo específico en  $\mathbb{R}^2$ , para ilustrar la proposición anterior.

Se toma un espacio cualquiera en  $\mathbb{R}^2$ , supongamos  $X$ , y un  $a \in X$ , hacemos la resta  $X - a$  generando el nuevo conjunto  $U$ .



Luego se construyen las vecindades en  $U$  y se trasladan nuevamente al lugar original.

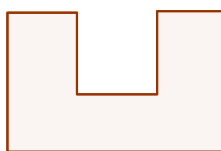
$$(V_i) = (1/i)U + (a), \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots$$



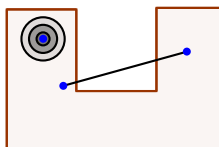
El recíproco es falso. es decir.

Sea  $X$  un espacio continuo, si  $X$  es LAF. no implica que  $X$  sea un espacio convexo,  $X$  es

**Ejemplo:**



En todo punto se puede crear vecindades en forma de  $U$  o  $D^1$  que son homeomorfos y claramente no es un espacio convexo.



## 4.2. C-Y Semejanza

Las siguientes definiciones amplían el concepto de autosemejanza, las cuales con ciertas condiciones implican las definiciones de autosemejanza vistas anteriormente.

**Definición 4.52. C-AUTOSEMEJANZA :** Sea un espacio topológico  $X$  y  $C \subseteq PX$ , ( $PX =$  Partes de  $X$ )  $X$  se dirá **C-Autosemejante** o simplemente **C-semejante** si todo  $A \in C$  contiene un subespacio homeomorfo a  $X$ .

Dependiendo de los espacios  $X$  y de los subespacios  $C \subseteq PX$  se pueden dar algunas implicaciones con la definición básica de autosemejanza.

**Ejemplo 4.55.** Si tomamos a  $C$  como los subespacios abiertos de  $X$ , entonces  $C -$  Autosemejanza implica Autosemejante.

$\mathbb{R}$  es un espacio Abierto – semejante

▷ En sentido contrario también se puede cumplir la implicación:

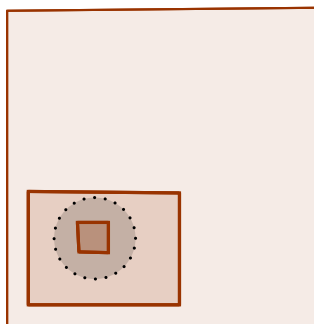
**Ejemplo 4.56.** Si es  $X$  es Autosemejante, y si cambiamos el conjunto  $C$ , por ejemplo,  $C$  como la familia de continuos del espacio  $X$ , entonces el espacio  $X$  también sería  $C -$  Autosemejante.

Ya que, sea un  $A \subseteq C$  y si tomamos el interior de  $A$ ,  $A^\circ$  es un conjunto abierto, si se tiene que ( $A^\circ \neq \emptyset$ ) entonces debe contener un subespacio  $V$ , tal que:

$V \subseteq A$  y  $V \approx X$  por ser  $X$  autosemejante y como también  $V \subseteq C$  entonces  $X$  es  $C -$  Autosemejante.

**Ejemplo 4.57.** Sea  $X = \mathbb{Q}$  con la topología de COD, entonces tomamos a  $C$  los abiertos de la topología de colas a derecha, quiere decir que  $\mathbb{Q}$  con dichos abiertos es un espacio de **Toronto**, ya que con  $\mathbb{Q}$  y cualquier subconjunto propio de  $\mathbb{Q}$  de cardinal  $\aleph_0$  contenido en cualquier abierto que pertenezca  $C$ , se puede construir el homeomorfismo es decir cumple la definición de espacio de Toronto. (ver cap. 3, página 37)

Por consecuencia todo abierto de  $C$  tendrá un conjunto homeomorfo a  $\mathbb{Q}$ . En conclusión,  $\mathbb{Q}$  es  $C -$  Autosemejante y Autosemejante.



Aunque existen ejemplos los cuales tienen implicaciones en los dos sentidos, en realidad en forma general no es cierto.

**Contraejemplo:** Si cambiamos a  $C$  la familia de los subespacios unipuntuales, es decir para todo  $A \in C$ ,  $|A| = 1$ , entonces ningún espacio topológico con mas de un punto que sea Autosemejante seria también  $C$ -semejante, puesto que se comportaría como si estuviéramos trabajando con la topología discreta nuevamente.

Ahora tomemos a  $C = X$ , entonces todo espacio topológico es  $C$ -semejante, ya que dentro de  $C$  siempre va estar el mismo  $X$  por lo tanto homeomorfo al espacio completo. Esto seria como si tomáramos la topología Indiscreta o trivial

★ Existe una definición aun mas general de Autosemejanza.

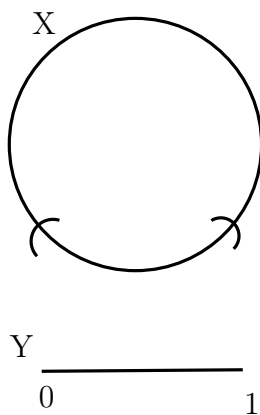
**Definición 4.53.** Sea  $Y$  un espacio topológico (fijo),  $X$  espacio topológico cualquiera y  $C \subseteq PX$ .  $X$  se dirá **C-Y-semejante** si todo  $A \in C$  contiene un subespacio homeomorfo a  $Y$ .

Con esta nueva definición también existen ejemplos para los cuales:

$$\text{Autosemejante} \Rightarrow C - Y - \text{semejante} \text{ y } C - Y - \text{semejante} \Rightarrow \text{Autosemejante}$$

**Ejemplo 4.58.** Sea un espacio topológico  $X$ , Si tomamos a  $Y = X$  y  $C \subseteq^{ab} X$  entonces para todo espacio  $X$ ,  $X$  es un espacio  $C - Y -$  semejante

**Ejemplo 4.59.** Sea  $X = S^1$ , Si tomamos a  $Y = [0, 1]$  y  $C \subseteq^{ab} X$



$S^1$  es un espacio C-Y-semejante.

## CAPÍTULO 5

### PREGUNTAS ABIERTAS

Con la culminación de este trabajo se pueden generar nuevas ideas para el estudio de espacios topológicos y su tipo de autosemejanza. Teniendo en cuenta los conceptos y proposiciones presentadas y a manera de conclusiones se presentan algunas preguntas abiertas.

- Hacer una clasificación de los fractales que son autosemejantes o son LAF
- Encontrar homeomorfismo o contraejemplos para probar la propiedad LAF, con la topología del límite inferior en  $\mathbb{R}$ .
- Analizar la autosemejanza local en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  con diferentes topologías.
- Explorar si el S.I.F. que genera un fractal puede determinar su tipo de autosemejanza.
- Hacer una clasificación de los continuos que son autosemejantes o son LAF
- Estudiar el comportamiento que puede existir en los límites Inversos, cuando los espacios de la sucesión  $X_n$ , son espacios autosemejantes o LAF

- Descubrir mas propiedades de los espacios topológicos que cumplen algún tipo de autosemejanza.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Sabogal, S. *Autosemejanza en topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone*, Tesis de Doctorado: Universidad Nacional de Colombia. Bogotá(2000)
- 2) W.J. Charatonik & A. Dilks *On self-homeomorphic spaces*, Top. and appl. No. 55, 215-238. (1994)
- 3) T. Banak & D. Ripovs *On linear realizations and local self-similarity of the universal zarichnyi map*: Universidad Nacional de Houston Journal of Mathematics, vol. 31 N. 4 (2005)
- 4) Sabogal, S. & Arenas, G. *Una introducción a la geometría fractal*: Ediciones UIS, Bucaramanga (2011)
- 5) Sabogal, S. *Sobre autosemejanza topológica, Parte I*: Vol. 17, No.1, p. 27-47, enero-junio Revista Integración Colombia. (1999)
- 6) Sabogal, S. *Sobre autosemejanza topológica, Parte II*: Vol. 17, No. 2, p. 117,134, julio-diciembre, Revista Integración Colombia. (1999)
- 7) J. Hocking & G. Young *Topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing company. (1961)
- 8) S. Willard *General Topology*, addison-wesley publishing company. (1970): North Holland (1996)