ESTRATEGIAS QUE EMERGEN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN DE ESTUDIANTES DE PRECÁLCULO

EDWIN LÓPEZ VELANDIA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2014

ESTRATEGIAS QUE EMERGEN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN DE ESTUDIANTES DE PRECÁLCULO

Edwin López Velandia

Trabajo presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director:
Jorge Enrique Fiallo Leal
Licenciado en Matemáticas, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2014

A mi grandioso padre, Pedro José López Calderón, y a mi querida madre, María Sofía Velandia por darme la vida, por brindarme amor, tenerme paciencia, darme buenos consejos, la motivación y enseñarme a disfrutar las pequeñeces de la vida que nos hacen grandes personas.

A mi tía Flor y a mi tío Manuel por su paciencia, su confianza, por abrir las puertas de su hogar y de su corazón ya que gracias a este gran gesto logré cumplir este sueño que sin su ayuda hubiera sido imposible.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres a mis tíos a mis hermanos y a todos los amigos del grupo de SEMILLERO MATEMÁTICO.

A mis Profesores de la CDR, colegio en el que inicié y terminé mi primaria y mi bachillerato; gracias por sus consejos y su ánimo para que ingresara a la universidad.

A todos los profesores con los que tuve la oportunidad de compartir durante estos años de estudio en la UIS; en especial al profesor Fiallo por orientarme todo este tiempo para que este trabajo saliera lo mejor posible.

A mis amigos del alma, Papú, Yeloco, Kike, Faiver, Gaste, Picachú, Futú y José, con quienes compartí gran parte de mi niñez y que hoy en día son quienes me hacen sentir rodeado de buenas personas y quienes estos años me han dejado gorrearles en las fiestas y paseos que inventamos.

A Claudia que se ha convertido en la persona que orienta mi vida por buenos caminos, quien me acompaña al recorrerlos y que siempre está ahí rodeándome de felicidad y haciéndome vivir una eterna primavera.

A mis grandes amigos Edwar y Wilmer con quienes compartí sueños de niño jugando baloncesto y quienes han estado pendiente de que pueda cumplir este sueño, siempre dándome alientos y fortaleza para seguir, ganar el juego y disfrutar las anotaciones que se hacen antes de que suene el silbato.

… Aunque fueron muchas las personas que contribuyeron para cumpliera este sueño, nombrarlos a todos implicaría que esta página no alcance… A todos ellos: gracias de todo corazón por su ánimo para que siguiera estudiando a pesar de las dificultades que se me presentaron en el camino y por las cuales en algún momento sentí que no podía más.

¡Gracias porque hoy este sueño es ahora mi realidad!

ÍNDICE

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TÍTULO: ESTRATEGIAS QUE EMERGEN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN DE ESTUDIANTES DE PRECÁLCULO[ϕ]

AUTOR: Edwin López Velandia[*]

Palabras Clave: *pensamiento variacional, covariación, estrategias, concepciones*

La Universidad Industrial de Santander (UIS) ha ofrecido un curso de pre-cálculo desde 2013 fundamentado en un enfoque de resolución de problemas y el uso de recursos digitales como recurso didáctico. El propósito del curso apunta a desarrollar el pensamiento variacional. Este curso se convierte en el escenario de investigación de este trabajo de tipo descriptivo-exploratorio que se encuentra enmarcado en una lógica cualitativa que tiene como objetivo "Identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de pre-cálculo de la UIS".

Presentamos algunas de las estrategias analizadas a través del modelo ckc de Balacheff en donde se evidenciaron las concepciones que utilizan los estudiantes al plantear sus estrategias en el proceso de resolución a los problemas de dos talleres del curso.

Uno de los principales resultados del trabajo es que las estrategias que los estudiantes emplean en la resolución de problemas están influenciadas por la veracidad de las concepciones que poseen. Por lo que de las estrategias halladas se observó que hubo algunas que permitieron la solución acertada del problema y otras que no, esto nos lleva a concluir que es importante la validez, coherencia y eficacia de la concepción.

[ϕ] Trabajo de Grado

[*]Facultad de Ciencias. – Escuela de Matemáticas – Licenciatura en Matemáticas – Director: FIALLO Leal Jorge Enrique, Doctor en Educación Matemática.

ABSTRACT

TITLE: STRATEGIES THAT EMERGE IN PROBLEM SOLVING OF VARIATION OF PRECALCULUS STUDENTS[ϕ]

AUTHOR: Edwin López Velandia

KEY WORDS: variational thought, covariance, strategies, conceptions

The Industrial University of Santander (UIS) has offered a pre-calculus course from 2013 based on an approach to problem solving and the use of digital resources as a teaching resource. The purpose of the course aims to develop the variational thought. This course becomes the stage of investigation of this exploratory work that is framed in a qualitative logic that it aims to "identify some strategies that emerge in problem solving of variation and change, students who perform the UIS pre-calculus course".

We present some of the strategies analyzed through the model ckc Balacheff where became apparent the conception that students use to consider their strategies in the process of solving the problems of two workshops of the course.

One of the main results of the work is that the strategies employed by students in problem solving are influenced by the veracity of the concpetion that they have. We found strategies was observed that some that allowed the successful solution of the problem and others that there were not, this leads us to conclude that the validity, coherence and effectiveness of the conception is important.

[ϕ] Degree Project

*Faculty of Sciences. -School of Mathematics - Bachelor's degree in mathematics - Director: Jorge Enrique Leal FIALLO, PhD in mathematics education.

INTRODUCCIÓN

Las exigencias de la educación para el siglo XXI, derivadas de las características de la sociedad del conocimiento, suponen una reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, en función de las competencias requeridas para un buen desempeño del futuro profesional. Dentro de dichas competencias, que se espera desarrolle el estudiante, está la resolución de problemas planteados en cualquier contexto.

Dadas las exigencias de la globalización, las universidades han adquirido un papel protagónico en la preparación de los profesionales que habrán de enfrentarla, cuya formación deberá estar orientada a fomentar en sus estudiantes aprendizajes más estratégicos que les permitan desarrollar la capacidad para un aprendizaje constante.

Frente a este panorama la resolución de problemas, y el desarrollo de estrategias que subyacen a este proceso matemático, aparece como el vehículo que facilita el desarrollo de las habilidades necesarias para aprender a aprender en una sociedad en constante y acelerado cambio.

Así, el Ministerio de Educación Nacional, desde 1998 planteó la resolución de problemas como un proceso general de toda actividad matemática, proceso que debe potenciarse desde los primeros años de escolaridad. Y si bien esta es una directriz que deben seguir todas las instituciones educativas, cabe preguntarnos, a modo de reflexión sobre el tema, por qué los estudiantes presentan dificultades al momento de enfrentar una situación problema.

Vale entonces la pena adentrarse en lo que hace que se concrete la resolución de problemas como “exitosa” o como un “fracaso”, es decir en las **estrategias** que emplean los estudiantes en la resolución de problemas. Y, no solo eso, sino indagar sobre las **concepciones** que movilizan dichas estrategias.

Para esto, en el presente documento tendrán lugar dos capítulos que darán cuenta del objetivo de la investigación, sus aspectos metodológicos, los antecedentes pertinentes al marco conceptual del proyecto; el escenario del cual emerge esta investigación y, por ende, los datos para responder al objetivo; los resultados y conclusiones de la experiencia.

1. ASPECTOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 PERTINENCIA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Diferentes investigaciones reportan dificultades en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo a nivel universitario, llevando esto a reportar altas tasas de reprobación y repitencia en los cursos de esta asignatura.

Algunos autores señalan una cuestión subyacente muy compleja: los métodos de enseñanza del cálculo continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas lo cual afecta negativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo: acumulación y variación[1, 2].

Actualmente son objeto de investigación en la educación matemática los diferentes contenidos curriculares en los que se basa la enseñanza y el aprendizaje del cálculo como lo son funciones, límites y derivadas, entre otros más específicos. Investigadores como François Pluvinage, David Tall, Luz Manuel Santos y Luis Moreno estudian la incorporación de *software* en las aulas para favorecer la construcción de ideas intuitivas de las nociones del cálculo.

Las instituciones universitarias, por su parte, no son indiferentes a la problemática señalada; por lo que en instituciones de educación superior de todo el mundo, surgen

[1] ARTIGUE, Michèle. ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 [Online] Venezuela, 2003. Disponible en: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf

[2] SALINAS, Patricia y ALANÍS, Juan. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa, 2009. En: *Relime*. Vol. 12 (3), Noviembre de 2009. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf

iniciativas para mitigar el impacto negativo de esta situación que muchas veces termina en deserción escolar, entre ellas se destacan las tutorías académicas.

A nivel local, en la Universidad Industrial de Santander (UIS), se viene desarrollando desde el 2012 el programa de *tutorías entre pares* dirigido a estudiantes de primer nivel de los diferentes programas de pregrado de la facultad de ciencias y de las ingenierías; estas tutorías

> "se entienden como el conjunto de prácticas en que algunos estudiantes ayudan a otros estudiantes y aprenden enseñando. Luego existe un tutor (quien ayuda) y un estudiante tutorado (el alumno que presenta dificultades en el proceso de aprendizaje y es beneficiario de la tutoría). […] este tipo de tutorías se fundamenta en la mayor aproximación empática que el estudiante tutorado puede encontrar en tutores con edades próximas"[3].

Otra alternativa que intenta subsanar la problemática es la apertura de cursos de pre-cálculo cuyo objetivo es fortalecer los conceptos partiendo de temáticas escolares como números reales, funciones, límites y trigonometría. Incluso, la UIS ofreció un curso de pre-cálculo con estas características en 2012[4].

En 2013, dicho curso se reformuló y se integró al proyecto macro "Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander"[5] que desarrolla actualmente la Escuela de Matemáticas de la mano de investigadores en Educación Matemática. De modo que, hoy por hoy, el objetivo del curso de pre-cálculo es favorecer el desarrollo del pensamiento

---

[3] BOTELLO, Carolina. Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander, 2013, p. 29.

[4] ESCUELA DE MATEMÁTICAS. *Curso de précalculo*. Universidad Industrial de Santander, 2012. Recuperado el 12 de febrero de 2014. Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/precalculo

[5] PARADA, Sandra. Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia: UIS. 2012.

variacional en los estudiantes a través de la resolución de problemas de variación y cambio con el uso de la tecnología (GeoGebra).

Desde la metodología de trabajo del curso de precálculo de la Universidad Industrial de Santander surge el siguiente objetivo de investigación: ***identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de pre-cálculo de la UIS***.
Señalamos que para identificar dichas estrategias se adaptó el modelo ckc[6] para determinar las concepciones que poseen los estudiantes ya que estas son las articuladoras de la actividad matemática para la resolución de los problemas. Al respecto profundizaremos en el apartado 1.4.4 de este capitulo

El anterior objetivo permitirá a los profesores, en próximos cursos de precálculo de la UIS, tener una aproximación a los conocimientos con los cuales llegan los estudiantes para enfrentar la resolución de los problemas propuestos en las actividades, de manera que esto podría orientar sus próximas prácticas docentes.

1.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para facilitar la comprensión de la metodología de la investigación, a continuación se hace una breve presentación de lo que es el curso de precálculo.

El curso nace como una alternativa preventiva para atender la problemática referente a los altos índices de reprobación y deserción presentados principalmente en las materias Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III de la Escuela de Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander.

---

[6] BALACHEFF, Nicolas. Marco, registro y concepción. En: Revista Ema, Vol. 9, No. 2005, pp. 181-204. 2005. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf

Queriendo contrastar con la ideología de cursos de precálculo que refuercen contenidos vistos en la secundaria, la elaboración de las actividades a trabajar por los estudiantes fueron planeadas bajo tres pilares fundamentales: *resolución de problemas, Pensamiento variacional y uso de la tecnología*. De modo que el curso de precálculo de la UIS tiene una metodología no tradicional pues supera el enfoque tradicional de estos cursos que consiste en reforzar contenidos. De modo que un grupo de profesores de matemáticas discute y diseñan los talleres que se llevan al aula, siendo en total 15 talleres aproximadamente[7].

La metodología del curso garantiza la participación activa de los estudiantes, quienes orientados por el profesor deben enriquecer la actividad con sus interpretaciones de los problemas, posibles soluciones y estrategias utilizadas, todo esto con miras a favorecer el desarrollo del pensamiento variacional[8].

En el primer semestre del 2013 la escuela ofreció el primer curso, hasta el momento de esta investigación se han realizado dos (2) versiones completas del curso tras lo cual se ha atendido a una población aproximada de 600 estudiantes; estos cursos han sido orientados por profesores de la escuela y estudiantes de Maestría en Educación Matemática.

Se tiene entonces que los estudiantes del curso de pre-cálculo son la población de la investigación. La muestra seleccionada para la recolección de datos fue un curso de 30 estudiantes quienes ingresaban a diferentes carreras de ingenierías y de la Facultad de Ciencias de la UIS en el segundo semestre de 2013.

---

[7] FIALLO, Jorge y PARADA, Sandra. Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. Revista científica. Universidad Distrital, Bogotá, Colombia. En edición.
[8] Ibíd.

La investigación que desarrollamos es de tipo descriptivo-exploratoria, enmarcada en una lógica cualitativa, debido al tipo de información que se obtiene ya que el interés es conocer las estrategias que emplean los estudiantes desde ellos mismos en la resolución de problemas, de ahí su diseño emergente.

Para recolectar los datos se realizó acompañamiento en cada una de las 15 sesiones de trabajo correspondientes al curso de las cuales se tomaron dos sesiones para ser analizadas: "*Análisis de Información*" y "*La Derivada como Razón de Cambio*".

Estas sesiones fueron filmadas, se recolectaron los apuntes de algunos estudiantes (la solución de los talleres) y adicional a esto se tomaron algunas notas en una libreta de campo sobre aspectos importantes que se observaron durante el desarrollo de las actividades. Todo esto para extraer evidencias que soportarán el análisis que apunta al objetivo de la investigación.

Al ser esta investigación de tipo cualitativo, para la sistematización de los datos se transcribieron los vídeos, se analizaron los apuntes de los estudiantes para así extraer las estrategias de las dos sesiones escogidas.

Para el análisis de los datos sistematizados se hizo una triangulación entre los datos recolectados, con el marco conceptual que se expondrá en el siguiente apartado y la interpretación del investigador.

1.3 ANTECEDENTES

Para el desarrollo de este trabajo se realizó una revisión bibliográfica de los documentos orientadores del currículo a nivel nacional e internacional y algunas investigaciones que aportan elementos metodológicos y conceptuales para el estudio del pensamiento variacional. Aunque son varios los documentos y trabajos de investigación relacionados con este tema, presentaremos los que nos sirvieron como directrices.

Para empezar, es importante señalar que al hablar de pensamiento variacional se evoca el concepto de función el cual resulta trascendental para el aprendizaje el cálculo por la complejidad de su comprensión. Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian apareciendo patrones de variación entre variables abriendo la posibilidad de para predecir y controlar el cambio.

Los Principios y Estándares para la Educación Matemática expresan que uno de los caminos para lograr la construcción del concepto función de manera significativa es la resolución de actividades que promuevan el análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación: *numérico, gráfico, algebraico y verbal*. Este análisis implica la coordinación e interrelación entre los diferentes sistemas de representación para lograr la construcción conceptual[9].

Para lograr dicha interrelación, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas proponen iniciar y desarrollar el pensamiento variacional a partir de la resolución de problemas en los niveles de básica y media de la educación colombiana ya que solo así se podría ampliar la visión de la variación en los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada: el continuo numérico, la funciones, las magnitudes, el álgebra en su sentido simbólico, modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo[10].

---

[9] NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

[10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Autor, 1998.

Se considera, en los lineamientos, que la introducción de la función en los contextos descritos preparan al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos, pero es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica[11].

Además, proponen iniciar y desarrollar el pensamiento variacional, junto con los otros pensamientos (numérico, espacial, métrico y estocástico), en los niveles de básica y media a partir del razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, esto como uno de las principales metas en la educación básica de los colombianos[12].

El estudio de procesos de variación sugerido por los lineamientos ha sido apoyado, posteriormente, con la publicación del documento de los Estándares Básicos de Competencias en donde se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas[13].

---

[11] Ibíd.
[12] Ibíd.
[13] MEN. Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor. 2006. p, 66.

Adicional a esto, el Ministerio de Educación Nacional realizó el proyecto "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia" tras el cual se publicaron cartillas de cada uno de los cinco tipos de pensamiento matemático. En el 2004 se publicó la cartilla "Pensamiento variacional y tecnologías computacionales" que brinda orientaciones para desarrollar en el estudiante una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y capacidades para que sea capaz de modelarlos y transformarlos en forma flexible y creativa, dándole sentido a las funciones numéricas involucradas.

El documento mencionado muestra, además, ejemplos de situaciones problemáticas y significativas que junto con el uso de las tecnologías computacionales (calculadoras graficadoras y *software* de geometría dinámica) estrechan la relación que tienen los estudiantes con las diferentes representaciones que se pueden utilizar para potenciar este tipo de pensamiento.

Los resultados poco favorables de los cursos de cálculo diferencial e integral impartidos en universidades de todo el mundo hacen que los investigadores en Educación Matemática, docentes de matemáticas e interesados en el tema, tengan un punto de convergencia en cuanto al problema llegando a la conclusión que el pensamiento variacional no está bien desarrollado en los estudiantes producto de la formación matemática donde predomina la memorización de contenidos y la utilización de algoritmos para la resolución de ejercicios.

Es por ello que indagando un poco más en esta problemática, hemos encontrado algunos trabajos que nos muestran la veracidad de lo afirmado y propuestas para mejorar o minimizar la problemática. Para empezar, la investigadora francesa Artigue menciona que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas, que inciden en un aprendizaje memorístico por parte de los estudiantes[14]. Moreno menciona que frente a prácticas rutinarias de enseñanza el profesor tiende a evaluar a sus alumnos con la proposición de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, pues éstos han de mostrar si están aplicando su mismo esquema de razonamiento[15].

En México, autores ponen en evidencia que el bajo rendimiento en cursos de cálculo diferencial e integral también se encuentra en las instituciones de su país y al igual que en Colombia las dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional son producto de una enseñanza de la matemática que ignora la variabilidad involucrada en procesos de medición e incluso de las mismas funciones. Por tal razón el objetivo principal de su trabajo es desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de la escuela media a fin de favorecer la comprensión de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas de la matemática del cambio[16].

Por su parte, Santibañez presenta una propuesta que pretende que los estudiantes dejen de pensar en la matemática constante y comiencen a pensar en una matemática de variables para que puedan comprender mejor los conceptos del cálculo diferencial e integral[17]; esto apoyándose de las actividades presentadas por una investigación que procuraba que los estudiantes desarrollaran sus propias ideas sobre la variación y su importancia. Los resultados que obtuvo fueron alentadores ya que un alto porcentaje en

---

[14] ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En GÓMEZ, Pedro. (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano. 1995.

[15] MORENO, María del Mar. El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. 81-96. 2005.

[16] DOLORES, Crisólogo. La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En: Revista Academia. Volumen 2 No. 20, Universidad Autónoma de Sinaloa. pp. 9-17. México, 2000.

[17] SANTIBÁÑEZ, Roberto. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato. Chilpancingo: Universidad Autónoma de Guerrero, 2001.

los estudiantes logró identificar, representar y traducir las diferentes formas de representar la variación. También algunos estudiantes lograron describir en comportamiento de las funciones, hallar su dominio e imagen de forma analítica y deducir la expresión algebraica a partir de ciertos valores[18].

Teniendo en cuenta que la variación es de gran importancia y es precisamente ahí donde nacen las ideas preliminares del cálculo, diferentes autores han resaltado la importancia de retomar los problemas que dieron origen a esta rama de la matemática para su enseñanza. En su trabajo "La génesis y la enseñanza del cálculo" proponen enfatizar la enseñanza del cálculo desde la perspectiva en que fue desarrollado por matemáticos de la talla de Newton, Leibniz y Euler, trabajando con cantidades que varían hasta lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande (infinitesimales)[19].

En articulación con lo expuesto, el estudio de fenómenos asociados a la percepción, comprensión, representación y caracterización de la variación hace parte fundamental de un pensamiento dinámico. Es precisamente en este aspecto donde la tecnología interviene como una manera de indagar no sólo por procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias; sino también, como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos.

Sobre lo anterior, los Principios y Estándares para la Educación Matemática señalan que las herramientas tecnológicas son esenciales para aprender, hacer y enseñar matemáticas, además el uso de estas herramientas permite que los estudiantes se puedan centrar en

[18] DOLORES, Crisólogo. Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. Investigación en Matemática Educativa. 2º. Volumen. Artículo aceptado para su publicación. Libro conmemorativo al 35 Aniversario del CINVESTAV del IPN. 1997. Citado

[19] ÍMAZ, Carlos y MORENO, Luis. La Génesis y la enseñanza del cálculo. Mexico D. F.: Trillas. 2010

tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas, en las diferentes áreas temáticas como la Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números[20].

Pero la intención no es solo llevar tecnología a los salones de clase si no que debemos lograr que los estudiantes aprendan a interpretar las representaciones tecnológicas y cómo usar la tecnología con eficacia y prudencia, ya que la tecnología nos permite modelar una amplia gama de situaciones interesantes donde ellos pueden conjeturar a partir de una visualización y razonamiento espacial, fruto de la interacción con animaciones.

Otro logro importante de esta propuesta de inclusión de la tecnología podría referirse a los programas interactivos que permiten acceder a los estudiantes que tengan necesidades educativas especiales en matemáticas y que de otro modo, no podrían tener acceso a ellas. Pero el uso de la tecnología en las clases depende del profesor ya que como cualquier herramienta esta puede ser usada bien o deficientemente y es ahí donde entra él como mediador de la situación en el proceso de enseñanza.

En Colombia se ha venido impulsando desde hace más de una década el uso de las tecnologías computacionales en el diseño de propuestas didácticas para favorecer la enseñanza y el aprendizaje del saber matemático.

El MEN, desde sus políticas de desarrollo, ha impulsado estas nuevas tendencias y una muestra de ello es el proyecto de "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia", cuyos objetivos principales radican en mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas mediante la

[20]NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

utilización de la tecnología e involucrar la educación colombiana con la cultura informática en la que nos encontramos[21].

Tal y como se deja en evidencia en el proyecto del MEN, las destrezas con los cálculos algorítmicos se conciben como independientes de la herramienta y son confundidas con las capacidades matemáticas puras, es por esto que con uso de las nuevas tecnologías, como es el caso de las calculadoras, exista el temor de que hagan el trabajo matemático que debe hacer el estudiante y es por esto que nos invitan para dejar de enseñar las matemáticas como simple realización de algoritmos y realizar propuestas didácticas teniendo en cuenta este impacto fundamental de la tecnología.

1.4. MARCO CONCEPTUAL

Las actividades diseñadas para el curso de pre-cálculo de la UIS se fundamentan en el *pensamiento variacional, la resolución de problemas y el uso de tecnologías*. Por tal razón, el marco conceptual que sustenta esta investigación corresponde a los elementos que articulan el curso precálculo, adicional al modelo ckc que se emplea para el análisis de las estrategias.

1.4.1. Pensamiento Variacional

Son muchos las investigaciones y estudios alrededor del pensamiento variacional que resaltan su incidencia e importancia como parte fundamental en la formación matemática de los estudiantes, pero no es muy claro qué se debe entender por "pensamiento variacional".

[21] MEN. Pensamiento Variacional y Tegnologías Computacionales. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda. 2004.

Con el propósito de aproximarse a ese tipo de pensamiento se describe este pensamiento y sugieren algunos elementos para su desarrollo estableciendo algunas relaciones de éste con la modelación y la tecnología:

> el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad[22].

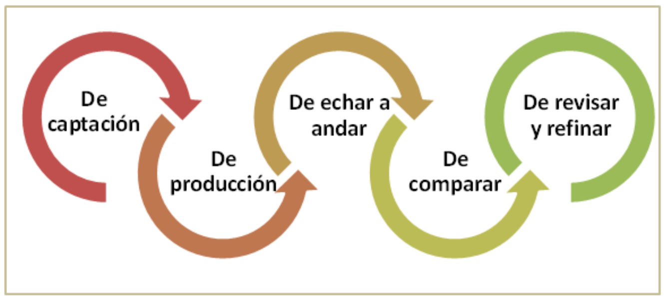


Ilustración 1. Momentos del Movimiento Mental del Pensamiento Variacional
Una interpretación del autor del documento de Vasco.

Como se aprecia en la Ilustración 2, se señalan cinco momentos del movimiento mental del pensamiento variacional, a saber:

> Un **momento de captación** de lo que cambia, de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos [..]; **un momento de producción** de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manear que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar "modelos mentales" , un **momento de echar a andar** o "correr" esos modelos mentales para ver qué resultados producen, […] otro **de comparar** esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el **momento de revisar y refinar** el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.[23]

[22] VASCO, Carlos. El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Vasco, C. Didáctica de las matemáticas: artículos selectos. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.p. 138, 2006.
[23] VASCO, Carlos. El pensamiento variacional y la modelación matemática, 2010. Recuperado el 13 de diciembre de 2013. p. 6. Disponible en: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas afirman que es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación. Por esa razón la importancia del desarrollo del pensamiento variacional desde la educación básica a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

Además proponen favorecer el desarrollo del pensamiento variacional al exponer a los estudiantes a los diferentes sistemas de representación como los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, etc.[24]

En particular, como se ha venido mencionando, la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente. Resulta, entonces, prudente definir el *razonamiento covariacional* como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"[25].

Situaciones de Variación y Cambio

En las situaciones de variación es importante identificar las magnitudes involucradas y la relación que existe entre ellas, esto lleva a identificar situaciones de variación y cambio de la vida diaria se presentan cuando una circunstancia dada se transforma con el transcurso del tiempo y, a su vez, otras situaciones que no involucran de manera explícita el tiempo o que no tienen que ver con el tiempo.

---

[24] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Autor, 1998.

[25] CARLSON, M, JACOBS, S, COE, E, LARSEN, S Y HSU, E. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. EMA 8(2), 121-156. Citado por: VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. Revista Tecné, Episteme y Didaxis. No. 3, pp. 9-25. 2012. p. 12

Consecuentemente, son *situaciones continuas* aquellas en donde se considera el tiempo influyendo de manera ininterrumpida y *situaciones discretas*, cuando se observa la situación en instantes espaciados de tiempo. Así, resulta importante el poder *identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo*, todas ellas características del pensamiento variacional que se pretenden desarrollar.

En una situación de cambio, se presentan magnitudes variables o constante que el estudiante debería identificar haciendo una descripción verbal y escrita de la manera cómo estas magnitudes se comportan en la situación, permitiéndole sacar algunas conclusiones y hacer las primeras conjeturas de lo que sucederá con los elementos involucrados el transcurso del tiempo. Se espera que en las descripciones de la situación de cambio se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc[26].

Un proceso significativo en el pensamiento variacional es la *representación* ya que para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen. "El término *representación* se refiere tanto al proceso como al producto (resultado), esto es, al acto de captar un concepto matemático o una relación en una forma determinada y a la forma en sí misma"[27].

1.4.2 Resolución de Problemas

El NCTM presenta diez estándares, distribuidos así: los cinco primeros describen los objetivos relativos a contenidos en las áreas de: *Números y operaciones, Algebra, Geometría, Medida, y Análisis de datos y probabilidad*. Los otros cinco estándares tratan

[26] MEN. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda. 2004.

[27] NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.p. 71.

de los procesos de *resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación*[28].

De modo que el estándar *resolución de problemas* expresa claramente que

> La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo[29].

En la actualidad se han desarrollado diferentes variantes para estudiar la resolución de problemas, una de estas es la que comprende la resolución de problemas como "el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición, y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido"[30]

Entonces, la resolución de problemas se debe vivir como un proceso de enseñanza-aprendizaje y no como método de evaluación pues a través de este se fortalece en el estudiante la posibilidad de explorar, la posibilidad de conjeturar, de descubrir o reinventar las matemáticas.

Tampoco se debe ver la resolución de problemas como un resultado; el énfasis en este proceso tiene que dirigirse hacia el aprovechamiento del potencial que brinda este proceso, para que en su curso se pueda incidir en determinados valores sin marginar el desarrollo del pensamiento variacional, para nuestro caso.

---

[28] Ibíd.
[29] Ibíd. p. 55.
[30] SIGARRETA, María Y LABORDE, Juana (s.f.). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural Universidad de Moa (Cuba). Recuperado el 10 de marzo de 2014, disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf . p. 16.

Los autores Sigarreta y Laborde señalan la definición de “resolver un problema” desde Polya quien converge con lo señalado por el NCTM, veamos:

> *“... se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados”* (Polya, 1981, p. 1)[31]

En este caso se comprende la resolución de problemas como un proceso que comienza para el estudiante desde el momento en que se le presenta el problema y que lo lleva al conjunto de acciones y operaciones que se desarrollan hasta que lo soluciona, y valora la respuesta encontrada.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas promueven la utilización de situaciones problemáticas contextualizadas como una nueva forma de acercar a los estudiantes a las matemáticas, favorecer su proceso de aprendizaje, desarrollar procesos de pensamiento y contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de esta ciencia[32].

Además, mencionan los lineamientos que en la resolución de problemas influyen cuatro factores que son necesarios tomar en cuenta al momento de entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas: *el dominio del conocimiento, las estrategias cognoscitivas, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias*. Para efectos de esta investigación, se tomarán en cuenta los tres primeros factores para analizar las estrategias que los estudiantes emplean al resolver los problemas.

> – **El dominio del conocimiento**, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.
> – **Estrategias cognoscitivas** que incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo

[31] Ibíd. p 16.

[32] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Autor, 1998.

> y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.
> – **Estrategias metacognitivas** se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, evaluar y decidir[33].

Autores como Godino, Batanero, y Font señalan que "el dar un papel primordial a la resolución de problemas […] tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería cuanto menos contradictorio con la génesis histórica de las matemáticas, al igual que con sus aplicaciones actuales, presentar las matemáticas a los alumnos como algo cerrado, completo y alejado de la realidad"[34].

Que el estudiante se enfrente a situaciones problemáticas ya sea que tenga o no herramientas para dar alguna solución es una da las propuestas que nos hacen los estándares del NCTM como una plataforma eficiente para llevar nuevos conceptos matemáticos a los estudiantes en un aula de clase.

Por ende, esta habilidad en la resolución de problemas es un proceso que deben vivir los estudiantes en su formación académica y como muchas habilidades solo se domina con el tiempo, la práctica y los buenos hábitos. Otra cosa a favor de esta propuesta es que los estudiantes pueden utilizar estas habilidades, que adoptan en el salón de clase, para solucionar situaciones en otros contextos fuera de la escuela o de las matemáticas.

El papel del profesor está bien caracterizado y consiste básicamente en ser un mediador y guía del proceso de resolución de la situación y de la argumentación que hacen los estudiantes. Él es el responsable de preparar buenos problemas que no solo le den la oportunidad a los estudiantes de utilizar lo que saben si no la oportunidad de investigar y aprender nuevos conceptos que estén acordes a su nivel escolar.

---

[33] Ibíd., p. 34.
[34] GODINO, Juan, BATANERO, Carmen, y Font, Vicenç. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, 2003. Recuperado el 13 de diciembre de 2013, Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

De Guzmán[35]. afirma que

> la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra.

Por lo anterior, es importante que el profesor esté cuestionando a los estudiantes en todo momento con preguntas como: *¿Estamos seguros de que entendemos esto? ¿Cuáles son nuestras opciones? ¿Tenemos un plan? ¿Estamos progresando, o deberíamos reconsiderar lo que estamos haciendo? ¿Por qué creemos que esto es verdad?,* etc. con el fin de dirigir los estudiantes por el "camino correcto".

Por lo tanto, la enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos como campo de operaciones para la tarea de construir formas de pensamiento eficaces.

1.4.2.1 Estrategias

De forma general, la importancia de las estrategias viene dada por el hecho de que engloban aquellos recursos cognitivos que utiliza el estudiante cuando se enfrenta a la resolución de problemas. Al revisar los aportes más relevantes sobre el tema, nos encontramos con una amplia gama de definiciones que reflejan la diversidad existente a la hora de delimitar este concepto.

Los estándares del NCTM destacan que

---

[35] DE GUZMÁN, Miguel. Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. España, 1994. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#3.5.
DE GUZMÁN, Miguel. Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. España, 1994. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#3.5.

> De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Pólya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo[36]

Los profesores de matemáticas, en nuestras prácticas docentes hemos constatado que los estudiantes hacen uso de una variedad de procedimientos para resolver las diferentes tareas de aprendizaje; estos pueden ser de dos tipos: *procedimientos algorítmicos* y *procedimientos heurísticos*. Siendo estos últimos más abiertos formados por operaciones más alternativas, que involucran la consciencia y el control con que se realicen; mientras que los primeros son más cerrados y están formados por operaciones prefijadas[37].

De manera similar, Pozo afirma que existe un sistema de aprendizaje, integrado por productos o resultados, procesos y condiciones, en donde uno de los resultados es el que corresponde al aprendizaje de procedimientos, determinados por un conjunto de acciones ordenadas orientadas a la consecución de una meta[38].

Existen dos tipos de procedimientos: *las técnicas*, consistentes en rutinas de acción automatizadas y *las estrategias* que implican un uso deliberado y planificado de procedimientos para obtener determinadas metas.

Por último, para este estudio las estrategias son concebidas, de acuerdo con Monereo como "un proceso de toma de decisiones, consciente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios

---

[36] NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003. p. 57.

[37] MONEREO, Carles. Estrategias de Aprendizaje. En: Revista Letras de Deusto. No. 91. Vol.31. Abril-Junio. Bilbao (España). Universidad de Deusto, 2001.

[38] BARROS, Angélica. Estrategias de aprendizaje en Matemáticas que emplean los estudiantes universitarios. En: Revista Scientia et Tchnica. Vol. 2 No. 34. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia, 2007. Disponible en http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/5675 p. 1.

para alcanzar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación en que se produce la acción"[39].

1.4.3 Uso de tecnología en la resolución de problemas

Los Principios y Estándares para la Educación Matemática señalan que las herramientas tecnológicas son esenciales para aprender, hacer y enseñar matemáticas, además el uso de estas herramientas permite que los estudiantes se puedan centrar en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas, en las diferentes áreas temáticas como la Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números.

Pero la intención no es solo llevar tecnología a los salones de clase si no que debemos lograr que los estudiantes aprendan a interpretar las representaciones tecnológicas y cómo usar la tecnología con eficacia y prudencia, ya que la tecnología nos permite modelar una amplia gama de situaciones interesantes donde ellos pueden conjeturar a partir de una visualización y razonamiento espacial, fruto de la interacción con animaciones.

Otro logro importante de esta propuesta de inclusión de la tecnología podría referirse a los programas interactivos que permiten acceder a los estudiantes que tengan necesidades educativas especiales en matemáticas y que de otro modo, no podrían tener acceso a ellas. Pero el uso de la tecnología en las clases depende del profesor ya que como cualquier herramienta esta puede ser usada bien o deficientemente y es ahí donde entra él como mediador de la situación en el proceso de enseñanza.

Santos-Trigo y Moreno esbozan un marco conceptual, apoyados en un problema de variación, para trabajar la resolución de problemas incorporando el uso de herramientas computacionales a través de cuatro etapas fundamentales (Ilustración 2):

[39] Op sit. p. 34.

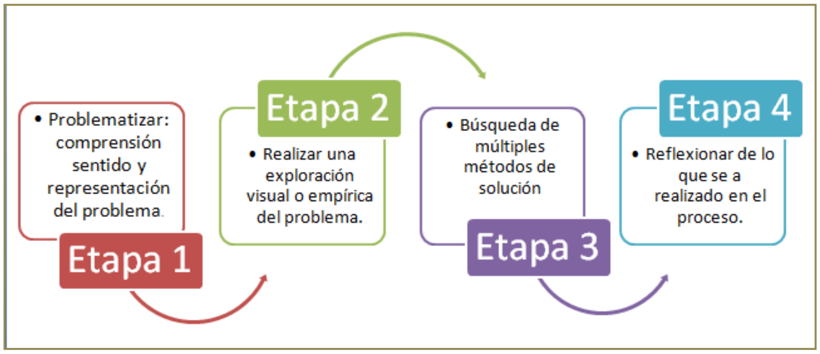


Ilustración 2. Etapas del marco conceptual Santos-Trigo y Moreno
Interpretación del investigador

Según el modelo, se tiene:

Etapa 1: Problematizar

El estudiante debe comprender, examinar, analizar y discutir el sentido del enunciado del problema para identificar la información relevante y problematizar la situación haciendo él mismo sus propias preguntas al respecto.

Etapa 2: Hacer una exploración visual o empírico

El estudiante modelará, realizará un bosquejo o hará una representación del problema que le permitirá hacerse una mejor idea de lo que va a trabajar y podrá conjeturar las posibles respuestas o los caminos para llegar a ella.

Etapa 3: Buscar múltiples métodos de solución

El estudiante explorará el problema desde perspectivas distintas para que pueda construir una comprensión conceptual de las ideas matemáticas involucradas.

Etapa 4: Hacer una reflexión

El estudiante reflexionará sobre lo que ha realizado durante el proceso para inferir la información importante e identificar los conceptos asociados con los objetos matemáticos que aparecen en la representación[40].

[40] SANTOS-TRIGO, Luz Manuel. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica, 2008. Recuperado el 3 de diciembre de 2013, disponible en: http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Finalmente podemos afirmar que el uso de las tecnologías y la resolución de problemas constituyen dos elementos que transformarían el salón de clases en un espacio donde prime el razonamiento matemático alrededor de la variación y autonomía de los estudiantes orientada por los saberes que les permita avanzar en el proceso de aprendizaje para consolidar su proceso y facilitar el desarrollo del pensamiento variacional. Además, "el empleo de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solamente puede facilitar la implementación de estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas"[41].

1.4.4 Modelo cKc

El modelo hace referencia a la tripleta *conceptions, knowing, concept* (cKc, por sus siglas en inglés). ¿Pero qué es una "concepción"?... La definición de concepción no es explícita, aunque se presenta como una herramienta de análisis en los trabajos de investigación en educación matemática. Balacheff realiza una acotación importante que justificará la dificultad de definir "concepción":

> Michèle Artigue (1991) puso en evidencia la importancia del concepto de «concepción» (conception) en la didáctica de las matemáticas al mismo tiempo que nos mostraba la falta de formalismo de este concepto en nuestro trabajo teórico. Una formulación así sería por lo tanto muy útil puesto que las concepciones de los estudiantes, de los profesores y de los investigadores, están presentes en todas partes en el trabajo del didacta.[42]

La problemática de las "concepciones" es el análisis de las situaciones como productores de condiciones que harán necesaria la evolución que se busca, es decir, se concentra en las argumentaciones que el sujeto realiza para avanzar, para nuestro caso, en la resolución de problemas. El ámbito de la validez de la concepción está constituido por el conjunto de los problemas que la concepción **permite** solucionar.

[41] Ibíd. p. 7

[42] BALACHEFF, Nicolas. Marco, registro y concepción. En: Revista Ema, Vol. 9, No. 2005, pp. 181-204. 2005. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf p. 183

Balacheff señala cuatro componentes, indisociables, que se imponen cuando se quiere evidenciar una concepción y que son suficientes para caracterizarla: *un conjunto de problemas, un conjunto de operadores, un sistema de representación y una estructura de control*.

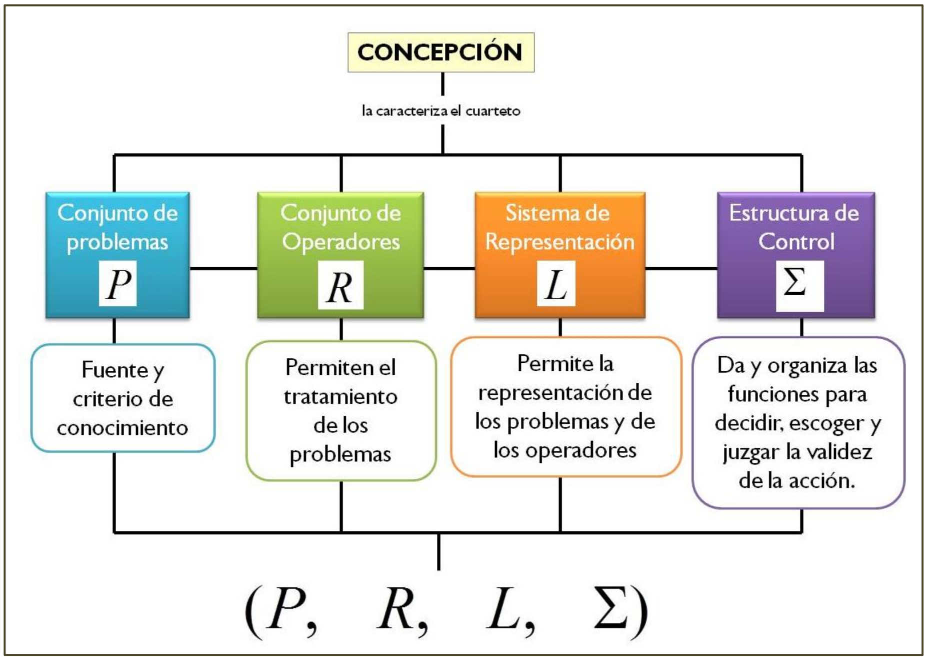


Ilustración 3. Componentes de una concepción
Interpretación del investigador de Balacheff[43]

Un ***operador*** es lo que permite la transformación de los problemas, son visibles en las producciones y los comportamientos de los estudiantes y legitiman el paso entre datos y la conclusión y se explicitan a menudo en la forma "si…entonces"[44].

Un ***sistema de representación*** (lingüísticas o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros

---

[43] Ibíd
[44] Ibíd. p. 80.

semióticos. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación.

En efecto, la caracterización de la concepción pasa necesariamente por la de un ***sistema de representación***, o incluso de un registro semiótico.

Finalmente, una ***estructura de control*** da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción. La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema.

Los controles reúnen juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores. Permiten las anticipaciones y la posible construcción de planes. Dos dificultades teóricas y metodológicas acompañan a toda consideración de controles: i) Los controles son generalmente implícitos; ii) la distinción entre controles y operadores no es absoluta sino relativa a una concepción[45].

De modo que el modelo ckc es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema[46]. De ahí la importancia de estudiar las concepciones durante el proceso de identificar las estrategias pues las concepciones se yuxtaponen a estas. Para efectos de esta investigación, no identificaremos y analizaremos los problemas pues éstos son los que están planteados en los talleres que se van analizar, talleres diseñados por los profesores del curso de pre-cálculo de la UIS.

---

[45] Ibíd. p. 84.
[46] Ibíd.

Por lo tanto, la caracterización de la concepción será la tripleta (R, L, Σ) ya que esta investigación tiene el interés de aportar al conocimiento de estrategias y *concepciones* que emplean los estudiantes al resolver problemas propios de curso de pre-cálculo de la UIS. Queremos enfatizar, para finalizar, en que la concepción es el componente que subyace a la estrategia.

2. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A LAS ESTRATEGIAS

En este capítulo se presentarán las estrategias que emergieron de la actividad matemática de los estudiantes alrededor de dos talleres del curso de pre-cálculo. Para favorecer la comprensión de lo que se presentará, se debe tener en cuenta que el análisis se articula desde la transcripción de las conversaciones del profesor-estudiante o investigador-estudiante en los momentos donde se evidencia la estrategia, seguido se sintetizan los elementos de la concepción según el modelo ckc en una tabla y se explica la estrategia que es utilizada.

Integrando los elementos del marco conceptual con la interpretación de investigador se darán conclusiones al final de cada grupo de estrategias descritas para una misma situación. Dentro de las transcripciones de los diálogos se estilan en cursiva las aclaraciones pertinentes para entender mejor lo que los estudiantes expresan.

2.1 ESTRATEGIAS EMERGENTES DEL TALLER "ANÁLISIS DE INFORMACIÓN"

El taller propone tres (3) situaciones:

SITUACIÓN 1. Movimiento de un móvil en relación al consumo de combustible. Esta parte del taller es orientada a través de preguntas que pretenden evidenciar que ciertos fenómenos no se pueden modelar con exactitud con una función sino que se debe recurrir a un modelo de regresión que proporcione una curva con el mejor ajuste a los datos que se presentan y así predecir información sobre el consumo de combustible del vehículo.

SITUACIÓN 2. Lanzamiento de un proyectil relacionando la altura con respecto al tiempo. Se espera que el estudiante explore en GeoGebra diferentes modelos de regresión para escoger el de mejor ajuste; la orientación en esa situación es menor.

SITUACIÓN 3. Crecimiento demográfico para el siglo XX y XXI. Esta situación se deja como trabajo extra.

SITUACIÓN 1

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

Ilustración 4. Situación 1, Taller "Análisis de la Información"

ESTRATEGIAS SIN EL EMPLEO DE GEOGEBRA

A continuación veremos seis estrategias propuestas en las cuales los estudiantes buscan predecir los valores para el consumo de combustible del vehículo sin el uso de GeoGebra.

Estrategia 1

La discusión que se da entre dos estudiantes y el investigador:

[1] Inv: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? ¿Y para 20 km?
[2] Est: Pues, yo no tengo cómo decir un resultado exacto como estos que están acá *[señalando los datos de la tabla]*, pero yo para aproximar más o menos cuánto me iba a dar; hice una regla de tres.
[3] Inv: ¿Cómo la hizo?
[4] Est: Mirando… digamos en 15 km consume esto *[1.67 litros]* y en 16, cuánto me va a dar. Entonces, así lo hice para sacar el siguiente. Repetí esto hasta llegar a 20 *[(Ilustración 5)]*. Pero miré que comienza una secuencia.

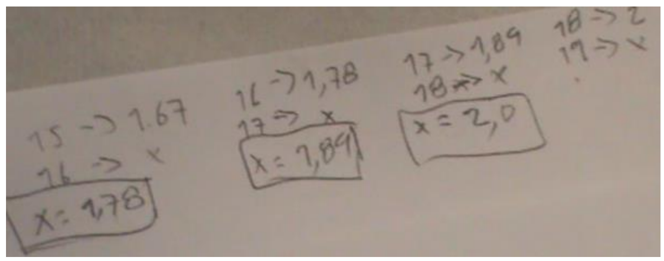


Ilustración 5. Procedimiento de la regla de tres, estrategia 1

[5] Est1: *[Señalando con el lápiz la segunda la expresión en la Ilustración 5 dice]* Él me dijo “haga una regla de tres”. O sea: coger esta (17), multiplicarlo por esta (1,78) y dividirlo por esta (16), pero yo hice exactamente ese procedimiento y empieza a haber otra secuencia más ordenadita, diferente a esta *[la estudiante se percata que al utilizar la regla de tres los datos del consumo en litros para 16, 17, 18, 19 y 20 km aumentan siempre en 0,11 lt. Algo que no pasaba antes ya que esta diferencia era variable].* Y cuando yo hago este proceso con estos, da números pero muy cercanos, pero no da el mismo *[ella aplica regla de tres para hallar uno de los valores que ya tiene en la tabla inicial, pero se da cuenta que no le da igual]*
[6] Inv: Cuando usted habla de una secuencia, ¿qué es lo que espera encontrar?
[7] Est1: Que siga, digamos, el mismo orden porque acá ya empieza… O sea: yo busco que, sí, haya como algo que coincida, y no coinciden. Porque, mire, acá todos los números tienen algo diferente, o sea no tiene secuencia *[señalando la tabla de datos]* y cuando empiezo a efectuar la regla de tres empiezo a tener una secuencia ya ordenada.

Se tiene entonces que la concepción es la regla de tres, lo cual lleva a que la estrategia sea usar la regla de tres simple. Esta estrategia fue muy común en los estudiantes de la clase ya que para ellos es adecuado tomar tres datos de la tabla y hallar un dato nuevo, siendo este proceso precisamente el operador (R_1) utilizado para hallar el consumo correspondiente a 17 km y 20 km.

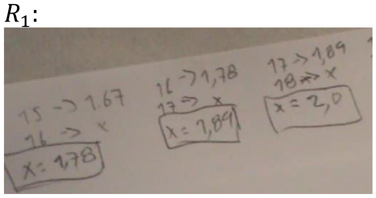
OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: 	L_1: Algebraico [4] L_2: Numérico [5]	Σ_1: Seguir el algoritmo de la regla de tres. Σ_2: Hallar nuevos datos y compararlos con los que le dan [5], [4] y [7]
Concepción: Regla de tres		

Tabla 1. Concepción de la Estrategia 1 (Taller 1, Actividad 1)

El sistema de representación es tanto numérico (L_2) como algebraico (L_1) ya que encuentran los resultados desconocidos utilizando el algoritmos de la cuarta proporcional. Esto les permite a los estudiantes ampliar la tabla de datos registrando los consumos obtenidos para 16, 17, 18, 19 y 20 km a través del procedimiento señalado, con la expectativa de que estos nuevos datos se relacionaran con los datos iniciales. Pero los controles les hacen ver que no es así ya que estos llevan al estudiante a validar o rechazar la estrategia.

Es decir, aunque seguir paso a paso el algoritmo (Σ_1) les permite fortalecer la idea de utilizar la regla de tres para hallar el consumo, el segundo control (Σ_2), que consiste en comparar los datos que están hallando con los que tenían, según su diferencia o incremento, evidencia que el comportamiento de los datos encontrados (el cual es constante) es diferente de los datos iniciales presentados en la tabla de datos.

Estrategia 2

Esta estrategia tiene en común con la anterior el razonamiento cuantitativo sobre el consumo verificando el incremento entre un dato y el siguiente, pero se diferencia en la forma en que aquí emerge; veamos:

> [1] Inv: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? ¿Y cuánto para 20 km?
> [2] Inv: Cuénteme qué está haciendo ahí, qué es esto *[señalándole al estudiante lo que está escribiendo en su hoja]*
> [3] Est: Es la diferencia que hay entre los litros, respectivo a los kilómetros, por ejemplo de 1 a 2 km, cuantos litros de gasolina ha consumido el vehículo (Ilustración 6)
> [4] Inv: ¿Por qué está hallando la diferencia entre los consumos de combustible?
> [5] Est: Es que quería saber si el consumo era igual y sumarle eso hasta llegar a 17 y 20 *[señalando el último dato de la tabla de datos]*, pero noto que consume no en modo constante, si no discontinuo y así cómo puedo saber cuánto aumentaría [Está diciendo que Δy no es constante si no variable]
> [6] Inv: Me dice que no es continuo el gasto, ¿a qué se refiere con eso?
> [7] Est: Pues, para el primer km gastó 0.14 litros de gasolina, después de haber hecho 2 km el gasto es de 0.21 pero ya al tercer km gasta 0.31 o sea ya gasta 10 litros más respecto al principio y por ejemplo cuando recorre 10 km gasta 0,1 litros respecto a los primeros km, pero si usted mira siempre recorre 1 km, pero como le decía no consume siempre en modo continua así que no sé qué hacer para 17 y 20 (Ilustración 6).

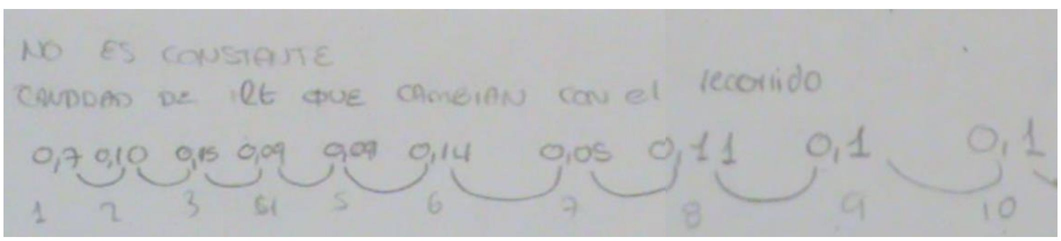


Ilustración 6: Operador del estudiante, Estrategia 2

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Hallar la diferencia del consumo, Δy (Ilustración 6) [3], [5], [7] R_2: Sí $\Delta x = k \implies \Delta y = k_1$, con k, k_1 constantes [5]	L_1: Esquema-Numérico [7] (Ilustración 6)	Σ_1: Numérico: Δy no es constantes [7]
Concepción: Proporcionalidad directa		

Tabla 2. Concepción de la Estrategia 2 (Taller 1, Actividad 1)

La estrategia consiste en verificar si el aumento entre los consumos del combustible son constantes para tomar el último dato de la tabla, correspondiente al consumo para 15 km, y sumarle este valor hasta encontrar el consumo correspondiente para 17km y 20km.

El estudiante percibe que la diferencia entre los kilómetros recorridos es constante ($\Delta x = 1$), y espera que la diferencia entre el consumo de combustible (Δy) también lo sea (R_2), por esto halla varios Δy (R_1) para así poder verificar su conjetura (Σ_1). Vemos, entonces, cómo el estudiante hace uso de su razonamiento covariacional al analizar la variación a través de las diferencias. El sistema de representación es un esquema numérico en el que resalta el consumo de combustible de un kilómetro a otro (L_1). Este esquema le sirve para ejercer el control a su concepción y como no obtiene los resultados esperados abandona la estrategia.

Estrategia 3

Aquí el estudiante involucra una nueva representación de los datos para modelar la situación: la gráfica.

> [1] Inv: ¿Cómo puedo saber cuánto combustible consume para 17 km?
> [2] Est: Pues, yo intenté sacar una relación que se encuentre entre cada número, como una secuencia… pero no la encuentro, porque tiene una secuencia toda rara (Ilustración 7) *[mostrando en su hoja de trabajo que halló la diferencia entre los consumos de combustible].*

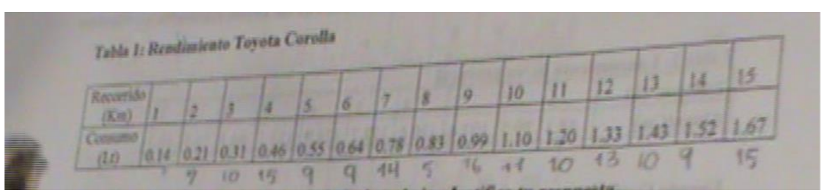


Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

7 10 15 9 9 14 5 16 11 10 13 10 9 15

Ilustración 7. Diferencias entre los valores del consumo de combustible.

> [3] Inv: ¿Por qué está graficando?
> [4] Est: Bueno, yo intento sacarle una ecuación a la gráfica… Pues yo grafiqué, que es lo más fácil, coloqué el recorrido en el eje x y el consumo en el eje y, pero veo

que es como rara, parece una recta pero no está derecha. La verdad no sé cómo sería su ecuación.

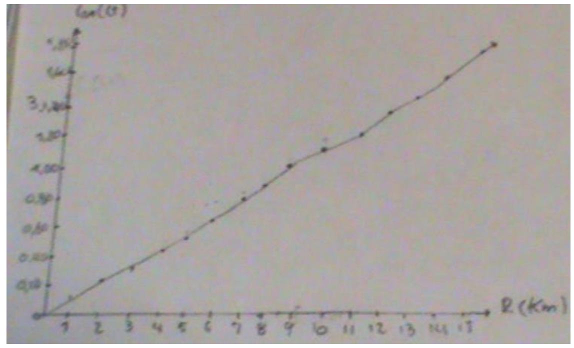


Ilustración 8. Gráfica realizada por el estudiante

[5] Inv: ¿Con esto que hizo puede predecir los consumos que le piden, para 17 y 20 e incluso para x?

[6] Est: Pues, yo grafiqué según la información que nos dan acá… pero solo llega hasta 15… pero… está un poco complicado… la verdad no sé cómo hacerlo.

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: Δy.no es constante [2]. R_2: Grafica de kilómetros versus consumo [4] R_3: No es posible encontrar la ecuación de la recta [4], [6]	L_1: Numérico [1] L_2: Gráfica de [4], [6]	Σ_1: Numérico [2] Σ_2: Gráfica de la relación [4], [6] Σ_3: Algebraico: ecuación del a recta [4]
Concepción: Ecuación que relacione los datos y la gráfica		

Tabla 3. Concepción de la Estrategia 3 (Taller 1, Actividad 1)

El estudiante, inicialmente, verifica si la diferencia entre los consumos de combustible (Δy) es constante calculando diferencias entre estos (R_1) y cambia de sistema de representación para ver qué relación encuentra (L_1, Σ_1) sin tener éxito en ello.

Al cambiar a la representación gráfica y observar los datos de la tabla en un plano cartesiano (L_2) considera que no es posible encontrar una ecuación (R_2) y piensa que no es posible continuar ya que los datos no están alineados (Σ_2). Este estudiante moviliza su actividad matemática por una concepción que inicialmente era aritmética y pasa a una estrategia gráfica pero finalmente no logra su objetivo y abandona la estrategia.

Estrategia 4

La siguiente estrategia consiste en hallar la ecuación de una recta utilizando dos puntos de la tabla y utilizarla para calcular los consumos de combustible que le piden.

> [1] Prof: Tenemos un problema, nosotros tomamos estos datos del consumo del vehículo y queremos estimar cuánto consumirá si me dispongo a recorrer 20 km, pero la tabla no me muestra esos resultados. ¿Sera que yo puedo saber con exactitud cuánto combustible consumirá el vehículo si me dispongo a recorrer ciertos kilómetros?
> [2] Est: Sí, ya que esos datos los puedo relacionarlos con la ecuación de una recta.
> [3] Prof: ¿Qué puede relacionar con la ecuación de una recta?, esto [señalando la tabla de los datos], ¿por qué?
> [4] Est: Porque voy a tener un punto x y un punto y. Entonces puedo decir que el punto y es kilometro que siempre voy a recorrer y x me va a mostrar el combustible que voy a gastar [confundiendo las variables]
> [5] Prof: ¿Cómo los relaciona?
> [6] Est: Puedo hallar la pendiente, como me dan varios puntos, puedo tomar dos puntos, entonces, digamos, como sabemos que la pendiente es igual a $y_2 - y_1$ sobre $x_2 - x_1$, ahí podemos hallar la pendiente y después encontramos b.
> [7] Prof: ¿Puede pasar al tablero a mostrarnos qué hizo?
> [8] Est: Sí… bueno, primero hallo la pendiente. Podemos tomar dos puntos que queramos, yo tome el tres y el dos [toma los puntos $(2\,,0.21)$ y $(3\,,0.31)$ y sin dar más explicaciones halla el valor de la pendiente, (Ilustración 9)]. En este caso la pendiente es $\mathrm{m} = 10\ldots$ y teniendo la pendiente puedo hallar el punto de corte, entonces para hallar el corte puedo utilizar los puntos que yo quiera y en este caso tomo el 1 [toma el $P = (1, 0.14)$ de la tabla1 y halla el punto de corte de la recta con el eje y], en este caso el punto sería $b = 0.4$, entonces la ecuación de la recta me quedaría $y = 10x + 0.4$, entonces x sería en consumo y los kilómetros sería y, entonces si yo quiero hallar el consumo que recorre en cierto kilómetros, sería despejar la x.
> [9] Prof: ¿Entonces cuánto sería, por ejemplo, para $17\,km$ el consumo del combustible?
> [10] E9: Bueno, despejo $x\ldots$ luego reemplazo y en la ecuación… y esto es lo que me da $x = 1.66$ ...

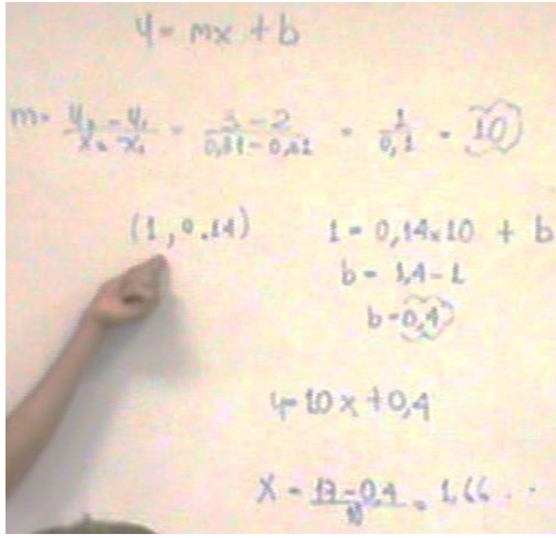


Ilustración 9. Representación algebraica, Estrategia 4, Situación 1

[11] Est2: Si se hace con esa ecuación, digamos para sacar el de 18 daría 1.86 entonces se llevaría una secuencia fija.
[12] Est3: Esa fórmula funcionaría si fuera una secuencia fija, pero la secuencia varía. *[El estudiante intenta explicarle a su compañero que en los datos iniciales no hay un incremento constante pero si hayamos los datos con la ecuación de esta recta, comienza a haber un incremento constante]*

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: $y = mx + b$, [2] R_2: Variables R_3: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, [6] R_4: $y = 10x + 0.4$ [8] R_5: $x = \frac{y - 0.4}{10}$ [10] (Ilustración 9)	L_1: Algebraico [3], [4], [6],	Σ_1: Teórico: ecuación de la recta [8]
Concepción: Ecuación de la recta		

Tabla 4. Concepción de la Estrategia 4 (Taller 1, Actividad 1)

Este estudiante toma el segundo y el tercer punto de la tabla de datos para encontrar la expresión de una función que relacione el consumo de combustible y los kilómetros recorridos (Σ_1), consiguiendo con ella un valor aproximado de los consumos que le piden hallar. Su estrategia emplea un razonamiento destacable para el pensamiento variacional ya que analizar y explica relaciones de dependencia de la situación.

Consecuentemente determina que el recorrido es y (la variable independiente) y que el consumo del combustible es x (la variable independiente) (R_2); hace el procedimiento algebraico (L_1), halla la pendiente (R_3) y el punto de corte, llegando a la expresión $\mathrm{y} = 10\mathrm{x} + 0.4$ (R_4), que es el recorrido dependiendo del consumo contrario a lo que se espera con la escogencia de sus variables, el consumo dependiendo del recorrido; aunque despeja x llegando a $x = \frac{y-0.4}{10}$ (R_5).

El estudiante no puede solucionar el problema ya que confunde las variables y su sistema de control no le permite darse cuenta del error realizado al invertir las variables. Esto como consecuencia de movilizar su actividad matemática con una representación algebraica la cual lo lleva a una expresión que relaciona las dos variables y eso es suficiente para convencerse de la que hizo.

Estrategia 5

La estrategia que sigue se da cuando el profesor hace algunas preguntas con la intención de guiar el trabajo y concretar las ideas expuestas hasta el momento. En ese momento ya se ha concluido que deben encontrar una recta que esté más próxima a todos los puntos, así que el estudiante propone una idea para decidir cuál es la más apropiada.

> [1] Prof: Bueno, construyan una recta, que ustedes consideren, que es la que más se aproxima a todos esos puntos, pero díganme, ¿qué criterio vamos a usar para decidir cuál es la que está más cerca de todos? ¿Es posible que la recta que estemos buscando no toque ningún punto?
> [2] Est: Sí es posible que no toque ningún punto, porque es como si fuera un promedio.
> [3] Prof: ¿Un promedio de qué?
> [4] Est: De la distancia de los puntos, o sea, no es que sea un punto específico por el que pasa la recta o que pase por varios, sino que es un promedio de la trayectoria… la verdad no sé cómo explicarlo mejor.
> [5] Prof: ¿Cómo hallaría ese promedio?
> [6] Est: Pues trazamos las rectas que pensemos que son, medimos la distancia de los puntos a las rectas. Sumamos esas medidas y hallamos el promedio. Entonces escogemos la recta que tenga el menor promedio.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Promedio de las distancias de cada punto a la recta [2], [4]	L_1: Lenguaje natural [2], [8]	Σ_1: Teórico: mínimo de los promedios
Concepción: Promedio de las distancias de cada punto a la recta		

Tabla 5. Concepción de la Estrategia 5 (Taller 1, Actividad 1)

Como quedó claro, la estrategia del estudiante consiste en tomar la distancia entre cada uno de los puntos y las rectas propuesta, hallar los promedio correspondiente (R_1) y la que menor promedio es la indicada (Σ_1). El sistema de representación que utiliza el estudiante es el lenguaje natural (L_1) movilizado por la comunicación, proceso importante para la estrategia que planteó.

Estrategia 6

Esta estrategia consiste en buscar una relación en los datos para predecir los valores del consumo del combustible que le piden.

[1] Prof: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
[2] Est: Como hay una secuencia lo podemos hacer por ahí, podemos ver que estos coinciden, 1-1, 2-2, 3-3… del 1 al 9 hay esta secuencia… *[El estudiante encuentra esta relación observando los números en la tabla]*
[3] Prof: Del km 1 al km 9 hay una secuencia, ¿eso es lo que quiere decir? Y ¿del 10 en adelante qué pasa?
[4] Est: Sí, y del 10 en adelante aumenta en 1.
[5] Prof: ¿Qué secuencia? ¿Podría pasar al tablero a explicarnos?
[6] Est: Sí, por ejemplo en el 1 la secuencia es 0,14, el en 2 da 0,21 y el nueve es 0,99. Pero en el 10 ya cambia, es 1,10…y en el 11 es 1,20… y en 13 es 4. ¿Si lo nota? *[Apoyándose de los que acaba de hacer en el tablero (Ilustración 10)]*
[7] Prof: ¿Cuál es la secuencia que hay?
[8] Est: Acá va aumentando este número en 1 y concordando con este *[explica que del km 1 al km 2, el primer decimal del número que me representa el consumo de gasolina respectivamente, también pasa de ser 1 a ser 2, (Ilustración 10)],* pero en el 11 cambia *[en el décimo dato, el segundo decimal deja de ser igual al kilómetro respectivo]*

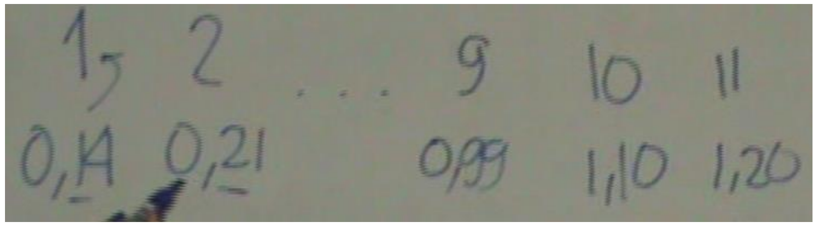


Ilustración 10. Sistema de representación, Estrategia 6, Situación 1

[9] Est1: Pero después del 1 ya la secuencia no… si ves que es 0,14 o sea el 4 ya no sigue la secuencia y el del 1… después del 1, ¿si me entiende? Hay secuencia en los dos primeros números pero ya en el tercero la secuencia no sirve. *[Este estudiante intenta decirle que este patrón no se cumple para el segundo decimal]*
[10] Est: Eso es lo que digo yo, aquí hay secuencia pero en estos no… se pierde.
[11] Prof: ¿Entonces no pudo obtener respuesta por eso?
[12] Est: Pues si se saca según la secuencia se puede encontrar que en el número 17 el decimal sería 8 y entonces el consumo del combustible sería 1.8 algo…, si no estoy mal, pero no sé encontrar el segundo decimal.
[13] Prof: Bien, ¿si descubrimos cuál es la correspondencia entre los números damos respuesta a la pregunta?
[14] Est: Sí y no… sí pero no sé cómo hallar la secuencia o no sé si exista para que incluya el otro decimal, aunque con lo que acabo de explicar se puede tener un valor aproximado pero solo para un decimal.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: La primera cifra decimal es igual al número de kilómetros [2], [6], [8], [Ilustración 10] R_2: A partir del décimo dato la primera cifra decimal aumenta en uno R_3: Para 17 km el consumo es 1.8_ [12]	L_1: Esquema de comparación (Ilustración 10) [8]	Σ_1: Comparación numérica [2], [6,] [8] y [12]
Concepción: Búsqueda de patrones numérico		

Tabla 6. Concepción de la Estrategia 6 (Taller 1, Actividad 1)

En esta estrategia se evidencia una las habilidades necesarias en el pensamiento variacional, ya que el estudiante hace un análisis de los datos de la tabla en búsqueda de un patrón, pero lamentablemente el patrón encontrado no es generalizable a todos los datos dados, ni útil en el caso de la resolución de los problemas propuestos. Revisemos la naturaleza del patrón que encontró: Percibe que el número que representa el recorrido coincide con la primera cifra decimal del número que representa el consumo de combustible (R_1), correspondencia que es simple coincidencia, pero que él utiliza como una regla para predecir los valores que le piden en la actividad, seguido de esto el estudiante se da cuenta que ese “patrón” no se cumple y determina que a partir del décimo dato la primera cifra decimal ya no es igual sino que aumenta en uno (R_2). Como es coherente con su forma de analizar los datos usa este nuevo patrón para determinar que el consumo del combustible cuando a recorrido 17 km es 1.8 (R_3).

El control del estudiante (Σ_1) consiste en comparar los datos para verificar si lo que ha descubierto se cumple y seguir utilizando la estrategia para predecir los datos que le solicitan en el taller.

La representación que utiliza el estudiante es el esquema de comparación que plasma en el tablero, que le sirve para explicitar las relaciones que descubre y que le ayudaran a convencerse de la veracidad de su regla.

Comentarios Generales de las Estrategias 1-6

Queda explícito, a través de las concepciones, que en las primeras cuatro estrategias identificadas el razonamiento orientador fue el considerar la variación en el consumo del combustible era constante lo cual fue evidenciado por los estudiantes a través de las diferentes representaciones: algebraica, numérica, gráfica y esquemática.

Aunque todos los estudiantes que plantean las estrategias descritas realizan procedimientos diferentes y llegan a dar respuestas diferentes. La expectativa del curso se cumple ya que son ellos quienes se atreven a plantear estos procesos, produciendo así respuestas con buenas aproximaciones.

En la estrategia 6 el estudiante encuentra un patrón y logra encontrar una respuesta de cuánto es el consumo del combustible para 17 kilómetros recorridos y aunque es un procedimiento que no se esperaba, la respuesta que da $(1.8\, lt)$ es cercana a la respuesta que dan otros estudiantes por lo que, para este ocasión, sería una buena estrategia producto de la casualidad, pero que no tiene que ver con un razonamiento matemático apropiado para la situación, sino resultado de una percepción sobre los datos.

ESTRATEGIAS EMPLEANDO GEOGEBRA

Estrategia 7

A continuación veremos cómo el estudiante usa GeoGebra para elaborar y darle una representación a la estrategia de la situación que hemos venido trabajando.

> [1] Inv: ¿Cuál curva es la que mejor se ajusta a los puntos y que me permitirá predecir el consumo de combustible cuando se han recorrido 17 y 20 km?
> [2] Est: Pues yo estoy haciendo una recta que pase por lo puntos 2 y 3, que es la como hizo la compañera antes, porque si hago la que pasa por 1 y 2 tocaría empezar con 1 y mire lo que pasa, *[La estudiante observando el monitor ve que la recta que ella escogió pasa más cerca a los demás puntos mientras que la otra recta sé aleja y eso es lo que trata de describir]*
> [3] Inv: ¿Qué espera de la recta que está construyendo?
> [4] Est: Que la recta pase por estos dos puntos *[señalando con el dedo los puntos en la pantalla del computador], por eso la construí pasando por estos dos puntos, el dos y el tres.*
> [5] Inv: ¿Por qué una recta que pase exactamente por esos puntos?
> [6] Est: Porque los ejercicios que habíamos hecho anteriormente los habíamos hecho a partir de esos dos puntos, así hallamos la pendiente y el punto de corte.
> [7] Inv: ¿Con esta recta cómo halla el valor del consumo del combustible para 17 y 20 km?
> [8] Est: Pues sería mirar acá para 17 cuánto me da el valor de la recta.
> [9] Inv: ¿Cómo lo haría?
> [10] Est: Trazo una recta vertical por acá y miro cuando se encuentre con esta. *[El estudiante hace una recta que pasé por $x = 17$ pero la ubica a ojo y busca donde se corta con la recta que había hecho antes]* O sea busco el punto de intersección y miro cuál es la coordenada en y.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Recta que pasa por el segundo y el tercer punto [2]. R_2: Punto de intersección entre la recta inicial R_1 y la recta $x = 17$ [10]	L_1: Geométrico	Σ_1: Analítico: intersección de dos rectas.
Concepción: Intersección entre las rectas R_1 y $x = 17$		

Tabla 7. Concepción de la Estrategia 7 (Taller 1, Actividad 1)

El estudiante construye en GeoGebra la recta que pasa por dos de los quince puntos que le habían suministrado antes en la tabla de datos [$P = (2\,, 0.21)$ y $Q = (3\,, 0.31)$] y que ahora están graficados en el plano cartesiano (R_1). Después busca el valor del consumo cuando se han recorrido 17 km, hallando la intercepción entre la recta de ajuste y la recta que pasa por $x = 17$ (R_2), evidenciado nociones analíticas que son la base para articular su estrategia. .

El sistema de representación que moviliza la estrategia es geométrico ya que en el procedimiento se utiliza GeoGebra (L_1) y, como se puede percibir, esto es suficiente para que el estudiante se convenza de lo que hace, ya que logra darle solución al problema de predecir el consumo del combustible, hallando la intercepción entre la recta construida (la hace pasar por dos puntos) y la recta que pasa por $x = 17$ (Σ_1).

Estrategia 8

En esta estrategia el estudiante intenta acomodar una recta que pase por varios puntos, pero con lo que hace no logra encontrar los datos que le solicitan en el taller.

> [1] Inv: ¿Cuénteme qué es lo que está haciendo?
> [2] Est: Bueno, hice una recta que pasara por los puntos uno y dos, además estoy haciendo una recta que pase entre los puntos ocho, nueve y diez… Pero veo que no pasa por el origen. *[El estudiante toma una recta cualquiera y la acomoda, a ojo, para que está "pase" por más de dos puntos]*
> [3] Inv: ¿Por qué esa recta que pase por varios puntos?
> [4] Est: Pues, esta incluye otros… es la única que pasa por más de dos puntos.
> [5] Inv: ¿Por qué necesita que pase por más de dos puntos?
> [6] Est: Si pasa por más puntos va a ser la que mejor se ajusta, es lo más lógico.
> [7] Inv: ¿Cuánto es el consumo de combustible para $x = 20$?
> [8] Est: Pues… yo no sé cómo encontrarlo, aunque se podría ir por la recta hasta 20 y ver cuál es…
> [9] Inv: ¿Cómo así que ir por la recta?
> [10] Est: Sí, pues miro en 20 cuál es el valor de la recta *[señalando 20 en el eje x]*
> [11] Inv: ¿Cómo?
> [12] Est: No sé, pero creo que así se podría…

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Recta que pase por varios puntos [2]	L_1: Geométrico	Σ_1: Analítico
Concepción: Recta que pasa por varios puntos		

Tabla 8. Concepción de la Estrategia 8 (Taller 1, Actividad 1)

Al igual que en la anterior estrategia, el estudiante interactúa con el *software* y manipulando una recta, la ubica de tal forma que pase por varios puntos y no solo por dos ya que, según lo que expresa, la curva que mejor se ajusta a estos datos es una recta que pasa por la mayor cantidad de puntos posibles.

El operador de la concepción es la recta que ha construido y que, como dice, pasa por varios puntos (R_1). Además todo lo valida basándose en lo que ve en el plano cartesiano que le proporciona la vista Grafica de GeoGebra, ejerciendo un control analítico de la situación (Σ_1). Por lo tanto el sistema de representación geométrico (L_1)

Comentarios Generales de las Estrategias 7-8

De estas dos estrategias se aprecian las nociones de los estudiantes sobre la regresión lineal al consideran que la recta que mejor se ajusta a la situación debe pasar por dos o más puntos, pero también pasar cerca a los demás.

No obstante, la recta trazada se convirtió en un distractor desde lo perceptivo pues los estudiantes se concentraron en esos dos o tres puntos sobre los que pasó y obviaron el análisis de los demás. Incluso, ninguno se cuestionó por el hecho de que si lo que veían era acertado: *¿realmente pasa la recta por el punto? ¿O si pasa más cerca de unos, pasara más lejos de otros?...* Ninguno usó la herramienta del zoom para validar las aseveraciones que realizaban.

SITUACIÓN 2

En un laboratorio de física, se realizó un experimento que consistió en lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba. En la siguiente tabla se muestran las alturas registradas en diferentes momentos.

Lanzamiento de un proyectil

Tiempos (S)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura(Cm)	48.3	79.5	107.4	120.8	127.7	124.9	113.5	84.5	55.5	10.7

Ilustración 11. Situación 2, Taller "Análisis de Información"

ESTRATEGIAS EMPLEANDO GEOGEBRA

A continuación veremos las diferentes estrategias que emplean los estudiantes para escoger el modelo que mejor se ajuste a unos datos relacionados con el lanzamiento de un proyectil. En esta situación se les pide trabajar con GeoGebra y tener en cuenta las discusiones realizadas sobre la primera actividad.

Estrategia 1

Veremos cómo en esta estrategia el estudiante define un criterio para poder escoger, de varios, el modelo que mejor se ajuste a la situación ya que estas muestran “graficas parecidas”.

[1] Inv: ¿Cuál es el modelo que mejor se ajusta a la situación?
[2] Est: Este que tengo ahí [Ilustración 12]
[3] Inv: ¿Qué otras opciones le da el programa?
[4] Est: Hay estos modelos: lineal, logaritmo, polinomio, potencia, etc… Pero entonces es el que más cerca este de todos los puntos.
[5] Inv: ¿Cuál sería el mejor modelo?
[6] Est: La que yo escogí… pero hay otras como esta… un polinomio.
[7] Inv: ¿Cuál escogió usted?... ¿Cómo determina que esa es la curva más cerca de los puntos?

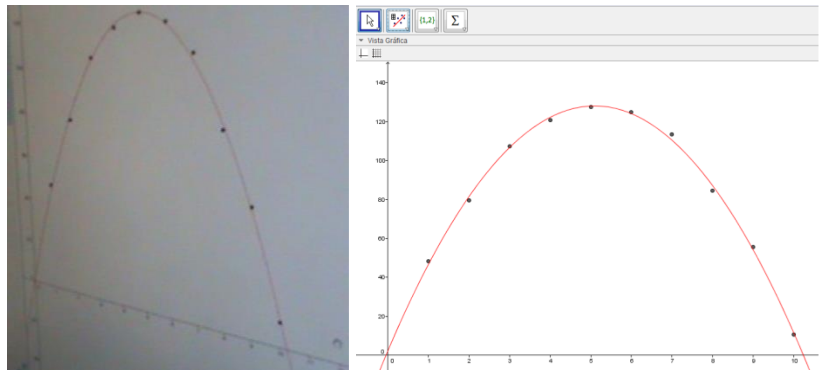


Ilustración 12. Procedimiento de E9 para hallar la ecuación de la recta

[8] Est: Pues en sí, las veo iguales, pero si uno se fija en este numerito, entonces el más pequeño, pues -4 es más grande que -6542, pues por ahí fue más o menos que la determiné. *[Hace referencia al coeficiente de x^2 en la función polinómica (Ilustración 14) y al primer número que se ve en la ecuación de la función sinusoidal (Ilustración 13) que determina con GeoGebra después hacer el análisis de regresión]*
[9] Inv: Al fin, ¿cuál escogió usted?
[10] Est: La del seno porque es la que tiene el número más pequeño.

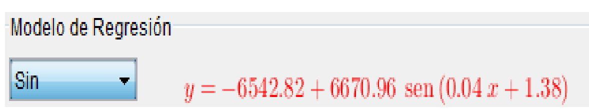


Ilustración 13: Gráfica de la regresión con el modelo de Sinusoidal

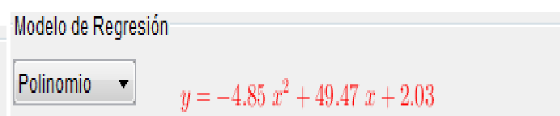


Ilustración 14: Gráfica de la regresión con el modelo polinomial

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: Modelo sinusoidal: $y = -6542.82 + 6670.96\,sen(0.04x + 1.38)$ (Ilustración 13) [2] R_3: Modelo polinomial $y = -4.85x^2 + 49.47x + 2.03$ (Ilustración 14)	L_1: Grafico [2] L_2:Algebraico [8]	Σ_1: Comparar números [8]
Concepción: Comparación numérica		

Tabla 9. Concepción de la Estrategia 1 (Taller 1, Actividad 2)

El estudiante escoge la curva de modelo sinusoidal porque la ve más cerca (Σ_1) a los puntos, aunque la del modelo polinomial es parecida y eso lo hace dudar. Finalmente escoge la sinusoidal (R_1) porque utiliza un criterio de selección que consiste en comparar las dos expresiones algebraicas (R_2, R_3) que le dio la regresión (L_2) y ver los números, *el termino independiente de la función sinusoidal (R_2) y el coeficiente de x^2 de la función* *cuadrática (R_3),* con lo que advierte cuál es el más pequeño y por eso hace su selección (Σ_2).

Vemos que el estudiante trabaja con una representación geométrica (L_1) y para escoger el mejor modelo, ya que a simple vista parecen el mismo, pasa a movilizar sus actuaciones con una representación algebraica, pero hace un análisis errado de las expresiones (Ilustración 13, Ilustración 14) y por comparar dos números que no tiene nada que ver con determinar la curva que mejor se ajuste, da una respuesta errada. Este tipo de estrategia no refleja un análisis matemático de la situación, dado que el estudiante se limita a dar una respuesta carente de un análisis matemático de la situación.

Estrategia 2

A continuación veremos cómo dos estudiantes escogen la curva que creen se ajusta mejor a los datos que tienen, utilizando un control adecuado al contexto del problema pero olvidando factores de la actividad matemática que deben realizar.

[1] Inv: ¿Por qué hay dos curvas? ¿Cuál es la que mejor se ajusta?
[2] E12 y E13: Una es la del seno y la otra es la polinómica, un polinomio de grado 4.
[3] Inv: Bueno, ¿De acuerdo a la situación ustedes por cuál se inclinan?
[4] E12: Yo me inclino por…
[5] E13: Yo digo que es la del seno.
[6] Inv: ¿Por qué?
[7] E12: Vimos que están igual de cerca, pero al lanzar el proyectil este debe partir de $(0{,}0)$.
[8] E13: Y vea, la que está más se acerca a $(0{,}0)$ es la del seno [señalando la gráfica]

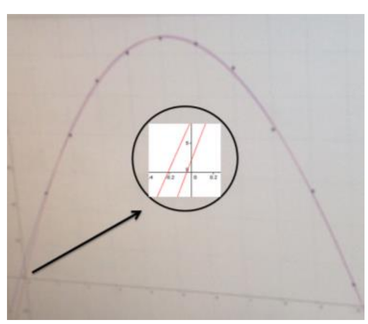


Ilustración 15. Representación gráfica, Estrategia 2, Situación 2

[9] Inv: ¿Por qué dicen que parte de $(0,0)$?
[10] E13: Pues al lanzar el proyectil, $x = 0$ pero el valor de y… no lo sé…
[11] E12: También debe ser $y = 0$…
[12] Inv: ¿Por qué un polinomio de grado 4? ¿por qué no uno de grado 3 o 2?
[13] E12: Porque lo estábamos ajustando y mirando como quedaba con los diferentes modelos y se acomodó mejor en el de grado 4. Ya que este está más cerca al inicio, que los otros. *[Como todos los polinomios se ven igual de cerca a los puntos, las estudiantes me muestra en la pantalla que la gráfica del polinomio que pasa más cerca del origen es el de grado 4 y por eso lo escogen].*

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1:Modelo sinusoidal R_2: Polinomio de grado 4 R_3: El proyectil parte de (0,0)	L_1: Gráficos de GeoGebra[8]	Σ_1: Analítica [8] [12] Σ_2: Contexto del problema [13]
Concepción: El proyectil parte del punto (0, 0)		

Tabla 10. Concepción de la Estrategia 2 (Taller 1, Actividad 2)

Los estudiantes exploran los diferentes modelos de regresión y como criterio de selección analizan las gráficas proporcionadas por el *software* y para asegurarse de la escogencia utilizan el siguiente criterio adicional:

Los modelos que escogen como posibles solución al problema son el sinusoidal (R_1) y el polinómico (R_2) ya que las gráficas que se muestran son parecidas. Pero como ellos aprecian la actividad como una situación real (Σ_2) aseguran que el proyectil debe partir del origen del sistema de referencia porque la altura debería ser 0 para $t = 0$ (R_3), entonces como segundo criterio para escoger la gráfica que mejor se ajusta, observan cuál pasa más cerca al origen (Σ_1).

Los estudiantes confían en su selección dado el sistema de representación empleado (gráfico, L_1) ya que solo se convencen analizando lo que ven en los monitores fortaleciendo dicho análisis al integrar el contexto por lo que afirman, como dijimos antes, que la curva que mejor se ajuste debe pasar por el origen del plano cartesiano o lo más cerca posible.

Estrategia 3

[1] Inv: ¿Ya decidió cuál es la curva que mejor se ajusta a los datos?
[2] E14: La que está en verde.
[3] Inv: ¿La que está en verde que curva es?
[4] E14: Es polinómica de segundo grado.
[5] Inv: ¿Por qué se decidió por esa?
[6] E14: Porque… digamos acá, esta es la roja y es la de grado 4, esta es verde y es la de grado 2 *[señalando con los dedos las gráficas en la pantalla]*. Entonces como se puede ver, la de grado 2 toca dos veces el eje x y según el ejercicio el proyectil se dispara, y es decir, va a estar en el punto $(0,0)$ y va a llegar a un punto en el que va a tocar el eje x cuando termina su impulso y entonces va a hacer 2 cortes con el eje x. Mientras que acá el polinomio de grado 4 hace cuatro cortes, cosa que el ejercicio no da a entender, entonces por eso la de grado 2 es la más conveniente. *[El estudiante hace zoom y ve el número de cortes que hacen las gráficas con el eje x]*
[7] Inv: ¿Algo más?
[8] E14: También vemos que la de grado 4 vuelve a subir y en la situación el proyectil no vuelve a subir, sube y baja una sola vez.

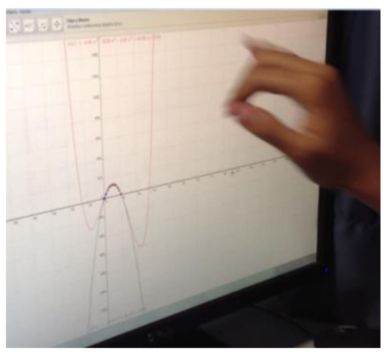


Ilustración 16. Representación gráfica, Estrategia 3, Situación 2

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Modelo Polinomial de grado 2. [2], [4, [6] R_2: Modelo Polinomial de grado 4 [6] R_3: Raíces del polinomio.	L_1: Grafico	Σ_1: Análisis de las gráficas[6], [8] Σ_2: El modelo de la gráfica debe ser acorde a la situación [6]
Concepción: Gráfica que se ajuste al contexto del problema		

Tabla 11. Concepción de la Estrategia 3 (Taller 1, Actividad 2)

La dificultad para escoger el modelo que mejor se ajusta a la situación es que hay varios que se ven idénticos, por ello la estrategia del estudiante se enfoca en buscar un criterio de selección utilizando las herramientas de GeoGebra para visualizar las dos gráficas y compararlas (L_1) para luego tomar una decisión sobre cuál escoger entre un polinomio de grado 2 (R_1) y uno de grado 4 (R_2).

De modo que, para esta tarea, emplea el zoom (Σ_1) y ve que la de grado dos toca dos veces el eje x y la de grado cuatro toca cuatro veces el eje x, lo cual lo influencia para la toma de decisiones a la que se enfrenta: utiliza este hecho como criterio de selección ya que comprende que el proyectil solo toca dos veces el eje x, cuando es lanzado y cuando llega de nuevo a la tierra (Σ_2) y el polinomio de grado cuatro lo toca cuatro veces. Vemos que el razonamiento del estudiante es adecuado para darle solución a la situación pues él se moviliza sobre una representación geométrica que es analizada con el uso del zoom.

Comentarios Generales de las Estrategias 1-3

Se observa, tras el análisis de las estrategias, una diferencia importante entre las dos primeras estrategias: los controles usados no son pertinentes para valorar la escogencias de la curva que mejor se acomoda; además tampoco cambian de representación cuando no saben qué más hacer con lo que han pretendido, buscando así métodos para forzar la respuesta.

Lo más importante que se puede resaltar de la estrategia 3, y que serviría para aplicarse a las dos primeras estrategias, es el proceso de conectar las respuestas ofrecidas por el software con el enunciado y contexto del problema, pues este permite ver qué tan coherentes son las respuestas que están dando con la situación planteada.

A continuación veremos las diferentes estrategias que emplean los estudiantes a las preguntas 3 y 4 de la Situación 2:

¿Cuál fue el alcance máximo del proyectil?
¿Cuánto tiempo demoró el proyectil en el aire?

Estrategia 4

[1] Inv: ¿Qué están haciendo?
[2] Est: Tratando de saber cuál es el alcance máximo del proyectil pero no sabemos cómo calcularlo aunque lo podemos ver acá.
[3] Est: Suponemos que este es el alcance máximo del proyectil *[señalando con el dedo la tabla de datos]*
[4] Est: Según lo que dice acá, a los 5 seg, alcanzó $127.7\ cm$.
[5] Est: O sea, según la tabla.
[6] Inv: ¡Según la tabla sería ese!…bueno, ¿según la gráfica cuál sería?
[7] Est: Yo considero que este es el punto más alto *[mostrando con el dedo el punto más alto que se ve en la gráfica que también es el valor que señalo antes en la tabla [4]]*
[8] Inv: ¿Por qué?
[9] Est y Est: Pues en el plano cartesiano… porque está más arriba que los otros.
[10] Inv: ¿Cómo hallaron el tiempo que duró en el aire el proyectil?
[11] Est: Hallando la intersección entre la parábola y el eje x y vimos cuáles eran las coordenadas del punto de corte.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: A los 5 seg, alcanza $127.7\ cm$ [4] R_2: Gestos: Señalar con el dedo el punto más alto. [7]	L_1: Numérico [3], [4] L_2: Grafico [9], [11], [7]	Σ_1: Numérico [3], [4] Σ_2: Analítico [7], [9], [11]
Concepción: El alcance máximo es el mayor valor dado en la tabla o el punto más alto de la gráfica		

Tabla 12. Concepción de la Estrategia 4 (Taller 1, Actividad 2)

Podemos darnos cuenta que el análisis de la gráfica nuevamente domina la actividad matemática. Ya es sobre esta representación que el estudiante puede dar una respuesta. Los estudiantes afirman que la altura máxima que alcanza el proyectil es de $127.7cm$, ya que en la tabla de datos (L_1) ven que es el valor más grande (R_1, Σ_2) y después viendo la gráfica de la parábola (L_2), dicen que la altura máxima es el punto que se ve más alto (R_2, Σ_1).

Estos estudiantes no logran solucionar este problema porque llegan a realizar una exploración visual o empírica del problema mas no buscan otras respuestas o reflexionan sobre sus procedimientos.

Estrategia 5

[1] Inv: ¿Usted ya halló el alcance máximo del proyectil?
[2] Est: Sí, el vértice, bueno 128.11 porque es el valor de y.
[3] Inv: ¿Quién es b y quien es a, en esas ecuaciones que tiene escritas?
[4] Est: $a = -4.85$ y $b = 49.47$ son del análisis *[estos valores los saca de la expresión que le da GeoGebra en el análisis de regresión]*
[5] Inv: ¿Usted se acordaba cómo hallar el vértice?
[6] Est: No, entré a Internet y busqué las fórmulas de los vértices en Google.
[7] Inv: Bueno, ¿cuánto tiempo duró en el aire el proyectil?
[8] Est: Es el otro punto de corte con el eje x.
[9] Inv: ¿Cómo lo halló?
[10] Est: Hice zoom y vi que es 10.24

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: El alcance máximo es el vértice. R_2: $a = -4.85$ y $b = 49.47$ R_3: Punto de corte con el eje x.	L_1: Algebraico [6] L_2: GeoGebra [10]	Σ_1: Búsqueda en internet Σ_2: Fórmula del vértice de la parábola. Σ_3: Zoom en GeoGebra
Concepción: Fórmula para hallar el vértice de la parábola – corte con el eje x		

Tabla 13. Concepción de la Estrategia 5 (Taller 1, Actividad 2)

El estudiante realiza el análisis de regresión y utiliza la expresión algebraica proporcionada para saber cuál es el valor de a y de b (R_2) y la fórmulas (Σ_2) para hallar el vértice de una parábola (R_1) aunque no las recuerda en el momento, recurre a Internet para buscarlas (Σ_1).

Esta es una estrategia que se mueve con una representación algebraica (L_1) superando la percepción, por lo que cabe resaltar que el estudiante reconoce la conexión que hay entre la gráfica y los procesos algebraicos que van ligados a ella.

El alcance máximo lo encuentra manipulando las fórmulas (Σ_2) por lo que no duda de su resultado. Otro control es el analítico (Σ_3) ya que utiliza la curva y el zoom para ver cuál es ese alcance máximo del proyectil. Esta es una acción positiva ya que el estudiante integra en la estrategia una herramienta del programa para verificar lo que percibió pues al utilizar el zoom está controlando el margen de error que le podría generar la percepción; de modo que el estudiante es cuidadoso en el uso que realiza del programa y esto le garantiza una respuesta bastante aproximada a la solución del problema. También utiliza el zoom para encontrar el punto de corte de la función con el eje x y así conocer el tiempo que dura el proyectil en el aire (R_3).

Comentarios Generales de las Estrategias 4-5

Para finalizar el análisis de la situación del lanzamiento del proyectil, se puede afirmar que la estrategia 4 fue la más utilizada, mientras que la estrategia 5 solo un estudiante fue el que la utilizó. Esto deja en evidencia que algunos estudiantes, al utilizar la tecnología para la resolución de problemas, solo exploran lo que ven en la pantalla y lo comunican sin hacer uso más adecuado de la herramienta y solo utiliza un tipo de representación, contrario a la estrategia 5, donde se puede evidenciar como el estudiante enlaza dos representaciones, geométrica y algebraica, para dar una mejor respuesta.

2.2 ESTRATEGIAS EMERGENTES DEL TALLER "DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO"

El taller propone cuatro (4) actividades:

ACTIVIDAD 1. Presenta dos preguntas para indagar los conocimientos de los estudiantes sobre las nociones de derivada como razón de cambio.

ACTIVIDAD 2. Presenta un escenario donde se recrea una piscina que se llena de agua a medida que el tiempo pasa y se hacen preguntas e indicaciones al estudiante para guiar su trabajo al objetivo de la actividad, ver la derivada como razón de cambio.

ACTIVIDAD 3. Se le dan al estudiante indicaciones para guiar su trabajo al relacionar las diferentes variables involucradas en el problema.

ACTIVIDAD 4. Propone una actividad para desarrollar en casa para que el estudiante aplique lo que vio en clase sobre derivada como razón de cambio.

ACTIVIDAD 1

Las siguientes estrategias corresponden a una pregunta de las dos que se hacen en la primera situación (Actividad 1, punto 1.1) pues la otra pregunta no se alcanza a trabajar.

¿Qué significa que la velocidad instantánea se defina como el ritmo o tasa de cambio de la posición por unidad de tiempo?

ESTRATEGIAS SIN EL EMPLEO DE GEOGEBRA

Estrategia 1

[1] Prof: ¿Qué significa que la velocidad instantánea se defina como el ritmo o tasa de cambio de la posición por unidad de tiempo?
[2] Est: Pues, si yo arrojo este lapicero de aquí a la pared va a haber una velocidad instantánea al yo arrojarlo, que se defina como el ritmo o tasa de cambio, pues que cambia de posición en un tiempo determinado.
[3] Prof: Explíquese mejor porque algunos compañeros no le entendieron.
[4] Est: Pues la velocidad instantánea es la velocidad que hay en esta distancia, de aquí hasta allá, en determinado tiempo *[haciendo gestos con las manos]*
[5] Prof: ¿Cómo se podría calcular esa velocidad instantánea?
[6] Est: Se toma la distancia recorrida y se divide por el tiempo que dura el recorrido.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Ejemplo [2] R_2: $V = \frac{\Delta d}{\Delta t}$ [6]	L_1: Lenguaje natural [2], [4], [6]	Σ_1: Ejemplo
Concepción: Velocidad media		

Tabla 14. Concepción de la Estrategia 1 (Taller 2, Actividad 1, punto 1.1)

Para la resolución del problema el estudiante teje su razonamiento a través de su interpretación de velocidad instantánea, por lo que da un ejemplo (R_1) dejando en evidencia que está describiendo (L_1) la velocidad media de un cuerpo en una distancia recorrida (R_2) y no la velocidad instantánea como cree. Relatar el ejemplo le sirve como control (Σ_1) de lo que está pensando que es la velocidad instantánea por lo que nadie le refuta la respuesta.

Estrategia 2

En la siguiente estrategia la estudiante se apoya en una ilustración de la situación para razonar sobre el problema.

[1] Prof: ¿Qué significa que la velocidad instantánea se defina como el ritmo o tasa de cambio de la posición por unidad de tiempo?
[2] Est: Yo creo que es el cambio de aquí hasta allá que se va haciendo por unidad de tiempo.
[3] Prof: Es decir… Pase al tablero y nos explica mejor.
[4] Est: O sea, como si se tomara muchas fotos del lapicero, cuando va de aquí a cierto lugar.
[5] Est: *[Realiza un dibujo en el tablero sobre el ejemplo que dio su compañero en la estrategia anterior (Ilustración 17)]* Entonces se miraría, no tanto cuanto se demora de aquí a allá, *[Refiriéndose a toda la distancia recorrida]* si no en ciertas posiciones *[dividiendo el recorrido en cuatro partes iguales]*, entonces, como el lapicero pasa por ahí, se toman las distancias, supongo yo.
La distancia que recorrió, se suponen que van a ser igual porque es la misma tasa de cambio, entonces los tiempos que tomó de aquí hasta aquí, de aquí hasta aquí…
Pues yo supongo que no son iguales, porque se supone que aquí, está la altura máxima *[señalando el punto más alto de la trayectoria del lápiz]* y cerca a esa altura máxima comienza a disminuir la velocidad pero después comienza a aumentar por la gravedad, aquí empieza a caer con la velocidad de la gravedad.
Entonces yo supongo que sería el cambio en la posición respecto al tiempo… Teniendo en cuenta que en cierto recorrido, en cada espacio se va a demorar diferente tiempo, si me entiende, entonces sería tomar el tiempo que se demore en cada instante. Por ejemplo: supongamos que recorre 15 cm en cada espacio y para

ello gastó 2 seg en los primeros 15cm, 4 seg en los siguientes 15cm, en estos otros gasto 3 y en el último $\sqrt{3}$.

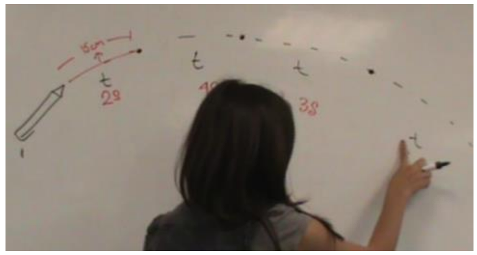


Ilustración 17. Dibujo de la estudiante para explicar su estrategia

[6] Est: Entonces sería como, velocidad es igual a distancia sobre tiempo $\left[\textit{escribiendo en el tablero, } V = \frac{d}{t}\right]$, sería tomar todos los tiempos, sacarle la media $2 + 4 + 3\ldots$
[7] Prof: Pero eso no fue lo que usted dijo, usted empezó diciendo en un momento determinado.
[8] Est: No, yo dije: cuánto tiempo se demora el lápiz en recorrer cada espacio, porque cada tiempo va a ser diferente… teniendo en cuenta eso, es que lo estoy haciendo.
[9] Prof: Continúe...
[10] Est: Entonces sería $9+\sqrt{3}$, reemplazando sería: $\mathrm{V} = \frac{15}{9+\sqrt{3}}$.…Bueno, sería más como sacarle a cada una, entonces, $\mathrm{V} = \frac{15}{2} + \frac{15}{4} + \frac{15}{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}$... Bueno sumar cada uno de esos, pues es lo que yo intenté.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Cambio de posición con respecto al tiempo [2] [5] R_2: Tomar fotos del objeto [4] R_3: Dibujo en el tablero [5] R_4: Recorre distancias iguales por ser la misma tasa de cambio [5] R_5: $V = \frac{d}{t}$ [6] R_6: Recorre distancias iguales en tiempos diferentes [5] R_7: $V = \frac{15}{9+\sqrt{3}}$ [10] R_8: $= \frac{15}{2} + \frac{15}{4} + \frac{15}{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}$ [9]	L_1: Ilustración [5] L_2: Algebraico [6] [10]	Σ_1: Dibujo sobre el tablero[4] Σ_2: Fórmula de velocidad [6] Σ_3: Analítico [5]
Concepción: La velocidad instantánea es la suma de velocidades medias		

Tabla 15. Concepción de la Estrategia 2 (Taller 2, Actividad 1, punto 1.1)

En esta estrategia la estudiante comienza diciendo que la velocidad instantánea es el cambio de la posición con respecto al tiempo (R_1) por lo que hace una ilustración (o dibujo; R_3) en el tablero para explicar que lo que se debe hacer es dividir el recorrido total que hace un objeto en cuatro partes iguales, tomar fotografías (R_2) y sumar las velocidades medias (aunque ella no sabe que está sumando las velocidades medias de estos intervalos aplica la fórmula $V = \frac{d}{t}$ (R_5) para calcularlas) calculadas en las particiones del recorrido total (R_8). Este dibujo se convierte en un control porque todo lo que está diciendo o explicando se acomoda a este (Σ_1).

La estudiante argumenta que divide el recorrido en partes iguales porque se tiene la misma tasa de cambio (R_4), aunque no explica que quiere decir con esto, y también afirma que el tiempo de recorrido de estos intervalos va a ser diferentes (R_6) ya que cerca al punto máximo la velocidad va a disminuir por lo que recorrería la misma distancia en más tiempo (Σ_3), lo cual es un control que surge del análisis de la situación y del dibujo.

Antes de sumar las velocidades medias propone que la velocidad instantánea es el cociente de la distancia de un intervalos (15, en este ejemplo) y la suma del tiempo total del recorrido (R_7).

Como podemos inferir, la estudiante se ayuda con una representación ilustrativa (L_1) para explicar su razonamiento y después hace un análisis de la situación (Σ_3), luego pasa a una representación algebraica (L_2) con la que logra dar una respuesta de lo que para ella sería la velocidad instantánea utilizando la fórmula de la velocidad media (Σ_2).

Esta estudiante cambia de representación y utiliza una gran variedad de operadores pero no consigue resolver correctamente el problema ya que la concepción, “suma de velocidades medias”, no es correcta.

Estrategia 3

[1] Est: Apoyándome en el dibujo que hizo ella, yo digo que la velocidad instantánea es la velocidad que tiene en cada uno de estos puntos donde se toma la fotografía. Digamos se tira el objeto y en 9 seg, que estaría el objeto acá, *[señalando el tercer punto con el dedo (Ilustración 18)]* ¿Qué velocidad lleva el punto acá?, podría ser esa la velocidad instantánea, la velocidad que lleva el objeto al tomarse en cierto tiempo.

[2] Prof: ¿Cómo así?

[3] Est: Por ejemplo en este punto lleva 9 segundos y según esto ha recorrido 45 cm, por lo tanto la velocidad instantánea sería: $V = \frac{45cm}{9seg} = 5\ {cm}/{seg}$ .y así para los demás puntos que yo quiera escoger.

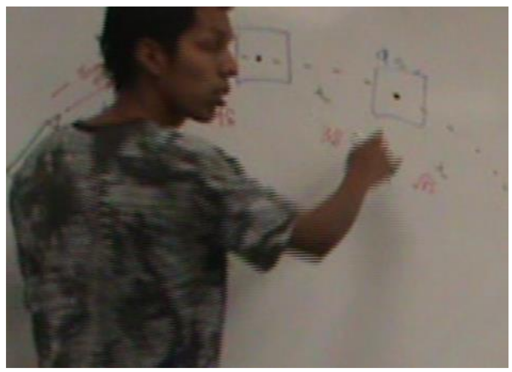


Ilustración 18. Intervención del estudiante

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Dibujo que está en el tablero [1] R_2: Tomar fotos del objeto [1]. R_3: $V = \frac{45cm}{9seg} = 5\ {cm}/{seg}$	L_1: Pictórica [1] L_2: Numérico [3]	Σ_1: Instante de la fotografía [1] Σ_2:$v = \frac{d}{t}$
Concepción: Velocidad en el Instante de la foto		

Tabla 16. Concepción de la Estrategia 3 (Taller 2, Actividad 1, punto 1.1)

Aprovechando el dibujo que está en el tablero (L_1) y que representa el lanzamiento de un lapicero (R_1), el estudiante dice que la velocidad instantánea es la velocidad que se calcula a un objeto en el tiempo que es capturado en una fotografía (R_2) y da un ejemplo para aclarar mejor su idea (R_3); calculando la velocidad media desde el comienzo del recorrido hasta donde aparece en la foto y dice que esta es la velocidad instantánea, es por ello que este estudiante comienza con un sistema de representación pictórico (L_1) y después pasa a una representación numérica dando un ejemplo particular de la situación (L_2).

Un primer control que ejerce el estudiante es creer que la velocidad instantánea es la velocidad que se le calcula al objeto en el tiempo en que es capturado en una fotografía, por lo que con un ejemplifica lo que piensa ejerciendo un nuevo control sobre su razonamiento al reemplazar valores en la fórmula $V = \frac{d}{t}$ y obteniendo un resultado.

Estrategia 4

[1] Prof: ¿Qué significa que la velocidad instantánea se defina como el ritmo o tasa de cambio de la posición por unidad de tiempo?
[2] Est: Yo digo que es la variación de la distancia sobre el tiempo [escribiendo $\mathrm{V} = \Delta\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}$ en el tablero]
[3] Prof: ¿Qué quiere decir con eso que escribió?
[4] Est: Que la velocidad es el cambio de la posición sobre el tiempo y que se escribe también de esta otra manera: $V = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$. Entonces así se hallaría la velocidad instantánea…
[5] Prof: ¿Eso es tiempo final y tiempo inicial, distancia final y distancia inicial?
[6] Est: No, Yo no me refería a la distancia inicial ni a la distancia final.
[7] Prof: Entonces…
[8] Est: Yo me refería al primer punto y al segundo punto que tomáramos como referencia. Serían distancias tomadas muy rápido en tiempos muy rápidos, dos distancias pegaditas… Por ejemplo, es cuando la policía toma la velocidad de un vehículo y ellos, creo, lo que hacen es tomar dos instantes muy chiquiticos y hallar la velocidad a la que el carro va, porque ellos no va a tomar: "aaah, salió de la casa a 20 km/h y en tal punto lleva 10 km/h pero en tal punto 90km/h, entonces si sacamos la media no se está pasando de la velocidad máxima, a bueno váyase y no tiene multa"… ¿No?
[9] Prof: ¿Entonces esta es la velocidad instantánea?
[10] Est: Sí, porque estamos tomando dos segundos… dos tiempos que sean muy mínimos.
[11] Prof: ¿Qué es que sean muy mínimos?
[12] Est: ...Segundos… como lo que le dije en el ejemplo del policía…

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: $V = \Delta\frac{x}{t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$. [2], [4] R_2: Intervalos de recorrido cortos en tiempos cortos [8] [12] R_3: Ejemplo del policía [8]	L_1: Algebraico [2], [4] L_2: Lenguaje natural [8]	Σ_1: Ejemplo [8] [12] Σ_2: Análisis de la situación [8]
Concepción: velocidad media en tiempos mínimos		

Tabla 17. Concepción de la Estrategia 4 (Taller 2, Actividad 1, punto 1.1)

En esta estrategia el estudiante piensa en tomar cualquier intervalo de la distancia recorrida lo más pequeño posible, tomadas en intervalos de tiempos cortos (R_2) y calcular lo que él llama *la velocidad instantánea* y que en realidad es la velocidad media de intervalos pequeños; no ubica su estrategia en un proceso dinámico y se queda calculando diferentes velocidades medias en estos intervalos.

Otro operador que el estudiante utiliza es la fórmula $V = \Delta\frac{x}{t}$ (R_1) que es una representación algebraica (L_1). Razona (L_2) y comunica lo que considera como la velocidad instantánea mediante un ejemplo (R_3), que a su vez también se convierte en un control (Σ_1) así como el análisis que hizo (Σ_2).

Comentarios Generales de las Estrategias 1-4

Los estudiantes analizan la situación confundiendo la velocidad instantánea con la velocidad media y esto se evidencia en la interpretación y los argumentos que construyen. No obstante, dicha interpretación es natural pues la pregunta que da origen a las estrategias dice “¿qué significa…?” dando esto confianza a los estudiantes para razonar y argumentar sobre sus interpretaciones y nociones alrededor de “variación instantánea”. Y es precisamente la palabra “instantánea” la que hace emerger el recurso de “tomar fotos en instantes”.

La diferencia más notoria entre las estrategias es el tamaño del recorrido que toman para calcular la velocidad, llegando a considerar tomar desde el *intervalo completo* hasta *intervalos de distancia “muy pequeños”*.

Cabe resaltar que las estrategias se presentaron en el mismo orden que surgieron durante la socialización y se puede ver cómo desde la interacción entre pares se acercan a la noción de velocidad instantánea, aproximándose a ella a través del cálculo de velocidades medias en intervalos cada vez más pequeños, apoyados, como se percibe, de la simulación con el lapicero propuesto por el estudiante en la primer estrategia.

Resaltamos, entonces, que la resolución del problema llevó a los estudiantes a crear un modelo de la situación y lo representaron externamente a través del lanzamiento de un lapicero, estos les permitió controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre las variables para estudiar el comportamiento entre ellas, además desde esa plataforma comunicaron su pensamiento matemático con mayor coherencia y claridad.

ACTIVIDAD 2

Una piscina de 10 metros de largo, 4 metros de ancho, 6 metros de profundidad en un extremo y 2 metros en el otro; se está llenando de agua como se observa en la siguiente gráfica.

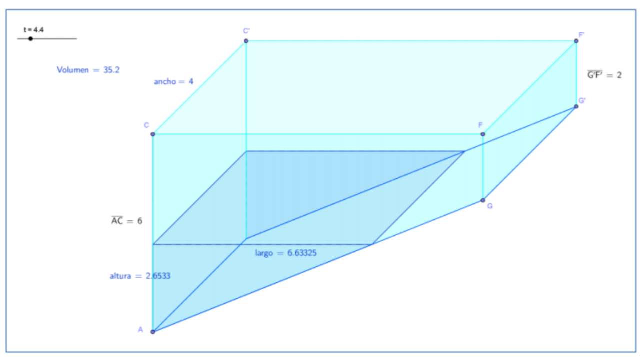


Ilustración 19. Actividad 2 del Taller “La Derivada como razón de cambio”

ESTRATEGIAS EMPLEANDO GEOGEBRA

A continuación desplegaremos las estrategias que utilizan los estudiantes para relacionar las variables de una situación que se les presenta modelada en GeoGebra.

¿Qué relación existe entre la profundidad (altura) y el largo de la piscina?
¿Esta relación se mantiene durante todo el tiempo en que dura llenándose la piscina?

Cabe mencionar que la pregunta (Actividad 2, pregunta 2.5) fue modificada por el profesor ya que las magnitudes de la piscina no varían sino varían las magnitudes relacionadas con el nivel del agua.

Estrategia 1

En esta estrategia veremos cómo el estudiante relaciona la altura (h) y el largo (l) despejándolas de la fórmula del volumen.

> [1] Prof: ¿Qué relación existe entre la profundidad (altura) y el largo del nivel del agua a medida que se llena la piscina? ¿Esta relación se mantiene durante todo el tiempo en que dura llenándose la piscina?
> [2] Est: Bueno, para los primeros 4 metros de altura, el volumen es la mitad… bueno, el volumen es $V = h \cdot a \cdot l$, pero como no es un cubo, sino medio, entonces el volumen es la mitad, $V = \frac{h \cdot a \cdot l}{2}$, despejo h y l y obtengo, $h = \frac{2V}{al}$ y $l = \frac{2V}{ah}$. (Ilustración 20).
> [3] Prof: ¿Cuál es la relación que hay entre la profundidad y largo del nivel del agua?
> [4] Est: Como se puede notar acá en esta ecuación, si cambia el largo va a cambiar la altura y en esta otra si cambia la altura va a cambiar el largo, pero hasta que la altura sea 4, de ahí para arriba ya es otra cosa.
> [5] Prof: ¿Cómo cambian?
> [6] Est: Si el largo aumenta *[habla de* $h = \frac{2V}{al}$ *]*, la altura va a disminuir pero en GeoGebra me muestra que son directamente proporcionales y acá están siendo inversamente proporcionales, ya que cuando una aumenta la otra disminuye, algo anda mal…

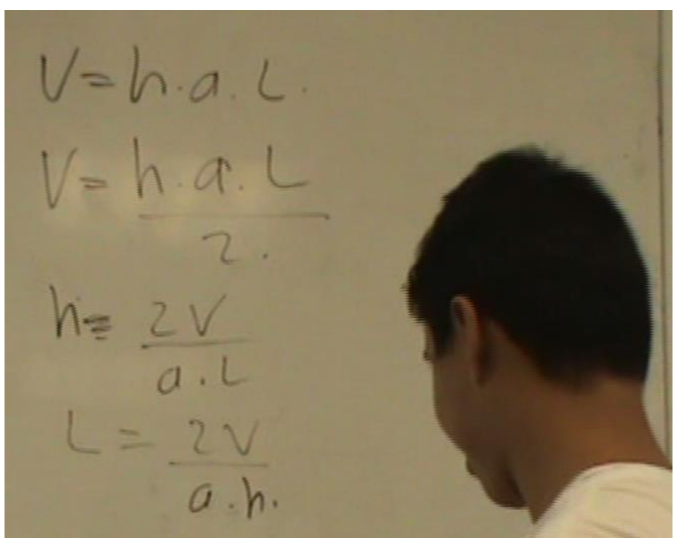


Ilustración 20. Intervención del estudiante

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1:Fórmulas [2], Ilustración 20 R_2: Si cambia el largo, cambia la altura Si cambia la altura cambia el largo [4].	L_1: Algebraico [2] L_2: Grafico [6]	Σ_1: Formula del volumen [2] Σ_2: Analítico [4] Σ_3: Datos de GeoGebra[6]
Concepción: formula del volumen de medio paralepípedo		

Tabla 18. Concepción de la Estrategia 1 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.5)

Este estudiante utiliza la fórmula del volumen del paralelepípedo (R_1) y la divide por dos (2) para obtener el volumen de la cuña (Ilustración 21) que es la parte baja de la piscina (R_2).

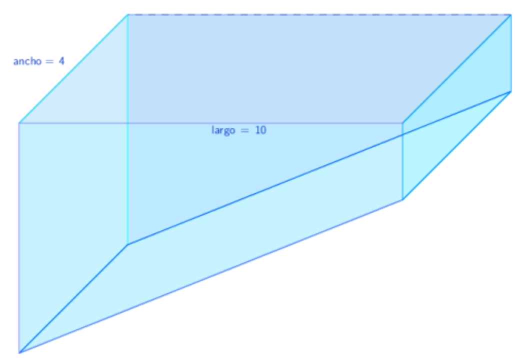


Ilustración 21. Modelo de la piscina que se presenta a los estudiantes en GeoGebra

De modo que la estrategia consiste en despejar el largo (l) y la altura (h) de la expresión que define el volumen (R_1). Despejar se convierte un control ya que consigue las fórmulas que esperaba (Σ_1), pero no se da cuenta de que la expresión le define la altura en función de tres variables y no solo la altura (h) en función del largo (l) que era lo que le pedían.

Aunque ejerce como control un análisis de covariación (Σ_2), lo hace después de tener la expresión $h = \frac{2V}{al}$ sin tomar en cuenta que hay dos variables más en la expresión (volumen y ancho). En este análisis el estudiante afirma que si el largo (l) varía en la fórmula de la altura (h), esta también varía y viceversa (Σ_2) siendo una relación pero no la que le pedían.

A partir de una pregunta del profesor, el estudiante ejerce un nuevo control: análisis de la correlación inversa entre las variables (Σ_2) pues al analizar las expresiones nota que si el largo aumenta la altura disminuye; pero eso no es lo que observa en la simulación de GeoGebra (L_2) ya que allí ambas aumentan o ambas disminuyen (Σ_3), por lo que cambiar de una representación algebraica a GeoGebra le permite ver la incongruencia de las expresiones que encuentra.

Estrategia 2

A continuación veremos que a través del análisis de la situación el estudiante logra descubrir la relación entre las dos variables involucradas.

[1] Est: Cuando la altura es mayor a 4… el largo permanece constante y es 10.
[2] Prof: ¿De 0 a 4 qué sucede?
[3] Est: Va aumentando tanto la altura como el largo, pero después es constante.
[4] Prof: Sí, ¿pero de qué manera va aumentando?
[5] Est: Directamente proporcional, sí, esa relación es proporcional…
[6] Prof: ¿Cómo puedo expresar eso?... Pase al tablero y nos muestra.
[7] Est: Yo digo que es $f(a) = 2.5(a)$ y miren en el computador que funciona, para $a = 1$ es 2.5 y para $a = 2$ es 5… Y vean para 0 es 0.
[8] Prof: ¿Cómo llegó a que esa era la relación?
[9] Est: Mirando que pasaba con los datos cuando la piscina se llenaba de agua y vi que al multiplicar por 1 y 2 por 2.5 el largo me daba 2.5 y 5 respectivamente, lo mire con otros valores y me dio, por eso la escogí.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Si $h > 4 \rightarrow l$ es constante [1] R_2: Las magnitudes son directamente proporcionales [3] R_3: $f(a) = 2.5(a)$ [7] R_4: Reemplazar en la formula [7]	L_1: Lenguaje natural L_2: Algebraico [7]	Σ_1: Analítico [9] Σ_2: Verificación y comparación numérica en la formula [7]
Concepción: Proporcionalidad directa		

Tabla 19. Concepción de la Estrategia 2 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.5)

Este estudiante percibe que el largo, después de que $h = 4$, tiene un valor constante que es 10 (R_1), por lo que se concentra en identificar lo que sucede con la altura y el largo para $h < 4$, afirmando que estas variables tiene un aumento proporcional (R_2) y así, con un análisis (Σ_1) de los datos que ve en la pantalla, determina que la relación es $f(a) = 2.5(a)$ (R_3). Para asegurarse de eso, reemplaza unos valores en esta función (R_4) y verifica con GeoGebra que sean correctos (Σ_2).

Una representación que utiliza es el lenguaje natural para describir lo que sucede con el largo después que $h > 4$, seguido de una representación algebraica que finalmente representa la relación que buscaban. Esta estrategia es acertada ya que llega a la solución del problema, por lo que podemos darnos cuenta que parte del éxito radica en la exploración visual y análisis de los datos en GeoGebra para llegar a una solución sobre la cual ejerce un control de evaluación y comparación de lo realizado (Σ_2).

Estrategia 3

[1] Est: Yo hice esa misma relación, pero es porque hay semejanza.
[2] Prof: ¿Cómo así?, muéstrenos que hizo.
[3] Est: Pues viendo la piscina me puedo dar cuenta que estos triángulos son semejantes *[dibujando en el tablero lo que ve en la pantalla, ver Ilustración 22]*.
[4] Prof: ¿Por qué son semejantes?
[5] Est: Porque ahí lo podemos ver, así lo hice yo. No sé si me quedó mal… entonces, 4 es a 10 como 2 es a 5, perdón, como a es a l *[escribiendo en el tablero $\frac{4}{10} = \frac{h}{l}$]*.
[6] Prof: ¿Pero qué es a y l?
[7] Est: Pues como el compañero dijo, la altura y el largo varían, entonces yo les llamo a y l.
[8] Prof: ¿Y cómo obtuvo la relación?, porque usted dijo que había hecho la misma.

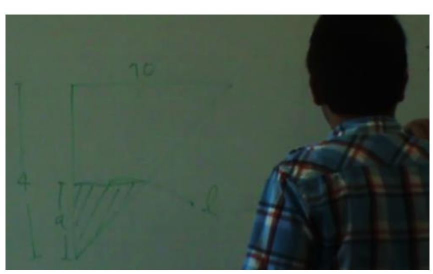


Ilustración 22. Gráfica del estudiante de los triángulos semejantes

[9] Est: Bueno, como son semejantes yo encontré esta relación $\frac{4}{10} = \frac{h}{l}$ y ahora despejo l *[escribiendo en el tablero $l = \frac{10h}{4}$]* y vean que este va a ser 2.5 *[señalando la fracción].* Pero esto hasta que la altura sea 4 y cuando la altura es mayor que 4, el largo va a ser igual a 10.
[10] Prof: Bueno y para terminar con esto y reuniendo lo que han hecho los dos que pasaron, la expresión se escribe así (ver Ilustración 23).

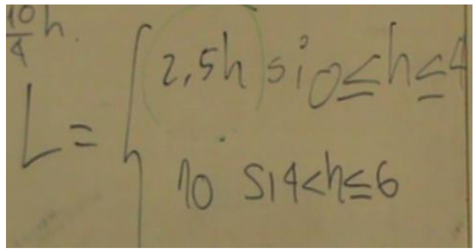


Ilustración 23. Función que relaciona la altura y el largo del nivel del agua de la piscina

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: Triángulos semejantes (Ilustración 232) [1], [3] R_2: $\frac{4}{10} = \frac{h}{l}$ [5] R_3: $l = \frac{10h}{4}$. [9] R_4: La altura (h) y el largo (l) son variables [7]	L_1: Geométrico [1], [3] L_2: Algebraico [5], [9]	Σ_1: GeoGebra [3] Σ_2: Fórmula [9] Σ_3: Teórico [5], [9]
Concepción: Semejanza de triángulos		

Tabla 20. Concepción de la Estrategia 3 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.5)

La actividad matemática de este estudiante se moviliza a través de dos representaciones que le permiten llegar a la solución del problema. Este es el único estudiante que encuentra de esta manera la expresión, aunque no justifica la semejanza de triángulos (R_1), utiliza la proporcionalidad de los lados (R_2) y manipula la expresión para despejar (R_3) y encontrar el largo en función de la altura.

La primera representación que utiliza el estudiante es geométrica (L_1) ya que con un análisis a la modelación (Σ_1) percibe que hay triángulos semejantes involucrados por lo que los utiliza para plantear la expresión que relaciona las variables l y h (R_4). Con esto pasa a una representación algebraica (L_2) desde la cual despeja para obtener el largo

(l) en función de altura (h). Este proceso algebraico se convierte en otro control de sus razonamientos, que junto con la noción de semejanza de triángulos logra llegar a la respuesta correcta.

Estrategia 4

La estrategia del estudiante consiste en dividir un valor del largo por su valor respectivo en la altura.

[1] Inv: ¿Qué relación existe entre la profundidad *[altura]* y el largo del nivel del agua a medida que se llena la piscina?
[2] Est: Pues la división entre dos de ellos es de 2.5, entonces $l = 2.5a$
[3] Inv: ¿Cómo llegaron a esa expresión?
[4] Est: Yo, tomé el dato del largo que sería 3.16 lo dividí en 1.26 y el resultado es 2.5, entonces ese 2.5 lo multiplicamos por la altura, que le podemos estar dando valores de 1, entonces sería 2.5 de largo y si miramos, colocando la altura en 1, sería… espere lo ubicamos en 1 *[*(Ilustración 24) *verifica con GeoGebra que sí da esos valores]*… y el largo es 2.5. Entonces si multiplicamos 2.5, dándole a la altura 2 sería 5… entonces si ubicamos la altura en 2 el largo va a ser 5 y lo podemos comprobar nuevamente con la gráfica. Eso lo hice para otros valores y como para varios funcionó, esa es la expresión.

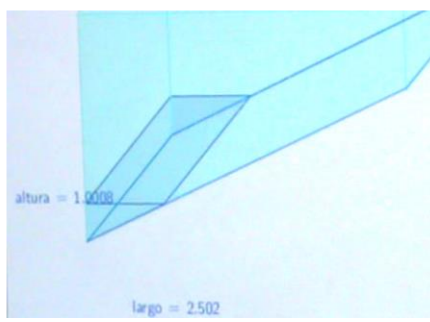


Ilustración 24. Representación de la Estrategia 4

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: La división entre dos datos es 2.5 [2] R_2: $3.16 \div 1.26 = 2.5$ [4] R_3: $l = 2.5a$ [2],	L_1:Numérico [2] [4] L_2: Algebraico [2]	Σ_1: GeoGebra Σ_2: Numérico: la razón entre dos datos es 2.5 [4]
Concepción: La razón entre dos datos es 2.5		

Tabla 21. Concepción de la Estrategia 4 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.5)

El estudiante dice que el cociente entre dos valores siempre es 2.5 (R_1) con un ejemplo particular: toma dos valores correspondientes al largo (l) y a la altura (h), los divide, obteniendo 2.5 como respuesta (R_2) y asegura que la relación entre las dos variables es $l = 2.5a$ (R_3).

Después calcula algunos valores para el largo, tomando valores de la altura y multiplicándolos por 2.5, el resultado que obtiene lo verifica en el *software* para ver si coinciden (Σ_1) por lo que comprueba que la relación que encontró es verdadera. El sistema de representación es numérico y algebraico ya que tanto los operados como el control se ejecutan manipulando los valores obtenidos y comparándolos con los de la simulación para corroborar si están bien.

Comentarios Generales de las Estrategias 1-4

En las estrategias 2, 3 y 4 los estudiantes tienen una forma dinámica de pensar ya que intentan establecer las relaciones existentes entre las variables involucradas en la situación problema. Contrario a lo que pasó en la estrategia 1, donde el estudiante manipula las expresiones sin analizar ni verificar lo que hace.

En las estrategias 2 y 4 en las cuales la actividad matemática se limitó a utilizar controles numéricos y la percepción para verificar que sus expresiones estaban correctas; en la estrategia 3 no aparece esta necesidad ya que el estudiante argumenta su respuesta desde un proceso geométrico y plantea una ecuación por lo que no intenta nada más para validar su razonamiento.

A continuación mostraremos las estrategias que surgieron ante la siguiente actividad propuesta en el taller (Actividad 2, punto 2.9).

Expresar el volumen (V) en función de la altura (a) para $0 \leq a \leq 6$

Estrategia 1

[1] Prof: ¿Cómo puede hallar y expresar el volumen (V) en función de la altura (a) para $0 \leq a \leq 6$?
[2] Est: Pues es el volumen de una caja más el volumen de media caja.
[3] Prof: ¿Cómo así? Explíquenos mejor.
[4] Est: Es que la parte de abajo la podemos ver como medio rectángulo.
[5] Prof: ¿Medio rectángulo?
[6] Est: *[El estudiante realiza un dibujo de la parte baja de la piscina]* Bueno medio caja, pero a partir de la altura 4 para arriba, la podemos ver como una caja completa, entonces hallamos el volumen hasta 4 y después de 4 para arriba hasta 6…(Ilustración 25)

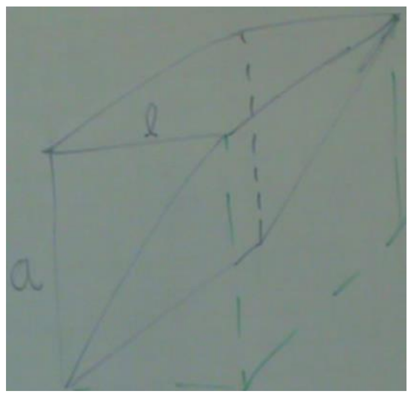


Ilustración 25. Representación de la parte baja de la piscina

[7] Prof: ¿Pero cómo lo halló?
[8] Est: Yo tengo que la forma para hallar el volumen de un cubo, bueno este no es un cubo… de esta caja que es multiplicar alto por largo y por profundidad *[escribiendo en el tablero $V = alp$]* y como es media caja, la divido por dos o multiplicado por $\frac{1}{2}$, para esta de abajo. Bueno reemplazamos p ya que la única que es constantes y nos queda: $V = \frac{1}{2}(al4)$
[9] Prof: ¿Pero qué es l?, recuerde que habíamos concluido que l estaba relacionada con a.
[10] Est: Ah sí; como lo digo el compañero $l = \frac{5}{2}a$, entonces reemplazo y quedaría $V = \frac{1}{2}\left(a \cdot \frac{5}{2}a \cdot 4\right)$, que es $5a^2$.
[11] Prof: ¿Eso sí es cierto?
[12] Est: Vea, usted elimina este, este con este y le queda $a \cdot 5a$. *[señalando en el tablero lo que está eliminando (Ilustración 26)]*

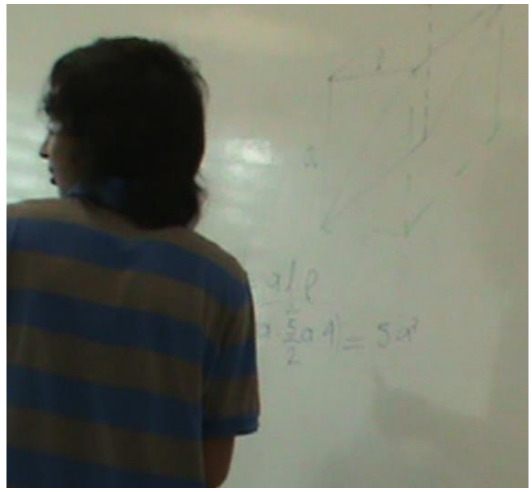


Ilustración 26. Proceso del estudiante, Estrategia 5

[13] Prof: ¿Cómo sé que la fórmula está bien?
[14] Est: Sí, eso se ve aquí en la pantalla mire, mire… Cuanto $a = 0$ el volumen es 0, cuando $a = 1$ el volumen da 5, cuando $a = 2$ el volumen es 20.
[15] Prof: Bueno, aparentemente esa es la expresión, pero recuerden que esta es para $0 < a < 4$ y la otra.
[16] Est: Bueno, esa es más fácil da $40a$, porque el largo y la profundidad se vuelven constantes, como ya lo habíamos aclarado y además la fórmula es largo por alto por profundidad, bueno por ancho, porque ya es la caja completa.
[17] Prof: ¿Cuánto es el volumen de la piscina si la altura es 5?
[18] Est: … 200...
[19] Prof: ¿Seguro?
[20] Est: Sí, reemplace en la fórmula y verá.
[21] Prof: ¿Y si mira en GeoGebra, ese es el volumen?
[22] Est: … No, da diferente…bueno, entonces no sé cómo sería.

OPERADORES	**SISTEMA DE REPRESENTACIÓN**	**ESTRUCTURA DE CONTROL**
R_1: El volumen de la piscina es el volumen de una caja más media caja [2] R_2: $V = alp$ [8] R_3: $V = \frac{1}{2}(a \cdot l \cdot 4)$ [8] [1] R_4: $l = \frac{5}{2}a, \quad \Rightarrow V = \frac{1}{2}\left(a \cdot \frac{5}{2}a \cdot 4\right) = 5a^2$. R_5: Señalar y ver la pantalla [14] R_6: $V = 40a, \quad 4 < a < 6$	L_1: Leguaje natural [2] [4] L_2: Algebraico [8] [10] [12]	Σ_1: Procedimiento algorítmico [8], [10], [16] Σ_2: Verificación numérica en la formula [14] Σ_3: Analítico [16] a [22]
Concepción: Fórmula del volumen de una caja		

Tabla 22. Concepción de la Estrategia 1 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.9)

El estudiante identifica que la piscina se compone de dos secciones, cuando $0 < a < 4$ es medio paralelepípedo (cuña) y cuando $4 < a < 6$ es un sólido completo, por lo que encuentra las dos expresiones del volumen correspondientes a cada sección utilizando la fórmula $V = alp$ (R_2) y propone sumarlas para hallar el volumen total (R_1).

De modo que cuando $0 < a < 4$ el estudiante relaciona el volumen con la altura, reemplazando en la fórmula del volumen el valor del ancho que siempre es constante, y el valor del largo, que ya está determinado en función de la altura y dividiendo por dos (R_2 y R_3). Para estar más seguro de la expresión, ejerce un control de verificación numérica que consiste en reemplazar la fórmula por ciertos valores y confirmar (R_5) los resultados que está obteniendo y observando si coinciden con la modelación (Σ_2). Manipular las expresiones (L_1) para reemplazar y despejar variables (R_3) con el fin de obtener el volumen en función de la altura es otro control que le permite al estudiante corroborar lo que está haciendo (Σ_1).

Cuando $4 < a < 6$, la expresión que encuentra el estudiante no es correcta (R_6), por lo que el profesor interviene preguntándole por el valor del volumen si la altura es 5, a lo que él responde que 200, pero cuando mira en GeoGebra se da cuenta que este no es valor (Σ_3), por lo que el estudiante detecta el error con la intervención del profesor y la exploración en GeoGebra.

Estrategia 2

Aprovechando lo que se hizo en la estrategia anterior este estudiante plantea una estrategia para concluir el problema.

> [1] Prof: ¿Cómo se expresar el volumen (V) en función de la altura (a) para $0 \leq a \leq 6$?
> [2] Est: ¿Hasta acá cuánta agua hay?... es $5a^2$ la formula, entonces sería… 80.
> [3] Prof: ¿Para qué quiere saber la cantidad de agua que hay hasta ahí?
> [4] Est: Pues sería la cantidad de agua que hay está acá con el agua de la parte de arriba, pues… como son diferentes sería la suma *[Refiriéndose a la forma de la*

piscina y señalando que el volumen, cuando la altura es mayor de 4, se debe hacer sumando el volumen de la cuña y el volumen del agua que haya en el paralelepípedo].
[5] Prof: ¿Cómo sería esa suma?
[6] Est: Bueno, cuando la altura es 4, el volumen del agua es 80… Debemos sumarle la que está aquí…Entonces la altura sería $h - 4$, o sea, sería la altura de la caja de arriba. Ahora con la fórmula que dijimos antes, el volumen es igual al largo por la altura por el ancho y reemplazamos *[escribiendo todo el procedimiento en el tablero (*Ilustración 27*)]*.

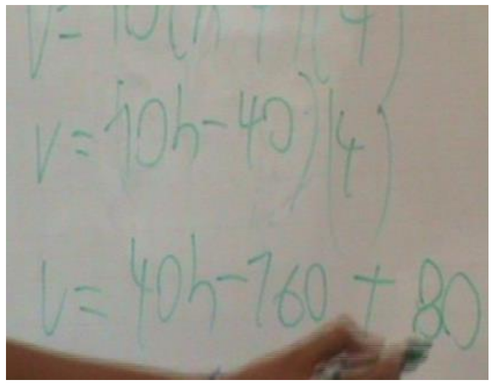


Ilustración 27. Sistema de representación, Estrategia 6, pregunta 2.9

[7] Cuando tenemos está formula le sumamos 80, quedando $V = 40h - 160 + 80$ y por último $V = 40h - 80$.

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: $Sí\ h = 4\ entonces\ V = 80$ [2] [6] R_2: Altura= $h - 4$ [6] R_3: Procedimiento [6], (Ilustración 27) $V = l \cdot h \cdot a$] $V = 10(h-4)(4)$ $V = (10h - 40)(4)$ $V = 40h - 160$ $V = 40h - 160 + 80$	L_1:Algebraico	Σ_1: Procedimiento algorítmico
Concepción: Fórmula del volumen		

Tabla 23. Concepción de la Estrategia 2 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.9)

En esta intervención la estrategia del estudiante se representa algebraicamente (L_1) y consiste en utilizar la fórmula del volumen y hallar la relación que me piden (R_3) para relacionar el volumen con la altura.

Este estudiante advierte que para hallar el volumen, cuando la altura del agua pasa los cuatro (4) metros, se llevan 80, por lo que encuentra la relación del volumen y la altura del agua para $h > 4$, tomando la altura de esta sección de la piscina como $h - 4$, y a la expresión que obtenga sumarle (R_2) los 80 (Ilustración 27)

En estos momentos de la actividad, el procedimiento que realiza el estudiante para hallar la relación entre las variables es acertado por lo que el control que ejerce es hacer adecuadamente los reemplazos en las fórmulas para obtener las relaciones que le piden.

Estrategia 3

> [1] Inv: ¿Cómo expresaron el volumen (V) en función de la altura (h) para $0 \leq h \leq 6$?
> [2] Est: Primero sabíamos que el volumen de la cajita que está arriba es $V = la(h-4)$, esos 4 son los de acá *[señalando la altura que tiene la cuña (Ilustración 28)]* y entonces el volumen del triángulo que está aquí abajo es igual a la altura por el ancho por el largo sobre 2, *[señalando es su hoja de trabajo la cuña, aunque él le llama el triángulo, y donde tiene escrito la expresión: $V = \frac{hal}{2}$]* , entonces estamos haciendo una igualdad para despejar términos en función de la altura.
> [3] Inv: ¿Una igualdad entre cuáles expresiones?
> [4] Est1: Entre las formula del volumen y la cajita de arriba y la media caja de abajo y lo hacemos para poder despejar h.
> [5] Inv: ¿Por qué igualan esas dos expresiones?
> [6] Est1: Porque supongo que son iguales, solo que tiene diferente forma. *[Queriendo decir que el paralelepípedo y la cuña tiene igual capacidad].*

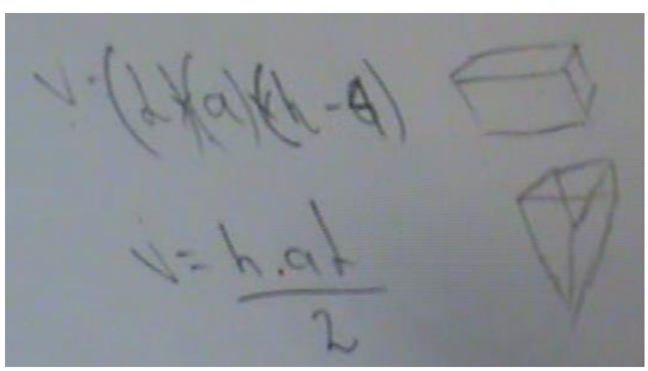


Ilustración 28. Sistema de representación, Estrategia 2, pregunta 2.9

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1: $V = la(h-4)$, $V = \frac{hal}{2}$ (Ilustración 28) [2] [4] R_2: $\frac{hal}{2} = la(h-4)$ [2] [4] [6]	L_1: Algebraico L_2: Geométrico	Σ_1: Perceptiva
Concepción: Igualdad de expresiones		

Tabla 24. Concepción de la Estrategia 3 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.9)

Esta estrategia consiste en tomar las expresiones del volumen correspondiente a la cuña y al paralelepípedo que conforman la piscina (R_1) e igualarlas y despejar la altura (h). Vemos que el interés de los estudiantes es encontrar una relación entre las variables involucradas (L_1), por lo que asumen que las dos expresiones son iguales (Σ_1) e intentan despejar la altura (h).

Ellos se encuentran trabajando en plano perceptivo y están enfocados en la gráfica de la piscina, por lo que determinan que los volúmenes son iguales (L_1), así que no dudan al plantear la igualdad entre las expresiones algebraicas, aunque estas no tienen que ver con la situación problema ya que no relaciona el volumen con la altura si no que relaciona la altura con el largo, sin contar que partieron de una suposición falsa planteando esa igualdad.

Estrategia 4

[1] Prof: ¿Cómo expresaron el volumen en función de la altura para $0 \leq a \leq 6$?
[2] Est: Estamos en eso, vemos que el volumen cuando la altura es 1 que es 5, cuando la altura 2 es 20, cuando la altura es 3 es 45, cuando es 4 da 80 y cuando es 5 da 120 y cuando es 6 da 160 *[esto lo escriben como se ve en: (Ilustración 29)]* y aumenta en un modo no constante, el volumen de una altura a la otra. Mire que en un principio aumenta 15, luego 25, luego 35 y después aumenta 40 y 40. No tiene un aumenta constante, o sea la razón de cambio no es constante.
[3] Prof: ¿Ese es el comportamiento del volumen para $0 \leq a \leq 6$?
[4] Est1: No, mire cuando la altura llega a 4 *[mostrando la modelación en GeoGebra*], el largo de ahí para arriba es constante, a sea el largo llega a su máxima medida, y el volumen va aumentando de 40 en 40 *[señalando su hoja de trabajo (Ilustración 29)]*

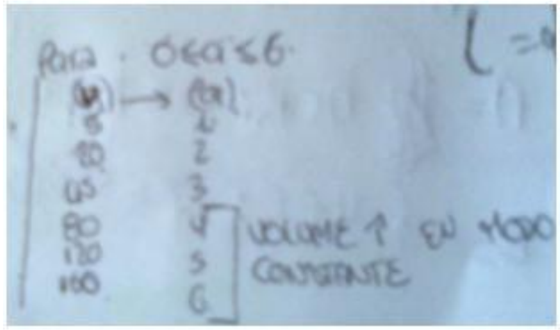


Ilustración 29. Apuntes del estudiante

<table>
<tr><th>OPERADORES</th><th>SISTEMA DE REPRESENTACIÓN</th><th>ESTRUCTURA DE CONTROL</th></tr>
<tr><td>R_1 : [2]
<table>
<tr><td>Para</td><td>$0 < a < 6$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td></tr>
<tr><td>4</td><td>80</td></tr>
<tr><td>5</td><td>120</td></tr>
<tr><td>6</td><td>160</td></tr>
</table>
R_2: Esquena: Ilustración 29</td><td>L_1: Numérico</td><td>Σ_1: Analítico</td></tr>
<tr><td colspan="3">Concepción: Relación</td></tr>
</table>

Tabla 25. Concepción de la Estrategia 4 (Taller 2, Actividad 2, punto 2.9)

Esta estrategia no permite a los estudiantes avanzar ya que están interesadas en ver si el aumento del volumen durante todo el tiempo es constante o no *(R_1)* para definir una relación proporcional como lo han hecho antes con el largo y ancho. Pero se dan cuenta que de *h = 4* en adelante siempre aumenta en 40, pero antes de 4 el aumento no era constante, por lo que no saben qué más hacer y abandonan la estrategia.

En la exploración que realizan sobre la situación se quedan describiendo lo que sucede con el aumento del volumen y no intentan cambiar de representación para hallar si tienen mejores oportunidades como, por ejemplo, pasar a un plano algebraico que las lleven a definir las relaciones correctamente manteniendo la covariación entre las magnitudes involucradas.

Comentarios Generales de las Estrategias 1 y 2

Para finalizar el análisis de las actividades, se puede precisar que en las estrategias 1 y 2, la actividad matemática se moviliza por un proceso algebraico en el cual los estudiantes manejan y hacen un análisis de la covariación de las magnitudes involucradas y no solo se limita a manipular las expresiones, por lo que llegan a la solución de la situación.

Contrario a lo que pasó en las estrategias 3 y 4 en las cuales los estudiantes dan soluciones erradas o no llegan a plantear ninguna solución; esto sucedió porque los estudiantes movilizaron su pensamiento matemático con una sola representación por lo que la estrategia se agota en ello y la abandonan.

CONCLUSIONES

Al responder al objetivo de investigación "identificar las estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de pre-cálculo" pudimos, en primera instancia, constatar que en el curso de pre-cálculo se considera el proceso de enseñanza y aprendizaje como una actividad constructiva donde el estudiante, bajo un enfoque de resolución de problemas, construye su propia representación mental de la noción que se espera estudiar en cada actividad, selecciona la información que considera relevante y la interpreta en función de las concepciones con lo que aplica una estrategia que lo lleva o no a la posible solución al problema.

Al utilizar el modelo ckc para analizar las estrategias, se percibe que las concepciones y las habilidades de los estudiantes son fundamentales en la resolución de problemas. Por eso nos disponemos a exponer los resultados obtenidos con este trabajo:

- A través del análisis de esta investigación se corroboró que las estrategias que los estudiantes emplean en la resolución de problemas está influenciada por la veracidad de las concepciones que poseen. En las estrategias halladas se observó que hubo algunas que permitieron la solución acertada del problema y otras que no, esto nos lleva a concluir que es importante la validez, coherencia y eficacia de la concepción. Si los estudiantes tienen concepciones erradas y no son conocimientos matemáticos, no son capaces de resolver el problema.

- Gracias a la interacción entre pares, estudiante-profesor, estudiante-investigador fue posible identificar las estrategias de los estudiantes. Esto resalta, como lo han señalado diversos investigadores entre ellos Guzmán (2004), lo esencial de un aula participativa en la cual se construya el pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas.

- El identificar los sistemas de representación empleados en las estrategias, a través del modelo ckc, permiten afirmar que dichas representaciones juegan un papel importante ya que le facilita a los estudiantes comprender y resolver los problemas, proporcionándoles modos útiles de registrar la estrategia y de escribirla a los demás.

  De modo que las representaciones identificadas a través de esta investigación les permitirán a los profesores del curso de pre cálculo y en general a cualquier profesor, aproximarse a las formas de interpretación y razonamiento de los estudiantes al momento en que movilizan su actividad matemática para solucionar problemas.

  Además, cabe resaltar la importancia de pasar de una representación a otra como como control para lo que se está haciendo. Así como GeoGebra permite al estudiante movilizarse de una representación a otra, por lo tanto los estudiantes que aprovecharon esta cualidad del programa, lograban mejores resultados en sus procedimientos y los que se quedaban con una solo representación ya sea con el uso del software o no, llegaba a “callejones sin salida” por lo que abandonaban la estrategia o buscaban formas de concluir sus ideas abandonando el razonamiento inicial. Por tal razón, es necesario propiciar en el aula de clase actividades matemáticas que lleven a los estudiantes a realizar las conexiones entre estas.

- Resolver problemas como los presentados en estas actividades requieren de un análisis adecuado de *patrones y regularidades* pero en este análisis podemos notar que fueron pocos los estudiantes que mostraron dominio de este eje temático ya que se les dificultó reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, entre otros).

También se desprenden del estudio de las estrategias dificultades alrededor de los *procesos algebraicos*, más exactamente en actividades matemáticas que implican analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de las funciones.

- Como resultado adicional de esta investigación señalamos que, dada la metodología de curso de pre-cálculo que está enmarcada en el enfoque de resolución de problemas, los estudiantes diseñaron estrategias y pusieron en marcha las concepciones que permitieron fortalecer nociones del pensamiento variacional ya que en los talleres las preguntas trazadas en cada situación fueron detonantes. Por ende, resaltamos el papel del profesor en esta metodología ya que es de gran importancia, pues rompe el esquema tradicional del profesor expositor dando lugar a un profesor que orienta a sus estudiantes en la construcción del conocimiento.

Para finalizar este trabajo y dado acompañamiento que se realizó durante las sesiones del curso de pre-cálculo, observamos que las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas no se deben solo a la falta de conocimientos matemáticos, sino a un uso ineficaz de lo que saben pues, como afirma el NCTM (2003, p. 58), “los buenos resolutores de problemas llegan a ser conscientes de lo que están haciendo y comprueban con frecuencia sus progresos, se autoevalúan, a medida que enfocan y resuelven los problemas. Tales capacidades reflexivas (llamadas metacognitivas) es más probable que se desarrollen en un ambiente de clase que las apoye”.

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En GÓMEZ, Pedro. (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano. 1995.

ARTIGUE, Michèle. ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 [Online] Venezuela, 2003. Disponible en: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf

BARROS, Angélica. Estrategias de aprendizaje en Matemáticas que emplean los estudiantes universitarios. En: *Revista Scientia et Tchnica*. Vol. 2 No. 34. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia, 2007. Disponible en http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/5675

BALACHEFF, Nicolas. Marco, registro y concepción. En: Revista Ema, Vol. 9, No. 2005, pp. 181-204. 2005. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf

BOTELLO, Carolina. Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander, 2013.

DE GUZMÁN, Miguel. Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. España, 1994. Disponible en: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#3.5.

DOLORES, Crisólogo. La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En: Revista Academia. Volumen 2 No. 20, Universidad Autónoma de Sinaloa. pp. 9-17. Mexico, 2000.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS. *Curso de précalculo*. Universidad Industrial de Santander, 2012. Recuperado el 12 de febrero de 2014. Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/precalculo

FIALLO, Jorge y PARADA, Sandra, (en edición). Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variaciona. Revista cientifica. Universidad Distrital, bogotá, Colombia.

GODINO, Juan, BATANERO, Carmen, y Font, Vicenç. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, 2003. Recuperado el 13 de diciembre de 2013, Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

ÍMAZ, Carlos y MORENO, Luis. La Génesis y la enseñanza del cálculo. Mexico D. F.: Trillas. 2010

MORENO, María del Mar. El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. 81-96. 2005.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Autor, 1998.

MEN. Pensamiento Variacional y Tegnologías Computacionales. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda. 2004.

MEN. Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor. 2006.

MONEREO, Carles. Estrategias de Aprendizaje. En: *Revista Letras de Deusto*. No. 91. Vol.31. Abril-Junio. Bilbao (España). Universidad de Deusto,2001.

NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

PARADA, Sandra. Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia: UIS. 2012.

SALINAS, Patricia y ALANÍS, Juan. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa, 2009. En: *Relime*. Vol. 12 (3), Noviembre de 2009. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf

SANTOS-TRIGO, Luz Manuel. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica, 2008. Recuperado el 3 de diciembre de 2013, disponible en: http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

SANTIBÁÑEZ, Roberto. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato. Chilpancingo: Universidad Autónoma de Guerrero., 2001.

SIGARRETA Y LABORDE (s.f.). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. *Sociedad Argentina de Educación Matemática*. Recuperado el 10 de marzo de 2014, disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf

VASCO, Carlos. El pensamiento variacional y la modelación matemática, 2008. Recuperado el 13 de diciembre de 2013, Disponible en: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*. No. *3,* pp. 9-25. 2012.

ANEXOS

ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

SITUACIÓN 1

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?

2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?

3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.

4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

Socializa con tus compañeros y el profesor tus respuestas a las anteriores preguntas. **¿Qué concluyes al respecto? (escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo).**

Abre el archivo Datos Toyota Corolla.ggb y sigue las instrucciones del docente.

5. Construye la recta considerada en la socialización anterior.

6. Realiza el análisis de regresión de dos variables con la ayuda de GeoGebra.

7. Compara la recta que construiste en el punto 5 y la función de ajuste producida por GeoGebra. ¿Cuál función permite hacer una mejor estimación para responder a la pregunta 1 y 2?

8. A partir de los resultados anteriores, responde nuevamente las preguntas 1 y 2.

9. Compara tus respuestas con las obtenidas inicialmente.

Socializa con tus compañeros y el profesor las soluciones a las anteriores preguntas. **¿Qué concluyes al respecto? (escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo).**

SITUACIÓN 2

En un laboratorio de fisica, se realizó un experimento que consistió en lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba. En la siguiente tabla se muestran las alturas registradas en diferentes momentos.

Tabla 2: Lanzamiento de un proyectil

Tiempos (S)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura(Cm)	48.3	79.5	107.4	120.8	127.7	124.9	113.5	84.5	55.5	10.7

Usando GeoGebra responde las siguientes preguntas

Abre el archivo Datos-Laboratorio.ggb

1. Grafica los datos presentados en la hoja de cálculo correspondientes a la tabla 2.

2. Explora con cada una de las opciones de regresión y escoge el modelo que mejor se ajusta para representar la situación. Explica tu elección.

Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la exploración realizada.

3. ¿Cuál fue el alcance máximo del proyectil?

4. ¿Cuánto tiempo demoró el proyectil en el aire?

Socializa con tus compañeros y el profesor las soluciones a las anteriores preguntas. **¿Qué concluyes al respecto? (escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo).**

SITUACIÓN 3

En las Tablas 3 y 4 se presentan datos de la cantidad de población mundial existente en algunos años del siglo XX y XXI

Tabla 3: Población mundial expresada en millones. Parte 1

No. Dato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1955	1960	1965	1970
Pob.	1650	1750	1860	2070	2300	2518	2755	2982	3334	3692

Tabla 4: Población mundial expresada en millones. Parte 2

No. Dato	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Año	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2008	2010	2011
Pob.	4068	4434	4830	5263	5674	6070	6453	6709	6854	7000

Usando GeoGebra responde las siguientes preguntas

Abre el archivo Población-Mundial.ggb

1. Representa gráficamente los datos presentados en las Tablas 3 y 4 en la hoja de cálculo correspondientes.
2. Explora con cada una de las opciones de regresión y escoja el modelo que mejor se ajusta. Explica tu elección.

Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la exploración realizada.

1. ¿Qué relación existe entre las variables p (población) y t (tiempo)?
2. ¿Cuál será la población en el año 2015?
3. ¿Cuál será la población en el año 2050?

Anexo B. Taller "Derivada como razón de cambio"

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Actividad 1

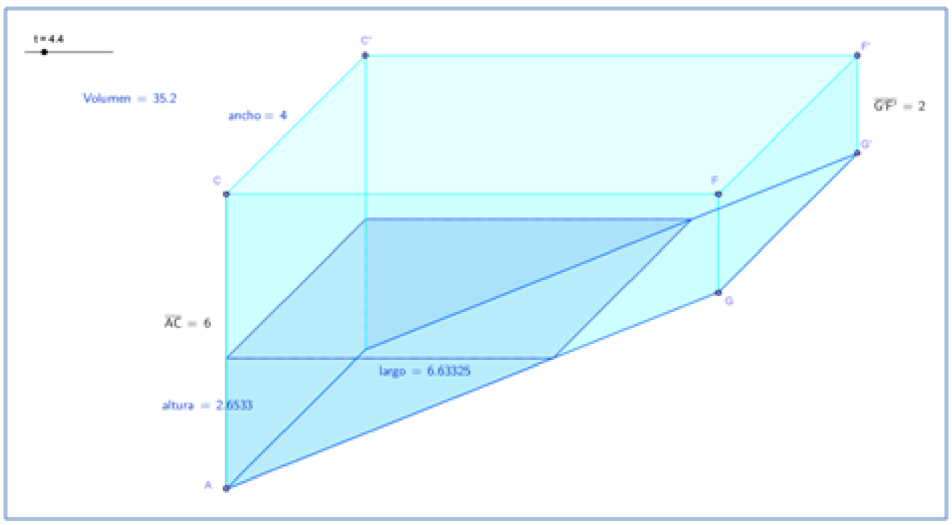
1.1 ¿Qué significa que la velocidad instantánea se defina como el ritmo o tasa de cambio de la posición por unidad de tiempo?

1.2 ¿Por qué $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$?

1.3 Discute con tus compañeros y el profesor las soluciones de los anteriores problemas.

Actividad 2

Una piscina de 10 metros de largo, 4 metros de ancho, 6 metros de profundidad en un extremo y 2 metros en el otro; se está llenando de agua como se observa en la siguiente gráfica.



Gráfica 1: Piscina

Abre el archivo "piscina" y responde las siguientes preguntas.

2.1 Anima el tiempo t hasta un valor de 20, empezando en 0 y describe lo que observas (supongamos que cada unidad de tiempo está en minutos).

2.2 ¿Cuáles son las magnitudes variables en el problema? ¿Estas magnitudes siempre varían hasta llenarse la piscina?

2.3 Realiza una tabla determinando el valor de la altura, el largo y el volumen cuando el tiempo (t) es igual a: 1min., 5min., 9min., 12min., 15min.

2.4 Abre la hoja de cálculo y registra los datos del tiempo, altura, largo y volumen en las columnas A, B, C y D respectivamente para $5 \leq t < 15$.

2.5 ¿Qué relación existe entre la profundidad (altura) y el largo de la piscina? ¿Esta relación se mantiene durante todo el tiempo en que dura llenándose la piscina?

2.6 ¿Cuál es el valor de la altura, largo y volumen cuando t = 2.5, 7, 10, 15, 20 minutos?

2.7 ¿Qué sucede con el largo y el volumen cuando $t \geq 10$?, ¿Cómo interpretas este hecho?

2.8 Expresa algebraicamente el largo en función de la altura antes de 10 minutos.

2.9 Expresa el volumen (v) en función de la altura (a) para $0 \leq a \leq 6$.

2.10 Discute con tus compañeros y el profesor las soluciones de los anteriores problemas.

Actividad 3

3.1 Analiza la *variación* de la profundidad con respecto al tiempo y describe lo que observas.

3.2 Realiza los siguientes cálculos para los intervalos de tiempo dados:

Intervalo de tiempo Δt	Δa	$\frac{\Delta a}{\Delta t}$
(4.95 , 5)		
(4.96 , 5)		
(4.97 , 5)		
(4.98 , 5)		
(4.99 , 5)		
(5 , 5.05)		
(5 , 5.04)		
(5 , 5.03)		
(5 , 5.02)		
(5 , 5.01)		

3.3 ¿Aproximadamente cuál es la razón de cambio de la altura con respecto al tiempo alrededor de 5 minutos?

3.4 Para ser más exactos, tomemos más datos alrededor de t=5 de la siguiente manera:

3.4.1 En la hoja de cálculo borra los datos tomados anteriormente.

3.4.2 Cambia el tiempo a 4.99 (ubícate en t y utiliza las flechas del teclado).

3.4.3 Registra en la hoja de cálculo los datos del punto *V* (tiempo, volumen), de la vista algebraica y los datos de la *altura* de la vista gráfica.

3.4.4 Anima *con la flecha derecha* del teclado el deslizador t (tiempo), hasta 5.01 ($\Delta t = 0.001$)

3.5 Halla la razón de cambio entre la profundidad (altura) y el tiempo $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1}$, para $\Delta t = 0.001$ de la siguiente manera:

3.5.1 En la columna D, ubícate en la celda D2 y escribe =(C3-C2)/0.001. Arrastra la fórmula hasta t=5.01. ¿Qué significan los valores encontrado en la columna D? ¿El valor obtenido es igual al obtenido en 3.3?

3.5.2 ¿Cuál es la razón de cambio de la profundidad con respecto al tiempo alrededor de $t = 5$? ¿Es igual para cualquier otro tiempo t? ¿Qué pasa cuando Δt se hace más pequeño? **Explica tus respuestas.**

3.6 Discute con tus compañeros y el profesor la solución del anterior problema.

Actividad 4

4.1 Repite el procedimiento anterior, desde el inciso 3.4.2, para hallar la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo, cuando t=5 ¿Cuál es la razón de cambio entre el volumen y el tiempo para t=5? ¿Es igual para cualquier otro tiempo t? ¿Qué pasa cuando Δt se hace más pequeño? **Explica tus respuestas.**