

**Proceso comunicativo en estudiantes de séptimo grado: una aproximación desde el estudio
de razón y proporción**

Dumar Said Dubeibe Marin

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias: Especialidad Matemática Educativa



Universidad Industrial De Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

A la mayor motivación de mi vida:

Siad Isabella

Agradecimientos

A mis progenitores, gracias por la vida, gracias por reconocermme como el ser humano que soy, gracias por escucharme siempre, pero más que nada, gracias por ser un ejemplo de familia.

A mis hermanos, por su apoyo, ejemplo y los buenos momentos que hemos vivido, por sus valiosos consejos y por ser el apoyo necesario para estudiar y prepararme para la vida.

A mi hija por ser mi alegría en tiempos tristes, porque cuando me miras el amor siempre está presente.

A mi amor, mi tranquilidad, Laura Cristina, por ser lo que siempre esperé sin esperar, por ser incondicional en todo momento. Existen infinitos más grandes que otros y tú eres el más grande de todos.

A mis sobrinos, a quienes amo con todo mi corazón.

A mi familia por todo el apoyo recibido, por cuidar y querer siempre lo mejor para mí.

A mis maestros, por su gran apoyo y motivación para la culminación de mis estudios de maestría.

A la profesora Sandra, por su orientación, dedicación, paciencia e interés en el trabajo realizado.

Tabla de Contenido

Introducción y Planteamiento del Problema	14
Capítulo 1: Antecedentes	22
1.1 Proceso comunicativo en matemáticas	22
1.2. Razones y proporciones como objeto de estudio de la Educación Matemática	26
Capítulo 2: Aspectos Teóricos y Conceptuales	31
2.1 Proceso comunicativo en Matemáticas	31
2.2 Habilidades del proceso de comunicación en Matemáticas.....	33
2.3 Razón y la proporción: objetos matemáticos de estudio.....	34
2.3.1 Escala.	35
2.3.2 Densidad.	36
2.3.3 Comparación de razones y tanto por cien.	38
2.3.4 Valor perdido y proporcionalidad.	39
2.4 Producción de textos	40
Capítulo 3: Diseño Metodológico	44
3.1 Fase I.....	44
3.2 Fase II.....	47
3.2.1 Diagnóstico inicial: Los muñecos de doña Gloria.	47
3.2.2 Adivina cuánto mide tu compañero.	51
3.2.3 Reparto de 35 camellos.....	54
3.2.4 Juego de Sombras.	57
3.2.5 Diagnóstico Final: “Limonaderías”.	60
3.3 Fase III	64
3.4 Fase IV	66
3.5 Fase V	67
Capítulo 4: Caracterización de Habilidades Comunicativas en Estudiantes de Séptimo Grado ..	68
4.1 Habilidad interpretativa de problemas de escalas	68
4.2 Habilidad interpretativa con problemas de densidad	77

4.3 Habilidad interpretativa en problemas de comparación de razones y tanto por ciento	82
4.4 Habilidad interpretativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad	85
4.5 Habilidad explicativa con problemas de escala	88
4.6 Habilidad explicativa en problemas de comparación de razones y tanto por ciento	92
4.7 Habilidad explicativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad	95
4.8 Habilidad justificativa con problemas de escalas	97
4.9 Habilidad justificativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento	100
4.10 Habilidad justificativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad	103
Capítulo 5: Reflexiones.....	107
5.1 Reflexiones acerca del proceso de comunicación.....	107
5.1.1 Habilidad interpretativa en situaciones con razones y proporciones.	107
5.1.2 Caracterización de la habilidad explicativa en situaciones con razones y proporciones. ..	108
5.1.3 Caracterización de la habilidad justificativa en situaciones con razones y proporciones..	109
5.2 Reflexiones acerca de la producción de texto	110
5.3 Reflexiones acerca de la transformación en la labor docente	111
Referencias Bibliográficas	112

Lista de Tablas

Tabla 1: Malla curricular séptimo grado: Colegio Nuestra Señora del Rosario	46
Tabla 2: Organización de la secuencia de actividades.....	47

Lista de Figuras

Figura 1 Problema de Escala.....	36
Figura 2: Problema de Densidad. Aparcamientos.....	37
Figura 3: Problema de Comparación de Razones y Tanto por Cien.....	38
Figura 4: Problema de Valor Perdido y Proporcionalidad.....	39
Figura 5: Carta Sobre el Concepto de Razón.....	42
Figura 6: Diagrama Marco Conceptual.....	43
Figura 7: Fases para la Realización de la Experiencia en el Aula.	45
Figura 8: Contexto de la Primera Actividad	48
Figura 9: Problema de Densidad. Actividad Diagnóstico Inicial.	48
Figura 10: Ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica	49
Figura 11: Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica	50
Figura 12: Segunda Parte del Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica.	50
Figura 13: Ejercicio 4 de la Actividad Diagnóstica	51
Figura 14: Ejercicio 1 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero.....	52
Figura 15: Ejercicio 2 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero.....	53
Figura 16: Ejercicio 3 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero.....	53
Figura 17: Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.....	55
Figura 18: Ejercicio 4 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.....	55
Figura 19: Ejercicio 6 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.....	56
Figura 20: Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.	57
Figura 21: Ejercicio 2 de la Actividad Juego de Sombras.	59
Figura 22: Ejercicio 3 de la Actividad Juego de Sombras.	60
Figura 23: Situación Inicial del Problema de las Limonaderías	60
Figura 24: Ejercicio 2 del Diagnóstico Final	61
Figura 25: Ejercicio 3 del Diagnóstico Final	61
Figura 26: Ejercicio 5 del Diagnóstico Final.	62
Figura 27: Tabla de Precios para las Limonaderías	63
Figura 28: Ejercicio 9 del Diagnóstico Final.	64
Figura 29: Cronograma Usado en la Intervención de la Experiencia de Aula.....	65

Figura 30: Representación Pictórica de los Muñecos de Doña Gloria	69
Figura 31: Respuesta Propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica.	70
Figura 32: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica.	71
Figura 33: Respuesta Propuesta por Sofía al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica	72
Figura 34: Tabla de Datos Para Realizar la Actividad Adivina la Estatura de tu Compañero	72
Figura 35: Respuesta Propuesta por Emanuel al Ejercicio 2 de la Actividad Adivina la Estatura de tu Compañero.....	73
Figura 36: Respuesta Propuesta por Sofía al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.	74
Figura 37: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras. ..	74
Figura 38: Respuesta Propuesta por Emanuel al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras. 75	
Figura 39: Respuesta propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Juego de Sombras. 77	
Figura 40: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica	78
Figura 41: Respuesta propuesta por Emanuel al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica.....	79
Figura 42: Respuesta Propuesta por Sofía al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica.	79
Figura 43: En el Ítem de Densidad Propuesto en el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos	81
Figura 44: Respuesta propuesta por Emanuel en el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos	81
Figura 45: Respuesta Propuesta por Sofía para el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos	82
Figura 46: Presentación del Contexto de la Actividad de Diagnóstico Final	84
Figura 47: Respuesta propuesta por Miguel para el Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica Final.	84
Figura 48: Respuesta Propuesta por Sofía en el Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica Final. .	85
Figura 49: Adaptación de Ejercicio de Mr Short y Mr Tall en los Muñecos de Doña Gloria.	86
Figura 50: Carta Escrita por Sofía para Doña Gloria. Caso Mr. Short y Mr. Tall.....	87
Figura 51: Respuesta Propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica Inicial	90
Figura 52: Respuesta propuesta por Emanuel para la segunda parte del primer Ejercicio del Juego de Sombras.....	90
Figura 53: Respuesta Propuesta por Miguel para la Segunda Parte del Primer Ejercicio de la Actividad Juego de Sombras.....	91

Figura 54: Respuesta Propuesta por Sofía para el Ejercicio 3 de la Actividad Reparto de 35 Camellos	93
Figura 55: Respuesta Propuesta por Miguel en la Socialización del Ejercicio del Reparto de 35 Camellos.	94
Figura 56: Carta Escrita por Emanuel para Doña Gloria Explicando cómo Encontrar la Medida de Mr. Tall.	96
Figura 57: Representación pictórica de Sofía para el Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica Inicial.	98
Figura 58: Representación Pictórica por Parte de Miguel y Justificación para el Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica Inicial.	99
Figura 59: Producción de texto realizada por Sofía para la Actividad de las Limonaderías.	101
Figura 60: Producción de texto realizada por Emanuel para la Actividad de las Limonaderías	102
Figura 61: Producción de Texto Realizada por Miguel para la Actividad de las Limonaderías	103
Figura 62: Representación de Datos por Parte de Emanuel en Ejercicio de Valor Perdido y Proporcionalidad.	106

RESUMEN

TÍTULO: PROCESO COMUNICATIVO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA APROXIMACIÓN DESDE EL ESTUDIO DE RAZÓN Y PROPORCIÓN*

AUTOR: DUMAR SAID DUBEIBE MARIN**

PALABRAS CLAVE: EDUCACIÓN MATEMÁTICA, PROCESOS COMUNICATIVOS, RAZÓN, PROPORCIÓN.

DESCRIPCIÓN:

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática, pues permite identificar dificultades conceptuales y procedimentales en los estudiantes y genera aprendizajes colectivos de un objeto matemático. En el presente trabajo se realizó un estudio sistemático que procura caracterizar el proceso comunicativo de estudiantes de séptimo grado involucrados en la producción de textos alusivos a la razón y la proporción. La presente investigación se desarrolló siguiendo cinco fases consecutivas para la realización de la experiencia en el aula: análisis de contexto, diseño de actividades, intervención, análisis y caracterización de habilidades. Las habilidades comunicativas de los estudiantes fueron organizadas y analizadas mediante diez categorías diferentes de naturaleza interpretativa, explicativa y justificativa. Finalmente, se presentan tres apartados relacionados con las reflexiones que dan respuesta al objetivo general de la investigación de aula realizada. Como resultado principal, se encontró que la práctica de la producción de textos favorece en gran medida el trabajo en equipo, el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes, y establece una relación maestro-educando más horizontal. Se espera que los resultados de esta investigación se constituyan como un primer paso para motivar a los docentes de matemáticas a diseñar actividades que respondan a las necesidades educativas de los educandos.

* Trabajo de investigación de maestría.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Sandra E. Parada Rico. Doctora en Ciencias: Especialidad Matemática Educativa

ABSTRACT

TITLE: THE COMMUNICATIVE PROCESS OF SEVENTH GRADE STUDENTS: AN APPROXIMATION FROM THE STUDY OF RATIO AND PROPORTION*

AUTHOR: DUMAR SAID DUBEIBE MARIN**

KEYWORDS: MATH EDUCATION, COMMUNICATIVE PROCESS, RATIO, PROPORTION.

DESCRIPTION:

Communication is an essential part of mathematics and math education, because it allows identifying conceptual and procedural issues in students and generates collective learning of a mathematical object. In the present work, a systematic study was carried out that seeks to characterize the communicative process of seventh grade students involved in the production of texts alluding to reason and proportion. The present research was conducted through five consecutive phases for the accomplishment of the experience in the classroom: analysis of context, design of activities, intervention, analysis, and characterization of abilities. On the other hand, the communication skills of the students were organized and analyzed through ten different categories of interpretative, explanatory, and justifying nature. Finally, three sections are presented related to the reflections answering to the general objective of the classroom research carried out. As a main result, it was found that the text production incentives teamwork, critical and creative thinking of students, and establishes a horizontal teacher-student relationship. We expect that the present results will constitute as a first step to motivate mathematics educators to design activities that respond to the educational needs of the students.

* Master's research work.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Sandra E. Parada Rico. Doctora en Ciencias: Especialidad Matemática Educativa

Introducción y Planteamiento del Problema

El proceso de comunicación es inherente al ser humano, cuando comunicamos intentamos dar a conocer una información, mostrar lo que sabemos o pensamos de algo que hemos interiorizado. La comunicación nos lleva a construir argumentos, explicaciones y/o justificaciones. En ese sentido, entendemos la comunicación en términos de Marc y Picard (1992) quienes dicen que ésta puede considerarse:

Como un conjunto de elementos en interacción en donde toda modificación de uno de ellos afecta las relaciones entre los otros elementos, esto indica que para que exista la comunicación debe haber una interacción entre el emisor y el receptor. (P 39).

En las clases de matemáticas sucede con frecuencia que existe un único emisor, el docente, quien expresa sus ideas en términos matemáticos, muchas veces mediados por creencias cuya génesis se encuentra en la experiencia propia de éste. Al respecto, Parada (2009) menciona que los procesos de reflexión sobre la práctica docente permiten a los docentes atender premeditadamente el uso del lenguaje matemático para la construcción y comunicación precisa de los conceptos. Usar un lenguaje matemático adecuado no solo referente a lo oral, sino también a lo escrito, a lo simbólico y a lo gestual.

El hecho de que la comunicación en el aula tenga sólo un sentido -profesor como emisor y estudiante como receptor- limita el desarrollo de habilidades comunicativas por parte de los estudiantes, sin que el maestro pueda valorar la comprensión significativa de los objetos matemáticos de estudio. En muchas ocasiones el sistema educativo sólo concibe la evaluación en términos sumativos (Holmes, 2002), mediante el planteamiento de pruebas escritas, que se

resuelven mediante procesos algorítmicos repetitivos sin poder apreciar las comprensiones reales de los estudiantes sobre el objeto matemático.

Al respecto, Hatano y Inagaki (1991) citados en NCTM (2000/2003, p.64) mencionan que “los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdo, llegarán a una mejor comprensión matemática a medida que intentan convencer a sus compañeros sobre los diferentes puntos de vista”. El lenguaje es inherente a las tareas de la matemática misma, para modelar y para representar.

La investigación en el campo de la Educación Matemática ha reforzado actualmente el proceso de comunicación por su relevancia en el aprendizaje de las matemáticas. Así lo ha resaltado la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en tanto que en el Nivel 6, dentro de las categorías propuestas en una prueba que ellos diseñan, comunicar es una de las habilidades que se evalúa.

Las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) evalúan los procesos, conocimientos y habilidades de los estudiantes que están a punto de iniciar sus estudios como profesionales o que pronto van a entrar al ámbito laboral. Se aplican a estudiantes de 15 años de los 30 países pertenecientes a dicha organización. Los resultados permiten ubicar a los estudiantes desde la categoría en diferentes niveles según su puntaje de la siguiente forma:

- Nivel 6 (más de 668 puntos). Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información. Demuestran pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar sus conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones.

- Nivel 5 (de 607 a 668 puntos). En este nivel los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de razonamiento bien desarrolladas, representaciones de asociación y caracterizaciones simbólicas y formales.
- Nivel 4 (de 545 a 606 puntos). Los estudiantes son capaces de trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos y asociándolos directamente a situaciones del mundo real. Pueden usar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente con cierta comprensión en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos.
- Nivel 3 (de 483 a 544 puntos). Quienes se sitúan en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias simples de solución de problemas. Pueden interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como razonar directamente a partir de ellas. Pueden generar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones.
- Nivel 2 (de 421 a 482 puntos). En el segundo nivel los alumnos pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos. Son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados.

- Nivel 1 (de 358 a 420 puntos). Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo.
- Por debajo del nivel 1 (menos de 358 puntos). Se trata de estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA. (OCDE, 2008, p.15)

Como podemos ver, para el nivel 6, el nivel máximo de competencia matemática, se hace énfasis en el proceso comunicativo, tanto en el uso de la información, como en la relación entre la información y la comunicación de sus procedimientos; diferenciando y dando importancia a las habilidades comunicativas, respecto a los demás niveles descritos.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN; 1998), exponen que la comunicación juega un papel fundamental. Debido a que:

Al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas, con el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Esos vínculos les ayudan a trazar importantes conexiones entre diferentes representaciones (físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas). Cuando los niños ven que una representación, como puede serlo una ecuación, es capaz de describir muchas situaciones distintas, empiezan a comprender la potencia de las matemáticas. Ellos pueden darse cuenta de que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras, empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas. (MEN, 1998, p 74).

Los documentos orientadores de la enseñanza de las matemáticas en Colombia, emanados por Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2003, 2006), definen cinco procesos generales de la actividad matemática: 1) formular y resolver problemas; 2) modelar procesos y fenómenos de la realidad; 3) comunicar; 4) razonar, y, 5) formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Específicamente en el proceso de comunicación se resalta la importancia de poder usar el lenguaje matemático para discutir situaciones, fenómenos o conceptos del entorno.

El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) aplica las pruebas Saber. Las pruebas tienen como objetivo mejorar la calidad de la educación en el país, recogiendo información valiosa año a año, que permite que los entes educativos tomen decisiones acertadas para mejorar. En el aspecto de las competencias matemáticas, se plantea:

Comunicación, representación y modelación: están referidas, entre otros aspectos, a la capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, describir situaciones o problemas usando el lenguaje escrito, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y describir cadenas de argumentos orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico así como traducir de lenguaje natural al simbólico formal y viceversa. (ICFES, 2015, p. 29).

Las competencias básicas recorren todo el proceso educativo y se desarrollan de forma interdisciplinar, por ejemplo las habilidades del razonamiento cuantitativo, la lectura crítica y la comunicación escrita, pueden facilitarse desde la clase de matemáticas. Dado que el contexto de las matemáticas permite no sólo el análisis de situaciones que impliquen el uso del lenguaje matemático, sino también la interpretación de enunciados y la comunicación

(oral y escrita) de justificaciones y explicaciones tanto en el lenguaje matemático como en el lenguaje verbal.

Ante lo anterior, cabe resaltar que los profesores de matemáticas generalmente consideran que las actividades de leer y escribir no son funciones de su quehacer. Al respecto, Parada (2005) menciona que la producción de textos en matemáticas da cuenta de la comprensión del estudiante sobre los objetos matemáticos de estudio y por ende favorece un proceso formativo donde el estudiante, al querer explicar o justificar un razonamiento matemático en un lenguaje verbal, se confronta con la comprensión del mismo.

A través de mi experiencia como docente de matemáticas, con mayor incidencia en la educación básica, he podido valorar la importancia que tienen los procesos comunicativos en la formación matemática. Lo anterior porque con el uso de los diferentes modos de comunicación se pueden identificar en los estudiantes sus dificultades, tanto conceptuales como procedimentales. Además, los mismos estudiantes pueden realizar un proceso de autoevaluación, mediante la lectura de sus producciones; y un proceso de heteroevaluación a partir de las percepciones que tienen sus compañeros y docentes, generando más y mejores aprendizajes colectivos de un objeto matemático.

Al respecto, Maciel (2003) expone que la comunicación matemática va más allá de resolver un problema, ésta involucra la escritura, la presentación y la argumentación de ideas. Esto explicaría que comunicación se refiere a la necesidad que tiene un estudiante para interpretar una situación por medio de la representación del objeto matemático; representación que puede hacerse mediante el lenguaje matemático, el lenguaje natural, imágenes o incluso gestos. El MEN (1998) coincide con la idea anterior, planteando que los estudiantes comunican ideas matemáticas cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando

construyen y explican una representación gráfica de un fenómeno del mundo real o cuando proponen conjeturas sobre una figura geométrica.

En NCTM (2000/2003) se menciona que la comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. Es un camino para compartir y aclarar las ideas. A través de la comunicación, las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación.

Por otro lado, y enfocando la atención en el conocimiento matemático, al hacer una revisión del plan de asignatura de séptimo grado de las instituciones donde hasta ahora he trabajado, se puede observar durante todo el currículo, el objetivo principal del grado está en fortalecer a los estudiantes en las conformaciones de relaciones entre distintas magnitudes. Para este propósito los conceptos de razón y proporción son fundamentales.

Todas las ideas antes planteadas hacen que como docente e investigador busque responder mediante una investigación en mi aula a la siguiente pregunta:

¿Cómo favorecer el proceso comunicativo en estudiantes de séptimo grado mediante la producción de textos asociados a la razón y la proporción?

Para responder a la pregunta hemos trazado como objetivo:

Caracterizar el proceso comunicativo de estudiantes de séptimo grado que estuvieron involucrados en la producción de textos alusivos a la razón y la proporción.

En lo que sigue se determinarán los capítulos por los cuales está compuesto este reporte de investigación.

Capítulo 1. Antecedentes. En este apartado se exponen algunos trabajos previos que relacionan los principales elementos de la investigación realizada: El proceso de comunicación en general, el proceso de comunicación en las matemáticas, las habilidades del proceso de

comunicación, la producción de textos, la evaluación formativa y la razón y la proporción. Siempre yendo desde el contexto internacional, hasta el contexto nacional o local (Universidad Industrial de Santander), si fuese posible.

Capítulo 2. Aspectos teóricos y conceptuales. En este apartado del documento se presentan los aspectos teóricos, conceptuales que rigen la investigación, en cuanto a la comunicación, al proceso de comunicación en matemáticas, a las habilidades del proceso de comunicación, a la producción de textos y a la razón y proporción.

Capítulo 3. Metodología. Se describe el proceso metodológico que se realizó para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. Así mismo, se describe el contexto del aula en la que se realizó la intervención, los casos de estudio y las técnicas usadas para el diseño de las secuencia de actividades, así como del proceso de análisis de resultados.

Capítulo 4. Caracterización de habilidades comunicativas posibilitadas en los estudiantes a través de la producción de textos. Se presentan los resultados del análisis de datos, organizados mediante las siguientes categorías:

- i. Habilidad interpretativa con problemas de escalas.
- ii. Habilidad interpretativa con problemas de densidad.
- iii. Habilidad interpretativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- iv. Habilidad interpretativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.
- v. Habilidad explicativa con problemas de escala.
- vi. Habilidad explicativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- vii. Habilidad explicativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.
- viii. Habilidad justificativa con problemas de escalas.

- ix. Habilidad justificativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- x. Habilidad justificativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.

Capítulo 5. Reflexiones. Se presentan las reflexiones finales de la investigación de aula realizada, las cuales se presentan como respuesta a la pregunta de investigación planteada.

Capítulo 1: Antecedentes

La revisión bibliográfica realizada para el diseño y desarrollo de la investigación que aquí se reporta, tuvo como propósito dar respaldo teórico a las ideas relacionadas con el proceso de comunicación en matemáticas y los avances en el campo de la Matemática Educativa en cuanto a los problemas de enseñanza y aprendizaje de la razón y proporción. Los trabajos que cito están organizados inicialmente desde el plano internacional hasta llegar a las investigaciones o acercamientos desde el contexto local (Universidad Industrial de Santander).

1.1 Proceso comunicativo en matemáticas

A nivel internacional la OCDE ha expuesto que entre las competencias matemáticas, la comunicación juega un papel preponderante tal como lo muestra el nivel 6 de competencia en matemáticas.

Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información. Demuestran pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar sus conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones. (OCDE, 2008, p.15)

En concordancia con lo anterior, The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) formuló el documento: Principios y Estándares para la Educación Matemática (En su traducción al español realizada por Thales, 2003). En dichos lineamientos, de NCTM (2000/2003) se plantea como fundamental el proceso comunicación en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes durante todo su ciclo educativo. Específicamente, en dicho documento se explica que “A través de la comunicación, las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación” (p. 64).

En NCTM (2000/2003, p. 64) se plantean cuatro estándares concretos para el proceso de comunicación. Estos son:

- Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación;
- Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas;
- Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás y finalmente;
- Usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.

Según el MEN (2003) existen cinco procesos generales de las matemáticas, que son: Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar,

y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Puntualmente el proceso de comunicación establece que un estudiante es competente en matemáticas cuando utiliza diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. Así mismo, en los lineamientos nacionales de matemáticas se menciona que: “diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas” MEN (1998, p.73).

Según Jiménez, Suárez y Galindo (2010)

Por medio de la comunicación se espera que el estudiante construya significados, reflexione, analice e intercambie interpretaciones; proceso que además le permitirá, a través de la confrontación de conjeturas, expresarlas con el lenguaje propio de la matemática. En particular, se supone que en el ejercicio de justificar su solución a un problema, con el posible desacuerdo de algunos compañeros, todos ganan comprensión del asunto matemático implicado, al considerarlo desde varios puntos de vista y relacionarlo con el propio. (p. 179).

De esta forma podemos ver como esta investigación reciente da cuenta de la importancia del proceso de comunicación en matemáticas y de aquellas acciones que subyacen. De igual manera en el artículo escrito por estos autores muestran la importancia del rol del docente en el aula como un oyente activo y muestran la importancia de la pregunta.

Jiménez, Suárez y Galindo (2010) muestran las diferentes teorías que valoran la importancia del proceso de comunicación en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y al finalizar presenta

un ejercicio práctico realizado en clase, donde valora la importancia del significado al abordar un objeto matemático.

En la Universidad Industrial de Santander, desde el grupo investigación en Educación Matemática se está desarrollando la línea de Didáctica del Cálculo y se han venido conceptualizando los procesos matemáticos asociados al pensamiento variacional. En relación al proceso de comunicación, específicamente se encuentra el trabajo de Licenciatura en Matemáticas de Suárez y Rojas (2013) y la tesis de Maestría en Educación Matemática de Gómez (2018). Ambos trabajos analizan el proceso comunicativo a través de habilidades específicas. Entendiendo como habilidades a “el conjunto de acciones secuenciales, coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica.” (Rueda, 2016, p. 57).

Suárez y Rojas (2013), usaron esta caracterización para orientar actividades de refuerzo con estudiantes del grado once y para hacer el análisis de resultados; de los cuales rescataron que la habilidad para interpretar enunciados verbales, pictóricos o algebraicos, planteada como parte fundamental de las competencias comunicativas en matemáticas, se constituye en una posibilidad más que nos permite favorecer los procesos de resolución de problemas.

Por otra parte, Gómez (2018) caracterizó las habilidades comunicativas mediante la resolución de problemas relacionados con fenómenos de variación, haciendo uso de tecnologías digitales en estudiantes de pre-cálculo de la Universidad Industrial de Santander.

Haciendo referencia a las habilidades del proceso comunicación en matemáticas, Gómez (2018) determina tres habilidades: interpretar, explicar y justificar. Interpretar es fundamental en cualquiera de los procesos matemáticos, explicar es la forma de comunicar a los demás

compañeros su comprensión del objeto matemático y así vincularlos a su propio aprendizaje; y que la justificación es observable en acciones encausadas en la evidencia coherente de ideas.

1.2. Razones y proporciones como objeto de estudio de la Educación Matemática

Unos de los objetos matemáticos más relevantes y más estudiados en la educación matemática son la razón y la proporción, esto por constituirse en objetos de estudio que se profundizan grado a grado y nivel a nivel en la formación matemática. Así mismo, por su correlación con objetos de estudio de otras áreas como la física, la química, la biología y hasta en el arte, entre otras. Como lo menciona Rapetti (2003, p.65): La necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos”

En relación a esto Freudenthal (1983) citado por Fernández (2009), asegura que la razón es una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o de valores de una magnitud. También asegura que el significado de una razón no reside en el valor que se le dé, sino en la posibilidad de igualar dos razones.

Existen dos tipos de razones que han sido estudiadas: razones internas y razones externas. Freudenthal (1978), citado en Rapetti (2003) afirma que “Las primeras son razones entre términos pertenecientes a un sistema, por ejemplo, dos longitudes, dos pesos; corresponden a la misma magnitud. Las razones externas son razones entre términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo”.

Un trabajo que permite dar cuenta del estado actual de las investigaciones relacionadas con las razones y las proporciones es el de Fernández (2009). Este autor realiza un estudio de la razón

y la proporción en la escuela primaria (en el contexto de España, específicamente en la ciudad de Valencia). Para la realización de los instrumentos de análisis y recolección de datos tuvo en cuenta los trabajos realizados en México por Gómez (1996), Jiménez de la Rosa (1996) y Muñoz (1996); además de algunas modificaciones hechas en Valencia en los años 1996 y 1997. Fernández aplicó una prueba a lápiz y papel e hizo entrevistas con un subgrupo de estudiantes teniendo en cuenta aquellos que habían cometido un error en alguno de los subtemas planteados. Estos subtemas son el resultado de un largo estudio analizando los principales autores que reconocieron la importancia de la razón y la proporción y plantearon algunas categorías o niveles de comprensión para las mismas. Fernández llama precursor de un concepto a los objetos mentales que organizan determinados fenómenos y que favorecen la constitución de buenos objetos mentales del concepto en cuestión y desde Puig (1997, p.27): “Una fenomenología didáctica muestra, por otra parte, que en el camino hacia la constitución del objeto mental de la razón y proporción desempeñan un papel importante objetos mentales precursores del objeto mental de la razón y la proporción”, avala esta posición.

Fernández identificó como precursores:

- Las comparaciones cualitativas, como precursores de las comparaciones cuantitativas
- La normalización o tipificación, a través del uso de expresiones como: “por cada” o “de cada”, o de la unificación de referentes, que permite a los alumnos la percepción de algunas razones y favorece la comparación entre ellas
- La relativización de las comparaciones, a través del uso de expresiones como: “relativamente...”, “en relación con”, “con respecto a” y “si se compara con”

- La visualización de algunas situaciones, mediante el cambio de representación, que favorece a la comprensión de las razones involucradas en ellas y, por tanto, la utilización y su comparación.

A nivel nacional, se encontró el trabajo elaborado por Obando, Vasco y Arboleda (2014) quienes realizaron una investigación que da cuenta del estado del arte de las razones, proporciones y la proporcionalidad. Para alcanzar sus objetivos de investigación plantean un recorrido que se organiza en tres momentos: 1) Los procesos cognitivos; 2) la estructura matemática; y por último 3) Lo antropológico y semiótico.

De esta manera, en el primer momento destacan que la razón, la proporción y la proporcionalidad (RPP), como objetivo del razonamiento proporcional, y según los estudios de Piaget & Inhelder (1958) citados por Obando, Vasco y Arboleda (2014), determinan que el razonamiento proporcional se encuentra inicialmente en la etapa de las operaciones formales. Sugiriendo que el individuo tiene una capacidad en el manejo simultáneo de múltiples clases.

Para Piaget (1954) citado por Obando, Vasco y Arboleda (2014), el estudio de la proporcionalidad maneja dos criterios, uno lógico y otro matemático, el primero refiere a la capacidad del individuo de interpretar la variación existen entre dos magnitudes, y el matemático donde establece la relación de equivalencia de la varianza manteniendo una constante representada en un cociente o en una multiplicación, de la siguiente forma: $a/b = c/d$, si y solo si $ad = bc$.

Lo anterior generaría, centrar la atención en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, donde el uso de las relaciones entre magnitudes físicas, problemas de tasa y en general cualquier aplicación en donde la variación se muestre constante; son fundamentales.

En el segundo momento del recorrido, y haciendo referencia a la estructura matemática, los investigadores plantean la necesidad que se da a partir de los estudios didácticos en general, al considerar la epistemología del objeto matemático. Esto genera una caracterización de los aportes realizados de la siguiente forma:

- Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales;
- Razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar;
- Aritmética de las cantidades;
- Estructura cognitiva y didáctica del pensamiento multiplicativo;

Teniendo en cuenta los estudios realizados en la época de los noventa, y los hallazgos encontrados en la investigación realizada, los investigadores reseñan aportes más recientes, como lo son:

- La razón como función;
- Las fracciones en relación con las medidas de magnitudes (intensivas o extensivas);
- El aprendizaje de los números racionales y el desarrollo del razonamiento proporcional
- El aprendizaje de los números racionales y su relación con la medida de magnitudes;
- Campos de investigación y trayectorias de aprendizaje;
- Las fracciones como un proceso de acomodación de los esquemas de conteo.

En un tercer momento los autores se refieren a lo antropológico y semiótico. Un nuevo enfoque teórico de la didáctica de las matemáticas en la década de los noventa, enmarca la denominada teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), esta ubica a las razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales en organizaciones matemáticas complejas. Así, Obando,

Vasco y Arboleda (2014) citando los trabajos de Bosch (1994) y García (2005), muestran lo que puede causar la falta de comprensión de los estudiantes con respecto a las RPP. Una de ellas es la enseñanza clásica de las proporciones, que centra su enseñanza en ámbitos netamente numéricos, dando poco énfasis a las relaciones funcionales existentes. La segunda causa puede ser que el punto de vista praxeológico se quede reservado a unos niveles muy básicos y no permiten una praxeología global más estructurada. Desde el punto de vista semiótico los autores ubican las RPP en un estado meramente numérico, pero con una nueva tendencia a pensar en estas como relaciones funcionales. En conclusión, el estudio resalta que se deben comprender mejor los saltos o rupturas entre lo aditivo y lo multiplicativo; reconocer como fundamental las estructuras multiplicativas; y comprender mejor el papel de la proporcionalidad en la construcción del concepto de función.

Finalmente un trabajo que permite dar cuenta del estado actual de las razones y las proporciones es el de Guacaneme (2001); en este trabajo se presenta un estudio didáctico sobre la proporción y la proporcionalidad desde una aproximación a los aspectos formales de las matemáticas y a los textos escolares de la misma. De esta manera presenta inicialmente los aspectos y teorías de la didáctica en las matemáticas referentes a las fracciones, las razones, las proporciones y la proporcionalidad, además de las diferentes formas como se presentan en los cinco textos seleccionados. Encontrando que la proporcionalidad ocupa un lugar difuso (Guacaneme, 2002), evidenciando que difícilmente se puede reconocer a que disciplina de las matemáticas escolares a la cual correspondía el estudio de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, donde al parecer, su mayor incidencia se encuentra en la aritmética. También determina que “no hay un tratamiento de la razón que sea significativamente diferente al tratamiento de los números” Guacaneme (2002). Entre otros hallazgos.

Capítulo 2: Aspectos Teóricos y Conceptuales

En este apartado se exponen las teorías asociadas tanto al objeto matemático como a los elementos didácticos que se estudiarán para lograr el objetivo de la investigación. Aquí, se describe el proceso de comunicación como eje principal de la propuesta, basado en el documento de principios y estándares de la educación matemática de NCTM (2000/2003) de este surgen las habilidades del proceso comunicativo.

Por otro lado, se exhiben las conexiones con los aspectos teóricos asociados a la razón y la proporción y se articulará con lo propuesto por Fernández (2009). Seguido a esto se muestra la producción de texto como un enlace con la evaluación formativa.

2.1 Proceso comunicativo en Matemáticas

Los Principios y Estándares de la Educación Matemática del NCTM (2000/2003) muestran un recorrido entre los diferentes procesos propios de la educación matemática. Uno de los procesos como ya se había mencionado antes, es el proceso de Comunicación. Dentro de este se proponen cuatro estándares de los cuales se infieren básicamente tres habilidades que describen el desarrollo del proceso de comunicación por parte de los estudiantes, ellas son: la interpretación, la explicación y la justificación. El documento propone que todos los docentes debemos capacitar a nuestros alumnos para:

- Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación;

- Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas;
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemáticos de los demás;
- Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Puntualmente, en la etapa de los niveles 6-8 se plantea para el proceso comunicativo, que el salón de clases es un lugar donde se estimula a los estudiantes a pensar y a razonar sobre las matemáticas. Una de esas características tiene que ver con el hecho de que las matemáticas en este punto son más complejas o incluso exigen mayor abstracción. Otra característica hace alusión a que los estudiantes en este nivel se someten a evaluación más rigurosa de lo que producen, ya que los estudiantes en esta edad son más críticos de su entorno. En ese sentido, se espera que el estudiante no solo desarrolle algoritmos, sino que explique, argumente y justifique sus respuestas y procedimientos. Otra característica es la que tiene que ver con el entorno social, en esta etapa a los estudiantes no les gusta sobresalir, esto implica que sea difícil que expongan sus argumentos ante sus compañeros, NCTM (2000/2003).

El papel del docente en esta etapa es fundamental, el docente debe tener la habilidad de plantear una clase donde se permita el discurso, donde se valoren los argumentos entregados por todos los participantes. Para esto debe establecer normas relativas al aprendizaje en la comunidad de clase, donde se apoye el aprendizaje de todos los estudiantes, otra es utilizar trabajos que faciliten la comunicación significativa, donde existan varios métodos de solución y se puedan explicar cada uno de ellos. Finalmente, el docente debe guiar las discusiones en clase apoyándose en una escucha activa para captar lo relevante y lo no tan relevante de la participación de sus estudiantes, NCTM (2000/2003).

No siendo ajenos a este tratamiento del proceso de comunicación en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, el MEN (2006, p. 84) menciona en uno de sus estándares: “Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.” Este realiza una invitación al docente para que le proponga a sus estudiantes una actividad de producción textual, en la cual debe formular de manera coherente, y usando los objetos matemáticos nombrados, situaciones en el entorno matemático.

2.2 Habilidades del proceso de comunicación en Matemáticas

En el MEN (2006) se parte con la siguiente frase para hablar del proceso de Comunicación en matemáticas:

A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. MEN (2006, p 54)

Como ya lo habíamos mencionado en el capítulo de los antecedentes, Rojas y Suárez (2013) definieron las habilidades propias del proceso de comunicación en matemáticas. Posteriormente, Gómez (2018) refina las definiciones para las habilidades comunicativas y descarta la habilidad de la argumentación, considerando esta última como una habilidad propia del proceso de demostración. Veamos como entenderemos las habilidades del proceso de comunicación

- La habilidad para *interpretar* consiste en la capacidad del estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático);

así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio.

- En cuanto a la habilidad para *explicar* se dice que es la aptitud que tiene un estudiante para exponer la descripción del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando el porqué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento.
- La habilidad para *justificar* es la capacidad que tiene un estudiante para sustentar una idea, explicar el porqué de un proceso, aceptar o refutar una conclusión por medio de razones relevantes como la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo.

Estas habilidades se relacionan con los subtemas de la razón y la proporción presentados por Fernández (2009) de manera que se pueda observar las habilidades usadas por algunos estudiantes al enfrentar ejercicios de cada subtema.

2.3 Razón y la proporción: objetos matemáticos de estudio

Anteriormente citábamos a Fernández (2009), quien realizó un estudio de la razón y proporción en estudiantes de primaria en Valencia (España). Para lograr este propósito, el autor en mención realizó una revisión de los subtemas asociados a la razón y la proporción en la literatura de la educación matemática.

Después de realizar el recorrido Fernández acoge los siguientes cuatro subtemas de la razón, que explicaremos uno a uno, dado que son fundamentales para la creación de las secuencias de actividades usadas en esta investigación de aula:

2.3.1 Escala.

Lamon (1993a,1993b) citado por Fernández (2009), atendiendo a las características semánticas de los enunciados de los problemas, hace una clasificación donde caracteriza cuatro tipos de problemas. Uno de ellos se denomina ampliadores o reductores. Estos son problemas de escalas, tales como la comparación de la razón de crecimiento de dos árboles pasado un periodo de tiempo, al igual que la determinación del factor de escala entre dos figuras semejantes. Fernández menciona que se podría establecer una clasificación más general de las escalas, la cual fue usada por Singer y Resnick (1992) citados por Fernández (2009), haciendo uso de las relaciones parte-todo y parte-parte. Singer y Resnick (1992) agrupan los problemas en dos tipos: “por cada” y “de cada”, se considera que las escalas hacen parte del “por cada” bajo la concepción del parte-parte, determinando tantas unidades de medida de un objeto por cada unidad de medida del objeto original.

Posteriormente, se presenta un ejemplo asociado con el subtema de escala, usado en la investigación de Fernández (2009), donde bajo una situación se le pide al estudiante dibujar un perro que al comerse una galleta mágica crece al doble. Le proporcionan el tamaño original del perro y esperan que el estudiante dibuje el perro, usando la cuadrícula, al doble del tamaño. Puntualmente en esta imagen (Figura 1), se puede observar una de las posibles actuaciones de niños entre 5 y 12 años, que respeta la escala solo en una dimensión.

2.3.2 Densidad.

Los ejercicios asociados a este subtema resultan bastante interesantes y son poco usados por el general de los profesores de matemáticas en un currículo estándar de séptimo grado. La principal característica de estos ejercicios es que se pueden apreciar desde lo cualitativo. En una de sus conclusiones Fernández (2009) determina que los ejercicios que se pueden abordar desde una comparación cualitativa son precursores de relaciones cuantitativas. Efectivamente Cramer y Post (1993) citados por Fernández (2009) lo llamaron problemas de comparación y predicción cualitativa.

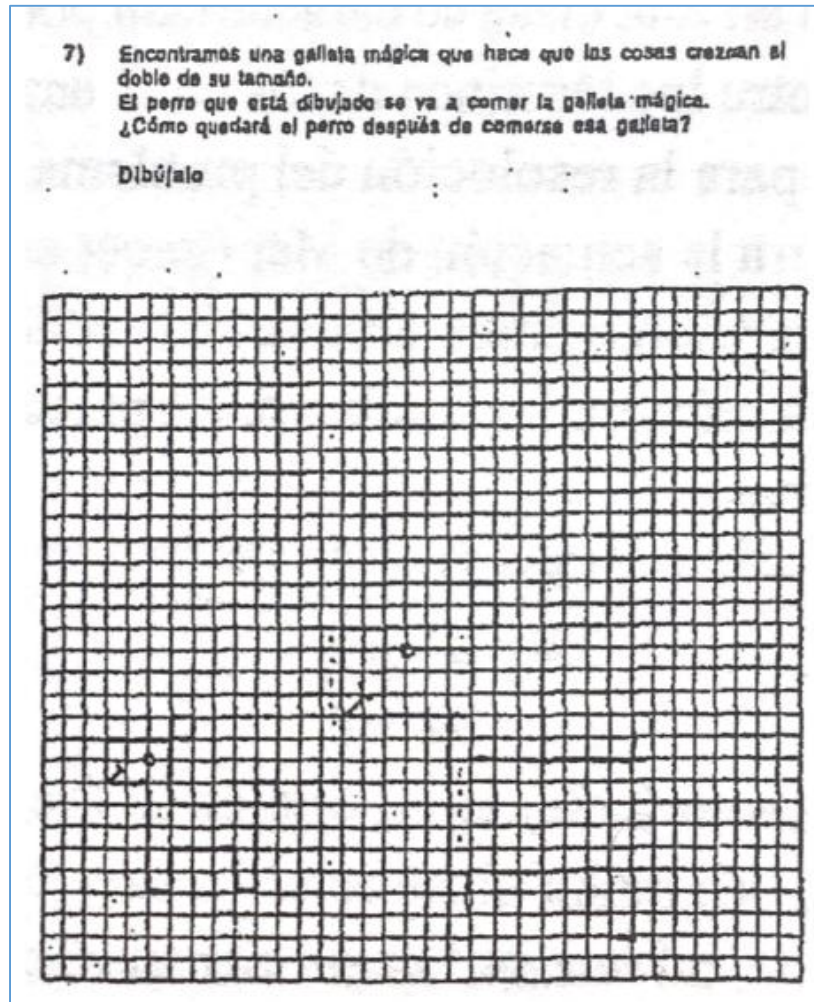


Figura 1 Problema de Escala.

Fuente: Fernández (2009)

Un problema asociado a la comparación de densidades es el siguiente problema: Bill y Greg, dos hermanos, clavetean en dos tablas de madera. Bill clava más clavos que Greg pero su tabla es más grande. ¿En qué tabla estarán más apretados los clavos?, tomado de Crammer y Post (1993, p. 405) citados en Fernández (2009).

Otro problema típico asociado a la densidad son los relacionados con parqueaderos o aparcamientos, como lo llama Fernández (2009). Se puede observar un ejemplo en la Figura 2.

Con este tipo de ejercicio no hubo éxito en la aplicación del cuestionario realizado por Fernández (2009). Al final, la actuación normal para este ejercicio estuvo en la comparación directa entre el número de carros existentes o la comparación directa entre el número de plazas vacías.

APARCAMIENTO A	APARCAMIENTO B
¿Cual de los dos aparcamientos de coches crees que está más lleno? Explica la respuesta:	

Figura 2: Problema de Densidad. Aparcamientos
Fuente: Fernández (2009)

2.3.3 Comparación de razones y tanto por cien.

Para Cramer y Post (1993) citados por Fernández (2009), son problemas de comparación numérica donde la información acerca de las dos razones de una proporción está dada de manera explícita o implícita. En estos podríamos clasificar el ejercicio de Karplus et al (1983a, p.53) de la serie Lemonade Puzzle citados en Fernández (2009) (

Figura 3), donde es necesaria la comparación de dos razones asociadas al azúcar y al jugo de limón. Considerado por Tourniairey y Pulos (1985), como un problema de mezclas.

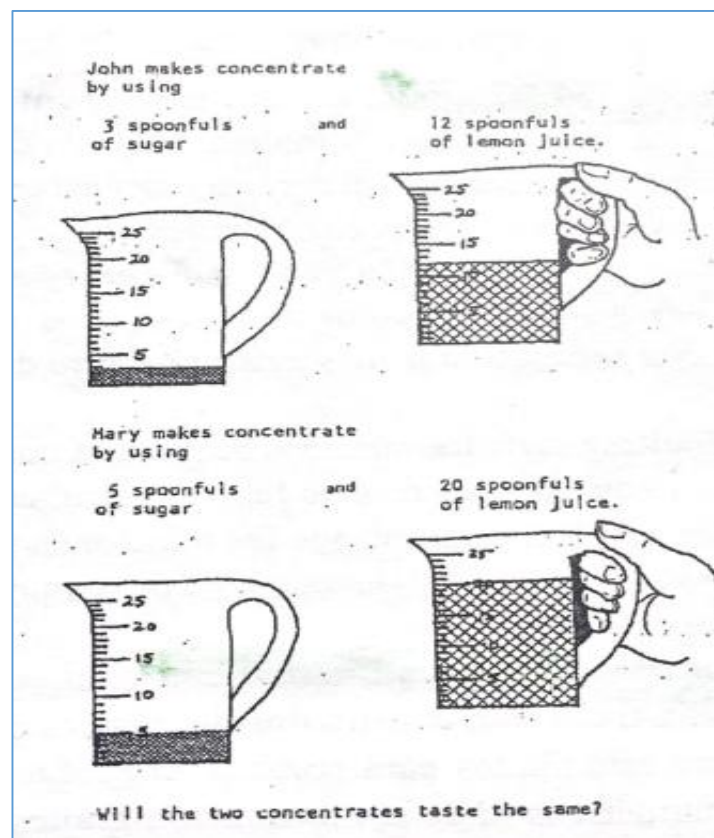


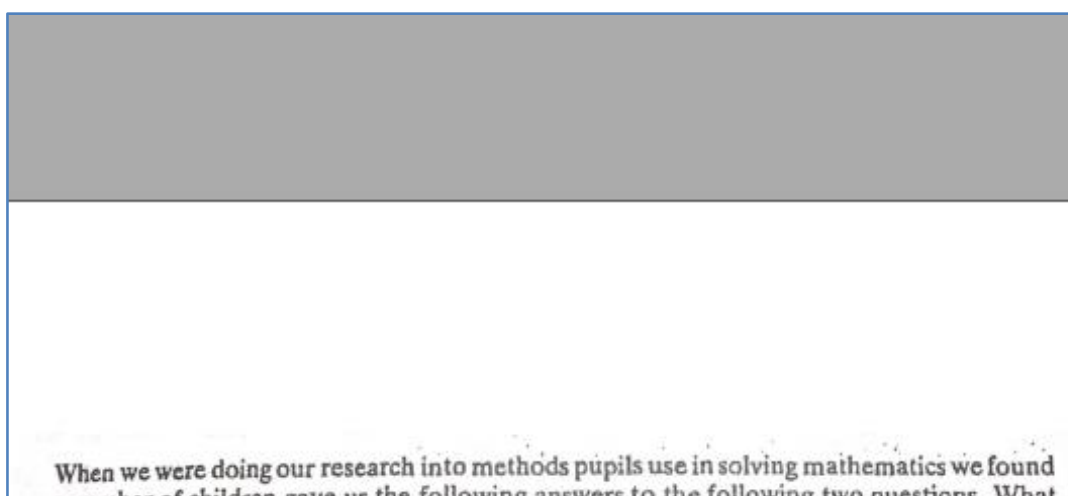
Figura 3: Problema de Comparación de Razones y Tanto por Cien.
Fuente: Fernández (2009)

En cuanto a la posible actuación de los estudiantes aquí, Fernández (2009) cita a Noelting (1980b), quien encuentra dos tipos de estrategias que usan los estudiantes en la serie de problemas de mezclas del jugo de naranja:

“Si los estudiantes primero comparan las cantidades de naranja que hay en las dos jarras, luego las de agua y después comparan estas dos relaciones las denomina “estrategia entre”. Si los alumnos comparan primero las cantidades de los elementos que forma una mezcla en una jarra, luego las de la otra y finalmente comparan estas relaciones la denomina “estrategia en”. (Fernández, 2009, p.66)

2.3.4 Valor perdido y proporcionalidad.

Para Crammer y Post (1993) son aquellas situaciones en las que se conocen tres datos de una proporción y existe uno desconocido (cuarta proporcional). La información que se da en este tipo de problemas podría representarse mediante una matriz 2x2, donde se ubica una razón completa en una columna y en la otra columna la razón con el término desconocido, como lo referencia Fernández (2009) de Dupuis y Pluvinage (1981).



*Figura 4: Problema de Valor Perdido y Proporcionalidad.
Fuente: Fernández (2009)*

Un problema clásico del razonamiento proporcional y que se clasifica dentro de estos es el de Mr Tall y Mr Short. (Ver Figura 4).

De la forma de actuar de los estudiantes Tourniaire y Pulos (1985) citados por Fernández (2009) diferencian dos estrategias resaltadas por la literatura, las multiplicativas y las de construcción progresiva o building up. En la multiplicativa los estudiantes relacionan los datos multiplicativamente, usando las razones externas, para relacionar con el término faltante; otra forma de realizar esta misma estrategia es con los productos cruzados o lo que nosotros conocemos como la propiedad fundamental de las proporciones, cabe resaltar, que no siempre que se resuelve un problema usando la propiedad fundamental de las proporciones, se está usando un razonamiento proporcional según Lesh, Post y Behr (1988) citados en Fernández (2009). En el building up, los estudiantes establecen la relación entre una razón y luego extiende esta de manera aditiva.

Todos los subtemas de la razón y algunos ejercicios anteriormente presentados fueron adaptados a las situaciones que se contextualizaron en la secuencia de actividades planteadas en la presente investigación, usándolos como prototipos por su pertinencia para la iniciación en las habilidades comunicativas en las matemáticas.

2.4 Producción de textos

El vehículo que se utilizará en las actividades didácticas es la producción de textos. Pero, ¿qué es un texto? Porro (2000) citado en Parada (2005) dice:

El texto está íntimamente ligado a un contexto específico e individual que necesita del conocimiento general de los hablantes, es decir, se necesita tener conocimientos sobre la

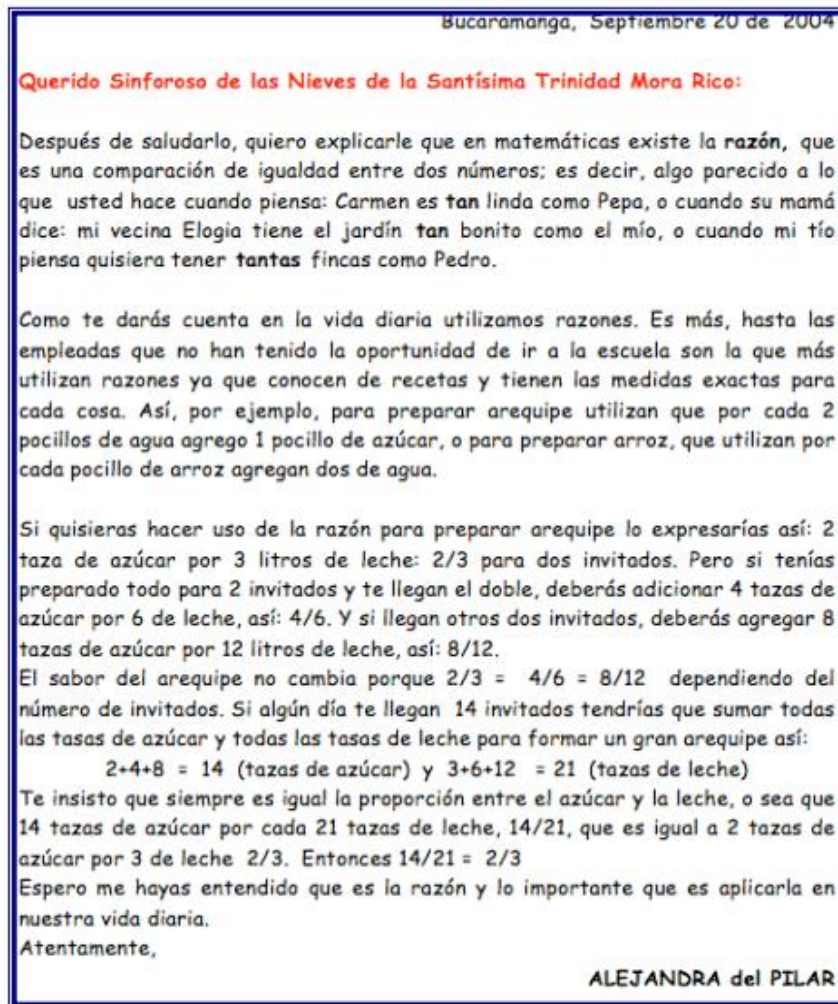
temática de que se desea hablar. Un texto es una unidad comunicativa, implicando que es individual y único. (p.19)

Cuando se habla de producción textual, se invita al estudiante no sólo a que escriba, dibuje, relate o simbolice lo que reconoce de un objeto matemático, sino que también, pueda realizar la lectura o escuchar lo que reconocen sus compañeros, mediante lo cual podrá: interpretar, justificar y explicar. Para que de este modo sea capaz de organizar, consolidar, comunicar con claridad y con coherencia su pensamiento matemático, además de poder analizar y evaluar las estrategias de los demás usando un lenguaje matemático eficaz.

Pero, específicamente ¿Qué es producir un texto? Luján y Suárez (1998) determina que producir puede ser: explicar, manifestar de forma organizada una necesidad o propósito. Parada (2005) realizó una investigación en el aula con estudiantes de sexto en el cual propuso actividades de producción de texto, tales como: cartas, fabulas, cuentos, etc.

La autora reconoce que cuando el estudiante produce un texto tiende a relacionar los conceptos con su contexto real, situación que es difícil que se presente cuando el estudiante hace parte de una clase magistral, donde su rol reduce a escuchar al maestro.

En la Figura 5 observamos un ejemplo ilustrativo de producción de texto propuesto por Parada (2005), quien propone a los estudiantes la escritura de una carta a uno de sus primos usando las razones y las proporciones, planteando así un contexto amable para sus estudiantes, situación que fue fundamental para que los estudiantes se esforzaran en ser lo más claros posibles en el ejercicio de Alejandra le escribe una carta a Sinforoso de las Nieves de la Santísima Trinidad Mora Rico sobre las razones.



*Figura 5: Carta Sobre el Concepto de Razón.
Fuente: Parada (2005) pág.38*

La autora resalta que la carta está bien construida y por medio de esta se puede ver la comprensión que tiene la estudiante del tema ubicándose su propio contexto. No obstante, también hace evidente que dentro del texto la estudiante define la razón como la igualdad entre dos números y además no restringe la propiedad de las series de razones iguales.

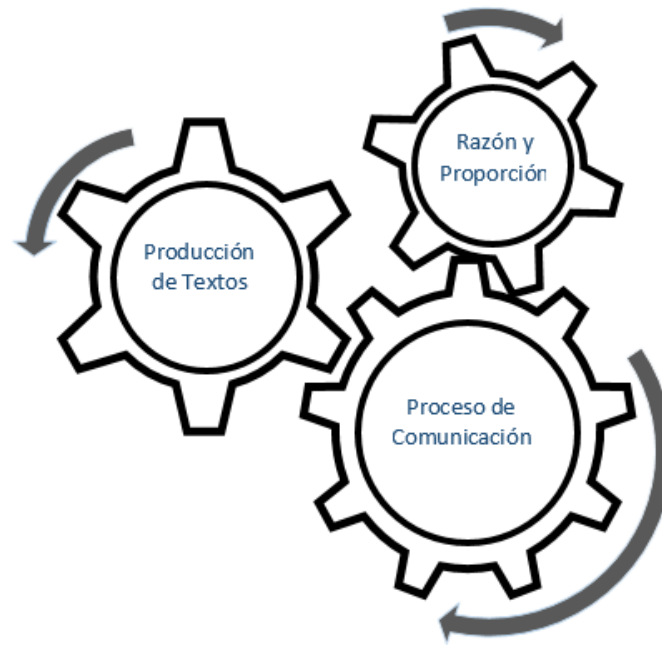


Figura 6: Diagrama Marco Conceptual.

Para finalizar este apartado se presenta la

Figura 6 que relaciona el proceso de comunicación, incluidas las habilidades de interpretar, explicar y justificar. Habilidades que fueron descritas tanto por Suárez y Rojas (2013) y Gómez (2018) con el objeto de estudio que son las razones y las proporciones que veremos desde el punto de vista de Fernández (2009). Y finalmente entre ellos el vehículo que se utilizará para relacionarlas: la producción de textos.

Finalmente, recogidos los aspectos teóricos referentes al proceso de comunicación, la habilidades propias del proceso de comunicación, los subtemas y actuaciones de los estudiante de acuerdo al objeto matemático de la razón y la proporción, y la producción de textos, podemos establecer el diagrama de engranes anterior para mostrar como relacionamos todos estos aspectos teóricos.

Capítulo 3: Diseño Metodológico

Esta experiencia está enmarcada en una investigación de tipo cualitativa mediante la investigación en el aula. Al respecto Restrepo (2009, p.103) afirma que “en esta investigación formativa en el área de las humanidades y las ciencias sociales es la naturalista, comprensiva o cualitativa, y dentro de ésta, la observación participante del maestro que se observa a sí mismo, a los estudiantes y las mutuas relaciones entre ambos.”

Para la realización de esta experiencia en el aula se establecieron cinco fases que describiremos de manera general en la Figura 7. Denominaremos fases a cada una de las acciones globales que tomaremos para realizar la investigación.

3.1 Fase I.

Esta experiencia de aula se realizó con un grupo de 18 estudiantes de séptimo grado, cuyas edades oscilan entre los 12 y los 14 años de edad de un colegio privado de la ciudad de Bucaramanga. 15 estudiantes de los 18 completaron la secuencia de actividades. La participación de los estudiantes se realizó de manera autónoma, es decir, no se les obligó a asistir, ni se les ofreció beneficio en las notas de la asignatura. En la ejecución se planteó una secuencia de cinco actividades, de manera que, cada día se trabajaría una de ellas. La primera y la quinta, se presentaron como diagnóstico inicial y diagnóstico final respectivamente.

Inicialmente la experiencia de aula había sido planteada para otra institución educativa del sector privado de Floridablanca, donde por motivos de cambio de personal, no se pudo dar fin a la experiencia, pero sí permitió valorar el objeto matemático para usar en esta investigación, además de refinar el diseño de las actividades a implementar. Para escoger el objeto matemático con el cual se caracterizarían las habilidades comunicativas en matemática se realizó el análisis del currículo que manejaba el colegio, encontrando la razón y la proporción como el objeto recurrente durante todos los periodos del año escolar; dadas sus múltiples concepciones. Esta corta experiencia también permitió crear y aplicar las primeras actividades usando la producción de textos en la experiencia del docente investigador.

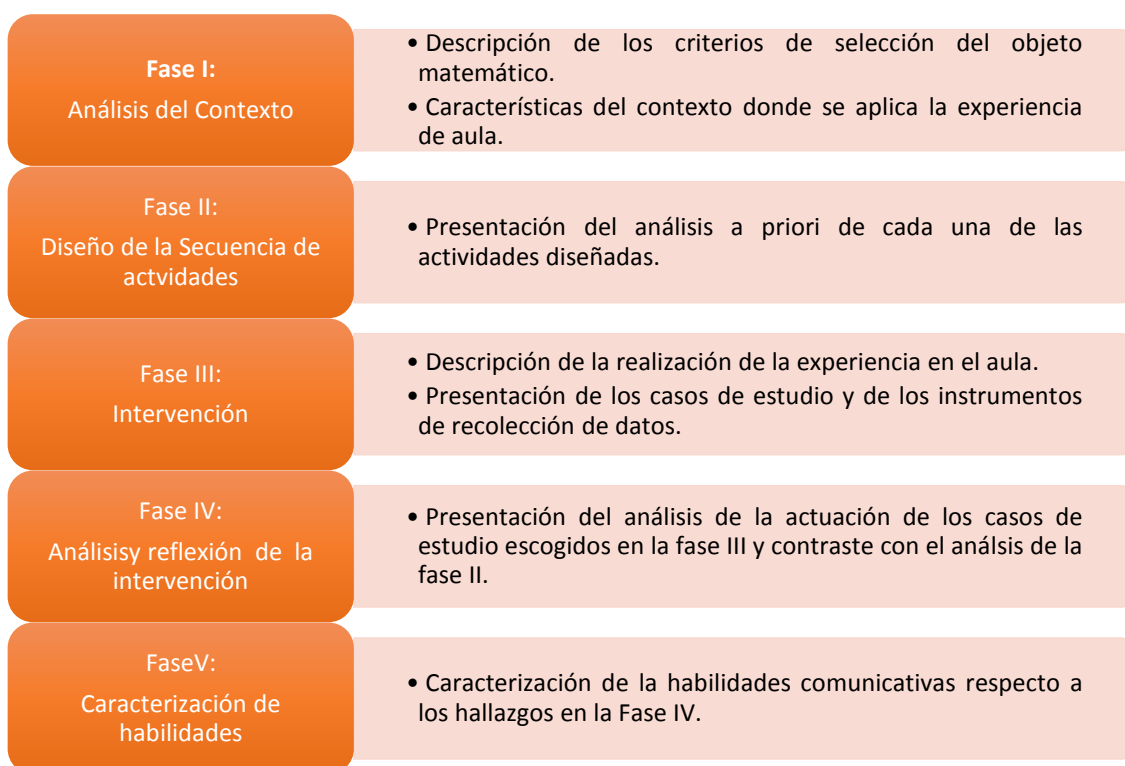


Figura 7: Fases para la Realización de la Experiencia en el Aula.

En la malla curricular (Tabla 1) se observa que específicamente las razones y las proporciones se ven en el tercer periodo del año escolar. Pero se puede observar que aparecen desde la concepción de los Racionales, hasta en la relación casos a favor sobre casos totales, de la definición de la probabilidad de un evento simple.

Lo anterior permitió que en el colegio donde se realizó la experiencia de aula y en el cual el docente tiene la autonomía para establecer el currículo, se pudiera establecer el momento ideal para realizar las secuencias didácticas, tomando como principio que los estudiantes no hubieran sido expuestos a ninguna conceptualización de la razón y la proporción.

Tabla 1: Malla curricular séptimo grado: Colegio Nuestra Señora del Rosario

PRIMER PERIODO	SEGUNDO PERIODO	TERCER PERIODO	CUARTO PERIODO
NÚMEROS ENTEROS ✓Concepto ✓Representación gráfica ✓Valor absoluto ✓Relación de orden ✓Adición y sustracción ✓Multiplicación y división ✓Potenciación y radicación ✓Polinomios Aritméticos ✓Ecuaciones ✓Problemas	NÚMEROS RACIONALES ✓Concepto ✓Fracciones Equivalentes ✓Conversiones ✓Relación de orden ✓Representación gráfica y plano cartesiano ✓Adición y sustracción ✓Multiplicación y división ✓Potenciación y radicación ✓Polinomios Aritméticos ✓Ecuaciones ✓Problemas NÚMEROS DECIMALES ✓Concepto ✓Notación decimal ✓Notación científica ✓Comparación ✓Adición y sustracción ✓Multiplicación y división	PROPORCIONALIDAD ✓Razón ✓Proporción ✓Propiedades ✓Proporcionalidad directa e inversa ✓Regla de tres simple y compuesta ✓Repartos proporcionales ✓Porcentajes ✓Interés simple	ESTADÍSTICA ✓Conceptos básicos ✓Caracterización de variables cualitativas ✓Medidas de tendencia central ✓Caracterización de variables cuantitativas PROBABILIDAD ✓Conceptos básicos ✓Espacio muestral ✓Técnicas de conteo ✓Cálculo de probabilidades

3.2 Fase II

En esta fase se realizó el diseño de las cinco actividades de la secuencia. Para ello, se tuvieron en cuenta los subtemas de la razón y la proporción estudiados por Fernández (2009). Las actividades implicaban posibilitar a los estudiantes la necesidad de interpretar, explicar y justificar. Así las secuencias estuvieron organizadas como se ve en la Tabla 2:

Tabla 2: Organización de la secuencia de actividades

Nombre	Propósito	Tiempo de ejecución
<i>Los muñecos de Doña Gloria.</i>	Diagnóstico Inicial	Una hora
<i>Adivina cuánto mide tu compañero</i>	Primera actividad	Dos horas
<i>Reparto de 35 camellos</i>	Segunda actividad	Dos horas
<i>Juego de Sombras</i>	Tercera actividad	Dos horas
<i>“Limonaderias”</i>	Diagnóstico final	Una hora

A continuación se presenta un análisis a priori de cada una de las actividades.

3.2.1 Diagnóstico inicial: Los muñecos de doña Gloria.

Los muñecos de doña Gloria es una actividad diseñada para que los estudiantes puedan evidenciar sus habilidades comunicativas iniciales, sin mediación alguna y de manera individual, donde se proyecta un contexto amable y agradable, cuyo objetivo principal es ayudar en lo que

tiene que ver con la construcción de muñecos con unas medidas no rutinarias, es decir, medidas no estandarizadas.

En un primer momento se presenta la situación general de la actividad (Ver Figura 8), mediante un lenguaje escrito y su refuerzo de manera pictórica, donde se espera que el estudiante pueda interpretar la situación planteada.

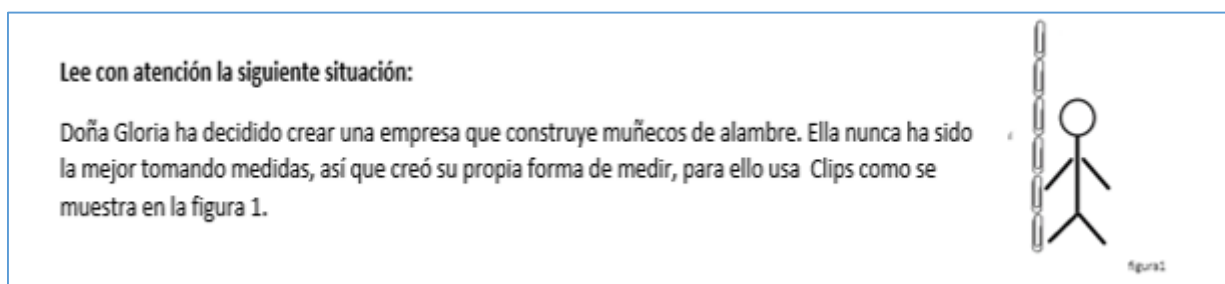


Figura 8: Contexto de la Primera Actividad

Luego se plantea una situación donde interviene una comparación de tipo cualitativo (Ver Figura 9). Fernández (2009) refiere que las situaciones con las que se debe iniciar el estudio de la razón y la proporción son aquellas en las que hay una comparación cualitativa. Esto debido a que es el primer precursor del concepto de razón y proporción, además genera en el estudiante la necesidad de interpretar, mediante un texto basado en su propio razonamiento.

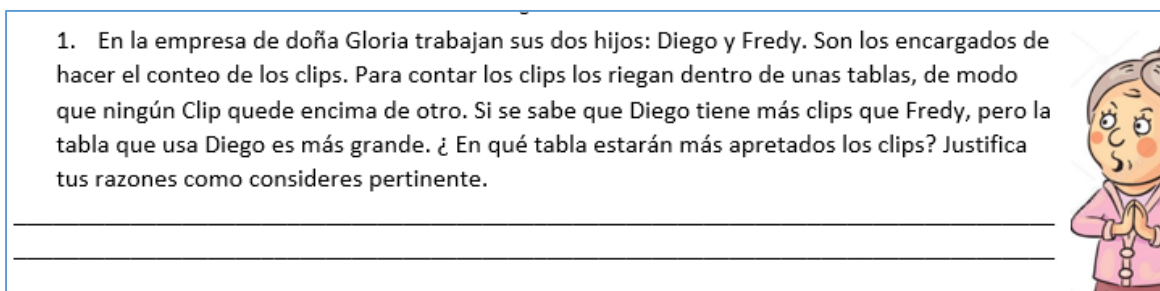
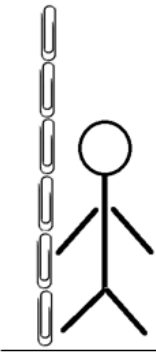


Figura 9: Problema de Densidad. Actividad Diagnóstico Inicial.

Aquí se espera que los estudiantes sin utilizar razones matemáticas, sino exponiendo desde su concepción y de manera escrita, puedan determinar la dependencia entre el espacio de la tabla y el número de clips. De esta manera se espera que empiecen a determinar una relación entre magnitudes, sin necesidad de operar partes concretas.

En el segundo ejercicio se pretende que el estudiante después de haber interpretado la situación, desde el texto introductorio hasta la Figura 10, pueda producir una versión pictórica de un muñeco que tenga la mitad del muñeco original de Doña Gloria.

2. Dibuja un muñeco de alambre que sea la mitad del muñeco expuesto a continuación



¿Cómo podrías explicarle a quien va a construir los muñecos, cómo hacerlo?

Figura 10: Ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica

De igual forma se le pide que mediante un texto, realice una explicación de cómo hacer para lograrlo, lo cual exige una descripción de los procedimientos realizados. Este ejercicio debería resultar fácil para estudiantes de séptimo grado, puesto que estamos usando una de las fracciones más naturales y reconocidas por el ser humano, la mitad. Se espera que al explicar utilicen tanto expresiones en el lenguaje cotidiano, como expresiones pictóricas para hacer explícita la mitad de las partes. No se descarta el uso de números en un conteo general en la altura del muñeco. Estos

ejercicios de baja dificultad se proponen para que el estudiante entre en confianza con la metodología que se está llevando, de manera que explique cada procedimiento y cada acción realizada.

Seguido del segundo ejercicio se le pide una acción similar a la anterior con la dificultad de que la razón asociada ya no es tan familiar al estudiante (Figura 11).

3. Doña Gloria construyó un muñeco con 12 clips de altura, ahora debes hacer uno que tenga dos tercios de esta altura.

Figura 11: Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica

Incluyendo aquí el razonamiento que pudo hacer la dueña, basado en lo aditivo erróneo y no en lo multiplicativo (Ver Figura 12).

Doña Gloria piensa que la medida del largo debe ser 13,5 Clips, justifica usando diferentes argumentos, entre ellos los matemáticos, por qué Doña Gloria está en lo correcto o por qué Doña gloria está equivocada.

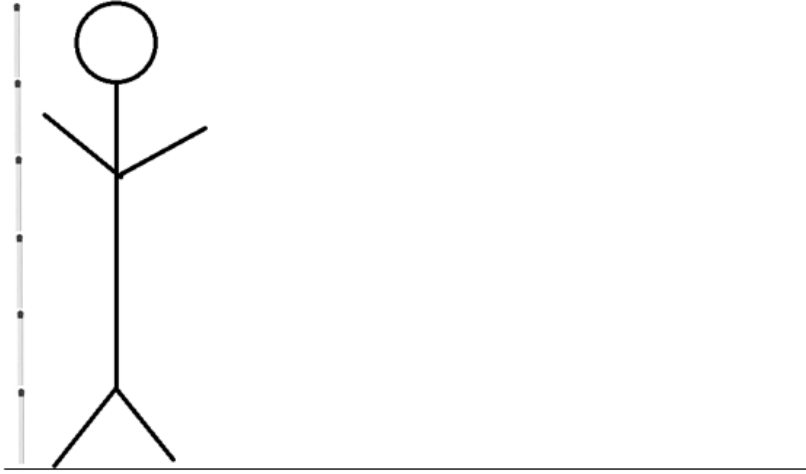
Figura 12: Segunda Parte del Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica.

La actividad propone que el estudiante justifique y compare procedimientos para lograr entender, cuestionándose si Doña Gloria tiene la razón; en este caso donde necesariamente deben surgir argumentos matemáticos para poder justificar las posibles posiciones respecto a la solución. Para terminar, nos encontramos con un ejercicio clásico de las razones y las proporciones, adaptado a la situación general planteada con los muñecos de Doña Gloria (Figura 13).

En este ejercicio existe un cambio en la medida y la información incluye las referencias en el lenguaje matemático y el gráfico. Se espera que surja la necesidad de hacer una comparación entre las razones o de que se plantee un problema donde exista una incógnita, dados tres valores,

ejercicio de valor perdido o proporcionalidad. Los estudiantes deben escribir una carta explicando el procedimiento realizado para encontrar el tamaño de Mr Tall. Esto exige argumentos de tipo matemático, además de la justificación de sus procesos e inicialmente la interpretación del ejercicio desde lo escrito a lo gráfico.

4. Doña Gloria quiere cambiar su sistema de medidas a fósforos, ella tiene la siguiente información: Tiene dos muñecos Mr Short que mide 4 clips de altura y Mr Tall que tiene 6 clips de altura. ¿Cuántos Fósforos se necesitan para lograr la altura del muñeco Mr Tall? (En la imagen se observa el número de fósforos que se necesitan para lograr la altura de Mr Short)



Esríbele una carta a Doña Gloria, explicando el procedimiento que usaste para encontrar la altura de Mr Tall en fósforos

Figura 13: Ejercicio 4 de la Actividad Diagnóstica

3.2.2 Adivina cuánto mide tu compañero.

Esta actividad (Figura 14) tiene como fundamento lograr darle significado a los resultados de procesos matemáticos que los estudiantes van a tener que encontrar, la dinámica es mucho más grupal, lo que permite que el estudiante pueda tener confianza con sus compañeros y así cuando lo escuchen o lean exponiendo sus interpretaciones, explicaciones y justificaciones, puedan apropiarse con un sentido de agradecimiento de las observaciones hechas.

En un primer momento se les indicará a los estudiantes que disponen de algunas herramientas para medir su estatura, también se les leerá y enfatizará los datos necesarios para el desarrollo de la actividad, también se recalca en los dos tipos de medidas que van a utilizar; el primero, las medidas reales, y el segundo, las medidas en la foto que cada estudiante tiene para la actividad. Para ello se les presentó la siguiente indicación, que incluye la tabla donde deben ubicar la información.

Estimado estudiante a continuación encontrarás una serie de tareas cuyo propósito es observar tus habilidades comunicativas, por esta razón te pido que sientas la libertad de expresarte tal cual como lo hace normalmente en una clase de matemáticas.

1. Usando tus herramientas para medir: regla y flexómetro. Completa la siguiente tabla:

Medida	Foto	Real
Tu brazo		
Tu estatura		
Estatura de la persona que está en la foto junto a ti.		



Figura 14: Ejercicio 1 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero

En un segundo ejercicio (Figura 15) dentro de esta secuencia, se les pedirá a los estudiantes que comprueben la medida de su brazo, medida que ya han obtenido por medio de la medición con el flexómetro, en este punto es importante para el docente revisar que los estudiantes tengan sus datos completos.

Es importante en este momento que los estudiantes puedan dar significado a todos los resultados posibles que obtendrán, se espera que muchos traten de encontrar medidas no convencionales y a pesar que el ejercicio pide que se encuentre esa medida de una manera analítica, usaran estos criterios para explicar sus procedimientos. También se espera que exista un error en la medida dada la posición de los brazos en cada una de las fotos y en la medida tomada. En

consecuencia, se espera que al enfrentar al estudiante a este tipo de incertidumbre, puedan generar ideas matemáticas y validarlas por sí mismos.

2. Para empezar vamos a suponer que desconoces la medida real de tu brazo. Tu tarea ahora es determinar esta medida real de manera analítica (de forma matemática) usando los datos que tienes en la tabla. Cuando tengas un resultado, compáralo con la medida real tomada. Escribe tus procesos.



Figura 15: Ejercicio 2 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero.

Seguido al segundo ejercicio, se pide a los estudiantes que expliquen lo que ha pasado con los procedimientos realizados y se les invita a pensar en cómo exponerlo a sus compañeros; como se observa en la Figura 16.

3. Escribe un texto explicando: ¿Cómo lo lograste? ¿Cuáles crees que son tus errores en el cálculo de la medida real? ¿Por qué no lo pudiste hacer? Prepárate para justificar lo que hiciste a tus compañeros.

Figura 16: Ejercicio 3 de la Actividad Adivina la Estatura de tu compañero.

Se consideró la idea de la exposición como un ejercicio de justificación verbal, además de ser una estrategia para que otros estudiantes que no hubiesen encontrado una realización entre el tamaño real y el tamaño de la foto, lo hicieran y así pudieran realizar el ejercicio que se propone posteriormente en la Actividad.

En el cuarto ejercicio se propone lo que se considera el ejercicio central de la actividad, el cual es encontrar la estatura del compañero de la foto, se espera que se plantee una situación de valor perdido o de proporción y por medio de la estrategia building up puedan establecer la solución reconociendo la razón entre las medidas reales y las medidas en la foto. Seguido a esto se les pide

a los estudiantes que produzcan un texto, en este caso una carta dirigida a algún ser querido donde explique lo que ha aprendido durante la experiencia en clase, se les pedirá que sean específicos y cuenten a detalle todos aquello que hicieron para lograr el cometido de encontrar la estatura del compañero de foto.

Para generar una heteroevaluación se les pide que compartan sus cartas, esto implica para un estudiante tener que leer la carta de un compañero y que un compañero lea la suya. Con este ejercicio se pretende que los estudiantes evalúen sus concepciones de los procedimientos usados y del detalle al explicar sus procesos. Finalizando así esta actividad.

3.2.3 Reparto de 35 camellos.

La idea original del reparto de los 35 camellos surge de la lectura del libro el hombre que calculaba de Malba Tahan. El problema que se ha escogido es uno de los tantos que se les presenta al hombre que calculaba y su compañero de viaje (al mismo tiempo el relator de la historia), y es el ejercicio central de esta secuencia. Antes de hacer preguntas acerca de la lectura se estableció un precursor para el análisis de las relaciones cualitativas por medio de un ejercicio de densidad. Así se establece la primera actividad (

1. Antes de responder las preguntas sobre la lectura, imagine lo siguiente:

Si en el desierto hubiese un lugar para dejar camellos (como un parqueadero de camellos).

En el parqueadero: MohamedParking, hay lugar para 250 camellos y están siendo ocupados 150 lugares.

En el parqueadero Aliparking hay lugar para 150 camellos y están siendo ocupados 90 lugares.

Explique con sus propias palabras cuál es el parqueadero más lleno. ¿Por qué?

Figura 17); luego de la lectura de la parte del libro, como un problema de densidades donde usamos razones iguales para determinar la relación entre el número de espacios disponibles y el número total de espacios.

Los estudiantes se enfrentarán a un proceso de comparación que podría resultar erróneo, donde por ejemplo se espera que algunos comparen solamente el total de lugares debido a una deficiencia en la lectura y evidentemente un problema de interpretación del problema. Se espera también que los estudiantes que van más allá puedan determinar que los dos “parqueaderos” están un 60% llenos.

1. Antes de responder las preguntas sobre la lectura, imagine lo siguiente:

Si en el desierto hubiese un lugar para dejar camellos (como un parqueadero de camellos).

En el parqueadero: MohamedParking, hay lugar para 250 camellos y están siendo ocupados 150 lugares.

En el parqueadero Aliparking hay lugar para 150 camellos y están siendo ocupados 90 lugares.

Explique con sus propias palabras cuál es el parqueadero más lleno. ¿Por qué?

Figura 17: Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.

En las preguntas 2 y 3 se indaga al estudiante sobre la lectura, obteniendo de allí la comprensión que tuvo el estudiante de la situación y la posible interpretación matemática de la misma. Para la cuarta pregunta (ver Figura 18) se hace énfasis en la situación vista desde las matemáticas, asegurando la percepción de los estudiantes que aún en los puntos 2 y 3 no la habían plasmado.

4. Justifique desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Por qué es posible lo que hizo el “Hombre que Calculaba”?

Figura 18: Ejercicio 4 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.

De igual forma se espera que existan estudiantes que no hayan entendido la situación y por consiguiente no tengan un argumento matemático válido para exponer, por esta razón la siguiente actividad tiene como propósito la socialización en parejas, donde aquellos estudiantes que no han comprendido la situación, puedan hacerlo. También se les pide que proyecten en un texto una posible socialización al grupo en general de lo que pudieron ver matemáticamente de la situación, en la medida que los estudiantes van compartiendo en parejas, el docente irá haciendo preguntas específicas de la situación para centralizar el problema real.

Finalmente, se reutilizó un ejercicio de los planteados en Fernández (2009) para que los estudiantes mediante la producción de un texto formulen un ejercicio dada una imagen, como se nota en la Figura 19.

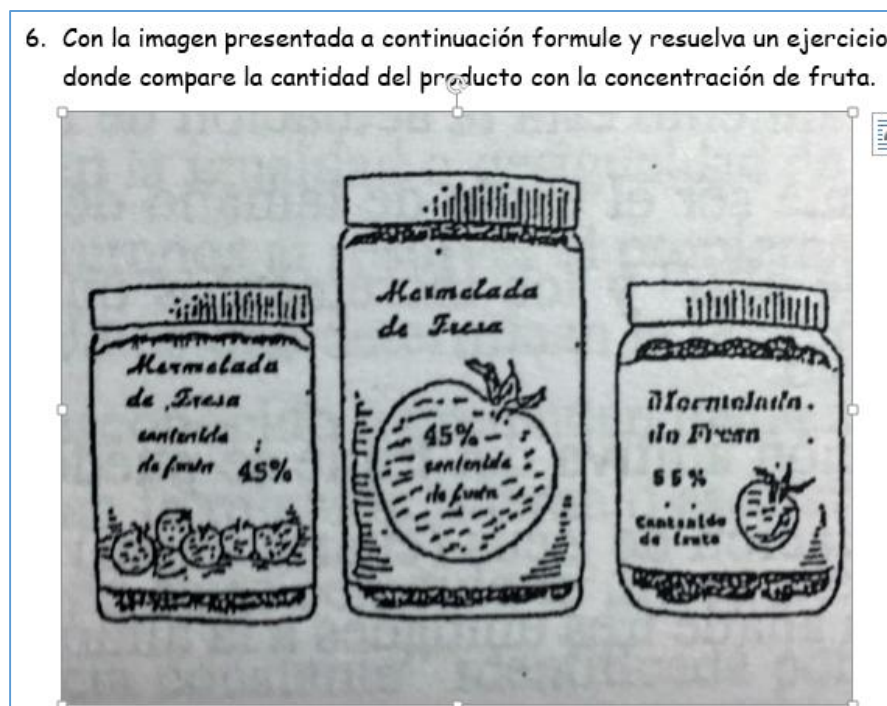


Figura 19: Ejercicio 6 de la Actividad Reparto de 35 Camellos.
Fuente: Fernández (2009), pág.97

Se espera que después de haber socializado los resultados matemáticos acerca del reparto de los 35 camellos y la normalización necesaria de la razón al 100%, lo estudiantes puedan utilizar estos principios en la comparación de la concentración de fruta en los frascos de la imagen. También se podría esperar situaciones donde el estudiante le dé prioridad a la cantidad del producto y no a la concentración expuesta en porcentaje.

3.2.4 Juego de Sombras.

Esta actividad tiene otro enfoque dada su practicidad, es necesario realizarla afuera del aula, trabajaremos el teorema de Tales de Mileto sin que necesariamente le entreguemos el concepto de antemano al estudiante. Para la preparación de la actividad se disponen de tres pitillos de diferentes tamaños, los estudiantes por la actividad Adivina cuanto mide tu compañero conocen de antemano su estatura, de igual manera, se prevé que el tiempo será corto dados los traslados, por esta razón la actividad consta de únicamente tres ítems generales, pero dentro de cada ítem existen dos o más ejercicios, resultando en una actividad de producción limitada en cantidad.

La primera situación que presentamos en la Figura 20 es absoluto seguimiento de instrucciones donde los estudiantes deben completar la siguiente tabla realizando las medidas:

1. En esta oportunidad jugaremos con las Sombras, con las herramientas que tenemos, completaremos los siguientes datos. Responde

	Tamaño	Sombra
Pitillo 1		
Pitillo 2		
Pitillo 3		

Figura 20: Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.

En este mismo ítem presentamos dos preguntas referentes a los datos encontrados, la primera de ella se refiere a la relación existente entre la medida del pitillo y la medida de su sombra respectiva. En este punto después de todas las actividades que hemos realizado sería natural el planteamiento de la razón como relación entre las dos medidas, aunque se presentaría el problema del uso de las medidas no enteras dado que la medida de los pitillos no se premeditó. Seguido se les pide a los estudiantes que encuentren cual sería la medida de la sombra de ellos en ese momento, aquí surgirá la necesidad de medir directamente la sombra pero dado el cambio de la posición del sol, la medida no será igual y deberán refugiarse en la relación que tienen entre la medida del pitillo y la sombra de cada pitillo.

Podría suceder que algunos estudiantes aún prevalezcan en el análisis desde el punto de vista aditivo y no encuentren la relación multiplicativa, para limitar este pensamiento se sugiere que el trabajo sea realizado en grupos de tres estudiantes para que dado este compartir de ideas discriminen acciones válidas de las acciones inválidas para solucionar las situaciones.

En una segunda actividad presentada en la Figura 21, se plantea la misma situación matemática pero con los datos ya entregados de una situación del juego de sombras; con una razón premeditada entre enteros, se puntualiza en el cálculo esperando que los estudiantes determinen un problema de valor perdido.

2. Alejandra plantea el juego de las sombras a sus amigos. Sabiendo que ella mide 162 cm y su sombra 18 cm. Pregunta a Víctor: ¿Cuál sería la medida de su sombra si el mide 171 cm?, pregunta a Susana: ¿Cuál es su estatura si la sombra mide 16 cm?, a María le pregunta: ¿Cuál es la medida de su sombra si ella mide 135 cm?

Imagina que tú eres Víctor, Susana y María y responde las preguntas planteadas por Alejandra, justificando cada resultado.

Figura 21: Ejercicio 2 de la Actividad Juego de Sombras.

Dada la experiencia tomada por los estudiantes, las discusiones y exposiciones de sus compañeros, se espera que los estudiantes estén en la capacidad de solucionar estas preguntas de manera rápida, si no lo hicieran de esta forma evidenciarían la dificultad en el reconocimiento de proceso de solución del ejercicios anterior. Finalmente, se presenta un ejercicio de producción de texto, ver en la Figura 22. En este caso en forma de historieta donde queremos ver cómo los estudiantes acompañan sus representaciones pictóricas con justificaciones matemáticas, utilizando la posición de uno de los sabios de Egipto. Se espera que la experiencia en la medición y la comparación realizada en un primer momento de esta actividad, les contribuya en la representación pictórica de la situación y el complemento en texto que justifica sus elecciones.

3. La historia dice que fue Tales de Mileto quien por primera vez utilizó la comparación entre la medida de las sombras de un palo y la pirámide de Keops para determinar la altura de esta última. Realiza una historieta donde muestres como pudo ser este momento tan importante de la historia, **Escribe un texto complementario a la historieta contando lo que quieras decir.**

Ten en cuenta que Tales de Mileto es considerado uno de los cinco sabios de Egipto, por tal razón todo aquello que él diga debe tener un argumento válido.

Figura 22: Ejercicio 3 de la Actividad Juego de Sombras.

3.2.5 Diagnóstico Final: “Limonaderías”.

Como diagnóstico final se estableció una actividad (Figura 23) cuyo problema principal tiene que ver con un ejercicio clásico de Karplus et al (1983a, p.53) de la serie Lemonade Puzzle citado por Fernández (2009) , donde se exponen a los estudiantes a comparaciones entre cantidades de agua y zumo de limón, generando así razones y proporciones. Estas situaciones pueden verse como comparación de razones según la clasificación de Fernández (2009).

En un primer momento de manera pictórica se presentan dos situaciones para la combinación de una limonada, en la “Limonadería” 1 se presenta mayor concentración de limón que en la “Limonadería” 2.



Figura 23: Situación Inicial del Problema de las Limonaderías

Generando así que el estudiante determine la relación de tantos vasos de agua por cada vaso de zumo de limón, o cada vaso de zumo de limón por cada tantos vasos de agua. Se espera que los estudiantes logren responder de manera acertada a la situación planteada, ya que en las anteriores actividades habíamos trabajado, desde de lo cualitativo con el tamaño de las tablas y el número de clips en el diagnóstico inicial, pasando por la comparación en esa idealización de los “parqueaderos para camellos”, donde las razones eran iguales.

En una segunda pregunta para esta misma situación (Figura 24) se plantea el aumento proporcional de las cantidades para generar unidades iguales en concentración de limón:

2. Si en la Limonadería 1, necesitaran tres jarras de limonada, ¿Cuántos vasos de agua y cuantos vasos de zumo de limón necesitan? Explica como lo sabes.

Figura 24: Ejercicio 2 del Diagnóstico Final

Se espera que los estudiantes a través de su conocimiento del racional puedan amplificar la razón tres veces, o puedan realizar una tabla de dos variables, donde una de ellas dependa de la otra. En un nivel bajo de respuesta se espera que los estudiantes decidan responder con revolver tres jarras iguales, sin cuidado de la proporción.

El tercer ejercicio (Figura 25) está relacionada con la situación inicial, pero en esta ocasión se plantea una razón con una magnitud no entera y cuyo resultado para esa relación, termina siendo un parte del vaso de zumo de limón.

3. Si en la Limonadería 2 tuvieran solo un vaso y medio de agua, ¿Cuántos vasos de zumo de limón necesitarían para hacer una limonada con el mismo sabor?

Figura 25: Ejercicio 3 del Diagnóstico Final

Se espera que los estudiantes encuentren dificultad en el uso de las partes no enteras, posiblemente dudarán de la respuesta encontrada, para lo cual su razonamiento debe ser avanzado para entenderlo y quizá crear una tabla que aumente con medias partes del vaso de agua.

Para el cuarto ejercicio se plantea la situación en forma inversa y con la necesidad de comprender el porcentaje como una razón normalizada para cada cien. Los estudiantes tendrán que dibujar el número de vaso de agua y el número de vasos de zumo de limón para una concentración del 80% de limón. Se espera que en este punto del trabajo realizado los estudiantes puedan lograrlo y realizar una de las posibles representaciones, usando parte enteras en las relaciones, no se descarta el uso de partes no enteras, pero su probabilidad es muy baja.

En el quinto ejercicio (Figura 26) se planteó un cambio de medida, de cierta forma es la adaptación del ejercicio clásico de Mr Tall and Mr Short, en este caso presentamos el cambio de medida en el vaso:

5. Imagina que en la Limonaderia 2 cambiaron los vasos de medida, ahora para completar el agua, se deben verter 13 vasos con la nueva medida. Determina cuantos vasos de la nueva medida se deben verter para que la limonada tenga el mismo sabor. Explica tus argumentos.

Figura 26: Ejercicio 5 del Diagnóstico Final.

Si se evaluara la dificultad del ejercicio para este entorno y en este momento, se podría decir que es de un nivel alto. La comparación de las medidas va a generar una cantidad no entera de número de vasos de zumo de limón, la interpretación del resultado generará algunas complicaciones. El problema puede abordarse desde lo que llamamos building-up o desde el valor perdido.

Para los ejercicios 6, 7 y 8, de esta actividad, se usó una tabla que se presenta en la Figura 27 con información acerca del precio de las limonadas, en la Limonadería 1 los precios mantienen una proporción, mientras que en la Limonadería 2, no existe la proporción.

En las siguientes tablas se presentan los precios según las Limonaderías.

Limonaderia 1		Limonaderia 2	
Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
1	1.500	1	2.000
2	3.000	2	3.000
3	4.500	3	4.000
4	6.000	4	5.000

Figura 27: Tabla de Precios para las Limonaderías

Inicialmente se les indaga acerca del posible precio de siete limonadas en la Limonadería 1, donde por la proporción existente será fácil de determinar, ya sea mediante la construcción de la tabla o mediante un problema de valor perdido o regla de tres que llamamos en nuestro ambiente escolar. En el siguiente ítem se propone la misma pregunta para la Limonadería 2, donde se espera que el estudiante proponga un valor o en el mejor de los casos determine que no es posible establecerlo por la falta de proporcionalidad en la relación entre las magnitudes. Finalmente para esta tabla se establece un ejercicio donde se pregunta de manera general cómo saber el precio de varias limonadas, buscando un proceso de generalización en expresiones no necesariamente simbólicas, sino más bien en texto. En este último ejercicio sobre los precios deberán establecer la diferencia entre la Limonadería 1 y la Limonadería 2, determinando la no posibilidad de generalizar para la segunda Limonadería.

Para terminar esta actividad se plantea un ejercicio de producción textual como se muestra en la Figura 28, donde se pretende retomar todas las ideas de las razones en las Limonaderías. Los estudiantes deberán convencer a un magnate para que invierta en su negocio de Limonadería.

Como se puede ver en la imagen, el texto a producir es una carta con ciertos límites en el contenido, de esta manera podremos ver la comprensión de los estudiantes de acuerdo a los conceptos trabajados internamente en toda la actividad.

9. Finalmente, imagina que eres un comerciante y vas a crear tu Limonaderia y necesitas que te apoyen económicamente. Convince Al magnate Dubeibe para que invierta en tu empresa.
- Necesitarás determinar la concentración de la limonada, la tabla de precios, los bosquejos de la propaganda para la venta, los posibles cambios, las posibles competencias, usa tu imaginación y conocimiento. Todo esto escríbelo en una carta, justificando cada una de las cosas que ofreces.

Figura 28: Ejercicio 9 del Diagnóstico Final.

3.3 Fase III

Para la realización de esta experiencia de aula se diseñó una secuencia con cinco actividades, dos de ella las presentamos como diagnósticas, una inicial y otra final. A diferencia de las tres actividades centrales, las diagnósticas no tuvieron un espacio para compartir o justificar ideas.

Las actividades diseñadas se basaron en los diferentes subtemas de la razón y proporción presentados por Fernández (2009), en ningún momento de la ejecución se les nombró a los estudiantes el objeto matemático y tampoco tenían conocimiento de este, cada actividad tenía su contextualización general y en base a eso los estudiante participaron desde la interpretación hecha, la explicación realizada y la justificación cuando era necesario aclarar sus ideas.

La aplicación de las actividades se dio bajo el respectivo permiso de las autoridades del colegio y mediante permiso escrito para la filmación de los estudiantes por parte de cada padre de familia o acudiente, la secuencia de actividades se realizó de la siguiente forma y en los horarios allí establecidos (Ver

Figura 29).

Día	Hora	Tema
Miércoles 2 de Mayo	3.00 p.m. a 4.00 p.m.	Diagnóstico inicial
Viernes 4 de Mayo	3:00 p.m. a 5:00 p.m.	Adivinando Estaturas
Lunes 7 de Mayo	3:00 p.m. a 5:00 p.m.	Reparto de Camellos
Miércoles 9 de Mayo	3:00 p.m. a 5:00 p.m.	Tales de Mileto
Viernes 11 de Mayo	3.00 p.m. a 4.00 p.m.	Diagnóstico Final

Figura 29: Cronograma Usado en la Intervención de la Experiencia de Aula

Se han escogido tres casos de estudio: Emanuel, Miguel y Sofía. Fueron escogidos luego de la realización de las actividades, no fue premeditado para seguirlos siempre en la grabación. La elección se da por la participación directa con el docente durante las actividades, en el caso de Emanuel y Miguel, dada su participación activa y su forma de tomar las actividades como retos solucionables. En el caso de Sofía fue porque solía estar despistada, sus respuestas en ocasiones no eran coherentes con lo que se realizaba en las actividades.

Cabe resaltar aquí que Emanuel en la normalidad de aula es un estudiante activo, le gusta preguntar hasta aclarar sus ideas, su comportamiento en ocasiones no es el mejor puesto que se distrae fácilmente si la clase no le interesa o en ocasiones porque ya había entendido y quería seguir sin importar el ritmo de la clase.

Miguel en la normalidad de las clases es un estudiante muy calmado, en algunos momentos muestra argumentos muy válidos, como también tiene otros momentos en los cuales muestra inseguridad y con ello el desconocimiento y el desánimo para resolver situaciones de clase.

Finalmente, Sofía, es una niña con muchas dificultades, es poco participativa, es de aquellas estudiantes que no se sienten; ni para bien, ni para mal. Siempre se ha dedicado a cumplir con lo que tiene que hacer en la clase, sin ir mucho más allá.

En cuanto a la recolección de datos uno de los instrumentos de recolección de datos que se usó fue el de la filmación, todas las secesiones fueron filmadas realizando tomas generales, en los momentos de ejecución y en algunos momentos se enfocaba en los alumnos que tuvieran la palabra, de igual manera se grabó las justificaciones de los estudiantes en el tablero o donde fuese necesario. El otro instrumento de recolección de datos se dio a través de las guías de trabajo que fueron recogidas en cada sesión.

3.4 Fase IV

Con los datos recogidos en las filmaciones y las hojas de trabajo de los estudiantes en la intervención descrita en la fase II, se realizará el análisis a posteriori de la secuencia didáctica y se presentará en el siguiente capítulo de este texto, teniendo en cuenta la relación con el análisis a priori presentado en la fase II.

Las categorías de análisis se definieron usando los subtemas de la razón y la proporción como problemas de cada tipo, es decir: Problemas de escala, problemas de densidad, problemas de comparación de razones y tanto por ciento, problemas de valor perdido y proporcionalidad. Para cada problema se determinó la factibilidad para poder ver las habilidades comunicativas de cada uno de los estudiantes escogidos como casos de estudio. De esta manera las categorías de análisis son:

- Habilidad interpretativa con problemas de escalas.
- Habilidad interpretativa con problemas de densidad.

- Habilidad interpretativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- Habilidad interpretativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.
- Habilidad explicativa con problemas de escala.
- Habilidad explicativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- Habilidad explicativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.
- Habilidad justificativa con problemas de escalas.
- Habilidad justificativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento.
- Habilidad justificativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad.

Se realizará el análisis bajo estas categorías teniendo en cuenta la viabilidad para cada una de las habilidades comunicativas y bajo el diseño a priori de las actividades.

3.5 Fase V

En esta fase y mediante la información recolectada y analizada se procederá a responder a la pregunta de investigación: *¿Cómo favorecer el proceso comunicativo en estudiantes de séptimo grado mediante experiencias didácticas asociadas a la razón y la proporción?* Con base a los datos recolectados en estos tres casos de estudio. Además, pretendemos caracterizar el proceso de comunicación en estudiantes de séptimo grado que han estado involucrados en la producción de textos alusivos a la razón y la proporción.

Se espera finalmente que este trabajo responda a las necesidades de docentes que comprenden la importancia del proceso de comunicación en las matemáticas y les sirva como guía para que realicen sus propias experiencias de aula.

Capítulo 4: Caracterización de Habilidades Comunicativas en Estudiantes de Grado 7º

En este capítulo reportamos los resultados del análisis y reflexión sobre la intervención realizada. Para ello se utilizaron como categorías de análisis las tres habilidades descritas por Gómez (2018) y en cada una de ellas se analizan los subtemas de la razón y las proporciones, propuestos por Fernández (2009).

4.1 Habilidad interpretativa de problemas de escalas

Según Gómez (2018) la habilidad interpretativa consiste en la capacidad del estudiante para comprender y dar sentido a la estructura de un problema (expresado en lenguaje verbal o matemático); así como la de entender o leer demostraciones, definiciones, gráficos, mapas o esquemas matemáticos en los que se plantean argumentos y/o procesos de un objeto matemático de estudio.

Los problemas de escalas establecen la relación entre la comparación de dos magnitudes, de acuerdo a Singer y Resnick (1992), haciendo uso de las relaciones parte-todo y parte-parte, agrupan los problemas en dos tipos: “por cada” y “de cada”, se considera que las escalas hacen parte del “por cada” bajo la concepción del parte-parte.

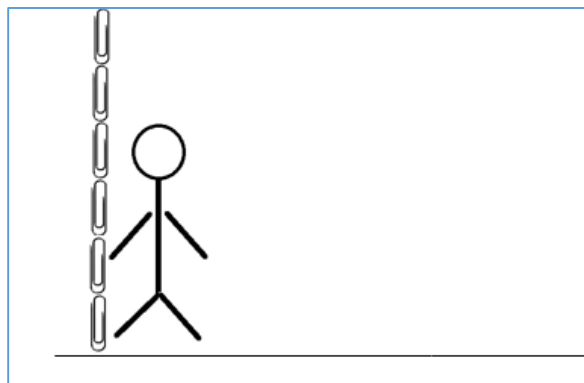


Figura 30: Representación Pictórica de los Muñecos de Doña Gloria

A continuación, se exhibe el resultado del análisis de la segunda actividad del diagnóstico inicial (*Los muñecos de Doña Gloria*). Como se explicó en el apartado 3.2.1. El contexto de la situación es que Doña Gloria crea muñecos de alambre con una medida no estándar, con clips. Al estudiante se le presenta la imagen de la Figura 30 y se le pide que dibuje un muñeco que sea la mitad del que está expuesto.

En la Figura 31 se presenta la respuesta de Emanuel, como se puede observar, para Emanuel fue fácil interpretar la escala a partir de la imagen presentada. Para él, fue un proceso muy sencillo, tal cual y como se diseñó. Usó la relación típica “la mitad de” que hubiese podido ser leída de la siguiente manera: por cada dos del original habrá uno del nuevo muñeco, o lo que es lo mismo, por cada uno del nuevo habrá dos en el original. Aquí se hace referencia a la relación de los clips. Emanuel se ayudó mucho más en la representación pictórica que en los términos matemáticos del enunciado para interpretar la situación.

En el caso de Miguel (Figura 32), interpreta la expresión matemática “la mitad” como un factor, lo puede entender de acuerdo a cada parte del muñeco, o al total de la altura del mismo. En este caso el estudiante reconoce la relación existente entre las dos medidas, una para el muñeco original y otra para el muñeco nuevo determinando entre ellos una proporción, que básicamente

en la teoría es entendida como una escala. También es importante resaltar la predicción realizada según el texto. Miguel reconoce que el muñeco nuevo debe ser de menor tamaño que el original, acto que no necesariamente se mostró en la ejecución del diagnóstico inicial por parte de sus compañeros.

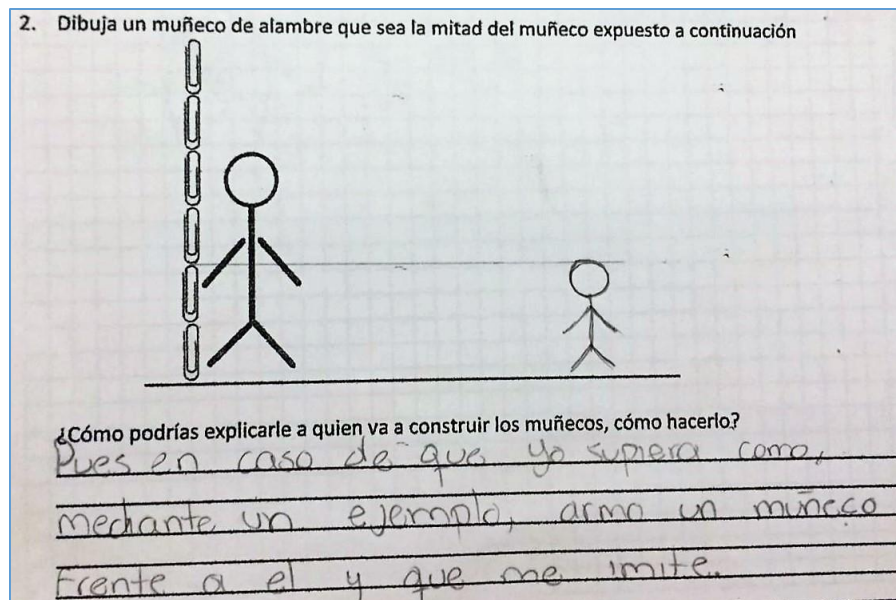


Figura 31: Respuesta Propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica.

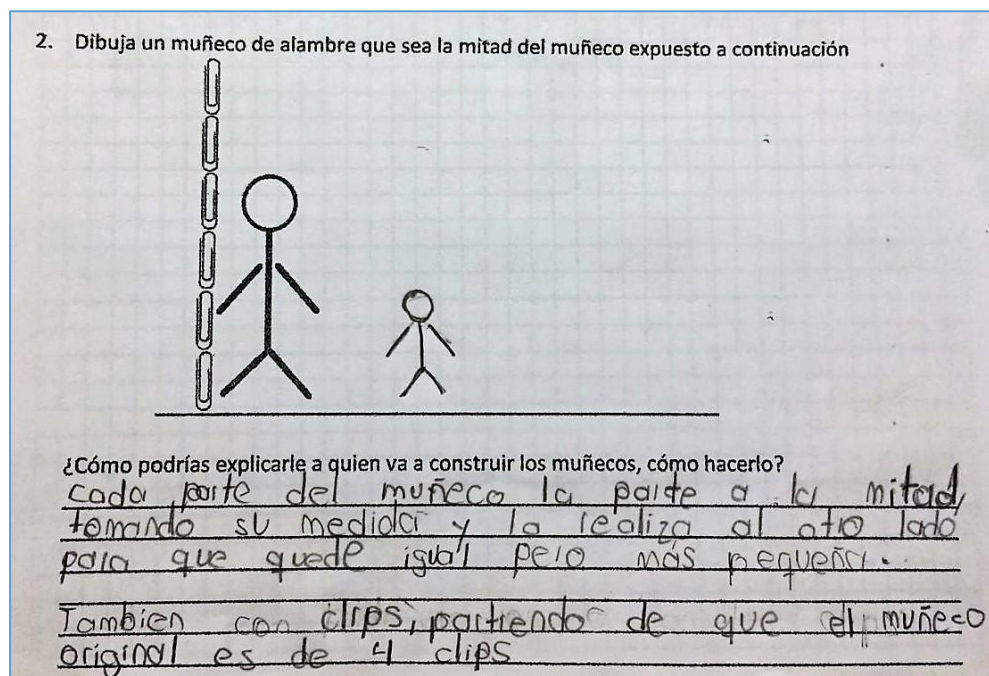


Figura 32: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica.

Sofía es una de las estudiantes que no hizo la predicción de Miguel, la interpretación de Sofía en su producción pictórica plantea que el muñeco nuevo debería ser más grande que el original, como se muestra en la Figura 33. A pesar que Sofía, en su explicación determina una relación obvia entre los clips y el tamaño del muñeco, a mayor cantidad de clips, mayor estatura. Sofía no comprende o por lo menos no expresa de ninguna forma la relación entre las medidas del muñeco original y el nuevo muñeco con relación a la escala planteada.

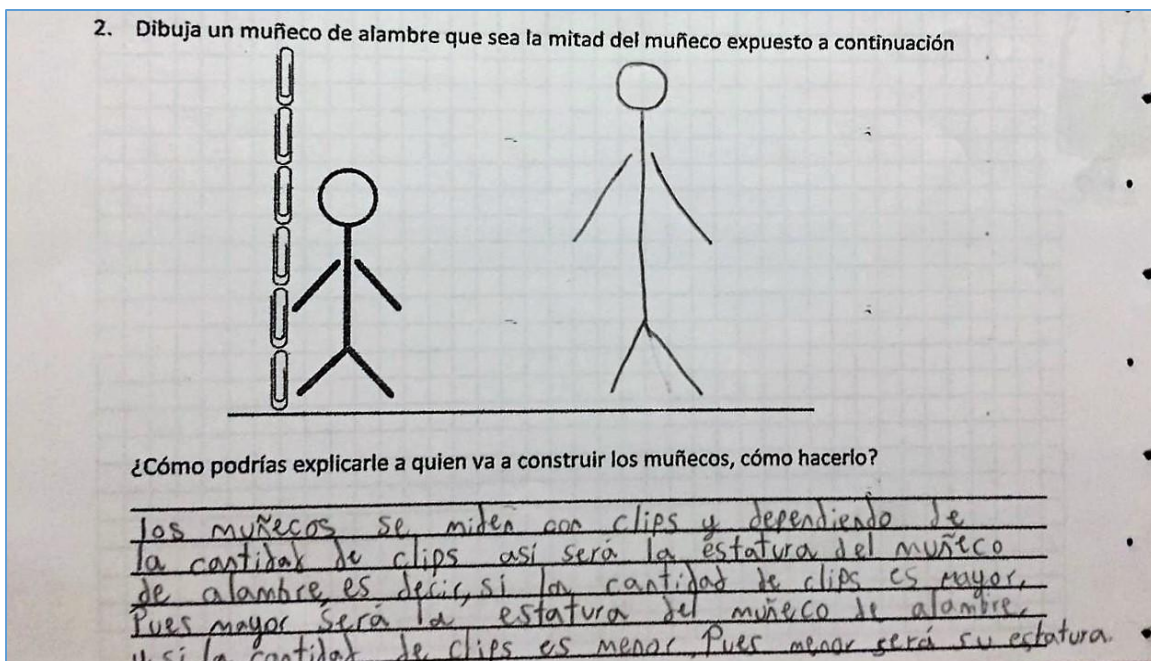


Figura 33: Respuesta Propuesta por Sofía al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica

Otra de las situaciones en donde se presenta un problema de escalas es en el ejercicio 2 de la actividad: *Adivina cuánto mide tu compañero*. Esta actividad requiere comprender que una foto es una representación a una escala menor, en la mayoría de las veces, de un objeto real. A los estudiantes se les pidió que trajeran una foto donde salieran de pie y con otra persona al lado, en el ejercicio 1 de esta actividad ellos recogieron unos datos específicos que se muestran en la Figura 34

Medida	Foto	Real
Tu brazo		
Tu estatura		
Estatura de la persona que está en la foto junto a ti.		

Figura 34: Tabla de Datos Para Realizar la Actividad Adivina la Estatura de tu Compañero

La actividad 2 de este ejercicio pide al estudiante suponer que no conoce la medida de un brazo ya tomada para que analíticamente la encuentre. Para esto el estudiante debe relacionar la medida de la estatura en la realidad y la medida de la estatura en la foto, esto le permitirá determinar cuántos centímetros habrá en la realidad por cada centímetro en la foto. Veamos que sucedió con Emanuel (Figura 35):

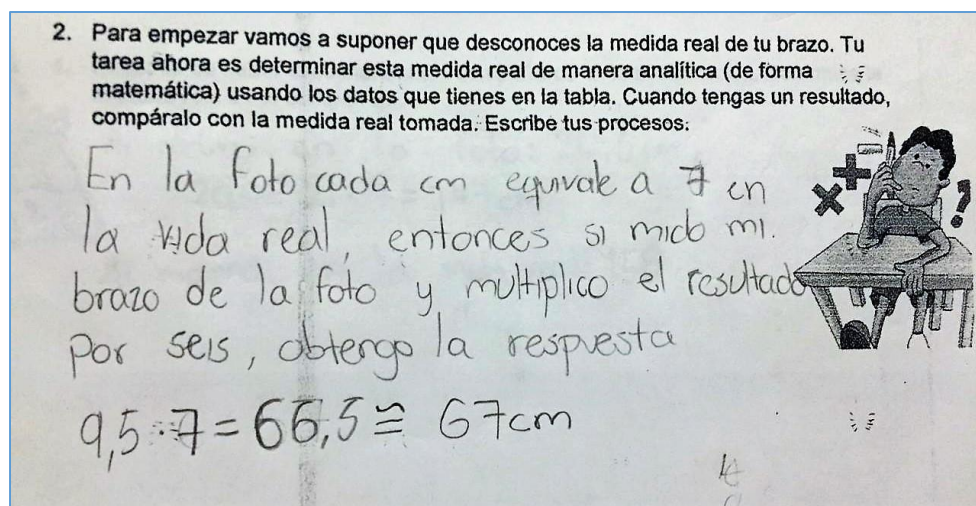


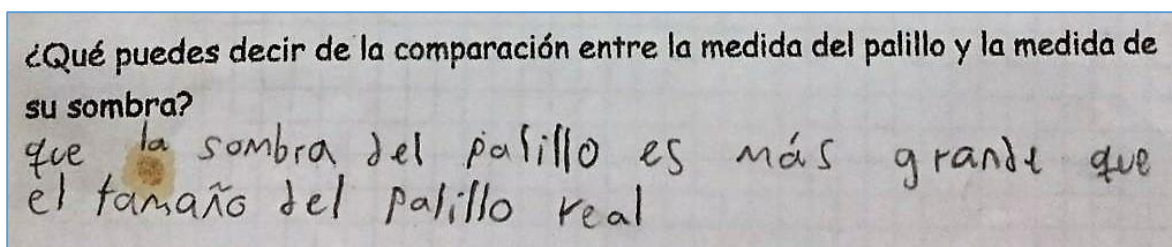
Figura 35: Respuesta Propuesta por Emanuel al Ejercicio 2 de la Actividad Adivina la Estatura de tu Compañero.

En este ejercicio se presentó dificultad por la mayoría de los estudiantes, ellos no lograban comprender el enunciado y el docente, tuvo que explicar lo que se quería decir con “suponer que la desconoces”. Emanuel, en cuanto leyó supo que existía una relación determinada por una escala, donde por cada centímetro en la foto existían siete centímetros en la realidad. Más adelante retomaremos este ejercicio para mostrar la habilidad de justificar que se pudo evidenciar en una grabación.

Miguel y Sofía no pudieron interpretar la situación. Sofía decidió no responder, mientras que Miguel modificó lo que había escrito después de la socialización hecha por Emanuel. A diferencia de Sofía, Miguel con la explicación de Emanuel pudo interpretar la situación y

responder al cuarto ejercicio de esta actividad que se refería a encontrar la estatura del compañero de la foto donde deberían tener en cuenta la escala que determina la foto.

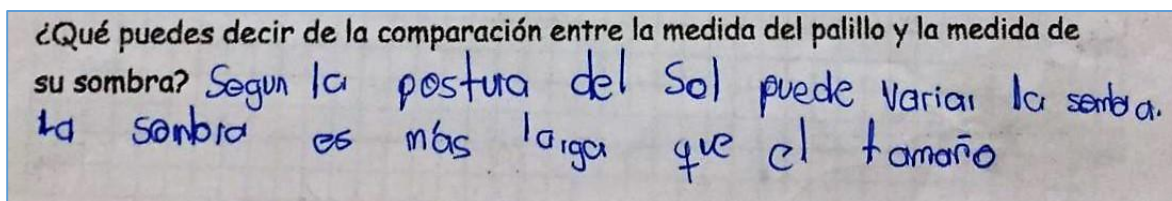
Para seguir reconociendo la habilidad interpretativa en problemas de escalas se retoma el ejercicio 1 de la Actividad: Juego de sombras. El ejercicio pedía relacionar la longitud de un pitillo con su sombra, específicamente pregunta al estudiante: “¿Qué puedes decir de la comparación entre la medida del pitillo y la mitad de su sombra?” Para Sofía la relación es sólo la observable durante el experimento de poner los pitillos en el sol a esa hora (Ver Figura 36):



¿Qué puedes decir de la comparación entre la medida del palillo y la medida de su sombra?
que la sombra del palillo es más grande que el tamaño del palillo real

Figura 36: Respuesta Propuesta por Sofía al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.

Miguel va más allá, pero fuera del contexto matemático y deduce que el tamaño de las sombras dependerá de la hora del día, pero no interpreta la relación entre el tamaño del pitillo y la sombra, como se observa en la Figura 37.



¿Qué puedes decir de la comparación entre la medida del palillo y la medida de su sombra? Según la postura del Sol puede variar la sombra. La sombra es más larga que el tamaño

Figura 37: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.

Finalmente, Emanuel puede determinar una relación matemática generalizada para la situación, mostrando su habilidad para interpretar (Figura 38).

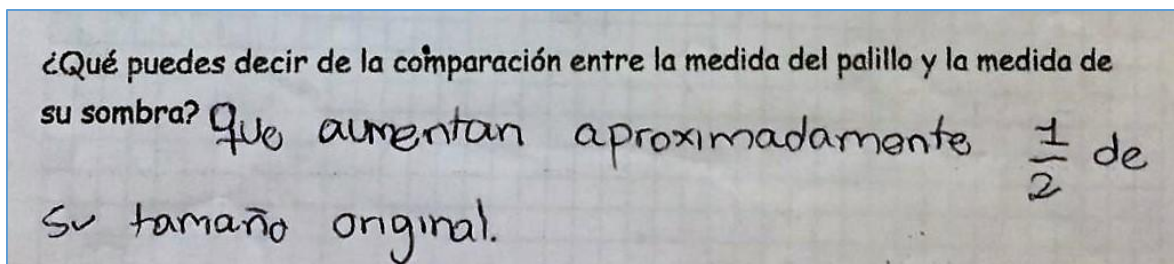


Figura 38: Respuesta Propuesta por Emanuel al Ejercicio 1 de la Actividad Juego de Sombras.

De manera específica podemos ver su interpretación de la situación en la conversación que tuvo con el docente, quien intenta que trate de establecer la razón determinada en la situación para comprender la escala.

Emanuel: ... Profesor ¿Las respuestas se pueden compartir?

Profesor:- Realiza un gesto dejando a disposición del estudiante si lo quiere hacer o no.-

Emanuel: Sí pero es que quiero patentar una respuesta.

Profesor: ¿Por qué? ¿Qué pasó?

Emanuel: Porque Gallardo (Miguel) me la quita y se queda con el crédito.

Profesor: Muestre- tomando la hoja de trabajo de Emanuel-

Emanuel: que aumenta aproximadamente el doble de su tamaño original...Pues por lo que yo veo porque el pitillo medía 20cm y su sombra medía 30

Profesor: y en una relación matemática ¿Cómo lo podría determinar?- aludiendo a una razón-

Más adelante...

Profesor: ¿Qué pasó Emanuel?

Emanuel: Pues lo que le decía, ¿No? Que la medida de la sombra igual la mitad de la medida original más la medida original. Es que no sé cómo expresarlo mejor.

Profesor: expréselo como una fracción...

Emanuel: si, o sea, un medio de la medida normal.

Profesor: y ya!

Emanuel: es un medio más uno –insiste-.

Miguel: un medio más uno da tres medios.

Profesor: y ¿Qué pueden decir de eso tres medios?, de esa expresión

Emanuel: pues si tres medios

Profesor: ¿Qué puede decir de esa relación?, ¿tres medios? ¿Será que se cumple para todas esas medidas que usted dice?

Emanuel: Pues fácil, digamos que equis que se sería la medida original se divide en dos y luego el cociente de esa división se le suma equis y ahí daría la medida de la sombra de la persona.

Profesor: ¿Y si se cumple para todos los pitillos?

Emanuel: Si! El primer palillo mide 20, la mitad de 20 es 10, más 20 da 30. Esa es la medida de la sombra- sigue haciendo los cálculos para los otros pitillos, usando aproximaciones-

En este diálogo Emanuel muestra que interpreta la situación, relacionando la medida del pitillo con la medida de la sombra y lo proyecta mediante una expresión matemática. Se podría decir que de manera algebraica y verbal. Aunque finalmente no es capaz de expresarlo como una escala; acción que si toma más adelante cuando le dan unos datos y relaciona inmediatamente dos

medidas para establecer la razón $1/9$, determinando que por cada un centímetro de la sombra, hay 9 en la sombra, se puede decir que es válida la interpretación hecha para resolver el problema de escala, Ver Figura 39.

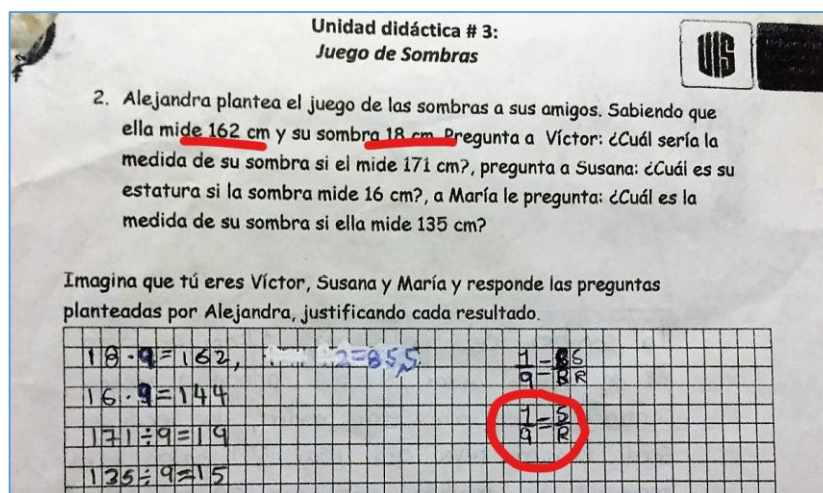


Figura 39: Respuesta propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Juego de Sombras.

4.2 Habilidad interpretativa con problemas de densidad

Fernández (2009) determina que los ejercicios que se pueden abordar desde una comparación cualitativa son precursores de relaciones cuantitativas. Cramer y Post (1993) citados por Fernández (2009) lo llamaron problemas de comparación y predicción cualitativa. En la actividad se pudo observar que limitar las relaciones a lo cualitativo y abandonar de cierta manera lo cuantitativo, permitió que el estudiante formulara una solución, a pesar de su validez.

La habilidad interpretativa ya la habíamos definido anteriormente, así que se expondrá en esta parte las actuaciones de los estudiantes en situaciones que tiene que ver con el subtema de la razón. Para analizar las actuaciones de los casos de estudio, se muestran las respuestas al primer ejercicio de la prueba diagnóstica (

Figura 9) donde trabajamos el contexto de los muñecos de doña Gloria. En este caso se le pide al estudiante que justifique la densidad preguntándole en términos de “estar apretados”, como se muestra la Figura 40 en la actuación de Miguel.

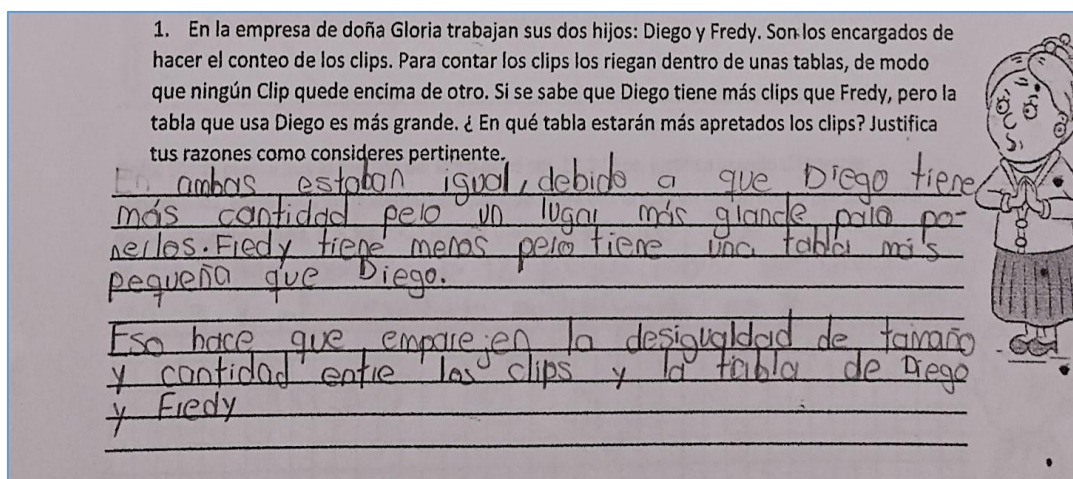


Figura 40: Respuesta Propuesta por Miguel al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica

Miguel reconoce inmediatamente la relación entre el tamaño de la tabla y la cantidad de Clips y puede establecer una comparación entre la situación de cada uno de los personajes. Más adelante muestra en su interpretación reconoce que efectivamente si comparamos uno a uno el tamaño de las tablas, existirá una desigualdad, pero si se relaciona con el número Clips esa desigualdad se emparejará.

En este caso Emanuel se fija mucho más en una de las magnitudes: la cantidad de Clips. Aunque reconoce una relación entre el área de la tabla y el número de clips, olvida las relaciones planteadas en la situación. Es importante recalcar esta idea de Emanuel donde plantea la razón como una fracción (olvida la proporción), al fin él ya reconoce que la fracción es una representación de los Números Racionales, como se puede ver en la Figura 41

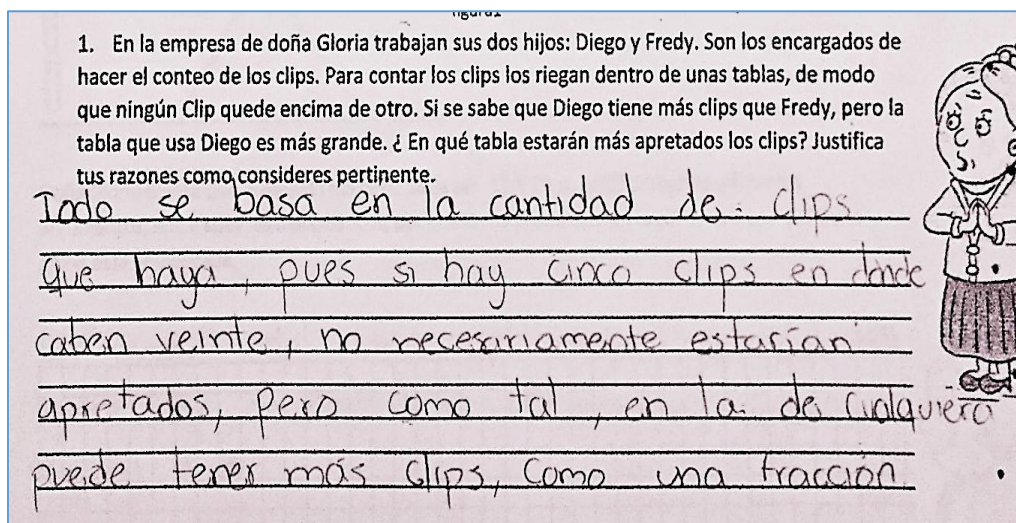


Figura 41: Respuesta propuesta por Emanuel al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica.

Sofía particularmente se decantó por la tabla de Diego, puesto que comparó directamente la cantidad de Clips sin tener en cuenta el área de las tablas ver Figura 42.

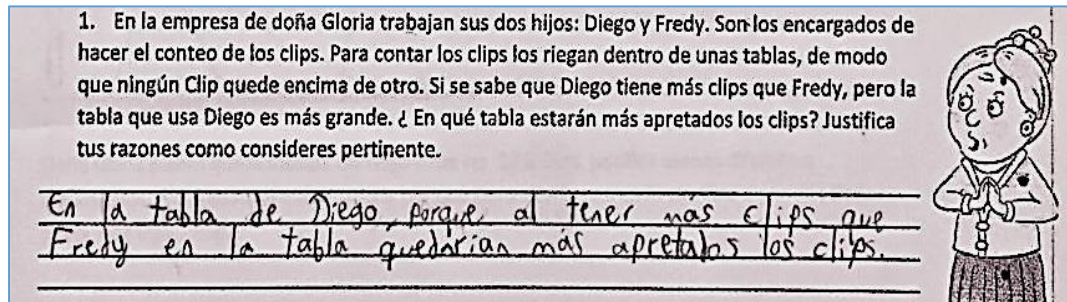


Figura 42: Respuesta Propuesta por Sofía al Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica.

Al finalizar este ejercicio diagnóstico al docente le se ocurrió de manera adicional, grabar a los estudiantes haciéndoles preguntas individuales, entre ellas resultó la filmación a Sofía y su manera de interpretar. Como se puede ver en la siguiente transcripción del video:

Profesor: Sofía, ¿Cómo te fue?

Sofía: No sé... (Achantada)

Profesor: Yo quiero saber que escribiste tú para el primer punto.

Sofía: Eh pues...- buscando en sus hojas con inseguridad-

Profesor: Eso, léenos en voz alta.

Sofía: Es que no leí bien –dijo en voz baja-

Profesor: ¿Cómo?...

Sofía: Que no leí bien, no había leído que Diego tenía la tabla más grande

Profesor: ¿Qué habías leído?, ¿qué habías entendido?, ¿qué era la misma tabla?

Sofía: sí

Profesor: ¿Y qué respondiste de acuerdo a eso?

Sofía: En la tabla de Diego, porque al tener más clips que Fredy quedarían más apretados.

Profesor: Ok. Pero no te diste cuenta que decía que la tabla de Diego era más grande.

Sofía: No- de resignación-

En el diálogo con el docente se puede apreciar que Sofía reconoce que cometió un error de lectura, cosas que suelen ocurrir constantemente. Los estudiantes comprenden solo partes locales de la información en un texto, ubicándose en un primer nivel de las competencias de lectura crítica. Pero a pesar de esto, se puede observar que Sofía comprende que existe una relación entre el área de las tablas y el número de Clips.

Veamos otro ejercicio planteado en la Figura 43 para reconocer la interpretación de los estudiantes en ejercicios de densidad. Se aceptará este ejercicio como de densidad aun que podría

ser visto como una comparación entre razones, debido a que las razones involucradas son iguales y a que los ejercicios de aparcamientos se pueden ubicar en este subtema de la razón según Fernández (2009).

1. Antes de responder las preguntas sobre la lectura, imagine lo siguiente:
 Si en el desierto hubiese un lugar para dejar camellos (como un parqueadero de camellos).
 En el parqueadero: MohamedParking, hay lugar para 250 camellos y están siendo ocupados 150 lugares.
 En el parqueadero Aliparking hay lugar para 150 camellos y están siendo ocupados 90 lugares.
 Explique con sus propias palabras cuál es el parqueadero más lleno. ¿Por qué?

Figura 43: En el Ítem de Densidad Propuesto en el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos

Este ejercicio que hemos tomado es el primero de la actividad del reparto de los 35 camellos. En el diseño de las actividades se planteó proponer un ejercicio de este tipo iniciando cada actividad, incluyendo partes cuantitativas. Veremos ahora la actuación de los casos de estudio empezando por Emanuel en la Figura 44.

1. Antes de responder las preguntas sobre la lectura, imagine lo siguiente:
 Si en el desierto hubiese un lugar para dejar camellos (como un parqueadero de camellos).
 En el parqueadero: MohamedParking, hay lugar para 250 camellos y están siendo ocupados 150 lugares.
 En el parqueadero Aliparking hay lugar para 150 camellos y están siendo ocupados 90 lugares.
 Explique con sus propias palabras cuál es el parqueadero más lleno. ¿Por qué?

2. El parqueadero más lleno sería: Ambos/ninguno, porque ambos ocupan $\frac{3}{5}$ de su espacio total

Figura 44: Respuesta propuesta por Emanuel en el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos

Emanuel ha mostrado saber manejar los números racionales, casi que de inmediato planteó la relación $\frac{3}{5}$, realizando así la comparación efectiva entre las razones involucradas, determinando la igualdad entre estas y de paso su proporcionalidad, evidenciando así una comprensión correcta del ejercicio.

En el caso de Sofía, en la Figura 45, se presentan dos situaciones: la primera tiene que ver con la comparación de solo una relación descrita por la diferencia entre el total de espacios y el número de espacios usados. La otra situación tiene que ver con la prevalencia en el sentido sumativo y no multiplicativo de estas relaciones.

1. Antes de responder las preguntas sobre la lectura, imagine lo siguiente:
 Si en el desierto hubiese un lugar para dejar camellos (como un parqueadero de camellos).
 En el parqueadero: MohamedParking, hay lugar para 250 camellos y están siendo ocupados 150 lugares.
 En el parqueadero Aliparking hay lugar para 150 camellos y están siendo ocupados 90 lugares.
 Explique con sus propias palabras cuál es el parqueadero más lleno. ¿Por qué?

250 ~~150~~
 -150 ~~-90~~
 100 60

el más lleno es el parqueadero "MohamedParking"
 porque es el parqueadero que tiene menos lugares disponibles que el parqueadero "Aliparking"

Figura 45: Respuesta Propuesta por Sofía para el Ejercicio 1 de la Actividad Reparto de 35 Camellos

4.3 Habilidad interpretativa en problemas de comparación de razones y tanto por ciento

A continuación, se muestran algunas reflexiones sobre el desarrollo de la habilidad de interpretar en situaciones donde se involucran la comparación de razones y el tanto por ciento. Para Fernández (2009) los problemas de comparación de razones y tanto por ciento son aquellos donde se presentan dos razones de manera explícita o implícita y existe la posibilidad de compararlas.

Uno de los ejercicios clásicos en el cual se puede evidenciar las razones para ser comparadas es el de de Karplus et al (1983a, p.53) de la serie Lemonade Puzzle citados por Fernández (2009), donde es necesaria la comparación de dos razones asociadas al azúcar y al jugo de limón. Considerado por Tourniairey y Pulos (1985), como un problema de mezclas.

En el diseño de las actividades adaptamos este tipo de ejercicio para el diagnóstico final. Se presenta un contexto general donde surge la palabra “Limonadería” como aquel lugar donde se venden limonadas y se presentan de manera pictórica la concentración de limón para dos Limonaderías (Ver Figura 46).

Realizando una comparación de las razones presentes en la situación se puede observar que existe mayor concentración de limón en la primera Limonadería debido a que por cada vaso de zumo de limón hay tres vasos de agua y en la segunda Limonadería la razón es de un vaso de limón por cada cuatro vasos de agua.

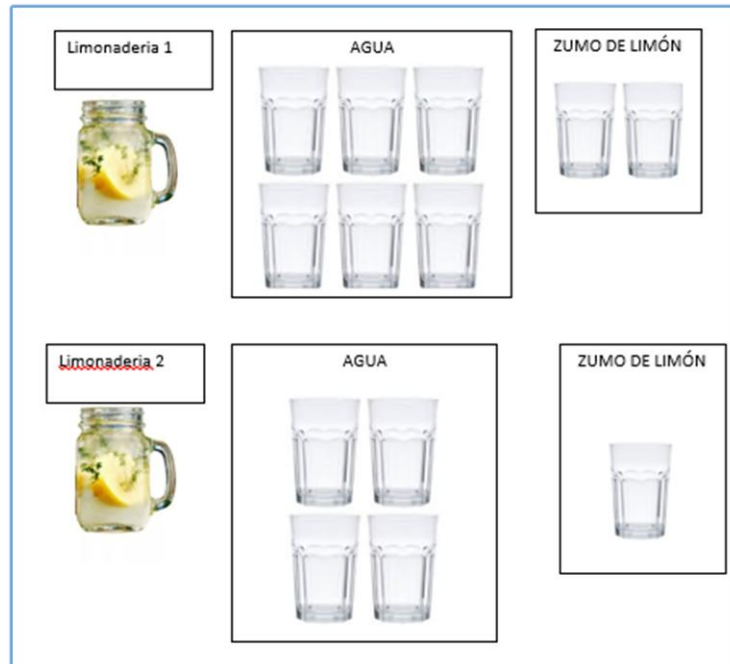


Figura 46: Presentación del Contexto de la Actividad de Diagnóstico Final

En la visión de los casos de estudio, se presentará la comprensión de Miguel para el primer ejercicio de la actividad diagnóstica final en la Figura 47.

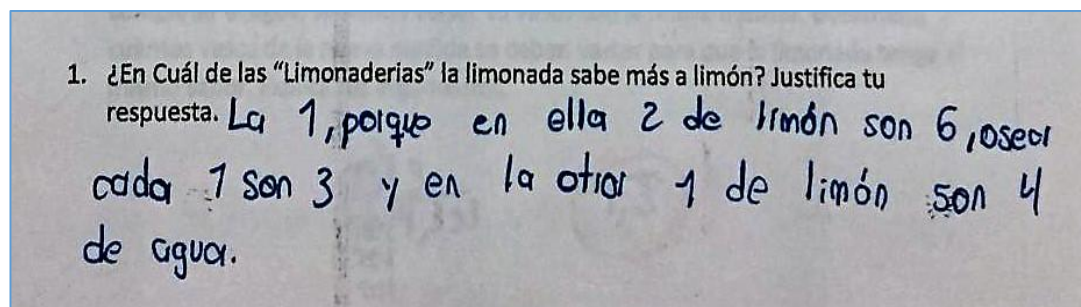


Figura 47: Respuesta propuesta por Miguel para el Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica Final.

Miguel efectivamente interpreta la información entregada en la imagen, determinando las razones que se presentan y estableciendo que en la Limonadería 1 la concentración de limón es mayor.

De igual forma Emanuel establece la relación entre las dos razones y determina que en la Limonadería 1 se encuentra mayor concentración de limón, en este punto de las actividades se esperaba que Emanuel recurriera a una relación de orden entre las “fracciones” involucradas, pero parece que se decantó por la comparación de las magnitudes que intervienen.

Sofía por su parte sin importar la relación entre la cantidad de agua y la cantidad de zumo de limón (Figura 48), determina que la Limonadería 2 tiene la mayor concentración de limón puesto que esta Limonadería tiene menos agua. A largo de la experiencia Sofía mostró que no reconoce la comparación de razones.

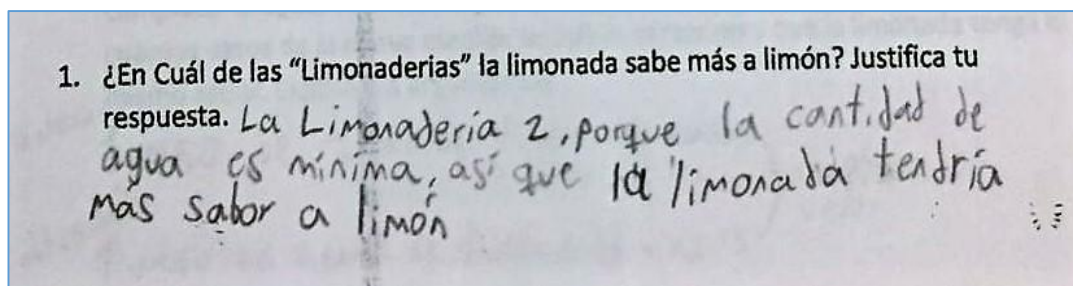


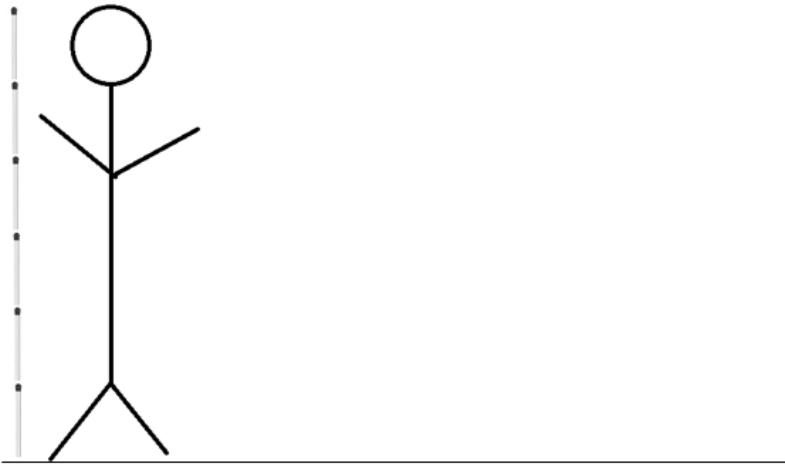
Figura 48: Respuesta Propuesta por Sofía en el Ejercicio 1 de la Actividad Diagnóstica Final.

4.4 Habilidad interpretativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad

Los problemas de valor perdido y proporcionalidad son los que más se trabajan en un aula tradicional, donde el establecimiento de “reglas” permite al estudiante solucionar situaciones de manera mecánica, se identifican puesto que existen tres datos y se debe encontrar el dato faltante para que exista la proporcionalidad en la relación de las razones. Dentro del texto de Fernández (2009) se indica que asociado a este tipo de problemas el nombre que recibe en la literatura de la Educación Matemática es “de la cuarta proporcionalidad”

Se hizo una adaptación al ejercicio del problema de Mr Short y Mr Tall (Figura 49) para la situación de la actividad diagnóstica inicial, estableciendo un cambio de medida en los muñecos de Doña Gloria. Quedando de la siguiente manera:

4. Doña Gloria quiere cambiar su sistema de medidas a fósforos, ella tiene la siguiente información: Tiene dos muñecos Mr Short que mide 4 clips de altura y Mr Tall que tiene 6 clips de altura. ¿Cuántos Fósforos se necesitan para lograr la altura del muñeco Mr Tall? (En la imagen se observa el número de fósforos que se necesitan para lograr la altura de Mr Short)



Esríbele una carta a Doña Gloria, explicando el procedimiento que usaste para encontrar la altura de Mr Tall en fósforos

Figura 49: Adaptación de Ejercicio de Mr Short y Mr Tall en los Muñecos de Doña Gloria.

En este cambio pasamos la medida de los muñecos, de clips a fósforos, dando la información en parte pictórica y en parte textual. En general, para los estudiantes, fue la situación más difícil del diagnóstico inicial.

Esríbele una carta a Doña Gloria, explicando el procedimiento que usaste para encontrar la altura de Mr Tall en fósforos

Bucaramanga, 03 Mayo 2018.

De: Sofía

Para: Doña Gloria

B/das Doña Gloria

El procedimiento que usé para poder encontrar la medida del muñeco de alambre, Mr tall fue:

Primero conté cuántos fósforos medía Mr short, luego me doy cuenta que los fósforos son de menor tamaño que los clips, porque al contar los clips me di cuenta que eran 4 y los fósforos eran 6, lo que significa que los clips son el doble del tamaño que los fósforos, así que para poder completar la altura de los clips se necesitaron agregar otros dos fósforos para que la altura quede igual.

Figura 50: Carta Escrita por Sofía para Doña Gloria. Caso Mr. Short y Mr. Tall.

La forma de comprender la interpretación de los estudiantes cuyas respuestas estamos analizando se puede observar en la carta que se propone como ejercicio de producción textual. En las cartas escritas por Emanuel y Miguel evidencian la comprensión plena del ejercicio estableciendo la relación de las medidas en clips y en fósforos de Mr Short (seis fósforos equivalen a 4 clips) y de esta manera usando la información dada para la medida de Mr Tall, encontrar la medida faltante (la medida en fósforos de Mr Tall) en clips. Respondiendo con asertividad a la situación. En la carta de Sofía (Figura 50) se presenta una situación particular para un estudiante a su edad escolar, Sofía considera que dada la diferencia entre las medida en fósforos respecto a la medida en clips, que es de dos (seis a cuatro), significa que la relación es el doble por lo tanto si Mr. Short mide 6 fósforos entonces Mr. Tall medirá 8 fósforos.

La interpretación de la situación evidenciada por Sofía muestra la necesidad de vincular medidas y establecer una faltante, pero su pensamiento “sumativo” no le permite hacer relaciones coherentes con el ejercicio propuesto.

Hasta ahora de lo evidenciado en la habilidad Interpretativa para todos los subtemas planteados por Fernández (2009), se puede decir que la habilidad de interpretar está ligada con las otras habilidades comunicativas, puesto que para poder retomar la interpretación hecha por un estudiante de un ejercicio es necesario plantearles ejercicios de explicación y justificación. También se podría decir que los estudiantes tienden comprender todas las situaciones de una sola forma, con esto se quiere decir que finalmente cuando los estudiantes reconocen un proceso válido, empiezan a interpretar todos los ejercicios de la misma forma.

4.5 Habilidad explicativa con problemas de escala

De la habilidad de explicar se dice que es la aptitud que tiene un estudiante para exponer la descripción del objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos, expresando él por qué de un proceso, con la finalidad de hacer inteligible a otro ese objeto de conocimiento (Suárez y Rojas, 2013). Teniendo claro el propósito de la habilidad explicativa vamos a estudiar las actuaciones de los estudiantes para reconocer la habilidad explicativa en los diferentes subtemas de la razón. Empezaremos por los problemas de escala, para más adelante hacerlo con los subtemas de comparación de razones y tanto por ciento y el de valor perdido y proporcionalidad. Para esta habilidad, se obviarán los problemas de densidad puesto que en estos ejercicios no se hace presente este proceso, solo se puede captar la interpretación del problema.

Volveremos a la actividad diagnóstica inicial para hablar del segundo ejercicio, en el que se le presenta al estudiante una situación donde la escala es una razón conocida (uno por cada dos), este ejercicio ya lo habíamos visto desde la habilidad interpretativa y reconocimos en la producción pictórica la comprensión de los estudiantes sobre el problema, ahora miraremos como explicaron lo que el ejercicio pedía (ver Figura 30).

Miguel propone que cada parte del muñeco debe ser llevada a la mitad, usando la razón como un factor de decrecimiento, teniendo en cuenta que el resultado final de esta escala es el mismo muñeco, solo que más pequeño. También propone sacar la mitad teniendo en cuenta que el muñeco mide 4 clips de altura, es decir, realiza la invitación a que se vea el todo y se tome la mitad.

Por su parte Emanuel reconoce, comprende, interpreta muy bien la situación y su producción pictórica lo muestra (ver Figura 51), pero en su explicación siente la necesidad de que el individuo al cual se le debe explicar el procedimiento, para reducir el muñeco, debe estar frente a él y de esta manera imitar sus pasos, esto muestra una forma de explicar de manera limitada y en la incapacidad de realizar un texto explicativo. Sofía, limita su explicación a decir que entre más clips mayor será la altura de muñeco y a menos clips menor será la altura de los muñecos, situación que no es incorrecta, pero que refleja límites en la explicación evadiendo los parámetros que le establecen en el planteamiento del problema.

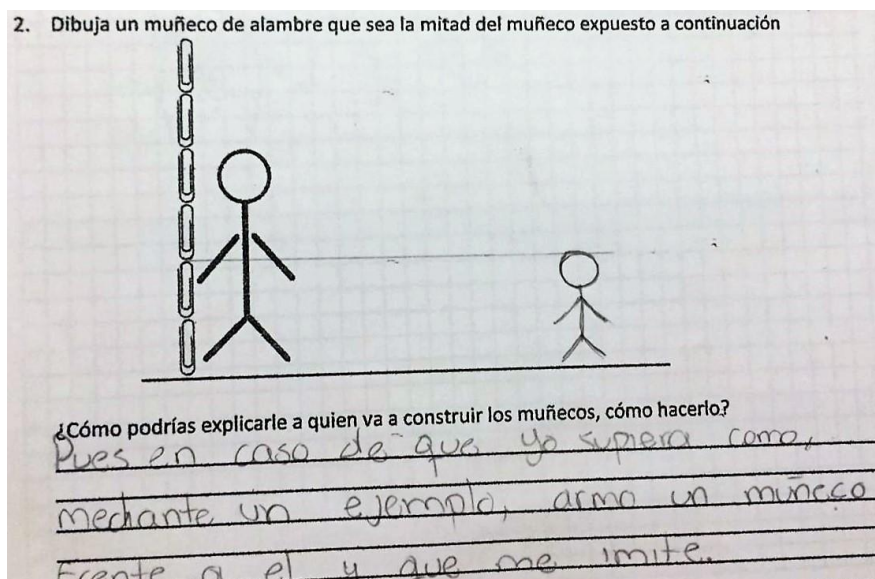


Figura 51: Respuesta Propuesta por Emanuel al ejercicio 2 de la Actividad Diagnóstica Inicial

Desde un nuevo ejercicio estudiaremos la habilidad explicativa en problemas de escala. En la segunda parte del primer ejercicio de la actividad 4: *Juego de Sombras*, se pide al estudiante hallar la medida de la sombra de acuerdo a las medidas captadas para los pitillos y sus respectivas sombras. Veamos la explicación de Emanuel en la Figura 52.

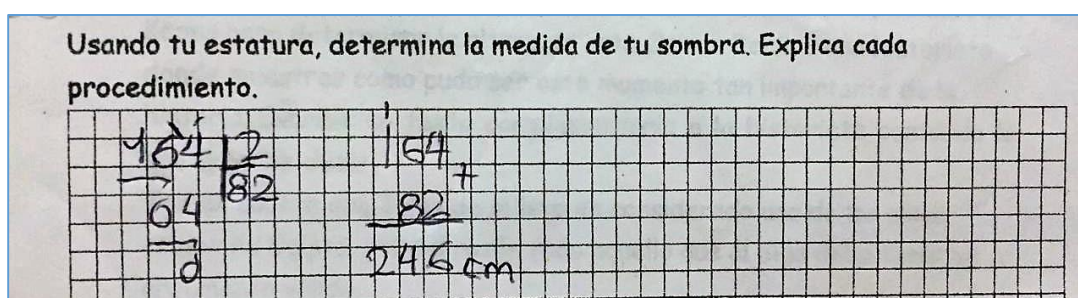


Figura 52: Respuesta propuesta por Emanuel para la segunda parte del primer Ejercicio del Juego de Sombras.

Se puede observar de nuevo la dificultad que tiene Emanuel para explicar el procedimiento que uso para solucionar el problema de escalas, que de acuerdo con la conversación que habíamos

transcrito en el apartado: *Habilidad interpretativa con problemas de Escala*, originalmente fue quien planteo sacar la mitad de la medida original y sumarle la medida original entera para así obtener la medida de la sombra, se podría pensar que en ese momento y después de la conversación donde le justifica al profesor sus resultados ya estuviera cansado de insistir y solo hacer explícitas las operaciones.

Miguel, quien en un principio no interpretó de manera adecuada la situación de las sombras pudo explicar de mejor manera la realización de este ejercicio después del diálogo que sostuvo Emanuel y el profesor, donde la participación de él fue mucho más de escucha (Ver Figura 53).

Miguel sintió la necesidad de poner al lado de su procedimiento matemático, el texto que de alguna manera había determinado Emanuel y que ahora él había interiorizado y utilizó como explicación.

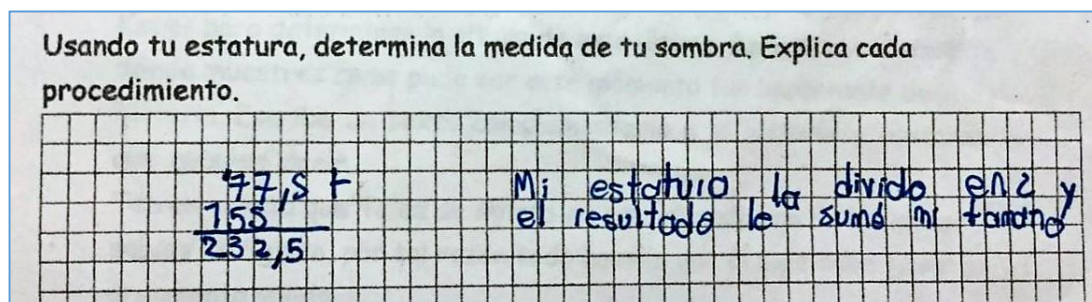


Figura 53: Respuesta Propuesta por Miguel para la Segunda Parte del Primer Ejercicio de la Actividad Juego de Sombras.

En la interpretación de Sofía para la primera parte de este ejercicio se dijo que había reducido su comprensión a que la sombra del pitillo era más larga que el tamaño del pitillo original. Para esta actividad, Sofía se ubicó con tres compañeras más para realizar las medidas, mientras el docente hacia un recorrido por todos los grupos de trabajo que se habían formado (sin planearlo) se dio cuenta que este grupo estaba midiendo la sombra, y les dice:

Profesor: La sombra no se mide, La deben hallar.

Estudiante 1: Pero... ahí dice que toca encontrar tu sombra. Con tu estatura.

Profesor: por eso, debes determinarla con la altura.

Estudiante 1: y ya la tenemos.

Profesor: por eso, encuéntrala, sin medirla.

Sofía: pero ahí dice que medirla –insistiendo–

Profesor: sin medirla. No medirla, buscarla.

Estudiante 2: pero primero debemos saber cuánto da. ¿No?

Profesor: ¿Quieres hacerlo así? Está bien.

Estudiante 2: entonces si yo mido uno sesenta entonces seria añadirle más, porque la sombra es más grande

Finalmente se reúnen las cuatro niñas, incluida Sofía, y hablan en voz baja.

De alguna manera se puede ver que la interpretación de Sofía esta mediada por pensamiento de alguna de sus compañeras o por el acuerdo al que llegaron en grupo. Finalmente, en su respuesta Sofía no explica y determina que la sombra mide aproximadamente cinco centímetros más, cuando la razón aproximada era de $3/2$, es decir 235,5 centímetros.

4.6 Habilidad explicativa en problemas de comparación de razones y tanto por ciento

Para realizar el análisis de esta categoría utilizaremos el ejercicio del hombre que calculaba de la actividad: *Reparto de 35 camellos*. El contexto de la situación sugiere que el hombre que calculaba resultó ganando un camello luego de repartir la herencia de tres hermanos que era de 35 camellos,

que debían repartir de la siguiente forma: al mayor le correspondía la mitad, al siguiente debían entregar la cuarta parte y al menor la novena parte. El hombre que calculaba se ganó el camello pesar de que incluyó en la herencia el camello en el cual se movilizaban. En los puntos 2, 3, 4 y 5 de la actividad *Reparto de 35 camellos*, se insiste en la comprensión del ejercicio y en el punto 3 se sugiere al estudiante una explicación.

Sofía considera que el hombre que calculaba pudo obtener un camello porque al final del reparto sobraban dos y por recompensa el debería recibir uno y el otro era el camello que pertenecía al compañero de viaje del hombre que calculaba. A ella parece no importarle de donde resultaron los dos camellos sobrantes, le da más importancia al hecho del merecimiento del hombre que calculaba por resolver aquella situación (Figura 54).

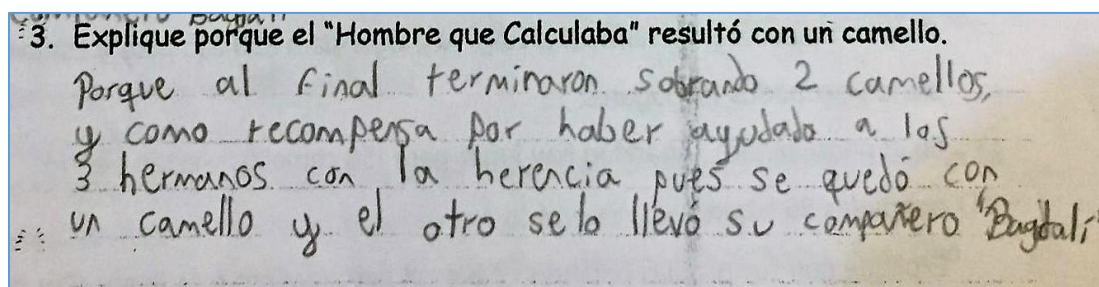


Figura 54: Respuesta Propuesta por Sofía para el Ejercicio 3 de la Actividad *Reparto de 35 Camellos*

Para Miguel, el problema inicialmente tenía que ver con la repartición en las partes que habían dicho al hombre que calculaba, donde finalmente después de hacer todos los cálculos sobraban dos camellos (Figura 55). Más adelante y después de un diálogo que él sostuvo con el docente y con el grupo de Sofía, empezó a creer que la situación se trataba de una desventaja numérica que se solucionaba buscando un número que fuera divisible en 2, 3, 4, 6 y se podría

suponer que en 9.. Miguel acompaña su explicación textual con operaciones matemáticas tratando de avalar aquella desventaja numérica al tener 35 y no 36 camellos.

5. Busque un compañero y socialicen lo que cada uno pudo determinar matemáticamente de la situación, escojan el análisis que les parece más claro, que justifica la situación para presentarla ante los otros compañeros. Escriba a continuación lo que piensa socializar:

El aprovecho la desventaja numérica y consiguiendo un número par divisible en 2, 3, 4, 6 cambio los resultados

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 17,5} \\ 10 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 3} \\ 05 \overline{) 11,6} \\ 20 \overline{) 0} \\ 20 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 9} \\ 80 \overline{) 3,8} \\ 80 \overline{) 0} \\ 80 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 11} \\ 3 \overline{) 31} \end{array}$$

$$31 + 0,5 + 0,6 + 0,8$$

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 6} \\ 50 \overline{) 5,83} \\ 20 \overline{) 0} \\ 20 \overline{) 0} \end{array}$$

Figura 55: Respuesta Propuesta por Miguel en la Socialización del Ejercicio del Reparto de 35 Camellos.

Emanuel por su parte, realiza casi que el mismo recorrido que Miguel, primero establece cuántos camellos les toca a los hermanos con el nuevo total (36), determinando que sobran dos camellos, luego sus explicaciones se basan en la idea de los divisores como lo hizo miguel, este sí incluye el 9 como divisor.

En el intermedio de esta actividad se realizó un proceso de socialización, inicialmente en parejas y seguido a esto las parejas seleccionadas explicaban en el tablero sus hallazgos. De nuestros casos de estudio, pasó al tablero Miguel y Sofía (en realidad Sofía solo borraba o le permitía los marcadores a Miguel, así que decidió sentarse a mitad de la explicación). Miguel insistió en sacar las partes y mostrar que era “ventajoso” tener 36 camellos en lugar de 35 camellos.

En diálogo previo con el docente, Miguel había establecido que la herencia había sido mal repartida y al hermano que le correspondía la novena parte, en realidad debería recibir una sexta parte. Finalmente se podría decir que, dado que la interpretación no fue buena por parte de ningún estudiante, difícilmente se esperaría una explicación concreta del ejercicio.

4.7 Habilidad explicativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad

Para esta categoría se usará el mismo ejercicio de la actividad diagnóstica inicial: trabajado en el apartado: Habilidad interpretativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad. La situación donde existe un cambio de medida en los muñecos de doña Gloria. Desde el punto de vista de la habilidad explicativa se verá como Emanuel y Miguel coinciden en la explicación de sus procedimientos en las cartas escritas a doña Gloria.

Emanuel en la carta explica a doña Gloria que se debe tener en cuentas los datos entregados, además de percatarse que existen dos sistemas de medidas: la de los clips y la de los fósforos (Figura 56). Dada esa información, el estudiante utiliza una razón para determinar la relación en los dos sistemas de medidas con su respectiva equivalencia aunque no determina al final como logro saber que Mr. Tall, en este caso, deberá medir 9 fósforos (en la carta se equivocó y dio esta medida en clips, por la forma de explicar se puede observar que es un error de escritura).

Miguel en su carta realiza una introducción donde se permite ofrecerle ayuda a doña Gloria en la solución del problema. Puntualmente en el ejercicio, explica que es importante sacar la equivalencia de las medidas, determinando, por los datos que tiene, que el cociente entre las magnitudes es 1,5; continua sin necesidad de un por qué diciendo que ese resultado se multiplica

por 6 y se obtiene la medida de Mr. Tall de 9 fósforos. Termina ese apartado haciendo explícitas las operaciones, mostrando la necesidad de convencer a Doña Gloria con los cálculos realizados.

Escribele una carta a Doña Gloria, explicando el procedimiento que usaste para encontrar la altura de Mr Tall en fósforos

Estimada Doña Gloria:

La presente con el fin de informarle sobre los resultados de la conversión de los muñecos de alambre MrTall, los cuales fueron basados en la altura de los ya informados de sus medidas, MrShort, teniendo en cuenta que en la medida del sistema de clips, los MrShort medían cuatro clips, notamos que su medida en fósforos es de seis, notamos que cada clip equivale a un fósforo y medio, lo que nos facilitó la conversión, la cual nos dio que el muñeco MrTall mide nueve clips de altura.

Gracias por su atención.

EE

Figura 56: Carta escrita por Emanuel para Doña Gloria explicando cómo encontrar la medida de Mr. Tall.

En este caso aunque la explicación de Emanuel no es completa, hace un trabajo más reconocible dentro de la habilidad de explicar que Miguel, además recordemos que en la mayoría de ejercicios que piden una explicación, las explicaciones de Emanuel son pobre de proposiciones, mostrando así, que a través del ejercicio de producción de texto logró evidenciar esta habilidad comunicativa.

De la habilidad Explicativa, vista desde los subtemas de la razón y la proporción planteados por Fernández (2009) se puede destacar que a medida que los estudiantes reconocen el objeto matemático pueden realizar una descripción más completa de los procedimientos realizados. Otra

argumento, es que para el estudiante en general, es mucho más sencillo explicar de manera verbal, que hacerlo de manera escrita.

4.8 Habilidad justificativa con problemas de escalas

La habilidad de justificar está determinada por la capacidad que tiene un estudiante para sustentar una idea, explicar el porqué de un proceso, aceptar o refutar una conclusión por medio de razones relevantes como la aplicación de una proposición, la realización de un procedimiento y la utilización de un contraejemplo (Suárez y Rojas, 2013). En el diseño de los ejercicios que se contemplan para observar el desarrollo de la habilidad justificativa por parte de los estudiantes se tuvo en cuenta presentarlos de manera que los estudiantes asumieran una posición crítica frente a otras soluciones y defendieran su posición, es así como está planeado el ejercicio 3 del diagnóstico inicial.

En un primer instante se muestra el enunciado principal en un texto seguido de un espacio para la representación pictórica en términos de clips. El enunciado dice: “Doña Gloria construyó un muñeco con 12 clips de altura, ahora debes hacer uno que tenga dos tercios de esta altura.” Después del espacio otorgado para la representación pictórica, donde aparecen justo 12 clips, continúa un texto que dice: “Doña Gloria piensa que la medida del largo debe ser 13,5 Clips, justifica usando diferentes argumentos, entre ellos los matemáticos, por qué Doña Gloria está en lo correcto o por qué Doña gloria está equivocada.” Presentando así la posición de una “persona” ajena al estudiante.

La actuación de Sofía para este ejercicio estuvo basada en la representación pictórica, evidenciando que no interpretó de manera correcta la situación, dado que el muñeco nuevo de dos tercios del original, resulto ser más grande que el original. Como se puede ver en la Figura 57.

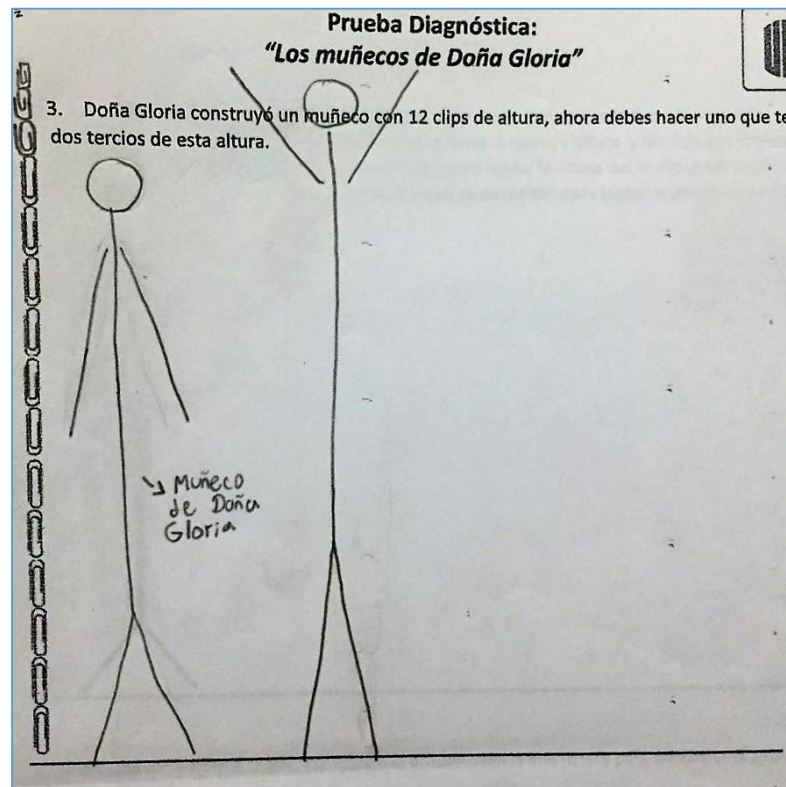


Figura 57: Representación pictórica de Sofía para el Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica Inicial.

Desafortunadamente Sofía no respondió nada en el argumento de Doña Gloria para de esa manera poder analizar qué aspectos le indicaron que el nuevo muñeco tenía un tamaño mayor, que al parecer por su representación tiene 15 clips de altura.

Miguel, con el cálculo que realiza, invalida la proposición de Doña Gloria y casi que de una vez establece la imposibilidad de que el muñeco nuevo sea mayor, siendo dos tercios del original. Explica que se debe dividir 12 en tres partes y a esto multiplicarle dos. La representación

pictórica de Miguel acredita las operaciones hechas y representa de manera correcta el nuevo muñeco a una escala de dos a tres. Aunque nunca hace evidente la proporción establecida en la escala, soluciona el ejercicio y justifica en sus términos; usando el dos tercios como factor (Figura 58).

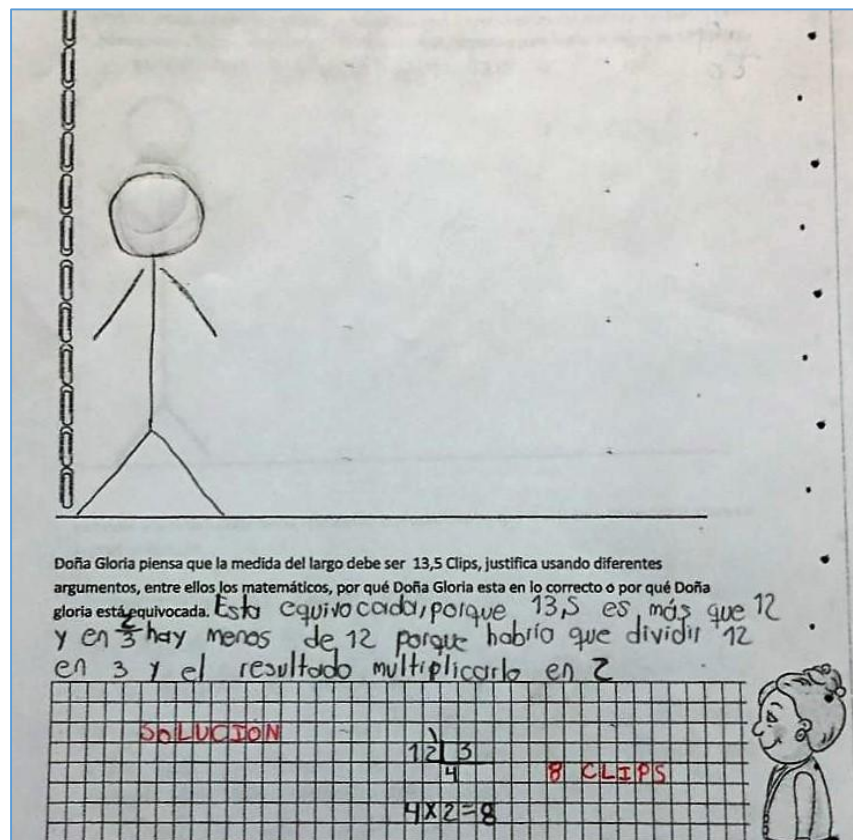


Figura 58: Representación Pictórica por Parte de Miguel y Justificación para el Ejercicio 3 de la Actividad Diagnóstica Inicial.

Para Emanuel es suficiente determinar la inequidad entre el proceso que el plantea y el tamaño sugerido por doña Gloria. Al igual que Miguel determina el cociente entre los doce clips del tamaño original y las tres partes, para luego multiplicar por dos. La primera parte de su contradicción está determinada por la resolución de este cálculo que determina que la medida debe

ser de 8 clips. Emanuel no se preocupa por explicar los procedimientos, para él son suficientes sus cálculos para justificar su posición de desacuerdo.

4.9 Habilidad justificativa con problemas de comparación de razones y tanto por ciento

Dentro de los ejercicios diseñados para que los estudiantes ejercieran la habilidad de justificar se plantearon las producciones textuales, dado que se esperaba que en los ejercicios simples de resolución de problemas donde se pedía justificación, los estudiantes obviarían el proceso real de justificar y en el máximo de los casos realizarían la explicación de la solución del ejercicio.

Para analizar esta categoría se tomará la producción de texto propuesta en la actividad diagnóstica final, retomando la idea de Parada (2005), donde el estudiante en proceso de autoevaluación podría justificar sus ideas.

La producción de textos es otra alternativa en evaluación que no requiere de la preparación tradicional; los textos son el reflejo de la comprensión que ha quedado fija en el pensamiento del educando de una idea o concepto. Una producción no puede rechazarse declarándola correcta o incorrecta, pues ella está sujeta a observaciones y sugerencias. A través de estas producciones se desarrolla un proceso formativo donde se hace caer en cuenta del error conceptual para que se trabaje en la superación del mismo. (p. 108)

El contexto de esta actividad está basado en las limonaderías. Se les pide a los estudiantes realizar un texto donde creen su propia limonadería convenciendo a un “magnate” para que invierta en el negocio. El objetivo de este texto es que a medida que el estudiante describe las características de la limonadería (Concentración de limón, precios, representación pictórica y posición en el

mercado) vaya justificando matemáticamente sus acciones. Se escoge esta producción de texto por el alto contenido de comparación de razones y tanto por ciento descrito durante la Actividad.

La producción de texto realizada por Sofía es una carta de no más de cuatro renglones, lo más grande de la carta es el listado de precios que no guardan ninguna proporción, solo aumenta de mil en mil, partiendo del valor de una limonada en 1.500 pesos, sin ninguna justificación. De la misma forma plantea el concentrado de la del limón diciendo que es de un 50%, sin justificación, ni explicación de la escogencia. Al final se puede notar una producción de texto pobre, sin ninguna habilidad comunicativa expuesta (Figura 59).

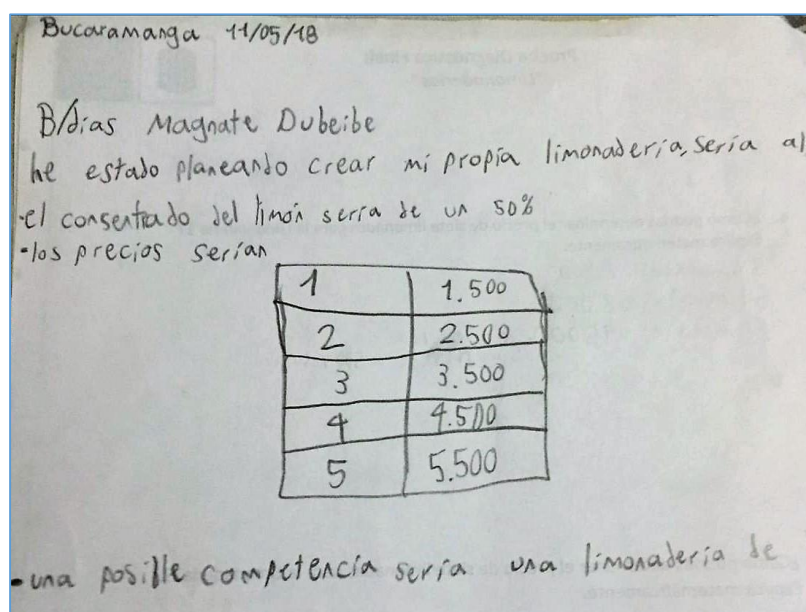


Figura 59: Producción de texto realizada por Sofía para la Actividad de las Limonaderías.

La producción de texto de Emanuel mejora sustancialmente, por lo menos se puede percibir la información de manera agradable. Al igual que Sofía, Emanuel plantea una carta dirigida al magnate que invertirá en su negocio. La tabla de precios en este caso tampoco presenta proporcionalidad, pero la concentración de limón la realiza bajo dos representaciones, la primera

a través de un tanto por ciento o porcentaje y la segunda, mediante una producción pictórica de tantos vasos de zumo de limón por cada vaso de agua. Toda la información presentada carece de justificación (Figura 60).

Estimado Mngt. Dubeibe:

La presente con el fin de que opine sobre mi limonadería y la financiación de esta, aquí la información:

Limonadas La Meca:

¡Un Sabor Muy Explosivo!

Tabla de Precios:

1 Lim:	\$1700
2 Lim:	\$3000
3 Lim:	\$4500
4 Lim:	\$5500
5 Lim:	\$6000
6 Lim:	\$6700
7 Lim:	\$7000
8 Lim:	\$8000
	$\downarrow \infty$

Concentración Lim.

40%:

Agua	Zumo Lim.
4	1
3	1
2	1
1	1

Competencias:

Limonadería MAGG

Limonadería 2

Cambios:

Precio de 6 Limonadas bajará a \$500 pesos.

Todos los datos son propensos a cambios

Gracias por su atención

Limonadería La Meca.

Figura 60: Producción de texto realizada por Emanuel para la Actividad de las Limonaderías

Finalmente, al igual que Emanuel y Sofía, Miguel realizó una carta, en el enunciado no se les pedía un tipo de texto determinado de ante mano, fue una coincidencia que los tres se inclinaron por la carta. Miguel establece una comparación de razones, mostrando proporcionalidad en los precio de las limonadas, es el único de los tres casos de estudio que establece proporcionalidad en

los precios. De la misma forma que Emanuel, pero solo en una representación pictórica establece la concentración de la limonada en una razón que no es usual para un estudiante, dos vasos de limón por cada de agua. El trabajo realizado al final por este estudiante termina siendo informativo, omitiendo cualquier acción explicativa o de justificación (Figura 61).

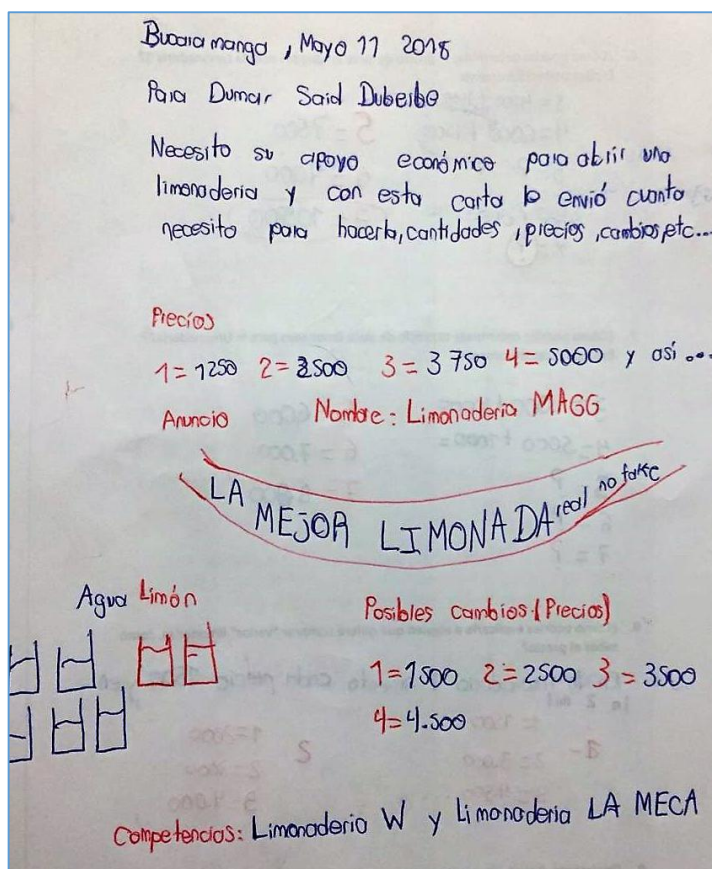


Figura 61: Producción de Texto Realizada por Miguel para la Actividad de las Limonaderias

4.10 Habilidad justificativa con problemas de valor perdido y proporcionalidad

Hasta ahora en el análisis realizado no se ha podido establecer acciones de justificación de parte de los estudiantes, más allá de una contraposición establecida en la categoría: habilidad justificativa con problemas de escalas por parte de Emanuel y de Miguel.

Retornando a la situación de la Actividad 1: *Adivina cuánto mide tu compañero*, en el ejercicio 3 piden al estudiante que escriba un texto explicando cómo logró encontrar de manera analítica la medida del brazo, que de ante mano ya tenía, para posteriormente realizar una socialización donde justifique sus procedimientos. Cabe aclarar que este ejercicio podría verse como comparación de razones o como valor perdido y proporcionalidad, en este caso la magnitud faltante ya la han reconocido mediante la medida física, pero su labor es encontrarla a través de procesos matemáticos.

De nuestros casos de estudio solo Emanuel decidió pasar al tablero a exponer la interpretación realizada y los cálculos hechos para encontrar la medida del brazo. Emanuel en su primer momento de exposición, en donde sus argumentos se reflejaban en la relación entre la medida real y la medida de la foto cometió un error de escritura, cambió un nueve por un cuatro, esto hizo que se desconcertara y que su respuesta no coincidiera con la encontrada en la hoja de trabajo. Cuando se percató del error pidió volver a pasar. Resultando el siguiente diálogo extraído de la filmación de clase:

Emanuel: la medida del brazo en la foto es 9,5 y la real es 67 [después de poner las medidas en el tablero]

Profesor: Esa es la medida que necesitamos encontrar [refiriéndose a los 67 cm, medida del brazo de Emanuel]

Emanuel: 22,5 es la estatura en la foto y 164 es la estatura real [mientras escribe en el tablero]

Profesor: Bueno, explica.

Emanuel: Primero la aproximé a 23 [refiriéndose a la altura en la foto] y luego dividí 164 en 23 que me dio 7, lo que significa que un centímetro en la foto era siete de la medida real, entonces simplemente multiplique 7 por 9,5

Profesor: ¿Qué?... Otra vez, yo quiero que vuelvas a decir que hiciste con la medida real de la estatura y la medida en la foto y por qué tomar esa decisión

Emanuel: Dividí 164 en 23...

Profesor: ¿Para qué?

Emanuel: para saber la equivalencia de los centímetros de la foto en la realidad y así con mi brazo en la foto hacerme una idea de cuánto mide.

Profesor: Ok, o sea ¿Qué la división de 164 en 23 le dio 7, aproximadamente siete o siete?

Emanuel: Siete, ya había aproximado... [Señalando la medida del brazo en la foto]

Profesor: ¿Siete? ¿seguro? Bueno y, ¿Qué significado tiene ese siete?

Emanuel: Que un centímetro en la foto, es decir de 9,5, uno de ellos valdría siete, por esa razón se multiplicaría por siete. Mi media del brazo en la foto se multiplicaría por siete y me daría la real. Me queda 66,5 que se aproxima a 67.

De esta socialización se pueden extraer dos situaciones interesantes, la primera referente a la forma como Emanuel presenta los datos, haciendo un matriz 2x2 como lo referencia Fernández (2009) de Dupuis y Pluvillage (1981),(ver Figura 62).

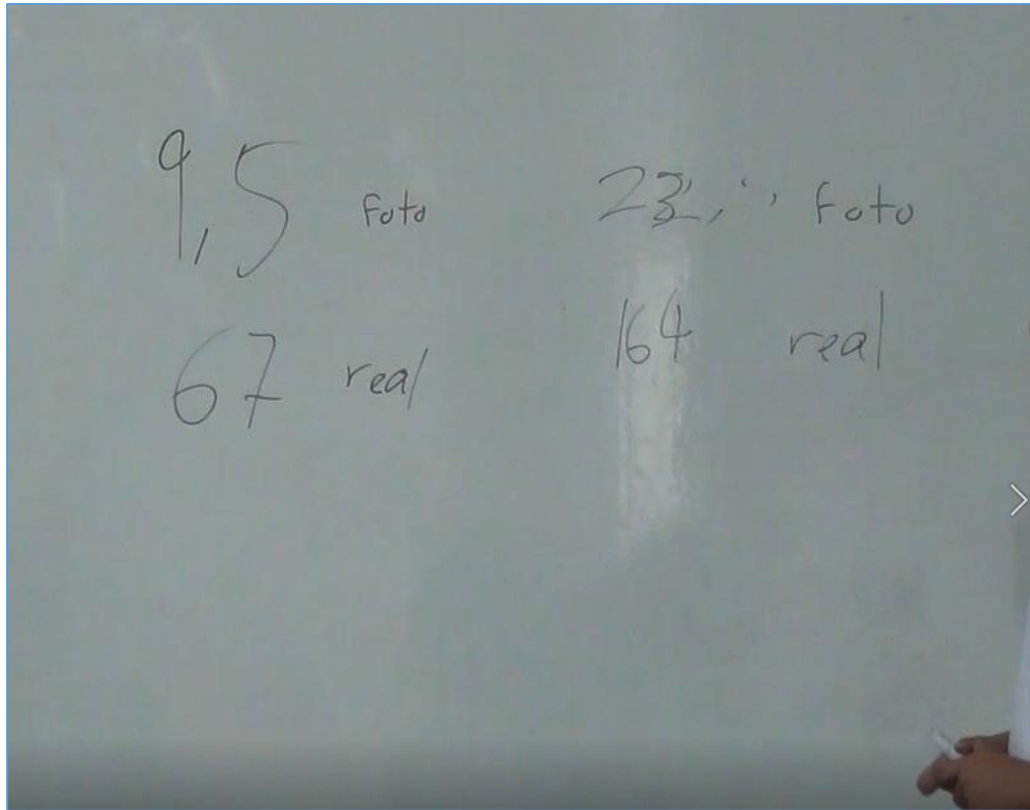


Figura 62: Representación de Datos por Parte de Emanuel en Ejercicio de Valor Perdido y Proporcionalidad.

Otra fortaleza detectada en este extracto del video es la forma como el estudiante empieza justificar sus procesos a medida que el profesor genera preguntas puntuales, estableciendo relaciones entre las magnitudes, por ejemplo: “Que un centímetro en la foto, es decir de 9,5, uno de ellos valdría siete, por esa razón se multiplicaría por siete.” Donde justifica el por qué es válida la multiplicación entre estos datos.

Finalmente, de la habilidad de justificar se pudo evidenciar que al entrar en discusión entre los estudiantes o entre estudiantes y profesor, y a medida de que surjan preguntas, encontrar las razones para avalar sus procesos es mucho más natural en esta edad. La justificación propuesta en los textos tiende a ser reducida a simbología matemática y para esta edad parece ser un argumento suficiente.

Capítulo 5: Reflexiones

Para dar respuesta a nuestro objetivo de investigación: *Caracterizar el proceso comunicativo de estudiantes de séptimo grado que han estado involucrados en la producción de textos alusivos a la razón y la proporción*; se presentan tres apartados. En la primera parte, se explicitan algunos descriptores desde las tres categorías del proceso comunicativo explicados en los elementos conceptuales de este reporte. Seguido a esto, se realiza una valoración de la producción de textos desde el punto de vista de la experiencia de aula del autor y de igual forma se plantean aquí reflexiones finales sobre el impacto de la vida académica del autor después de la experiencia.

5.1 Reflexiones acerca del proceso de comunicación

En este apartado, presentaremos una serie de ideas que se fueron generando durante la realización de la práctica. La potencia que tiene el proceso de comunicación en la educación matemática. En este caso, nos permite observar los alcances determinado por los estudiantes que se enfrentaron a solucionar problemas de razón y proporción.

5.1.1 Habilidad interpretativa en situaciones con razones y proporciones.

La habilidad interpretativa podría valorarse en los estudiantes mediante diferentes experiencias, no obstante, la mayoría de profesores privilegiamos los cálculos y procedimientos mecánicos. Cuando los estudiantes se enfrentaron a la explicación de situaciones que implicaron densidad mostraron evidencias de su habilidad interpretativa. En los problemas propuestos no era

necesario determinar valores numéricos, los estudiantes tenían la tranquilidad de construir una respuesta y relaciones entre las magnitudes involucradas.

Cuando los estudiantes respondieron a actividades de escalas, en su mayoría establecieron relaciones entre las diferentes magnitudes, determinando el “por cada” perteneciente a la clasificación parte- parte establecida por Singer y Resnick (1992), citados por Fernández (2009). A partir de la primera actividad de este tipo, los estudiantes empezaron a establecer relaciones para extraer datos relevantes de cada situación.

Las actividades que implicaron la comparación de razones, tanto por ciento, valor perdido y proporcionalidad resultaron ser en su mayoría una reducción a la comparación entre medidas. En la mayoría de las ocasiones, los estudiantes comparaban a través del cociente de magnitudes dadas, alejándose así de la típica regla de tres o de la aplicación mecánica de la propiedad fundamental de las proporciones.

Finalmente se pudo evidenciar que acompañar un texto con la representación pictórica genera en el estudiante una mejor comprensión del ejercicio planteado y cuando se le pide al estudiante producir esta imagen, lo utiliza para validar los resultados encontrados.

5.1.2 Caracterización de la habilidad explicativa en situaciones con razones y proporciones.

La habilidad explicativa está ligada con la habilidad interpretativa. A medida que se entiende un problema se puede explicar de manera más concreta y con lenguaje matemático. Así, por ejemplo, surgió de manera casi natural la definición básica de razón por parte de los estudiantes, quienes construían explicaciones para establecer comparaciones entre magnitudes. También se puede observar que la mayoría de las explicaciones, basadas en procesos matemáticos,

es realizada mediante la representación fraccionaria de la razón. Los estudiantes basan su significado en el cociente de dos cantidades o utilizándolo como factor de reducción o ampliación. Acción que mediante los cálculos, parece consolidarse como una herramienta viable para dar una explicación.

De los ejercicios de densidad, inferimos que para ellos la explicación termina siendo entendida como la interpretación de los datos. Los estudiantes orientan sus explicaciones al uso de términos y operaciones.

5.1.3 Caracterización de la habilidad justificativa en situaciones con razones y proporciones.

La acción de justificar fue la que menos se evidenció durante la aplicación de la experiencia en el aula. El diseño de las actividades permitió en algunos momentos que el estudiante sentara su posición respecto a la solución de un problema sobre una solución planteada por un personaje diferente a sus compañeros o docente, teniendo como resultado la contradicción por medio del cálculo.

Existen acciones en las cuales el estudiante no siente la necesidad de justificar o sencillamente no puede hacerlo. Por ello, se reduce la justificación a la descripción de los procedimientos realizados, sin ir más allá en la evaluación del otro punto de vista o la defensa del propio.

La acción de verbalizar su razonamiento, favorece la habilidad justificativa. Esta experiencia se favorece con el diálogo permanente, en el que se exige claridad respecto a la posición tomada por el estudiante, y más aún si se hace dudar al estudiante de lo que propone.

5.2 Reflexiones acerca de la producción de texto

Para esta parte del documento, que hasta ahora había sido escrito en tercera persona, dejaré esta posición para mostrar lo relevante que, como maestro de matemáticas, me muestra el uso de las producciones textuales en el aula.

Dentro de las conclusiones de Parada (2005) existen varios motivos que empoderan a la producción de texto como herramienta del proceso de enseñanza aprendizaje, para mí el siguiente resume mi sentir

La producción de textos permite construir el valor de trabajar juntos, se privilegia el respeto, la tolerancia, el pensamiento crítico y creativo, da espacio para establecer una relación maestro-educando, educando-maestro más horizontal. (p. 107)

Al principio de este documento establecíamos que normalmente en una clase de matemáticas existe un único emisor, el docente, y la participación del estudiante es ser el receptor. En muchas ocasiones se tiene más en cuenta los elementos que sostienen a un estudiante en ser competente en matemáticas, pero poco se analiza la posición del estudiante con dificultades, precisamente porque son poco escuchados. Al producir un texto, están más allá del simple hecho de crear un escrito bajo un formato específico. Las explicaciones y justificaciones entregadas por los estudiantes reflejan la interpretación del objeto matemático.

Cuando los estudiantes producen un texto sienten la libertad de expresarse, el no sé, que se refiere normalmente a un proceso mecánico de solución, empieza a desaparecer a medida que se les permite expresarse. Evidentemente en el consecutivo de las producciones se van limitando parámetros para que los objetos matemáticos no sean mal entendidos.

5.3 Reflexiones acerca de la transformación en la labor docente

Sistematizar una experiencia de aula no es fácil, ver con los lentes de investigador es un proceso que necesita tiempo, rescatar teorías y apropiarlas resulta ser gratificante, todas estas dificultades se han convertido en habilidades que se ven reflejadas en las acciones que a partir del conocimiento empezamos a emplear en el aula de clase. Ver la cara de sorpresa de profesores y estudiantes cuando se cuentan historias de producciones de textos gratificantes es algo que no tiene precio. Ver el significado real y con ello la importación de todas las acciones que buscamos en desempeños, aprendizajes, propósitos o indicadores de logro escritos en una planeación, enunciados normalmente por el: interpreta, justifica, explica, etc. Le da un nuevo sentido a la labor docente, donde la responsabilidad crece a medida que se conoce y se es hábil en el reconocimiento de las actuaciones de los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

- Aguilar, C. (2005) *Escuchar, hablar, leer y escribir: Una aproximación desde la opción crítica*. Castellón de la Plana: Universidad Jaume I Castellon.
- Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: un estudio en la escuela primaria*. Valencia: EDUC.
- Gómez, J. (2017). *Proceso comunicativo en matemáticas de estudiantes de primer nivel universitario: aproximaciones desde un curso de precálculo*. Tesis de maestría en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales ya los textos escolares de matemáticas*. Tesis de Maestría de la Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *EMA*. Volumen (7). 3-43.
- ICFES (2015) Lineamientos para la aplicación muestral de la prueba SABER 7. Bogotá
- Recuperado en: <http://www.icfes.gov.co/docman/estudiantes-y-padres-de-familia/guias-y-ejemplos-de-preguntas/pruebas-saber-3579-1/guias/872-guia-pruebas-saber-7-lineamientos-para-la-aplicacion-muestral-2015/file>
- Jiménez, A. Suárez, N. Y Galindo, S. (2010). La comunicación: Eje en la clase de matemática. *Revista praxis & saber*, 1, 173-202.
- Holmes, P. (2002). Enseñanza, aprendizaje y evaluación: categorías complementarias o conflictivas para las estadísticas escolares, ICOTS.

- Maciel, D (2003). A avaliação no processo ensino-aprendizagem de Matemática, no ensino médio: uma abordagem Formativa sócio-cognitivista, *Educación Matemática*, UNICAMP.
- Marc, E. y Picard, D. (1992) *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación*, Barcelona. Paidós Ibérica.
- Ministerio De Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá, Colombia.
- Ministerio De Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Santa fe de Bogotá, Colombia.
- NCTM. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. (Thales, Trans.).Sevilla, España: S.A.E.M (Trabajo Original Publicado 2000).
- Obando, G, Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Relime*. Volumen17 (1):59-81.
- OCDE (2008) El programa PISA de la OCDE: ¿Qué es y para qué sirve la prueba pisa?
- Recuperado del sitio de internet de la OCDE <http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>
- OCDE. (2014).*Resultados de pisa 2012 en foco: lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben*. OCDE, París.
- Parada, S. (2005). *La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas* Tesis de especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia
- Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clase*. Tesis de maestría en Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. México DF.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. La educación matemática en la enseñanza secundaria.

Recuperado de:

http://gpdmatematica.org.ar/wpcontent/uploads/2015/08/Puig_freudenthal_analisis_fenomenologico.pdf

Rapetti, M. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista Suma*, 44, p. 65-70.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación*. Tesis de maestría en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Suárez, S. y Rojas, S. (2013). *Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad*. Tesis de licenciatura Matemática de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.