CONJUNTOS SEMIABIERTOS Y SEMICERRADOS

Jhuly Jovanna López Gonzalez

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

CONJUNTOS SEMIABIERTOS Y SEMICERRADOS

Jhuly Jovanna López Gonzalez

Monografía presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander como requisito parcial para optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director:
Edilberto Reyes
Magister en Ciencias de la Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

Agradecimientos

A mi madre y hermanos por su valiosa colaboración y apoyo incondicional.

A Duwamg por su comprensión y apoyo constante.

Al Profesor Edilberto Reyes por su dedicación y su valiosas orientaciones.

ÍNDICE GENERAL

Título: CONJUNTOS SEMIABIERTOS Y SEMICERRADOS*
Autor: LÓPEZ GONZÁLEZ Jhuly Jovanna **
Palabras claves:

Semiabiertos
Semicerrados
Semicontinuidad
α-Semiabiertos
α-Semicerrados
Abiertos
Cerrados

Descripción y contenido:

En la topología general se han dedicado a trabajar con las nociones y propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados fundamentalmente para llegar a formalizar diversos conceptos topológicos, pero los conjuntos $[a, b)$ y $(a, b]$ ni son abiertos , ni son cerrados en el conjunto de los números reales , sin embargo mediante la evolución del conocimiento de innumerables matemáticos se obtuvo una nueva clase de conjuntos para estudiar los conceptos ya mencionados, denominados conjuntos semiabiertos y conjuntos semicerrados.

En esta monografía se hace un estudio detallado de las nociones y características fundamentales de los conjuntos semiabiertos y semicerrados en un espacio topológico con el objeto de obtener la generalización de conceptos topológicos y mediante estos mismos estudiar una nueva clase de conjuntos α-Semiabiertos y α-Semicerrados.

En el primer capítulo se presentan conceptos básicos que servirán de fundamentación teórica para los siguientes capítulos, en la segunda parte se introduce respectivamente en el contexto de un espacio topológico las nociones y propiedades de los conjuntos semiabiertos y semicerrados y la relación que guardan con los conjuntos abiertos y cerrados respectivamente, en el capitulo tres se estudia de manera natural las funciones continuas y su relación existente con la continuidad, finalmente se concluye esta monografía con una generalización de los conjuntos semiabiertos y semicerrados teniendo en cuenta operadores sobre una topología dada.

*Monografía
**Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Edilberto José Reyes

Title: SEMIOPEN SETS AND SEMICLOSED SETS*
Author: LÓPEZ GONZÁLEZ Jhuly Jovanna**
Keywords:

Semiopen
Semicloseds
Semicontinuity
Topological Transitivity
α-Semiopen
α-Semicloseds
Open
Closed

Content:

In the general topology they have devoted themselves to work with the notions and properties of the sets opened and closed fundamentally to manage to formalize diverse concepts topológicos, but the sets $[a, b)$ and $(a, b]$ they neither are opened, nor are closed in the set of the real numbers, nevertheless by means of the evolution of the knowledge of innumerable mathematicians a new class of sets was obtained to study the already mentioned concepts, named semiopen sets and semiclosed sets.

In this monograph there are done a detailed study of the notions and fundamental characteristics of the sets semiopen and semiclosed in a space topological in order to obtain the generalization of topological concepts and by means of these themselves studying a new class of sets α-Semiopen and α-Semiclosed.

In the first chapter they present basic concepts that were helping of theoretical foundation for the following chapters, in the second part a introduces respectively in the context of a space topological the notions and properties of the semiopen and semiclosed sets and the relation that they guard with the sets opened and closed respectively, in the chapter three there is studied in a natural way the semicontinous functions and existing relation by the continuity, finally one concludes this monograph with a generalization of the semiopen and semiclosed sets bearing in mind operators on a given topology.

---

*Monograph
**Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Edilberto José Reyes

Introducción

Dentro del contexto matemático se ha visto que ha evolucionado el conocimiento de innumerables matemáticos que se han dedicado a trabajar en la topología general con las nociones y propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados, formalizando diversos conceptos topológicos; sin embargo, al buscar alternativas que conllevan a un cambio generador, llegan ideas conmocionadoras que causan gran interés en estudiar los conceptos
mencionados mediante una nueva forma de conjuntos. Las primeras nociones que se dieron sobre esta clase diferente de conjuntos fue alrededor de 1970 y se denominaron de una manera muy natural como *conjuntos semiabiertos* y *conjuntos semicerrados.*

En esta monografía se hace un estudio detallado de las nociones fundamentales y las características principales de los conjuntos semiabiertos y semicerrados, con el objeto de obtener una generalización de conceptos topológicos y mediante éstos mismos estudiar una nueva clase de conjuntos denominados α-Semiabiertos y α-Semicerrados y sus propiedades.

En el primer capítulo (preliminares) se presentan algunos conceptos básicos que servirán de fundamentación teórica a lo largo de los capítulos restantes. En la segunda parte se introduce respectivamente en el contexto de un espacio topológico las nociones y propiedades de conjuntos semiabiertos y conjuntos semicerrados, no obstante, utilizando tales conjuntos se definen y estudian en el capítulo 3 de manera natural las funciones semicontinuas de forma diferente a la dada en la topología clásica explicando y demostrando la relación que guardan las funciones continuas con las funciones semicontinuas.

El trabajo se concluye con la noción de operador asociado a una determinada topología, llegando así a la generalización de los conjuntos semiabiertos y semicerrados.

CAPÍTULO

1

Preliminares

Este capítulo tiene como objetivo presentar resultados básicos de espacios topológicos y la idea es fijar notaciones, definiciones, teoremas y proposiciones que se usan para el desarrollo de esta monografía. La mayor parte de los resultados se presentan sin prueba y pueden consultarse en [1] y [2].

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. *Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X, denominados **abiertos**, que cumple las siguientes propiedades:*

i) *$\emptyset$ y X pertenecen a τ.*

ii) *La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ.*

iii) *La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.*

Un conjunto X para el cual se define una topología τ se denomina **espacio topológico**.

Definición 1.2. *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es* ***cerrado*** *si el conjunto $X - A$ pertenece a τ, es decir, es un abierto.*

Se puede observar que los conjuntos cerrados cumplen propiedades análogas a las de los conjuntos abiertos.

Teorema 1.1. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:*

i) $\emptyset$ y X son cerrados.

ii) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada

iii) La union finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Este teorema se demuestra fácilmente mediante las leyes de *De Morgan* sobre complementos y el hecho de que el complemento de un conjunto cerrado es un conjunto abierto [2, pp.107].

Definición 1.3. *Sean dados (X, τ), $x \in X$ y $V \subset X$. Se dice que V es una* ***vecindad*** *de x si existe U abierto tal que $x \in U \subset V$.*

Definición 1.4. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. La* ***clausura*** *de A, denotada por* ***clA*** *o $\overline{A}$, se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.*

Ahora, un elemento x pertenecerá a $\overline{A}$ si y solo si todo abierto que contiene x interseca a A, siendo A un subconjunto de un espacio topológico X.

Es claro que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, además, se tiene que $A \subset \overline{A}$ para cualquier conjunto A y si A es un conjunto cerrado entonces $A = \overline{A}$.

A continuación se enuncian otras propiedades importantes del operador clausura:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. Para todo A, $A \subset \overline{A}$.
3. Para todo A, $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
4. Para todo A y B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}$.
6. Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

La prueba de estas propiedades se pueden observar en [2, pp.25-26].

Definición 1.5. *Dado un conjunto A en un espacio topológico X, el **interior** de A, denotado por **intA** se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.*

Claramente, $intA$ es un abierto y es el mayor abierto contenido en el conjunto, además si A es un conjunto abierto entonces $intA = A$.

De esta manera un elemento x pertenece al $intA$ si y solo si existe un U abierto tal que $x \in U \subseteq A$. A continuación se enuncian otras propiedades del operador interior:

1. $int(intA) = intA$.
2. $int(A \cap B) = intA \cap intB$.
3. $intX = X$

Siendo X un espacio topológico y A y B subconjuntos de X. La prueba de cada una de estas propiedades se pueden encontrar en [3, pp.378].

Definición 1.6. *Sean A un subconjunto de un espacio topológico X y $x \in X$. Se dice que x es un* ***punto límite*** *(punto de acumulación) de A si todo abierto que contiene a x interseca a A en algún punto distinto de x. El conjunto de todos los puntos límite del conjunto suele denotarse por* $\boldsymbol{A'}$.

Como consecuencia de la definición anterior y de la definición de adherencia se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sean A un subconjunto de un espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [1, pp.111].

Definición 1.7. *Sean A un subconjunto de un espacio topológico X. La* ***frontera*** *de A denotada por* $\boldsymbol{fr(A)}$ *se define como*

$$fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Es claro que la frontera de A es un conjunto cerrado y que el $intA$, $int(X - A)$ y $fr(A)$ son conjuntos disjuntos. Además, se tiene que $int\big(fr(A)\big) = \emptyset$.

A continuación se enuncian propiedades importantes de la frontera de un conjunto:

1. $\overline{A} = A \cup fr(A)$.
2. $intA = A - fr(A)$.
3. $X = intA \cup fr(A) \cup int(X - A)$
4. Si U es abierto en X entonces $\overline{U} - U = fr(U)$

La prueba de estas propiedades se pueden observar en [1, pp.28].

Ahora, se presenta la definición de un espacio disconexo.

Definición 1.8. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es* ***disconexo*** *si existen A y B abiertos disjuntos, no vacíos tales que $X = A \cup B$.*

Los conjuntos A y B constituyen una separación de X. En el caso en que no exista tal separación se dirá entonces que X es **conexo**.

Si se tiene un espacio topológico (X, τ) y se define la siguiente relación de equivalencia en X: dos elementos del espacio se relacionan si existe un subespacio conexo de X que los contiene, las clases de equivalencia según esta relación se denominan componentes (o componentes conexas) de X.

Definición 1.9. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ).*

i) A es nunca denso en X si $int(\overline{A}) = \emptyset$.

ii) U es un abierto en A o ***abierto relativo****, si $U = A \cap V$ donde V es un abierto de X.*

iii) C es un cerrado en A o ***cerrado relativo****, si $C = A \cap V$ donde V es un cerrado de X.*

Teorema 1.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces un conjunto C es cerrado en A si, y sólo si, $C = U \cap A$ donde U es un cerrado de X.*

La prueba de este teorema se reduce a utilizar la definición de abierto relativo y el hecho de que el complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado [2, pp. 107]

Teorema 1.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ un subespacio y $B \subset A$, si $\overline{B}$ es la clausura de B en X. Entonces la clausura de B en A es $\overline{B} \cap A$.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [2, pp.108].

Definición 1.10. *Sean (X, τ) y (X_1, τ_1) espacios topológicos. Una función $f : X \to X_1$ es* ***continua*** *si para todo abierto U de X_1 se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X.*

Una función $f : X \to X_1$ se dice que es una **función abierta** si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en X_1 y f es una **función cerrada** si para cada conjunto cerrado $A \subset X$, el conjunto $f(A)$ es cerrado en X_1.

Posteriormente se muestran algunas propiedades de las funciones continuas.

Teorema 1.5. *Sean (X, τ) y (X_1, τ_1) espacios topológicos y $f : X \to X_1$ una función. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *f es continua.*

ii) *Si $A \subset X$ entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

iii) *Para todo conjunto cerrado B de X_1, $f^{-1}(B)$ es un cerrado de X.*

iv) *Para cada $x \in X$ y cada vecindad V de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subset V$.*

La demostración del anterior teorema se puede observar en [2, pp.119].

Definición 1.11. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice* ***semicontinua inferiormente*** *si, y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(x, \infty)$ es un abierto en X y se dice que es* ***semicontinua superiormente*** *si, y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty, x)$ es un abierto en X.*

Definición 1.12. *Un* ***espacio métrico*** *es una pareja (M, d) donde M es un conjunto no vacío y d es una función definida:*

$$d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$$

"d"se denomina ***métrica*** *sobre M y satisface para cualesquiera x,y,z ∈M las siguientes condiciones:*

i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *«Desigualdad triangular»*

Dada una métrica d en M el número $d(x, y)$ se denomina **distancia** entre x e y. Dado $r \in (0, +\infty)$. El conjunto:

$$\mathcal{B}_d(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

es conocido como **bola** con centro en x y radio r. Por lo tanto se puede comprobar que la colección de todas las bolas $\mathcal{B}_d(x, r)$ induce una topología para M denominada topología métrica.

Definición 1.13. *Una función $f : (X, d) \to (Y, d^*)$ es uniformemente continua en X, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in X$, si $d(x_1, x_2) < \delta$ entonces $d^*\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$.*

Esto significa que para ε dado, δ solo depende de ε y el mismo δ sirve para comprobar la continuidad en cualquier punto x_1 del espacio, por esto basta que x_1 y x_2 estén a una distancia menor que δ para que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se encuentren a una distancia menor que ε. De esta manera también se puede observar que continuidad uniforme implica continuidad.

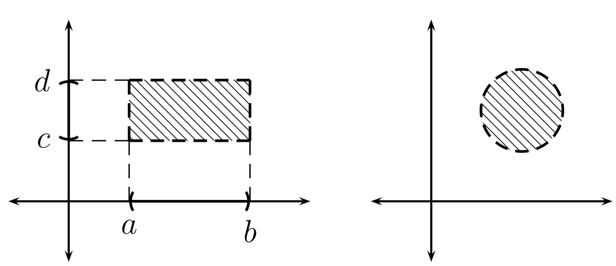
CAPÍTULO

2

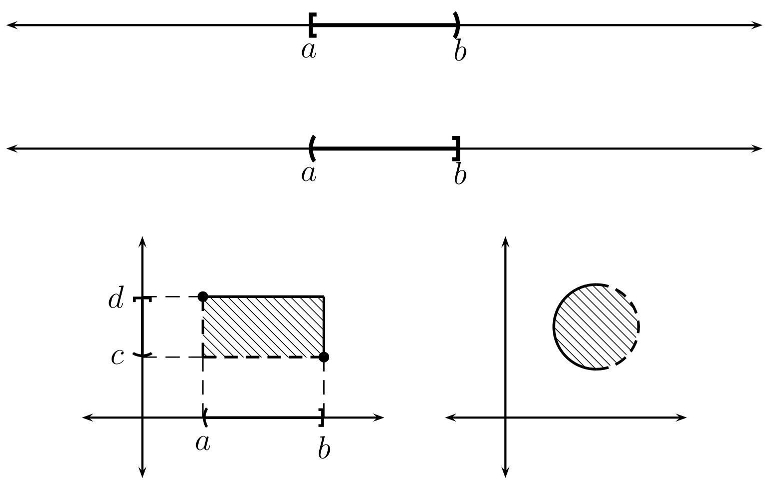
Conjuntos Semiabiertos y Conjuntos Semicerrados

2.1. Conjuntos Semiabiertos

En el espacio topológico de los números reales, con la métrica del valor absoluto, se conocen los conjuntos abiertos y cerrados usuales de la forma (a, b) y $[a, b]$ respectivamente donde a, b pertenecen a los reales. También se sabe que los conjuntos abiertos básicos en $\mathbb{R}^2$ se representan geométricamente por alguna de la siguientes formas:



Los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ claramente no son abiertos ni cerrados y se podrían denominar de manera natural conjuntos semiabiertos y conjuntos semicerrados.



Estos conjuntos han sido estudiados por *Levine* [7] y una gran cantidad de matemáticos que centraron su atención en el estudio de estos mismos, con el fin de llegar a la generalización de conceptos topológicos considerando conjuntos semiabiertos y semicerrados en lugar de los conjuntos abiertos y cerrados usuales. En este capítulo se presentan algunas propiedades de los conjuntos semiabiertos y semicerrados.

Definición 2.1. *Un conjunto A en un espacio topológico X se denomina semiabierto si y sólo si existe un abierto U tal que $U \subset A \subset \overline{U}$.*

Según esta definición se presentan a continuación algunos ejemplos de conjuntos semiabiertos.

Ejemplo 2.1. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y en X consideremos la topología dada por $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$, $A = \{b, c\}$ y el abierto $U = \{b\} \in \tau$. De aquí es claro que X es el menor cerrado que contiene a $\{b\}$ luego $\overline{\{b\}} = X$.*

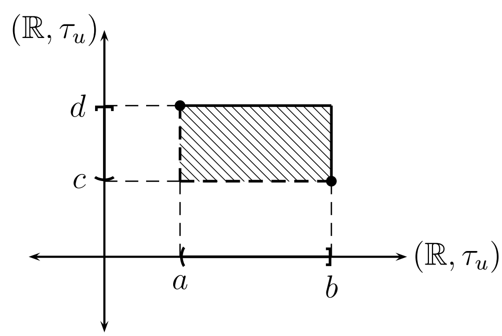
Por lo tanto existe $U \in \tau$ tal que $U \subset A \subset \overline{U}$ luego A es Semiabierto.

Ejemplo 2.2. *$X = (\mathbb{R}, \tau_u)$, $A = [\,0, 1)$. El conjunto $[\,0, 1)$ es semiabierto ya que existe $U = (0, 1) \in \tau_u$ tal que $U \subset A \subset \overline{U}$.*

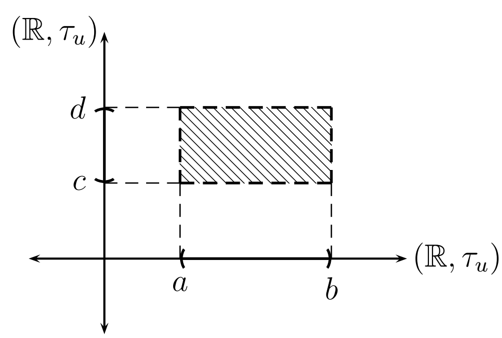
Por lo tanto todo conjunto de la forma $[\,a, b)$ y $(a, b\,]$ con la topología usual es semiabierto.

En adelante, para no dar lugar a confusión, τ_u representará la topología usual de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.3. *Sean $X = \mathbb{R}^2$, $\tau = (\mathbb{R}, \tau_u) \times (\mathbb{R}, \tau_u)$. Tomemos el conjunto $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \leq b, c < y \leq d\big\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se representa geométricamente como:*



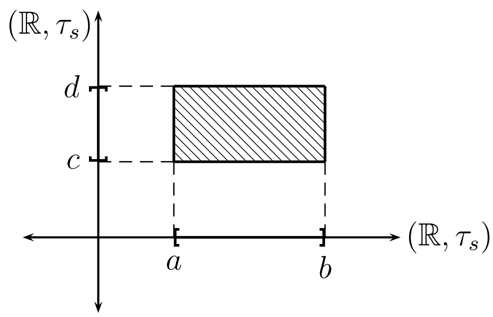
A es semiabierto porque existe un subconjunto $U = (a, b) \times (c, d)$, abierto en $\mathbb{R}^2$, representado por:



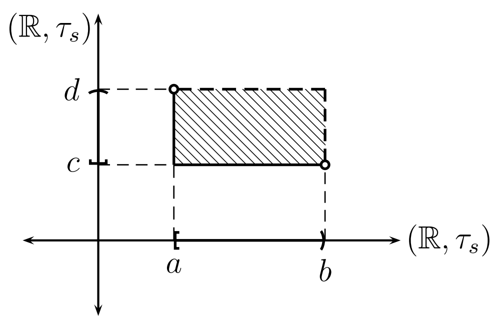
tal que $U \subset A \subset \overline{U}$, siendo $\overline{U} = [a, b] \times [c, d]$. Por consiguiente se tiene que los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ representados por:

con la topología producto en $\mathbb{R}^2$ son semiabiertos.

Ejemplo 2.4. *Sean $X = \mathbb{R}^2$, $\tau = (\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$, siendo τ_s la topología de Sorgenfrey generada por los conjuntos de la forma $[a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Tomemos a $A = [a, b] \times [c, d]$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se representa geométricamente como:*

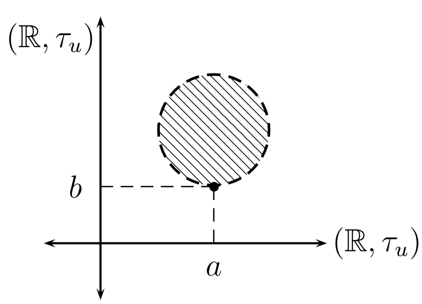


También es semiabierto porque existe un subconjunto $U = [a, b) \times [c, d)$, abierto en $\mathbb{R}^2$, representado por:

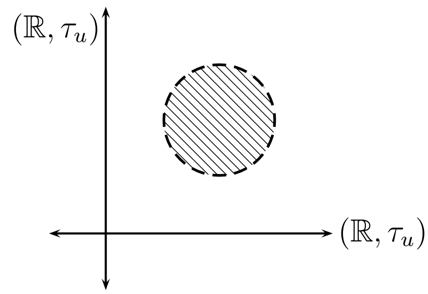


tal que $U \subset A \subseteq \overline{U}$, siendo $\overline{U} = [a, b] \times [c, d]$.

Ejemplo 2.5. *Sean $X = \mathbb{R}^2$, $\tau = (\mathbb{R}, \tau_u) \times (\mathbb{R}, \tau_u)$. Tomemos el conjunto $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r,\ r \in (0, \infty)\big\} \cup \big\{(a, b)\big\}$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se representa geométricamente como:*



y es claro que es semiabierto ya que existe un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ *dado por* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r,\ r \in (0,\infty)\}$ *y que se representa:*



de modo que $U \subset A \subset \overline{U}$*, siendo* $\overline{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r,\ r \in (0,\infty)\}$.

Hasta ahora se han mostrado ejemplos en los cuales los subconjuntos de un espacio topológico no son abiertos pero que cumplen la característica de ser semiabiertos en cada una de las topologías mostradas respectivamente.

El siguiente teorema caracteriza a los conjuntos semiabiertos.

Teorema 2.1. *Un subconjunto* A *en un espacio topológico* X *es semiabierto si y sólo si* $A \subset \overline{intA}$.

Demostración. $\Rightarrow$)Si A es semiabierto entonces $U \subset A \subset \overline{U}$ para algún abierto U en X. Ahora, como $U = intU \subset intA$ se tiene que $\overline{U} \subset \overline{intA}$ entonces $A \subset \overline{U} \subset \overline{intA}$.

$\Leftarrow$) La prueba es inmediata tomando $U = intA$. ■

El teorema anterior da lugar a las siguientes observaciones:

- $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $A = [a,b]$ es semiabierto ya que $intA = (a,b)$ y $\overline{intA} = [a,b]$ luego $A \subset \overline{intA}$.
- En general, si A es cerrado y semiabierto entonces $A = \overline{intA}$.

Ejemplo 2.6. *Sean* $X = (\mathbb{R}, \tau_u)$*,* $A = (0,1) \cup \{2\}$*. En este caso* A *no es abierto en* $\mathbb{R}$ *ya que 2 es un punto aislado,* A *no es semiabierto en* $\mathbb{R}$ *ya que* $A \not\subseteq \overline{intA}$ *siendo* $\overline{intA} = [0,1]$.

El siguiente teorema enuncia una propiedad de los conjuntos semiabiertos la cual indica que la unión arbitraria de semiabiertos es siempre semiabierta.

Teorema 2.2. *Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de conjuntos semiabiertos en un espacio topológico X entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es semiabierto.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene un U_α abierto en X tal que $U_\alpha \subset A_\alpha \subset \overline{U_\alpha}$ (por ser A_α semiabierto), esto implica que:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{U_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha},$$

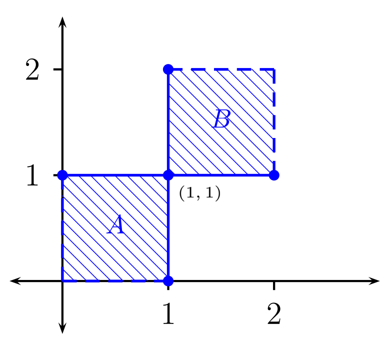
tomando $U = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ que es abierto en X, se cumple la definición. ■

Ejemplo 2.7. *Sea $F_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Cada F_n es semiabierto entonces se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right] = (0,1]$ es semiabierto*

El anterior ejemplo muestra que la unión de semiabiertos es semiabierta, ahora se puede observar que la intersección finita de semiabiertos no necesariamente es semiabierta.

Ejemplo 2.8. *Sean $X = (\mathbb{R}^2, \tau_u)$ y los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dados de la siguiente manera: $A = (0,1] \times (0,1]$ y $B = [1,2) \times [1,2)$.*

Luego $A \cap B$ puede representarse geométricamente por:



y es claro que $A \cap B = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. *Ahora, como* $int(1,1) = \emptyset$ *entonces* $\overline{int(1,1)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ *que indica que* $(1,1) \nsubseteq \overline{int(1,1)}$ *y con esto se obtiene que* $A \cap B$ *no es semiabierto.*

Más aún, la intersección infinita de conjuntos semiabiertos no tiene que ser semiabierta como se puede observar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.9. *Sea* $B = \left\{\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ *una colección de conjuntos semiabiertos cuya intersección no es semiabierta porque* $\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$ *y el único conjunto contenido en* $\{0\}$ *es el conjunto vacío luego no sería posible que* $\emptyset \subset \{0\} \subset \overline{\emptyset}$ *y de esta manera* $\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ *no es semiabierta.*

Ejemplo 2.10. *Sean* $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$ *y* $A = \{a,c\}$ *y* $B = \{b,c\}$ *semiabiertos, entonces* $A \cap B = \{c\}$ *no es semiabierto porque el único abierto en* X *contenido en* $\{c\}$ *es* $\emptyset$ *y no es posible que* $\emptyset \subset \{c\} \subset \overline{\emptyset}$.

Teorema 2.3. *Sea* A *semiabierto en el espacio topológico* X *y* $A \subset B \subset \overline{A}$. *Entonces* B *es semiabierto.*

Demostración. Como A es semiabierto entonces $U \subset A \subset \overline{U}$ para algún abierto U en X, y como $A \subset B$ se tiene que $U \subset B$. Ahora $A \subset \overline{A}$, además $A \subset \overline{U}$ luego $\overline{A} \subset \overline{U}$ y se tiene que $B \subset \overline{A}$ así $B \subset \overline{U}$. De esta manera $U \subset B \subset \overline{U}$ para algún abierto U en X, entonces B es semiabierto. ■

La siguiente proposición nos indica que todo abierto es semiabierto.

Proposición 2.1. *Si* U *es abierto en* X, *entonces* U *es semiabierto en* X.

Demostración. Como U es abierto en X entonces $U = intU$ por lo tanto $\overline{U} = \overline{intU}$ y como $U \subset \overline{U}$ se tiene que $U \subset \overline{intU}$ (*Teorema 2.1*) y así, U es semiabierto en X. ■

El recíproco de la anterior proposición es claramente falso, para precisar esto se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.11. *Sean* $X = \{a, b, c\}$*, y* τ *una topología en* X *considerada como* $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$ *y* $A = \{b, c\}$*, entonces* A *es semiabierto en* X *pero* A *no es abierto en* X*.*

Ejemplo 2.12. *La intersección de semiabiertos no necesariamente es abierta. Si se toma* $X = \{a, b, c\}$*,* $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$ *con* $A = \{a, c\}$ *y* $B = \{b, c\}$ *semiabiertos, implicará que* $A \cap B = \{c\}$ *no es abierto en* X*.*

Es preciso considerar que en general el complemento de un conjunto semiabierto no es semiabierto.

Ejemplo 2.13. *Sean* $X = \{a, b, c\}$*,* $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$*,* $A = \{b, c\}$ *por la Proposición 2.2 como* A *es abierto entonces* A *es semiabierto pero el complemento de* A *no es semiabierto puesto que* $X - \{a, b\} = \{c\}$ *y el único conjunto abierto contenido en* $\{c\}$ *es vacío y nuevamente en este caso se tendría que* $\emptyset \subset \{c\} \subset \emptyset$*.*

Definición 2.2. *Sea* X *un espacio topológico entonces el conjunto* $\mathfrak{U} = \{U \subset X \mid U : \textit{semiabierto}\}$*, es el conjunto de todos los semiabiertos de* X*.*

Otras características que relacionan los conjuntos abiertos con los conjuntos semiabiertos son las siguientes.

Teorema 2.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, entonces:*

i) $\tau \subset \mathfrak{U}$*.*

ii) Para $A \in \mathfrak{U}$ *y* $A \subset B \subset \overline{A}$ *entonces* $B \in \mathfrak{U}$*.*

Demostración. i) Todo abierto en X es semiabierto en X luego se cumple que $\tau \subset \mathfrak{U}$.

ii) Esta prueba es consecuencia directa del *Teorema 2.3*. ■

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{B} \equiv \{B_\alpha\}$ una colección de conjuntos en X tal que:*

i) $\tau \subset \mathcal{B}$.

ii) Si $B \in \mathcal{B}$ *y* $B \subset D \subset \overline{B}$, *entonces* $D \in \mathcal{B}$.

Luego $\mathfrak{U} \subset \mathcal{B}$.

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{U}$ entonces $U \subset A \subset \overline{U}$ para algún $U \in \tau$ por lo tanto $U \in \mathcal{B}$ y así, $\tau \subset \mathcal{B}$ y como $U \in \mathcal{B}$ se tiene que $U \subset A \subset \overline{U}$ entonces $A \in \mathcal{B}$ luego $\mathfrak{U} \subset \mathcal{B}$ y así $\mathfrak{U}$ es la clase más pequeña de conjuntos en X que satisface *i)* y *ii)*. ■

Así como en un espacio topológico un conjunto abierto es abierto en todo subespacio, análogamente se tiene lo mismo para los conjuntos semiabiertos.

Teorema 2.6. *sea $A \subset Y \subset X$ donde X es un espacio topológico y Y es un subespacio topológico de X, si A es semiabierto en X entonces A es semiabierto en Y.*

Demostración. Como A un conjunto semiabierto en X entonces $U \subset A \subset \overline{U}$ para algún abierto U en X y se tiene que $A \subset Y$ luego $U \subset Y$, es evidente que $U = U \cap Y \subset A \subset Y \subset Y \cap \overline{U}$, es decir, $U \subset A \subset \overline{U}$ considerando ahora a $\overline{U}$ como la clausura de U en Y puesto que $U = U \cap Y$ en otras palabras, U es un abierto en Y y por lo tanto A es semiabierto en Y. ■

Notemos que el recíproco del *Teorema 2.6* es falso, es decir, no todo semiabierto en un subespacio es semiabierto en el espacio, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.14. *Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = \{0\}$ y $A = \{0\}$. Entonces A es abierto en Y ya que $A = (-1, 1) \cap Y$ y por la Proposición 2.2 A es semiabierto en Y pero A no es semiabierto en X porque el único abierto contenido en $\{0\}$ es vacío.*

Ejemplo 2.15. *Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1) \cup \{2\}$ y $A = [0,1] \cup \{2\}$. En la topología de subespacio sobre Y, el conjunto unipuntual $\{2\}$ es abierto porque es la intersección del conjunto abierto en X $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ con Y y por la Proposición 2.1 A es semiabierto en Y, pero A no es semiabierto en X por el Ejemplo 2.6.*

Lema 2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $B \subset X$,*

i) si U es abierto en X, entonces $\overline{U} - U$ nunca es denso en X.

ii) si $B \subset \overline{U} - U$ siendo $\overline{U} - U$ nunca denso en X, entonces B es nunca denso en X.

Demostración. i) Como U es abierto se tiene que $\overline{U} - U = fr(U)$, se sabe que $\overline{fr(U)} = fr(U)$. Aplicando el operador interior a ambos lados de la igualdad se llega a que $int\big(\overline{fr(U)}\big) = int\big(fr(U)\big) = \emptyset$ luego $fr(U)$ es nunca denso y así $\overline{U} - U$ es nunca denso.

ii) Supongamos que B es denso en X entonces $\overline{B} = X$ y $B \subset \overline{U} - U$ luego $\overline{B} \subset \overline{\overline{U} - U}$ por lo tanto $X \subset \overline{\overline{U} - U}$ de esta manera $intX \subset int\overline{\overline{U} - U}$ pero $int\overline{\overline{U} - U} = \emptyset$ y así $X \subset \emptyset$ luego B es nunca denso en X. ■

Este lema nos permite probar los siguientes teoremas.

Teorema 2.7. *Sea A semiabierto en X, donde X es un espacio topológico. Entonces $A = U \cup B$ donde:*

i) $U \in \tau$,

ii) $U \cap B = \emptyset$,

iii) B es nunca denso.

Demostración. Como A es semiabierto en X entonces $U \subset A \subset \overline{U}$ para algún U abierto en X, pero $A = U \cup (A - U)$. Si $B = A - U$ entonces $B \subset (\overline{U} - U)$ ya que $A \subset \overline{U}$ y por el *Lema 2.1* B es nunca denso. ■

Teorema 2.8. *Sea X un espacio topológico y $A = U \cup B$ donde:*

i) *U es abierto y no vacío.*

ii) *A es conexo.*

iii) *$B' = \emptyset$, donde B' es el derivado del conjunto B.*

Entonces A es semiabierto en X.

Demostración. Si se toma $U = V$ el abierto en X, y $A = V \cup B$ entonces $V \subset A$ y $V \subset \overline{V}$ veamos que $B \subset \overline{V}$. Supongamos que $B \not\subseteq \overline{V}$ y sea $B = B_1 \cup B_2$ donde $B_1 \subset \overline{V}$ y $B_2 \subset \overline{(X - V)}$, con $B_2 \neq \emptyset$, pero $A = (V \cup B_1) \cup B_2$ donde $V \cup B_1 \neq \emptyset$ por *i)* y $B_2' \subset B' = \emptyset$, $B_2' \subset \emptyset$ y $\overline{B_2'} = B_2 \cup B_2' = B_2$ así B_2 es cerrado por *iii)* también se sabe que $V \cup B_1$ y B_2 son disjuntos $\big(B_1 \subset \overline{V}$ y $B_2 \subset \overline{(X - V)}\big)$ y por lo tanto $V \cup B_1$ y B_2 constituyen una separación para A, esto es contradictorio ya que por *ii)* A es conexo luego A es semiabierto en X. $\blacksquare$

En general, las componentes de conjuntos semiabiertos no son conjuntos semiabiertos.

Ejemplo 2.16. *Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \ldots \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$. A es semiabierto porque existe $(0,1) \in \tau_u$ el cual cumple que $(0,1) \subset A \subset [0,1]$ y $\{0\}$ es una componente de A pero $\{0\}$ no es semiabierto en X.*

Ejemplo 2.17. *Sean $X = \mathbb{R}^2$, con la topología $\tau = (\mathbb{R}, \tau_u) \times (\mathbb{R}, \tau_u)$ y $A = \{x \times y \mid 0 < x, y < 1\} \cup \{(0,1)\}$. A es semiabierto en $\mathbb{R}^2$ (por ser abierto) y se tiene que $(0,1)$ es una componente de $\mathbb{R}^2$ pero $\{(0,1)\}$ no es semiabierto en $\mathbb{R}^2$ ya que el único conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ que está contenido en $(0,1)$ es vacío.*

Teorema 2.9. *Sea $f : X \to X^*$ continua y abierta donde X y X^* son espacios topológicos. Si A es semiabierto en X entonces $f(A)$ es semiabierto en X^*.*

Demostración. Sea $A = U \cup B$ donde U es abierto y $B \subset (\overline{U} - U)$ (*Teorema 2.7*), entonces como A es semiabierto en X y f es abierta, se tiene que $f(U) \subset f(A) = f(U) \cup f(B) \subset f(U) \cup f(\overline{U}) \subset f(U) \cup \overline{f(U)} = \overline{f(U)}$ por lo tanto $f(U) \subset f(A) \subset \overline{f(U)}$ y $f(U)$ es abierto en X^*. Luego $f(A)$ es semiabierto en X^*. ∎

En el teorema anterior la condición que f sea abierta es esencial, por ejemplo: sean X y X^* ambos el espacio de las reales y $f : X \to X^*$ definida como $f(x) = 1$ para todo $x \in X$ entonces X es semiabierto en X pero $f(x)$ no es semiabierto en X^* porque $\emptyset \subset \{f(x)\} \nsubseteq \emptyset$.

Ejemplo 2.18. *Sea $X = (0, 1]$ y $X^* = (0, 1]$ y f definida $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$. Ahora X es semiabierto, pero es claro que $f(x)$ no es semiabierto porque $\emptyset \subset \{f(x)\} = \{\frac{1}{2}\} \nsubseteq \emptyset$.*

Si $\mathcal{B} \equiv \{B_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos de un espacio topológico X, en adelante se denotará a la familia $\{intB_\alpha\}$ por $int\mathcal{B}$.

A través de esta colección de conjuntos se puede establecer una relación entre la topología de un espacio cualquiera y los conjuntos semiabiertos de este mismo.

Lema 2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $\tau \equiv int\,\mathfrak{U}$.*

Demostración. Sea $U \in \tau$ un abierto. Entonces U es semiabierto en X y como $U = intU$, se tiene que $U \in int\,\mathfrak{U}$. Recíprocamente, sea $U \in int\,\mathfrak{U}$ entonces $U = intA$ para algún A semiabierto en X y así $U \in \tau$. ∎

Teorema 2.10. *Sean τ y τ^* dos topologías para X.*

i) Si $\mathfrak{U}(X, \tau) \subset \mathfrak{U}(X, \tau^*)$ entonces $\tau \subset \tau^*$.

ii) Si $\mathfrak{U}(X, \tau) = \mathfrak{U}(X, \tau^*)$ entonces $\tau = \tau^*$.

Demostración. i) Por el *Lema 2.2* se tiene que $\tau = int\,\mathfrak{U}(X, \tau)$ y $\tau^* = int\,\mathfrak{U}(X, \tau^*)$ y por hipótesis $\mathfrak{U}(X, \tau) \subset \mathfrak{U}(X, \tau^*)$ esto es $\tau \subset \tau^*$.

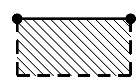
ii) La prueba es inmediata utilizando la parte i). ■

El recíproco de este teorema es falso, como ilustración se tiene:

Ejemplo 2.19. *Sean X el conjunto de los reales, τ y τ^* topologías generadas respectivamente por conjuntos de la forma (x,y) y $[x,y)$ con $x<y$. Entonces $\tau \subset \tau^*$ pero $\mathfrak{U}(X,\tau) \nsubseteq \mathfrak{U}(X,\tau^*)$ puesto que $(x,y] \in \mathfrak{U}(X,\tau)$, pero $(x,y] \notin \mathfrak{U}(X,\tau^*)$.*

Ejemplo 2.20. *Sean $X = \mathbb{R}^2$, τ_u la topología usual de los rectángulos abiertos en $\mathbb{R}^2$ y τ_s la topología de Sorgenfrey, las cuales son topologías generadas respectivamente por conjuntos cuya representación geométrica es de la forma:*

entonces $\tau_u \subset \tau_s$ pero $\mathfrak{U}(X,\tau_u) \nsubseteq \mathfrak{U}(X,\tau_s)$ puesto que el conjunto representado por:



pertenece a $\mathfrak{U}(X,\tau_u)$ pero no pertenece a $\mathfrak{U}(X,\tau_s)$.

Teorema 2.11. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos, $X = X_1 \times X_2$ con la topología producto. Si A_1 es semiabierto en X_1 y A_2 es semiabierto en X_2 entonces $A_1 \times A_2$ es semiabierto en $X_1 \times X_2$.*

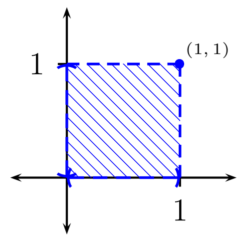
Demostración. Por el *Teorema 2.7* sea $A_i = U_i \cup B_i$ donde U_i es abierto en X_i y $B_i \subset \overline{U}_i - U_i$ para $i = 1, 2, \ldots n$. Claramente se deduce que:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &= (U_1 \cup B_1) \times (U_2 \cup B_2) \\ &= (U_1 \times U_2) \cup (B_1 \times U_2) \cup (U_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2) \\ &= \big((U_1 \times U_2) \cup (B_1 \times U_2) \cup (U_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2)\big) \subset \overline{U}_1 \times \overline{U}_2. \end{aligned}$$

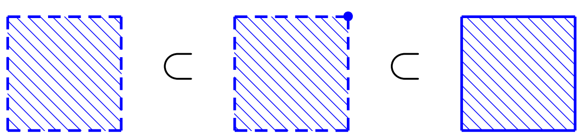
Pero $\overline{U_1} \times \overline{U_2} = \overline{U_1 \times U_2}$ luego $A_1 \times A_2 \subset \overline{U_1 \times U_2}$, en donde $\overline{U}_1$ y $\overline{U}_2$ son la adherencia de U_1 y U_2 en los espacios X_1 y X_2 respectivamente. Así, $(U_1 \times U_2) \subset A_1 \times A_2 \subset \overline{U_1 \times U_2}$. ■

Notemos que si cada A_i es semiabierto en X_i entonces $A_1 \times A_2$ no tiene que ser abierto en $X_1 \times X_2$ como se presenta a continuación.

Ejemplo 2.21. *Sea* $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\} \cup \{(1, 1)\}$.



A es semiabierto en $(\mathbb{R}^2)$ *ya que*



y claramente A no se puede expresar como la union de conjuntos de la forma $A_1 \times A_2$.

2.2. Conjuntos Semicerrados

En la topología general se ha trabajado fundamentalmente con los conjuntos abiertos y cerrados para formalizar conceptos topológicos, pero una nueva clase de conjuntos conocidos como semiabiertos y semicerrados han dado nuevas ideas para estudiar los conceptos ya mencionados, en la sección anterior se presentaron propiedades, ejemplos interesantes de los conjuntos semiabiertos y su relación con los conjuntos abiertos; ahora en esta sección se presenta las propiedades de los conjuntos semicerrados análogas a los conjuntos semiabiertos y su relación con los conjuntos cerrados.

Definición 2.3. *Un conjunto A en un espacio topológico (X, τ) es semicerrado si solo si $X - A$ es semiabierto.*

De acuerdo a esta definición se presentan algunos ejemplos de conjuntos semicerrados.

Ejemplo 2.22. *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$, $A = \{b\}$. *Entonces* $X - A = \{a, c\}$ *es semiabierto en* X *ya que existe un abierto* $U = \{a\}$ *tal que* $U \subset (X - A) \subset X$ *luego* $A = \{b\}$ *es semicerrado.*

Ejemplo 2.23. *Sean* $X = (\mathbb{R}, \tau_u)$, $A = [0, 1)$. *Claramente el complemento del conjunto* A *dado por* $X - A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ *es semiabierto, ya que existe un conjunto* U *abierto en* $\mathbb{R}$ *dado por* $U = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ *que satisface* $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset X - A \subset (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, *y así* A *es semicerrado en* $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema es una caracterización de los conjuntos semicerrados, análoga a la presentada en el *Teorema 2.1* para los conjuntos semiabiertos.

Teorema 2.12. *Un subconjunto* A *en un espacio topológico* X *es semicerrado si y sólo si* $(X - A) \subset \overline{int(X - A)}$.

Demostración. $\Rightarrow$)Se tiene que A es semicerrado en X entonces $X - A$ es semiabierto en X luego $U \subset X - A \subset \overline{U}$ para algún abierto U respecto a X. Por lo tanto $U = intU \subset int(X - A)$ luego $\overline{U} \subset \overline{int(X - A)}$, y $X - A \subset \overline{U}$ entonces $(X - A) \subset \overline{int(X - A)}$.

$\Leftarrow$) Como $int(X - A) \subset (X - A) \subset \overline{int(X - A)}$ entonces $X - A$ es semiabierto en X y por lo tanto A es semicerrado en X. ∎

Es importante tener en cuenta que la contenencia $(X - A) \subset \overline{int(X - A)}$ también se puede denotar como $(\overline{intA^c})^c \subset A$.

Proposición 2.2. *Si* A *es cerrado en* X, *entonces* A *es semicerrado en* X.

Demostración. Como A es cerrado en X entonces $X - A$ es abierto en X luego $X - A$ es semiabierto en X (*Proposición 2.1*). Por lo tanto A es semicerrado en X. ∎

Los conjuntos semicerrados no tienen que ser cerrados.

Ejemplo 2.24. *Sean* $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{c\}\big\}$ *y* $A = \{b, d\}$ *entonces* $X - A = \{a, c\}$, *existe* $U = \{c\}$ *tal que* $\{c\} \subset \{a, c\} \subset X$ *de esta forma* $X - A$ *es semiabierto y así* A *es semicerrado pero* A *no es cerrado.*

De la sección anterior se observó que la unión arbitraria de semiabiertos es semiabierta, veamos qué relación tiene con los conjuntos semicerrados.

Teorema 2.13. *Sea* $\{A_\alpha\}$ *una colección de conjuntos semicerrados en un espacio* X *entonces* $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ *es semicerrado.*

Demostración. Dada una colección de conjunto semicerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en X
se obtiene aplicando las leyes de De Morgan que

$$X - \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (X - A_\alpha).$$

Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son semiabiertos, se deduce que el conjunto $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}(X - A_\alpha)$ es una union arbitraria de conjuntos semiabiertos, que por el *Teorema 2.2* es semiabierta, así $X - \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es semiabierto y $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es semicerrado en X. ■

La unión finita de semicerrados no necesariamente es semicerrada, más precisamente se tiene

Ejemplo 2.25. *Sean* $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{c\}\big\}$ *y* $A = \{b, d\}$ *semicerrado entonces* $X - A = \{a, c\}$ *y existe* $U = \{c\}$ *tal que* $\{c\} \subset \{a, c\} \subset X$ *de esta forma* $X - A$ *es semiabierto y así* A *es semicerrado. Por otro lado, sea* $B = \{c, d\}$ *semicerrado ya que* $X - B = \{a, b\}$ *este es abierto en* X *lo que implica que* $X - A$ *es semiabierto y así* B *es semicerrado.*

Ahora, $A \cup B = \{b, c, d\}$ *entonces* $X - (A \cup B) = \{a\}$ *y el único abierto contenido en* $\{a\}$ *es vacío y como* $\overline{\emptyset} = \emptyset$ *será imposible que* $\{a\} \subset \emptyset$, *así* $X - (A \cup B)$ *no es semiabierto y por definición* $A \cup B$ *no es semicerrado.*

Al igual que en los conjuntos semiabiertos el complemento de un conjunto semicerrado no necesariamente es semicerrado.

Ejemplo 2.26. *Sean* $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{c\}\big\}$ *y* A *es semicerrado entonces* $X - A = \{a, c\}$ *luego existe* $U = \{c\}$ *tal que* $\{c\} \subset \{a, c\} \subset X$ *de esta forma* $X - A$ *es semiabierto de esta forma* $X - A$ *no es semicerrado.*

Definición 2.4. *Sea* X *un espacio topológico, entonces el conjunto de todos los subconjuntos semicerrados en* X *se denotará por* $\mathfrak{V}$*, más precisamente se tiene:*

$$\mathfrak{V} = \{V \subset X \mid V \textit{ es semicerrado}\}.$$

Teorema 2.14. *Sea* A *semicerrado en* X*. Si* $X - \overline{A} \subset X - B \subset X - A$ *entonces* B *es semicerrado en* X*.*

Demostración. Sea A semicerrado en X, entonces $X - A$ es semiabierto, de modo que $U \subset X - A \subset \overline{U}$ para algún U abierto en X. Ahora, como $U \subset X - A$ por propiedades de adherencia $\overline{U} \subset X - \overline{A}$ luego $X - \overline{A} \subset X - B$ y se tiene que $\overline{U} \subset X - B$ con $U \subset \overline{U} \subset X - B$ entonces $U \subset X - B$. Por otro lado $X - B \subset X - A$ y $X - A \subset \overline{U}$ y se obtiene que $X - B \subset \overline{U}$, así se cumple $U \subset X - B \subset \overline{U}$, luego $X - B$ es semiabierto en X y por lo tanto B es semicerrado en X. ■

Teorema 2.15. *Sea* U *un conjunto cerrado en* (X, τ)*, entonces*

i) $U \subset \mathfrak{V}$

ii) Para $A \in \mathfrak{V}$ *y con* $X - \overline{A} \subset X - B \subset X - A$ *entonces* $B \in \mathfrak{V}$

Demostración. i) La prueba es consecuencia de la *Proposición 2.2* todo cerrado es semicerrado en X.

ii) La prueba es inmediata por el *Teorema 2.14*. ■

Teorema 2.16. *Sea $\mathfrak{D} = \{D_\alpha\}$ una colección de conjuntos en X y U un conjunto cerrado en X tal que*

i) $U \in \mathfrak{D}$.

ii) Si $A \in \mathfrak{D}$ *y* $X - \overline{A} \subset X - B \subset X - A$ *entonces* $B \in \mathfrak{D}$.

Entonces $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{D}$.

Demostración. Sea B semicerrado en X, entonces $U \subset X - B \subset \overline{U}$ para algún U abierto en X, como $\overline{U}$ es cerrado por lo tanto $\overline{U} \in \mathfrak{D}$. Ahora, $U \subset X - B$ entonces $B \subset X - U$ y además $X - B \subset \overline{U}$ por lo tanto $X - \overline{U} \subset B$ y así se obtiene que $X - \overline{U} \subset B \subset X - U$ luego $U \in \mathfrak{D}$. ■

Así, $\mathfrak{V}$ es la mayor clase de conjuntos en X que satisface *i)* y *ii)*.

Al igual que un semiabierto en un espacio topológico es semiabierto en cualquier subespacio de este mismo, se tiene también que todo semicerrado cumple esta propiedad topológica.

Teorema 2.17. *Sea $A \subset Y \subset X$ donde X es un espacio topológico y Y es un subespacio de X. Si A es semicerrado en X, entonces A es semicerrado en Y.*

Demostración. Como A es semicerrado en X, entonces $X - A$ es semiabierto en X, luego $U \subset X - A \subset \overline{U}$ para algún U abierto en X. Ahora, como $X - A \subset \overline{U}$ se tiene que $X - \overline{U} \subset A$, además, $A \subset Y$ y así $X - \overline{U} \subset Y$ entonces $Y - A \subset \overline{U}$. Por otro lado $U \subset X - A$ y $X - A \subset Y - A$ luego $U \subset Y - A$. Con esto se obtiene que $Y - A$ es semiabierto en Y. ■

Teorema 2.18. *Sea A semicerrado en X, donde X es un espacio topológico. Entonces $A = U \cap B$ donde*

i) U es cerrado.

ii) $U \cup B = \emptyset$.

iii) B nunca es denso.

Demostración. Sea A semicerrado en X entonces $X - A$ es un conjunto semiabierto en X. Como $X - U$ es abierto en X se obtiene que $X - U \subset X - A \subset \overline{X - U}$ pero $A = U \cap A - U$ y si $B = A - U$ entonces $B \subset \overline{X - U} - X - U$ y así B nunca es denso por el *Lema 2.1* y se obtiene que $A = U \cap B$; de esta manera *i)* y *ii)* se cumplen. ■

Análogamente a los conjuntos semiabiertos el siguiente teorema se cumple para los conjuntos semicerrados.

Teorema 2.19. *Sea $f : X \to X^*$ continua y cerrada donde X y X^* son espacios topológicos. Si A semicerrado en X entonces $f(A)$ es semicerrado en X^*.*

Demostración. Como A es semicerrado entonces por definición $X - A$ es semiabierto en X, por el *Teorema 2.9* $X^* - f(A)$ es semiabierto en X^*, luego por definición $f(A)$ es semicerrado en X^*. ■

En adelante, si $\mathcal{B} \equiv \{B_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos de un espacio topológico X. Entonces la clausura de $\mathcal{B}$ se denotará por $\overline{\mathcal{B}} \equiv \{\overline{B_\alpha}\}$.

Lema 2.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y U un conjunto cerrado en X. Entonces $U \equiv \overline{\mathfrak{V}}$, donde*

$$\mathfrak{V} = \{V \subset X \mid V \, es \; semicerrado\}.$$

Demostración. Como U es cerrado en X entonces U es semicerrado en X y como $U = \overline{U}$ se tiene que $U \in \overline{\mathfrak{V}}$. Recíprocamente, sea $U \in \overline{\mathfrak{V}}$ entonces $U = \overline{A}$ para algún A semicerrado en X y así U es cerrado. ■

Teorema 2.20. *Sean τ y τ^* dos topologías para X y U, V dos cerrados en τ y τ^* respectivamente.*

i) *Si $\mathfrak{V}(X, \tau) \subset \mathfrak{V}(X, \tau^*)$ entonces $U \subset V$.*

ii) *Si $\mathfrak{V}(X, \tau) = \mathfrak{V}(X, \tau^*)$ entonces $U = V$.*

Demostración. *i)* Por el *Lema 2.20* se tiene que $U = \overline{\mathfrak{V}}(X,\tau)$ y $V = \overline{\mathfrak{V}}(X,\tau^*)$ y por hipótesis $\mathfrak{V}(X,\tau) \subset \mathfrak{V}(X,\tau^*)$ entonces $U \subset V$ y de esta manera la prueba es inmediata.
ii) La demostración es consecuencia del *Lema 2.3* y del *Teorema 2.20* parte *i)*. ■

Teorema 2.21. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos, $X = X_1 \times X_2$ con la topología producto. Si A_1 es semicerrado en X_1 y A_2 semicerrado en X_2 entonces $A_1 \times A_2$ es semicerrado en $X_1 \times X_2$.*

Demostración. Sea $A_i = U_i \cup B_i$ donde U_i es abierto en X_i y $B_i \subset \overline{U}_i - U_i$ para $i = 1, 2, \ldots n$. Claramente se deduce que:

$$\begin{aligned}(X_1 \times X_2) - (A_1 \times A_2) &= X_1 \times X_2 - U_1 \cup B_1 \times U_2 \cup B_2 \\ &= X_1 \times X_2 - U_1 \times U_2 \cup B_1 \times U_2 \cup U_1 \times B_2 \cup B_1 \times B_2.\end{aligned}$$

De ahí se tiene que $(X_1 \times X_2) - (A_1 \times A_2)$ es semiabierto en $(X_1 \times X_2)$ por lo tanto $A_1 \times A_2$ es semicerrado en $X_1 \times X_2$ pero $U_1 \times U_2$ es abierto en $X_1 \times X_2$ y por lo tanto se obtiene:

$$\big((U_1 \times U_2) \cup (B_1 \times U_2) \cup (U_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2)\big) \subset \overline{U}_1 \times \overline{U}_2 = \overline{U_1 \times U_2}$$

en donde $\overline{U}_1$ y $\overline{U}_2$ son la adherencia de U_1 y U_2 en los espacios X_1 y X_2 respectivamente. Así $U_1 \times U_2 \subset A_1 \times A_2 \subset \overline{U_1 \times U_2}$ y con esto se concluye que $A_1 \times A_2$ es semicerrado en $X_1 \times X_2$. ■

CAPÍTULO

3

Semicontinuidad

3.1. Funciones Semicontinuas

En la topología clásica las funciones semicontinuas se definen como funciones semicontinuas inferiormente y superiormente, como se pudo observar en el *capítulo 1* según la *definición 1.11.* En este capítulo se desarrollará la definición de una manera diferente teniendo en cuenta los conjuntos semiabiertos y una relación existente entre continuidad y semicontinuidad.

Definición 3.1. *Sea $f : (X, \tau) \to (X^*, \tau^*)$ donde (X, τ) y (X^*, τ^*) son espacios topológicos. f se denomina semicontinua si para U^* abierto en X^* entonces $f^{-1}(U^*)$ es semiabierto en X.*

La relación entre continuidad y semicontinuidad viene dada en la siguiente forma.

Proposición 3.1. *Sea $f : (X, \tau) \to (X^*, \tau^*)$ donde (X, τ) y (X^*, τ^*) son espacios topológicos. Si f es continua entonces f es semicontinua.*

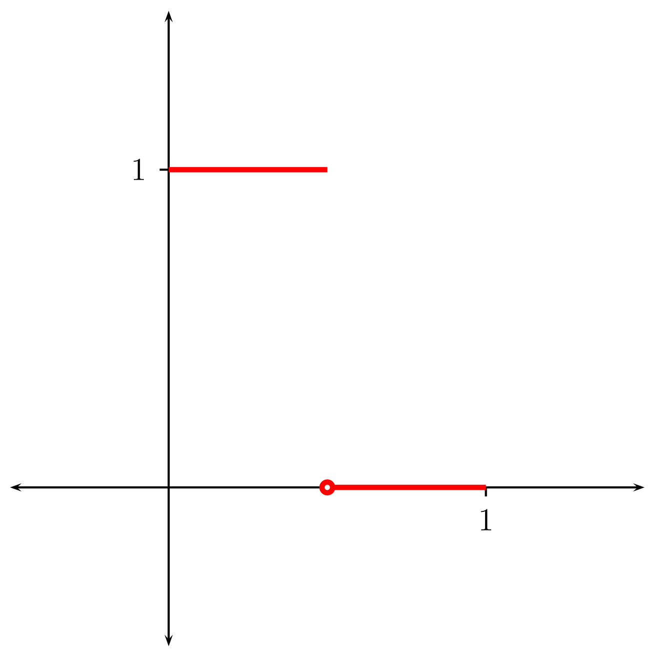
Demostración. Como f es continua se tiene que para todo U^* abierto en X^* se cumple que $f^{-1}(U^*) \in \tau^*$ y como todo abierto es semiabierto esto implica que $f^{-1}(U^*)$ es semiabierto en X. ■

El recíproco de la proposición anterior es falso y esto se puede ilustrar de la siguiente manera.

Ejemplo 3.1. *Sean $X = X^* = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y $f : X \to X^*$ definida como:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & si \ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Geométricamente:



Ahora, f es semicontinua porque si se tiene $U \in [0,1]$ entonces

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0,1 \notin U \\ [0,\frac{1}{2}] & si \quad 1 \in U \quad y \quad 0 \notin U \\ (\frac{1}{2},1) & si \quad 1 \notin U \quad y \quad 0 \in U \\ [0,1] & si \quad 0,1 \in [0,1] \end{cases}$$

la preimagen de U es semiabierta en $\mathbb{R}$, pero no es continua porque intervalo abierto $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ no es abierto en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1. *Sea $f : X \to X^*$ donde (X,τ), (X^*,τ^*) son espacios topológicos, $A \subset X$, entonces f es semicontinua si y solo si para $f(p) \in U^*$ donde U^* es abierto en X^* existe un A semiabierto en X tal que $p \in A$ y $f(A) \subset U^*$.*

Demostración. Supongamos que f es semicontinua y sea U^* abierto en X^*, $p \in f^{-1}(U^*)$ entonces $f(p) \in U^*$ y así existe un A semiabierto en X tal que $p \in A_p$ y $f(A_p) \subset U^*$ por lo tanto $p \in A_p \subset f^{-1}(U^*)$ y $f^{-1}(U^*) = \bigcup_{p \in f^{-1}(U^*)} A_p$ luego por el *Teorema 2.2*, $f^{-1}(U^*)$ es abierto en X.

Recíprocamente, Sea $f(p) \in U^*$ luego $p \in f^{-1}(U^*)$ es semiabierto en (X) puesto que f es semicontinua se tiene que $A = f^{-1}(U^*)$ entonces $p \in A$ y $f(A) \subset U^*$. $\blacksquare$

Teorema 3.2. *Sea $f_i : X_i \to X_i{}^*$ funciones semicontinuas para $i = 1, 2$. Si $f : X_1 \times X_2 \to X_1^* \times X_2^*$ definida como $f(a,b) = \big(f_1(a), f_2(b)\big)$ entonces $f : (X_1, X_2) \to (X_1^*, X_2^*)$ es semicontinua.*

Demostración. Sea $(U_1^* \times U_2^*) \subset X_1^* \times X_2^*$ donde U_i^* es abierto en X_i^* para $i = 1, 2$. Entonces $f^{-1}(U_1^* \times U_2^*) = f_1^{-1}(U_1^*) \times f_2^{-1}(U_2^*)$ pero $f_1^{-1}(U_1^*)$ y $f_2^{-1}(U_2^*)$ son semiabiertos en X_1 y en X_2 respectivamente. Así, $f_1^{-1}(U_1^*) \times f_2^{-1}(U_2^*)$ son semiabiertos en $(X_1 \times X_2)$ debido al *Teorema 2.11*. Por otro lado, si U^* es cualquier abierto en $(X_1^* \times X_2^*)$ entonces $f^{-1}(U^*) = f^{-1}\big(\bigcup U_\alpha^*\big)$ donde U_α^* es de la forma $(U_\alpha^* \times U_\alpha^*)$. Por consiguiente $f^{-1}(U^*) = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$ el cual es *semiabierto* por el *Teorema 2.2* por lo tanto $f^{-1}(U_\alpha^*)$ es semiabierto. $\blacksquare$

Teorema 3.3. *Sea X, X_1, X_2 espacios topológicos, $h : X \to X_1 \times X_2$ una función semicontinua en donde $h(x) = (x_1, x_2)$ y $f_i : X \to X_i$ definida como $f_i(x) = x_i$ para $x \in X$. Entonces $f_i : X \to X_i$ es semicontinua para $i = 1, 2$.*

Demostración. Como U_i es abierto en X_i entonces $U_i \times X_j$ es abierto en $X_i \times X_j$ y $h^{-1}(U_i \times X_j)$ es semiabierto en X pero $f^{-1}(U_i) = h^{-1}(U_i \times X_j)$ y así $f_i : X \to X_i$ es semicontinua. $\blacksquare$

El recíproco del anterior teorema es falso como se presenta a continuación.

Ejemplo 3.2. *Sean* $X = X_1 = X_2 = [0,1] \subset \mathbb{R}$*,* $f_1 : X \to X_1$ *y* $f_2 : X \to X_2$ *definidas como:*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & si\ \ \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & si\ \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Claramente $f_i : X \to X_i$ *es una función semicontinua para* $i = 1,2$ *pero* $h(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ *no es semicontinua ya que para el conjunto* $S_{\frac{1}{2}}(1,0)$ *abierto en* $(X_1 \times X_2)$ *se tiene que* $h^{-1}\big(S_{\frac{1}{2}}(1,0)\big) = \big\{\frac{1}{2}\big\}$ *no es semiabierto en* X*. El conjunto denotado por* $S_{\frac{1}{2}}(1,0)$ *representa la vecindad esférica con centro en* $(1,0)$ *y radio* $\frac{1}{2}$*.*

Es evidente que el límite de una sucesión de funciones semicontinuas no es semicontinua como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Sean* $X = X^* = [0,1] \subset \mathbb{R}$ *y* $f_n : X \to X^*$ *definida como* $f_n(x) = x^n$ *para* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 1$*, el límite de* $\{f_n\}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *es* $f_0 : X \to X^*$ *donde:*

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ \ x = 1 \end{cases}$$

pero f_0 *no es semicontinua, por ejemplo para el conjunto* $\big(\frac{1}{2}, 1\big]$ *abierto en* X^* *se tiene que* $f_0^{-1}\big(\frac{1}{2}, 1\big] = \{1\}$ *es un conjunto que no es semiabierto en* X*, luego* f_0 *no es semicontinua.*

Para espacios métricos se tiene que:

Teorema 3.4. *Sea* $f_n : (M,d) \to (M^*, d^*)$*, una función semicontinua para* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 1$*, en donde* (M,d) *y* (M^*, d^*) *son espacios métricos y sea* $f_0 : M \to M^*$ *el límite uniforme de* $\{f_n\}$*. Entonces* $f_0 : M \to M^*$ *es semicontinua.*

Demostración. Sea $f_0(x) \in U^*$ entonces $f_0(x) \in S_n^*\big(f_0(x)\big) \subset U^*$ para algún $n > 0$. Existe entonces un $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $d^*(f_n^*(y), f_0(y)) < \frac{n}{2}$ para todo $y \in M$, luego $d^*\big(f_n^*(x)\big), f_0(x) < \frac{n}{2}$ y así $f_n^*(x) \in S_{\frac{n}{2}}^*\big(f_0(x)\big) \subset U^*$, por lo tanto f_n^* es semicontinua y por el *Teorema 3.1.* existe un A un semiabierto tal que $x \in A$ y $f_n^*(A) \subset S_{\frac{n}{2}}^*\big(f_0(x)\big)$. La prueba se completa mostrando que $f_0(A) \subset U^*$, esto es; si $Y \in A$ entonces:

$$\begin{aligned} d^*\big(f_0(y), f_0(x)\big) &\leq d^*\big(f_n^*(y), f_0(x)\big) + d^*\big(f_n^*(y), f_0(x)\big) \\ &< \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ &= n \end{aligned}$$

y de esta manera, $f_0(A) \subset S_n^*\big(f_0(x)\big) \subset U^*$. ■

En la siguiente proposición se da una relación entre las funciones semicontinuas con los conjuntos semicerrados.

Proposición 3.2. *Sea $f : X \to X^*$, una función semicontinua con X y X^* espacios topológicos. Si U^* es cerrado en X^* entonces $f^{-1}(U^*)$ es semicerrado en X.*

Demostración. Como U^* es cerrado en X^* entonces $X^* - U^*$ es abierto en X^* luego $f^{-1}(X^* - U^*) = X - f^{-1}(U^*)$ es semiabierto en X y como f es semicontinua se concluye que $f^{-1}(U^*)$ es semicerrado en X. ■

Teorema 3.5. *Sea $f : X \to X^*$ donde (X, τ) y (X^*, τ^*) son espacios topológicos, $A \subset X$, entonces f es semicontinua si y solo si $f(p) \in U^*$ donde U^* es cerrado en X^* existe un A semicerrado en X tal que $p \in A$ y $f(A) \subset U^*$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sea U^* cerrado en X^* y $p \in f^{-1}(U^*)$ entonces $f(p) \in U^*$ y así existe un A_p semicerrado en X tal que $p \in A_p$ y $f(A_p) \subset U^*$ por lo tanto $p \in A_p \subset f^{-1}(U^*)$ y $f^{-1}(U^*) = \bigcap_{p \in f^{-1}(U^*)} A_p$ luego por la *Proposición 3.2*, $f^{-1}(U^*)$ es semicerrado en X.

$\Rightarrow$) Sea $f(p) \in U^*$ luego $p \in f^{-1}(U^*)$ es semicerrado en X puesto que f es semicontinua se tiene que $A = f^{-1}(U^*)$ entonces $p \in A$ y $f(A) \subset U^*$. ■

CAPÍTULO

4

Conjuntos $\boldsymbol{\alpha}$-Semiabiertos y $\boldsymbol{\alpha}$-Semicerrados

Recordando que la clausura se puede definir como un operador (función) según **Kuratowski** [12], de partes de X en partes de X tales que:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

2. Para todo A: $A \subset \overline{A}$.

3. Para todo A: $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

4. Para todo A, B: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

se puede generalizar la noción de semiabierto usando operadores de la siguiente forma:

Definición 4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una función α de $P(X)$ en $P(X)$ se dice que es un **operador asociado** con τ si para todo $U \in \tau$ se tiene que $U \subseteq \alpha(U)$, donde $P(X)$ denota la familia de partes del conjunto X.*

Ejemplo 4.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las funciones* $\alpha : P(X) \to P(X)$ *y* $\beta : P(X) \to P(X)$ *dadas por* $\alpha(A) = A$ *y* $\beta(A) = \overline{A}$ *para todo* $A \in P(X)$*, son operadores asociados a* τ *y se denominan identidad y clausura respectivamente.*

Ejemplo 4.2. *Sean* $X = \{a, b, c\}$*,* $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$*, y* $\alpha : P(X) \to P(X)$*, dado por* $\alpha(A) = X - fr(A)$ *y definido como:*

$$\alpha(A) = \begin{cases} X & si \ \ A \in \{\emptyset, X\}, \\ \{a, b\} & si \ \ A \notin \{\emptyset, X\}, \end{cases}$$

es un operador asociado a τ*.*

Ejemplo 4.3. *Sean* $X = \mathbb{R}$*, con la topología usual y* $\alpha : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$\alpha(A) = \begin{cases} A & si \ \ A = X, \\ \overline{A} & si \ \ A \notin \{\emptyset, X\}, \\ \{1\} & si \ \ A = \emptyset, \end{cases}$$

es un operador asociado a la topología usual de $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 4.4. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $\alpha : P(X) \to P(X)$ *un operador asociado a* τ*. Si se tiene* $U \subset X$ *con* U *no vacío pero fijo, entonces* $\beta : P(X) \to P(X)$ *dado por* $\beta(A) = \alpha(A) \cup U$ *para todo* $A \in P(X)$ *es un operador asociado a* τ *distinto de* α*.*

Ejemplo 4.5. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $\alpha : P(X) \to P(X)$ *un operador asociado a* τ *definido como* $\alpha(A) = intA$*,* α *no es un operador asociado a* τ *sobre* X *ya que en general* $A \nsubseteq int(A)$*.*

De la definición de operador y de las definiciones de conjunto semiabierto y conjunto semicerrado se obtienen las definiciones de conjuntos α-Semiabiertos y α-Semicerrados.

Definición 4.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico y α un operador asociado a τ y A un subconjunto de X.*

*i) A es **α-Semiabierto**, si existe un conjunto abierto $U \in \tau$ tal que $U \subseteq A \subseteq \alpha(U)$.*

*ii) A es **α-Semicerrado**, si el complemento de A es un conjunto α-Semiabierto.*

Se debe tener en cuenta que a partir de las definiciones anteriores, se generaliza las nociones de conjunto semiabierto y semicerrado dada en el primer capítulo, en el sentido que los conjuntos semiabiertos según *Levine* son conjuntos clausura semiabiertos.

A continuación se tienen algunas observaciones, según el operador asociado a una topología.

Cuando el operador α es la identidad se tiene que existe un $U \in \tau$ tal que:

$$U \subseteq A \subseteq \alpha(U) = U$$

y por lo tanto los conjuntos identidad semiabiertos son justamente los conjuntos abiertos.

Análogamente para los conjuntos α-Semicerrados se tiene lo mismo, es decir, existe $U \in \tau$ tal que:

$$U \subseteq (X - A) \subseteq \alpha(U) = U$$

y así, se tiene que los conjuntos identidad semicerrados son claramente los conjuntos cerrados. Además las siguientes proposiciones muestran que los conjuntos abiertos son α-Semiabiertos y que los conjuntos cerrados son α-Semicerrados.

Proposición 4.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico y α un operador asociado a τ.*

i) Si A es abierto en X entonces A es α-Semiabierto.

ii) Si A es cerrado en X entonces A es α-Semicerrado.

Demostración. i) Como A es abierto entonces existe $U \in \tau$ tal que $U \subset A$. Ahora, para $A = U$ se tiene que $A \subseteq U$ y así, $U \subseteq A \subseteq \alpha(U) = U$ luego A es α-Semiabierto.

ii) Como A es cerrado, $X - A$ es abierto luego existe $U \in \tau$ tal que $U \subset (X - A)$. Ahora, para $U = X - A$ se tiene que $(X - A) \subseteq U$ por lo tanto $U \subseteq (X - A) \subseteq U \subseteq \alpha(U)$ luego $X - A$ es α-Semicerrado y así, A es α-Semicerrado. ■

Según la noción de operador y α-Semiabierto se da la siguiente definición.

Definición 4.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador asociado a τ. Se dice que un subconjunto A de X es una α-Semivecindad de un punto $x \in X$, si existe U α-semiabierto tal que $x \in U \subseteq A$.*

Obsérvese que esta definición generaliza la noción actual de vecindad de un punto, ya que cuando α es el operador identidad ésta coincide con la definición de vecindad. De esta manera, si (X, τ) es un espacio topológico y α es el operador identidad y A es una α-Vecindad de un punto $x \in X$ se llega a que U es α-Semiabierto, con lo cual, $U \subseteq U \subseteq \alpha(U) = U$ para algún $U \in \tau$, así, U es abierto en τ y satisface que $x \in U \subseteq A$ y de esta forma A es una vecindad de x.

Los siguientes ejemplos ilustran ciertas situaciones de interés en los conjuntos α-Semiabiertos.

Ejemplo 4.6. *Si $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$, $B = \{a, c\}$ y α un operador clausura asociado a τ, entonces $B = \{b, c\}$ es α-Semiabierto pues $\{a\} \subseteq A \subseteq \alpha(\{a\}) = \overline{(\{a\})} = X$ pero A no es abierto en X.*

Con este ejemplo se ha mostrado que no todos los conjuntos α-Semiabiertos en un espacio topológico son abiertos en este mismo.

Ejemplo 4.7. *Con respecto al operador descrito en el Ejemplo 4.2, observe que $\alpha(\emptyset) = X$ luego $P(X)$ es un $\alpha -$ semiabierto de X. En este caso $A = \{a, c\}$ y $A = \{b, c\}$ son $\alpha -$ semiabiertos de X debido a que $\emptyset \subseteq A \subseteq \alpha(\emptyset) = X$ y $\emptyset \subseteq B \subseteq \alpha(\emptyset) = X$ pero $A \cap B = \{c\} \notin \tau$.*

Así, la intersección de conjuntos $\alpha - \mathit{Semiabiertos}$ no es abierta, pero si es semiabierta pues, $\emptyset \subset \{c\} \subset \alpha(\emptyset) = X$.

En general la intersección arbitraria de una familia de conjuntos α-Semiabiertos no necesariamente es α-Semiabierta como se puede observar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.8. *Si se toma de referencia el Ejemplo 4.3, se puede observar que* $\big\{\big(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\big) : n \in \mathbb{Z}^+\big\}$ *es una colección de conjuntos abiertos cuya intersección no es* α*-Semiabierta pues,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\Big) = \{0\}$$

y el único conjunto abierto contenido en $\{0\}$ *es el conjunto vacío, luego si* $\{0\}$ *es* α*-Semiabierto en* $\mathbb{R}$ *entonces* $\emptyset \subseteq \{0\} \subseteq \alpha(\emptyset) = \{1\}$*, lo cual es imposible. Así,* $\bigcap_{n=1}^{\infty}\big(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\big)$ *no es* α*-Semiabierto en* $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 4.9. *Sean* $X = \{a, b, c\}$*,* $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$*, y* α *es el operador clausura asociado a* τ*. Por el Ejemplo 3.5,* $A = \{a, c\}$ *es un conjunto* α*-Semiabierto en* X *y* $B = \{b, c\}$ *es* α*-Semiabierto en* X *debido a que* $\{b\} \subseteq B \subseteq \alpha\big(\{b\}\big) = \overline{\big(\{b\}\big)} = X$ *pero* $A \cap B = \{c\}$ *no es* α*-Semiabierto en* X *pues* $\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq \alpha(\emptyset) = \overline{\emptyset} = \emptyset$ *y esto es imposible. De esta manera se deduce que* $A \cap B$ *no es* α*-Semiabierto en* X*.*

En las siguientes definiciones se introducen propiedades de un operador asociado a una topología las cuales implican consecuencias muy útiles.

Definición 4.4. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* α *un operador asociado a* τ*. Se dice que:*

i) α *es un operador* ***estrella*** *si satisface que para todo par* U, V *de conjuntos abiertos en* τ *se tiene que* $\alpha(U) \cap V \subseteq \alpha(U \cap V)$*.*

ii) α *es un operador* ***monótono*** *si satisface que para todo par* U, V *de conjuntos abiertos en* τ *con* $U \subseteq V$ *entonces* $\alpha(U) \subseteq \alpha(V)$*.*

Del *Ejemplo 4.4* se pueden establecer las siguientes observaciones:

1. Si el operador α es monótono entonces el operador β es monótono.

2. Como α es monótono para todo par U, O de conjuntos abiertos en τ tales que $U \subseteq O$ entonces $\alpha(U) \subseteq \alpha(O)$ luego β es monótono pues $\beta(U) = \alpha(U) \cup V \subset \alpha(O) \cup V = \beta(O)$ así $\beta(U) \subset \beta(O)$ para $U \subseteq O$ y U, O abiertos en X.

3. Nótese que los operadores identidad y clausura son monótonos y estrella.

4. El operador identidad es *monótono* ya que para todo par U, V de conjuntos abiertos en τ con U subconjunto de V se cumple que $\alpha(U) = U \subseteq V = \alpha(V)$. También es *estrella* pues para cada par U, V de conjuntos abiertos en τ se tiene que $\alpha(U) \cap V = U \cap V = \alpha(U \cap V)$.

5. El operador clausura es *monótono* ya que para todo par U, V de conjuntos abiertos en τ con U subconjunto de V se cumple que $\alpha(U) = \overline{U} \subseteq \overline{V} = \alpha(V)$. Es claro que también es *estrella* pues para cada par U, V de conjuntos abiertos en τ se tiene que $\alpha(U) \cap V = \overline{U} \cap V$ y $\alpha(U \cap V) = \overline{(U \cap V)}$. Supongamos que $x \in (\overline{U} \cap V)$ entonces $x \in \overline{U}$ y $x \in V$ luego para todo O abierto en X se tendrá que $O \cap U = \emptyset$. De este modo $x \in O \cap U$ y $x \in V$ por lo tanto $x \in O \cap U \cap V$ así, $O \cap U \cap V \neq \emptyset$ entonces $x \in \overline{(U \cap V)}$ que implica que
$$\alpha(U) \cap V = \overline{U} \cap V \subset U \cap V \subset \overline{U \cap V}.$$

6. El operador α definido por $\alpha(V) = X - fr(V)$ para $V \in \tau$, es *estrella* y no es *monótono* ya que $U = \emptyset$, $V = \{a, b\}$ con $U \subseteq V$ es decir $\emptyset \subset \{a, b\}$ pero $\alpha(\emptyset) = X$ y es claro que $X \nsubseteq \{a, b\} = \alpha\big(\{a, b\}\big)$.

Ejemplo 4.10. *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\big\}$, *y* β *el operador definido como sigue:*
$$\beta(A) = \begin{cases} A & si\ b \notin A \\ \overline{A} & si\ b \in A \end{cases}$$
comprobemos que β *es un operador monótono. Esto es, sean* U, V *abiertos en* τ *con* $U \subseteq V$. *Si* $b \notin U$ *entonces* $\beta(U) = U \subseteq V = \beta(V)$ *con* $b \notin V$. *Por otro lado si* $b \in U$ *entonces* $\beta(U) = \overline{U} \subseteq \overline{V} = \beta(V)$ *con* $b \in V$, *si* $b \notin U$ *y* $b \in V$ *entonces* $\beta(U) = U \subseteq V \subset \overline{V} = \beta(V)$. *Así, se puede llegar a que* $\beta(U) \subseteq \beta(V)$.

Claramente β no es estrella, ya que si se toma $V = \{a, b\}$ y $U = \{a, c\}$ entonces $\beta(U \cap V) = \beta\big(\{a\}\big) = \{a\}$ y $\beta(V) \cap U = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$, luego $\{a, c\} \neq \{a\}$.

Observe que según lo visto en estos dos últimos ejemplos, la noción de operador *estrella* y de operador *monótono* son nociones diferentes.

Teorema 4.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador monótono asociado a la topología τ. Entonces la union de conjuntos α-Semiabiertos es α-Semiabierta*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos α-Semiabiertos, entonces para cada $i \in I$ existe un conjunto abierto U_i tal que

$$U_i \subseteq A_i \subseteq \alpha(U_i).$$

De aquí se obtiene que $\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \alpha(U_i)$. Ahora, como α es monótono y $U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ para todo $i \in I$ entonces $\alpha(U_i) \subseteq \alpha\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)$ por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \alpha(U_i) \subseteq \alpha\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)$ luego

$$\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \alpha(\bigcup_{i\in I} U_i),$$

y así $\bigcup_{i\in I} U_i$ es α-Semiabierto. $\blacksquare$

Pero si el operador α no es monótono la unión de conjuntos α-Semiabiertos no necesariamente es α-Semiabierta como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.11. *Sean $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$, y $\alpha : P(X) \to P(X)$, dado por $\alpha(A) = X - fr(A)$ y definido como:*

$$\alpha(A) = \begin{cases} X & si \;\; A \in \{\emptyset, X\} \\ \{a, b\} & si \;\; A \notin \{\emptyset, X\} \end{cases}$$

Se tiene $A = \{c\}$ y $B = \{b\}$, el conjunto A es α-Semiabierto pues $\emptyset \subset \{c\} \subset \alpha(\emptyset) = X$ y B es α-Semiabiertas ya que es abierto, pero $A \cup B$ no es α-Semiabierto porque $\{b\} \subset \{b, c\} \subsetneq \alpha(\{b\}) = \{a, b\}$ lo cual es imposible.

Utilizando el hecho de que la union de conjuntos α-Semiabiertos es α-Semiabierta se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador monótono asociado a la topología τ. Un subconjunto H de X es α-Semiabierto si y solo si H es una α-Semivecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Se supone que H es una α-Semivecindad de cada punto $x \in H$. esto significa que para cada $x \in H$ existe U_x que es α-semiabierto en X tal que $x \in U_x \subset H$, y como α es monótono, $H = \bigcup_{x \in H} U_x$ es α-semiabierto. Recíprocamente la prueba es inmediata por la definición de α-semiabierto. ■

Una consecuencia inmediata de la *Definición 4.2* y del *Teorema 4.1* se resume en la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador monótono asociado a la topología τ, entonces la intersección de conjuntos α-Semicerrados es α-Semicerrada.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos α-Semicerrados, entonces aplicando las leyes de *De Morgan* se tiene que:

$$X - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X - A_i).$$

Puesto que $X - A_i$ son α-Semiabiertos, entonces $\bigcup_{i \in I}(X - A_i)$ por el *Teorema 4.1* es α-Semiabierta luego $X - \bigcap_{i \in I} A_i$ es α-Semiabierto y por consiguiente $\bigcap_{i \in I} A_i$ es α-Semicerrada. ■

Si α no es monótono la intersección de conjuntos α-Semicerrados en general no es α-Semicerrada. Para ilustrar esto, se tiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.12. *Sean* $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$, *y* $\alpha : P(X) \to P(X)$, *dado por* $\alpha(A) = X - fr(A)$ *y definido como:*

$$\alpha(A) = \begin{cases} X & si\ A \in \{\emptyset, X\} \\ \{a,b\} & si\ A \notin \{\emptyset, X\} \end{cases}$$

Se tiene $A = \{a,b\}$ *y* $B = \{b,c\}$, $X - A = \{c\}$ *es* α*-Semiabierto ya que* $\emptyset \subset \{c\} \subset \alpha(\emptyset) = X$ *y* $X - B = \{a\}$ *es* α*-Semiabierto por ser abierto. Así,* A *y* B *son semicerrados, pero* $A \cap B = \{b\}$ *no es* α*-Semicerrado ya que* $X - (A \cap B) = \{a,c\}$ *y* $\{a\} \subset \{a,c\} \subsetneq \alpha(\{a\}) = \{a,b\}$.

El siguiente teorema caracteriza a los conjuntos α-Semiabiertos cuando el operador es monótono.

Teorema 4.3. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* α *un operador monótono asociado a la topología* τ. *Un subconjunto* A *de* X *es* α*-Semiabierto en* X *si y solo si* $A \subseteq \alpha(intA)$.

Demostración. Si A es α-Semiabierto en X, entonces existe $U \in \tau$ tal que $U \subset A \subset \alpha(U)$ y como $U \subset intA$ puesto que α es un operador monótono entonces $\alpha(U) \subset \alpha(intA)$. recíprocamente, si $A \subseteq \alpha(intA)$, tomando $U = intA$ se obtiene que $U \subset A \subset \alpha(U)$ y así A es un conjunto α-Semiabierto en X. ■

Análogamente se pueden caracterizar los conjuntos α-Semicerrados cuando el operador es monótono, teniendo en cuenta que si un subconjunto A de X es α-Semiabierto se cumple que $X - A \subseteq X - \alpha(intA)$.

Teorema 4.4. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* α *un operador monótono asociado a la topología* τ *y* A *un subconjunto* α*-Semiabierto de* X. *Si* B *es un subconjunto de* X *tal que* $A \subseteq B \subseteq \alpha(intA)$ *entonces* B *es un conjunto* α*-Semiabierto.*

Demostración. Como $A \subseteq B$ entonces $\alpha(intA) \subseteq \alpha(intB)$ y como $B \subset \alpha(intA)$ entonces $B \subset \alpha(intB)$. Ahora utilizando el *Teorema 4.3* se concluye que B es un conjunto α-Semiabierto. ■

Definición 4.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador asociado a la topología τ. Se dice que α es un operador idempotente si $\alpha^2 = \alpha$.*

Ejemplo 4.13. *Sean $X = \{a, b, c\}$ y β el operador definido como sigue:*

$$\beta(A) = \begin{cases} A & si \;\; b \notin A \\ \overline{A} & si \;\; b \in A. \end{cases}$$

Si $b \in A$ entonces $\beta^2(A) = A = \beta(A)$ y por otro lado si $b \notin A$ entonces $\beta^2(A) = \overline{A} = \beta(A)$. De esta manera es evidente que β es un operador idempotente.

El siguiente teorema presenta una relación estrecha entre operadores monótonos, operadores idempotentes y conjuntos α-Semiabiertos.

Teorema 4.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico, α un operador monótono e idempotente asociado a la topología τ y A un subconjunto α-Semiabierto de X. Si B es un subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \alpha(A)$, entonces B es un conjunto α-Semiabierto.*

Demostración. Si $A \subset B \subset \alpha(A)$, entonces $intA \subseteq intB$ y como α es monótono, se tiene que $\alpha(intA) \subseteq \alpha(intB)$. Ahora, utilizando el hecho de que A es un conjunto α-Semiabierto, se obtiene

$$A \subseteq \alpha(intA) \subseteq \alpha(intB),$$

pero α es idempotente, así $\alpha(A) \subseteq \alpha(intB)$ y como $B \subset \alpha(A)$ por lo tanto $B \subseteq \alpha(intB)$ y por el *Teorema 4.2*, B es un conjunto α-Semiabierto. ■

El estudio realizado por medio de esta monografía deriva una serie de resultados interesantes como α-Semiabierto generalizado, α-Semicerrado generalizado, α-Semicontinuidad y α-Semiconexidad los cuales abarcan algunas nociones previamente halladas por autores como *Kasahara*, *Rosas* y *Vielma*, de esta manera se podría continuar profundizando en forma natural ya que el contenido de este trabajo deja al lector la oportunidad de ahondar con mayores detalles y se puedan obtener nuevos resultados aportando nuevas ideas a la topología general.

BIBLIOGRAFÍA

[1] WILLARD, Stephen. *General Topology*. Adisson-Wesley. 1970.

[2] MUNKRES, James R. *Topología*. Segunda Edición. Prentice Hall. 2000.

[3] MUÑOZ, Jose. *Topología Básica*. Editora Guadalupe Ltda. 2003.

[4] APOSTOL, Tom M. *Mathematical Analysis*. second ed. Adisson-Wesley. 1977.

[5] HALL, D.W. - SPENCER II, G.L. *Elementary Topology*. Wiley. New York. 1995.

[6] KELLEY, John. *General Topology*. Van Nostrand. Princeton. N.J. 1955.

[7] LEVINE, N. *Semiopen Set and Semi Continuity in Topological Spaces*. Amer. Math. Monthly. 70(1963), 36-41.

[8] CARPINTERO, Carlos - ROSAS, Ennis. *La Intersección Arbitraria de una Familia de Subconjuntos Abiertos con la Propiedad α-S-Localmente Finita es α-Semiabierta*. Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 2 (2000), pp. 155-162. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre. Cumaná. Venezuela.

[9] BISWAS, N. *On Characterizations of Semicontinuos Functions*. Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. CL. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 48 (1970). 399-402.

[10] CARPINTERO, Carlos - ROSAS, Ennis - VIELMA, J. *Operadores Asociados a una Topología* Γ *Sobre un Conjunto* X *y nociones Conexas*. Divulgaciones Matemáticas Vol. 6 No. 2 (1998), pp. 139-148. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre. Cumaná. Venezuela.

[11] VIELMA J. - ROSAS, Ennis. α*-SemiOpen Set y* $\alpha\beta$*-Continuity in Topological Spaces*. Submited to Math. Japonica.

[12] http://pl.wikipedia.org/wiki/kazimierz-kuratowski

[13] http://jfmoreno.blogspot.com/2006/04/viva-kinihiko-kasahara.html