

**DESARROLLO DE MODELO DE FLUJO VERTICAL EN TUBERÍAS PARA
CRUDOS EXTRAPESADOS CONSIDERANDO EL FENÓMENO DE
FOAMY OIL**

CARLOS ANDRES DIAZ PRADA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA PETRÓLEOS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE HIDROCARBUROS
BUCARAMANGA**

2013

**DESARROLLO DE MODELO DE FLUJO VERTICAL EN TUBERÍAS PARA
CRUDOS EXTRAPESADOS CONSIDERANDO EL FENÓMENO DE
FOAMY OIL**

CARLOS ANDRES DIAZ PRADA

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Ingeniería de Hidrocarburos**

M.Sc. NICOLÁS SANTOS SANTOS

Director

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA PETRÓLEOS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE HIDROCARBUROS
BUCARAMANGA**

2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	17
1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	19
1.1.Planteamiento del Problema	19
1.2.Clasificación de los fluidos a partir de su comportamiento reológico	23
1.3.Reología de fluidos espumosos	32
2.FENÓMENO DE NUCLEACIÓN	40
2.1 Ecuación fundamental para el análisis del movimiento de burbujas	42
2.2 Determinación del balance de fuerzas a partir de la segunda ley de Newton.....	44
2.3 Determinación del balance a partir de la topología de flujo	50
2.4 Análisis de la Burbuja de Taylor.....	51
3.INTEGRACIÓN DE FENÓMENO DE COALESCENCIA PARA DESCRIBIR EL FLUJO DE UN FLUIDO TIPO FOAMY OIL	57
4.PROPIEDADES DE COMPORTAMIENTO DE FASES DE FLUIDOS TIPOS FOAMY OIL	68
5.FLUJO DE FLUIDOS TIPO FOAMY OIL EN TUBERÍA	82

6.ANÁLISIS DE RESULTADOS	89
6.1.Unidad de Análisis	89
6.2.Cálculo del gradiente de presión.....	96
6.3 Análisis estadístico de resultados	101
CONCLUSIONES	106
RECOMENDACIONES	109
BIBLIOGRAFÍA	110
ANEXOS	116

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 distribución de reservas en colombia.....	19
Figura 1.2 Esquema convencional de un sistema de Producción.....	20
Figura 1.3 Diagrama de deformación de una unidad de flujo	24
Figura 1.4 Comportamiento de Fluidos en función de la velocidad de deformación.....	26
Figura 1.5 Comportamiento de Fluidos Tixotrópicos.....	31
Figura 1.6 Comportamiento de la viscosidad de Fluidos Espumoso tipo Bingham	35
Figura 1.7 Regímenes de flujo en función de la calidad de la espuma	37
Figura 2.1 Fuerzas que actúan sobre el ascenso de una burbuja de gas.....	43
Figura 2.2 Regiones de Flujo definidas en función de la velocidad del gas en una columna.....	50
Figura 2.3 Diagrama general de una burbuja de Taylor.....	52
Figura 2.4 Función de factor de excentricidad de la burbuja	55
Figura 3.1 Sensibilidad de la Función del diámetro de la burbuja de Taylor	59
Figura 3.2 Efecto del número de Reynolds sobre la Función del diámetro de la burbuja de Taylor.....	60
Figura 3.3 Profundidad de separación del gas de acuerdo a funciones de velocidad de ascenso de las burbujas.....	62

Figura 3.4 Variación de la profundidad de separación del gas en función del GOR	64
Figura 3.5 Variación de la profundidad de separación del gas en función del diámetro de la tubería	65
Figura 3.6 Variación de la profundidad de separación del gas en función de la variación de la presión en cabeza de pozo	66
Figura 3.7 Variación de la función de distribución de frecuencia de tamaño y cantidad de burbujas de gas	67
Figura 4.1 Diagrama de comportamiento de fases con ajuste de presión de burbuja	75
Figura 4.2 Comportamiento de la función de solubilidad del gas.....	76
Figura 4.3 Comportamiento de la función del Factor Volumétrico del Aceite.....	77
Figura 4.4 Comportamiento de la densidad del aceite.....	78
Figura 4.5 Comportamiento de la Compresibilidad del Aceite	79
Figura 4.6 Comportamiento de la viscosidad de crudo muerto T2.....	79
Figura 4.7 Comportamiento de la viscosidad de crudo T2 para tamaños de burbuja de valor constante	80
Figura 4.8 Comportamiento de la viscosidad de crudo T2 en función de la fracción molar de gas	81
Figura 5.1 Patrones de flujo vertical en tuberías.....	84
Figura 5.2 Definición de unidad de análisis para balance del sistema.....	88
Figura 6.1 Distribución de valores de caudal de producción.....	90
Figura 6.2 Distribución de valores de diámetros de tubería de producción	91

Figura 6.3 Distribución de valores de presión en cabeza de pozo.....	92
Figura 6.4 Distribución de valores de tamaños de burbuja	92
Figura 6.5 Distribución de valores de profundidad de separación para la función propuesta.....	93
Figura 6.6 Distribución de valores de profundidad de separación en función de otras funciones de velocidad de gas en el sistema	93
Figura 6.7 Gradientes dinámicos de pozos del campo Chichimene	95
Figura 6.8 Resultados evaluación Pozo SW-4.....	97
Figura 6.9 Resultados evaluación Pozo CH-154	97
Figura 6.10 Resultados evaluación Pozo CH-162	98
Figura 6.11 Resultados evaluación Pozo CH-18	98
Figura 6.12 Resultados evaluación Pozo CH-16	99
Figura 6.13 Resultados evaluación Pozo CH-66	99
Figura 6.14 Resultados evaluación Pozo CH-133	100
Figura 6.15 Resultados evaluación Pozo CH-147	100
Figura 6.16 Resultados evaluación Pozo CH-148	101
Figura 6.17 Distribución de error relativo en función del GOR.....	103
Figura 6.18 Distribución de error relativo en función de la densidad del líquido ..	103
Figura 6.19 Crossplot para valores de presión calculados por el modelo propuesto	104

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Constantes de Equilibrio para definición de pseudopresión de burbuja	70
Tabla 2. Propiedades de crudo de la formación T2	89
Tabla 3. Propiedades mecánicas de pozos productores de crudo T2	90
Tabla 4. Propiedades de los pozos productores de T2 evaluados.....	96
Tabla 5. Criterios de evaluación de desempeño de correlaciones para el modelamiento de la presión	102
Tabla 6. Rangos de implementación de variables en el modelo	105

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. Desarrollo de la ecuación de continuidad que permite el planteamiento de una solución particular al modelamiento de flujo de un fluido espumoso	115
ANEXO B. Solución del balance para el modelo propuesto en la presente investigación.....	119
ANEXO C. Balance de fuerzas a partir de la segunda ley de Newton para determinar la velocidad de flujo.....	123
ANEXO D. Derivación de la función que describe el diámetro de la burbuja de Taylor	126

NOMENCLATURA

τ : Esfuerzo de corte (PSI)

μ : Viscosidad (cp)

u : Velocidad de fluido (ft/s, ó m/s)

γ : Velocidad de deformación (s^{-1})

$\dot{\gamma}$: Velocidad de deformación de fluidos no-newtonianos (s^{-1})

τ_o : Esfuerzo de fluencia (PSI)

μ_p : Viscosidad plástica (cp)

n : Índice de comportamiento de flujo, adimensional

k : Índice de consistencia de flujo (Pa-s)

μ_a : Viscosidad Aparente (Pa-s)

μ_l : Viscosidad del líquido (Pa-s)

λ : Módulo de rigidez (PSI)

J = Tasa de Nucleación (ft³/s ó m³/s)

N =Número de núcleos por unidad de volumen, adimensional

R = Constante de Boltzmann (BTU/hr ft R)

p_g = Presión de la fase gaseosa (PSI)

p_o = Presión de la fase líquida (PSI)

p_e = Presión de equilibrio (PSI)

V_o = Volumen de crudo (ft³)

V_g = Volumen de una burbuja de gas (ft³)

N_o = Número de burbujas por unidad de volumen, adimensional

R_e : Número de Reynolds, adimensional.

u_t : Velocidad Total (ft/s)

d : Diámetro de la tubería (in)

μ_f : Viscosidad de la espuma (cp)

ρ_f : Densidad de la espuma (lb/ft³)

ρ_g : Densidad del gas (lb/ft³)
 ρ_l : Densidad del líquido (lb/ft³)
L: Longitud de la sección de tubería (ft)
Q: Caudal de fluido (BPD)
 Γ : Calidad de la espuma, fracción
 σ : Tensión superficial, (lbf/ft)
 r_b : Radio de la burbuja (pulg ó cm)
 F_b : Fuerza de boyanza (lbf)
 F_m : Fuerza de momento de gas (lbf)
 F_p : Fuerza de presión (lbf)
 F_s : Fuerza de tensión superficial (lbf)
 F_d : Fuerza de arrastre (lbf)
 F_i : Fuerza inercial (lbf)
N = Unidad de Análisis para solución de ecuación de Navier-Stokes, adimensional
 t_e : tiempo de expansión de la burbuja (s)
 m = masa de la burbuja (lbf-s²/ft)
 g = Gravedad (ft/s²)
 v_e = Velocidad de crecimiento de la burbuja (ft/s)
 r_e = Radio de crecimiento de la burbuja (pulg ó cm)
V = Velocidad instantánea (ft/s)
 V_E = Velocidad de equilibrio de la burbuja (ft/s)
 r_E = radio de la burbuja en estado de equilibrio (pulg ó cm)
D = Diámetro de la tubería (pulg)
 d_{TB} = Diámetro de la burbuja de Taylor (pulg ó cm)
 d_B = Diámetro de la burbuja (pulg ó cm)
 V_B Velocidad de la burbuja (ft/s)
 V_m = Velocidad de la mezcla (ft/s)
 V_{sg} = Velocidad superficial de la fase gaseosa (ft/s)
 V_{sl} = Velocidad superficial de la fase líquida (ft/s)

C_D = Coeficiente de arrastre, adimensional
 α = Parámetro de forma, adimensional
 β = Parámetro de escala de la distribución, adimensional
 K_{go} = Constantes de equilibrio de componentes en la mezcla, adimensional
 K'_{Vn} = Parámetros de ajuste de constantes de equilibrio, adimensional
 p_{pbp} = Pseudopresión de burbuja (PSI)
 P_b = Presión de burbuja (PSI)
 γ_g = Gravedad del gas
 γ_{gc} = Gravedad específica del gas normalizada
 R_s = Solubilidad del gas en el líquido (SCF/STB)
 MW_o = Peso molecular del crudo
 B_o = Factor volumétrico del crudo (Bbl/STB)
 c_o = Compresibilidad del crudo (PSI⁻¹)
 ε = Relación de Expansión Volumétrica, adimensional
 ω_g = Fracción másica de gas, fracción
 w_f = Peso del líquido en la unidad de análisis (lbf)

RESUMEN

TITULO: DESARROLLO DE MODELO DE FLUJO VERTICAL EN TUBERÍAS PARA CRUDOS EXTRAPESADOS CONSIDERANDO EL FENÓMENO DE FOAMY OIL*

AUTOR: CARLOS ANDRÉS DIAZ PRADA**

PALABRAS CLAVES: Foamy Oil, Ley de Potencia, Propiedades PVT, Nucleación, Coalescencia, Volúmenes Igualados, Gradiente de presión.

Los fluidos que caen bajo la denominación “Foamy Oil” representan una particularidad tanto en términos de la caracterización de sus propiedades como en la dinámica de flujo, la cual se puede representar a partir de la dinámica de las fases ante la variación de la presión y temperatura en el sistema. El presente estudio plantea una aproximación a partir de dos fenómenos: Nucleación y Coalescencia. El primero permite establecer la geometría que regula la dinámica de las fases y el segundo las condiciones a partir de las cuales la fase gaseosa empieza a fluir como fase independiente, esto es, las condiciones a partir de las cuales la geometría esférica de las burbujas de gas cambia a una geometría regulada por la burbuja de Taylor; de modo que los dos fenómenos establecen las condiciones iniciales y de frontera para la aplicabilidad del modelo. El punto de encuentro de los dos se define a partir del modelo de tipo “volúmenes igualados”, por medio del cual se establece el diferencial de presión en términos de la reología del fluido, la cual se puede expresar de acuerdo al modelo de ley de potencia para fluidos no-newtonianos. La evaluación del fenómeno se realiza en términos probabilísticos para asegurar que la sensibilidad de las variables establezcan los rangos de aplicabilidad y consistencia de los resultados.

La evaluación de la caída de presión que se estima a partir del desarrollo propuesto se compara respecto a los resultados de las correlaciones y modelos mecánicos, usados comúnmente para crudos convencionales para definir la consistencia de su evaluación para determinar el comportamiento del crudo T2 del campo Chichimene.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ingeniería Fisicoquímica, Escuela de Ingeniería de Petróleos Director Ing. Nicolás Santos Santos.

ABSTRACT

TITLE: VERTICAL FLOW MODEL DEVELOPMENT FOR EXTRAHEAVY OIL CONSIDERING FOAMY OIL PHENOMENON *

AUTHOR: CARLOS ANDRÉS DIAZ PRADA**

KEY WORDS: Foamy Oil, Power Law, PVT properties, Nucleation, Coalescence, Equalized Volumes, Pressure gradient.

Fluids that fall under the heading "Oil Foamy" represents a particularity in terms of characterizing properties as flow dynamics which can be represented from the dynamics of the phases before the pressure variation and system temperature. This paper examines an approach take into account two phenomena: nucleation and coalescence. The first one set the geometry, which defines phases dynamics and the second the conditions from which the gas phase begins to flow separately. that is, the conditions from which the spherical geometry, defined for gas bubbles modeling, change to a geometry regulated by the Taylor bubble, so that, the evaluated phenomena set the initial and boundary conditions for the model applicability. They are articulated by the Equalized Volume model, by which establishes the pressure differential in terms of the fluid rheology that can be expressed according to the power law model for non-Newtonian fluids. Phenomenon evaluation is performed in probabilistic terms to ensure that the sensitivity ranges set variables applicability and results consistency.

Pressure drop evaluation is defined from the proposed development compared to the results of correlations and mechanistic models, commonly used for conventional oils, to define the consistency of model evaluation to determine the T2 oil behavior, from Chichimene field.

* Thesis of gredee

** Faculty of Physical Engineering, School of Petroleum Engineering Director: Ing. Nicolás Santos Santos.

INTRODUCCIÓN

El crudo denominado Foamy Oil puede definirse como una fase continua líquida con alto contenido de gas que permanece disuelto durante condiciones en las que un gas asociado a un líquido convencional fluiría como fase independiente. El análisis de este fenómeno en la industria ha tenido un desarrollo notable referido a los crudos pesados, debido a que algunos yacimientos productores de este tipo de hidrocarburos, bajo un mecanismo de gas en solución, han tenido un factor de recobro mayor al que pudiera predecir cualquier modelo aplicable a los crudos convencionales. Por este motivo, la mayoría de estudios han concentrado sus esfuerzos en explicar el comportamiento de las propiedades y las ecuaciones de flujo a nivel del yacimiento. Sin embargo, al realizar un análisis de los valores de la presión en los distintos nodos del sistema de producción, se puede establecer que mientras la presión del yacimiento permanezca por encima de la presión de burbuja, entendida de la forma en que puede medirse bajo un esquema de comportamiento de fases convencional, el fenómeno de la solubilidad del gas cobra mayor preponderancia entre la cara de la formación y la cabeza de pozo.

El comportamiento del flujo de este fluido debe analizarse primero teniendo en cuenta sus propiedades, especialmente la solubilidad de gas que redefine el valor de presión de burbuja obtenido de manera convencional, por cuanto esta establece el umbral a partir del cual el gas se distribuye en esta unidad del sistema de producción. Los límites de este comportamiento se analizan en función de la velocidad del gas en la fase líquida, para lo cual se propone una función de distribución de probabilidad de frecuencia del tamaño de la burbuja en el sistema a un momento dado y el límite, que marca la separación de las fases, por medio del balance de fuerzas que se presenta sobre una burbuja de gas.

La función obtenida mediante este balance permite modificar la solubilidad del gas en el líquido, con lo cual se define un contenido de gas a unas

condiciones del sistema a partir del valor más probable de separación de un diámetro de burbuja. El valor de la presión de burbuja se determina a partir de la modificación de las constantes de equilibrio entre las fases, con lo cual se establece que el cambio de las propiedades del fluido define su variación ante un diferencial de presión en el sistema.

El balance que permite estimar el diferencial de presión del sistema se basa en la relación de Expansión Volumétrica, con lo cual, se incluye el efecto de la velocidad del gas en la unidad de análisis.

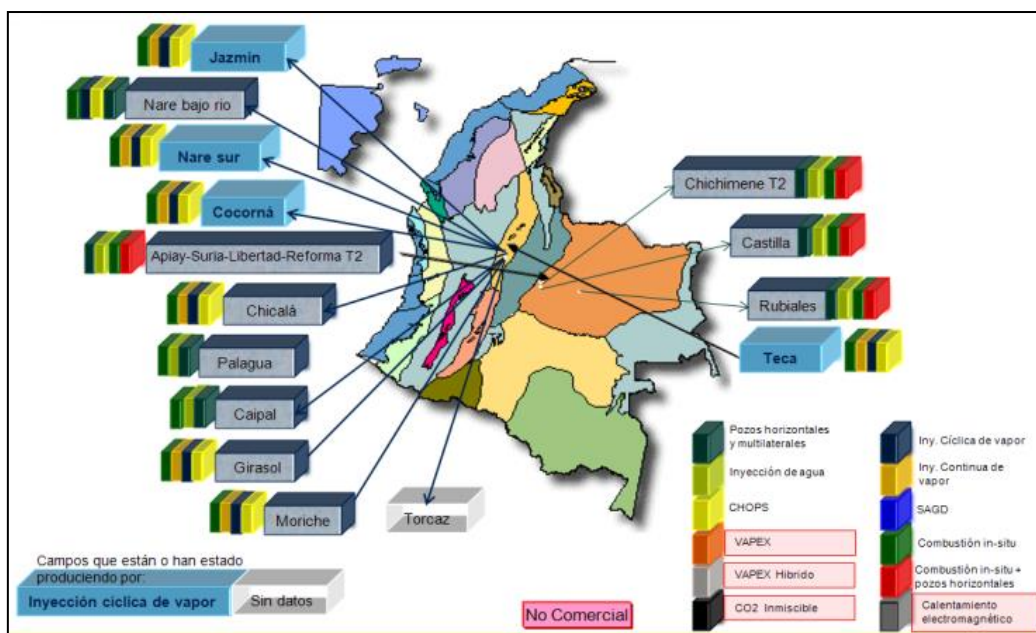
La correlación que resulta del desarrollo de este balance se compara con datos experimentales del crudo T2 del campo Chichimene y se realiza un análisis estadístico de los datos obtenidos.

1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del Problema

Los crudos extrapesados constituyen un elemento medular del plan de desarrollo de la industria en la industria. Cerca del 70% de las reservas probadas en estos momentos en el mundo corresponden a este tipo de fluidos. Dentro de los indicadores de Ecopetrol S.A. se señala que este tipo de crudos conforman cerca del 35% de reservas de petróleo en el país y los campos que sustentan esta cifra se muestran en la figura 1.1.

Figura 1.1 Distribución de reservas en Colombia

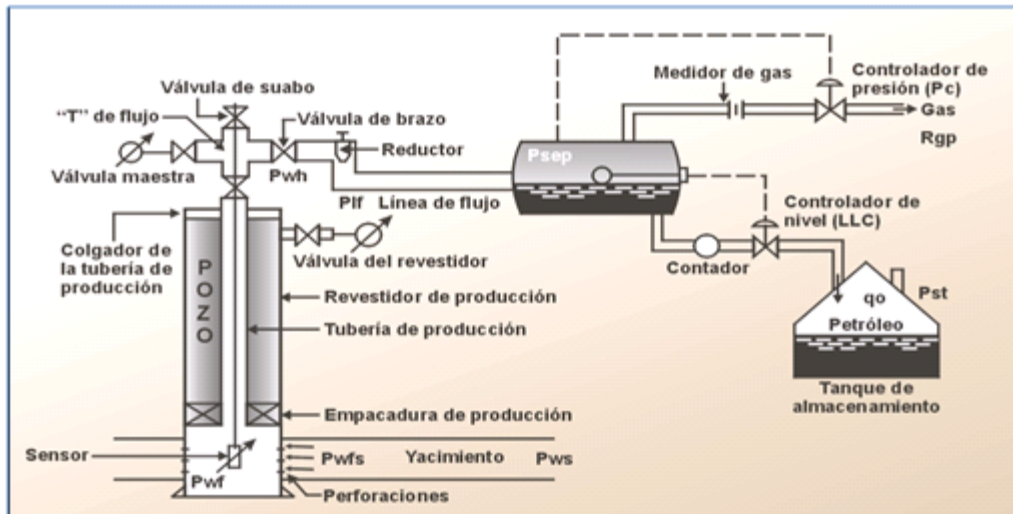


Fuente: Ecopetrol ICP – Programa de Incremento de Factor de Recobro

Dentro del marco estratégico de Ecopetrol para el aprovechamiento de estos recursos, en el cual se incluye una meta de producción hacia el año 2015 de 1.3 MMBls de barriles equivalentes, se plantea la integración entre el upstream y el downstream de tal forma que los desarrollos en estas áreas tengan un horizonte común, de modo que ese aprovechamiento está en su

función de su explotación, dentro de la cual la producción es una parte fundamental. El esquema convencional de producción se muestra en la figura 1.2.

Figura 1.2 Esquema convencional de un sistema de Producción



Fuente: Optimización de la producción mediante Análisis nodal, Maggiolo Ricardo, 1996

En los distintos elementos del sistema la energía que se requiere para la producción de los fluidos se expresa en la forma de un diferencial de presión que debe asegurarse en cada etapa para que el flujo se dé a través de los distintos componentes.

Una optimización energética del sistema debe contemplar la totalidad de los elementos, debido principalmente a que cualquier cambio en un elemento desemboca en una alteración en los componentes restantes. Desde el yacimiento hasta el sistema de tratamiento y almacenamiento se presentan estas pérdidas de presión, y dentro de la totalidad, la parte que corresponde a la tubería que lleva los fluidos desde el fondo hasta cabeza de pozo es una parte central que para el caso de los crudos extrapesados que presentan la particularidad del Foamy Oil no ha sido suficientemente modelado.

Este modelamiento permite establecer las condiciones a las cuales un sistema de levantamiento artificial puede implementarse en estos pozos de tal modo que pueda alcanzarse una optimización energética del sistema, en donde la profundidad de asentamiento y la energía requerida por el mismo sean aprovechadas de manera que se pueda asegurar un caudal de flujo y una presión en el sistema.

En la actualidad hay tres enfoques para el modelamiento de flujo de fluidos: Experimental, Correlacional y Modelamiento Numérico. El presente estudio constituye una aproximación al fenómeno mediante el análisis del balance del sistema, que define una perspectiva correlacional, pero integrando las variables que afectan el proceso en un escenario probabilístico, con lo cual, se tiene la posibilidad de definir la correspondencia de los datos a partir de valores de mayor probabilidad de ocurrencia de las condiciones que regulan el fenómeno.

La conveniencia de este tipo de modelos para el modelamiento del Foamy Oil está establecida por su posibilidad de incluir el fenómeno de nucleación de las burbujas de gas, pero tiene una limitación definida por la necesidad de medir las velocidades de las fases para determinar su distribución.

Hasta el momento, la aplicación de las alternativas con las que se cuenta actualmente presenta las siguientes carencias:

- El uso de correlaciones existentes deviene normalmente en una sobreestimación de Presión, lo cual establece una alta incertidumbre sobre el comportamiento de los fluidos en la tubería de producción del pozo.
- Se define una alta incertidumbre en el perfil de presión, lo cual redundando en la falta de criterios suficientes para establecer la profundidad de

asentamiento de un sistema de levantamiento artificial. Por este motivo en la actualidad el asentamiento se define a modo de prueba y error.

- No se considera comportamiento del efecto de una alta solubilidad del gas por lo cual se puede producir una alta merma de crudo en superficie y no se puede diseñar con confiabilidad los sistemas de bombeo que pueda requerir un sistema de recolección de estos fluidos.
- No se tienen patrones de flujo indefinidos, de modo que la aproximación que se tienen de los patrones se realiza con base en una transición entre ellos generada por una presión de burbuja que puede no ser representativa del comportamiento de los fluidos.
- Una variación de condiciones se traduce en variación de la correlación lo cual puede entorpecer una metodología planteada para realizar un análisis del sistema de producción mediante análisis nodal.

Cada una de estas carencias son las que la presente investigación plantea dentro de su desarrollo y define como alcance de su desarrollo mediante el modelamiento del flujo vertical de crudos extrapesados considerando el fenómeno de Foamy Oil.

La particularidad del Foamy Oil se refiere a que la tensión entre las fases debido a la viscosidad de la fase continua sobrepasa las fuerzas gravitacionales, de modo que las burbujas de gas, generadas por el cambio de fase que provoca una disminución de la presión en el sistema, permanecen sin coalescer a presiones por debajo de la presión de burbuja. En este sentido, el PVT del fluido pueden modificarse a una condición de supersaturación que permita representar este fenómeno.

Para llevar a cabo el presente estudio y obtener los resultados propuestos se contará con herramientas de tipo metodológico, representado por la investigación analítica, resultados de pruebas PLT, y análisis de datos para establecer el ajuste del modelo que se plantea a partir de las ecuaciones fundamentales de flujo para la determinación del gradiente de presión.

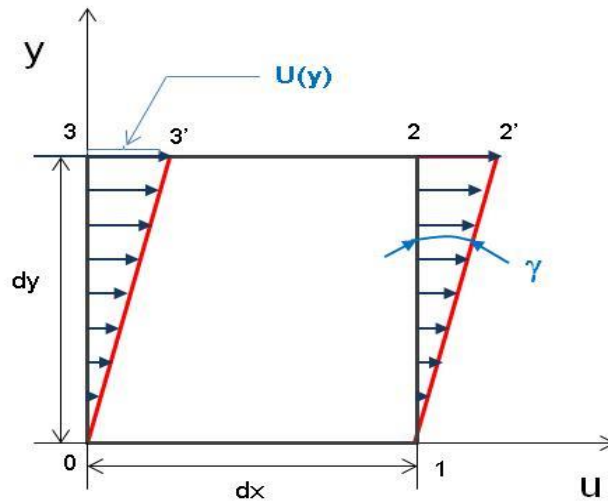
1.2. Clasificación de los fluidos a partir de su comportamiento reológico

La reología, entendida como aquella área de la física que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación de los materiales que tienen la capacidad de fluir, permite establecer una diferenciación básica entre los tipos de fluidos en función de esa relación. La ley de viscosidad de Newton establece que existe una relación lineal entre las tensiones tangenciales y los gradientes de velocidad, cuya constante de proporcionalidad de esta linealidad es una propiedad física del fluido llamada viscosidad dinámica, μ . A los fluidos que siguen este comportamiento, se les denomina fluidos Newtonianos y cumplen la siguiente relación:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (Ec.1)$$

Esta puede comprenderse analizando la deformación de un fluido en el entorno de un punto. Por simplicidad, pero sin pérdida de generalidad, considérese un movimiento unidimensional donde la componente u según el eje x de la velocidad V sea una función solamente de la coordenada y , que dicha componente varíe linealmente con y de tal manera que $\partial u / \partial y > 0$. Un rectángulo de fluido infinitesimal de lados $dx \cdot dy$ antes de deformarse está definido por los vértices 0123 , y luego de un instante dt pasará a ocupar el cuadrilátero $012'3'$:

Figura 1.3 Diagrama de deformación de una unidad de flujo



Fuente: Modificado por Autor de Bird et al., 1960

La distorsión o deformación angular de los segmentos 03 y 12 luego de un instante dt en ese campo de movimiento será:

$$d\gamma = \frac{33'}{03} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (Ec. 2)$$

De la ecuación anterior se obtiene la siguiente conclusión: el gradiente de velocidad es igual a la velocidad de deformación o velocidad de distorsión angular:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (Ec. 3)$$

Consecuentemente, la relación entre las tensiones tangenciales y los gradientes de velocidad puede escribirse como indistintamente como

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (Ec. 4)$$

A los fluidos cuya relación entre tensión y velocidad de deformación no es proporcional se los ha denominado fluidos no-newtonianos. De este modo, la Reología de los fluidos no newtonianos se extiende desde la mecánica de los Fluidos Newtonianos hasta la elasticidad de Hooke. Estos tipos de fluidos se pueden dividir de la siguiente forma:

Fluidos No-Newtonianos independientes del tiempo

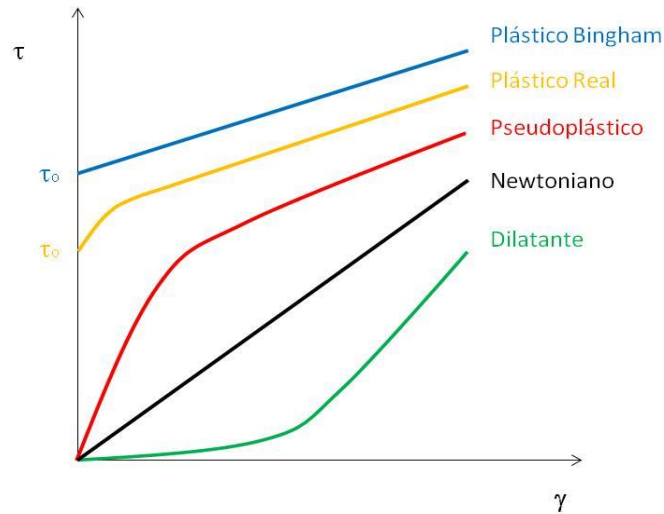
Los fluidos no-newtonianos independientes del tiempo, se caracterizan porque las tensiones tangenciales dependen únicamente de la velocidad de deformación, y se representan funcionalmente en tres formas equivalentes:

$$\tau = f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \tau = f\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \quad \text{ó} \quad \tau = f(\dot{\gamma}) \quad (\text{Ec. 5})$$

La gran mayoría de los fluidos no-newtonianos que tienen aplicaciones en problemas de ingeniería caen dentro de esta categoría, y en ciertos casos algunos fluidos dependientes del tiempo pueden ser aproximados como fluidos independientes del tiempo.

Para visualizar y analizar los fluidos no-newtonianos resulta más cómodo representar el comportamiento de las correlaciones anteriores en un sistema de ejes coordenados cartesianos, tal y como se muestra en la figura 1.4, en la que se pueden identificar cuatro tipos de esta categoría de fluidos.

Figura 1.4 Comportamiento de Fluidos en función de la velocidad de deformación



Fuente: Modificado por Autor de Bird et al., 1960

El comportamiento de los fluidos indicados en la figura 1.4 suele expresarse en forma generalizada mediante la siguiente ecuación:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{o} \quad \tau = \mu \frac{d\gamma}{dt}, \quad \text{o} \quad \tau = f(\dot{\gamma}) \quad (\text{Ec. 6})$$

En donde η puede estar en función de la velocidad tangencial, τ , ó de la velocidad de deformación, $\dot{\gamma}$. Estas funciones permiten clasificar los fluidos de la siguiente forma:

- Plástico ideal o de Bingham

Se denomina plástico ideal o de Bingham a las sustancias o fluidos que para tensiones tangenciales inferiores a un valor característico τ_0 , se comportan elásticamente, y superado ese valor muestran un comportamiento similar al de un fluido newtoniano. A este tipo de fluido lo caracteriza dos constantes: la tensión tangencial de fluencia que es el valor de τ_0 requerido para que se

inicie el flujo y el coeficiente de viscosidad plástica μ_p dado por la pendiente $d\tau/d\dot{\gamma}$. De este modo, la relación es de la siguiente forma:

$$\tau = \tau_o + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ó} \quad \tau = \tau_o + \mu_p \dot{\gamma} \quad (\text{Ec. 7})$$

El modelo de plástico de Bingham es aplicable al comportamiento de muchos fluidos de la vida real como plásticos, emulsiones, pinturas, lodos de perforación y sólidos en suspensión en líquidos o agua.

- Plástico real

Son sustancias que no fluyen hasta la tensión de fluencia τ_o , y luego presentan una zona de viscosidad variable que disminuye con el incremento de la velocidad de deformación, hasta alcanzar un valor asintótico constante.

- Fluidos pseudoplásticos

Los fluidos pseudoplásticos no tienen una tensión de fluencia para que comiencen a deformarse, pero la viscosidad medida por la pendiente de la curva $\tau = f(\dot{\gamma})$ es alta para bajas velocidades de deformación, y decrece con el incremento de $\dot{\gamma}$ hasta alcanzar un valor asintótico constante. La relación más simple que describe el comportamiento de los fluidos pseudoplásticos es la denominada ley potencial o de Ostwald que puede escribirse como:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (\text{Ec. 8})$$

Siendo $n < 1$

Los valores k y n son constantes para un fluido particular. La constante k es una medida de la consistencia del fluido y por se denomina índice de consistencia, y el exponente n es indicativo de la desviación respecto al fluido con comportamiento newtoniano y se lo suele llamar índice de

comportamiento. Obsérvese que cuando $n = 1$, y $k = \mu$ la ecuación 8 representa a un fluido newtoniano.

Para estos fluidos se define un coeficiente de viscosidad aparente, como:

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{Ec. 9})$$

Cuando el fluido se modela con la ley potencial, el coeficiente de viscosidad aparente reemplazando la ecuación anterior en la última resulta

$$\mu_a = \frac{k\dot{\gamma}^n}{\dot{\gamma}} = k\dot{\gamma}^{(n-1)} \quad (\text{Ec. 10})$$

La ley potencial tiene un defecto, y es que cuando $\dot{\gamma}$ tiende a 0 la viscosidad aparente tiende a infinito, lo cual es físicamente imposible. Además la constante de consistencia k tiene dimensiones que depende de n , y éste coeficiente no se mantiene constante en ciertos intervalos de flujo. A pesar de estas insuficiencias, el modelo de la ley potencial por su simplicidad resulta sumamente útil para abordar el tratamiento de algunos tipos de problemas como el de flujos en tuberías como se verá más adelante.

Otras ecuaciones empíricas que permiten modelar con mejor aproximación un fluido pseudoplástico y que superan las carencias de la ley potencial son las siguientes:

$$\text{Ley de Prandtl} \quad \tau = A\text{sen}^{-1}\left(\frac{\dot{\gamma}}{C}\right) \quad (\text{Ec. 11})$$

$$\text{Ley de Eyring} \quad \tau = \frac{\dot{\gamma}}{B} + C\text{sen}\left(\frac{\tau}{A}\right) \quad (\text{Ec. 12})$$

$$\text{Ley de Powell-Eyring} \quad \tau = A\dot{\gamma} + B\text{senh}^{-1}(C\dot{\gamma}) \quad (\text{Ec. 13})$$

$$\text{Ley de Williamson} \quad \tau = \frac{A\dot{\gamma}}{B+\dot{\gamma}} + \mu_\infty\dot{\gamma} \quad (\text{Ec. 14})$$

Donde A, B y C son constantes características de cada fluido particular. El uso de la ley de potencia para el análisis de fluidos pseudoplásticos es adecuado para muchas aplicaciones de ingeniería. Las otras aproximaciones para modelar este tipo de fluido conduce a análisis más complejos debiendo recurrirse a programas computacionales muy elaborados que se basan en leyes empíricas obtenidas de mediciones de las propiedades viscosas del fluido.

- Fluidos dilatantes

Los fluidos dilatantes al igual que los pseudoplásticos no tienen una tensión de fluencia inicial, pero el coeficiente n disminuye al aumentar el gradiente de velocidad hasta que para grandes valores de éste adquiere un valor μ_{∞} constante. Los fluidos dilatantes son mucho menos comunes que los pseudoplásticos. Ejemplo de fluidos que exhiben este comportamiento son la manteca, las arenas movedizas y las suspensiones de almidón. Se pueden modelizar con la ley potencial, con exponente $n > 1$:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (\text{Ec. 15})$$

Siendo $n > 1$

Si se toma la ecuación 8 y se expresa tomando algoritmos a ambos lados, obtenemos una linealización de la siguiente forma:

$$\log \tau = \log k + n \log \dot{\gamma} \quad (\text{Ec. 16})$$

La representación de la expresión anterior en escala logarítmica para los dos ejes es una línea recta, cuya pendiente es el coeficiente de comportamiento n y la intercepción con el eje de ordenadas correspondiente a $\log \dot{\gamma} = 0$ equivalente a $\dot{\gamma} = 1$ da el valor de $\log k$ que permite determinar el coeficiente de consistencia k .

- Fluidos No-Newtonianos dependientes del tiempo

Existe otro tipo de fluidos que son más complejos que los vistos y cuya viscosidad aparente depende no sólo de la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$, sino también del tiempo durante el cual actúa la tensión tangencial τ . Se los clasifica en dos grupos principales: Fluidos Tixotrópicos y Fluidos Reopécticos. En los tixotrópicos la tensión tangencial disminuye con el tiempo, mientras que en los Reopécticos se incrementa. Un ejemplo común de fluido Tixotrópico lo constituye la tinta de impresión que generalmente se la trabaja en rollos antes de aplicarla a una placa.

- Fluidos Tixotrópicos

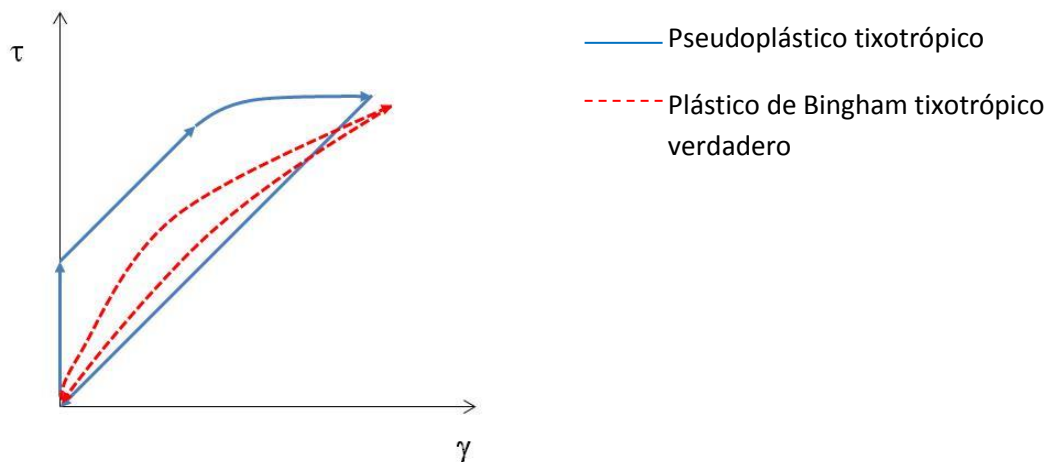
La viscosidad aparente de los fluidos tixotrópicos es una función tanto de la tensión tangencial como de la velocidad de deformación:

$$\mu_a = f(\tau, \dot{\gamma}) \quad (Ec. 17)$$

Al actuar una tensión tangencial a este fluido desde el estado de reposo sufre un proceso de fraccionamiento a escala molecular seguido de una reconstitución estructural a medida que transcurre el tiempo. Eventualmente y en ciertas circunstancias se logra un estado de equilibrio donde el fraccionamiento molecular iguala a la reconstitución. Si la tensión tangencial cesa el fluido se recupera lentamente y vuelve a adquirir su consistencia original en un proceso que se caracteriza por su reversibilidad. Otra característica de los tixotrópicos es que cuando se la aplica una tensión tangencial creciente, dan una curva cerrada similar a un lazo de histéresis como se muestra en la figura 1.5 para un fluido pseudoplástico tixotrópico. Algunos plásticos de Bingham tienen comportamiento tixotrópico, pero si la tensión tangencial es suficientemente alta se fraccionan molecularmente y posteriormente van reconstruyendo paulatinamente su

estructura molecular, y terminan comportándose como fluidos newtonianos. A estos se los denomina plástico de Bingham tixotrópico verdadero y su diagrama tensión – velocidad de deformación, junto al del fluido anterior, se muestra en la figura 1.5.

Figura 1.5 Comportamiento de Fluidos Tixotrópicos



Fuente: Modificado por Autor de Bird et al., 1960

- Fluidos Reopécticos

Los fluidos reopécticos se comportan en forma parecida a los tixotrópicos, pero en ellos la variable n tiene un incremento con la velocidad de deformación similarmente a la de un fluido dilatante en su fase inicial de deformación hasta alcanzar un valor límite donde τ comienza a disminuir con $\dot{\gamma}$. Un ejemplo de fluido reopéctico es el espesamiento de la clara de huevo por efecto de la agitación, aunque quizá la clara de huevo no es un verdadero fluido reopéctico. Otras sustancias tienen propiedades reopécticas inicialmente, pero la pierden para altas tensiones tangenciales, volviéndose tixotrópicos.

- Fluidos Viscoelásticos

Los materiales viscoelásticos exhiben propiedades elásticas y viscosas, y el más simple es aquel que desde el punto de vista de la viscosidad se comporta como newtoniano, y en lo referente a su elasticidad sigue a la ley de Hooke. Para estos materiales la velocidad de deformación se expresa:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu_0} + \frac{\dot{\epsilon}}{\lambda} \quad (\text{Ec. 18})$$

Siendo λ el módulo de rigidez. Para un flujo estacionario $\dot{\epsilon} = 0$ y el fluido se comporta como un fluido newtoniano simple. Sin embargo al variar la tensión tangencial comienzan a manifestarse los efectos elásticos.

Maxwell propuso inicialmente la siguiente ecuación para los fluidos viscoelásticos:

$$\tau + \left(\frac{\mu_0}{\lambda}\right) \dot{\tau} = \mu_l \dot{\gamma} \quad (\text{Ec. 19})$$

Los líquidos que cumplen esa ley se llaman líquidos de Maxwell. La constante $\left(\frac{\mu_0}{\lambda}\right)^{-1}$ se conoce como tiempo de relajación y es físicamente la constante de tiempo del decremento exponencial de la tensión para una deformación constante.

Vistos los tipos de fluidos desde el punto de vista reológico se puede determinar la particularidad del crudo tipo Foamy Oil, a partir de la relación que presenta la tensión tangencial con la velocidad de deformación.

1.3. Reología de fluidos espumosos

Para los fluidos espumosos, el esfuerzo de cedencia puede aproximarse usando el modelo de Bingham, tal y como quedó descrito previamente en la Ecuación 7. El esfuerzo de cedencia resulta del hecho de que el flujo de un fluido espumoso requiere de la deformación de las burbujas individuales que oponen resistencia al flujo (Princen, 1983). La máxima resistencia al flujo, que define el esfuerzo de cedencia, es muy sensible a la calidad de la espuma, como mostró Blauer et al., 1974. Para fluidos espumosos con una baja calidad de la espuma, el esfuerzo de cedencia es despreciable porque las burbujas dispersas no interactúan entre ellas. Cuando la calidad es media, el esfuerzo de cedencia aumenta con el aumento de calidad porque las burbujas en las diferentes capas de esfuerzo comienzan a interferir entre ellas y el grado de interferencia se incrementa de la misma forma y, por último, cuando la calidad es alta, hay una reducción repentina en la magnitud del esfuerzo de corte debido a la coalescencia de las burbujas (o inestabilidad de las mezclas de espuma). Las dos primeras condiciones fueron demostradas experimentalmente por Blauer et al., 1974.

El concepto de cambio del esfuerzo de corte y esfuerzo de deformación con el cambio en la forma de las burbujas ha sido utilizado para determinar teóricamente el inicio del esfuerzo de cedencia de mezclas de sólidos espumosos (Kam et al., 2002), lo cual muestra que el análisis del esfuerzo de cedencia para cualquier sistema multifásico tipo espumoso depende de la interacción entre las burbujas, de modo que existe un efecto de la deformación de las burbujas sobre el esfuerzo de cedencia (Harris et al., 1996).

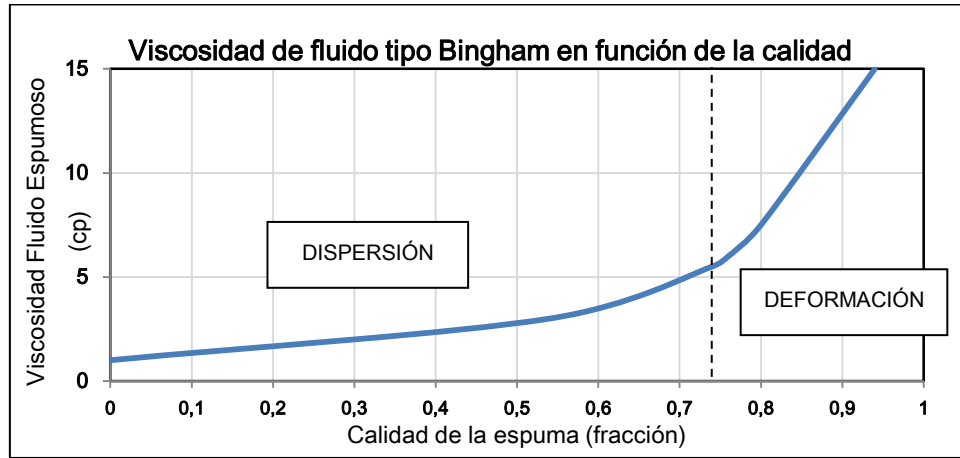
La comprensión del inicio del esfuerzo de cedencia en este tipo de fluidos establece un fundamento importante para entender la reología de un fluido espumoso. Estudios iniciales sugieren que un fluido espumoso puede tratarse como un fluido homogéneo cuya viscosidad es significativamente mayor que la de las fases que lo componen (líquido y gas) (Mitchell, 1971).

Estos estudios muestran que cuando la calidad de la espuma es menor al 52%, las burbujas de gas pueden asumirse como esféricas y dispersas uniformemente, de modo que estas no coalescerán durante el flujo. A estas condiciones el esfuerzo de cedencia es despreciable y la reología del fluido espumoso es similar que la de la fase líquida, de modo que la espuma a estas condiciones se comporta como un fluido Newtoniano.

Otros estudios indican que para calidades de espuma comprendidas entre el 52% y el 74%, las burbujas empiezan a deformarse y a interferir entre ellas, de modo que la viscosidad aparente incrementa con la calidad de la espuma, lo cual se hace cada vez más crítico cuando la calidad supera el 74%. Una de las conclusiones de estos estudios (Kraynik, 1988) es que el incremento en la viscosidad de la espuma para estos valores altos de calidad tiene que ver con la resistencia que provoca el cambio de la forma en las burbujas, ya que se asume que pasan de formas esféricas a hexágonos o dodecaedros, lo cual se confirma en estudios más recientes (Princen, 1983).

La figura 1.6 muestra un ejemplo de la viscosidad de un fluido espumoso, considerado como tipo Bingham, como una función de la calidad de la espuma (Blauer et al., 1974). Cuando la calidad es cercana a cero, como si fuera un fluido monofásico, la viscosidad plástica de Bingham es cercana a 1 cp. A medida que la calidad aumenta, la viscosidad muestra una relación lineal con la calidad de la espuma, hasta un valor de calidad del 52%. La pendiente es moderada debido a la baja interacción entre las burbujas esféricas. Esta interacción se torna más activa para calidades superiores al 52% lo cual se refleja en un aumento considerable de la viscosidad plástica de Bingham para el fluido.

Figura 1.6 Comportamiento de la viscosidad de Fluidos Espumoso tipo Bingham



Fuente: Modificado por Autor de Blauer et al., 1974

Estos estudios soportan la decisión de utilizar un modelo de potencia (o de Hershel-Bulkley), tal y como han descrito diversos autores (Valko et al., 1992; Gardiner et al., 1999; Bonilla et al., 2000), en donde la calidad de la espuma representa el exponente que define el comportamiento de un fluido pseudoplástico

Cuando se tiene un esfuerzo inicial a partir del cual se inicia la deformación, se puede utilizar la correlación de Hershel-Bulkley. Donde n representa el exponente de la ley de potencia, que relaciona la calidad de la espuma con el esfuerzo de corte, de modo que el fluido tiene un comportamiento similar al fluido newtoniano o de tipo pseudoplástico, en función de la dinámica de formación y coalescencia de las burbujas, su tamaño y forma, y el nivel de interacción entre ellas dentro de la geometría de flujo.

Un estudio más reciente (Briceño and Joseph [2003]) señala que los cambios de textura de la espuma dependen de las tasas y velocidades de inyección. Espumas de textura fina, pequeñas burbujas uniformes, se presentan a calidades inferiores al 73%, un patrón de fluido tipo slug en la espuma a

calidades mayores al 97% y una espuma gruesa entre estos valores de calidad.

El resultado experimental en un sistema de tuberías pequeñas muestra que para calidades de espumas entre el 81% y el 89% y entre el 90% y 96%, la viscosidad aparente decrece con el esfuerzo de deformación debido a que altas velocidades de deformación se crean espumas de textura fina, lo cual significa que la espuma se comporta como un fluido de tipo pseudoplástico. De igual forma, la viscosidad aparente se incrementa con un aumento en el diámetro de la tubería, lo cual implica que aunque esfuerzos de corte más altos en diámetros más pequeños favorecen la creación de espumas de textura fina, el aumento en las presiones capilares tiene un efecto dominante para mantener una textura gruesa en tuberías más pequeñas.

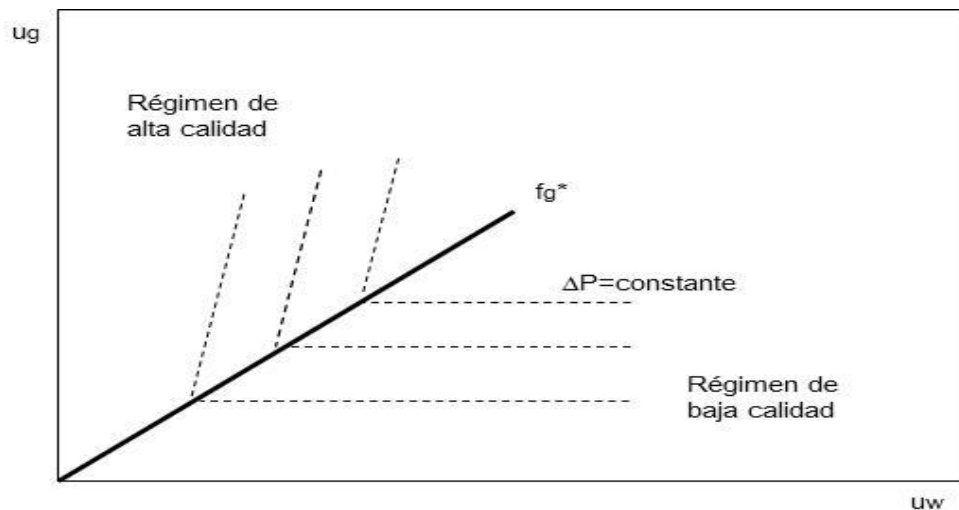
Algunos estudios encontraron que la viscosidad efectiva de espumas en tuberías puede disminuir a medida que la velocidad de deformación incrementa, debido a la combinación del esfuerzo de corte, velocidad de deformación, textura de la espuma y dinámica de creación y coalescencia durante el flujo de la espuma, lo cual es un comportamiento típico de un fluido pseudoplástico (Raza and Marsden, 1967; David and Marsden, 1969).

Esto es consistente con la noción de que el tamaño y la distribución del tamaño de las burbujas son la pieza fundamental para entender la reología de las espumas. Cuando se lleva a cabo una comparación entre el flujo de espumas en diámetros de tuberías relativamente grandes y en tuberías pequeñas o poros, debe tenerse cuidado con los mecanismos que controlan el flujo en cada una de estas condiciones. El mecanismo de flujo en tuberías pequeñas o poros es gobernado principalmente por el fenómeno de la capilaridad, mientras que el mecanismo de flujo en tuberías es dominado por la gravedad, esfuerzos de corte y deformación, y la interacción entre las burbujas dentro de la tubería.

La presencia de dos patrones de flujo diferentes, laminar y turbulento, también tiene un impacto similar sobre el flujo de espumas en tuberías. Blauer et al. (1974) mostraron que el diagrama de Moody, que relaciona el factor de fricción con el Número de Reynolds a diferentes rugosidades de tubería, puede aplicarse para el flujo tipo espumoso en tuberías y describe correctamente la transición entre el flujo laminar y turbulento a números de Reynolds comprendidos entre 2000 y 2500.

Los experimentos llevados a cabo en ese estudio muestran la presencia de dos regímenes de flujo: un régimen de alta calidad en el cual la respuesta de la presión es oscilante y un régimen de baja calidad en el que la respuesta de la presión es estable, lo cual se debe al mecanismo que lo controla.

Figura 1.7 Regímenes de flujo en función de la calidad de la espuma



Fuente: Blauer et al., 1974

Como se muestra en las líneas discontinuas, en el régimen de alta calidad la pendiente es más pronunciada que en el de baja calidad, de modo que en el primero la cantidad adicional de líquido mantiene burbujas estables contribuyendo a interacciones más activas entre burbujas lo que produce gradientes de presión más altos. En el régimen de baja calidad, el líquido adicional se usa para crear capas de agua entre las burbujas o entre las

burbujas y la superficie de la tubería produciendo gradientes de presión más bajos. El comportamiento del régimen de baja calidad parece similar al efecto lubricante reportado por Briceño y Joseph, [2003]. Para el caso de alta calidad se presenta una alternancia de espuma y baches de gas y esta inestabilidad del patrón de flujo en este régimen se caracteriza por una generación y coalescencia de burbujas muy activa, lo cual representa una condición que no permite alcanzar una caída de presión en estado estable.

Por su parte, el régimen de baja calidad alcanza un patrón de flujo estable debido a que la reología es gobernada por el movimiento de la espuma de textura fina homogénea y uniforme. En este caso, la formación y coalescencia de las burbujas es menos importante pero las interacciones entre las burbujas y la interacción entre las burbujas y la tubería bajo esfuerzos de corte, juegan un papel crucial en el flujo.

Una conclusión importante de estos estudios es que el gradiente de presión crece proporcionalmente al incremento de la fracción de gas hasta que la caída de presión alcanza su valor mínimo, y entonces la caída de presión decrece al incrementar este valor. El valor máximo de la caída de presión ocurre en la frontera entre los dos regímenes. Cambios en la fracción volumétrica de cada fase, concentración de surfactante y/o desempeño del surfactante puede producir un cambio entre los dos regímenes.

En todos los experimentos, las espumas en régimen de alta calidad muestran un comportamiento de tipo pseudoplástico, respecto a la velocidad de líquido, con exponentes de la ley de potencia variando entre 1.4 y 3.2 (muchos alrededor de 1.4 a 1.7). Espumas en régimen de baja calidad exhiben un comportamiento pseudoplástico respecto a la velocidad del gas, con valores de exponente entre 1.4 y 1.7 en tuberías de 0.5 in pero cerca a un comportamiento newtoniano en tuberías de 1 in. Los resultados experimentales también muestran que la caída de presión decrece a medida

que la velocidad de inyección de gas se incrementa a una velocidad de líquido fija en el régimen de alta calidad. La caída de presión en el régimen de baja calidad decrece ligeramente o permanece invariable cuando la velocidad de líquido se incrementa a una velocidad constante de inyección de gas.

2. FENÓMENO DE NUCLEACIÓN

La nucleación se ha analizado a partir de la dinámica de las burbujas en la fase líquida como el conjunto de condiciones a partir de las cuales estas coalescen en función de la movilidad que alcanzan en proporción al tamaño que logran en el medio de flujo. Normalmente, las variables que condicionan esta unión son la viscosidad del líquido, la tensión interfacial.

En el proceso de nucleación normalmente se reconocen dos etapas: nucleación primaria y nucleación secundaria (Albartamani, 2000). La nucleación primaria se refiere a la formación del núcleo como tal y la secundaria se refiere a la coalescencia de burbujas al núcleo ya formado.

La energía requerida para la formación del núcleo se puede expresar en términos de la tasa de nucleación, J , siguiendo a Kashchiev y Firoozabadi (1993):

$$J = \frac{dN}{dt} = Z \exp\left(\frac{-W}{RT}\right) = Z \exp\left(\frac{16\pi\sigma^3}{3RT(p_g - p_o)^2}\right) \quad (Ec. 20)$$

Donde N es el número de núcleos por unidad de volumen, R es la constante de Boltzmann, T es la temperatura, σ es la tensión superficial y Z es el factor de Zeldovich definido por la siguiente correlación:

$$Z = \frac{\left(\frac{\sigma kT}{B}\right)^{0.5}}{p_g A(r_c)} \quad (Ec. 21)$$

En donde $A(r_c)$ es el área superficial del radio crítico y B es una constante que relaciona las presiones de las fases $(2p_g + p_o)/3p_g$.

Para que la burbuja de gas pueda formarse se requiere una energía de la fase líquida de modo que la presión en el líquido debe ser menor que la presión de equilibrio para que la burbuja se mantenga en suspensión.

Kashchiev y Firoozabadi (1993) definieron la siguiente expresión para expresar la formación de la burbuja en términos de esta diferencia entre la presión del sistema y la presión de equilibrio representada por la diferencia de potenciales químicos de las fases:

$$\Delta\mu = \mu_l(p) - \mu_g(p) = kT \ln\left(\frac{p_e}{p}\right) \quad (\text{Ec. 22})$$

En donde μ_l y μ_g son los potenciales químicos del líquido y el gas, respectivamente, k es la constante de Boltzmann y p_e y p son las presiones de equilibrio y del sistema. De acuerdo a estos autores, los volúmenes de gas que se forman como núcleos dentro de la fase líquida se puede obtener mediante la siguiente correlación:

$$V_g(t) = V_o N_o V_b(t, 0) \quad (\text{Ec. 23})$$

En donde V_o es el volumen inicial de líquido, N_o es el número de burbujas por unidad de volumen y V_b es el volumen de una burbuja a un tiempo determinado. Los autores distinguen entre una nucleación progresiva e instantánea y definen la correlación anterior para la última; sin embargo, la correlación que domina la nucleación progresiva está en función de la tasa de nucleación, J , que hemos definido que tiene que ver más con la coalescencia que con el fenómeno de nucleación en sí.

El crecimiento de la burbuja $G(t)$, ó dr/dt , es aproximado por los autores mediante la siguiente correlación:

$$G(t) = (\omega + \nu) C1 [s(t)^\omega] t^{(\nu-1)} \quad (\text{Ec. 24})$$

Donde $C1$ es la constante cinética del crecimiento de burbujas y los exponentes ω y ν dependen de la distribución de la s burbujas.

El fenómeno de la coalescencia se ha investigado a partir de la saturación crítica de gas, esto es, la condición a partir de la cual el gas empieza a fluir como fase libre (Li y Yortsos(1993), Wilkinson et al. (1993), Kamath y Boyer (1995)), encontrando que al alcanzar esta condición, se forman canales de gas a los cuales se unen los núcleos que se van formando en el sentido del flujo y que, en función de la tensión superficial alcanzada por efecto de las propiedades del medio líquido, el valor de la saturación crítica de gas puede aumentar o disminuir, esto es, que para un crudo pesado, la velocidad con las que se produce la coalescencia de las burbujas es menor, luego se tendrá un valor más alto de saturación crítica que respecto a un crudo convencional.

2.1 Ecuación fundamental para el análisis del movimiento de burbujas

El uso de elementos finitos para explicar la coalescencia de pequeñas burbujas fue analizado por Stover et al (1997) enfocándose en la dinámica interfacial después de que las burbujas entran en contacto. Siguiendo esta dirección, el análisis del movimiento de dos burbujas de gas en un medio líquido, contenido en una tubería, se puede describir mediante la ley de Navier-Stokes de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho N)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho N u) = \nabla \cdot (\Gamma^N \nabla(N)) + S^N \quad (Ec. 25)$$

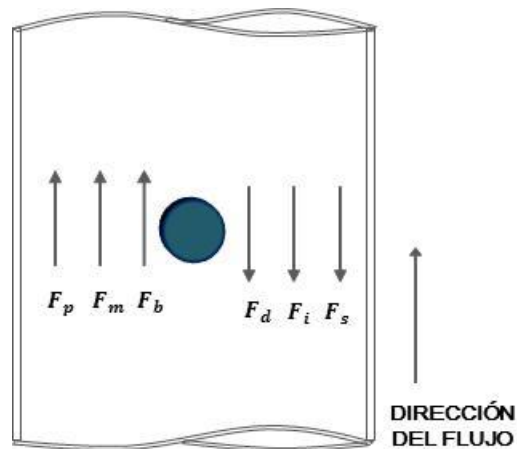
Resolviendo esta ecuación sobre un volumen de control y considerando para cada fase la conservación del momentum para cada dirección y de conservación de masa, se obtiene la formulación particular para una burbuja de gas con suficiente tamaño para considerarla como una fase independiente:

$$\frac{\partial(r_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_l (\rho_l u_l) \cdot u_l) = -r_l \nabla p_l + \nabla \cdot (r_l \mu_l (\nabla u_l + \nabla u_l^T)) + S_l + M_l \quad (Ec. 26)$$

Las condiciones iniciales y de frontera requeridas para la solución de esta ecuación en el software Ansys-CFX se muestran en el Anexo A.

Otro tipo de formulación tiene en cuenta el balance de las fuerzas que rigen el movimiento de un elemento de análisis. En este sentido, las fuerzas que actúan sobre el movimiento de una burbuja de gas en un medio líquido se muestran en la figura 2.1.

Figura 2.1 Fuerzas que actúan sobre el ascenso de una burbuja de gas



Fuente: Autor

Fuerza de boyanza: F_b

Fuerza de momento de gas: F_m

Fuerza de presión: F_p

Fuerza de tensión superficial: F_s

Fuerza de arrastre: F_d

Fuerza inercial: F_i

El balance de estas fuerzas es el siguiente:

$$F_b + F_m = F_s + F_d + F_i \quad (Ec.27)$$

La definición de cada una de estas fuerzas y la inclusión en el balance para la determinación de la velocidad de ascenso, caracteriza las diferentes propuestas sobre el tema.

2.2 Determinación del balance de fuerzas a partir de la segunda ley de Newton

Kumar (1971), definió estas fuerzas de la siguiente forma para determinar la velocidad de ascenso de la burbuja:

$$\text{Fuerza de boyanza, } F_b = V(\rho_l - \rho_g)g \quad (\text{Ec. 28})$$

$$\text{Fuerza de tensión superficial, } F_s = \pi D\gamma \cos\theta \quad (\text{Ec. 29})$$

$$\text{Fuerza Inercial, } F_i = Q^2 \left(\rho_g + \frac{11}{16} \rho_l \right) \frac{V^{-0.66}}{12} \pi \left(\frac{3}{4\pi^{0.66}} \right) \quad (\text{Ec. 30})$$

$$\text{Y la masa de la burbuja puede definirse como: } m = \left(\frac{11}{16} \rho_l \right) Q t_e \quad (\text{Ec. 31})$$

Donde t_e es el tiempo de expansión de la burbuja expresada en segundos.

Si se asume que la parte superior de la burbuja se mueve a una velocidad igual a la tasa de cambio del diámetro de la burbuja, de modo que la velocidad de crecimiento promedio de la burbuja es la velocidad de su centro, tenemos que la ecuación de balance de momentum quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{dmv_e}{dt_e} = m \frac{dv_e}{dt_e} + v_e \frac{dm}{dt_e} \quad (\text{Ec. 32})$$

En donde

$$v_e = \left(\frac{dr_e}{dt_e} \right) = \frac{Q}{4\pi r_e^2} \quad (\text{Ec. 33})$$

$$\frac{dv_e}{dt_e} = - \left[\frac{Q^2}{6} \pi \left(\frac{3}{4\pi^{2/3}} \right) \right] V^{-5/3} \quad (Ec. 34)$$

Y

$$\frac{dm}{dt_e} = \left(\frac{11}{16} \rho_l \right) Q \quad (Ec. 35)$$

De modo que la ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{dmv_e}{dt_e} = \frac{Q^2 \left(\frac{11}{16} \rho_l \right) V^{-2/3}}{12\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3}} \quad (Ec. 36)$$

Y

$$r_e = \left(\frac{Q}{4\pi v_e} \right)^{1/2} \quad (Ec. 37)$$

Asumiendo que la velocidad representa una condición de equilibrio de fuerzas en la burbuja (V_E), de modo que $V = V_E$, entonces se tiene que:

$$V_E^{5/3} = \frac{11}{192\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} g} Q^2 + \frac{3}{\left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} g} \frac{\mu}{\rho_l} Q V_E^{1/3} + \frac{\pi D \sigma}{g \rho_l} V_E^{2/3} \quad (Ec. 38)$$

Si las fuerzas en sentido del flujo son mayores que las fuerzas en sentido contrario, la burbuja se acelera y se asume que se separa cuando la parte superior ha cubierto una distancia igual que el radio de las fuerzas balanceadas de la burbuja.

Se asume entonces que la burbuja ha coalescido y su estado de balance de fuerzas puede describirse por medio de la segunda ley del movimiento de Newton de la siguiente forma:

$$V_t \chi \frac{dv}{dt} + Q \chi v = r V_t \Delta \rho g - 6 \pi \mu (v + v_e) - \pi \gamma d \cos \theta - \frac{\chi \left(3 V_t \frac{dQ}{dt} + Q^2 \right)}{12 \pi (3/4 \pi)^{0.666} V_t^{2/3}} \quad (Ec. 39)$$

Donde $\chi = \left(\rho_g + \frac{11}{16} \rho_l \right)$

La derivación de esta correlación se muestra en el Anexo C.

Otro modelo que toma en cuenta la geometría, se desarrolla teniendo en cuenta que la ecuación de movimiento se aplica al momento de la coalescencia de las burbujas, en la comunicación de las formas, y el volumen total de la burbuja junto antes de esta coalescencia es la suma de los volúmenes. Se considera un flujo de gas constante, el medio líquido es uniforme y la burbuja es esférica, las fuerzas que actúan sobre las burbujas se pueden definir de la siguiente forma (Gaddis y Vogelpohl (1986)):

Fuerza de boyanza: $F_b = \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_l - \rho_g) g$ (Ec. 40)

Fuerza de momento de gas: $F_m = \frac{\pi}{4} d_h^2 \rho_g D^2$ (Ec. 41)

Fuerza de presión: $F_p = \frac{\pi}{4} d_h^2 (\rho_g - \rho_l)$ (Ec. 42)

Fuerza de tensión superficial: $F_s = \pi d_h \sigma$ (Ec. 43)

Fuerza de arrastre: $F_d = \frac{\pi}{4} d_h^2 C_D \frac{\rho_l D^2}{2}$ (Ec. 44)

Fuerza inercial: $F_i = (\rho_g V - \rho_l V_l) a$ (Ec. 45)

El balance puede darse en términos del diámetro de la burbuja (d_B) de la siguiente forma:

$$d_B^3 = S + \frac{L}{d_B} + \frac{T}{d_B^2} \quad (Ec. 46)$$

Donde

$$S = \frac{6 d_h \sigma (4 - W_e)}{4 \Delta \rho g} \quad (Ec. 47)$$

$$L = \left(\frac{135}{4\pi^2} + \frac{27\rho_g}{\pi^2\rho_l} \right) \frac{\rho_l V^2}{\Delta\rho g} \quad (\text{Ec. 48})$$

Definiendo el número de Weber de la siguiente forma:

$$W_e = \frac{16\rho_g V^2}{\pi^2 d_B^3 \sigma} \quad (\text{Ec. 49})$$

De este modo, el diámetro que debe alcanzar la burbuja para iniciar su coalescencia puede expresarse de acuerdo a los tres términos de la ecuación anterior:

$$d_B = \left[\left(\frac{6d_B \sigma}{\rho_l g} \right)^{4/3} + \left(\frac{81V}{\pi g} \right) + \left(\frac{135V^2}{4\pi^2 g} \right)^{5/3} \right]^{1/4} \quad (\text{Ec. 50})$$

Y la velocidad de ascenso se define en función del valor de los Números de Reynolds (Re) y de Morton (Mo), mediante las siguientes correlaciones:

$$V = \frac{2g\rho_L r_b^2}{9\mu} \quad \text{para } \text{Re} < 2 \quad (\text{Ec. 51})$$

$$V = \frac{0.33g^{0.76} \rho_L^{0.52} r_b^{1.28}}{10\mu^{0.52}} \quad \text{para } 2 < \text{Re} < 4.02 M_o^{-0.214} \quad (\text{Ec. 52})$$

$$V = 1.35 \sqrt{\frac{\sigma g}{r_b \rho_L}} \quad \text{para } 4.02 M_o^{-0.214} < \text{Re} < 3.10 M_o^{-0.25} \quad (\text{Ec. 53})$$

$$V = 1.18 \left(\frac{\sigma g^2}{\rho_L} \right) \quad \text{para } \text{Re} > 3.10 M_o^{-0.25} \quad (\text{Ec. 54})$$

$$\text{Donde } M_o = \frac{g\mu_L^4(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l \sigma^3} \quad (\text{Ec. 55})$$

$$\text{Y } \text{Re} = \frac{\rho_l d_b^n V^{2-n}}{K} \quad (\text{Ec. 56})$$

Para el caso de la ley de potencia de líquidos no-newtonianos se ha estudiado el efecto del arrastre sobre la permanencia de la forma de las

burbujas definiendo que dos ecuaciones eran suficientes para explicar su movimiento:

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.173Re^{0.657}) \text{ para } Re < 135 \quad (Ec. 57)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \text{ para } Re > 135 \quad (Ec. 58)$$

El comportamiento de la velocidad de ascenso de una burbuja en un líquido newtoniano ha mostrado tener un comportamiento casi lineal con el tamaño de la burbuja, de modo que hay una reducción en la movilidad del gas con un aumento de las fuerzas viscosas (Rodrigue, 2004). Para fluidos no newtonianos, la relación entre el tamaño de la burbuja y su velocidad de ascenso depende de la viscosidad. En este sentido se ha encontrado en ocasiones una dependencia del tamaño de la burbuja a ciertas condiciones críticas, que para autores como Rodrigue se trata del efecto de la transición del régimen de Stokes al de Hadamard, pero puede asumirse que esto tiene que ver con la forma que adoptan las burbujas, ya que las discontinuidades en la velocidad que explican esta transición están gobernadas por el área superficial de contacto entre las dos fases.

Finalmente, otra formulación que tiene en cuenta las diferentes fuerzas que actúan sobre la burbuja, esto es, flotación, gravedad, viscosidad, arrastre y tensión interfacial, fue propuesta por Abou-el-hassan (1983), para correlacionar la velocidad de ascenso en función de dos números adimensionales:

$$\text{Número de flujo, } F = \left(\frac{gd^{8/3}(\Delta\rho)\rho^{2/3}}{\mu^{4/3}\sigma^{1/3}} \right) \quad (Ec. 59)$$

$$\text{Número de velocidad, } V = \left(\frac{V_T d^{2/3} \rho^{2/3}}{\mu^{1/3} \sigma^{1/3}} \right) \quad (Ec. 60)$$

Y define la siguiente correlación para un fluido newtoniano:

$$V = 0.75 (\log F)^2 \quad (Ec. 61)$$

La cual funciona para diferentes índices de régimen de flujo con la siguiente proporcionalidad:

$$V_T \propto (g\Delta p)^n \mu^{(1-4n)/3} \sigma^{(1-n)/3} \rho^{(2n-2)/3} d^{(8n-2)/3} \quad (\text{Ec. 62})$$

De acuerdo a Rodriguez et al (173), el coeficiente de arrastre, que define el cambio en la velocidad de ascenso que se da al interior de un fluido no newtoniano con una variación de las condiciones del sistema, se puede expresar de la siguiente forma:

$$c_D = \frac{16}{Re} \left(2^{n-1} 3^{(n-1)/2} \frac{1 + 7n - 5n^2}{n(n+2)} \right) \quad (\text{Ec. 63})$$

Donde Re es para fluidos no newtonianos. El cambio en la velocidad de ascenso se da a partir de la siguiente condición de la burbuja:

$$\alpha = \frac{CaDe}{Ma} \sim 1 \quad (\text{Ec. 64})$$

Ca es el número capilar dado por: $Ca = \frac{\eta_0 V_T}{\sigma}$

De es el número de Deborah, $De = \frac{t_c}{t_p}$, donde t_c es el tiempo de relajación o tiempo que toma el fluido en ajustarse al esfuerzo aplicado y t_p es el tiempo de se observa durante el experimento o simulación en probar la respuesta del material.

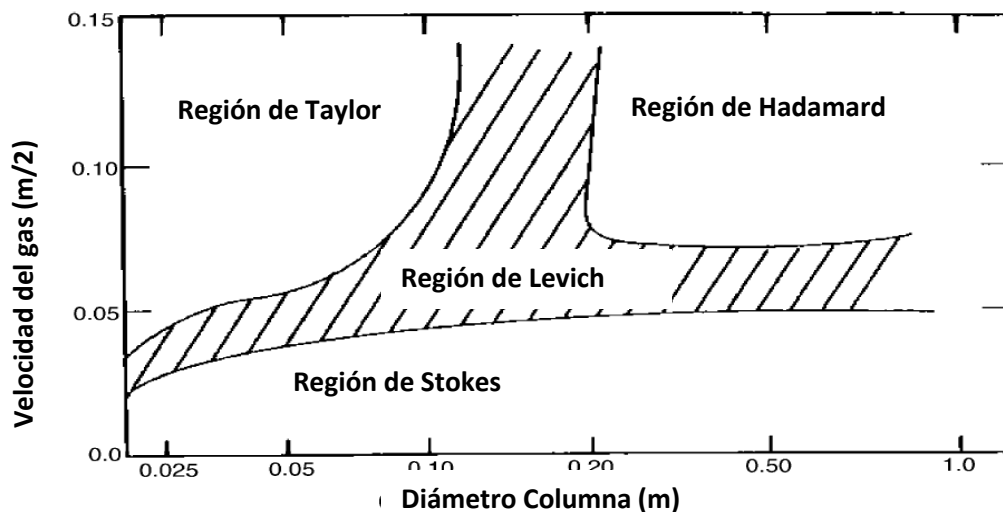
Ma es el número de Marangoni, $Ma = \frac{\Delta\sigma}{\tau R}$, donde $\Delta\sigma$ es la diferencia de tensiones superficiales y R es el radio de la burbuja. De este modo, α representa el balance entre las diferentes fuerzas que actúan en la burbuja.

La correlación que puede encontrarse entre el coeficiente de arrastre (C_D) y el número de Reynolds (Re) se debe a la dependencia del cambio de la viscosidad del líquido y la forma de la burbuja con el tiempo. Se consideran normalmente dos tipos de fluidos: pseudoplásticos o viscoelásticos. En los primeros, la viscosidad aparente (la relación entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación) decrece con el incremento de la velocidad de deformación. La relación del esfuerzo de corte (τ) y la velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$) para estos fluidos se expresa a través de la ley de potencia, en términos del índice de consistencia (k) y el índice de flujo (n) (que en estos fluidos $n < 1$), de acuerdo a la correlación que ya se ha señalado.

2.3 Determinación del balance a partir de la topología de flujo

En función de las zonas definidas por el valor de la velocidad del gas en función del diámetro de la columna, se pueden determinar las condiciones que permiten la coalescencia de las burbujas. Las zonas se muestran en la figura 2.2.

Figura 2.2 Regiones de Flujo definidas en función de la velocidad del gas en una columna



Fuente: Modificada por Autor de Kantarci N. et al. (2004).

La correlación más conocida fue definida por Stokes, quien toma en cuenta las fuerzas de arrastre y de flotación en la siguiente correlación:

$$V = \frac{2g(\rho_L - \rho_G)r_b^2}{9\mu} \quad (Ec. 65)$$

La correlación funciona bajo las limitaciones de que no hay deslizamiento en la interface ni circulación interna, lo cual aplica para un sistema con burbujas muy pequeñas y muy bien distribuidas en la matriz líquida.

Por su parte, para la región de Hadamard la correlación es la siguiente:

$$V_T = \frac{126V_b^{0.66}}{\nu} \quad (Ec. 66)$$

En una región intermedia o de transición, conocida como región de Levich, la correlación es la siguiente:

$$V_T = \frac{42V_b^{0.66}}{\nu} \quad (Ec. 67)$$

Y finalmente, para la región de Taylor, en la cual la burbuja alcanza un tamaño crítico, la formulación es la siguiente:

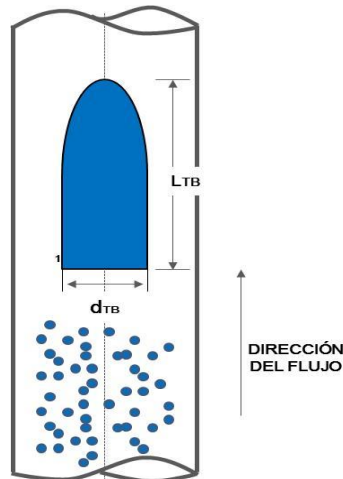
$$V_T = \frac{2}{3}(gr_B)^{0.5} \quad (Ec. 68)$$

2.4 Análisis de la Burbuja de Taylor

La burbuja de Taylor es una denominación del flujo tipo Slug, en el que el gas forma una geometría de tipo semi-elipsoide con un diámetro (d_{TB}), que es casi igual al diámetro de tubería separado solamente por una capa de

líquido cuyo espesor está controlado por la tensión superficial y la velocidad de flujo, y cuya longitud (L_{TB}), puede tener varias veces el valor del diámetro de la tubería, tal y como se muestra en la figura 2.3.

Figura 2.3 Diagrama general de una burbuja de Taylor



Fuente: Autor

Los resultados presentados por Akagawa y Sakaguchi (1966) afirman que, debido a la gran diferencia entre la densidad del gas y del líquido, se puede asumir que la diferencia de presión entre el inicio y el final de la burbuja de Taylor es pequeña, de modo que la superficie de ésta permanece como una superficie isobárica. El líquido que se mueve alrededor de la burbuja está controlado por la gravedad, la tensión superficial y la fricción, de modo que un cambio en la velocidad afecta la geometría del slug. Si la distancia entre estas burbujas es suficiente, significa que su movimiento se presenta a velocidad constante, pero variaciones en la velocidad provoca su coalescencia, en cuyo caso se habla de un patrón de flujo tipo agitado (Churn).

El análisis dimensional de este tipo de burbuja muestra que la velocidad de flujo y el espesor de la película son funciones de la viscosidad y densidad del líquido, de la diferencia de densidades entre las fases, del coeficiente de

tensión superficial entre las fases y de la geometría del medio (Taha Taha y Cui (2006). Estas variables se agrupan en grupos adimensionales, cuyos valores más importantes son mencionados a continuación:

Número de Eötvos:

$$E_o = \frac{g(\rho_l - \rho_g)D^2}{\sigma} \quad (Ec. 69)$$

Este número muestra la relación entre la fuerza de flotación y la fuerza de tensión superficial.

Número de Morton:

$$M_o = \frac{g\mu_L^4(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l\sigma^3} \quad (Ec. 70)$$

Este número define el efecto de la viscosidad del líquido sobre la distribución del flujo.

Número de Froude:

$$F_r = V_b \left(\frac{\rho_l}{(\rho_l - \rho_g)gd_B^2} \right)^{0,5} \quad (Ec. 71)$$

Número que permite determinar la velocidad de flujo de la burbuja a partir de una combinación de los dos números anteriores.

La burbuja de Taylor asciende a una velocidad regulada por el balance de fuerzas de flotación, inercia del líquido, viscosidad y tensión superficial. Además, depende de los flujos, la geometría del sistema y de las

propiedades de los fluidos (viscosidad, densidad y tensión superficial). Para determinar esta velocidad se han encontrado tres regímenes, definidos por la prevalencia de una de las fuerzas del sistema. Si la fuerza inercial controla la velocidad, se asume un flujo potencial, en donde se puede determinar mediante la siguiente correlación:

$$U_{TB} = K2(gD)^{0,5} \quad (Ec. 72)$$

Donde D es el diámetro de la tubería y $C2$ es una constante, definida por el número de Froude, que normalmente se encuentra entre 0.361 y 3.37 (Akagawa y Sakaguchi (1966)).

Si la fuerza prevalente es la viscosidad, la relación $\rho gD/\mu$ es menor a 2 tomando el siguiente valor de K para la ecuación anterior:

$$K = 0.01\rho gD/\mu \quad (Ec. 73)$$

Si se asume que todas las fuerzas son importantes se plantea usar la siguiente correlación de K (Wallis (1969)):

$$K = 0.345(1 - e^{-0.018Fr/0.345})(1 - e^{3.37-Eo/m}) \quad (Ec. 74)$$

En donde Fr y Eo , son los números de Froude y Morton, respectivamente.

En este caso, la velocidad se calcula a partir de una modificación:

$$U_{TB} = K \left(\frac{gD(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l} \right)^{0,5} \quad (Ec. 75)$$

Y el valor de m está en función del número de Froude.

Si $R > 250$, $m = 10$

Si $18 < R < 250$, $m = 69R^{-0,35}$

Si $R < 18$, $m = 25$

Se asume que la burbuja empieza a ascender a valores de E_o superiores a 4.

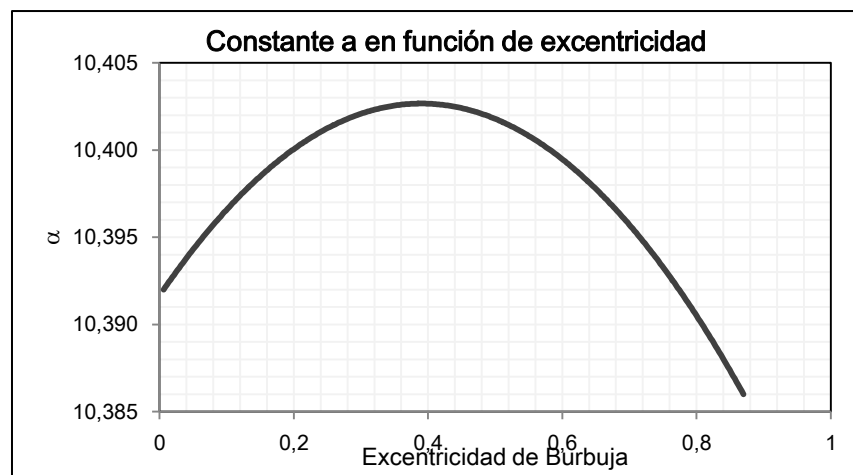
La longitud de la burbuja tiene un valor mínimo a partir del cual se puede considerar como estable. Taitel et al. (1980) lo determinaron como cercano a 16 veces el diámetro de la tubería y Shemer et al (1986) encontraron un valor tan grande como de 20 veces el diámetro.

El coeficiente de la fuerza de arrastre, C_D , que provoca el movimiento de esta burbuja en el líquido que lo rodea está en función del número de Reynolds y de la excentricidad de la burbuja, por medio de la siguiente correlación:

$$\frac{1}{\sqrt{C_D}} = a + \ln(Re\sqrt{C_D}) \quad (Ec. 76)$$

Donde a es una constante que depende de la excentricidad de la burbuja de la forma mostrada en la figura 2.4

Figura 2.4 Función de factor de excentricidad de la burbuja



Fuente: Desarrollada por Autor de Taitel et al., 1980

Cuya función es de tipo polinómica:

$$a = -0.0723exc^2 + 0.05642exc + 10.3916 \quad (Ec. 77)$$

La importancia de esta distribución de flujo en la tubería reside en la determinación de la condición de frontera de un flujo de burbujas dispersas, ya que a partir de cierta profundidad en la tubería solamente las burbujas más pequeñas permanecerán en la matriz líquida y las burbujas que se han ido agrupando, tienden a formar una geometría de este tipo, lo cual se evidencia en cabeza de pozo como un flujo “a baches”.

3. INTEGRACIÓN DE FENÓMENO DE COALESCENCIA PARA DESCRIBIR EL FLUJO DE UN FLUIDO TIPO FOAMY OIL

Para fluidos no newtonianos, se presenta una corrección basada en el índice de consistencia (k) y el índice de comportamiento de flujo (n), en donde se integra una función de distribución de densidad de forma y distribución de las burbujas en la matriz líquida de tipo Weibull, la cual define una tasa de coalescencia de las burbujas en función de la forma y una escala de distribución. La función tiene la siguiente expresión:

$$f(r_B; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} r_B^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{r_B}{\beta}\right)^\alpha} \quad \text{para } x \geq 0 \quad (\text{Ec. 78})$$

En donde α es el parámetro de forma y β es el parámetro de escala de la distribución.

Para el caso de las variables que se presentan en el modelo planteado, el parámetro de forma hace referencia al tamaño límite de las burbujas a partir del cual se considera que coalescen y el parámetro de escala de la distribución se relaciona con la densidad de los diámetros que permite establecer la geometría de flujo del sistema, es decir, que el valor corresponde a la función de la formación de la burbuja de Taylor, como valor límite de la escala que define su rango de aplicación.

El valor límite del tamaño de la burbuja se puede definir a partir del tamaño de la burbuja de Taylor que resulta del siguiente balance:

$$F_b + F_m + F_s = F_d + F_i \quad (\text{Ec. 79})$$

Reemplazando los términos definidos en función de los números de Morton y Reynolds se obtiene:

$$\frac{\pi}{6}d_h^3(\rho_l - \rho_g)g + \frac{\pi}{4}d_h^2\rho_g D^2 + \frac{\pi}{4}d_h^2(\rho_g - \rho_l) = \frac{\pi}{4}d_h^2 C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2} + (\rho_g V - \rho_l V_l) \quad (Ec. 80)$$

De modo que el diámetro se presenta como una ecuación polinómica de la siguiente forma:

$$Ad_{TB}^3 + Bd_{TB}^2 = C \quad (Ec. 81)$$

Donde

$$A = \frac{\pi}{6}(\rho_l - \rho_g)g$$

$$B = \frac{\pi}{4}\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)$$

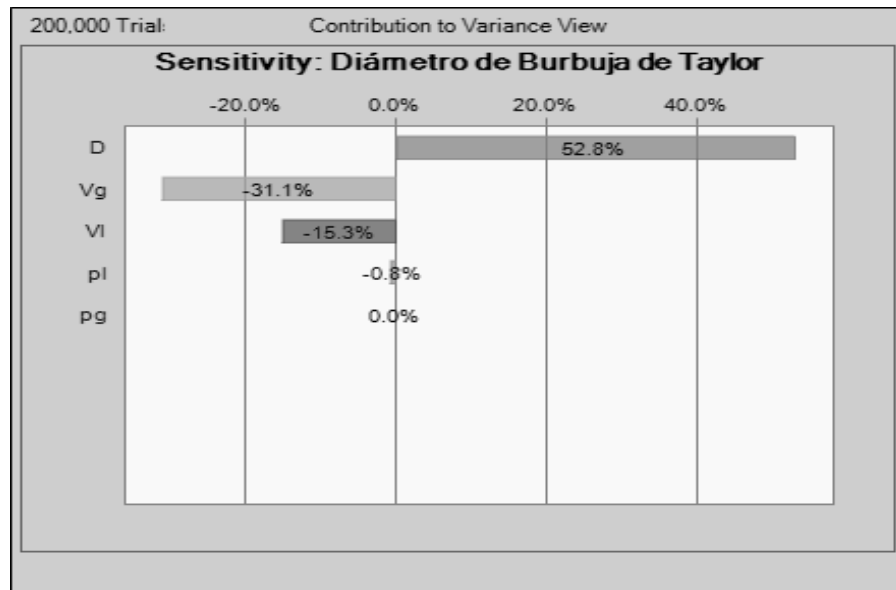
$$C = (\rho_g V - \rho_l V_l)a$$

Solucionando en función de d_h se obtiene la siguiente solución para el valor del diámetro de la burbuja de Taylor (el desarrollo puede verse en el Anexo D):

$$\begin{aligned} d_{TB} &= \left(-\frac{3\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3}{4\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^3} \right. \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3}{12\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2} + \frac{16\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2(\rho_g V - \rho_l V_l)a^2}{9\pi\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3} - \frac{(\rho_g V - \rho_l V_l)a}{9}}^{1/3} \\ &+ \left(-\frac{3\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3}{4\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^3} \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{\pi\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3}{12\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2} + \frac{16\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2(\rho_g V - \rho_l V_l)a^2}{9\pi\left(\rho_g D^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l D^2}{2}\right)^3} - \frac{(\rho_g V - \rho_l V_l)a}{9}} \right)^{1/3} \quad (Ec. 82) \end{aligned}$$

El efecto de las variables presentes en la solución sobre el valor del diámetro de la burbuja de Taylor se muestra a partir del diagrama de tornado de la figura 3.1.

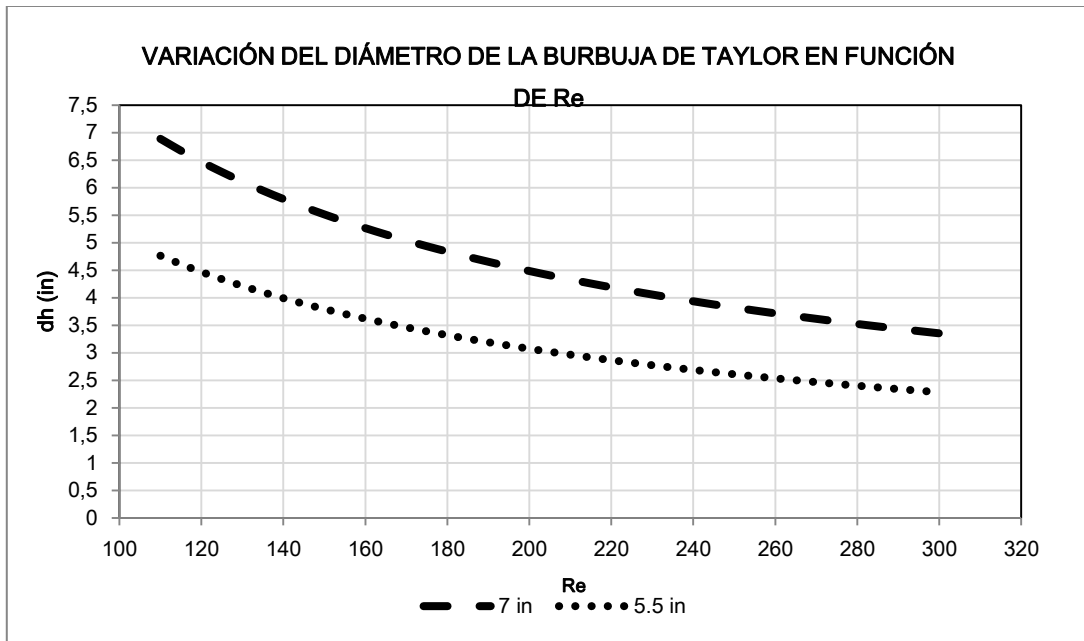
Figura 3.1 Sensibilidad de la Función del diámetro de la burbuja de Taylor



Fuente: Autor

La geometría del sistema, representada por el diámetro de la tubería, es el parámetro que tiene mayor influencia sobre el diámetro que puede alcanzar la burbuja de Taylor, según la solución que se ha presentado. Las velocidades de las fases tienen un papel igual de fundamental. Se incluyó el análisis de las densidades de las fases y las velocidades. Esta solución establece entonces el comportamiento del diámetro de la burbuja de Taylor respecto al número de Reynolds que se muestra en la figura 3.2.

Figura 3.2 Efecto del número de Reynolds sobre la Función del diámetro de la burbuja de Taylor



Fuente: Autor

Utilizando esta solución, la correlación propuesta para la definición de la distribución de las burbujas a través de la tubería toma el valor de d_h para el término β . Por su parte, el parámetro de forma, α , depende de la distribución de la cantidad de burbujas de cierto tamaño en un momento determinado, lo cual está definido por la velocidad de ascenso de la siguiente forma:

$$V_B = \left(\frac{\rho_l g}{6C_D} \right)^{1-\mu_L \mu_g} d_B^{\frac{\mu_L \mu_g + 1}{\mu_L \mu_g}} \quad (Ec. 83)$$

Esta ecuación es una modificación de la ecuación de Gaddis y Vogelpohl (1986) presentada anteriormente, cuyos valores de los parámetros se definió en función de la consistencia de la profundidad de separación de las burbujas de los diferentes diámetros.

La profundidad de separación se determina en relación con la velocidad superficial de la mezcla (V_m), de la siguiente forma:

$$V_m = V_{sg} + V_{sl} \quad (Ec. 84)$$

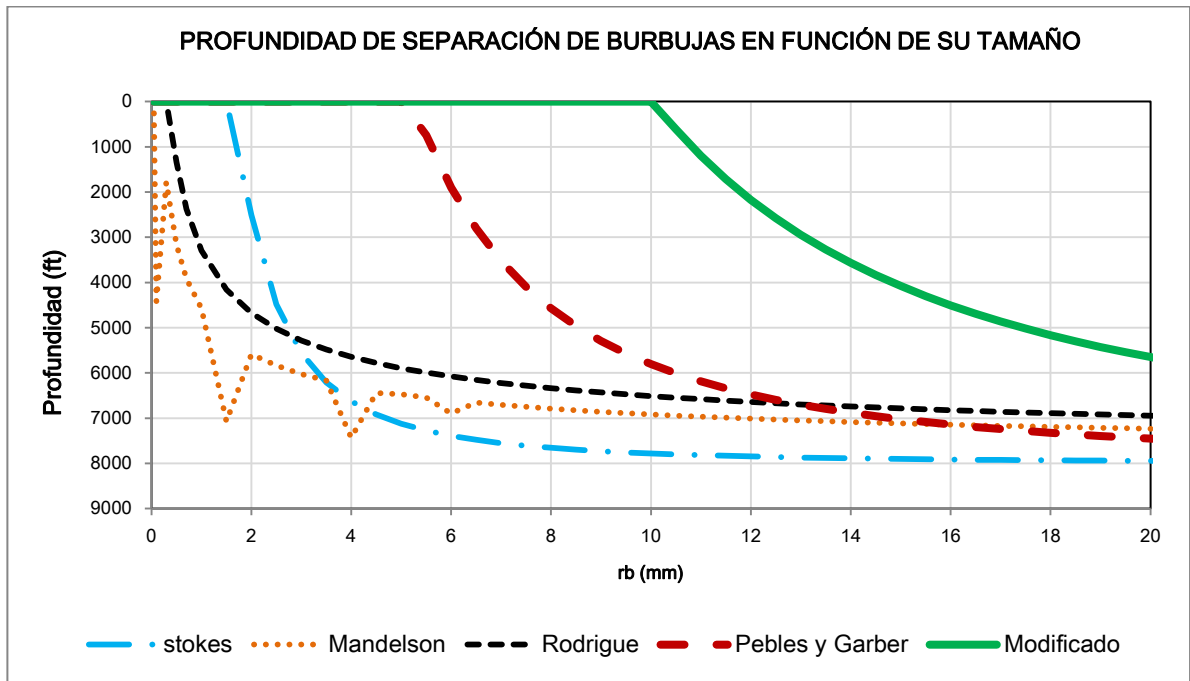
Donde $V_{sg} = \frac{Q_g}{A}$ y $V_{sl} = \frac{Q_l}{A}$

Se define una velocidad relativa entre la burbuja y la mezcla:

$$V_{rel} = V_B - V_m \quad (Ec. 85)$$

Y en función del tiempo que requiere cada diámetro de burbuja en ascender a la velocidad relativa por la columna de líquido, se define la profundidad a la cual se separa. La comparación de la correlación propuesta para la velocidad de separación de las burbujas frente a las correlaciones propuestas en la literatura, se muestra en la figura 3.3.

Figura 3.3 Profundidad de separación del gas de acuerdo a funciones de velocidad de ascenso de las burbujas



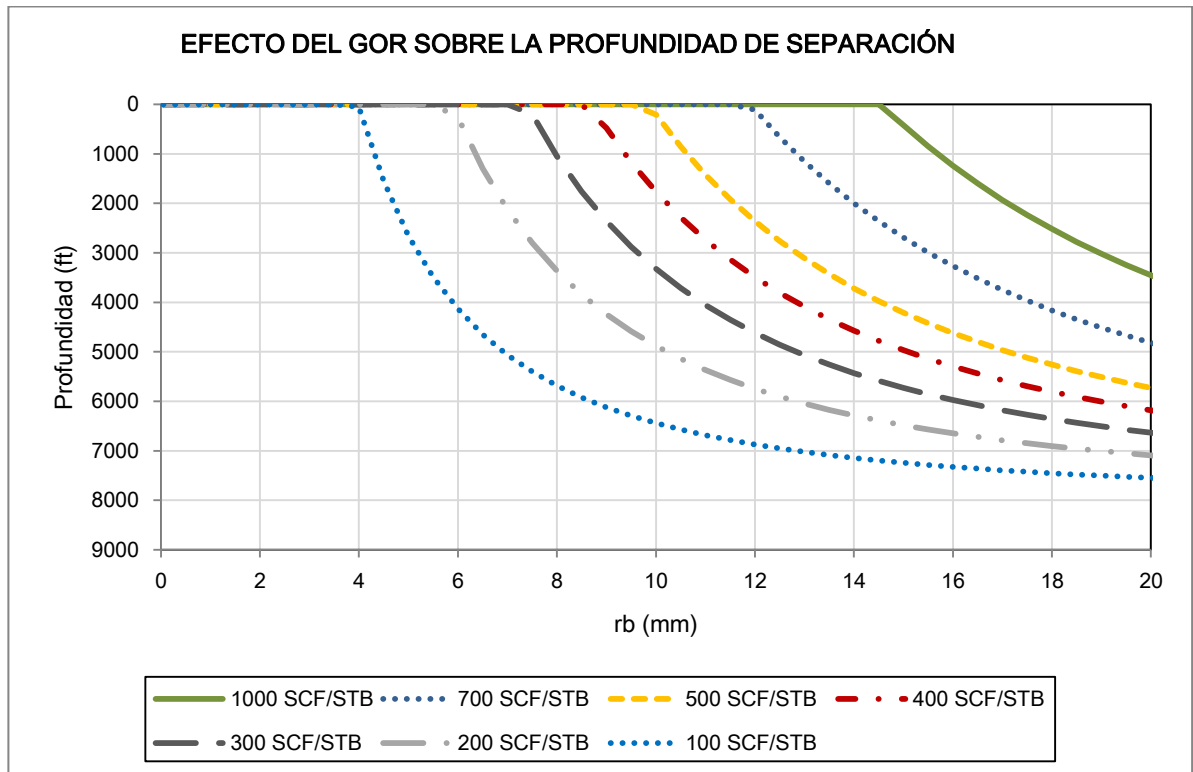
Fuente: Autor

La tendencia de cada una de las correlaciones propuestas anteriormente, muestran que la separación de burbujas de diámetros medios ($r_b > 10$ mm) ocurre a una profundidad similar en todos los casos (Profundidad > 6800 ft), lo cual significa que estas burbujas empezarán a formar una distribución diferente a la esperada en el flujo de este fluido, pudiendo alcanzar un régimen tipo Churn en la tubería. Se hace evidente que la correlación de Mandelson no aplica para diámetros pequeños, con lo cual se puede subestimar el contenido de gas que se tendría como base de diseño para la implementación de un separador de fondo, ya que la coalescencia de las burbujas en el fondo de pozo se da de manera tan precipitada que el gas fluiría como fase libre y el separador tendría una eficiencia elevada, cuando lo que se espera de este tipo de fluidos es que el gas permanezca en solución hasta las condiciones de cabeza de pozo.

La correlación propuesta define una profundidad de separación menor, lo cual quiere decir que las burbujas permanecen mayor tiempo en el crudo antes de coalescer para formar una burbuja de mayor tamaño, con lo cual, para las presiones que se manejan en cabeza de pozo aún se mantiene una cantidad de burbujas de diámetros pequeños disueltas en el crudo. Las condiciones de separación en función de la velocidad de las burbujas de gas se ven afectadas tanto por las propiedades de los fluidos como por las condiciones de operación del sistema.

La cantidad de gas presente en el sistema define una velocidad de ascenso de las burbujas debido a la distribución de las fases en la tubería que esto ocasiona. Se puede esperar que ante una mayor presencia de gas se favoreciera la coalescencia más temprana de las burbujas pequeñas de gas, lo cual responde parcialmente al efecto real de esta variable, ya que la cantidad de gas respecto al líquido tiene un límite, el paso de una espuma de baja calidad a una de alta calidad, lo cual ocurre a una relación entre las fases del orden del 80%. Por encima de este valor no se puede garantizar una geometría de la burbuja de tipo esférico que permita utilizar la ecuación propuesta. El efecto del GOR, asumiendo que la geometría de la burbuja se conserva para valores altos de esta relación, se muestra en la figura 3.4.

Figura 3.4 Variación de la profundidad de separación del gas en función del GOR

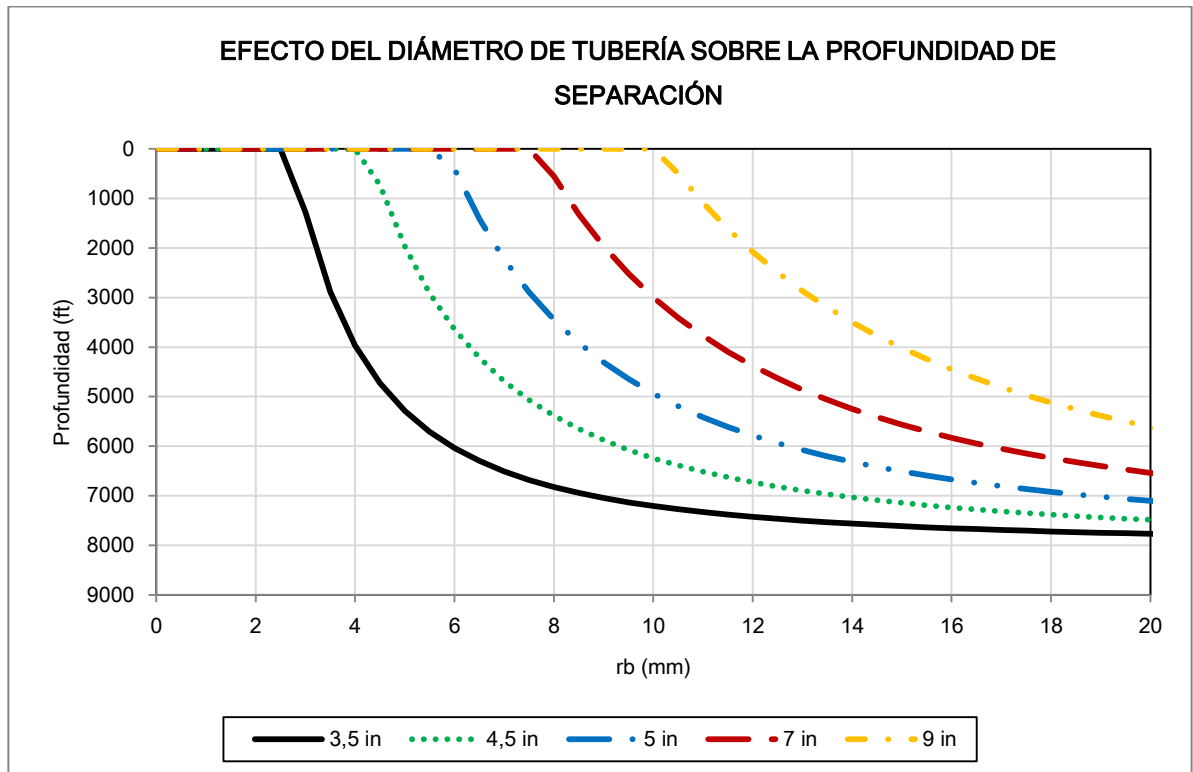


Fuente: Autor

A valores de GOR elevados la coalescencia ocurre a profundidades mayores, es decir, a tiempos tempranos, debido a que la velocidad relativa crece de manera proporcional a la velocidad de ascenso de la burbuja y la velocidad superficial de las fases en el sistema.

El efecto de la geometría de flujo se puede analizar en función del diámetro interno de la tubería que constituye la unidad de análisis.

Figura 3.5 Variación de la profundidad de separación del gas en función del diámetro de la tubería

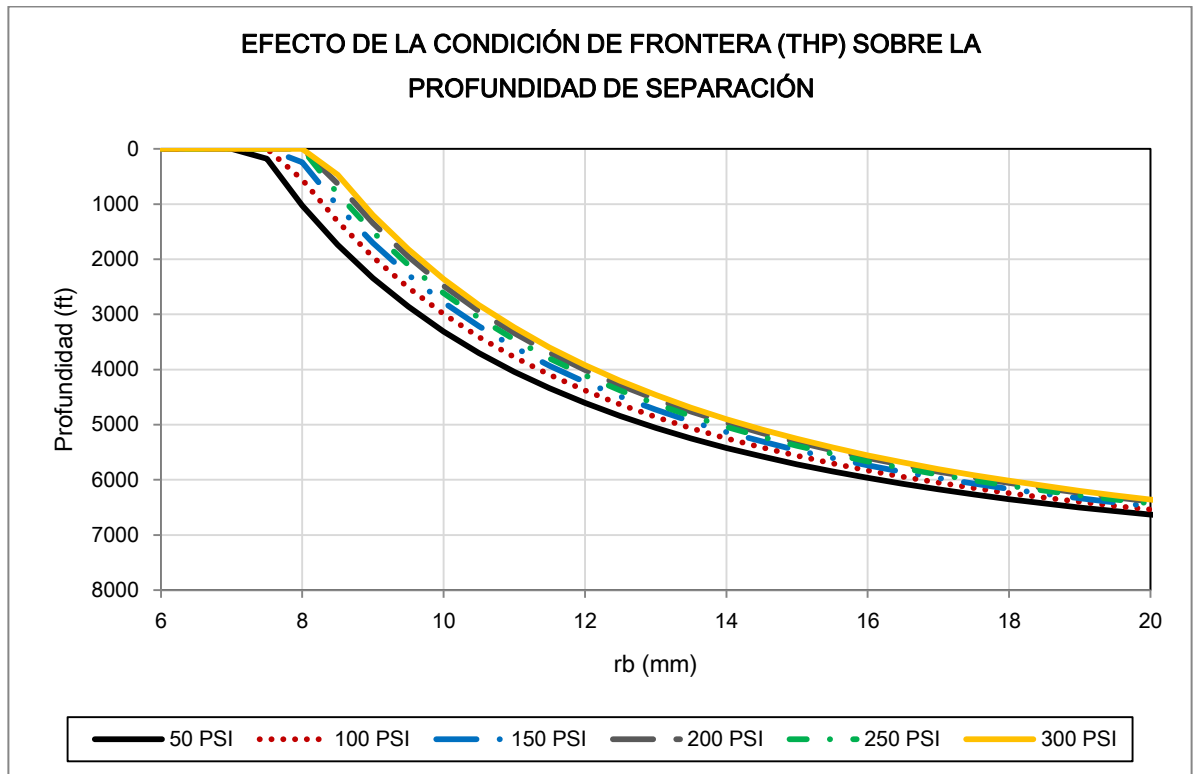


Fuente: Autor

El efecto se determina por el área de flujo disponible para la coalescencia de las burbujas ya que un área transversal mayor significa una velocidad superficial menor y una velocidad de ascenso se incrementa, acelerando de esta forma la separación. La curva corresponde a un valor de GOR de 250 SCF/STB.

Se define además el efecto de las condiciones de frontera del sistema a partir del valor de la presión en cabeza de pozo (THP).

Figura 3.6 Variación de la profundidad de separación del gas en función de la variación de la presión en cabeza de pozo



Fuente: Autor

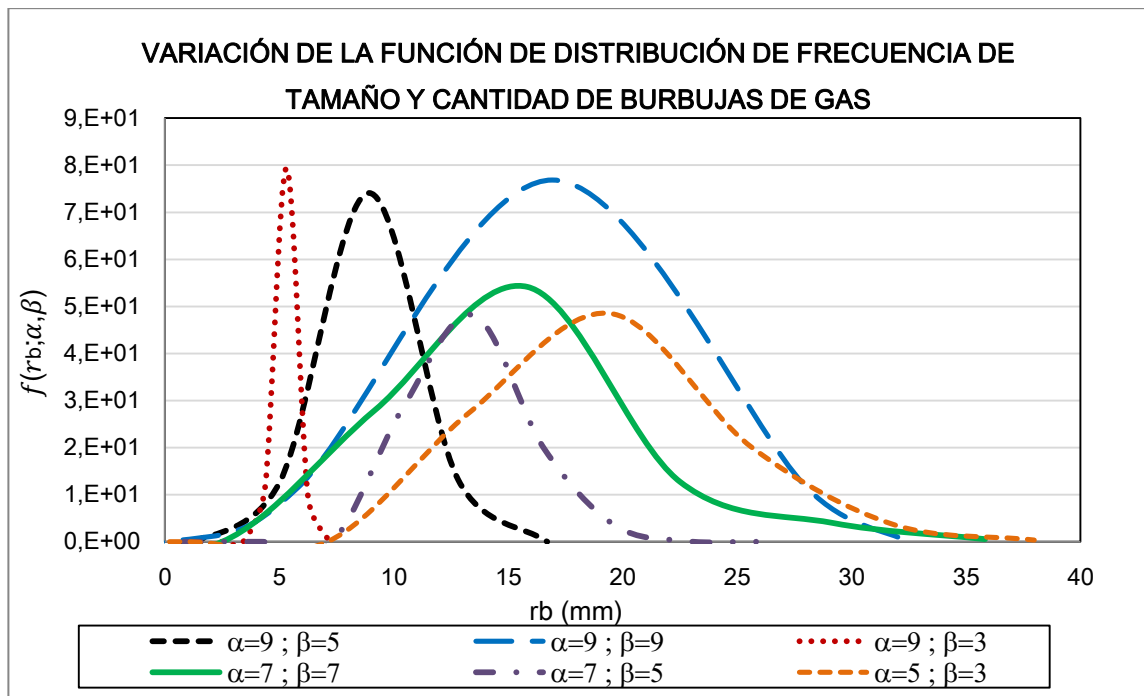
A un valor menor en la frontera se presenta una liberación más temprana debido a que la presión en todos los puntos del sistema disminuye, lo cual es consistente con una condición de liberación del gas. Sin embargo, la variación no es tan pronunciada ya que las burbujas de un mismo diámetro coalescen a una profundidad con una variación menor al 10% a una profundidad media.

La función definida para la distribución del tamaño y la cantidad de las burbujas, definida de la siguiente forma:

$$f(r_B; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} r_B^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{r_B}{\beta}\right)^\alpha} \quad (\text{Ec. 86})$$

Donde β está en función del tamaño de la burbuja de Taylor, como parámetro de escala de la distribución y α , en función del contenido de burbujas de un tamaño definido a una profundidad determinada, lo cual está definido por la velocidad de ascenso de las burbujas, actúa como parámetro de forma. La variación de estos parámetros sobre la distribución de las burbujas de gas a una profundidad determinada, tiene el comportamiento mostrado en la figura 3.7.

Figura 3.7 Variación de la función de distribución de frecuencia de tamaño y cantidad de burbujas de gas



Fuente: Autor

La distribución de las burbujas depende entonces de la geometría del sistema y las velocidades del gas y del líquido. El efecto que tiene el deslizamiento sobre esta distribución no fue tenido en cuenta pero puede definir otro tipo de distribuciones por cuanto es un parámetro que incide en la velocidad relativa entre las fases.

4. PROPIEDADES DE COMPORTAMIENTO DE FASES DE FLUIDOS TIPOS FOAMY OIL

La definición de las propiedades que permiten caracterizar el comportamiento de las fases presentes en un fluido que pueda caracterizarse como Foamy Oil está en función de la posibilidad de determinar el comportamiento de la presión de burbuja en el sistema. Esta propiedad permite definir la condición de supersaturación que caracteriza a este tipo de fluidos.

El Modelo presentado por Kraus et al. (1995), considera el fenómeno de la supersaturación a través de una modificación de las constantes de equilibrio entre las fases (K) para considerar el cambio en función de la presión y una relación entre el tiempo requerido para alcanzar el equilibrio y el tiempo que define un nuevo cambio en la presión del sistema.

El procedimiento se basa en la modificación de los datos obtenidos en una prueba PVT convencional, fijando los valores de las constantes de equilibrio a un valor de pseudopresión de burbuja p_{pbp} y a un valor arbitrario de presión por encima de la presión de burbuja medida p_{max} .

La modificación de las constantes de equilibrio se basa en la siguiente correlación:

$$K_{go}(p, T) = \left(K_{V1} + \frac{K_{V2}}{p} + K_{V3}p \right) e^{\frac{-K_{V4}}{T-K_{V5}}} \quad (Ec. 87)$$

Y el ajuste de estas constantes se da de la siguiente forma:

$$K'_{V2} = \frac{f_2 - f_1}{\left(\frac{p_{pbp} - p_{max}}{p_{pbp} * p_{max}} \right)} \quad (Ec. 88)$$

Y

$$K'_{v1} = f_1 - \frac{V_2}{p_{max}} \quad (Ec. 89)$$

Donde

$$f_1 = K_{v1} + \frac{K_{v2}}{p_{bp}} \text{ y } f_2 = K_{v1} + \frac{K_{v2}}{p_{max}} \quad (Ec. 90)$$

La solución de estas ecuaciones requiere de un ajuste de la p_{pbb} con datos de laboratorio o campo, asumiendo que la relación entre las moles de gas que permanecen en solución y las moles de gas que se separan corresponde al 100% del gas liberado y que por debajo de la pseudopresión de burbuja se presenta una liberación de manera lineal en función de la presión. El valor mínimo que puede tener esta relación es de 0.1, de modo que el fluido nunca se comportará como un crudo muerto a valores bajos de presión.

La otra vía está representada por el uso de correlaciones. Los rangos de aplicación de estas permiten definir la aplicabilidad de la correlación de Vázquez y Beggs (Bánzer, 1996).

$$P_b = \left(\frac{R_{sb}}{C_1 \gamma_{gc} \exp\left(\frac{C_3 \gamma_{API}}{T+460}\right)} \right)^{1/C_2} \quad (Ec. 91)$$

Donde los valores de las constantes, para un crudo de densidad API menor o igual a 30, son los siguientes:

$$C_1 = 0.0362$$

$$C_2 = 1.0937$$

$$C_3 = 25.724$$

La normalización de la gravedad del gas se realiza mediante la siguiente correlación:

$$\gamma_{gc} = \gamma_g \left(1 + 5.912 * 10^{-5} \gamma_{API} T_{sp} \log \left(\frac{p_{sp}}{114.7} \right) \right) \quad (Ec. 92)$$

El uso de esta correlación para los datos del crudo del campo Chichimene arroja un valor de 589 PSI, en lugar del valor de 568 PSI que determina un PVT convencional, lo cual representa un valor aceptable en comparación con otras correlaciones.

Para el cálculo de la presión de burbuja del Foamy Oil se sigue entonces el procedimiento de Kraus et al. (1995) utilizando los siguientes pasos:

- Se asume que el Foamy Oil consta de tres componentes: crudo muerto, gas en solución y gas atrapado en la fase líquida.
- Modificar los valores de las constantes de equilibrio (K), a una presión inferior y a una superior a la presión de burbuja medida por un PVT convencional.
- Los valores de esta modificación para los componentes del crudo y el gas del campo Chichimene se comparan respecto a los valores originales por medio de las siguientes tablas, para lo cual se utilizó el software Hysys, en donde se utilizó la ecuación de estado de Peng-Robinson:

Los valores de las constantes de equilibrio se determinaron mediante simulación en software HYSYS (Aspentech®).

Los valores para los componentes son los siguientes:

Tabla 1 Constantes de Equilibrio para definición de pseudopresión de burbuja

Componente Gas	K (p,T)	
	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
N2	6.60E-02	2.20E+01
CO2	2.00E-03	4.30E+00
Metano	2.10E-01	8.80E+00

Tabla 1: (Continuación)

Componente Gas	K (p,T)	
	P= 4000 PSi	P = 400 PSI
Etano	8.20E-02	2.50E+00
Propano	3.40E-02	1.00E+00
i-Butano	1.70E-02	5.60E-01
n-Butano	1.20E-02	4.30E-01
i-Pentano	8.10E-03	2.30E-01
n-Pentano	6.70E-03	1.90E-01
n-Hexano	3.20E+02	8.60E-02
n-Heptano	7.50E+02	4.10E-02
n-Octano	1.70E+03	2.00E-02
n-Nonano	2.80E+03	9.90E-03
n-Decano	6.30E+03	5.10E-03
n-C11	1.40E+04	2.60E-03
n-C12	2.90E+04	1.50E-03
n-C13	7.40E+04	6.90E-04
n-C14	1.80E+05	3.20E-04
n-C15	3.20E+05	2.10E-04
n-C16	5.40E+05	1.20E-04
n-C17	2.00E+06	8.30E-05
n-C18	4.40E+06	5.90E-05
n-C19	1.00E+07	4.70E-05
n-C20	2.40E+07	1.30E-05
Benceno	1.30E+03	6.20E-02
Tolueno	1.20E+03	2.70E-02
Componente	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
NBP 274	1.50E+03	2.30E-02
NBP 300	2.40E+03	1.90E-02
NBP 325	3.90E+03	1.70E-02
NBP 351	6.70E+03	1.40E-02
NBP 379	1.20E+04	1.20E-02
NBP 402	2.00E+04	1.00E-02
NBP 427	3.40E+04	8.60E-03
NBP 456	6.70E+04	7.30E-03
NBP 481	1.20E+05	6.20E-03

Tabla 1: (Continuación)

Componente Líquido	K (p,T)	
	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
NBP 762	4.50E+08	8.60E-04
NBP 788	1.10E+09	6.80E-04
NBP 826	4.40E+09	5.40E-04
NBP 875	2.60E+10	4.40E-04
NBP 926	2.00E+11	3.60E-04
NBP 976	1.70E+12	3.00E-04
NBP 1025	1.40E+13	2.40E-04
NBP 1075	1.20E+14	2.00E-04
NBP 1125	1.40E+15	1.60E-04
NBP 1175	1.70E+16	1.30E-04
NBP 1247	6.60E+17	1.00E-04
NBP 1346	1.40E+20	8.20E-05
NBP 1441	3.30E+22	6.50E-05
NBP 1546	1.20E+25	5.20E-05
NBP 1643	6.30E+27	4.10E-05
NBP 1735	1.60E+30	3.30E-05
NBP 1844	9.40E+32	2.60E-05
NBP 1943	6.40E+34	2.00E-05
Componente Gas	Kgo (p,T)	
	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
N2	7.40E-02	2.30E+01
CO2	2.20E-03	4.30E+00
Metano	2.30E-01	9.40E+00
Etano	9.20E-02	2.70E+00
Propano	3.80E-02	1.10E+00
i-Butano	1.90E-02	5.70E-01
n-Butano	1.30E-02	4.40E-01
i-Pentano	9.10E-03	2.30E-01
n-Pentano	7.50E-03	1.90E-01
n-Hexano	3.50E-03	8.50E-02
n-Heptano	1.50E-03	3.90E-02
n-Octano	6.60E-04	1.80E-02

Tabla 1: (Continuación)

Componente Gas	Kgo (p,T)	
	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
n-Nonano	4.00E-04	8.90E-03
n-Decano	1.80E-04	4.50E-03
n-C11	7.80E-05	2.20E-03
n-C12	3.90E-05	1.20E-03
n-C13	1.50E-05	5.50E-04
n-C14	6.20E-06	2.50E-04
n-C15	3.50E-06	1.50E-04
n-C16	2.10E-06	8.40E-05
n-C17	5.70E-07	5.80E-05
n-C18	2.60E-07	4.00E-05
n-C19	1.10E-07	3.10E-05
n-C20	4.60E-08	8.10E-06
Benceno	8.40E-04	6.20E-02
Tolueno	9.30E-04	2.60E-02
Componente Líquido	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
NBP 274	1.20E-03	1.30E-02
NBP 300	7.70E-04	8.20E-03
NBP 325	4.70E-04	5.30E-03
NBP 351	2.90E-04	3.30E-03
NBP 379	1.70E-04	2.00E-03
NBP 402	9.40E-05	1.30E-03
NBP 427	5.70E-05	7.60E-04
NBP 456	3.30E-05	4.20E-04
NBP 481	1.70E-05	2.50E-04
NBP 506	9.30E-06	1.40E-04
NBP 532	4.90E-06	7.90E-05
NBP 557	2.60E-06	4.30E-05
NBP 583	1.30E-06	2.30E-05
NBP 608	6.70E-07	1.20E-05
NBP 634	3.10E-07	6.40E-06
NBP 660	1.40E-07	3.20E-06
NBP 685	6.40E-08	1.60E-06
NBP 711	3.10E-08	7.90E-07

Tabla 1: (Continuación)

Componente Líquido	Kgo (p,T)	
	P= 4000 PSI	P = 400 PSI
NBP 736	1.30E-08	3.80E-07
NBP 762	5.70E-09	1.80E-07
NBP 788	2.50E-09	8.10E-08
NBP 826	1.10E-09	2.50E-08
NBP 875	2.60E-10	5.50E-09
NBP 926	4.30E-11	1.10E-09
NBP 976	5.60E-12	2.20E-10
NBP 1025	6.80E-13	4.30E-11
NBP 1075	8.30E-14	8.40E-12
NBP 1125	9.10E-15	1.70E-12
NBP 1175	8.20E-16	3.50E-13
NBP 1247	6.60E-17	3.90E-14
NBP 1346	1.70E-18	2.70E-15
NBP 1441	7.90E-21	3.50E-16
NBP 1546	3.40E-23	1.10E-16
NBP 1643	9.00E-26	2.10E-16
NBP 1735	1.80E-28	3.30E-15
NBP 1844	7.10E-31	1.30E-11
NBP 1943	1.20E-33	2.30E-06

Fuente: Autor

Los valores de las constantes de ajuste son los siguientes:

$$K_{V1} = 21295351.16$$

$$K_{V2} = -0.0037$$

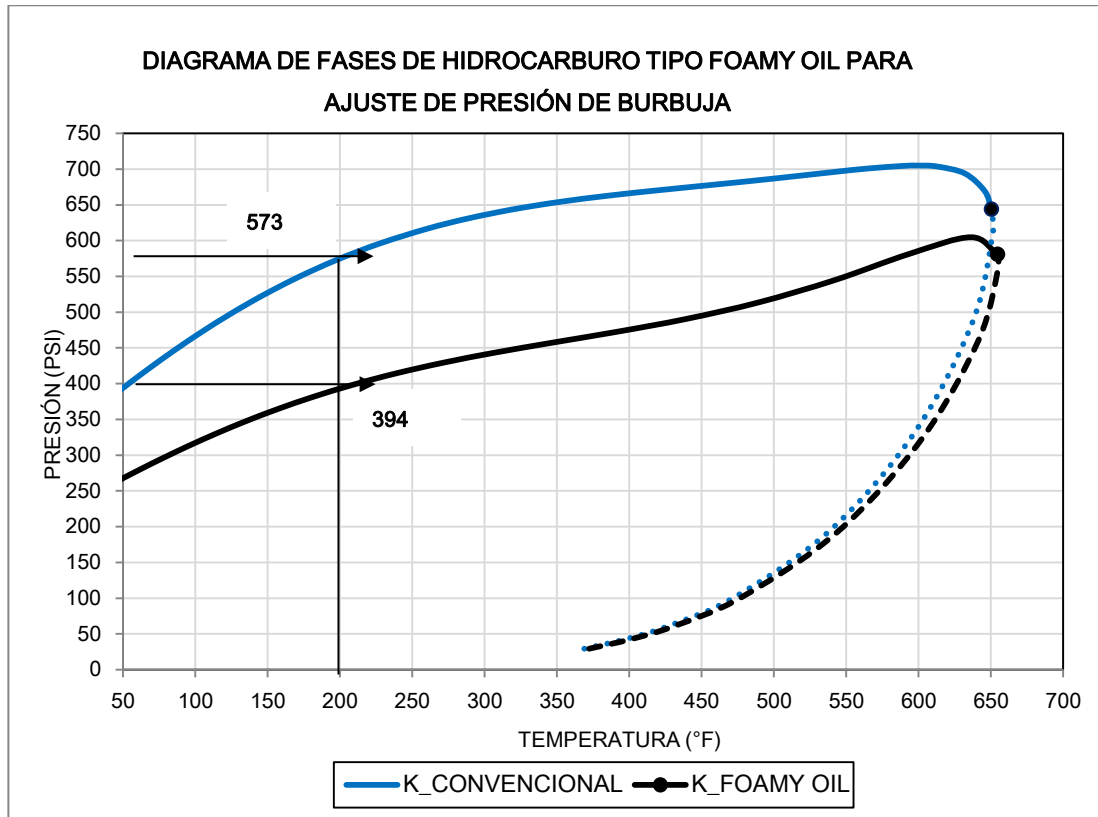
$$K_{V3} = -3155.12611$$

$$K_{V4} = 2224.40662$$

$$K_{V5} = 57.4087426$$

El diagrama de comportamiento de fases para cada situación se muestra en la figura 4.1.

Figura 4.1 Diagrama de comportamiento de fases con ajuste de presión de burbuja



Fuente: Autor

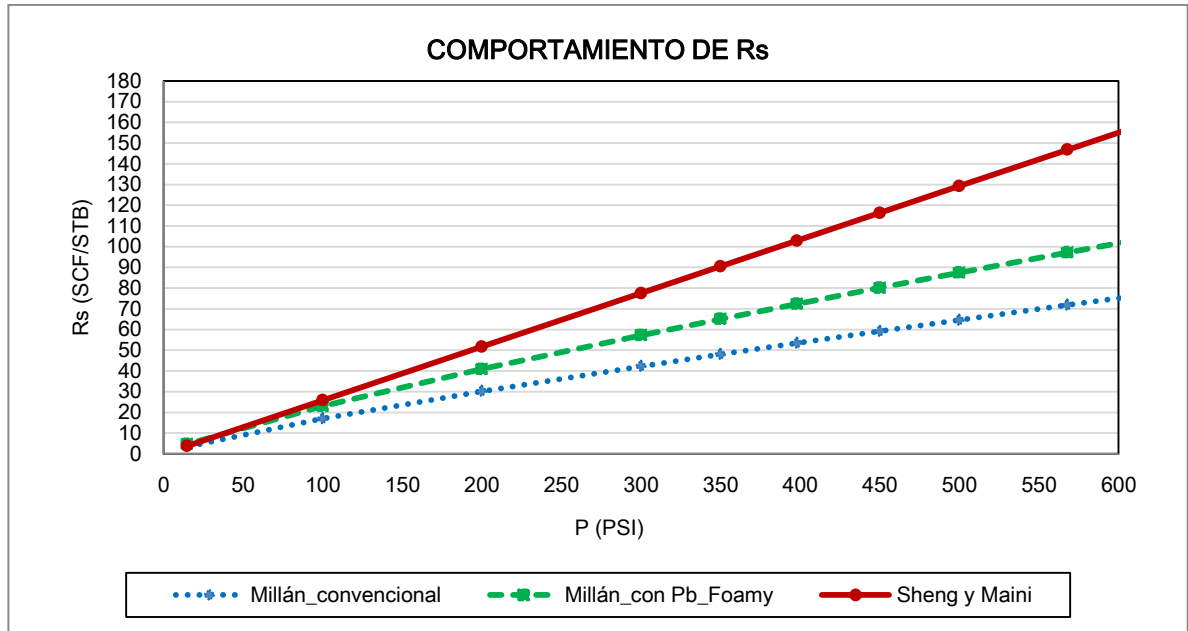
Se define entonces que el valor de la presión de burbuja para el Foamy Oil es de 394 PSI para el crudo del campo Chichimene.

Para la solubilidad del gas a diferentes condiciones de presión y temperatura se calcula mediante la siguiente expresión modificada de Romero, 2001:

$$R_s = \frac{MW_o * P * (K - 1)}{5,6146 * R * T * \rho_o} * f(r_B; \alpha, \beta) \quad (Ec. 93)$$

Comparado con el comportamiento mostrado por un PVT convencional para valores de presión bajas, se puede observar el comportamiento que muestra la figura 4.2.

Figura 4.2 Comportamiento de la función de solubilidad del gas



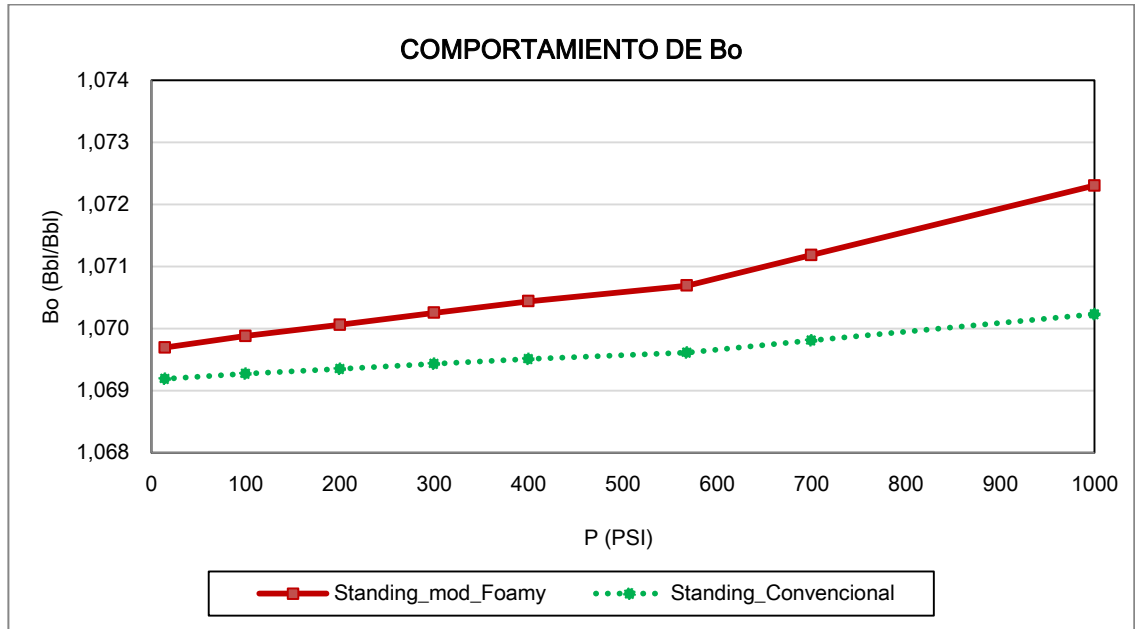
Fuente: Autor

El cálculo del factor volumétrico de formación se realiza mediante la correlación de Standing:

$$B_o = 0.972 + 0.000147 * \left(R_s * \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0.5} + 1.25 * T \right)^{1.175} \quad (Ec. 94)$$

La comparación de este valor con un PVT convencional se muestra en la figura 4.3.

Figura 4.3 Comportamiento de la función del Factor Volumétrico del Aceite



Fuente: Autor

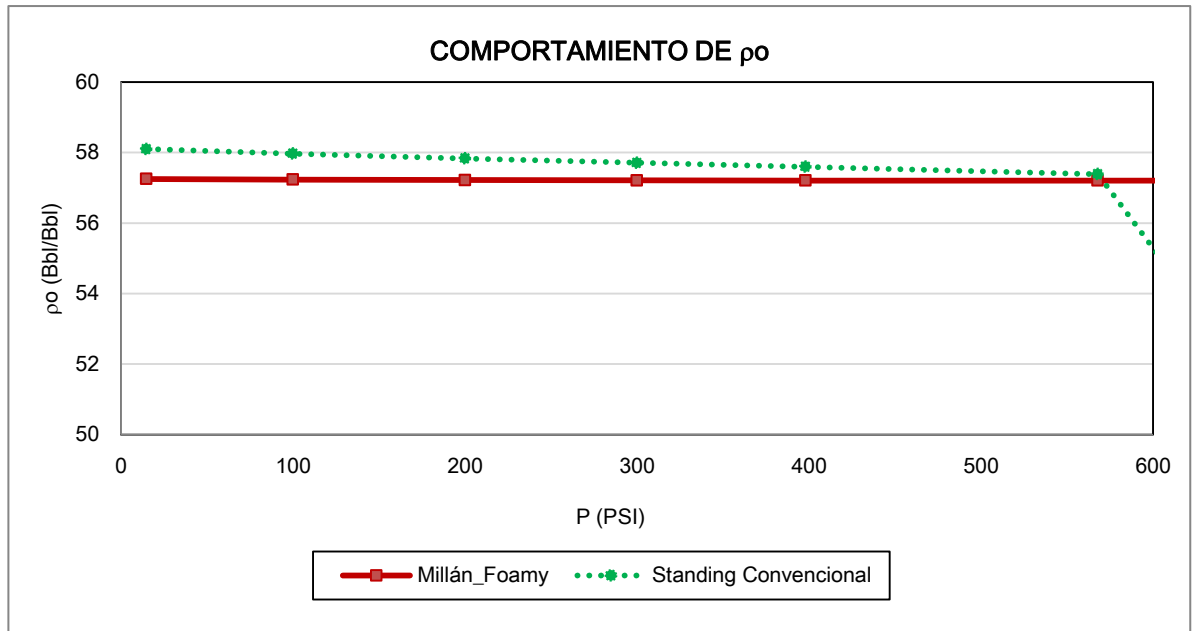
El cálculo de la densidad del aceite se realiza mediante las correlaciones de Millán, la cual tiene en cuenta el valor de pseudopresión de burbuja.

$$\rho_{ob} = \frac{1.2353 * p_b^{-0.02483}}{e^{0.00075 * T}} \quad \text{cuando } p = p_b \quad (\text{Ec. 95})$$

$$\rho_o = \frac{1.6499 * \rho_{ob}}{e^{0.50074 * \frac{B_o}{B_{ob}}}} \quad \text{cuando } p < p_b \quad (\text{Ec. 96})$$

$$\text{Y } \rho_o = \rho_{ob} * e^{c_o * (p - p_b)} \quad \text{cuando } p > p_b \quad (\text{Ec. 97})$$

Figura 4.4 Comportamiento de la densidad del aceite



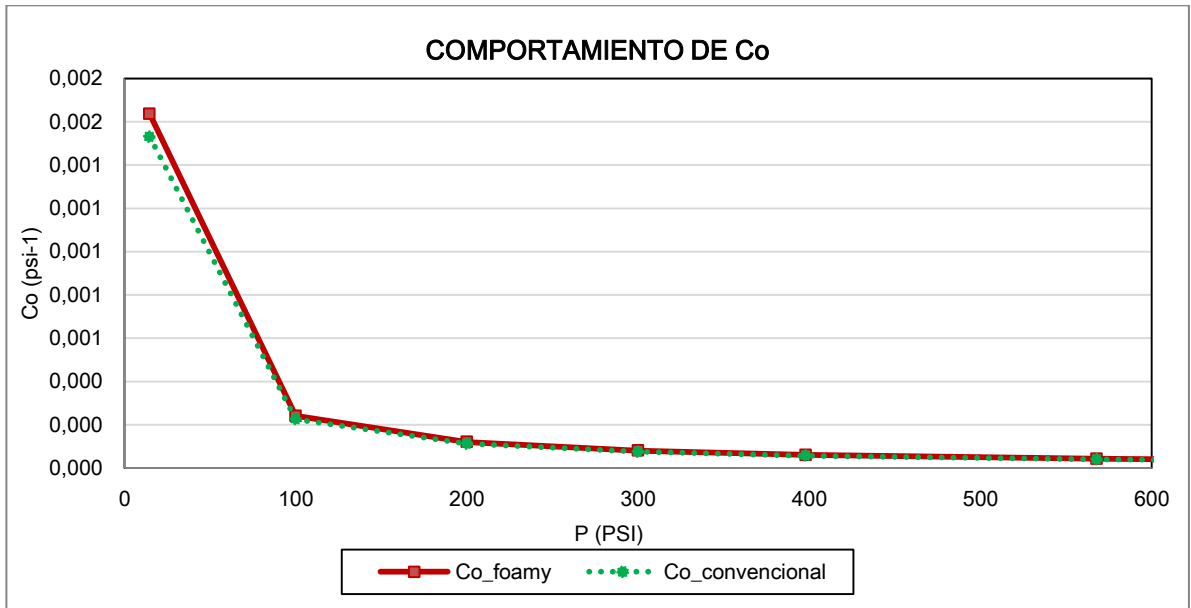
Fuente: Autor

La compresibilidad del aceite se calcula mediante la correlación de Vasquez y Beggs, la cual tiene la siguiente forma:

$$c_o = \frac{-1433 + 5 * Rsb + 17.2 * T - 1180 * \gamma_g * 12.61 * API}{P * 10^5} \quad (Ec. 98)$$

La comparación entre los datos convencionales y el Foamy Oil se muestra en la figura 4.5.

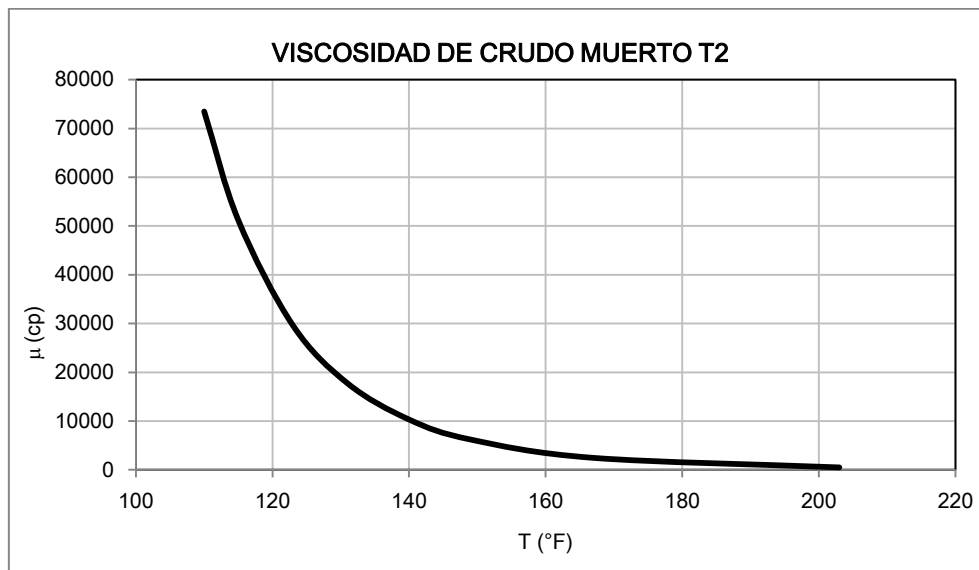
Figura 4.5 Comportamiento de la Compresibilidad del Aceite



Fuente: Autor

El cálculo de la viscosidad debe hacerse en relación con el comportamiento de la viscosidad del crudo muerto, el cual puede observarse en la figura 4.6.

Figura 4.6 Comportamiento de la viscosidad de crudo muerto T2



Fuente: Autor

La viscosidad debe definirse entonces en función de la función de distribución de tamaño y contenido de burbujas de gas en la columna de líquido, lo cual debe estar asociado a la solubilidad del gas en el aceite.

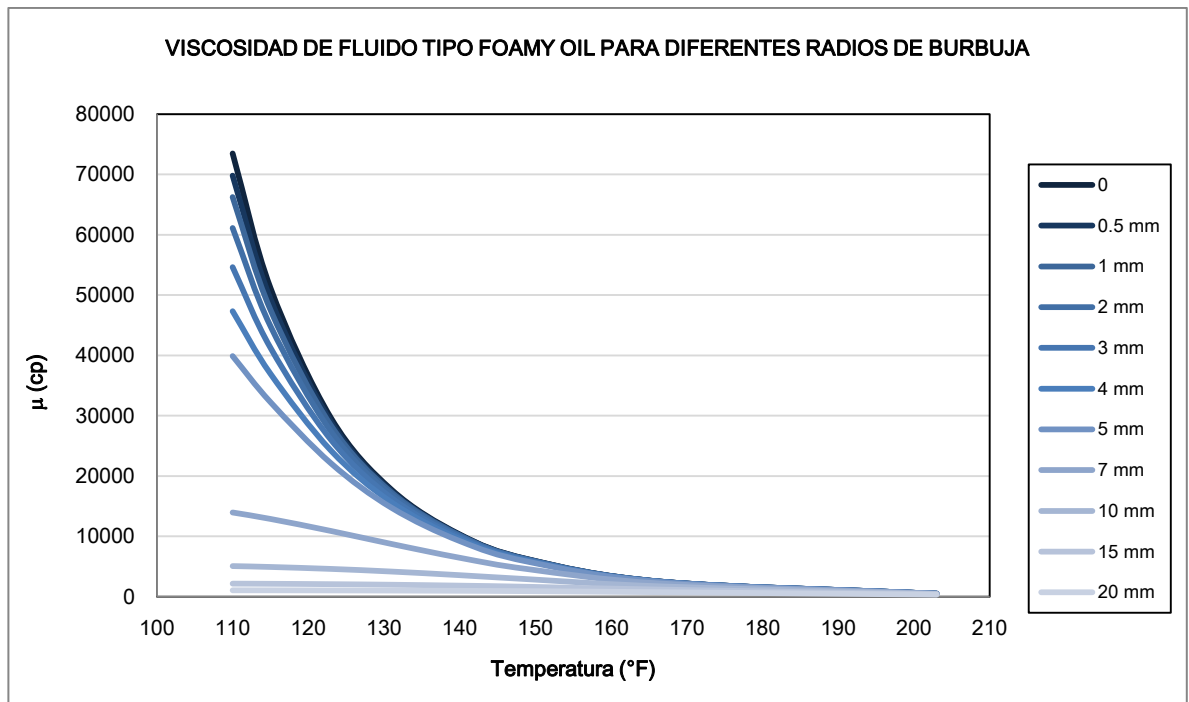
Se propone la siguiente correlación para el cálculo de la viscosidad en función del contenido de gas en el sistema:

$$\mu_f = f(r_B; \alpha, \beta) * \frac{\mu_o}{1 + \frac{\bar{r}_b^4}{2D^5} * (\mu_o - 1)} \quad (Ec. 99)$$

Donde \bar{r}_b es un radio de burbuja promedio, el cual puede obtenerse de la distribución de probabilidad definida por la función definida anteriormente.

Si se asume una presencia de burbujas de un diámetro constante en la fase líquida, se obtiene el comportamiento que se muestra en la figura 4.5.

Figura 4.7 Comportamiento de la viscosidad de crudo T2 para tamaños de burbuja de valor constante

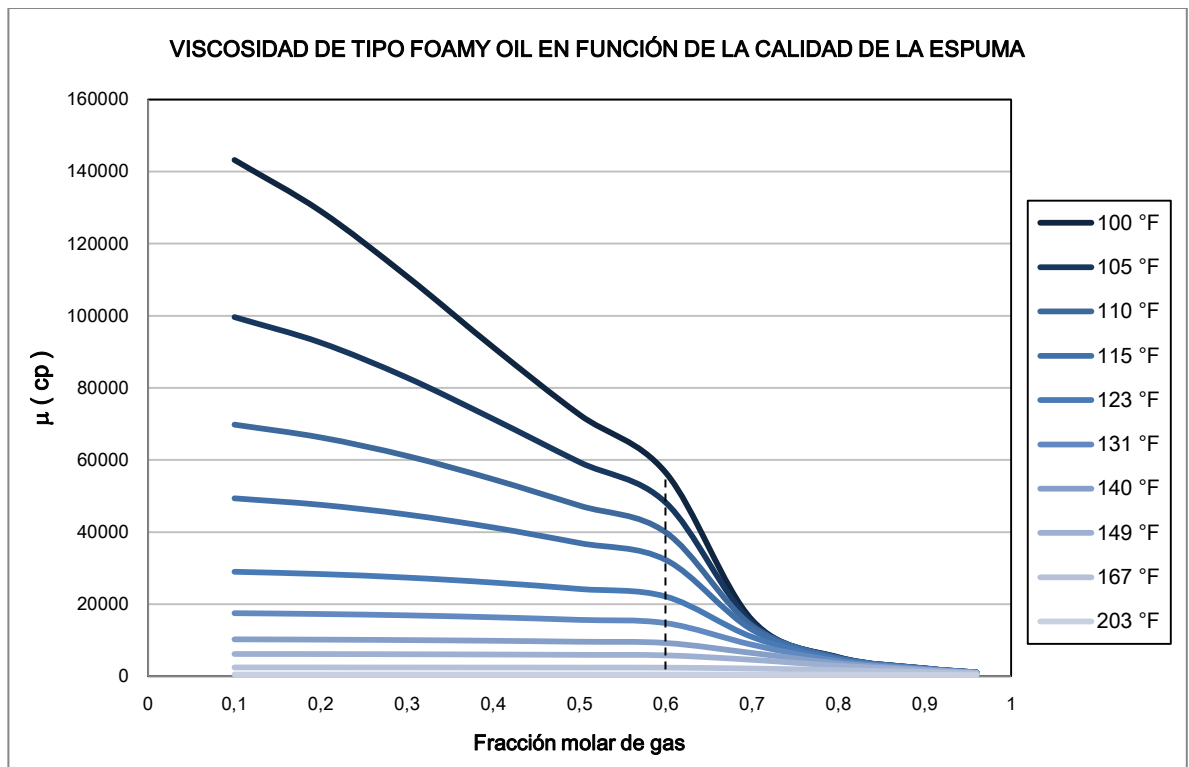


Fuente: Autor

La presencia de gas en el crudo disminuye su viscosidad a los valores más bajos de temperatura que se tiene en el proceso, siendo significativo cuando las burbujas tienen un radio igual o superior al 7% del diámetro de la tubería.

El comportamiento de esta propiedad en función de la calidad de la espuma, definida como la cantidad de gas respecto al total de fluido, se muestra en la figura 4.8.

Figura 4.8 Comportamiento de la viscosidad de crudo T2 en función de la fracción molar de gas



Fuente: Autor

A temperaturas superiores a 123°F la disminución en la viscosidad del líquido por efecto del gas disuelto se presenta cuando la fracción de gas respecto al líquido supera el 60% mientras que a temperaturas bajas el efecto tiene una reducción desde fracciones pequeñas de gas.

5. FLUJO DE FLUIDOS TIPO FOAMY OIL EN TUBERÍA

La solución a los modelos que representan el comportamiento del flujo a través de tuberías y las propiedades de cada una de las fases, tiene la posibilidad de ser abordada a través de diferentes perspectivas.

La perspectiva experimental tiene en cuenta la similitud geométrica, cinemática, dinámica y, en menor medida térmica, para encontrar correlaciones de datos obtenidos a escala de laboratorio que brinden una solución que siempre está en función de las condiciones de la prueba. La posibilidad de utilizar esta perspectiva para representar el flujo a otras condiciones demanda una consistencia dimensional que, para el caso del flujo bifásico o multifásico, requiere que los parámetros que normalmente se definen a partir de grupos adimensionales, sean cubiertos en el rango de aplicación del diseño experimental. Sin embargo, debido a los rangos de diseño de estos experimentos, las correlaciones que derivan de esta perspectiva tienen la mayor aplicabilidad en la industria.

La perspectiva correlacional corresponde al planteamiento de soluciones del balance de fuerzas interfaciales para representar las ecuaciones de conservación por medio de las velocidades de las fases en el sistema. De este modo, se utiliza una cantidad considerable de datos experimentales para establecer la validez de las zonas de transición entre los distintos patrones de flujo que representan la distribución de las fases en la geometría del sistema.

Por último, se tiene la perspectiva del modelamiento, en la cual se desarrolla una solución particular de las ecuaciones de Navier-Stokes por medio de métodos numéricos. Esta solución puede considerarse en una primera aproximación un campo de flujo para todas las fases en el que las propiedades de los fluidos, las velocidades y presiones del sistema, en cuyo

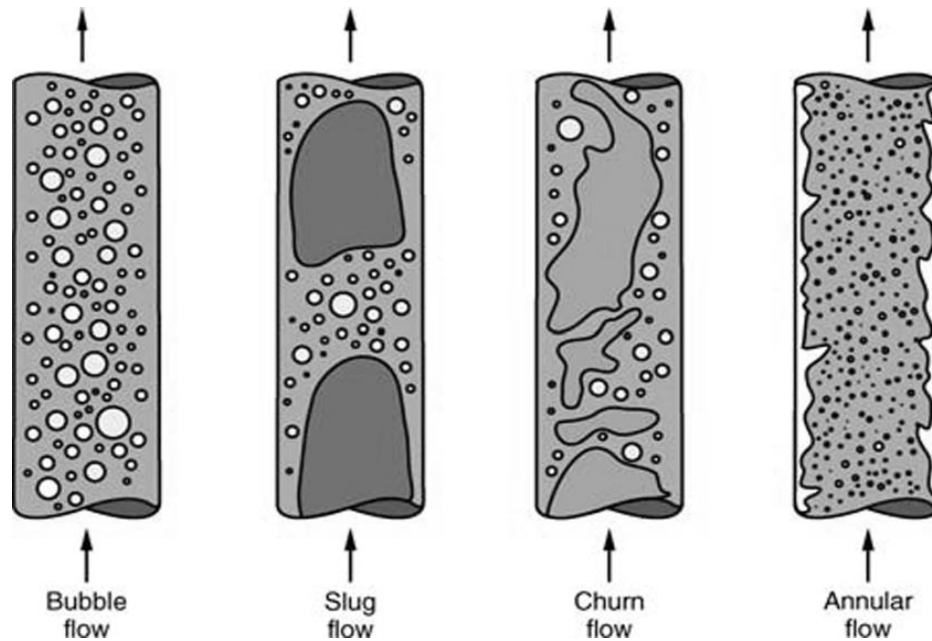
caso se denomina homogéneo, debido a que la solución considera las fases como un sistema homogéneo. Una aproximación posterior considera la ecuación de conservación para cada una de las fases, con lo cual se puede determinar de manera independiente las propiedades, velocidades y presiones asociadas a cada una de las fases, por lo cual, los fenómenos interfaciales cobran mayor importancia y la solución, a partir de las ecuaciones constitutivas para las fuerzas interfaciales, se torna más compleja y con mayor requerimiento de tiempo. La distribución de las fases en este caso resulta más precisa que las perspectivas anteriores para un mayor rango de condiciones.

El uso de la ecuación de conservación para solucionar el problema del flujo planteado por un crudo espumoso, en donde la distribución de las fases exige conservar un campo de flujo para cada una, debe tener una solución particular a partir de la modificación del término que controla la difusividad y la variación temporal. La formulación general de la ecuación de la continuidad, en la que se tiene en cuenta la conservación de masa, energía y momento, se presentó en la Ecuación 25. El término N hace referencia a la propiedad o elemento cuyo balance es definido por la solución numérica de esta ecuación. El primer término hace referencia a la variación temporal, la cual define a condiciones dinámicas el fenómeno de coalescencia de las burbujas. El primer término del lado derecho se refiere al balance de difusividad (Γ es el coeficiente de difusión) y el último representa las fuentes o sumideros que afectan el comportamiento de la propiedad o elemento.

En el Anexo A se plantea el desarrollo de esta ecuación que permite el planteamiento de una solución particular a partir de la perspectiva del modelamiento, siguiendo a Versteeg, H.K. y Malalasekera, W., (1995).

La distribución de las fases en un flujo bifásico a través de una tubería vertical se acepta normalmente a partir de los patrones de flujo que se muestran en la figura 5.1.

Figura 5.1 Patrones de flujo vertical en tuberías



Fuente: Brennen, 2005.

Tipo Burbuja (Bubble): La fase gaseosa se mantiene dispersa en pequeñas burbujas discretas en una fase líquida continua. En esta distribución se asume una homogeneidad en la distribución de las burbujas y se distinguen dos tipos: tipo burbujeante, presente a flujos másicos de líquido relativamente bajos en donde el deslizamiento entre fases tiene un efecto sobre el flujo, y tipo burbuja dispersa, presente a flujos másicos relativamente altos en donde se asume que el líquido arrastra las burbujas de gas evitando un deslizamiento entre las fases.

Tipo Tapón (Slug): En este caso, la mayor parte de la fase gaseosa forma burbujas de gran tamaño cuya geometría constituye un problema fundamental de la teoría de flujo. Estas burbujas se conocen como Burbujas

de Taylor y fluyen de manera alternada con tapones de líquido a lo largo de la tubería, ocupando casi la totalidad del área transversal con una película de líquido entre ésta y la tubería que puede formar una zona de mezcla con presencia de burbujas dispersas. El esfuerzo teórico alrededor de este patrón ha consistido en determinar la relación entre la velocidad de ascenso de la burbuja y la geometría del sistema.

Tipo Agitado (Churn): Éste es similar al anterior pero el gas no tiene una geometría definida, de modo que los fenómenos de deslizamiento entre las fases provocan una interacción que resulta de gran complejidad para modelar, ya que el líquido puede descender y ser arrastrado nuevamente por baches de gas hacia la zona de menor presión del sistema.

Flujo Anular (Annular): En este caso, la fase gaseosa fluye a gran velocidad en la zona central pudiendo arrastrar cierta cantidad de líquido como fase dispersa. El líquido que permanece como formando una capa delgada al interior de la tubería, fluye a menor velocidad, de modo que se generan esfuerzos cortantes elevados produciendo una interfase con un comportamiento ondulatorio.

La caracterización del flujo de un fluido tipo espumoso (Foamy Oil) tiene en cuenta los dos primeros patrones para caracterizar su comportamiento a través de una tubería vertical. El primero, como patrón que define la distribución de las fases en la tubería y el segundo como límite de esta distribución.

La inclusión del contenido de gas en la definición del gradiente de presión se realiza teniendo en cuenta el concepto de Relación de Expansión Volumétrica (ε), presentado por Valko et al. (1992) en su modelo de Volúmenes Iguales (VI), el cual representa la relación de la suma de

volúmenes de gas y líquido respecto al volumen de líquido, de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{\hat{v}}{\hat{v}_l} = \frac{\rho_l}{\rho_f} \quad (\text{Ec. 100})$$

En donde ρ_f representa la densidad del fluido tipo Foamy Oil.

Utilizando esta Relación de Expansión Volumétrica la ley de potencia para el modelo VI toma la siguiente forma:

$$\tau = (K\varepsilon^{1-n}|\dot{\gamma}|^{n-1})\dot{\gamma} \quad (\text{Ec. 101})$$

Donde K y n son constantes características de las fases gaseosa y líquida que forman el fluido, de acuerdo a la establecido en el análisis reológico presentado anteriormente.

Si identificamos el fluido tipo Foamy Oil como un fluido pseudoplástico, la ecuación constitutiva de tipo Bingham puede aplicarse de la siguiente forma:

$$\dot{\gamma} = 0, \quad |\tau| \leq \tau_y \varepsilon \quad (\text{Ec. 102})$$

$$\tau = \left(\frac{\tau_y \varepsilon}{|\dot{\gamma}|} + \mu_p \right) \dot{\gamma}, \quad |\tau| > \tau_y \varepsilon \quad (\text{Ec. 103})$$

Donde los parámetros τ_y y μ_p son constantes para un sistema gas-líquido a una temperatura constante.

Debido a que el número de Reynolds debe ser sensible a una variación de la velocidad del fluido en tubería causado por cambios en la densidad, si el flujo es isotérmico, el modelo VI propone la siguiente correlación para calcular el número de Reynolds de acuerdo a la correlación anterior:

$$Re_{VI} = \frac{D^n u^n \rho}{K \varepsilon^{1-n}} \quad (\text{Ec. 104})$$

Asumiendo que la Relación de Expansión Volumétrica (ε) es constante, propone la determinación del factor de fricción mediante la siguiente correlación:

$$f = \frac{2}{R_{eVI}} \left(\frac{6n + 2}{n} \right)^2 \quad (Ec. 105)$$

Mediante un balance del sistema Valkó et al (1992) encuentra la siguiente solución para determinar las pérdidas de presión en el sistema para un flujo descendente en tubería vertical:

$$\frac{dp}{dl} = - \frac{(2fb^2c^2 - Dg)P^3 + 4fabc^2P^2 + 2fa^2c^2P}{D(bP^3 + aP^2 + (-abc^2)P + (-a^2c^2))} \quad (Ec. 106)$$

Donde:

$$a = \omega_g \frac{RT}{M_g}$$

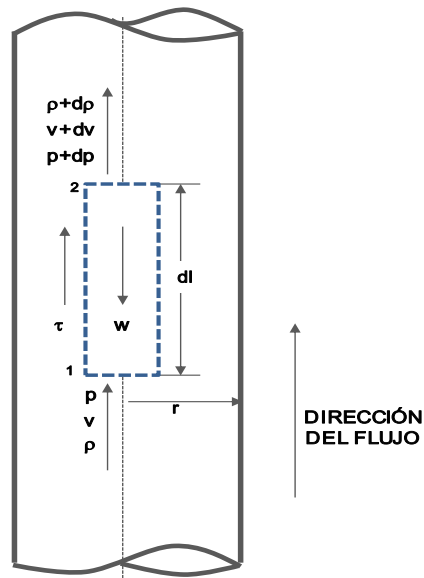
$$b = \omega_g \frac{RTB'}{M_g} + (1 - \omega_g) \frac{1}{\rho_g}$$

$$c = \frac{4(m_g + m_l)}{D^2\pi}$$

Donde ω_g es la fracción másica del gas, m_g es la tasa de gas, m_l es la tasa de líquido y D es el diámetro de la tubería. El término B' pertenece a la ecuación de estado del Virial, que el autor utiliza para describir el comportamiento de gas.

En la presente investigación se asume un balance en el sistema, representado en la figura 5.2.

Figura 5.2 Definición de unidad de análisis para balance del sistema



Fuente: Autor

$$m_{salida} - m_{entrada} = \sum F - m_{acumulada} \quad (Ec. 107)$$

El desarrollo de este balance se presenta en el Anexo B y permite obtener la siguiente ecuación para estimar las pérdidas de presión por unidad de longitud en una tubería vertical:

$$\frac{dp}{dl} = w_f - 2K \left(\frac{V_g}{r^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{3n+1}{n} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}-1}}{\varepsilon^{n-1}} \right)^n \quad (Ec. 108)$$

La velocidad del gas que se incluye en el término de la parte derecha corresponde a la velocidad de las burbujas que permanecen disueltas en el crudo a la profundidad de evaluación y se estima por la correlación propuesta para incluir el fenómeno de la nucleación y separación de la fase gaseosa. La inclusión de la Relación de Expansión Volumétrica (ε) garantiza la definición del gradiente en función del contenido de gas que puede tener a una profundidad dada.

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

6.1. Unidad de Análisis

El efecto de los parámetros que definen la geometría de flujo y las condiciones de operación del sistema, se determina mediante la profundidad a partir de la cual las burbujas se empiezan a separar del sistema, distancia a partir de la que coalescen para formar burbujas de mayor tamaño antes de formar el tamaño que se considera como límite del patrón que permite caracterizar el fluido como tipo Foamy Oil, analizado anteriormente como el tamaño de la burbuja de Taylor.

Para un fluido de las propiedades del crudo de la formación T2 del campo Chichimene, que tiene una gravedad promedio de 8.5 °API, y un gas con una gravedad específica de 0.8, se tienen en cuenta los valores de la Tabla 2.

Tabla 2. Propiedades de crudo de la formación T2

Propiedad	Crudo T2	Gas Formación T2
T (°F)	60	60
P (PSIA)	14.7	14.7
SG	1.023	0.8
MW	416.3	22.88
Densidad Másica (lb/ft ³)	63.84	6.053E-02
Densidad Molar (lbmol/ft ³)	0.1534	2.646E-03
Tensión Superficial (dina/cm)	35.22	24.14

Considerando además las siguientes propiedades mecánicas de operación de los pozos como valores típicos:

Tabla 3. Propiedades mecánicas de pozos productores de crudo T2

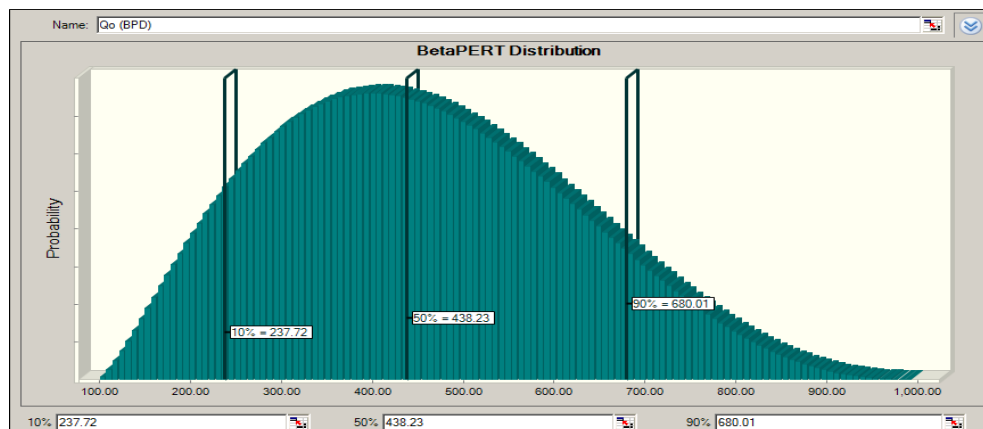
Propiedad	Valor
PMP (ft)	8000
Profundidad_Bomba (ft)	5000
THP (PSI)	100-300
Qo (BPD)	250-1000
BSW (%)	0.8 – 20%
GOR_producción (SCF/STB)	5-250
Tfondo (°F)	185

Se considera un gradiente de temperatura de 1°F/100 ft.

Al definir las variables operativas que pueden afectar el fenómeno de nucleación a partir de funciones de probabilidad, se tiene una cobertura más amplia de la profundidad a la cual se presentará una separación de la burbuja de tamaño promedio.

Para el caudal de crudo se selecciona una distribución de tipo BetaPert, en la que se incluye una mayor densidad entre los valores de 250 BPD y 600 BPD, pero alcanzando el límite superior definido en la tabla anterior y un límite inferior de hasta 100 BPD, tal y como se muestra en la figura 6.1.

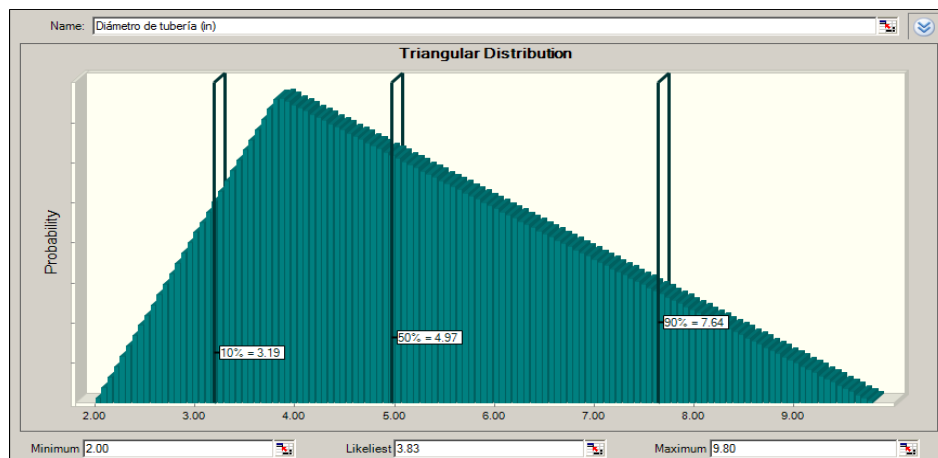
Figura 6.1 Distribución de valores de caudal de producción



Fuente: Autor

Los diámetros de las tuberías de producción en el campo varían entre $9 \frac{5}{8}$ ", que se ubica en las secciones inferiores, y $5 \frac{1}{2}$ ", que se ubica aguas debajo de la bomba de subsuelo. Se define una distribución triangular que contenga estos valores, pero que alcance valores de tubería de $2 \frac{7}{8}$ ", para corroborar el funcionamiento de la burbuja de Taylor como valor límite de la función de distribución en geometrías pequeñas. Se asume además una distribución continua debido a que el diámetro interno de la tubería puede variar a lo largo de la sarta de producción debido a deposición de orgánicos.

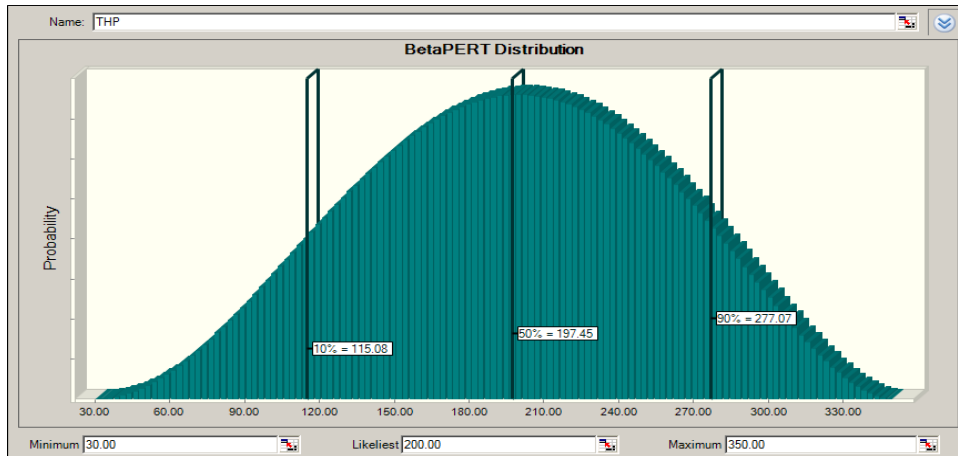
Figura 6.2 Distribución de valores de diámetros de tubería de producción



Fuente: Autor

La variación de la presión en cabeza de pozo se asume de tipo BetaPert condensando la mayor densidad de probabilidad en un valor cercano a los 200 PSI. Debido a la variación de la distancia de los pozos a la estación de tratamiento, se establece una función continua para dar cobertura a cualquier valor posible.

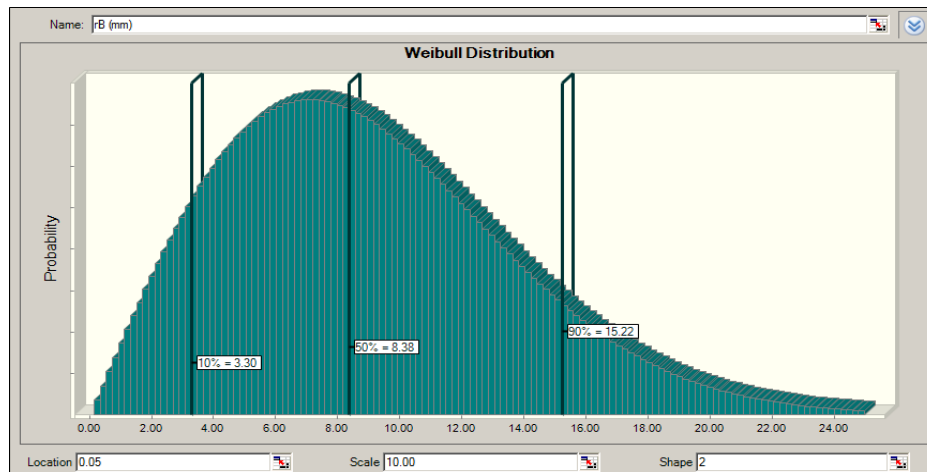
Figura 6.3 Distribución de valores de presión en cabeza de pozo



Fuente: Autor

Finalmente, se asume una distribución de tipo Weibull para describir el comportamiento del tamaño de burbuja promedio del sistema, lo cual corresponde a lo definido en la sección de análisis del fenómeno de la nucleación.

Figura 6.4 Distribución de valores de tamaños de burbuja

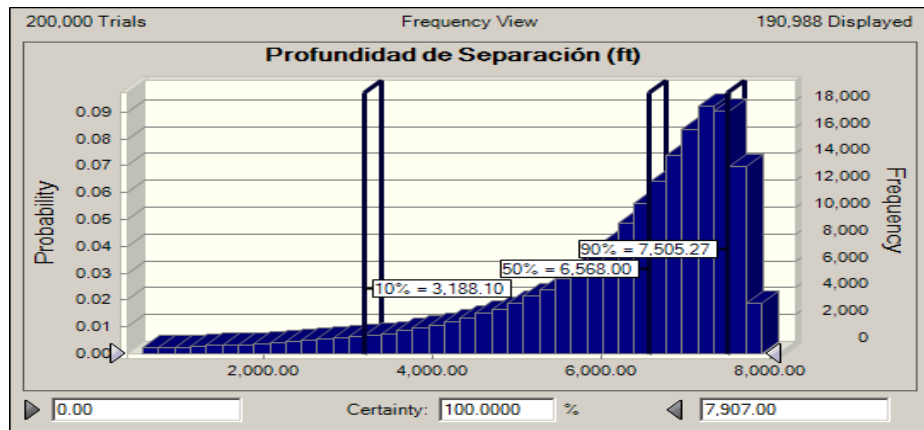


Fuente: Autor

Estas funciones definen la distribución de probabilidad de frecuencia de la profundidad a la cual se separa el gas del crudo, valor que define tanto la función de solubilidad del gas como la cantidad de gas presente como fase

libre a ciertas condiciones del sistema. La función propuesta tiene el comportamiento mostrado en la figura 6.5.

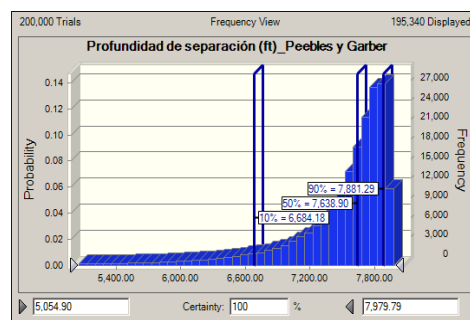
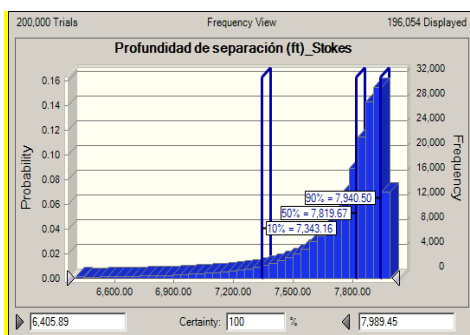
Figura 6.5 Distribución de valores de profundidad de separación para la función propuesta



Fuente: Autor

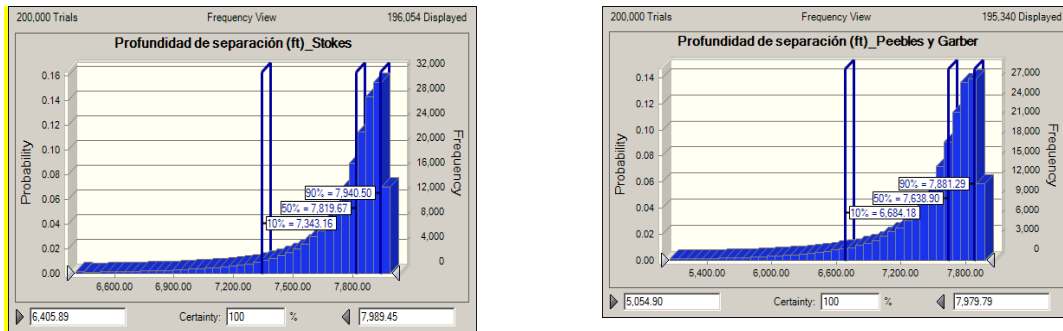
Por su parte, las correlaciones restantes tienen el comportamiento de la figura 6.6.

Figura 6.6 Distribución de valores de profundidad de separación en función de otras funciones de velocidad de gas en el sistema



Fuente: Autor

Figura 6.6 Distribución de valores de profundidad de separación en función de otras funciones de velocidad de gas en el sistema (continuación)

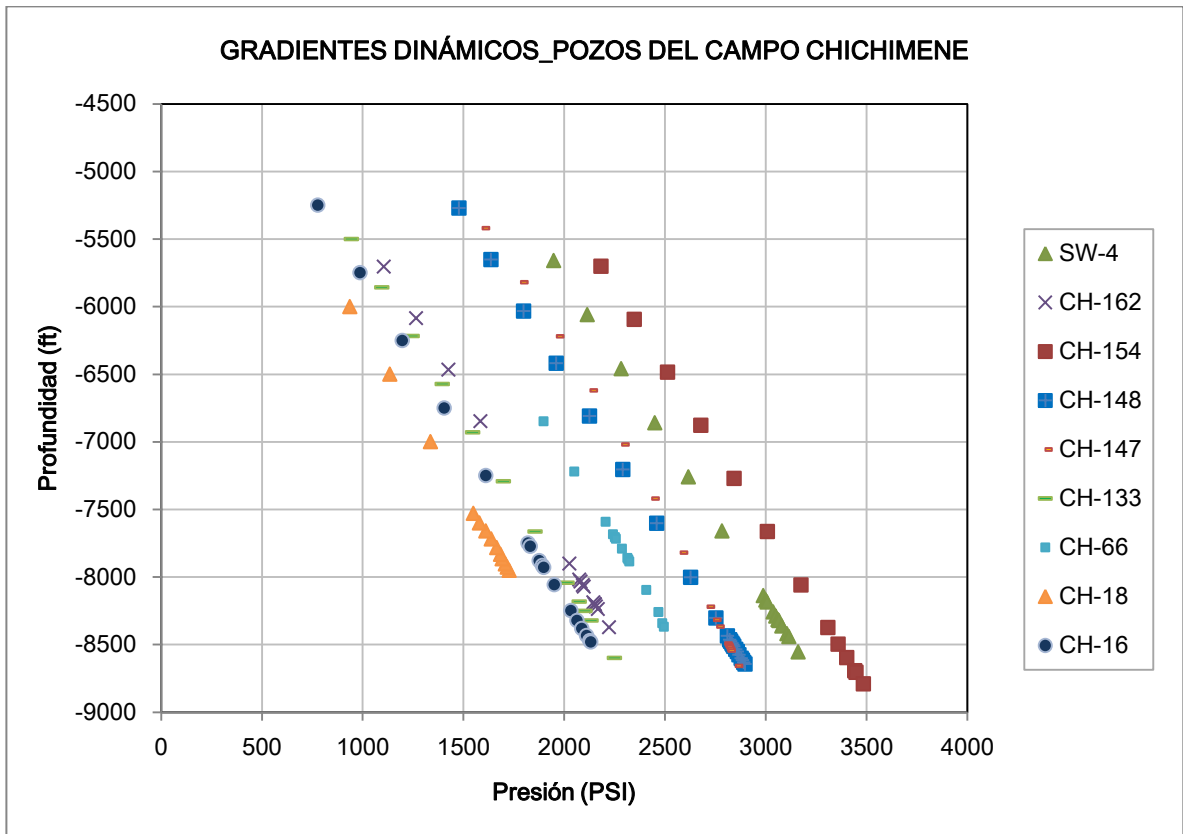


Fuente: Autor

Se asume la distribución determinada a partir de la función que resulta de la presente investigación.

Los valores de control del gradiente de presión calculado por el modelo presentado en la presente investigación son los datos de registros PLT tomados en diferentes pozos del campo Chichimene, los cuales se muestran en la figura 6.7.

Figura 6.7 Gradientes dinámicos de pozos del campo Chichimene



Fuente: Ecopetrol S.A. GEC-SCC

De este modo, la unidad de análisis se delimita por la región comprendida entre la profundidad promedio de la formación T2 y la profundidad de la entrada a la bomba. Pero, la comparación debe incluir además los valores definidos por las correlaciones más utilizadas para el modelamiento de flujo vertical (Beggs and Brill, Duns and Ros y Hagedorn and Brown), por un modelo mecánico comúnmente usado (Ansari) y por un modelo mecánico propuesto por la universidad de Tulsa (TUFFP) que fundamenta su desarrollo en el régimen de tipo slug y los límites que marca la distribución de las velocidades de las fases respecto a otros regímenes de flujo.

6.2. Cálculo del gradiente de presión

El cálculo del gradiente de presión mediante estas correlaciones tiene dos comportamientos muy marcados: presentan una diferencia que se torna cada vez mayor ante el ascenso del fluido o se mantienen invariables en todo el sistema. Las condiciones de los pozos se muestran en la Tabla 4.

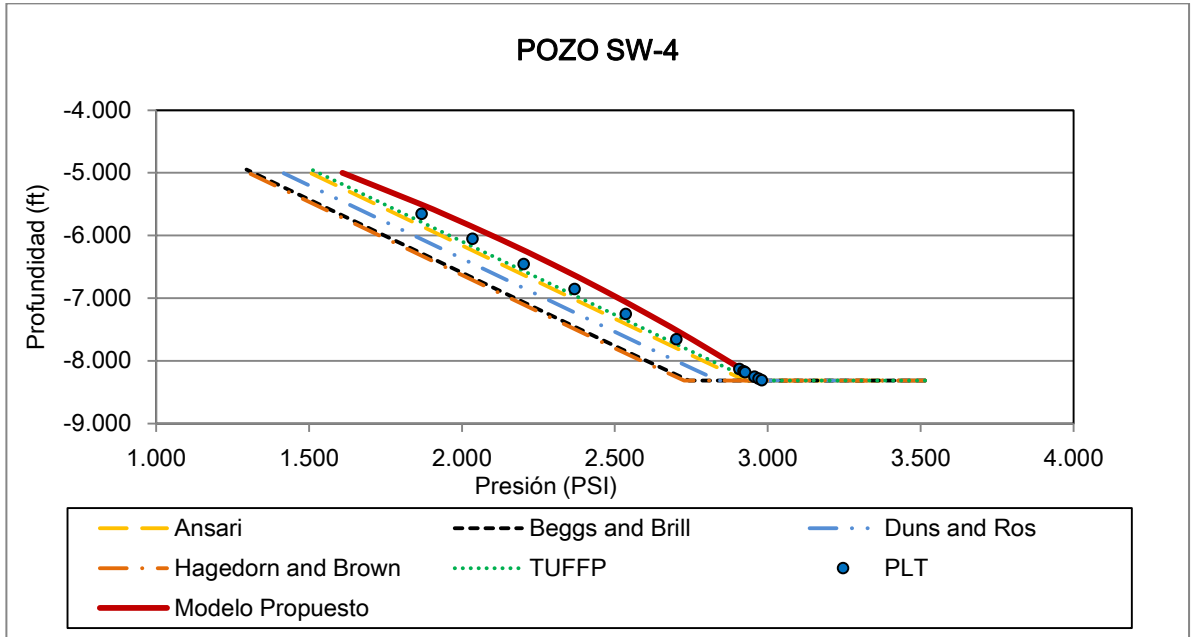
Tabla 4. Propiedades de los pozos productores de T2 evaluados

POZO	Qo (BPD)	BSW (%)	GOR (SCF/STB)	°API	μ_1 @ 150 °F (cp)	μ_2 @ 180 °F (cp)	Pws (PSI)	Tyto (°F)	PIP (PSI)	OD Unidad de Análisis (in)
CH-154	92	2	60	8	8488	2509	2698	180	1060	9 5/8
CH-162	678	10	50	10	4109	1177	2622	180	572	9 5/8
CH-148	268	8	70	8	8488	2509	3380	180	835	9 5/8
CH-147	340	12	110	8	8488	2509	3172	180	1365	9 5/8
CH-133	1897	60	147	8.5	4870	1799	2306	180	800	9 5/8
CH-66	64	22.5	80	9	6061	1954	2505	180	1201	9 5/8
CH-18	746	38.75	224	9	6789	1730	1764	180	934	9 5/8
CH-16	1298	82.15	147	8.5	4870	1799	2015	180	730	9 5/8
SW-4	390	4%	60	9.8	5700	1740	3065	180	502	9 5/8

Fuente: Autor

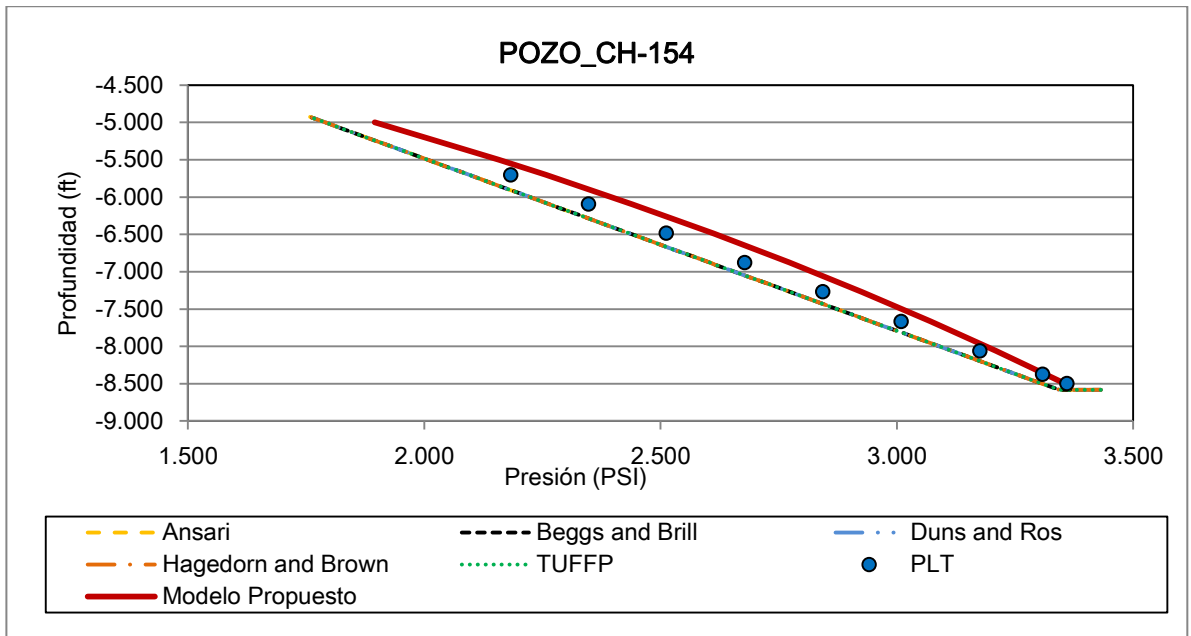
De este modo, se puede integrar el resultado del modelo propuesto con los resultados obtenidos mediante estas correlaciones y el valor de los PLT del campo. Los resultados se muestran desde la figura 6.10 a 6.16.

Figura 6.8 Resultados evaluación Pozo SW-4



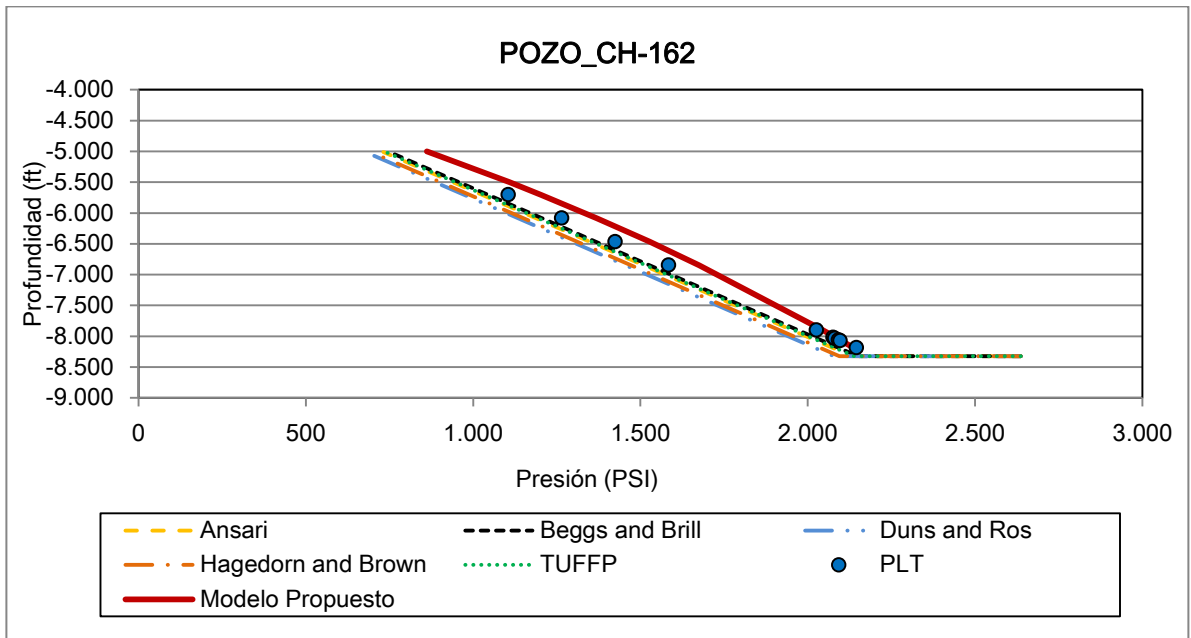
Fuente: Autor

Figura 6.9 Resultados evaluación Pozo CH-154



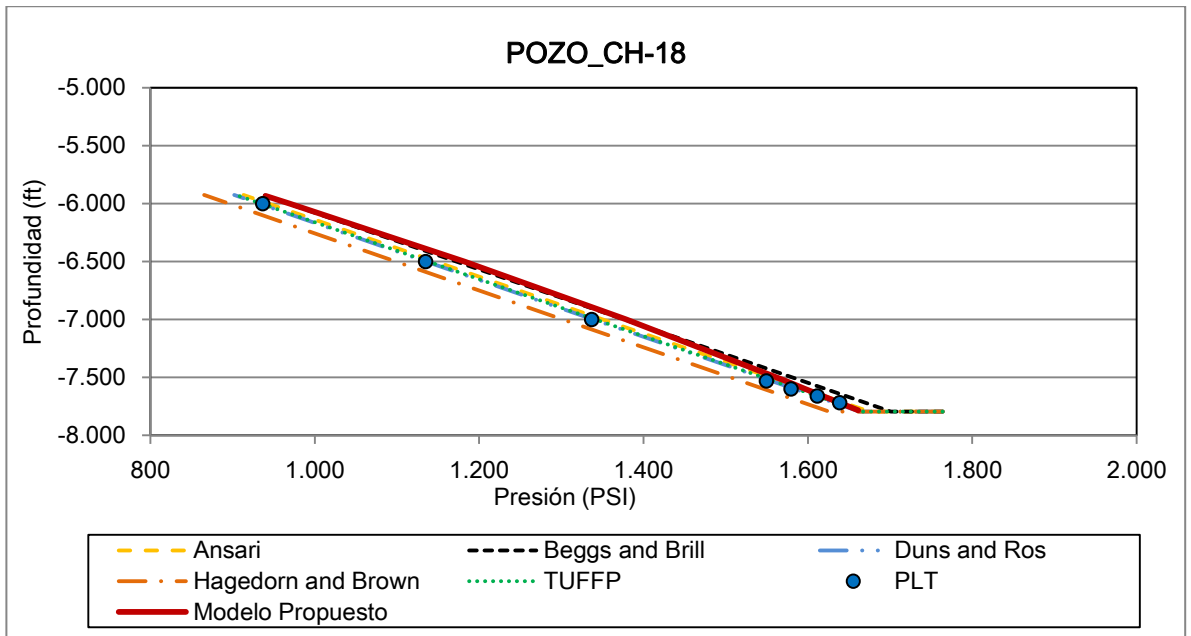
Fuente: Autor

Figura 6.10 Resultados evaluación Pozo CH-162



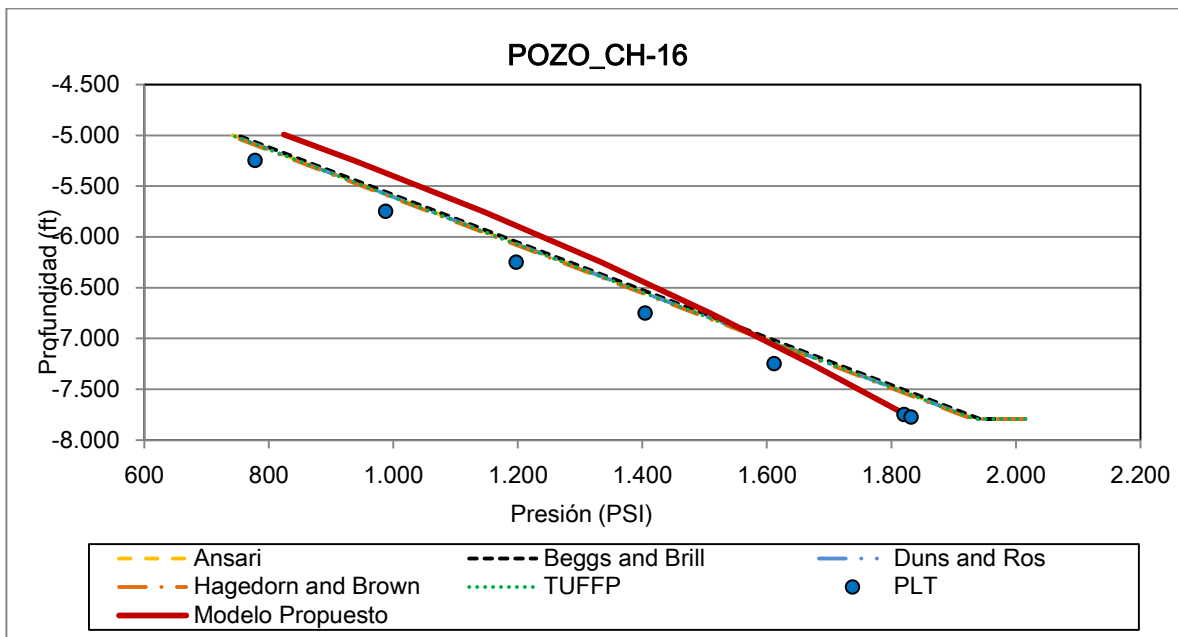
Fuente: Autor

Figura 6.11 Resultados evaluación Pozo CH-18



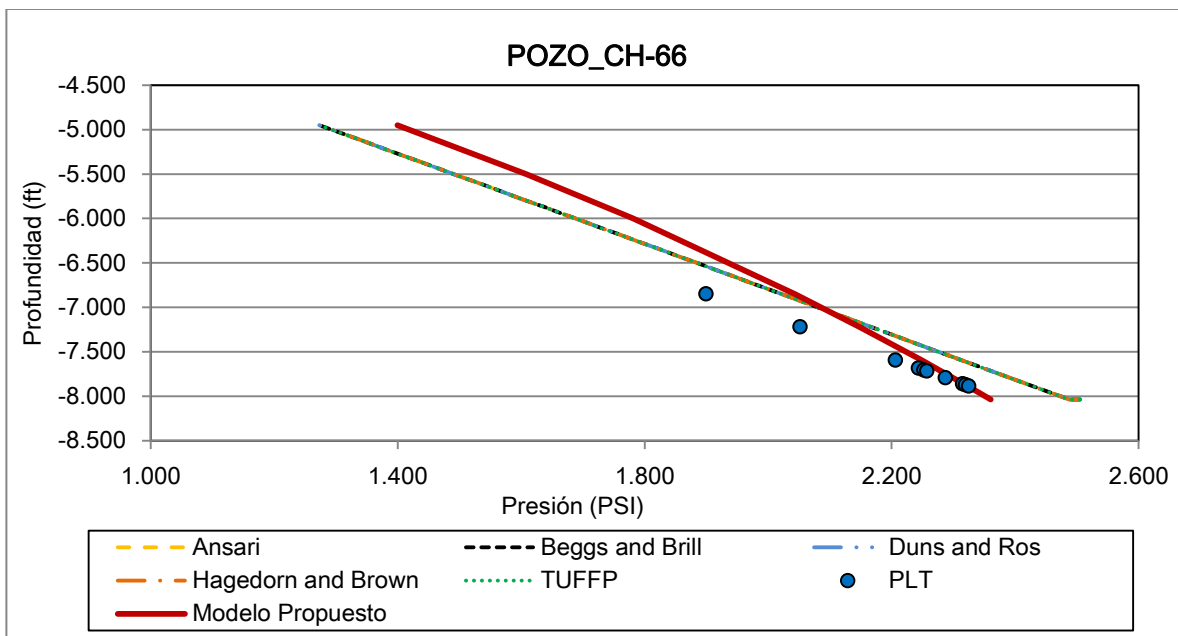
Fuente: Autor

Figura 6.12 Resultados evaluación Pozo CH-16



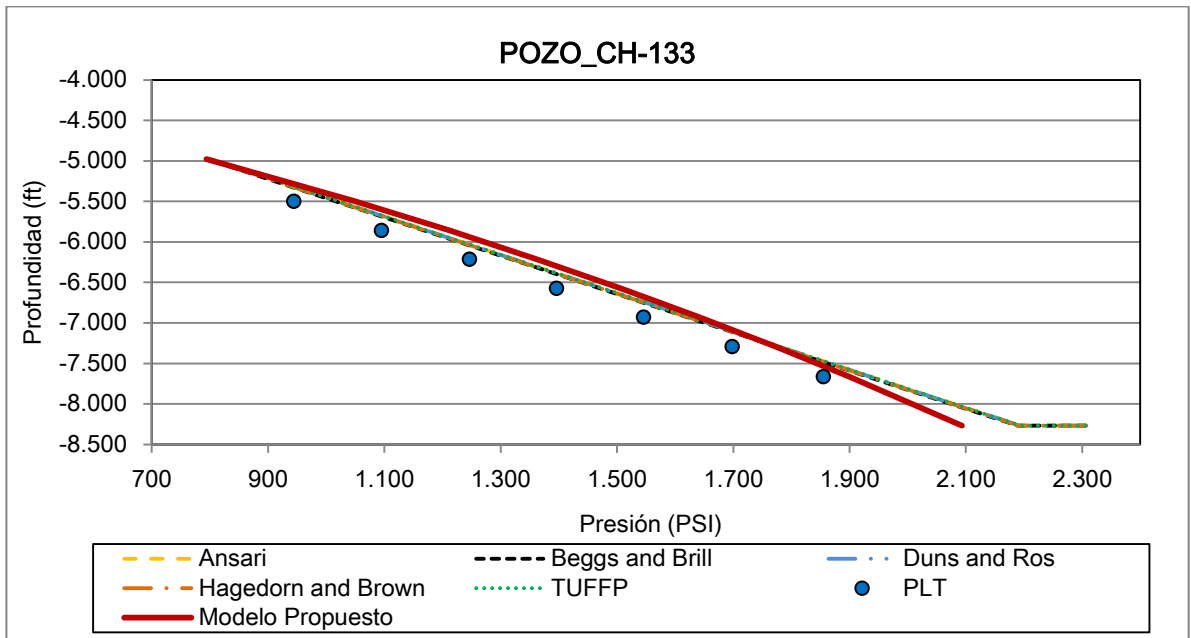
Fuente: Autor

Figura 6.13 Resultados evaluación Pozo CH-66



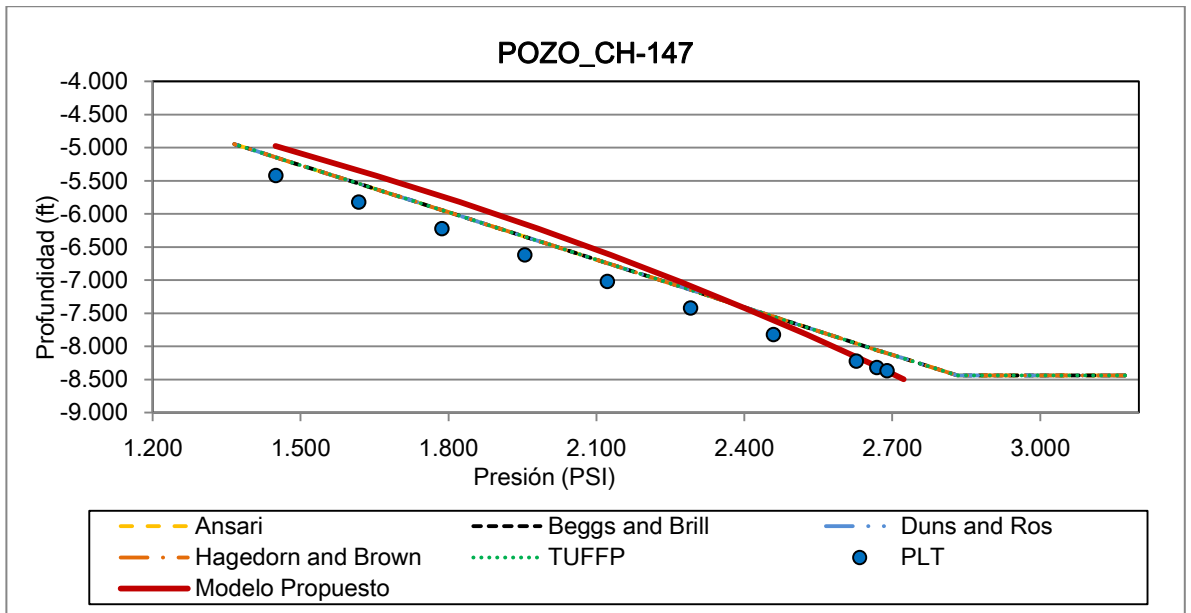
Fuente: Autor

Figura 6.14 Resultados evaluación Pozo CH-133



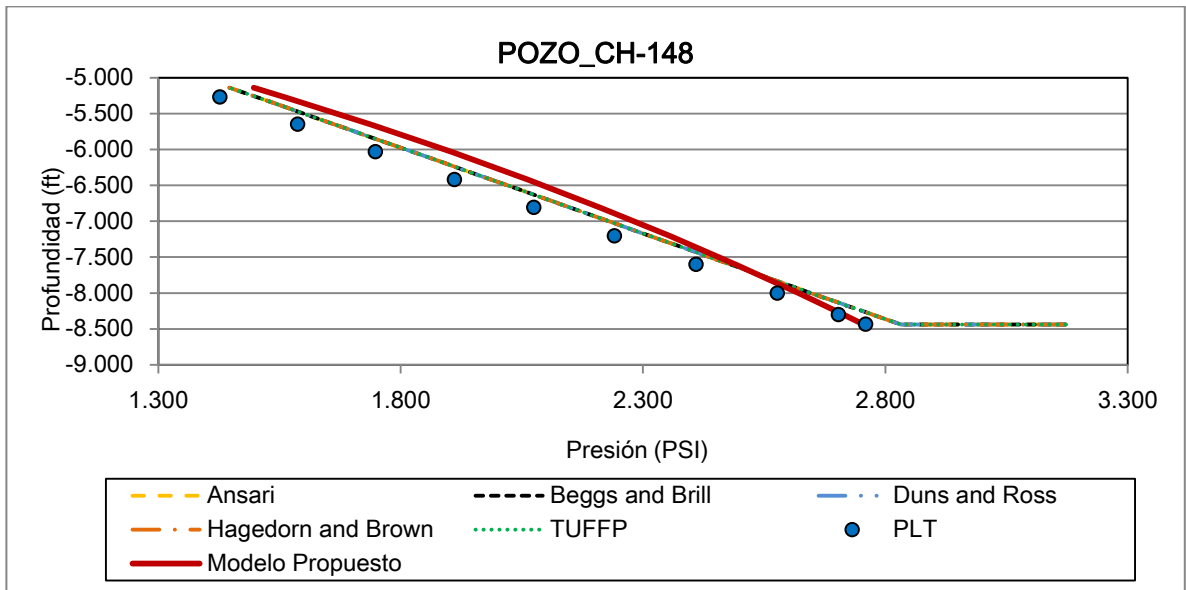
Fuente: Autor

Figura 6.15 Resultados evaluación Pozo CH-147



Fuente: Autor

Figura 6.16 Resultados evaluación Pozo CH-148



Fuente: Autor

6.3 Análisis estadístico de resultados

La desviación de los valores comparados para los distintos pozos se muestra a partir del análisis del error utilizando los siguientes parámetros estadísticos:

- Error relativo promedio (Er)

Este parámetro mide la desviación relativa respecto los datos experimentales:

$$Er = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{experimental_i} - p_{calculada_i}}{p_{experimental_i}} \right) * 100 \quad (\text{Ec. 109})$$

- Error Relativo Absoluto

Este parámetro considera el valor absoluto de la desviación relativa respecto los datos experimentales:

$$Ea = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_{experimental_i} - p_{calculada_i}}{p_{experimental_i}} \right| * 100 \quad (\text{Ec. 110})$$

- Desviación Estándar

Es una medida de la dispersión de los datos calculados respecto al valor experimental:

$$DE = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{experimental_i} - p_{calculada_i}}{p_{experimental_i}} \right)^2} \quad (\text{Ec. 111})$$

- Coeficiente de determinación

-

Es un parámetro simple que muestra el grado de ajuste de los datos calculados y experimentales en cuanto se aproxima el valor a 1.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (p_{experimental_i} - p_{calculada_i})^2}{\sum_{i=1}^n (p_{calculada_i} - \bar{p})^2} \quad (\text{Ec. 112})$$

Donde \bar{p} es el valor de la media de los datos experimentales.

Los valores de estos parámetros nos permiten definir el comportamiento de los modelos evaluados:

Tabla 5. Criterios de evaluación de desempeño de correlaciones para el modelamiento de la presión

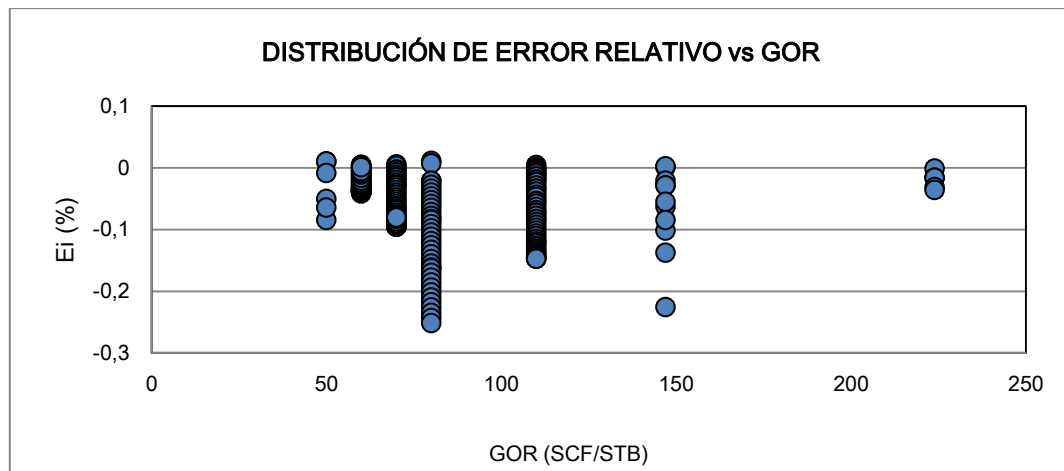
CORRELACIÓN	<i>Er</i>	<i>Ea</i>	<i>DE</i>	<i>R</i> ²
ANSARI	-2.907	5.420	0.05978	0.94814
BEGGS AND BRILL	-2.392	6.411	0.07088	0.99979
DUNS AND ROS	-1.953	6.131	0.06798	0.94002
HAGEDORN AND BROWN	-1.171	6.809	0.07559	0.99977
TUFFP	-2.993	5.147	0.05668	0.94989
MODELO PROPUESTO	-5.273	5.410	0.06986	0.99985

Fuente: Autor

La variación del modelo propuesto se relaciona con las condiciones de operación de los pozos de la siguiente forma:

- Respecto al GOR la variación del error relativo tiene una mayor densidad en los valores negativos, lo cual define que debido a los valores de GOR que se presentan se da una sobreestimación de los valores de presión con el modelo propuesto, de acuerdo a los valores registrados del PLT.

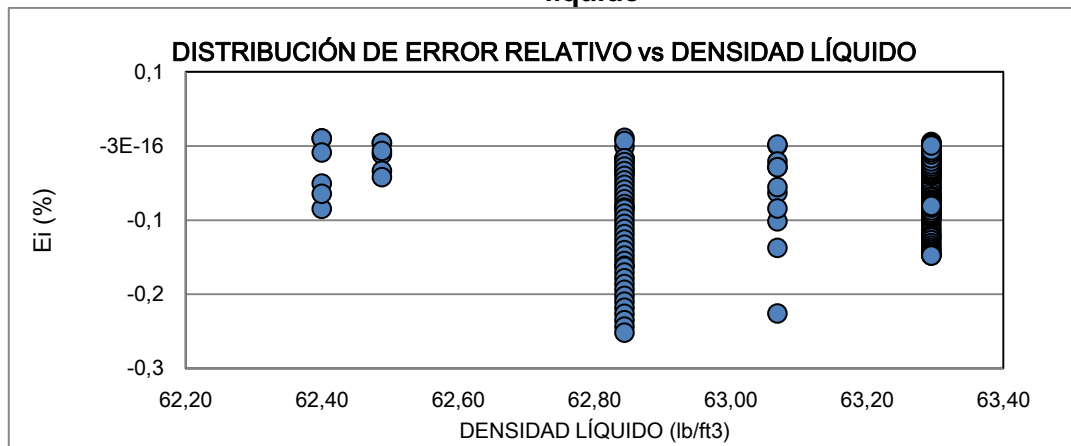
Figura 6.17 Distribución de error relativo en función del GOR



Fuente: Autor

Esta misma tendencia se ve en la distribución de error en función de la densidad del líquido, como se ve en la figura 6.18.

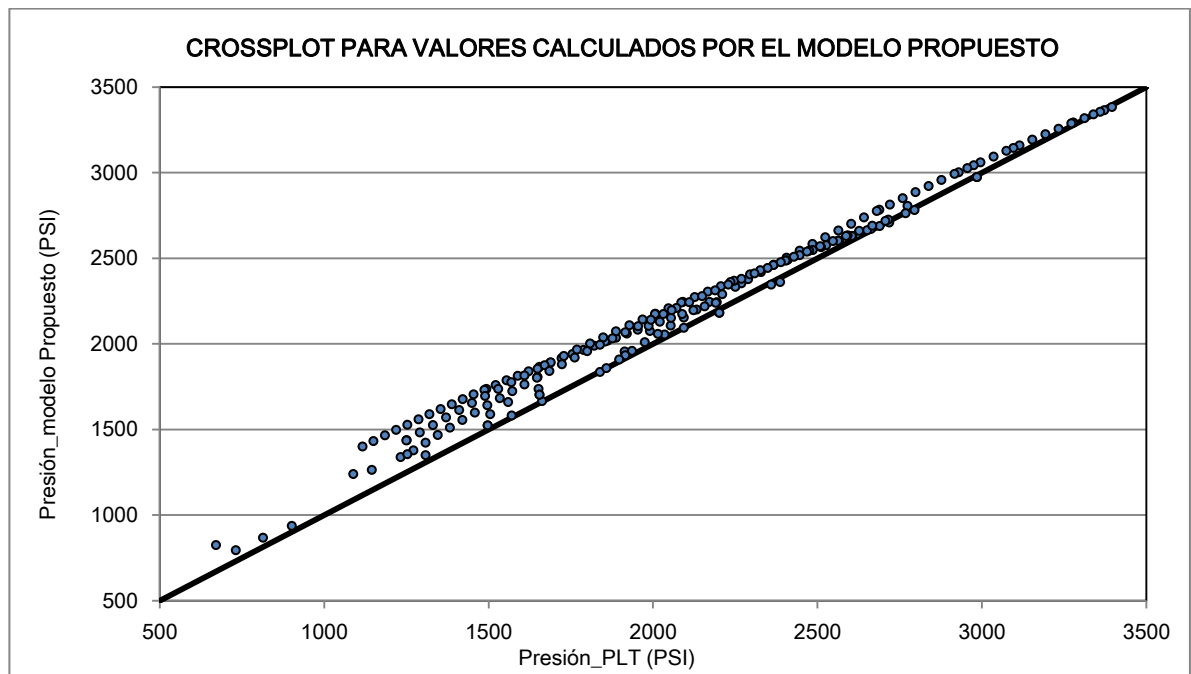
Figura 6.18 Distribución de error relativo en función de la densidad del líquido



Fuente: Autor

La sobreestimación de los valores de presión por el modelo propuesto se ve con mayor claridad en la tendencia que muestra la figura 6.19.

Figura 6.19 Crossplot para valores de presión calculados por el modelo propuesto



Fuente: Autor

La distribución de valores corresponde a un valor promedio de 6.2%, lo cual define que el crudo de la formación T2, no soporta la cantidad de gas que define el modelo propuesto, por lo cual, el valor de la presión cae más que el valor propuesto.

El análisis de sensibilidad del modelo propuesto, con base en los datos de los pozos evaluados, permite definir los rangos de implementación que muestra la Tabla 6.

Tabla 6. Rangos de implementación de variables en el modelo

Propiedad	Valor	Unidad
Fracción molar de gas	0.1 - 0.7	
Densidad de fluido	8.5 - 10	°API
Diámetros de tubería	3.5 - 9 5/8	in
BSW	0-10	%
Indice de comportamiento de flujo	< 1	
Velocidad de deslizamiento	0	ft /s
Velocidad de deformación	< 500	s-1

Fuente: Autor

Los rangos de aplicación establecen que el modelo deberá reevaluarse para la definición del gradiente de presión que se produce al nivel de la bomba. El efecto sobre la reología debido a las altas velocidades de deformación producidas y el cambio de geometría del sistema, demanda un análisis numérico de una unidad de análisis diferente a la propuesta para esta investigación.

CONCLUSIONES

- El análisis de la reología de fluidos permitió establecer que los fluidos tipo Foamy Oil se comportan como no-newtonianos y puede usarse la ley de potencia, utilizados para caracterizar los fluidos tipo pseudoelásticos, modificando el índice de comportamiento de flujo (n) en función del contenido de gas. La solución a la situación que se presenta cuando la velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$) tiende a 0, ocasionando que el valor de la viscosidad aparente tienda a infinito, lo cual es físicamente imposible, se consigue al asumir un valor límite inferior de contenido de gas. Este modelo funciona para contenidos de gas menores a 74%, en donde el comportamiento es de tipo pseudoplástico respecto a la velocidad del líquido, y para contenidos de gas muy bajos el comportamiento es de tipo pseudoplástico respecto a la velocidad del gas.
- El fenómeno de nucleación se analizó a partir del balance de fuerzas que actúan sobre una burbuja de gas de geometría esférica en un medio líquido. El balance define la velocidad de ascenso de las burbujas de gas y mediante la velocidad relativa respecto a la velocidad del líquido se calculó la separación de las burbujas de un diámetro de burbujas de gas determinado. La derivación de la expresión de esta velocidad se dio a partir del desarrollo de la segunda ley del movimiento de Newton en donde la nucleación se presenta cuando la burbuja se acelera y se asume que se separa cuando la parte superior ha cubierto una distancia igual que el radio de las fuerzas balanceadas de la burbuja.
- El diámetro de separación se define mediante una función de distribución de probabilidad cuyo límite superior es el diámetro de la burbuja de Taylor, el cual corresponde a un patrón de flujo tipo slug. Este diámetro corresponde a un balance sobre la burbuja en donde las fuerzas de ascenso predominan en la dirección de flujo, con lo cual se obtiene una

solución del valor del diámetro de esta burbuja a partir de una función cúbica.

- Se definió una función para la distribución del tamaño y la cantidad de las burbujas de tipo Weibul, en la cual el parámetro de forma (α) está en función de los diámetros de burbuja cuyo balance permite establecer condiciones de equilibrio dentro de la fase líquida y el parámetro de escala de la distribución (β) corresponde al diámetro de la burbuja de Taylor. Esta función actúa como factor de corrección de la modificación de la solubilidad de gas.
- El ajuste de las propiedades PVT del fluido tuvo en cuenta la definición de una pseudopresión de burbuja para describir la condición particular del fluido de mantener el gas en solución. Este valor se obtuvo a partir de la modificación de las constantes de equilibrio, siguiendo a Kraus et al., utilizando el software Hysys para encontrar, por medio de prueba y error, los valores de los parámetros Kvn.
- La ecuación de flujo en tubería utilizada para el desarrollo de esta investigación se derivó a partir de un balance sobre una unidad de análisis, en donde la relación entre las fases se define a partir de la Relación de Expansión Volumétrica (ε). Este concepto permite incluir la función de distribución de tamaño y cantidad de burbujas de gas obtenida en esta investigación.
- La comparación del gradiente de presión determinado mediante la ecuación de flujo propuesta y otras correlaciones frente a datos experimentales de gradientes dinámicos tomados en una muestra de 9 pozos del campo Chichimene, muestra que la presión obtenida mediante

la implementación del modelo propuesto tiene un valor medio de sobreestimación del 6.2%.

- El análisis estadístico realizado corresponde a la sección de la tubería comprendida entre la cara de la formación T2 y la profundidad del intake de la bomba. La sobreestimación de los valores permite aseverar que este crudo tiene un comportamiento de tipo convencional, y el gas que permanece en solución a condiciones de cabeza de pozo puede analizarse atendiendo la precipitación de asfaltenos en este punto, los cuales actuarían como un surfactante.

RECOMENDACIONES

- Conviene revisar si el comportamiento reológico de este tipo de fluidos se afecta por la geometría del sistema, ya que estudios previos señalan que puede presentarse un comportamiento de tipo Newtoniano. El diseño experimental deberá validar además una función de distribución del diámetro y cantidad del tamaño de las burbujas con la cual se podría ajustar tanto el factor de escala como de distribución.
- Se recomienda el desarrollo de una solución particular para la dinámica propuesta por el balance de las burbujas del sistema en el software ANSYS-CFX, con el cual se tendrá la posibilidad de obtener la dinámica de flujo de un patrón de tipo burbuja en la que se incluya una función de solubilidad del gas en el líquido y el efecto de la temperatura.
- El modelo propuesto considera espumas de calidades bajas a medias (< 74%), por lo cual se recomienda el análisis de calidades de mayor valor para validar el límite de aplicabilidad del modelo a partir del tamaño de la burbuja de Taylor.
- Se recomienda el análisis de otras geometrías de burbuja de gas ya que la geometría esférica puede no ser representativa para altos valores de solubilidad del gas.
- Se recomienda revisar la información suministrada por los gradientes dinámicos, ya que el gradiente definido por todos corresponde a la misma función lineal que quizá no corresponda a la variación de propiedades de los pozos utilizados para el análisis de datos presentado en esta investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Abou-el-hassan, M.E. Correlations for bubble rise velocity correlation, Chemical Engineer Communications, Vol. 2, Pág. 243, 1983.

Akagawa, K., and Sakaguchi, T., "Fluctuation in Void Ratio in Two-Phase Flow", Bulletin, JSME, Vol. 9, p. 104-120, 1966.

ANSYS® CFX-Solver. Release 10.0: Theory, 2010.

Barnes, H.A., Hutton, J.F. y Walters K., An Introduction to Rheology, Elsevier, 1989.

Bird, R.B. and Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N.: "Transport Phenomena", John Wiley and Sons, Inc, NYC, 1960.

Blauer, R.E. and Holcomb, D.L.: "Foam Fracturing Shows Success in Gas, Oil Formations," Oil and GasJ. (Aug. 1975) 57-60.

Blauer, R.E., Mitchell, B.J. and Kohlhaas, C.A.: "Determination of Laminar, Turbulent, and Transitional Foam Flow Losses in Pipes", SPE 4885 presented at the 44th Annual California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, San Francisco, California, April 4-5, 1974.

Bonilla, L.F. and Shah, S.N.: "Experimental Investigation on the Rheology of Foams", SPE 59752 presented at the SPE/CERI Gas Technology Symposium held in Calgary, Alberta Canada, April 3-5, 2000.

Brennen Christopher, Fundamentals of Multiphase Flows, California Institute of Technology, Cambridge University Press, 2005

Brennen, C.E., Fundamentals of Multiphase Flows, Caps. 1-5, California Institute of Technology, Pasadena California, Cambridge University Press, 2005.

Briceño, M.I. and Joseph, D.D.: "Self-Lubricated Transportation of Aqueous Foams in Horizontal Conduits", International Journal of Multiphase Flow, 29, p. 1817-1831, May 2003.

Calvert, J. R. and K. Nezhati, "A Rheological model for a liquid-gas foam," Int. J. Heat Fluid Flow 7, 164-168 (1986).

Clift, R., Grace, J.R. y Weber, M.E., Bubbles, Drops and Particles, New York. Academic Press, 1978.

David, A. and Marsden, S.S.: "The Rheology of Foam", SPE 2544 presented at the 44th Annual Meeting of the SPE, Denver, CO, September 28, 1969.

David, A. and S. S. Marsden, Jr., "The Rheology of Foam," paper SPE 2544, presented at the SPE Annual Meeting, Denver, September 28-October 1, 1969.

Gaddis E.; Vogelpohl A., Bubble formation in quiescent liquids under constant flow conditions, Chemical Engineer Science, Vol 41, Págs. 97 – 102; 1986.

Gaddis, E. S., and Vogelpohl, A., 1986, "Bubble Formation in Quiescent Liquids under Constant Flow Conditions," Chemical Engineering Science, Vol. 41, No. 1, pp. 97-105.

Gardiner, B.S., Dlugogorski, B.Z. and Jameson, G.J.: "Prediction of Pressure Losses in Pipe Flow of Aqueous Foams", Industrial and Engineering Chemistry Research, 38, p. 1099-1106, May 1999.

Harris, P.C. and Heath, S.J.: "High-Quality Foam Fracturing Fluids", SPE 35600 presented at the SPE Gas Technology Symposium held in Calgary, Alberta, Canada, April 28 – May 1, 1996.

Heller, J. P. and M. S. Kuntamukkula, "Critical Review of the Foam Rheology Literature," Ind. Eng. Chem. Res. 26, 318-325 (1987).

Kam, S. I., Gauglitz, P.A. and Rossen, W.R.: "The Yield Stress of Foamy Sands", Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 202 (1), p. 53-62, 2002.

Kantarci, Nigar; Borak, Fahir; Ulgen, Kutlu; Bubble column reactors Review, Elsevier, Process Biochemistry; Vol. 40; Págs. 2263-2283, 2005.

Kraus, W.P., Mc Caffrey, W.J., Boyd G.W.; Pseudo-Bubble Point Model for Foamy Oils, Paper CIM 93-45 presentado en CIM 44th Annual Technical Conference of the Petroleum Society of CIM, Calgary, Alberta, Mayo 9-12, 1993.

Kraynik, A.M.: "Foam Flows", Annual Revision of Fluid Mechanics, 20, p. 325 –357, 1988.

Kumar, R., A unified approach to bubble and drop formation. Chemical Engineer Science, 1971, Vol. 26, Págs. 177-184.

Kumar, R.A., Unified Approach to bubble and drop formation, Chemical Engineer Science, Vol. 2, Pág. 177-184, 1971.

Mao, Z.S., and Duckler, A.E., "The Motion of Bubbles in Vertical Tubes. A Numerical Simulation for the Shape and Rise Velocity of Taylor Bubbles in

Stagnant and Flowing Liquid”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 91, pp. 132-160, 1990.

Mitchell, B.J.: “Test data Fill Theory gap on Using Foam as a Drilling Fluid”, *Oil and Gas Journal*, p. 96-100, September, 1971.

Morrison Faith A., *Shear Viscosity Measurement in a Capillary Rheometer*, Michigan Technological University Press, 2005.

Princen, H. M.. Rheology of foams and highly concentrated emulsions: I. Elastic Properties and Yield Stress of a Cylindrical Model System”, *Journal of Colloid Interface Science*, Elsevier B.V., Vol 91, Págs. 160-175, 1983.

Raza, S.H. and Marsden, S.S.: “The Streaming Potential and the Rheology of Foam”, *SPE Journal*, Vol. 7, p. 4, 1967.

Rodrigue, D. A general correlation for the Rise Velocity of Single Gas Bubbles, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 82, Pág. 382-386, 2004.

Romero J.D., Fernandez B., Rojas G., Thermodynamic Characterization of a PVT Foamy Oil, SPE 69724, Presentado en 2001 SPE International Thermal Operatios and Heavy Oil Symposium held in Portamar, Margarita Island, Venezuela, 2001.

Shemer, L., and Barnea, D., “Visualization of the Instantaneous Velocity Profiles in Gas-Liquid Slug Flow”, *Phys. Chem. Hydr.*, Vol. 8, No.3, pp. 243-253, 1987.

Sheng, J.J.; Hayes R.E. Maini, B.B; Tortike W.S., A proposed dynamic model for Foamy Oil Properties, SPE 30253, 1995.

Taha Taha y Cui, Z.F., CFD modeling of slug flow inside square capillaries, Chemical Engineering Science, Vol. 61, pp. 665-675, 2006.

Taitel, Y., Barnea, D. and Dukler, A.E., "Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-liquid Flow in Vertical Tubes", AIChE. J., Vol. 26, pp. 345-354, 1980.

Valko, P., Economides, M.J., Baumgarthner, S.A. and McElfresh, P.M.: "The Rheological Properties of Carbon Dioxide and Nitrogen Foams", SPE 23778 presented at the SPE International Symposium on Formation Damage Control held in Lafayette, Louisiana, February 25-27, 1992.

Versteeg, H.K. y Malalasekera, W., An Introduction to computational fluids dynamics. The finite volumen method, England: Longman Scientific & Technical, P'ag. 200-257, 1995.

Wallis, G.B., "One Dimensional Two-phase Flow", Cap. 9, McGraw Hill, 1969.

ANEXO A. Desarrollo de la ecuación de continuidad que permite el planteamiento de una solución particular al modelamiento de flujo de un fluido espumoso

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho N)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho N u) = \nabla \cdot (\Gamma^N \nabla(N)) + S^N \quad (\text{Ec. 25})$$

Se integra sobre un elemento de control, un volumen de la geometría de flujo, V , definiendo cada uno de los términos a partir de integrales de volumen y de superficie:

$$\frac{d}{dV} \int_V \rho N dV + \int_S \rho u N dn_j = \int_S \left(\Gamma^N \frac{\partial N}{\partial x_j} \right) dn_j + \int_V S^N dV$$

En donde n_j es el componente en la dirección j , que apunta hacia la dirección del flujo en la tubería.

Esta ecuación tiene la siguiente forma discretizada:

$$V \left(\rho^o \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \sum_{pi} \dot{m}_{pi} N_{pi} = \sum_{pi} \left(\Gamma^N \frac{\partial N}{\partial x_j} \Delta n_j \right)_{pi} + S^N V$$

En donde el superíndice o hace referencia al valor de la densidad en el instante anterior. El flujo másico discreto a través de la superficie del volumen de control, \dot{m}_{pi} , se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{m}_{pi} = (\rho u_j \Delta n_j)_{pi}$$

La discretización completa de la ecuación se da al aproximar las derivadas respecto al tiempo y los gradientes. Los gradientes se aproximan mediante

funciones de forma, con las cuales se transforman las coordenadas globales a coordenadas del elemento de control.

La transformación se da por:

$$x_j(\delta, \varphi, \chi) = \sum_{i=1}^n N_i(\delta, \varphi, \chi) x_{ji}$$

De modo que el gradiente de N en la dirección de flujo, j , se puede escribir como:

$$\left. \frac{\partial N}{\partial x_j} \right|_{p_i} = \sum_n \left. \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \right|_{p_i} N_n$$

Esta formulación discreta se define para cada uno de los elementos en que se divide la geometría de flujo, obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas que requiere de un software para su solución.

El desarrollo de este modelo en el software ANSYS CFX-Solver (2010) del movimiento del gas como fase dispersa en el líquido, tiene la siguiente formulación:

La ecuación de conservación del momentum de la fase líquida:

$$\frac{\partial(r_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_l (\rho_l u_l) \cdot u_l) = -r_l \nabla p_l + \nabla \cdot (r_l \mu_l (\nabla u_l + \nabla u_l^T)) + S_l + M_l$$

El término S_l se asume en Ansys como la acción de la fuerza de flotación debido a la diferencia de densidades y la gravedad.

Al considerar que la tensión superficial entre las fases es constante, la fuerza de esta tensión se modela como:

$$f_{lg} = -\sigma_{lg} \kappa_{lg} n_{lg}$$

Donde κ_{lg} es la curvatura de la interfase.

El efecto de la fuerza de arrastre en la transferencia de momentum entre fases, se expresa de la siguiente forma:

$$M_D = \frac{1}{2} C_D \rho_l A_p |u_g - u_l| (u_g - u_l)$$

Donde C_D es el coeficiente de arrastre y A_p es el área proyectada por el cuerpo, en la dirección perpendicular al flujo.

Asumiendo un comportamiento incompresible y propiedades constantes, la ecuación de la fase líquida se escribe como:

$$\rho_l \frac{\partial(r_l u_l)}{\partial t} + \rho_l \nabla \cdot (r_l u_l \cdot u_l) = -r_l \nabla p_l + \mu_l \nabla \cdot (r_l (\nabla u_l + \nabla u_l^T)) + (\rho_l - \rho_g)g - \sigma(\nabla \cdot n_{lg})n_{lg} \delta_{lg} + \frac{1}{2} C_D \rho_l A_p |u_g - u_l| (u_g - u_l)$$

La ecuación para el gas sólo varía en términos del sentido de acción de las fuerzas, que poseen el mismo valor:

$$\rho_g \frac{\partial(r_g u_g)}{\partial t} + \rho_g \nabla \cdot (r_g u_g \cdot u_g) = -r_g \nabla p_g + \mu_g \nabla \cdot (r_g (\nabla u_g + \nabla u_g^T)) - \sigma(\nabla \cdot n_{gl})n_{gl} \delta_{gl} + \frac{1}{2} C_D \rho_l A_p |u_g - u_l| (u_l - u_l)$$

La ecuación de la conservación de la masa para la fase líquida se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(r_l \rho_l)}{\partial t} + \rho_l \nabla \cdot (r_l \rho_l u_l) = S_{Ml}$$

Si se considera que el líquido es incompresible, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(r_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_l u_l) = 0$$

Para la fase gaseosa la ecuación tiene una forma análoga:

$$\frac{\partial(r_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_g u_g) = 0$$

La solución de estas ecuaciones para cada fase debe considerar una de conservación de momentum para cada dirección y de conservación de masa, con las cuales se resuelven las incógnitas del sistema: los componentes de velocidad y la presión.

La parte del problema que queda por resolver, corresponde a la interfase gas-líquido, la cual representa una fracción volumétrica diferente a la unidad que se asume en el caso del volumen de control de la ecuación anterior, lo cual se define a partir de la condición de que el volumen de control en la interfase debe sumar la unidad.

Una suposición similar debe hacerse, de acuerdo al manual de la herramienta Ansys, respecto a la condición de frontera de cada fase en términos de presión, ya que se asume que en la interfase tanto el gas como el líquido comparten el mismo valor de presión.

Las condiciones de frontera se definen respecto a la pared de la tubería en función del deslizamiento entre la fase líquida y la pared, y para el caso de solución de un elemento del sistema que tenga en cuenta una caída de presión respecto a otro elemento, la condición debe asumir que $p_l(x, y, l) \ll 0$, lo cual aplica para cada elemento del sistema de flujo a lo largo de una tubería hasta que el volumen de control alcanza el límite superior.

Las condiciones iniciales deben considerar que $u_{l,g}(x, y, z, 0) = f(p)$, ya que la velocidad inicial del sistema está definida por la función de presión, que puede considerarse como una fuente definida en la ecuación de continuidad como S^N .

ANEXO B. Solución del balance para el modelo propuesto en la presente investigación

Las ecuaciones para flujo en tubería utilizadas para el desarrollo de este proyecto, se derivan de la forma presentada a continuación.

El balance general en el elemento de análisis es el siguiente:

$$m_{salida} - m_{entrada} = \sum F - m_{acumulada}$$

Si consideramos el sistema en estado estable, la acumulación es igual a cero:

$$m_{acumulada} = 0$$

Si consideramos que en cada momento $\dot{m} = \rho Av^2$, el balance entre el elemento inicial y final queda:

$$m_{salida} - m_{entrada} = \rho_2 A_2 V_2^2 - \rho_1 A_1 V_1^2 = \sum F$$

La geometría del elemento de análisis se define de la siguiente forma:

$$A_1 = \pi r^2 \text{ y } A_2 = 2\pi r dl$$

La fuerza de la gravedad sobre el fluido, considerando la espuma como una unidad de flujo, se define de la siguiente forma:

$$w_f = \rho_f g$$

Ahora bien, considerando las fases presentes en el sistema, el balance se expresa de la siguiente forma:

$$\rho_2 A_2 V_2^2 - \rho_1 A_1 V_1^2 = PA_2 - PA_1 - dPA_1 - \tau A_2 + \rho_f A_1 dl g$$

Expresando los límites del elemento en términos del diferencial:

$$(\rho + d\rho)\pi r^2(v + dv)^2 - \rho\pi^2 v^2 = -\pi^2 dp - 2\pi r \tau dl + \rho_f \pi r^2 dl g$$

Y simplificando por π y desarrollando los términos:

$$r(\rho + d\rho)(v^2 + 2vdv + dv^2) - r\rho v^2 = -rdp - 2\tau dl + \rho_f r dl g$$

Simplificando:

$$2r\rho v dv + r d\rho v^2 + 2r d\rho v dv = -r dp - 2\tau dl + \rho_f r dl g$$

Dividiendo por $r dl$

$$2r\rho v dv + r v^2 d\rho = -r \frac{dp}{dl} - 2\tau + \rho_f r g$$

De modo que el esfuerzo puede expresarse de la siguiente forma:

$$\tau = -\frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dl} + \frac{d(\rho v^2)}{dl} + w_f \right)$$

Considerando la fuerza representa por el peso de la unidad de análisis:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dl} + w_f r$$

Ahora bien, de acuerdo a la evaluación de la reología para los crudos espumosos, podemos utilizar la ley de potencia para determinar la relación entre el esfuerzo y la velocidad de deformación del sistema incluyendo al final la relación de expansión volumétrica presentada por Valko et al. (1992):

$$\tau = \varepsilon K \left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} \right)^n$$

Reemplazado esta ley en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\varepsilon K \left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} \right)^n = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dl} + w_f r$$

Resolviendo para dv :

$$\frac{dv}{dr} = -\varepsilon \left(\frac{r}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} = \varepsilon r^{1/n} \left(\frac{1}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)$$

Integrando:

$$v(r) = -\frac{n}{n+1} \varepsilon \left(\frac{1}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} r^{\frac{1+n}{n}} + C$$

Considerando la velocidad en $r=R$ se obtiene el valor de la constante de integración:

$$C = \frac{n}{n+1} \varepsilon \left(\frac{1}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} R^{\frac{1+n}{n}}$$

De forma que la velocidad a cualquier distancia es la siguiente:

$$v(r) = \frac{n}{n+1} \left(R^{\frac{1+n}{n}} - r^{\frac{1+n}{n}} \right) \left(\frac{\varepsilon^{n-1}}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n}$$

$$v(r) = \frac{n}{n+1} R^{\frac{1+n}{n}} \left(\frac{\varepsilon^{n-1}}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right)$$

El flujo volumétrico para este elemento esta dado por:

$$dQ = \int_0^R 2\pi v(r) r dr$$

Resolviendo para nuestra unidad de análisis se obtiene:

$$Q = 2\pi \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^R r^2 \frac{dv(r) dr}{dr} \right)$$

$$Q = \pi \left(R^2 + \int_0^R r^2 r^{1/n} \right) \left(\frac{\varepsilon^{n-1}}{2\varepsilon K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} dr$$

$$Q = \pi \left(R^2 + \int_0^R r^{2n+1/n} \right) \left(\frac{\varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} dr$$

Integrando se obtiene:

$$Q = \pi \left[R^2 \frac{n}{3n+1} \left(\frac{\varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} r^{3n+1/n} \right]_0^R$$

$$Q = \pi \left(R^2 \frac{n}{3n+1} \left(\frac{\varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right)^{1/n} R^2 R^{\frac{1+n}{n}} \right)$$

$$Q = \pi R^2 \left(\frac{n}{3n+1} \left(\frac{R^{1+n} \varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right) \right)^{1/n}$$

Considerando que el flujo se da como la relación de la velocidad por unidad de área e igualando términos se obtiene:

$$\pi R^2 v = \pi R^2 \left(\frac{n}{3n+1} \left(\frac{R^{1+n} \varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right) \right)^{1/n}$$

Con lo cual la velocidad se expresa como:

$$v = \left(\frac{n}{3n+1} \left(\frac{R^{1+n} \varepsilon^{n-2}}{2K} \left(-\frac{dp}{dl} + w_f \right) \right) \right)^{1/n}$$

De modo que la ecuación del gradiente queda de la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dl} = w_f - 2K \left(\frac{v}{R^{1+1/n}} \frac{3n+1}{n} \varepsilon^{\frac{1}{n}-1} \right)^n$$

ANEXO C. Balance de fuerzas a partir de la segunda ley de Newton para determinar la velocidad de flujo

la segunda ley del movimiento de Newton de la siguiente forma:

$$m \frac{dv'}{dt} + v' \frac{dm}{dt} = \left[(V_E + Q_t) \rho_l g - 6\pi\mu r(v + v_e) - \frac{Q_t^2 \frac{11}{16} \rho_l}{12\pi \left[3 \frac{(V_E + Q_t)}{4\pi} \right]^{2/3}} - \pi D \gamma \cos\theta \right]$$

Donde $v' = v + \left(\frac{dr}{dt}\right)$

Expresando la segunda ley en términos de la velocidad del centro de la burbuja y simplificando la ecuación por $\frac{11}{16} \rho_l (V_E + Q_t)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dv}{dt} + A \left(\frac{v}{T}\right) = B - GT^{-4/3} - ET^{-5/3} - CT^{-1}$$

En donde:

$$A = 1 + \frac{6\pi(3/4\pi)^{0.33} 1.25V_E^{0.33} \mu}{Q(11/16\rho_l)}$$

$$B = \frac{16g}{11Q}$$

$$C = \frac{16\pi D \gamma \cos\theta}{11Q\rho_l}$$

$$E = \frac{Q}{12\pi(3/4\pi)^{0.66}}$$

$$G = \frac{16\pi D \gamma \cos\theta}{11Q\rho_l}$$

Se obtiene entonces que el radio de una burbuja que se encuentra en estado de equilibrio en un medio líquido es el siguiente:

$$r_E = \frac{B}{2Q(A+1)}(V_F^2 - V_E^2) - \left(\frac{C}{AQ}\right)(V_F - V_E) - \frac{3G}{2QA^{-1/3}}(V_F^{2/3} - V_E^{2/3})$$

Sin embargo, la limitación de esta correlación es que debe conocerse el ángulo de contacto θ entre las fases, el cual cambia en término del tamaño y la geometría de la burbuja, que en este caso, se asume de forma esférica.

Ahora bien, si se considera que la formación de las burbujas se da a una tasa constante la formulación toma la siguiente forma:

$$V_E(\rho_l - \rho_g)g = \frac{(\rho_g + 11/16\rho_l)}{12\pi(3/4\pi)^{2/3}V_E^{2/3}} \left[3V_t \frac{Q_t}{dt_e} + Q_t^2 \right] + \pi D\gamma \cos\theta$$

$$+ 3\mu \frac{Q_t}{2(3/4\pi)^{0.33}V_E^{1/3}}$$

$\frac{(\rho_g + 11/16\rho_l)}{12\pi(3/4\pi)^{2/3}V_t^{2/3}} \left[3V_E \frac{Q_t}{dt_e} + Q_t^2 \right]$ es la fuerza de expansión $\frac{dMv_e}{dt_e}$ cuya sustitución en la ecuación de equilibrio representa la ecuación general.

La velocidad del centro de la burbuja, dada como $v' = v + v_e$, define un balance de fuerzas de la siguiente forma:

$$\frac{d(mv')}{dt} = V_t \Delta\rho g - 6\pi\mu r'v - \pi D\gamma \cos\theta$$

Y substituyendo por v' en la ecuación anterior se tiene:

$$M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} = V_t \Delta\rho g - 6\pi\mu r(v + v_e) - \pi\gamma D \cos\theta - \frac{(\rho_g + \frac{11}{16}\rho_l) \left(3V_t \frac{dQ_t}{dt} + Q_t^2 \right)}{12\pi(3/4\pi)^{2/3}V_t^{2/3}}$$

$$M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} + M \frac{dv_e}{dt} + v_e \frac{dM}{dt} = V_t \Delta\rho g - 6\pi\mu r(v + v_e) - \pi\gamma D \cos\theta$$

Donde $M = V_t \left(\rho_g + \frac{11}{16} \rho_l \right)$ y $\frac{dM}{dt} = Q_t \left(\rho_g + \frac{11}{16} \rho_l \right)$

Y substituyendo por $M \left(\frac{dv_e}{dt} \right) + v_e \left(\frac{dM}{dt} \right)$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt} (Mv') = V_t \Delta \rho g - 6\mu\pi r v' - \pi D \gamma \cos \theta$$

El uso de estas ecuaciones generales demanda expresar la tasa de flujo como una función del tiempo para incluir el cambio de radio de la burbuja

$$V_t \chi \frac{dv}{dt} + Q_t \chi v = r V_t \Delta \rho g - 6\pi\mu(v + v_e) - \pi\gamma d_h \cos \theta - \frac{\chi \left(3V_t \frac{dQ_t}{dt} + Q_t^2 \right)}{12\pi(3/4\pi)^{0.66} V_t^{2/3}}$$

Donde $\chi = \left(\rho_g + \frac{11}{16} \rho_l \right)$

ANEXO D. Derivación de la función que describe el diámetro de la burbuja de Taylor

El diámetro de la burbuja de Taylor definida a partir del balance de fuerzas sobre la burbuja de gas se define mediante la siguiente ecuación cúbica:

$$Ad_{TB}^3 + Bd_{TB}^2 - C = 0$$

Donde

$$A = \frac{\pi}{6}(\rho_l - \rho_g)g$$

$$B = \frac{\pi}{4}\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)$$

$$C = (\rho_g V - \rho_l V_l)a$$

Dividiendo por A:

$$d_h^3 + \frac{B}{A}d_{TB}^2 - \frac{C}{A} = 0$$

Haciendo $J = \frac{B}{A}$ y $K = -\frac{C}{A}$

$$d_{TB}^3 + Jd_h^2 - K = 0$$

Sustituyendo $d_h = Z - \frac{J}{3}$ para eliminar d_{TB}^2 se obtiene:

$$\left(Z - \frac{J}{3}\right)^3 + J\left(Z - \frac{J}{3}\right)^2 + K = 0$$

$$Z^3 - 3Z^2\left(\frac{J}{3}\right) + 3Z\left(\frac{J}{3}\right)^2 - \left(\frac{J}{3}\right)^3 + Z^2J - 2Z\frac{J^2}{3} + \frac{J^3}{9} + K = 0$$

Lo cual simplificando equivale a:

$$Z^3 - Z\frac{J^2}{3} + 2\frac{J^3}{9} + K = 0$$

Ahora, expresando en términos de Z se obtiene:

$$Z^3 + PZ + Q = 0$$

Donde $P = -\frac{J^2}{3}$ y $Q = 2\frac{J^3}{9} + K$

Ahora, haciendo $Z = (U + V)$

$$(U + V)^3 + P(U + V) + Q = 0$$

$$U^3 + 3U^2V + 3UV^2 + V^3 + P(U + V) + Q = 0$$

$$U^3 + V^3 + (3UV + P)(U + V) + Q = 0$$

Esta ecuación se hace cero si:

$$U^3 + V^3 = -Q \quad (1)$$

Ó, $UV = -\frac{P}{3}$ lo cual equivale a $U^3V^3 = -\frac{P^3}{27}$ (2)

Las soluciones de estas dos ecuaciones con sus dos incógnitas son las siguientes:

$$U = \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}$$

$$V = \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}$$

Sustituyendo en Z se obtiene:

$$Z = \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}$$

Cuyo valor nos permite encontrar d_{TB} debido a que $d_{TB} = Z - \frac{J}{3}$.

Las dos soluciones restantes se obtienen dividiendo la ecuación por $Z - Z_1$

Asumiendo que

$$Z_1 = \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}$$

La división debe ser exacta ya que Z_1 es solución de $Z^3 + PZ + Q = 0$

$$\frac{Z^3 + PZ + Q}{Z - Z_1} = Z^2 + Z_1Z + (Z_1^2 + P)$$

$$Z^3 + PZ + Q = (Z - Z_1)(Z^2 + Z_1Z + (Z_1^2 + P))$$

Por lo tanto: $(Z - Z_1)(Z^2 + Z_1Z + (Z_1^2 + P)) = 0$

Si $Z = Z_1$ entonces la ecuación se hace igual a cero, de modo que el primer término se puede omitir y se buscan las soluciones para la ecuación de segundo grado del segundo término:

$$Z^2 + Z_1Z + (Z_1^2 + P) = 0$$

Las soluciones son:

$$Z_2 = -\frac{Z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + \frac{Q}{Z_1}}$$

$$Z_3 = -\frac{Z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + \frac{Q}{Z_1}}$$

De modo que las soluciones de la ecuación son:

$$Z_1 = \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}$$

$$Z_2 = -\frac{Z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + \frac{Q}{Z_1}}$$

$$Z_3 = -\frac{Z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + \frac{Q}{Z_1}}$$

De este modo, las raíces están definidas por el valor de $\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$

Cuyo valor en términos de J es $\frac{J^6}{9} + \frac{J^3K}{9} + \frac{K^2}{4}$

Asumimos que $\frac{J^6}{9} + \frac{J^3K}{9} + \frac{K^2}{4} > 0$, de modo que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias, de modo que la igualdad tiene la siguiente posibilidad de simplificación:

$$\frac{B^3}{9A^2} + \frac{A^2C^2}{B^3} - \frac{C}{9} > 0$$

De modo que la solución es la siguiente:

$$d_{TB} = \left(-\frac{2B^3}{9A^3} + \sqrt{\frac{B^3}{9A^2} + \frac{A^2C^2}{B^3} - \frac{C}{9}} \right)^{1/3} + \left(-\frac{2B^3}{9A^3} - \sqrt{\frac{B^3}{9A^2} + \frac{A^2C^2}{B^3} - \frac{C}{9}} \right)^{1/3}$$

Reemplazando A, B y C se obtiene la solución para el diámetro de burbuja de Taylor:

$$A = \frac{\pi}{6}(\rho_l - \rho_g)g$$

$$B = \frac{\pi}{4} \left(\rho_g W_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2} \right)$$

$$C = (\rho_g V - \rho_l V_l)a$$

$$\begin{aligned}
d_{TB} &= \left(-\frac{3\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3}{4\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^3} \right. \\
&+ \sqrt[1/3]{-\frac{\pi\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3}{12\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2} + \frac{16\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2(\rho_g V - \rho_l V_l)a^2}{9\pi\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3} - \frac{(\rho_g V - \rho_l V_l)a}{9}} \\
&+ \left(-\frac{3\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3}{4\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^3} \right. \\
&- \sqrt[1/3]{-\frac{\pi\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3}{12\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2} + \frac{16\left((\rho_l - \rho_g)g\right)^2(\rho_g V - \rho_l V_l)a^2}{9\pi\left(\rho_g w_g^2 + \Delta\rho - C_D \frac{\rho_l W_L^2}{2}\right)^3} - \frac{(\rho_g V - \rho_l V_l)a}{9}}
\end{aligned}$$