Sobre conjuntos realización de Sucesiones

Jorge Andrés Rojas Gómez

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Matemáticas
Bucaramanga

2013

Sobre conjuntos realización de Sucesiones

Autor

Jorge Andrés Rojas Gómez

Trabajo de grado como requisito

parcial para optar el título de

Matemático

Director

Edilberto José Reyes , M. Sc.

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Matemáticas

Bucaramanga
2013

Agradecimientos

† A mi madre por su apoyo, esmero y cariño incondicional.

† A profesor Edilberto Reyes por sus sugerencias y su acompañamiento en este escrito.

Índice general

Índice de figuras

TITULO: Sobre conjuntos realización de Sucesiones[1]
AUTOR: Jorge Andrés Rojas Gómez[2]

PALABRAS CLAVE: Conjunto de Cantor; series infinitas; conjuntos realización; sucesiones de números reales.

DESCRIPCIÓN

En la teoría de la series infinitas hay dos resultados muy conocidos. El primero afirma que hacer reordenamientos de una serie absolutamente convergente no afecta su valor de convergencia. El segundo afirma que los términos de una serie condicionalmente convergente pueden ser reordenados de manera que la serie o converge a un número real específico o diverge a $\pm\infty$. En esta monografía se considera hacer omisiones de términos en vez de reordenamientos. Más precisamente, se dice que $r \in \mathbb{R}$ es "realizado" por una sucesión real (x_n) si existe una subsucesión de (x_n) finita o infinita cuya suma converge a r. El contenido de esta monografía se basa principalmente en una revisión bibliográfica del artículo [1].

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, se inicia con un breve resumen sobre el teorema de reordenación de Riemann acompañado con algunos resultados importantes para este trabajo. Luego se define formalmente lo que es un conjunto realización de una sucesión real; además se presentan los primeros resultados acerca de estos conjuntos, destacándose dos resultados: el primero es una condición suficiente para garantizar que un conjunto realización es un intervalo; el otro es una condición suficiente para garantizar que un conjunto realización es un conjunto de Cantor.

El tema central del segundo capítulo es un estudio acerca de los tipos de conjuntos realización, en el cual se encuentra que los conjuntos realización o tienen interior vacío o tienen interior denso. El capítulo termina con una sucesión que genera un conjunto realización que puede catalogarse como "misterioso".

El último capítulo se centra en analizar que conjuntos son realizables, es decir, si existe una sucesión que los pueda realizar. Se destaca el hecho de que el conjunto de los racionales es un conjunto realizable, aunque si se considera solamente los racionales no negativos no es realizable. El capítulo termina dando algunos ejemplos de subconjuntos conocidos de los reales que son realizables y otros que no lo son.

[1] Tesis
[2] FACULTAD DE CIENCIAS, MATEMÁTICAS.
DIRECTOR M. Sc. Edilberto José Reyes

TITLE: On achievement sets of Sequences[1]
AUTHOR: Jorge Andrés Rojas Gómez[2]

KEY WORDS: Cantor set; infinite series; achievement sets; sequences of real numbers.

DESCRIPTION

From the theory of infinite series are very well known two results. The first one states that to do rearrangements of terms of an absolutely convergent series have no effect on the sum. The second states that the terms of a condicionally convergent series may be arranged so that the series sums to any specified real number or diverges to $\pm\infty$. On this paper is considered to make omissions of terms instead rearrangements. More precisely, we say $r \in \mathbb{R}$ is "achieved" by a real sequence (x_n) if there is a subsequence of (x_n) whose sum converges to r. The content of this paper is based mainly on a bibliographic review of the article [1].

This paper is organized as follows: In the first chapter, it begins with a brief summary about the Riemann's rearrangement theorem along with some important results for this paper. Then it is formally defined what achievement set of a real sequence means; moreover some firsts results are stated, highlighting two results: the first one gives conditions on the sequence that imply that its achievement set is an interval. The second gives conditions on the sequence that imply that its achievement set is a Cantor set.

The central topic on the second chapter is on the study on the kinds of achievement sets, which leads to find that the achievement sets come either with empty interior, or with dense interior. The chapter ends with the case of a sequence which its achievement set can be tagged as "mysterious".

The last chapter is focused on the analysis of which achievement sets are achievable, in other words, if there exists a sequence which realize every point from the set given. An important fact is that the rationals set is achievable, however if it's only considered the nonnegative rational then it's not achievable. The chapter ends giving some examples of known subsets of the reals that are achievable and some others which aren't.

[1]Thesis
[2]FACULTY OF SCIENCES, MATHEMATICS.
DIRECTOR M. Sc. Edilberto José Reyes

Introducción

Desde los comienzos de la civilización, la humanidad ha estado fascinada por los números, probablemente por el hecho de que el concepto de número está intrínsecamente relacionado con el ejercicio de contar y comparar conjuntos. Los Babilonios, Egipcios, Romanos e Indios son ejemplos de sociedades que son reconocidas actualmente por haber hecho esfuerzos notables con los números que hoy día se llaman números naturales.

Este esfuerzo llevó a estas sociedades a tener un sistema que les permitiera representar estos números de forma simbólica. Aunque el sistema de representación de números dominante actualmente es el sistema de base decimal, desarrollado primariamente por los Indios, esto no quiere decir que se haya ignorado el estudio de otros sistemas de representación.

Un ejemplo de esto son los sistemas de base doce y base dos, el primero defendido por algunos bajo la idea de que, debido a su alta divisibilidad(doce tiene más divisores positivos que diez) se simplifica el calculo de fracciones; el último porque es usado ampliamente en informática y electrónica.

Es plausible afirmar que uno de los motivos por los cuales los matemáticos no han perdido ese gusto por los números, es por el hecho de que, a pesar de toda la información que se sabe acerca de ellos, aún existen algunos de ellos con propiedades aún sin demostrar (la racionalidad o irracionalidad de $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right]$ de Euler, por ejemplo), lo que ha valido el esfuerzo y tesón de muchas personas sobresalientes a lo largo de la historia para intuir, conjeturar, enunciar y demostrar dichas propiedades.

Una de las áreas de estudio en Matemáticas que aún se desarrolla y en la que se han obtenido resultados muy importantes es la teoría general de sucesiones y series.
La teoría general de sucesiones y series infinitas probablemente nace con los problemas planteados hace unos 2400 años, por el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. de C.) quien propuso el problema conocido actualmente como *la paradoja del corredor o paradoja de Aquiles y la tortuga* (ver [3]) la cual se dice que generó una crisis en la matemática antigua, ya que esta afirma (en términos modernos) que:

Un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita.

La afirmación de Zenón en la paradoja del corredor fue resuelta alrededor de 2000 años más tarde con la creación de la teoría de las series infinitas. Los matemáticos vieron posible extender la idea de suma usual de conjuntos finitos de números a conjuntos infinitos, con el objetivo de que la "suma" de un conjunto de infinitos números sea finita. Entre los primeros matemáticos que estudiaron las series se encuentra en un lugar destacado a Leonard Euler(1707–1783) pues notó que las series son un concepto unificador de diversas ramas de la Matemática, como por ejemplo, el análisis matemático y la teoría de números, que no estaban relacionadas en su época.
Un avance significativo se dio cuando Carl Friedrich Gauss(1777–1855) hizo un estudio riguroso de la convergencia de algunas series infinitas. Como complemento al trabajo de Gauss, Augustin Louis Cauchy(1789–1857) introdujo una definición analítica del concepto de límite y expuso los fundamentos de la teoría moderna de convergencia y divergencia.
La teoría general de series infinitas hace una distinción entre las series cuyas sumas parciales tienden a un límite finito y las series cuyas sumas parciales no tienen límite finito. El orden de los términos en una suma finita puede alterarse sin que por ello quede afectado el valor de la suma.Apostol en su libro de cálculo(ver [4]) menciona que en 1833 Cauchy demostró que eso no es siempre cierto para las series. Este hecho puede ocurrir solamente si la serie dada es condicionalmente convergente. Es decir, la reordenación de una serie absolutamente convergente no altera su suma.
En 1854 Bernhard Riemann(1826–1866) demuestra un resultado sorprendente sobre reor-

denación de series

Teorema 0.0.1 (De Reordenación de Riemann). *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de números reales, y sea S un número real. Existe una reordenación $\sum b_n$ de $\sum a_n$ que converge a S.*

El cual es el punto de partida para el estudio de los conjuntos realización, pues en vez de reordenar términos, se permiten hacer omisiones de éstos, lo que es una oportunidad para explorar nuevas propiedades acerca de conjuntos de números y se generan nuevas preguntas e interesantes respuestas. Es así como inicia el trabajo con los conjuntos realización.
En esta tesis se estudia precisamente como representar subconjuntos de reales a partir de una suma finita o infinita de términos de una sucesión adecuada. Esto requiere que se trabaje con sucesiones de números reales en vez de sucesiones de enteros positivos o complejas o de otro conjunto que no sea $\mathbb{R}$, como sugiere Jones en su artículo de la American Mathematical Monthly, titulado *"Achievement Sets of Sequences"*(ver [1]; en el que se define el *"Conjunto Realización"* de una sucesión (denotado como $AS(x_n)$) como el subconjunto de números reales que se obtienen como una suma finita o infinita de términos distintos de la sucesión.
En esta monografía de tipo revisión bibliográfica me propongo estudiar, analizar y explorar el trabajo hecho por Jones con una breve explicación de diversos ejemplos de conjuntos realización, de las propiedades garantizan que un conjunto realización es un intervalo, de qué propiedades necesita una sucesión para tener un conjunto de Cantor como su conjunto realización, convencer al lector de que los conjuntos realización o tienen interior denso o tienen interior vacío y por último se hacen unos comentarios acerca de la existencia de sucesiones reales que sean el conjunto realización de algunos subconjuntos conocidos de $\mathbb{R}$, como por ejemplo, $\mathbb{Q}$.
Como se puede apreciar, los conjuntos realización pueden ser un camino para conseguir importantes aportes en Matemática, y por lo tanto, es indiscutible la importancia de estudiar estos conjuntos de sucesiones.

Capítulo 1

Preliminares

De aquí en adelante se hará la convención de que se trataran sólo con sucesiones cuyos términos son todos distintos de cero. Se denotan las sucesiones como $(x_n) = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ y se define que la subsucesión vacía tiene suma cero, es decir, $\sum_{i\in\emptyset\subset\mathbb{Z}^+} x_i = 0$
En este capítulo se darán condiciones suficientes sobre (x_n) para garantizar que $AS(x_n)$ es un intervalo. Si el conjunto realización de una sucesión real es un intervalo, entonces se dice que es un "realizador alto".

1.1. Teorema de Reordenación de Riemann

En esta sección se dan los detalles de la demostración del teorema de reordenación de Riemann. Con esto, se da un primer paso para el camino que sigue, y como se explicará con detalle en el corolario 1.2.11 se afirma que a partir de una serie condicionalmente convergente, es posible realizar a todo el conjunto $\mathbb{R}$.
El primer resultado que se añade a esta sección es el conocido "criterio del n-ésimo término" de una sucesión convergente, resultado que se usará a lo largo de este trabajo.

Proposición 1.1.1. *Si* $\sum x_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Demostración. Sea $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Entonces $x_n = s_n - s_{n-1}$. Cuando $n \to \infty$, por hipótesis se tiene que $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\lim_{(n-1)\to\infty} s_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con lo que se concluye que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

Se da una definición precisa del concepto de "reordenamiento"

Definición 1.1.2. *Una serie* $\sum y_k$ *en* $\mathbb{R}$ *es un* reordenamiento *de la serie* $\sum x_k$ *si existe una biyección* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que* $y_n = x_{f(n)}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. $\sum x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum |x_n|$ es convergente en $\mathbb{R}$.
Si $\sum x_n$ converge pero $\sum |x_n|$ diverge se dice que $\sum x_n$ es **condicionalmente convergente**.

Proposición 1.1.3. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demostración. Para cada n, sea $b_n = a_n + |a_n|$. Observe que

$$b_n = \begin{cases} 2|a_n|, & \text{si } a_n > 0 \\ 0, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Lo que implica que $\sum b_n$ converge. Por otra parte $a_n = b_n - |a_n|$ luego

$$\sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$$

Por lo tanto, $\sum a_n$ converge(suma de convergentes). $\square$

Teorema 1.1.4 (Teorema de reordenación)**.** *Sea* $\sum x_n$ *una serie absolutamente convergente con suma* a. *Entonces toda reordenación de* $\sum x_n$ *también converge absolutamente y tiene suma* a.

Demostración. Sea $\sum y_n$ un reordenamiento de $\sum x_n$. Entonces existe $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ biyectiva tal que $y_n = x_{f(n)}$. Se probará primero que $\sum y_n$ converge absolutamente.

Sea (t_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum y_n$. Se tiene entonces

$$t_1 = y_1 = x_{f(1)}$$
$$t_2 = y_1 + y_2 = x_{f(1)} + x_{f(2)}$$
$$\vdots$$
$$t_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x_{f(1)} + x_{f(2)} + \cdots + x_{f(n)}$$

Como $|x_{f(1)} + x_{f(2)} + \cdots + x_{f(n)}| \leq |x_{f(1)}| + |x_{f(2)}| + \ldots + |x_{f(n)}|$, claramente existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|x_{f(1)}| + |x_{f(2)}| + \ldots + |x_{f(n)}| \leq \sum_{n=1}^{r} |x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge, entonces del criterio de comparación se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ converge. Se procede a mostrar que $\sum y_n$ tiene suma a.

Considere las siguientes sumas:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = s_n$$
$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = a^*$$

Note que $s_n \longrightarrow a$, $s'_n \longrightarrow a^*$. Así, dado $\epsilon > 0$ dado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq k$ se tiene

$$|s_N - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad |s'_N - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ es sobreyectiva en $\mathbb{Z}^+$ (pues es biyectiva), entonces es posible elegir M tal que

$$\{\ 1, 2, \ldots, N\}\ \subseteq \{\ f(1), f(2), \ldots, f(M)\}$$

y como

$$|t_n - a| = |t_n - s_N + s_N - a| \leq |t_n - s_N| + |s_N - a|$$

para $n \geq M$ se tiene que

$$|t_n - s_N| = \left| \sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} - \sum_{k=1}^{N} x_k \right|$$

Los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ desaparecen en la sustracción, entonces para

$$J = \{\ f(1), f(2), \ldots, f(n)\}\ \setminus \{\ 1, 2, \ldots, N\}$$

Se sigue que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} - \sum_{k=1}^{N} x_k \right| = \left| \sum_{j \in J} x_j \right|$$

Como $\sum x_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left| \sum_{j \in J} x_j \right| \leq \sum_{j \in J} |x_j| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i| = |s'_N - a^*|$$

Con lo que se infiere que $|t_n - s_N| < \frac{\epsilon}{2}$. Así, se tiene que $|t_n - a|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, mas precisamente:

$$|t_n - a| \leq |t_n - s_N| + |s_N - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto t_n converge a a, como se quería mostrar. □

Definición 1.1.5. *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se definen*

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad\qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

(a_n^+) y (a_n^-) son sucesiones que se llaman "de términos positivos" y "de términos negativos" de (a_n) respectivamente.

Note que

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n > 0 \\ 0, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n < 0 \\ 0, & \text{si } a_n > 0 \end{cases}$$

Para las sucesiones (a_n^+) y (a_n^-) se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.1.6. *Si $\sum a_n$ es una serie de números reales, entonces*

- ◇ *Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen.*
- ◇ *Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces las dos series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen y se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

Demostración. Como $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ es divergente.

Note que para $h \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{h} a_n^+ = \sum_{n=1}^{h} \frac{a_n + |a_n|}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{h} a_n + \sum_{n=1}^{h} |a_n|\right)$$

como $\lim_{h\to\infty} \sum_{n=1}^{h} |a_n|$ diverge, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ es divergente. Un proceso análogo muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverge.

Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces las sumas $\sum a_n$, $\sum |a_n|$ son convergentes. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + |a_n|}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

Con lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ es convergente. Un proceso análogo muestra que $\sum a_n^-$ converge. $\square$

Sin más preámbulos, el resultado principal de esta sección:

Teorema 1.1.7 (Teorema de reordenación de Riemann)**.** *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de números reales y sea S un número real. Existe una reordenación de $\sum a_n$ que converge a S.*

Demostración. Como $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen. Se reordena $\sum a_n$ como sigue:
Elegimos $p_1 \in \mathbb{Z}^+$ que sea el menor subíndice de elementos de (a_n^+) de manera que

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ > S$$

Esta suma está bien definida pues $\sum a_n^+$ diverge.
Note que $\sum_{n=1}^{p_1-1} a_n^+ \leq S$.
Ahora, se elige $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ que sea el menor subíndice de elementos de a_n^- de modo que

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^- < S$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n^- \geq S$$

Nuevamente, esto es posible pues $\sum a_n^-$ diverge. Así, observe que

$$\sum_{n=1}^{p_1-1} a_n^+ \leq S \leq \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n^-$$

Se deduce que

- $\sum_{n=1}^{p_1-1} a_n^+$ necesita del término a_{p_1} para ser mayor que S.
- $\sum_{n=1}^{n_1-1} a_n^-$ necesita del término a_{n_1} para que $\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1-1} a_n^-$ sea menor a S.

Repitiendo el proceso para $p_2 > p_1$ y $n_2 > n_1$ elegidos como antes se obtiene

$$\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_n^+ > S$$

Donde
$$\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2-1} a_n^+ \leq S$$
Siguiendo con la otra parte del proceso, añadiendo términos negativos se obtiene
$$\left[\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_n^+\right] + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} a_n^- < S$$
Pero
$$\left[\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_n^+\right] + \sum_{n=n_1+1}^{n_2-1} a_n^- \geq S$$
Se obtiene entonces la desigualdad
$$\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2-1} a_n^+ \leq S \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_1} a_n^-\right) + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_n^+\right] + \sum_{n=n_1+1}^{n_2-1} a_n^-$$

Esta construcción nos da un reordenamiento de términos de la serie original y cada suma parcial de esta reordenación difiere de S a lo sumo en un término de $(a_n^+)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ o en un término de $(a_n^-)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, por lo tanto el límite de las sumas parciales de la reordenada creada converge a S y además como $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, con lo que se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n^+ = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n^- = 0$. $\square$

Observación 1.1.8. *Se hace notar al lector que todo entero positivo n se puede escribir como $n = j^2k$, donde k(excepto 1) es libre de cuadrados.*
Se afirma que todo entero positivo n se puede ver como el producto de primos elevados a alguna potencia entera positiva, en virtud al Teorema Fundamental de la Aritmética. Así, es posible agrupar los primos que puedan ponerse como potencia par y aquellos que no.
Un ejemplo de este hecho es el siguiente: sea $n = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11$. Entonces se puede agrupar ese número de la siguiente manera $n = (2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2) \cdot (2 \cdot 7 \cdot 11) = 1260^2 \cdot 154$.

Definición 1.1.9. *La suma de los inversos de los números enteros libres de cuadra-*

dos(incluyendo al 1) que sean menores o iguales a n es

$$\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\cdots$$

Lema 1.1.10.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}=\infty$$

Demostración. Observe que en el producto

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\right)\cdot\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)$$

Se encuentran sumas de la forma $\sum\left(\frac{1}{j^2k}\right)$ con k libre de cuadrados. Entonces

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\right)\cdot\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)$$

Note que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\right)\cdot\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)\leq\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)\cdot\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)$$

Ahora se utiliza uno de los resultados más conocidos y fascinantes de la Matemática, el llamado "problema de Basilea"(resuelto por Euler), el cual nos da la siguiente cota

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\frac{\pi^2}{6}\cdot\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)$$

Como la serie armónica diverge, del criterio de comparación de series se tiene que $\left(\sum_{k\leq n}^{\star}\frac{1}{k}\right)$ diverge. □

Proposición 1.1.11. *La serie de los recíprocos de los números primos diverge.*

Demostración. Sea p un entero que pertenezca al conjunto de números primos. Se desea probar que

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

Para este objetivo, suponga que la serie converge. Entonces existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_p \frac{1}{p} = A < \infty$$

Considere un entero positivo $n \geq 2$ y sea q el primo más grande menor o igual a n. Como la representación en serie de Taylor centrada en cero de la función exponencial es $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ entonces se tiene la cota $e^x \geq 1 + x$, con lo que se puede ver que

$$e^A > e^{1/2+1/3+1/5+1/7+\cdots+1/q} = \prod_{p\leq n} e^{1/p} \geq \prod_{p\leq n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

Como cada primo en el producto $\prod_{p\leq n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ no está repetido, entonces al hacer los productos note que aparecen sumas de recíprocos de enteros sin potencia que son menores al n dado, claro está aparecen otros productos mayores a n con lo que se afirma que

$$\prod_{p\leq n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \geq \sum_{k\leq n}^{\star} \frac{1}{k}$$

Lo anterior implica que

$$\sum_{k\leq n}^{\star} \frac{1}{k} < e^A$$

Pero esto es imposible cuando n tiende a infinito, ya que del lema 1.1.10 la serie $\sum_{k\leq n}^{\star} \frac{1}{k}$ diverge cuando $n \to \infty$. Se concluye que la serie de los recíprocos de los números primos diverge.

$\square$

La demostración de esta afirmación fue dada al mundo primero por Euler. La demostración presentada es debida al especialista en Teoría de Números *Ivan Niven*, la cual se puede encontrar en [7].

1.2. Conjuntos realización

Definición 1.2.1. *Sea (x_n) una sucesión real. El conjunto de todas las sumas de la forma $\sum_{i \in I} x_i$ con $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ se llama* **Conjunto Realización** *de (x_n). Se denota por $AS(x_n)$.*
$r \in \mathbb{R}$ es **una realización** *de (x_n) si existe una subsucesión finita o infinita de elementos de (x_n) tal que su suma converge a r.*
(x_n) es un **realizador alto** *si $AS(x_n)$ es un intervalo.*

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1.2.2. $1/3$ *es una realización de la sucesión $(1/n^2)$ pues la subsucesión formada al tomar las potencias de dos $(1/4, 1/16, 1/64, \ldots)$ es una serie convergente y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}$$

$3/2$ es una realización de la sucesión $(1/n)$ pues al tomar los dos primeros términos de esa sucesión y sumarlos obtenemos el valor de $3/2$.
$(1/2^n)$ es un realizador alto pues su conjunto realización es el intervalo $[0,1]$, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.3. *Se procede a mostrar que*

$$AS(1/2^n) = [0,1]$$

Como La suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ y todos los términos de $(1/2^n)$ son positivos, entonces es inmediato que $AS(1/2^n) \subseteq [0,1]$.
La otra inclusión se presenta como un enunciado.

Lema 1.2.4. *Todo número real en el intervalo $[0,1]$ tiene representación binaria.*

Demostración. Sea $x \in [0,1]$. El intervalo $[0,1]$ puede subdividirse en dos partes iguales. Si $x \neq \frac{1}{2}$, entonces x debe estar comprendido o en $[0,1/2]$ o en $[1/2,1]$. Entonces para

$a_1 \in \{0,1\}$ se tiene

$$\frac{a_1}{2} < x < \frac{a_1+1}{2}$$

Se divide ahora el segmento que une $\frac{a_1}{2}$ y $\frac{a_1+1}{2}$ en dos partes iguales(de longitud 1/4) y se continua el proceso. Si después de m subdivisiones, uno de los puntos de subdivisión coincide con x, entonces x es de la forma

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_m}{2^m}$$

y se escribe $x = 0.a_1a_2\ldots a_m$. De lo contrario,

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_m}{2^m} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

En este caso se dice que x tiene representación binaria infinita.

Para garantizar que esta serie siempre converge, note que después de n subdivisiones y $a_k \in \{0,1\}$ con $1 \leq k \leq n$, se obtiene

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} < x < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{2^n}$$

Si se denota $s_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$ entonces

$$s_n < x < s_n + \frac{1}{2^n}$$

Así, se tiene

$$0 < x - s_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como $1/2 < 1$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Del principio de compresión de sucesiones se tiene que $\lim_{n\to\infty}(x - s_n) = 0$. Se infiere que $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, con lo que la serie converge a x.

Se ha demostrado que todo número en $[0,1]$ puede ser representado como una suma de la forma $\sum_{i\in I} 1/2^i$ con $I \subseteq \mathbb{Z}^+$. Se concluye que $AS\left(\frac{1}{2^n}\right) = [0,1]$ $\square$

Si $x \in \mathbb{R}^+$, por el principio del buen orden y la propiedad arquimediana, existe $a_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_0 \leq x < a_0 + 1$. Luego $x = a_0 + (x - a_0)$ donde $0 \leq x - a_0 < 1$.
Por lo tanto, $x \in \left(a_0 + AS\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ con lo que $x \in AS\left(a_0 + \frac{1}{2^n}\right)$ y se concluye que

$$AS\left(a_0 + \frac{1}{2^n}\right) = [a_0, a_0 + 1]$$

Si $b \in \mathbb{Z}^+$, $b > 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \alpha$, se sigue que $AS\left(\frac{1}{b^n}\right) \subset [0, \alpha]$. El caso $[0, \alpha] \subset AS\left(\frac{1}{b^n}\right)$ no es cierto para el caso general. Considere la sucesión $\left(\frac{1}{3^n}\right)$. La serie de todos los términos de esta sucesión converge a $\frac{1}{2}$, con lo que $AS\left(\frac{1}{3^n}\right) \subset [0, 1/2]$, sin embargo, existen muchos números que pertenecen a $[0, 1/2]$ que no estan en $AS\left(\frac{1}{3^n}\right)$. Observe que para $I \subseteq \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$ se tiene que

$$\frac{1}{3} + \sum_{i \in I} \frac{1}{3^i} \geq \frac{1}{3}$$

si se omite el término $\frac{1}{3}$ se obtiene

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{3^i} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

Con lo que se ha demostrado que $AS\left(\frac{1}{3^n}\right)$ omite el intervalo $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

Proposición 1.2.5. *Si (x_n) es una sucesión de números reales, $I_p = \{\ i \mid x_i > 0\}$, $I_n = \{\ i \mid x_i < 0\}$, entonces*

$$AS(|x_n|) = AS(x_i \mid i \in I_p) - AS(x_i \mid i \in I_n) \tag{1.1}$$

Demostración. Como $x_i \neq 0$ para todo i, se tiene que $I_p \cap I_n = \emptyset$ y $I_p \cup I_n = \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, I_p y I_n son una partición de los enteros positivos.
Se probará que

$$AS(x_n) = AS(x_i \mid i \in I_p) + AS(x_i \mid i \in I_n)$$

Sea $z \in AS(x_n)$. Por definición de realización, existe $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{i \in I} x_i = z$. Agrupando los términos positivos y negativos de esta serie convergente se obtienen $K \subset I_n$,

$K' \subset I_p$ tal que $K \cup K' = I$, además

$$z = \sum_{i \in K'} x_i + \sum_{i \in K} x_i$$

Así, $z \in AS(x_i \mid i \in I_p) + AS(x_i \mid i \in I_n)$.
Recíprocamente, si $z' \in AS(x_i \mid i \in I_p) + AS(x_i \mid i \in I_n)$ existen w, y tal que $z' = w + y$ con $w \in AS(x_i \mid i \in I_p)$ y $y \in AS(x_i \mid i \in I_n)$. Luego existe algún subconjunto $H \subseteq I_n \cup I_p$ tal que $\sum_{h \in H} x_h = w + y$ y por lo tanto $z' \in AS(x_n)$.
Observe que

$$AS(|x_n|) = AS(|x_i| \mid i \in I_p) + AS(|x_i| \mid i \in I_n)$$

Luego

$$AS(|x_n|) = AS(x_i \mid i \in I_p) - AS(x_i \mid i \in I_n)$$

□

Se enuncia a continuación un lema importante para trabajar con sucesiones que tengan términos negativos cuya suma converge.

Lema 1.2.6. *Sea (x_n) una sucesión de números reales y suponga que la suma de los términos negativos de (x_n) converge a $s \leq 0$. Entonces*

$$AS(|x_n|) = -s + AS(x_n)$$

Demostración. Observe que $AS(|x_n|) = -s + AS(x_n)$ está bien definida, es decir, $s \neq \pm\infty$ para cualquier caso, pues teniendo en cuenta la hipótesis acerca de los términos negativos(su convergencia) de (x_n) se tiene que

$$\sum_{i \in I_n} |x_i| = -\sum_{i \in I_n} x_i = -s \geq 0$$

Así, esta convergencia implica que cualquier subsucesión de términos negativos de la sucesión (x_n) con suma convergente debe de ser absolutamente convergente, por lo que cualquier reordenamiento de términos negativos converge.

Considere I_n, I_p conjuntos de índices como en la proposición 1.2.5.

Sea $r \in AS(x_n)$, entonces de la definición de realización existe $K \subset \mathbb{Z}^+$ tal que $r = \sum_{k\in K} x_k$. Como esta suma tiene términos positivos y negativos de (x_n), entonces $K = K_p \cup K_n$ para algún $K_p \subset I_p$ y $K_n \subset I_n$. Por tanto,

$$r - s = \left(\sum_{i\in K_p} x_i + \sum_{i\in K_n} x_i\right) - \sum_{i\in I_n} x_i = \sum_{i\in K_p} x_i - \sum_{i\in I_n\setminus K_n} x_i$$

Y de (1.1) se tiene que $r - s \in AS(|x_n|)$.

Ahora, suponga que $r \in AS(|x_n|)$. De (1.1) se tiene que deben existir conjuntos $J_p \subset I_p$ y $J_n \subset I_n$ tales que

$$r = \sum_{i\in J_p} x_i - \sum_{i\in J_n} x_i$$

Al sumar y restar s en el lado derecho de la anterior igualdad se tiene que

$$r = \sum_{i\in J_p} x_i + \sum_{i\in I_n} x_i - \sum_{i\in J_n} x_i - \sum_{i\in I_n} x_i$$

$$r = \left(\sum_{i\in J_p} x_i + \sum_{i\in I_n\setminus J_n} x_i\right) - s$$

Se concluye que $r \in AS(x_n) - s$. Con esto se completa la demostración. $\square$

El siguiente teorema da una caracterización de los realizadores altos para las sucesiones que convergen a cero.

Teorema 1.2.7 (Caracterización de Realizadores Altos)**.** *Sea* $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *una sucesión real convergente a cero. Si para todo* $k \geq 1$

$$|x_k| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|. \tag{1.2}$$

Entonces (x_n) *es un realizador alto. Más aún, si* $|x_k| \geq |x_{k+1}|$ *para todo* $k \geq 1$ *entonces*

(x_n) *es un realizador alto si y sólo si* (1.2) *se cumple.*

Demostración. Considere $I_n = \{\ i \mid x_i < 0\}$.

Para demostrar que $AS(x_n)$ es un intervalo, se consideran dos casos. El primero es cuando $\sum_{i\in I_n} x_i$ converge. En este caso, del lema (1.2.6) se puede suponer que todos los términos de (x_n) son positivos.

Sea s la suma de los x_n, que incluso puede ser ∞. Por definición de realización, como 0 y s son, respectivamente, la suma vacía y la suma de todos los elementos de la sucesión, es suficiente demostrar que $r \in AS(x_n)$ para $0 < r < s$, que es un elemento arbitrario que no supera la suma de todos los términos de la sucesión.

Se definen los índices de la siguiente manera: sea i_1 el menor índice que satisface $x_{i_1} \leq r$. Si en la sucesión (x_n) existe un elemento de ésta tal que $i_2 > i_1$ y $x_{i_2} + x_{i_1} \leq r$, entonces se selecciona ese elemento. Se sigue de esta manera, a tal punto que, si previamente se han seleccionado $i_1, i_2, \ldots, i_m$ índices, entonces se toma el i_{m+1} a ser el menor índice tal que $i_{m+1} > i_m$ y

$$x_{i_{m+1}} + \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \leq r$$

Este proceso termina cuando existe algún m tal que $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ están seleccionados como previamente se mencionó y se puede elegir m tal que cumple la desigualdad $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \leq r$, pero para valores n tales que $n > i_m$ se tiene que $x_n + \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} > r$. Como por hipótesis se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces la última desigualdad queda $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \geq r$. Así, $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \leq r$ por construcción y $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \geq r$ de lo anteriormente mencionado. Por lo tanto $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} = r$, con lo que $r \in AS(x_n)$.

Ahora suponga que el proceso de construcción de los i_j no termina, y suponga además que la sucesión $i_1, i_2, i_3, \ldots$ omite un número finito de enteros positivos. Como se tiene que $r < s$ entonces al menos un entero positivo fue omitido; de lo contrario r sería la suma de todos los términos de la sucesión y es distinto de s, lo cual es contradictorio.

Sea k el mayor de estos enteros omitidos. Sea t la suma de los x_{i_j} con $i_j < k$. Si no existe

$i_j < k$ entonces haga $t = 0$. Se sigue que

$$x_k + t > r \qquad y \qquad t + \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h} \leq r$$

Entonces

$$x_k > r - t \geq \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h}$$

Lo cual contradice la desigualdad (1.2). Por lo tanto, se tiene una contradicción.
La anterior contradicción implica que si el proceso de la construcción de los i_j no termina, entonces la sucesión $i_1, i_2, i_3, \ldots$ omite un número infinito de enteros positivos. Sea $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ tal sucesión. Entonces para cada término k_l de esta sucesión se observa la siguiente desigualdad

$$x_{k_l} + \sum_{i_j < k_l} x_{i_j} > r \geq \sum_{i_j < k_l} x_{i_j} \tag{1.3}$$

Por hipótesis $\lim_{l \to x_{k_l}} = 0$, así al tomar el límite cuando $l \longrightarrow \infty$ de la ecuación (1.3) se tiene de la tricotomía que $r = \sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j}$. Se concluye que $r \in AS(x_n)$.
Si $\sum_{i \in I_n} x_i$ diverge, note que $\left|\sum_{i \in I_n} x_i\right| \leq \sum_{i \in I_n} |x_i|$. Por comparación se sigue que $\sum_{i \in I_n} |x_i|$ es positiva y no acotada. Entonces, para todo $k \geq 1$ se tiene que

$$|x_k| \leq \sum_{i \in I_n} |x_i| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|$$

Entonces se satisface (1.2) para todo k, con lo que la sucesión de términos positivos $(-x_i \mid i \in I_n)$ satisface (1.2) para todo k. Entonces $AS(-x_i \mid i \in I_n) = [0, \infty)$. Como $AS(x_n) = -AS(-x_n)$, se sigue que $AS(x_i \mid i \in I_n) = (-\infty, 0]$. De la proposición 1.2.5 se sigue que

$$AS(x_n) = AS(x_i \mid i \in I_n) + AS(x_i \mid i \in I_p)$$

Se tiene entonces que el conjunto realización de (x_n) depende de la convergencia de la serie de los términos $(x_i \mid i \in I_p)$, lo que se resume en

$$AS(x_n) = \begin{cases} (-\infty, c] & \text{Si } \sum_{i\in I_p} x_i \text{ converge a c,} \\ (-\infty, \infty) & \text{Si } \sum_{i\in I_p} x_i \text{ diverge.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Se concluye que para cualquiera de los casos mencionados para los términos negativos de (x_n), $AS(x_n)$ es un realizador alto.

Con respecto a la segunda afirmación del teorema, suponga que $|x_k| \geq |x_{k+1}|$ para todo $k \geq 1$ y supóngase que la desigualdad (1.2) no se tiene, esto es, existe un índice k_0 tal que

$$|x_{k_0}| > \sum_{n=k_0+1}^{\infty} |x_n|.$$

Como k_0 es fijo, entonces del teorema de convergencia monótona se tiene que los términos de (x_n) forman una serie absolutamente convergente, lo que implica que la serie de los términos negativos de (x_n) converge y en virtud al lema (1.2.6) se puede asumir sin pérdida de generalidad que los términos de (x_n) son positivos.

De la definición de realización se tiene que ambos $b = x_{k_0}$ y $a = \sum_{n=k_0+1}^{\infty} x_n$ están en $AS(x_n)$. Se afirma que $AS(x_n) \cap (a, b) = \emptyset$. Sea $I \subseteq \mathbb{Z}^+$. Si $i \in I$ para $i \leq k_0$, entonces $x_i \geq x_{k_0}$ pues se supone que la sucesión es decreciente. Observe que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0-1} + x_{k_0} \geq x_{k_0} + x_{k_0} + \cdots + x_{k_0} + x_{k_0}$$

Con lo que se tiene que $\sum_{i\in I} x_i \geq x_{k_0} = b$, es decir, los números menores a b no están en el conjunto realización de (x_n).

Por otro lado, si I omite todos los j tales que $j \leq k_0$, para $I \subseteq \mathbb{Z}^+ \backslash \{1, 2, \ldots, k_0 - 1, k_0\}$ se tiene que $\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i=k_0+1}^{\infty} x_i = a$. Esto implica que los valores mayores a a no están en el conjunto realización de (x_n).

Se concluye que $AS(x_n)$ tiene un "hueco", con lo cual no es realizador alto. $\square$

Corolario 1.2.8. *Sea (x_n) sucesión real. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} x_n = \infty$, entonces*

(x_n) *es un realizador alto.*

Demostración. Como $\sum_{i=1}^{\infty} x_n = \infty$, se tiene que $\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| = \infty$ para todo k. Del teorema (1.2.7) se sigue el resultado. $\square$

Otra propiedad que es inmediata del teorema (1.2.7) y de la desigualdad 1.4 es que $AS\left(\frac{1}{n}\right) = [0, \infty)$.

Es importante hacer observar la importancia de la condición $|x_k| \geq |x_{k+1}|$ en el anterior teorema. Si se suprime esta condición, se pueden encontrar realizadores altos tales que no cumpla con la desigualdad (1.2). Para ver esto observe primero que $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k$ es absolutamente convergente, luego cualquier reordenación de esta serie no afecta su convergencia ni su suma. Ordene la sucesión $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ de la siguiente manera:

$$(y_n) = (1/4, 1/2, 1, 1/8, 1/64, 1/32, 1/16, \cdots)$$

Así, para $n = 3$, se tiene $|y_3| = 1$ y $\sum_{n=4}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n - 1 - 1/2 - 1/4 = 1/4$, con lo que $|y_3| = 1 > \sum_{n=4}^{\infty} |y_n|$, resultado que contradice (1.2).

Se da un ejemplo que permite ilustrar e intuir que todo número real positivo se puede expresar como una suma de recíprocos de números primos.

Ejemplo 1.2.9. *Primero veamos a* $7/15$ *como una suma de términos de la serie armónica usando el algoritmo dado en la demostración del teorema 1.2.7. Se busca el término de la sucesión con menor subíndice que sea menor o igual a* $7/15$*, el término es* $1/3$*. Así,* $1/3 \leq 7/15$*. Buscando términos posteriores (posición mayor al tercer término de la sucesión* $1/n$*) se encuentra que* $1/8$ *satisface que* $1/3 + 1/8 \leq 7/15$*. Repitiendo el proceso una vez más, se sigue que* $1/3 + 1/8 + 1/120 = 7/15$*. Por lo tanto,* $7/15 \in AS(1/n)$*.*

Hagamos ahora lo mismo pero para la sucesión de los recíprocos de los primos.

Después de algunos cálculos observe que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{29} + \frac{1}{127} \leq \frac{7}{15}$$

La diferencia entre esta suma y $7/15$ *es aproximadamente* $-6.746805552 \times 10^{-5}$*(el signo*

– es para indicar que esta suma es menor a $7/15$*) y al hacer algunas cuentas haciendo omisiones de términos en la sucesión se tiene que para el último primo menor a* 10000*, es decir, para el término* $1/9973$ *resulta que*

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{29}+\frac{1}{127}+\frac{1}{9973}>\frac{7}{15}$$

La diferencia de estas cantidades es aproximadamente 3.280267545×10^{-5}*, lo cual sugiere que el proceso de construir los* i_j *mencionados en el algoritmo de la demostración del Teorema* $(1.2.7)$ *no termina. Entonces la sucesión de* $i_{j's}$ $3, 11, 29, 127, \ldots$ *omite un número infinito de términos de la sucesión original.*
Identificando algunos términos de la sucesión que han sido omitidos tenemos a $(k_l) = (2, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 31, \ldots)$*. Entonces para cada* k_l

$$x_{k_l}+\sum_{i_j<k_l}x_{i_j}>\frac{7}{15}\geq\sum_{i_j<k_l}x_{i_j}$$

Así, se concluye que para la serie de los recíprocos de los números primos el racional $7/15$ *es realizado como una suma*

$$\frac{7}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{29}+\frac{1}{127}+\sum_{j\in J}\frac{1}{p_j}\ldots$$

Con $J\subseteq\mathbb{Z}^+$ *algún conjunto de índices en los que se encuentran los términos no omitidos de la sucesión.*

Corolario 1.2.10. *Sea* $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ *una sucesión de primos. Entonces todo real positivo puede ser escrito como una suma finita o infinita de recíprocos de primos.*

Demostración. Como la sucesión de los recíprocos de los números primos converge a cero y la serie de sus términos diverge(ver proposición 1.1.11), entonces del teorema 1.2.7 y de la ecuación 1.4 se concluye que $AS(\frac{1}{p_n}) = [0, \infty)$. □

Se expone a continuación un teorema análogo al teorema de reordenación de Riemann.

La analogía consiste en que en vez de reordenamientos, se hacen omisiones de términos.

Corolario 1.2.11. *Sea (x_n) una sucesión cuyos términos forman una serie condicionalmente convergente. Entonces $AS(x_n) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean I_p y I_n, respectivamente, los conjuntos de índices de los términos positivos y negativos de (x_n). Recuerde que convergencia condicional de $\sum x_n$ implica que $\sum_{i\in I_p} x_i = \infty$, $\sum_{i\in I_n} x_i = -\infty$ (ver sección 1.1) y como la serie converge condicionalmente, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Del teorema 1.2.7 se sigue que $AS(x_n) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. $\square$

Observación 1.2.12. *Se hace notar que el recíproco del corolario 1.2.11 no es cierto. Considere la sucesión*

$$\left(1, \frac{-1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{-1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{-1}{6}, 6, \dots\right)$$

Note que esta sucesión diverge. Observe que la subsucesión de los términos impares es exactamente la de los enteros positivos, la cual diverge. Por lo tanto, la sucesión no puede converger. De la proposición 1.1.1 se tiene que la serie de los términos de esta sucesión diverge, con lo que se obtiene que no puede converger condicionalmente.
Por otro lado, note que la subsucesión par contiene los términos de la serie armónica alternada. Si se omiten los términos impares de la sucesión, se puede realizar todo $\mathbb{R}$ por el corolario 1.2.11. Así, se ha mostrado una sucesión que realiza a $\mathbb{R}$, pero la serie de sus términos no es condicionalmente convergente.

Corolario 1.2.13. *Sea (x_n) una sucesión con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, y suponga que $|x_{n+1}| \geq \frac{1}{2}|x_n|$ para todo n. Entonces (x_n) es un realizador alto.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. De la hipótesis dada observe

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}| &\geq \frac{1}{2}|x_k| \\
|x_{k+2}| &\geq \frac{1}{2}|x_{k+1}| \geq \frac{1}{2^2}|x_k| \\
|x_{k+3}| &\geq \frac{1}{2}|x_{k+2}| \geq \frac{1}{2^3}|x_k| \\
&\vdots \\
|x_{k+i}| &\geq \frac{1}{2^i}|x_k|
\end{aligned}$$

para todo k y todo i.

Por lo tanto para todo k se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{k+i}| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_k| = |x_k| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = |x_k| \cdot 1 = |x_k|$$

Como la sucesión (x_n) tiende a cero y cumple con la desigualdad 1.2, entonces el Teorema (1.2.7) garantiza que (x_n) es un realizador alto. $\square$

Ejemplo 1.2.14. *Se hace un comentario acerca de la sucesión de Fibonacci. La sucesión de Fibonacci f_n, esta definida recursivamente, es decir, $f_1 = 1, f_2 = 1$ y $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ para $n \geq 3$. Algunos términos de esta sucesión son $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$. Es un ejercicio conocido de Inducción Matemática el probar que el $n-$ésimo término de la sucesión se puede calcular directamente mediante una fórmula definida del siguiente modo: sea $\alpha = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ y $\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$. Probar que $f_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}$ para todo entero positivo n.*

Demostración. Para el paso base $(n = 1)$, el valor $(\alpha - \beta)/\sqrt{5} = (\sqrt{5})/\sqrt{5} = 1$. Entonces cumple la afirmación pues $f_1 = 1$.

Suponer que $1, 2, 3, \ldots, k$ cumplen la afirmación. Se probará que f_{k+1} también cumple con la propiedad. De la definición de la sucesión se tiene que $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ y como por hipótesis $f_k = (\alpha^k - \beta^k)/\sqrt{5}$, $f_{k-1} = (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})/\sqrt{5}$, entonces

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^k + \alpha^{k-1} - (\beta^k + \beta^{k-1})}{\sqrt{5}}$$

Observe lo siguiente

$$\alpha^k + \alpha^{k-1} = \alpha^k \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$\beta^k + \beta^{k-1} = \beta^k \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Aquí la clave es observar que los números α, β son especiales. Estos números tienen la propiedad de satisfacer la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Lo interesante de esta ecuación es

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \\ x + 1 &= x^2 \\ 1 + \frac{1}{x} &= x \end{aligned}$$

La última igualdad no tiene problema alguno pues cero no satisface la ecuación dada. Así, $\alpha = 1 + 1/\alpha$ y $\beta = 1 + 1/\beta$. Entonces se tiene que

$$\alpha^k + \alpha^{k-1} = \alpha^{k+1}$$
$$\beta^k + \beta^{k-1} = \beta^{k+1}$$

Lo que a su vez permite garantizar que $f_{k+1} = (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})/\sqrt{5}$. Del principio de Inducción Matemática se tiene que $f_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}$ para todo entero positivo n. $\square$

Ahora la pregunta es quién es $AS(F_n)$, con $F_n = \frac{1}{f_n}$?
Puesto que la sucesión $F_n \in [0, 1]$ y es una sucesión decreciente entonces del teorema de la convergencia monótona se tiene que la sucesión converge y $F_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además note que $|F_{n+1}| \geq \frac{1}{2}|F_n|$ para todo n pues como la sucesión de Fibonacci es

creciente y positiva entonces

$$\begin{aligned}
f_{n+1} = & f_n + f_{n-1} \\
& \leq f_n + f_n \\
f_{n+1} & \leq 2f_n \\
\frac{1}{f_n} \cdot \frac{1}{2} & \leq \frac{1}{f_{n+1}} \\
\frac{1}{2}|F_n| & \leq |F_{n+1}|
\end{aligned}$$

Con lo anteriormente mencionado, se tiene que en virtud del corolario (1.2.13) que (F_n) es un realizador alto, es decir $AS(F_n)$ es un intervalo.

Otro aspecto interesante es saber si $\sum 1/f_n$ converge. Para este fin se usará el criterio del cociente para determinar su convergencia. Para saber si $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ converge, note lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} - \frac{\beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha - \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}
\end{aligned}$$

Observe que $-1 < \beta/\alpha < 1$ lo que implica que $\lim_{n\to\infty} (\beta/\alpha)^n = 0$ y por lo tanto de las propiedades del límite se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} < 1$$

Como $Lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n < 1$, del criterio del cociente se tiene que $\sum 1/f_n$ converge. Sea $\delta = \sum 1/f_n$. Como la serie converge, del teorema (1.2.7) se tiene que $AS(1/f_n) = [0, \delta]$. Jones en [1] afirma que $\delta \approx 3.36$, número cuya irracionalidad fue demostrada hasta 1989.

1.3. Conjunto de Cantor

Como un buen punto de partida, se procede a discutir un poco acerca de un conjunto de Cantor muy conocido. Puede describirse este conjunto al ir eliminando una sucesión de intervalos abiertos del intervalo cerrado $[0,1]$.

Partimos del intervalo unidad $C_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$, dividiendo dicho intervalo en tres partes iguales y eliminando el intervalo $(1/3, 2/3)$, se tienen los intervalos

$$C_{11} = [0, 1/3] \quad C_{12} = [2/3, 1]$$

de longitud $1/3 = 3^{-1}$.

Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales, eliminando de nuevo los intervalos(abiertos) centrales que resultan de tal división y se tienen los siguientes intervalos.(ver figura 1.1)

$$\begin{aligned} C_{21} &= [0, 1/9], & C_{22} &= [2/9, 1/3], \\ C_{23} &= [2/3, 7/9], & C_{24} &= [8/9, 1] \end{aligned}$$

de longitud $1/9 = 3^{-2}$.

Si se continua este proceso, en la etapa i-ésima se obtienen 2^i intervalos cerrados C_{jk} con $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^i$, cada uno de ellos con longitud 3^{-i}.

Para cada $i = 1, 2, \ldots$ sea

$$C_i = \bigcup_{k=1}^{2^i} C_{jk}$$

note que $C_{i+1} \subset C_i$ para todo i. Entonces, el conjunto límite de este proceso es

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

Este conjunto ($\mathfrak{C}$) es llamado el conjunto del tercio medio de Cantor. La siguiente gráfica[1] muestra los primeros pasos para obtener el conjunto de Cantor

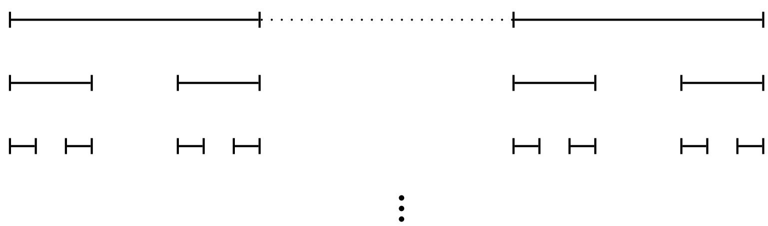

Figura 1.1 – Descripción de la construcción del *conjunto de Cantor.*

A continuación se mencionan algunas Propiedades de $\mathfrak{C}$. Se denota $L(A)$ como la longitud(medida) del conjunto A.

1. $L([0,1]\backslash\mathfrak{C}) = 1$.

   Observe que el primer intervalo abierto removido tiene longitud $1/3$. Para C_2 se tiene que la longitud de los intervalos eliminados suma $2/3^2$. Para C_3 la suma de las longitudes para las cuatro terceros medios removidos es $4/3^3$.

   Así, la longitud L de los intervalos eliminados esta dada por

   $$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} = 1$$

   Así, la longitud de los intervalos eliminados es 1.

2. $\mathfrak{C}$ tiene medida cero.

   Esta propiedad se puede demostrar aceptando que L es aditiva de la siguiente forma $L(\mathfrak{C}) + L([0,1]\backslash\mathfrak{C}) = L([0,1]) = 1$ y como $L([0,1]\backslash\mathfrak{C}) = 1$ se tiene que $L(\mathfrak{C}) = 0$. Otra manera de ver este hecho es la siguiente: note que la longitud en C_0 es 1, en C_1 es $2/3$, en C_2 es $4/9 = (2/3)^2$, etcétera.

   Luego, para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que C_n tiene longitud $(2/3)^n$. Como

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

[1] gráfica tomada de [2].

entonces se concluye que $\mathfrak{C}$ tiene medida cero.

3. $\mathfrak{C}$ no tiene intervalos de la forma (a, b), con $a < b$.

   Si existiera $(a, b) \subseteq \mathfrak{C}$ se tendría que $0 < b - a \leq longitud(\mathfrak{C}) = 0$ lo cual es una contradicción.

4. $\mathfrak{C}$ es cerrado.

   Como $\mathfrak{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$,donde cada C_i es cerrado. Entonces $\mathfrak{C}$ es una intersección de cerrados, por lo tanto es cerrado.

5. $\mathfrak{C}$ es acotado.

   Note que $\mathfrak{C} \subset [0, 1]$.

6. $\mathfrak{C}$ es compacto.

   Como $\mathfrak{C}$ es cerrado y acotado, del teorema de Heine-Borel se tiene el resultado.

7. $int(\mathfrak{C}) = \emptyset$

   si el conjunto de Cantor tuviera interior no vacío, entonces para algún elemento del interior existiría una vecindad de ese punto contenida en el conjunto de Cantor. Pero esto es imposible pues $\mathfrak{C}$ no admite intervalos de la forma (a, b), $a < b$.

8. $\mathfrak{C}$ es infinito no numerable.

   Existe una demostración constructiva mediante el método de diagonalización de Cantor que permite ver que $\mathfrak{C}$ no es numerable.

   Sea S el conjunto de todas las sucesiones de $0's$ y $2's$,

   $$S = \{(x_n) \mid x_n \in \{0, 2\}\}$$

   El cual es practicamente el conjunto de Cantor. Si S fuese numerable, tendríamos que $S = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ donde

   $$y_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nm}, \cdots) \quad n = 1, 2, \cdots$$

con $x_{nm} \in \{0, 2\}$. Sea $z = (z_1, z_2, \cdots) \in S$ definida como

$$z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } x_{nn} = 0 \\ 0 & \text{si } x_{nn} = 2 \end{cases}$$

Observe que $z_n \neq y_n$ para todo n, entonces $(z_n) \notin S$, lo cual es una contradicción. Se concluye que S no es numerable, lo que infiere que $\mathfrak{C}$ no es numerable.

9. $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, esto es, todos sus puntos son puntos de acumulación. Una prueba de este hecho esta en el Apéndice B de [2].

Es importante mencionar que en $\mathbb{R}$ un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Un conjunto es perfecto si todos sus puntos son puntos de acumulación y un conjunto es totalmente disconexo si los únicos subconjuntos conexos son los unipuntuales. Observe que $\mathfrak{C}$ es compacto pues es cerrado y acotado, es perfecto pues todos sus puntos son de acumulación y es totalmente disconexo pues no contiene intervalos abiertos (usuales) de $\mathbb{R}$, los que implica que sus únicos subconjuntos conexos son los unipuntuales.

1.3.1. Caracterización de los puntos del conjunto de Cantor en términos de su representación ternaria

Nos concentraremos en esta sección a números en base 3. Se comienza discutiendo un poco la siguiente propiedad: todo decimal periódico en base 3 representa un número racional. Considere el siguiente número en base 3

$$x = 0.x_1x_2 \ldots x_n\overline{b_1b_2 \ldots b_m}$$

Como x esta en base 3, se tiene entonces

$$3^n x = x_1x_2 \ldots x_n.\overline{b_1b_2 \ldots b_m} = (x_1x_2 \ldots x_n)_3 + z$$

con $z = 0.\overline{b_1 b_2 \ldots b_m}$. Note lo siguiente para z

$$3^m z = b_1 b_2 \ldots b_m.\overline{b_1 b_2 \ldots b_m} = (b_1 b_2 \ldots b_m)_3 + 0.\overline{b_1 b_2 \ldots b_m}$$

Luego, la anterior suma se puede ver como $3^m z = s + z$ con $s = (b_1 b_2 \ldots b_m)_3$.
Asi,

$$\begin{aligned} 3^m z &= s + z \\ z(3^m - 1) &= s \\ z &= \frac{s}{3^m - 1} \end{aligned}$$

Se deduce que z es un número racional. Por otro lado, de lo anteriormente mencionado recuerde que

$$3^n x = (x_1 x_2 \ldots x_n)_3 + z$$

Por lo tanto, x es racional, pues x se puede ver como

$$x = \frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)_3 + z}{3^n}$$

pues el numerador y el denominador son números racionales.
Así, x representa un número racional. Como x es arbitrario, se tiene el resultado para todo decimal periódico en base 3.

Observación 1.3.1. *El anterior resultado, se cumple también para cualquier base entera con* $(b > 1)$.

Se afirma que $x \in [0, 1]$ es de la forma $x = 0.x_1 x_2 \ldots x_n 0000\ldots$ si y sólo si x es un número de la forma $m/3^n$, con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m < 3^n$.

Suponga que $x = 0.x_1x_2 \dots x_n0000 \dots$ entonces x se puede escribir como

$$0 + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + 0 = \frac{3^{n-1}x_1 + 3^{n-2}x_2 + \cdots + x_n}{3^n} = \frac{m}{3^n}$$

Note que el valor máximo para el numerador se da cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$. Entonces para este caso se tiene

$$\frac{2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 1)}{3^n} = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{3^n - 1}{3^n} < 1$$

Luego $m < 3^n$.

Por otro lado, sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con m tal que $m = 3^{n-1}x_1 + 3^{n-2}x_2 + \cdots + x_n$ con $x_i \in \{0, 1, 2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que $m < 3^n$. Así, $0 < m/3^n < 1$, entonces $m/3^n \in [0, 1]$. Reescribiendo $m/3^n$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{m}{3^n} &= \frac{3^{n-1}x_1 + 3^{n-2}x_2 + \cdots + x_n}{3^n} \\ &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} \\ &= 0 + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \frac{0}{3^{n+1}} + \frac{0}{3^{n+2}} \cdots\end{aligned}$$

luego $m/3^n = 0.x_1x_2 \dots x_n0000 \dots$ así, se obtiene el resultado.

Se afirma que si $p, q \in \mathbb{Z}^+$ tales $p/q \in [0, 1]$ donde q no es una potencia de 3. Entonces la representación de p/q en base 3 es periódica.

Observe que es una consecuencia inmediata de lo mencionado anteriormente. Como p/q no tiene como denominador una potencia de 3, entonces no tiene representación finita en base 3, y como p/q es racional, entonces p/q tiene una representación periódica en base 3.

Se concluye que una forma de caracterizar los números irracionales en base 3(esto es válido en cualquier base natural) es que no tienen representación finita o periódica en base 3. Entonces los números irracionales tienen representación infinita no periódica en base 3.

Ejemplo 1.3.2. *Para saber la representación en base* 3 *de* 17/27 *note que* 17 *se puede* *ver como* $17 = 3^2x_1 + 3x_2 + x_3$ *con* $x_i \in \{0,1,2\}$ *pues* $17 = 1 \times 9 + 2 \times 3 + 2$. *Por lo tanto,* $17/27 = 0.122000\ldots$.

Algunos ejemplos de la escritura de números racionales son $1/2 = 0.111\ldots$, $1/4 = 0.020202\ldots$.

En la primera etapa de la construcción del conjunto de Cantor se eliminó el intervalo abierto $(1/3, 2/3)$, como estamos en base 3 se tiene que $1/3 = 0.1$ y $2/3 = 0.2$. Así, los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $0.1 < x < 0.2$ son de la forma $0.1x_2x_3\ldots$. Luego se tiene que fueron removidos en esta etapa todos los números con primera cifra igual a 1, excepto $1/3$.

Para la segunda etapa de la construcción del conjunto de Cantor, para el intervalo $(1/9, 2/9)$ fueron removidos los números de la forma $0.01x_3x_4\ldots$ excepto $1/9 = 0.01$. Para el intervalo $(7/9, 8/9)$ fueron removidos los números de la forma $0.21x_3x_4\ldots$ excepto $7/9 = 0.21$.

En general se afirma que los elementos del conjunto de Cantor son los números del intervalo $[0,1]$ cuya representación en base 3 contienen los dígitos 0 y 2, con excepción de los que contienen un solo 1 como dígito final, como por ejemplo 0.20221.

Además, note que $0.02222\ldots = 0.1$ en base 3. Para ver esto, note que

$$\begin{aligned}
0.0\overline{2} &= 0 + 0 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots \\
&= \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \cdots\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Note que el número 0.20221 se puede ver como

$$0.20221 = 0.20220 + 0.00001$$

Como $0.00001 = 0.00000222\ldots$, se tiene que $0.20221 = 0.202202222\ldots$. Por lo tanto, se puede afirmar que

Proposición 1.3.3. *Los elementos del conjunto de Cantor son números del intervalo* $[0,1]$ *cuya representación en base* 3 *solo tienen los dígitos* 0 *y* 2*.*

Se da una definición que permite conjuntos más generales que el tercio medio de Cantor.

1.4. Conjuntos centrales de Cantor

Definición 1.4.1. *Un* ***conjunto central de Cantor*** *es un conjunto que se forma de la siguiente manera:*
Tome un intervalo cerrado y acotado y remueva un subintervalo abierto de tal manera que queden dos intervalos cerrados disjuntos. Estos dos intervalos son llamados los intervalos de la fase uno. Repita la operación a cada uno de los intervalos de la fase uno, dejando cuatro intervalos de fase dos.
Siga de esta manera, de forma que en la fase k *se produzcan* 2^k *intervalos cerrados disjuntos. Se denota* C_k *como la unión de los intervalos de la fase* k *y* $C = \cap_{k=0}^{\infty} C_k$ *es el conjunto deseado. El conjunto construido anteriormente es un conjunto central de Cantor si para cada fase todos los subintervalos removidos están centrados y tienen la misma longitud.*

Observación 1.4.2. *Los conjuntos centrales de Cantor son subconjuntos compactos, perfectos y totalmente disconexos de los números reales.*

Se desea hacer una analogía entre los conjuntos realización de una sucesión que converge absolutamente y un conjunto de Cantor. El resto de esta sección trata sobre este tema. Se presentan los resultados que sirven para hacer dicha analogía.

Teorema 1.4.3 (Hornich)**.** *Sea* (x_n) *una sucesión de términos positivos, y suponga que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge. Entonces* $AS(x_n)$ *es cerrado.*

Demostración. Como $AS(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, entonces para probar que $AS(x_n)$ es cerrado se considera una sucesión convergente de $AS(x_n)$ y se probará que su límite está en $AS(x_n)$.

Sea (s_j) una sucesión de elementos de $AS(x_n)$ cuyo límite es s. Sea $I_j \subseteq \mathbb{Z}^+$ el conjunto de índices para cada s_j, es decir

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{i \in I_1} x_i \\
s_2 &= \sum_{i \in I_2} x_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

El objetivo en esta prueba es construir un conjunto $I_\infty \subseteq \mathbb{Z}^+$ tal que $s = \sum_{i \in I_\infty} x_i$ lo cual demuestra que $s \in AS(x_n)$. Para este fin, considere $N = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \in I_j \text{ } \textit{para } j \textit{ finito}\}$. Suponga primero que $N = \mathbb{Z}^+$, es decir, no existen elementos de (x_n) que están en infinitos elementos de (s_j).

Entonces para todo $m \geq 1$ fijo, ninguno de los números $1, 2, \ldots, m$ están en I_j para j suficientemente grande, lo que implica que

$$s_j \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, cuando $m \to \infty$ se tiene que $\sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$ tiende a cero, lo que implica que $\lim_{j \to \infty} s_j = 0$. Como $0 \in AS(x_n)$ para todo conjunto realización(recuerde nuestra convención acerca de la subsucesión vacía) entonces $s \in AS(x_n)$.

Si $\mathbb{Z}^+ \backslash N \neq \emptyset$, del principio del buen orden existe un elemento mínimo de $\mathbb{Z}^+ \backslash N$, sea éste n_1. Entonces infinitos I_j contienen a n_1, pero note que para un j suficientemente grande, I_j no contiene los números $1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Esto implica que existen infinitos s_j cuyo conjunto índice tiene n_1 como su número más pequeño; con lo que se ha creado una subsucesión de (s_j). Sea σ_1 cualquier término de esa subsucesión creada a partir de (s_j).

Sea (s'_j) la subsucesión que se forma al tomar los elementos de (s_j) cuyo conjunto de índices $I'_j \subset I_j$ tienen a n_1 como su mínimo. Como la sucesión original (s_j) converge a s, (s'_j) también debe hacerlo. Ahora se tiene un nuevo conjunto N' el cual satisface que $\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \subseteq N'$ y $n_1 \notin N'$.

Suponga que $n \in N'$ para cada $n > n_1$. Entonces para $m > n_1$ fijo, ningún de los $n_1{+}1, n_1{+}2, \ldots, m$ están en I'_j para j suficientemente grande. De lo contrario, se contradice que n_1 es menor elemento de los I'_j. Por lo tanto, para j suficientemente grande, se tiene que $s_j - x_{n_1} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$. Haciendo $m \to \infty$ y de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se tiene que $s = x_{n_1} \in AS(x_n)$.

Si existe un $n > n_1$ tal que $n \notin N'$, entonces se denota como n_2 al elemento más pequeño de esos n. Entonces existen infinitos (s'_j) cuyo conjunto índice tiene a n_1 y a n_2 como sus dos elementos más pequeños. Sea σ_2 algún elemento de esta subsucesión. Así, se repite de nuevo lo hecho para n_1.

El resultado es que o s es una suma finita de términos y por lo tanto está en $AS(x_n)$, o se obtiene una sucesión infinita $n_1, n_2, n_3, \ldots$. Para este caso, sea $I_\infty = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$. De lo mencionado anteriormente, se obtiene una subsucesión $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ de la sucesión original (s_j) tal que los índices de σ_k tienen, para un k fijo, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ como sus primeros k elementos. Por lo tanto,

$$\sigma_k - \sum_{m=1}^{k} x_{n_m} \leq \sum_{m=n_k+1}^{\infty} x_m$$

Como la sucesión (s_j) converge a s, la subsucesión (σ_k) debe hacerlo también. Como $n_k \to \infty$ como $k \to \infty$, de la última ecuación se tiene que

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n_m} = \sum_{i \in I_\infty} x_i$$

Se concluye que $s \in AS(x_n)$. $\square$

Observación 1.4.4. *El recíproco del anterior teorema no es cierto, ya que* $AS(1/n) = [0, \infty)$ *que es un conjunto cerrado en* $\mathbb{R}$ *pero* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *diverge.*

Definición 1.4.5. *Para $k \geq 1$, sea $t_k = \sum_{i=k}^{\infty} x_i$. Se define la $k-$ésima aproximación de $AS(x_n)$ como*

$$E_k = AS(x_1, \ldots, x_k) + [0, t_{k+1}]$$

con $E_0 = [0, t_1]$

Ejemplo 1.4.6. *Si $(x_n) = \left(\frac{2}{3^n}\right)$, entonces $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{3}$ y $t_3 = \frac{1}{9}$. Por otro lado, $AS\left(\frac{2}{3}\right) = \{0, \frac{2}{3}\}$, $AS\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right) = \{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\}$. Entonces las tres primeras aproximaciones de $AS\left(\frac{2}{3^n}\right)$ son*

$$\begin{aligned}
&E_0 = [0, t_1] = [0, 1] \\
&E_1 = AS\left(\frac{2}{3}\right) + \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left\{0, \frac{2}{3}\right\} + \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
&E_2 = AS\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right) + \left[0, \frac{1}{9}\right] = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right\} + \left[0, \frac{1}{9}\right] = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]
\end{aligned}$$

Observe que las anteriores aproximaciones son exactamente las tres primeras etapas en la construcción del tercio medio de Cantor.

Proposición 1.4.7. *Sea (x_n) una sucesión positiva, y suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Entonces*

- ◇ *Para todo $k \geq 0$, E_k es una unión de intervalos cerrados.*
- ◇ *Para todo $k \geq 0$, $E_{k+1} \subseteq E_k$.*
- ◇ $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = AS(x_n)$

Demostración. Como para todo $z \in \mathbb{R}$ se tiene que $z + [0, t_{k+1}] = [z, z + t_{k+1}]$, entonces E_k es una unión finita de intervalos cerrados.

Para probar que $E_{k+1} \subseteq E_k$, observe que es inmediato que $E_1 \subseteq E_0$. Para $k \geq 1$ note lo siguiente

$$
\begin{aligned}
E_{k+1} &= AS(x_1,\dots,x_{k+1}) + [0,t_{k+2}] \\
&= AS(x_1,\dots,x_k) + AS(x_{k+1}) + [0,t_{k+2}] \\
&= AS(x_1,\dots,x_k) + \{0,x_{k+1}\} + [0,t_{k+2}] \\
&= AS(x_1,\dots,x_k) + [0,t_{k+2}] \cup [x_{k+1},t_{k+1}] \\
&\subseteq AS(x_1,\dots,x_k) + [0,t_{k+1}] \\
&\subseteq E_k
\end{aligned}
$$

Se sigue que $E_{k+1} \subseteq E_k$.

Se probará que $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = AS(x_n)$.

Sea $s \in E_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces s es de la forma $s = m_k + y$ donde $m_k \in AS(x_1, x_2, \dots, x_k)$ y $y \in [0, t_{k+1}]$. Así, $s - m_k \in [0, t_{k+1}]$. En particular, se tiene que $|s - m_k| \leq t_{k+1}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} t_{k+1} = 0$.

Si se toma un elemento $s' \in \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, existe una sucesión infinita $(m_1, m_2, \dots)$ de términos de $AS(x_n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} |s' - m_k| = 0$. Entonces para cualquier vecindad de s' existen puntos de $AS(x_n)$, lo que implica que s' pertenece a la clausura de $AS(x_n)$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y (x_n) sólo tiene términos positivos, entonces del teorema 1.4.3 se tiene que $AS(x_n)$ es cerrado, por lo tanto $s' \in AS(x_n)$.

Por otro lado, si $s \in AS(x_n)$, entonces para algún $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ se tiene que $s = \sum_{i\in I} x_i$. Sea $I' = I \cap \{1, 2, \dots, k\}$ y $I'' = I \cap \{k+1, k+2, \dots\}$. Entonces para todo $k \geq 0$, se tiene

$$
\left(\sum_{i\in I'} x_i\right) \in AS(x_1, x_2, \dots, x_k) \qquad \left(\sum_{i\in I''} x_i\right) \in [0, t_{k+1}]
$$

Como $s = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I'} x_i + \sum_{i\in I''} x_i$, entonces $s \in (AS(x_1, x_2, \dots, x_k) + [0, t_{k+1}])$. Se sigue que $s \in E_k$ para todo $k \geq 0$, por lo tanto $s \in \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$. $\square$

Ejemplo 1.4.8. *Considere la sucesión* $\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right)$. *Las tres primeras aproxima-*

ciones de $AS\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *son*

$$\begin{aligned}
E_0 &= \left[0, \frac{\pi^2}{6}\right] \\
E_1 &= \left[0, \frac{\pi^2}{6} - 1\right] \cup \left[1, \frac{\pi^2}{6}\right] \\
E_2 &= \left[0, \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}\right] \cup \left[1, \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{\pi^2}{6} - 1\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{\pi^2}{6}\right]
\end{aligned}$$

Observe que

$$\left[1, \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\right] \bigcap \left[\frac{5}{4}, \frac{\pi^2}{6}\right] \neq \emptyset$$

Este ejemplo permite ver que la única diferencia que hay entre los conjuntos E_k y los conjuntos C_k en la construcción de conjuntos centrales de Cantor, es que no necesariamente los intervalos en E_k son disjuntos para todo k.

Teorema 1.4.9. *Sea* (x_n) *una sucesión real, y suponga que para cada* $k \geq 1$*,*

$$|x_k| > \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i| \tag{1.5}$$

Entonces $AS(x_n)$ *es un conjunto central de Cantor.*

Demostración. Primero observe que de (1.5) se tiene que $|x_1| > \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|$. Entonces la serie $\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|$ está acotada por $|x_1|$ y observe que la sucesión de sumas parciales de dicha serie es monótona creciente, con lo que del teorema de convergencia monótona se concluye que la serie $\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|$ converge, con lo que la serie formada por la sucesión (x_n) converge absolutamente, lo que infiere que la serie de los términos negativos de $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ converge. En efecto, del lema (1.2.6), se puede asumir sin pérdida de generalidad que cada x_n es positivo pues trasladar un conjunto central de Cantor es de nuevo un conjunto central de Cantor.

En virtud a la proposición 1.4.7 sólo se necesita probar que todo E_k es central si (x_n) satisface 1.5. Recuerde que E_k es central si consiste en 2^k intervalos disjuntos y que E_{k+1} se forma de E_k eliminando un intervalo abierto central de cada intervalo de E_k.

Observe que

$$E_1 = [0, t_2] \cup [x_1, x_1 + t_2] = [0, t_2] \cup [x_1, t_1]$$

Entonces se obtiene que $E_1 \subseteq [0, t_1] = E_0$.

De la desigualdad 1.5 se sigue que $x_1 > \sum_{n=2}^{\infty} x_2 = t_2$, con lo que E_1 esta formado por dos intervalos cerrados disjuntos. Como $t_2 = t_1 - x_1$, el intervalo $(t_1 - x_1, x_1)$ es un intervalo central removido de $[0, t_1]$.

Suponga que para $k > 1$ se cumple que E_k es central. Esto implica que es una unión de 2^k intervalos disjuntos. De la definición 1.4.5 cada intervalo de E_k es una traslación de $[0, t_{k+1}]$.

Así, E_{k+1} consiste de intervalos que son traslaciones de $[0, t_{k+2}] \cup [x_{k+1}, t_{k+1}]$. De la desigualdad 1.5 se sigue que $x_{k+1} > t_{k+2}$, por lo tanto se tiene que E_{k+1} es una unión de traslaciones de conjuntos disjuntos. Como $t_{k+2} = t_{k+1} - x_{k+1}$, los intervalos de la forma (t_{k+2}, t_{k+1}) son intervalos centrados removidos de E_k, sin olvidar que ahora hay $2{\cdot}2^k = 2^{k+1}$ intervalos en E_{k+1}. Por lo tanto, E_{k+1} es central. Del principio de Induccción Matemática se sigue que todos los E_k son centrales. $\square$

Corolario 1.4.10. *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. *Entonces* $AS(x_n)$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $s_N \geq -\infty$ la suma de los términos negativos de (x_n). Si s_N es infinito, estamos en el caso de s_N divergente de la demostración del teorema (1.2.7) (ver ecuación 1.4), con lo que se tiene que $AS(x_n)$ es cerrado para cualquier caso. Si s_N es finita, entonces del lema (1.2.6) se puede asumir que (x_n) tiene términos positivos. Del teorema (1.4.3) se tiene que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, $AS(x_n)$ es cerrado. Además, del teorema (1.2.7) si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge entonces $AS(x_n) = [0, \infty)$. $\square$

No es cierto que todos los conjuntos realización son cerrados. Suponga que $x_n := 1 + 1/n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Observe que 1 no pertenece a $AS(x_n)$, pues no es posible hallar un subconjunto I de $\mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{i\in I} x_i = 1$.

Así, si se toma la sucesión $(1 + 1/n)$ completa, que pertenece a $AS(x_n)$, se tiene que su límite no converge en $AS(x_n)$, lo que implica que $AS(x_n)$ no es cerrado. Más aún, existen infinitos números positivos que no pertenecen a la realización de $AS(x_n)$, algunos de estos números son los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (0,1) \cup (1.5,2) \cup (2,3] \cup (\mathbb{Z}^+ \backslash \{2\})$. $3 \notin AS(x_n)$ pues hay dos caminos para ir en busca de ese número.

El primero es acercándose tomando al 2 y luego mirar los restantes términos de la sucesión. Pero por este lado hay problemas ya que todos los valores de la sucesión son mayores que uno. Si se omite el 2 y se busca con los demás términos se puede acercarse al 3 tomando tres términos avanzados en la sucesión, pero igual es un valor aproximado, más no el valor exacto.

Como $AS(x_n)$ no es cerrado, entonces no es un realizador alto(ver corolario (1.4.10)) y de lo mencionado anteriormente, existen infinitos reales positivos que no están en $AS(x_n)$, con lo que se afirma que $AS(1+1/n)$ debe ser contable.

Se presenta a continuación otro resultado importante en conjuntos realización.

Ejemplo 1.4.11. *Se probará que*

$$AS\left(\frac{2}{3^n}\right) = \mathfrak{C}$$

Primero se probará que para todo $k \geq 1$ se tiene que

$$\left|\frac{2}{3^k}\right| = \frac{2}{3^k} > \sum_{i=k+1}^{\infty} \left|\frac{2}{3^i}\right| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}$$

Para $k = 1$ observe lo siguiente

$$2\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3^i}\right) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

La afirmación se satisface para $k = 1$ pues $2/3 > 1/3$, esto es,

$$\frac{2}{3^1} > \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$$

Suponga que la afirmación se cumple para $k = n$. Se probará que para $k = n+1$ también *se cumple. Observe lo siguiente*

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3^n} &> \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\
\frac{2}{3^{n+1}} &> \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \cdots\right) \\
\frac{2}{3^{n+1}} &> \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \frac{2}{3^{n+4}} + \cdots \\
\frac{2}{3^{n+1}} &> \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{2}{3^i}
\end{aligned}
$$

Como esta sucesión satisface que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n} = 0$ *y la condición 1.5, se concluye del teorema 1.4.9 que* $AS\left(\frac{2}{3^n}\right)$ *es un conjunto central de Cantor.*

Por otro lado $\left(\frac{2}{3^n}\right)$ *no es un realizador alto.*

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$, *se tiene que* $AS(x_n) \subset [0,1]$. *Si se toma el primer elemento de la sucesión y se suma con algunos o todos los términos restantes, se obtiene la unidad, esto es,* $\frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$, *pero si se omite el primer término, la suma del resto da a lo más* $1/3$, *es decir,* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$.

Entonces el intervalo abierto $(1/3, 2/3)$ *no puede ser realizado por la sucesión. Así, para este primer paso,* $AS(2/3^n) \subset [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Además, como $\frac{2}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$ *y* $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9}$ *entonces el intervalo* $(1/9, 2/9)$ *no puede ser realizado por la sucesión. A su vez,* $\frac{8}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$ *y* $\frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{7}{9}$ *con lo que el intervalo* $(7/9, 8/9)$ *ha sido omitido del conjunto realización también. Así,* $AS(2/3^n) \subset [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. *Si se continua de esta manera se obtiene que* $AS(2/3^n) = \mathfrak{C}$.

Se puede conjeturar entonces que todos los conjuntos realizables no numerables son cerrados, se mostrará que no es cierta esta afirmación. El siguiente contraejemplo se debe a Dan Velleman en una comunicación personal a Rafe Jones (ver [1])

Considere las dos sucesiones dadas por

$$x_n = \frac{2}{3^n} \qquad\qquad y_n = 2 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

Cree una nueva sucesión z_n intercalando estas dos, de tal manera que los primeros términos de z_n sean $2/3, 3/2, 2/9, 11/6, 2/27, 35/18$. Recuerde que $AS(x_n)$ es el conjunto del tercio-medio de Cantor usual, y como $AS(z_n)$ contiene a ese conjunto, entonces se obtiene que $AS(z_n)$ es no numerable. Más aún, 2 es un punto de acumulación de $AS(y_n)$, y por lo tanto también de $AS(z_n)$. Ahora se prueba que $2 \notin AS(z_n)$. Suponga una subsucesión de z_n cuya suma sea 2. Note que esta subsucesión puede contener al menos un término de (y_n), pues $y_n > 1$ para todo n.
Más aún esta subsucesión debe contener al menos un término de (y_n) pues al sumar todos los términos de (x_n) se tiene 1. Note que para algún k se debe tener que

$$2 = \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}} + 2 - \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}}$$

Entonces existe una subsucesión de (x_n) cuyos términos suman $\frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}}$ para algún k. Sin embargo, como $3^k < 4 \cdot 3^{k-1}$ entonces $\frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}}$ esta en el abierto $(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k})$, así $\frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}} \notin \mathfrak{C}$.

Capítulo 2

Tipos de conjuntos realización

Se comienza este capítulo con unos comentarios acerca de algunas propiedades topológicas, que son útiles para explicar los tipos de conjuntos realización.

2.1. Preliminares

Para esta sección es importante aclarar que se omiten las demostraciones de los resultados presentados en esta sección, ya sea por tratarse de pruebas muy elaboradas o porque es necesario incluir conceptos que no son relevantes para el desarrollo de este trabajo.
De la teoría de conjuntos se sabe que un conjunto contable es aquel en el que existe una función inyectiva entre este conjunto y el conjunto de los enteros positivos y que si un conjunto es contable e infinito entonces es numerable. Los conjuntos contables son tenidos muy en cuenta de aquí en adelante.

Definición 2.1.1. *Un conjunto es denso en ninguna parte si el interior de su clausura es vacío. Si esto no se cumple, entonces se dice que es denso en alguna parte.*
Un conjunto es "de primera categoría" si es una unión contable de subconjuntos densos en ninguna parte.
Un espacio X es de Baire si toda intersección numerable de abiertos densos en X es un conjunto denso en X.

Teorema 2.1.2 (Teorema de la categoría de Baire). *Si X es un espacio de Hausdorff compacto o si es un espacio métrico completo, entonces X es un espacio de Baire, es decir, no es la unión de un número contable de subconjuntos densos en ninguna parte.*

Del Teorema de la categoría de Baire se tiene que $(\mathbb{R}, ||)$ es un espacio de Baire, pues $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio métrico completo.
Un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte es el conjunto del tercio medio de Cantor.

Proposición 2.1.3. *Las siguientes afirmaciones se cumplen para subconjuntos de primera categoría en $\mathbb{R}$*

- ◇ *Las traslaciones de un conjunto de primera categoría siguen siendo de primera categoría.*
- ◇ *La unión contable de conjuntos de primera categoría siguen siendo de primera categoría.*

Estas dos afirmaciones se cumplen cuando se reemplaza "de primera categoría" por "con interior denso".

2.2. Dos tipos de conjunto realización

En esta sección se discuten unos resultados que permiten "distinguir" los conjuntos realización en dos tipos: los que tienen interior vacío o los que tienen interior denso (con respecto al conjunto realización).
El siguiente resultado permite justificar el porqué se ha hecho un énfasis hasta ahora en sucesiones que convergen a cero.

Proposición 2.2.1. *Sea (x_n) una sucesión real. Entonces $AS(x_n)$ es o contable, un intervalo infinito, o una unión contable de traslaciones de $AS(x_{k_n})$, donde (x_{k_n}) es alguna subsucesión de (x_n) que converge a 0.*

Demostración. Sea E el conjunto de puntos de acumulación de (x_n). y sea I_p y I_n los conjuntos índices para los términos positivos y negativos, respectivamente. Se consideran dos casos: Suponga primero que para todo $\epsilon > 0$, se tenga que $E \cap (0, \epsilon) \neq \emptyset$.
Entonces existe $b_\epsilon > 0$ tal que $[0, b_\epsilon] \subseteq E$ y esto implica que existen infinitos términos de (x_n) en cada intervalo de la forma $\left[\frac{b_\epsilon}{k+1}, \frac{b_\epsilon}{k}\right)$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, con lo que se pueden escoger índices (n_k) tales que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y $x_{n_k} \in \left[\frac{b_\epsilon}{k+1}, \frac{b_\epsilon}{k}\right)$. Del teorema de la convergencia monótona se tiene que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$. Entonces para todo h se tiene que

$$\sum_{k=1}^{h} x_{n_k} \geq b_\epsilon \cdot \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{1}{k+1}\right)$$

Del criterio de comparación de series se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ diverge. Entonces, del teorema 1.2.7 se infiere que $AS(x_{n_k}) = [0, \infty)$. Como para cualquier ϵ se consideran solamente términos positivos de (x_n), entonces $AS(x_i \mid i \in I_p) = [0, \infty)$. Entonces, de la proposición 1.2.5 se sigue que

$$AS(x_n) = [0, \infty) + AS(x_i \mid i \in I_n)$$

Lo que implica que $AS(x_n)$ es un intervalo. En el caso $E \cap (-\epsilon, 0) \neq \emptyset$, un argumento análogo al propuesto sirve.
Suponga ahora que existe algún $\epsilon_0 > 0$ tal que $E \cap \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < |r| < \epsilon_0\} = \emptyset$.
Sea (x_{n_k}) la sucesión que consiste de los términos de (x_n) los cuales tengan un valor absoluto de al menos $\frac{\epsilon_0}{2}$. Tome como (x_{n_j}) la sucesión de términos de (x_n) que tengan un valor absoluto que sea menor a $\frac{\epsilon_0}{2}$. Se sigue de la proposición 1.2.5 que

$$AS(x_n) = AS(x_{n_k}) + AS(x_{n_j})$$

Como $E \cap \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < |r| < \epsilon_0\} = \emptyset$, en el intervalo $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ el único posible punto de acumulación de E es 0, que sería en el caso que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. En este caso $AS(x_{n_k})$ consiste de sumas finitas, lo que implica que $AS(x_{n_k})$ es contable, y esto implica que $AS(x_n)$ es una unión de traslaciones de $AS(x_{n_j})$. Por otro lado, si $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ entonces $0 \notin E$ y los conjuntos $AS(x_{n_k})$, $AS(x_{n_j})$ son contables. $\square$

El resultado más fuerte de esta sección se presenta ahora

Teorema 2.2.2. *Sea (x_n) una sucesión de números reales. Entonces $AS(x_n)$ es o un conjunto de primera categoría, y por lo tanto tiene interior vacío, o el interior de $AS(x_n)$ es denso en $AS(x_n)$.*

Demostración. Si se considera una sucesión (x_n) que converge a cero, entonces de la proposición (2.2.1) se obtiene que $AS(x_n)$ es una unión contable de traslaciones de $AS(x_n)$. Se concluye que si $AS(x_n)$ es una unión contable de traslaciones de un conjunto de primera categoría, entonces $AS(x_n)$ debe ser un conjunto de primera categoría. Un razonamiento similar se tiene para el caso en el que $AS(x_n)$ tiene interior denso. Por lo tanto es suficiente considerar el caso en el que (x_n) converja a cero para probar este teorema.

Asuma por un momento que este teorema es verdadero cuando $x_n \to 0$ y $x_n > 0$. Si se tiene que $x_n \to 0$ pero esta sucesión tiene términos positivos y negativos, entonces sume los términos negativos. Si esta suma diverge, entonces del teorema (1.2.7), $AS(x_n)$ es un intervalo y por lo tanto tiene interior denso.

Si la suma de términos negativos converge, entonces del lema (1.2.6) se tiene que $AS(x_n)$ es una traslación de $AS(|x_n|)$. Por hipótesis se tiene que $AS(|x_n|)$ es o un conjunto de primera categoría o tiene interior denso, así que es $AS(x_n)$ el que debe ser o de primera categoría o con interior denso. Por lo tanto para probar este teorema es suficiente considerar como hipótesis que $x_n \to 0$ y $x_n > 0$.

Se demostrará que si 0 está en la cerradura del interior de $AS(x_n)$, entonces $AS(x_n)$ tiene interior denso.

Sea $x \in AS(x_n)$ y tome $\epsilon > 0$ arbitrario y fijo. Como $x \in AS(x_n)$, por definición de conjunto realización existe una subsucesión (x_{n_l}) de (x_n) cuyos términos suman x. Observe que x es mayor o igual a cualquier suma de términos de (x_{n_l}) y que es una cota superior del conjunto de sumas de términos de (x_{n_l}). Entonces x es la menor de las cotas superiores para $AS(x_{n_l})$, es decir, es el supremo de $AS(x_{n_l})$.

Por lo tanto existe una suma finita $x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}$ tal que $x - \epsilon < x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \leq x$. Sea $\delta = min\{\epsilon, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$. Como $x_n \to 0$ y $x_n > 0$, entonces para δ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo natural n se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow x_n < \delta$$

Esto implica que se puede encontrar un término x_m con $m > N$ tal que $0 < x_m < x_N < \delta$. Considere un punto $z \in (x_m, x_N)$. Si $z \in (x_n)$ o z está en el interior de $AS(x_n)$ entonces $z \in AS(x_n)$. En caso contrario, Como 0 está en la clausura del interior de $AS(x_n)$, en la vecindad de centro cero y radio δ existen infinitos puntos del interior de $AS(x_n)$ con lo que se afirma que para cualquier vecindad de z hay puntos del interior de $AS(x_n)$.
Al utilizar el algoritmo utilizando en la demostración del teorema (1.2.7) se concluye que $z \in AS(x_n)$. Por lo tanto, se pueden encontrar a y b tal que $0 < a < b < \delta$ y $(a, b) \subseteq AS(x_n)$, con lo que todo elemento de (a, b) puede ser escrito como la suma de una subsucesión de (x_n), pero los términos $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ no pueden ser usados por ser mayores a todo término de (a, b). Se sigue que $x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} + (a, b) \subseteq AS(x_n)$. Note que si se considera un elemento $v \in (a, b)$ y se suma con $x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}$, su resultado es mayor a $x - \epsilon$ pero no pasa de $x + \epsilon$.
Entonces $x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} + (a, b) \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Como ϵ es arbitrario, cualquier vecindad de x contiene puntos del interior de $AS(x_n)$, con lo que se demuestra que x es la clausura del interior de $AS(x_n)$.
Se prueba ahora que si 0 no está en la cerradura del interior de $AS(x_n)$, entonces $AS(x_n)$ es de conjunto de primera categoría.
Como 0 no está en la cerradura del interior de $AS(x_n)$, existe algún $\epsilon > 0$ tal que $[0, \epsilon)$ no contiene elementos del interior de $AS(x_n)$, lo que implica $AS(x_n)$ no es un realizador alto y se sigue del teorema (1.2.7) que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Luego para ϵ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para algún n entero positivo

$$n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N-1} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| < \epsilon$$

$$n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{n=N}^{\infty} x_n \right| < \epsilon$$

Se tiene entonces que $AS(x_N, x_{N+1}, \ldots) \subseteq AS(x_n) \cap [0, \epsilon)$. Así, $0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} x_n < \epsilon$ para todo ϵ, esto implica que la suma $\sum_{n=N}^{\infty} x_n = 0$ y esto significa que $AS(x_N, x_{N+1}, \ldots)$ tiene interior vacío, además del teorema (1.4.3) se concluye que es cerrado y como tiene interior vacío, entonces debe ser denso en ninguna parte. Como

$$AS(x_n) = AS(x_1, \ldots, x_{N-1}) + AS(x_N, x_{N+1}, \ldots)$$

y al tenerse que $AS(x_1, \ldots, x_{N-1})$ es finito, $AS(x_n)$ es una unión finita de conjuntos densos en ninguna parte, y por lo tanto es un conjunto de primera categoría. $\square$

El siguiente resultado da un criterio sencillo para determinar si un conjunto realización es o una unión finita de intervalos cerrados o una unión finita de conjuntos centrales de Cantor. Compare el lector este resultado con el teorema 2.2.2.
Se ha dado una condición aún más fuerte, pero a cambio, no se aplica para toda sucesión real. Más precisamente,

Proposición 2.2.3. *Sea (x_n) una sucesión real, y suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existe y es igual a L. Entonces $AS(x_n)$ es una unión finita de intervalos cerrados si $\frac{1}{2} < L < 1$ y una unión finita de conjuntos centrales de Cantor si $0 \leq L < \frac{1}{2}$.*

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L$ y $L < 1$, tome un número z tal que $L < z < 1$. Entonces para $0 < z - L$ existe N tal que

$$\begin{aligned}
n \geq N &\Rightarrow \left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - L\right| < z - L \\
n \geq N &\Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < z \\
n \geq N &\Rightarrow \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < \frac{z^{n+1}}{z^n} \\
n \geq N &\Rightarrow \frac{|x_{n+1}|}{z^{n+1}} < \frac{|x_n|}{z^n}
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que la sucesión $\left(\frac{|x_n|}{z^n}\right)$ es decreciente para $n \geq N$. En particular, cuando $n \geq N$ se tiene que $\frac{|x_n|}{z^n} \leq \frac{|x_N|}{z^N}$ y esto se puede reescribir como $|x_n| \leq \beta z^n$ con

$\beta = \frac{|x_N|}{z^N}$.

Así, la serie $\sum |x_n|$ esta dominada por $\sum z^n$ y del criterio de comparación de series se tiene que $\sum |x_n|$ converge, lo que implica que $\sum x_n$ converge y de la proposicion 1.1.1 se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Si $\frac{1}{2} < L < 1$, de la convergencia de (x_n) se tiene que existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\frac{|x_n+1|}{|x_n|} > \frac{1}{2}$. Por lo tanto, como $\sum x_n$ converge y $\frac{|x_n+1|}{|x_n|} > \frac{1}{2}$, del corolario (1.2.13) se tiene que $AS(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots)$ debe ser un intervalo cerrado. Se sigue entonces de la descomposición

$$AS(x_n) = AS(x_1, \ldots, x_{n_0-1}) + AS(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots)$$

que $AS(x_n)$ es la unión de un número finito de traslaciones de un intervalo cerrado.

Si $0 \leq L < \frac{1}{2}$, entonces de la convergencia de (x_n) es posible encontrar $n_0 > 0$, tal que$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Observe que $|x_{n+2}| < \frac{1}{2}|x_{n+1}| < \frac{1}{4}|x_n|$. Suponga que esta propiedad se cumple para $n+k$. Se probará que para $n+k+1$ se cumple. Para esto note que $|x_{n+k+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+k}| < \frac{1}{2^{k+1}}|x_n|$. Del principio de Inducción matemática se tiene que para todo $i \geq 1$ y $n \geq n_0$, se tiene $|x_{n+i}| < \frac{1}{2^i}|x_n|$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n+i}| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_n| = |x_n| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = |x_n|.$$

Se sigue del Teorema (1.4.9) que $AS(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$ es un conjunto central de Cantor. Por lo tanto $AS(x_n)$ es una unión finita de conjuntos centrales de Cantor. $\square$

Ejemplo 2.2.4. *Si* $1 < c \leq 2$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} 1/c^n = 0$ *y* $\frac{1}{2c} \leq \frac{1}{c^{n+1}}$ *y por corolario* (1.2.13) *se tiene que* $AS(1/c^n)$ *es un intervalo, pero con la proposición* (2.2.3) $AS(1/c^n)$ *es una unión finita de intervalos cerrados. Mediante un razonamiento similar, si* $c > 2$ *entonces del Teorema* (1.4.9) *se tiene que* $AS(1/c^n)$ *es un conjunto central de Cantor, pero de la proposición* (2.2.1) *es una unión finita de conjuntos centrales de Cantor.*

2.3. Algunos ejemplos de conjuntos realización especiales

Hasta este punto se ha visto que muchos conjuntos realización son intervalos, y por lo tanto deben ser conexos. Por supuesto, también existen conjuntos realización que son conjuntos de Cantor, lo que implica que son totalmente disconexos. A continuación se presenta un ejemplo de un conjunto realización que es unión de intervalos disjuntos.

Ejemplo 2.3.1. *Sea* (x_n) *sucesión real definida como* $x_1 = 2$*,* $x_n = 1/2^{n-1}$ *para* $n \geq 2$*. Algunos términos de esta sucesión son* $2, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots$*. Observe que la suma de los términos* $2, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots$ *es* 1*. Como se sabe que* $AS(1/2^n) = [0, 1]$*, y haciendo notar que cualquier suma de los términos* $1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots$ *con* 2 *produce un número que está entre dos y tres, entonces se afirma que* $AS(x_n) = [0, 1] \cup [2, 3]$*.*

De lo anteriormente mencionado, uno puede preguntarse si existen conjuntos realización que contengan un intervalo pero que no sea una unión de intervalos. Conjuntos como este existe, el siguiente ejemplo se debe también a Velleman (ver [1]).

Ejemplo 2.3.2. *Defina la sucesión* (x_n) *como* $x_1 = 3/5$*,* $x_2 = 2/5$*,* $x_3 = 2/5$*,*$x_4 = 2/5$ *y para* $n > 4$ *haga* $x_n = a \cdot x_{n-4}$*, donde* a *es escogido de manera que*

$$\frac{1}{5} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n < \frac{2}{9} \tag{2.1}$$

Por ejemplo, $a = 19/109$ *cumple. Ponga* $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$*, con lo que la cantidad* $\frac{9}{5}(b+1)$ *se puede ver como*

$$\frac{9}{5}(b+1) = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{1-a}\right) = \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Note que ese valor obtenido es el suma de todos los términos de (x_n)*. Esto implica que* $AS(x_n) \subseteq [0, \frac{9}{5}(1+b)]$*.*

Por otro lado se afirma que $AS(x_n)$ no es una unión finita de intervalos. Primero observe que $\sum_{i=5}^{\infty} x_i = \frac{9}{5}b$, es decir, se omiten los cuatro primeros términos de la sucesión. Además observe que por (2.1) tenemos que $\frac{9}{5}\sum_{n=1}^{\infty} a^n < \frac{2}{5}$, con lo que la sucesión (x_n) no es capaz de realizar números que estén en $(\frac{9}{5}b, \frac{2}{5})$, pues el menor número disponible es $2/5$ en lo que queda por tomar de (x_n).

Esto implica que $AS(x_n)$ omite el intervalo $(\frac{9}{5}b, \frac{2}{5})$. De manera similar, por (2.1) se tiene que $\frac{9}{5}\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot a < \frac{2}{5} \cdot a$ con lo que (x_n) no es capaz de realizar números que estén en $(\frac{9}{5}b \cdot a, \frac{2}{5}a)$, pues el menor número disponible es $2a/5$ en lo que queda por tomar de (x_n). Esto implica que $AS(x_n)$ omite el intervalo $(\frac{9}{5}b \cdot a, \frac{2}{5}a)$.

Por inducción se puede concluir que $AS(x_n)$ omite el intervalo $(\frac{9}{5}ba^i, \frac{2}{5}a^i)$ para todo $i \geq 1$. Note que para alguna vecindad del cero, (x_n) omite un intervalo de la forma $(\frac{9}{5}ba^i, \frac{2}{5}a^i)$ con i lo suficientemente grande para que ese intervalo esté en la vecindad mencionada.

Por lo tanto $0 \in AS(x_n)$ pero $AS(x_n)$ omite un intervalo en todas las vecindades de 0. Se sigue que $AS(x_n)$ no es una unión finita de intervalos.

Considere la la sucesión y_n definida por $y_n = \frac{1}{5}a^i$ para $5i+1 \leq n \leq 5i+5$. Entonces los primeros cinco términos de y_n son todos $1/5$, los siguientes son todos $a \cdot 1/5$, los siguientes cinco son $a^2 \cdot 1/5$, y así sucesivamente. De (2.1) se tiene que $\frac{1}{5} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Observe lo *siguiente*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n \\
\frac{1}{5}a^i &\leq a^i \sum_{n=1}^{\infty} a^n \\
\frac{1}{5}a^i &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{n+i} \\
\frac{1}{5}a^i &\leq \sum_{n=i+1}^{\infty} a^n \\
\frac{1}{5}a^i &\leq \frac{5}{5} \sum_{n=i+1}^{\infty} a^n \\
\frac{1}{5}a^i &\leq 5 \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{a^n}{5}
\end{aligned}$$

De la última desigualdad obtenida se concluye que $|y_i| \leq \sum_{n=i+1}^{\infty} |y_n|$ *y como* $a > a^2 > a^3 > \ldots > a^n > \ldots$ *pues* $a < 1$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. *Del Teorema* (1.2.7) *se tiene que* $AS(y_n)$ *es un intervalo y por lo tanto* $AS(y_n) = [0, 1+b]$.

Sea $c \in [\frac{2}{5}(1+b), \frac{7}{5}(1+b)]$. *Observe que c puede ser escrito como* $\frac{2}{5}(1+b)$ *más un elemento de* $AS(y_n)$, *ya que* $AS(y_n)$ *es conexo. Se tiene entonces que*

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} a^n + \left[\frac{k_0}{5} + \frac{k_1}{5}a + \frac{k_2}{5}a^2 + \cdots\right] && (0 \leq k_n \leq 5) \\
&= \frac{2+k_0}{5} + \frac{2+k_1}{5}a + \frac{2+k_2}{5}a^2 + \cdots && (0 \leq k_n \leq 5)
\end{aligned}$$

Observe que c esta escrito de forma tal que es una representación en base a y todas las fracciones de la forma $(2+k)/5$, $0 \leq k \leq 5$ *se pueden obtener sumando subcolecciones adecuadas de* $(3/5, 2/5, 2/5, 2/5)$. *Se concluye que* $c \in AS(x_n)$, *con lo que se ha probado que*

$$\left[\frac{2}{5}(1+b), \frac{7}{5}(1+b)\right] \subset AS(x_n) \subseteq \left[0, \frac{9}{5}(1+b)\right]$$

Con $AS(x_n)$ *un conjunto realización que no es una unión finita de intervalos.*

Ahora bien, de la desigualdad (2.1) note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5} a^n < \frac{2}{15}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5} a^n < \frac{4}{45}$$

Esto implica que las series cuyo n-ésimo término son $\frac{3}{5}a^n$ y $\frac{2}{5}a^n$ convergen absolutamente. Por lo tanto del Teorema (1.4.9) se sigue que las sucesiones $(\frac{3}{5}a^n)$ y $(\frac{2}{5}a^n)$ tienen como conjunto realización un conjunto central de Cantor. Al observar la sucesión (x_n) note que tomando los términos de la sucesión que dejen residuo 1 al dividirlos por 4 se forma una subsucesión cuyo conjunto realización es un conjunto central de Cantor.
Así, se pueden crear cuatro subsucesiones cuyo conjunto realización es un conjunto central de Cantor y se tiene entonces que $AS(x_n)$ es la suma de cuatro conjuntos centrales de Cantor, y se ha mostrado que esta suma puede contener un intervalo sin ser una unión disyunta de intervalos.

Se puede extender la Proposición (2.2.3) de varias maneras. Si $L > 1$, considere un z tal que $1 < z < L$. Note que se obtiene $\sum z^n \leq \sum |x_n|$ y como $z > 1$, entonces la serie $\sum |x_n|$ diverge, lo que implica que no existe subsucesión infinita de (x_n) que pueda tener una suma convergente, lo que, en virtud de la Proposición (2.2.1) da que $AS(x_n)$ es contable. Por otra parte, si $L = 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces de la convergencia de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ para el valor 1/2 existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo natural n, $n \geq N$ implica

$$\frac{1}{2} < \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$
$$\frac{1}{2}|x_n| < |x_{n+1}|$$

Por lo que se obtiene un caso en que $\frac{1}{2}|x_n| < |x_{n+1}|$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces $As(x_n)$ se puede ver como una unión finita de intervalos cerrados, siguiendo el mismo argumento de la demostración de la proposición (2.2.3) en el caso $1/2 < L < 1$.
Considere la sucesión $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$. Observe que esta sucesión converge a cero, pues esta

conformada por la resta de dos sucesiones con límite cero. Además, se tiene que

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}} \right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \frac{1}{2}$$

Una característica interesante de la sucesión $(1/2^n) = (1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$ es que satisface la siguiente igualdad para k entero positivo

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Para $k = 1$, se tiene que $\frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = (2 - 1 - 1/2) = 1/2$. Suponga que para $k = m$ se satisface esta igualdad. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^m} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^{m+1}} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta propiedad se cumple para todo entero positivo en virtud del principio de inducción matemática. Se hace notar también que para todo m entero positivo,

$$-\frac{1}{3^m} \leq -\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

como paso base, observe que $-\frac{1}{3} \leq -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = (\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$. Suponga que para

$k = m$ se satisface esta igualdad. Entonces,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3^m} &\leq -\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3^k} &\leq \frac{1}{3} \cdot -\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
-\frac{1}{3^{k+1}} &\leq -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = -\sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{3^i}
\end{aligned}$$

Con estos resultados se procede de la siguiente manera: con $n \in \mathbb{Z}^+$, note que $2^n < 3^n$ y de aquí se tiene que $0 < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ en general. Sea k un entero positivo cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k} \right| &= \frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right|
\end{aligned}$$

Se concluye que la sucesión $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ cumple con la ecuación (1.2) y es una sucesión convergente a cero. Del Teorema (1.2.7) se tiene que su conjunto realización es un intervalo, y como la serie que forma esa sucesión es convergente, entonces es un intervalo cerrado. Haciendo un trabajo parecido al hecho con $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$, se puede ver que la sucesión $\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ satisface, para cada k, la condición (1.5) del Teorema 1.4.9, a saber $|x_k| > \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|$. Por lo tanto su conjunto realización es un conjunto de Cantor.

2.3.1. Un ejemplo de un conjunto realización "misterioso"

Existen sucesiones que tienen conjuntos de realización envueltos en "misterio", como se muestra a continuación. Jones resalta la importancia que tiene el siguiente ejemplo en su artículo (ver [1]).

La sucesión

$$\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(-3)^n}\right)$$

satisface (1.2) para k impar y (1.5) para k par, por lo discutido con las sucesiones $\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ y $\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$. Se procede a dar una intuición descriptiva de cómo esta alternación afecta el conjunto realización.

Recuerde los conjuntos C_k definidos como $C_0=[0,t_1]$ y $C_k=AS(x_1,\ldots,x_k)+[0,t_{k+1}]$ en el Teorema (1.4.9).

Para una sucesión cualquiera (x_n), cada C_k consiste de 2^k intervalos no necesariamente disjuntos, mientras que C_{k+1} es formado al dividir cada intervalo de C_k en dos intervalos no necesariamente disjuntos, los cuales se referirán aquí como “intervalos nuevos”.

Si (1.2) se cumple para k entonces cada par de intervalos nuevos se traslapa, de lo contrario, se tendría que el conjunto resultante tendría “huecos”, en los intervalos donde no se hallan traslapado, y esto puede llevar a que el conjunto resultante no sea un intervalo, hecho que es imposible pues al satisfacer (1.2) y satisfacer que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(-3)^n}\right)=0$, se garantiza que el conjunto realización de esta sucesión es un intervalo por el teorema (1.2.7).

Por otro lado, si cumple (1.5) para k entonces cada pareja de intervalos nuevos es disyunta, de lo contrario sería un intervalo y esto no es cierto para conjuntos generales de Cantor. Cada par de intervalos nuevos es disjunto cuando k es par y superpuesto cuando k es impar.

Las aberturas que son introducidas cuando k es par pueden ser cubiertas por la superposición de la fase anterior. Es un problema abierto saber si algún intervalo sobrevive todas las fases sin ser punzado.(Ver Figura 2.1 para una ilustración.)

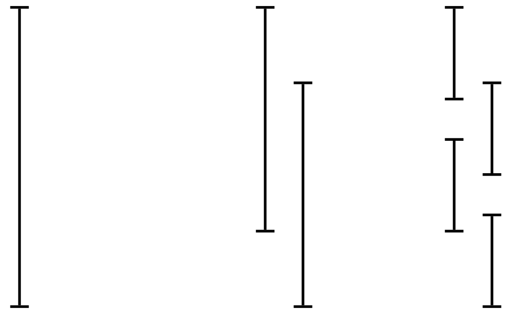

Figura 2.1 – Intervalos de tres fases sucesivas de aproximación a $\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(-3)^n}\right)$

Capítulo 3

Conjuntos realizables

3.1. Una Introducción

Se dice que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es realizable si puede ser obtenido como un conjunto realización de una sucesión real. Se darán ejemplos de algunos conjuntos realizables y se examina si es posible realizar algunos conjuntos bien conocidos, como por ejemplo, $\mathbb{Q}$.

Para $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $AS(r/2^n) = [0, r]$.
La sucesión $(r/2^n)$ satisface que $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{2^n} = 0$ y que $\frac{r}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2^n}$, haciendo un trabajo parecido al hecho con $(1/2^n)$, se satisfacen las hipótesis del teorema (1.2.7) y se tiene lo afirmado.

Proposición 3.1.1. *Sea S un conjunto realizable(finito o infinito) y $r \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\bigcup_{s\in S}[s, s + r]$$

es realizable.

Demostración. Sea (x_n) que satisface $AS(x_n) = S$, y considere la sucesión

$(y_n) = (x_1, \frac{r}{2}, x_2, \frac{r}{2^2}, \ldots)$. De la proposición 1.2.5 se tiene que

$$AS(y_n) = S + [0, r] = \bigcup_{s \in S} [s, s + r]$$

. $\square$

Considere ahora un conjunto central de Cantor C cuyo intervalo original tiene a 0 como punto menor. Para especificar el conjunto solo se necesita saber la longitud L del intervalo original y la longitud a_n de los intervalos centrales removidos en la fase n.
Se procede a construir una sucesión que tenga las propiedades siguientes:

$$|x_n| > \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$$
$$\mathcal{K} = |x_n| - \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$$

Con $\mathcal{K}$ como la longitud de cada uno de los 2^n removidos en la fase n. La sucesión se define así: tome $x_1 = \frac{1}{2}(L + a_1)$ y como $n-$ ésimo término

$$x_n = \frac{L + 2^{n-1}a_n - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}a_k}{2^n}$$

Observe que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, esto viene del hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pues entre mayor sea la fase del conjunto, la longitud de cada intervalo a remover se hace más y más pequeña. Se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} \frac{L}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}a_n}{2^n} = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}a_k}{2^n} = 0$.
Para probar las dos propiedades mencionadas, hay que tener presente que a_n es una

sucesión positiva y al probarse que $|x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots| > 0$, observe que

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots| &= \left| x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| \\
\left| x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| &\geq \left| |x_n| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| \right| \\
\left| |x_n| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| \right| &\geq 0 \\
|x_n| &\geq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right|
\end{aligned}$$

La cual es una condición suficiente para probar que esa sucesión realiza un conjunto central de Cantor. (ver teorema 1.4.9). Entonces basta con probar que, para cada n

$$x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots = a_n > 0$$

y que $x_1 + x_2 + \cdots = L$, para satisfacer la ecuación 1.5

Al hacer la operación $x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots$ uno se encuentra con tres tipos de sumas; La primera es

$$\begin{array}{l}
-\dfrac{a_1}{2^n} - \dfrac{a_2}{2^{n-1}} - \ldots - \dfrac{a_{n-2}}{2^3} - \dfrac{a_{n-1}}{2^2} \\
\dfrac{a_1}{2^{n+1}} + \dfrac{a_2}{2^n} + \ldots \quad + \dfrac{a_{n-2}}{2^4} + \dfrac{a_{n-1}}{2^3} + \dfrac{a_n}{2^2} \\
\dfrac{a_1}{2^{n+2}} + \dfrac{a_2}{2^{n+1}} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{2^5} + \dfrac{a_{n-1}}{2^4} + \dfrac{a_n}{2^3} + \dfrac{a_{n+1}}{2^2} \\
\dfrac{a_1}{2^{n+3}} + \dfrac{a_2}{2^{n+2}} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{2^6} + \dfrac{a_{n-1}}{2^5} + \dfrac{a_n}{2^4} + \dfrac{a_{n+1}}{2^3} + \dfrac{a_{n+2}}{2^2} \\
\vdots
\end{array}$$

Observe que los términos $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ al sumarse dan cero y que para cada $k \geq n$ el término resultante es $a_k/2$. El segundo tipo es

$$\frac{2^{n-1}}{2^n}a_n - \frac{2^n}{2^{n+1}}a_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}a_{n+2} - \cdots = \frac{a_n}{2} - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+2}}{2} - \cdots - \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2}$$

El último tipo de términos es nulo,

$$\frac{L}{2^n} - \frac{L}{2^{n+1}} - \frac{L}{2^{n+2}} - \cdots = 0$$

Al hacer la suma de todos estos términos se obtiene que $x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$. Con respecto a la suma $x_1 + x_2 + \cdots$ al hacer la suma y factorizar para cada a_n, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2^2}a_n - \frac{1}{2^3}a_n - \ldots &= \frac{1}{2}a_n - a_n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = 0 \end{aligned}$$

Los términos de L suman

$$\frac{1}{2}L + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{L}{2^n} = L$$

Proposición 3.1.2. *Sea (x_n) una sucesión(posiblemente finita) real.*
Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente a r, entonces $AS(x_n)$ es simétrico con respecto a $\frac{r}{2}$.

Demostración. Se demostrará que si $s \in AS(x_n)$, entonces $(r - s) \in AS(x_n)$. Si $s \in AS(x_n)$, entonces existe $I \subseteq \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{i \in I} x_i = s$. Definiendo $J = \mathbb{Z}^+ \setminus I$, se obtiene que $r - s = \sum_{j \in J} x_j$, con lo que $(r - s) \in AS(x_n)$. □

3.2. Resultados acerca de conjuntos realizables

Se empieza con una caracterización de conjuntos realización no contables.

Proposición 3.2.1. *Sea (x_n) una sucesión infinita real. Entonces $AS(x_n)$ es no contable si y sólo si (x_n) tiene una subsucesión convergente a 0.*

Demostración. Suponga primero que (x_n) tiene una subsucesión que converge a 0. Tome los elementos que forman esta subsucesión y cree una nueva sucesión en la cual estén solamente los términos ya mencionados. Por conveniencia en la notación, sea esta nueva sucesión (x_n). Entonces se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x_n \to 0$. Si existe un k_0 tal que $k > k_0$ implique

$$|x_k| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|, \tag{3.1}$$

entonces se sigue del Teorema 1.2.7 que $AS(x_n)$ contiene un intervalo, y es por lo tanto no contable.

Si no existe k_0 tal que (3.1) se satisfaga para $k > k_0$ entonces la sucesión de sumas parciales esta acotada y es monótona creciente(por esta compuesta de sólo valores no negativos). Entonces $\sum |x_n|$ converge. Seleccionando valores consecutivos mayores a k_0, esto es, $k_j \leq k_{j+1} \leq k_{j+2} \leq \cdots$, se forma una sucesión (k_j) tal que para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, se tenga $k_{j+1} \leq k_j + 1$. Entonces se obtiene la desigualdad

$$|x_{k_j}| > \sum_{n=k_j+1}^{\infty} |x_n| \geq \sum_{i=j+1}^{\infty} |x_{k_i}|$$

Por el Teorema 1.4.9, $AS(x_{k_j})$ es un conjunto central de Cantor, y por lo tanto no es contable.

Ahora suponga que (x_n) no contiene una subsucesión convergente a 0. Entonces ninguna suma de términos infinita puede converger, así todos los elementos de $AS(x_n)$ son sumas finitas de términos. Por lo tanto $AS(x_n)$ es contable. $\square$

Se presenta una condición suficiente pero no necesaria para saber si un conjunto realización no tiene puntos aislados.

Proposición 3.2.2. *Si $AS(x_n)$ es infinito no numerable, entonces no tiene puntos aislados*

Demostración. Note que, por la Proposición 2.2.1 existe una subsucesión (x_{n_j}) cuyo límite es 0. Sea $s = \sum_{i \in I} x_i \in AS(x_n)$. Si I es finito, sea k su elemento más grande y sea l un mínimo tal que $x_{n_l} > k$. Entonces $s + x_{n_l}, s + x_{n_{l+1}}, s + x_{n_{l+2}}, \ldots$ es una sucesión infinita de elementos de $AS(x_n)$ convergente a s, pues $\lim_{n_l \to \infty} x_{n_l} = 0$.

Si I es infinito, las sumas parciales de $\sum_{i \in I} x_i$ forman una sucesión infinita de elementos de $AS(x_n)$ convergente a s. Por lo tanto $AS(x_n)$ no tiene puntos aislados. $\square$

Observación 3.2.3. *El reciproco de la proposición 3.2.2 no es cierto. Se afirma que existe una sucesión (x_n) tal que $AS(x_n) = \mathbb{Q}$ como se demuestra en la sección 3.3. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados en $\mathbb{R}$. Se ha mostrado un ejemplo de un conjunto realizable que no tiene puntos aislados pero es numerable.*

Ahora se puede estudiar que subconjuntos conocidos de $\mathbb{R}$ son realizables.

Corolario 3.2.4. *Si $S \subset \mathbb{R}$ es un conjunto contable de números no negativos teniendo al 0 como un punto de acumulación, entonces S no es realizable. En particular, el conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ no es realizable.*

Demostración. Suponga que existe (x_n) sucesión tal que $AS(x_n) = S$. Observe que los términos de(x_n) son no negativos, pues de lo contrario se tendría que $AS(x_n) \neq S$. Si se supone que $x_n > \epsilon$ para todo n y para algún $\epsilon > 0$, entonces $AS(x_n) \cap (0, \epsilon)$ es vacío, lo cual contradice el hecho de que 0 es un punto de acumulación de S. Por lo tanto (x_n) debe tener una subsucesión convergente a 0. Por la Proposición 3.2.1, $AS(x_n)$ es no contable, lo cual es una contradicción. $\square$

3.3. ¿Son $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ realizables?

Se empieza esta sección con una afirmación curiosa e interesante: si $r < 0$ con $r \in \mathbb{Q}$, entonces $\{r\} \cup \mathbb{Q}^+$ es realizable.
Sea $q_1, q_2, \ldots$ una enumeración de $\mathbb{Q}^+$. Considere la siguiente sucesión: $x_1 = r$ y para $n \geq 2$, $x_n = -r + q_{n-1}$. Note que la suma $x_1 + x_i$ para algún $i \geq 2$ es igual a q_{i-1} y la "suma" consistente al omitir todos los términos de (x_n) menos el primero es r; con lo que se obtiene que $\mathbb{Q}^+ \subseteq AS(x_n)$ y $r \in AS(x_n)$. Para la otra contenencia, las posibles sumas finitas que se pueden hacer con términos de (x_n) son r en el caso de la omisión de todos términos de la sucesión excepto el primero, o algún número racional no negativo; Si se considera sumas infinitas de términos de (x_n) cualquiera de estas sumas diverge ($\mathbb{Q}^+$ no

está acotado superiormente). Se concluye que $AS(x_n) = \{r\} \cup \mathbb{Q}^+$.

$\mathbb{Q}$ es también realizable. Sea (x_n) una enumeración de los racionales con valor absoluto al menos 1. Como (x_n) no tiene subsucesiones con límite 0, de la proposición 1.1.1, ninguna suma infinita de términos puede converger. Las sumas finitas de términos son números racionales, así $AS(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$. Por otro lado, de la definición de (x_n), $AS(x_n)$ contiene todos los racionales de valor absoluto al menos uno. Veamos que también contiene a los racionales con valor absoluto menor que uno.

Si $q \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$, entonces $-3 < q - 2 < -1$, por lo mencionado anteriormente, $\{q - 2\} \cup \mathbb{Q}^+$ es realizable, por lo tanto $2 - (q - 2)$ esta en conjunto realización de la sucesión (x_n) y como $-1 < q - 2 < 1$ entonces todo racional en el intervalo $(-1, 1)$ es realizable, luego $\mathbb{Q}$ es realizable.

Considere $\mathbb{I} = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{ r es irracional}\} \cup \{0\}$. El interior de $\mathbb{I}$, siendo vacío(dado un irracional, no existe una vecindad que contenga sólo irracionales, también habrán racionales), no puede ser denso en $\mathbb{I}$. Se afirma que $\mathbb{I}$ no es realizable.

Si $\mathbb{I}$ fuese realizable, entonces por el Teorema 2.2.2 debe ser de primera categoría. Para ver que esto no es posible, primero note que $\mathbb{Q}$ es pobre, pues los conjuntos unipuntuales de $\mathbb{Q}$ son cerrados y tienen interior vacío en $\mathbb{Q}$, con el detalle adicional de que $\mathbb{Q}$ es la unión numerable de sus subconjuntos unipuntuales. Como uniones contables de conjuntos de primera categoría siguen siendo de primera categoría, se obtiene que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ es pobre. Pero los espacios métricos completos como $(\mathbb{R}, ||)$ no pueden ser de primera categoría por el teorema de categoría de Baire.

Capítulo 4

Conclusiones

- $\surd$ Se elaboró un trabajo basado en el artículo de Rafe Jones (vea [1]), cuyo contenido reúne varios resultados importantes referentes a la teoría de los conjuntos realización. Se estudió el concepto de conjunto realización y las distintas propiedades que caracterizan a estos subconjuntos de los reales.

- $\surd$ Se presentaron varios conceptos y propiedades en las cuales se describen formalmente las condiciones suficientes para los que el conjunto realización de una sucesión sea o un intervalo o un conjunto de Cantor.

- $\surd$ Se presentaron y explicaron ejemplos de conjuntos destacados de los reales que son realizables y de conjuntos que no lo son.

- $\surd$ Se hizo un análisis de los resultados que garantizan que el conjunto realización de una sucesión sea o conexo o totalmente disconexo; hecho que permite explicar el porqué $(1/2^n)$ y $(2/3^n)$ tienen conjuntos realización tan diferentes.

Bibliografía

[1] Rafe Jones. *Achievement Sets of Sequences. Amer. Math. Monthly 118* (Junio-julio 2011) p.509-521.

[2] Sonia Sabogal y Gilberto Arenas. *Una introducción a la geometría fractal*. Ediciones UIS, Bucaramanga Colombia, 2011.

[3] Tom Apostol. *Calculus*. Volumen I, Segunda Edición. Editorial Reverté, Barcelona España, 1988, pp 457-462.

[4] Tom Apostol. *Calculus*. Volumen I, Segunda Edición. Editorial Reverté, Barcelona España, 1988.

[5] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Volumen I, Séptima Edición. IMPA, Rio de Janeiro Brasil, 2004.

[6] Robert Bartle y Donald Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Tercera Edición. Limusa Wiley, México, 2010.

[7] William Dunham. *Euler: El maestro de todos los matemáticos*. Segunda Edición. Ediciones Nivola, España 2006, pp 144-145.

[8] Helga Fetter Nathansky y Berta Gamboa de Buen. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. CIMAT, México, 2008.