

EL ESPACIO ℓ_∞/c_0

SOFÍA VANEGAS MONCADA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

EL ESPACIO ℓ_∞/c_0

SOFÍA VANEGAS MONCADA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director
Michael Alexander Rincón Villamizar
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

DEDICATORIA

A mis padres, Martha y Efraín.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a mi familia por el apoyo incondicional que he recibido y por creer en mí, incluso en los momentos en que yo misma dudaba. El amor de mi mamá, la orientación y respaldo de mi papá, el ejemplo de mis hermanas, el cuidado de mi nona, la complicidad de mi tía y la competitividad compartida con mi tío han sido fundamentales en este camino. También agradezco a mis abuelos, primos y a aquellas personas que la vida puso en mi camino y se convirtieron en familia. A mis mascotas, por su compañía incondicional, y de manera especial a mi Luna, que me acompaña desde el cielo.

Le agradezco a mi director de tesis, el profesor Michael Rincón, por su guía y apoyo constante, fundamentales para definir el área en la que hoy desarrollo este trabajo. Asimismo, agradezco a todos los profesores que hicieron parte de mi formación como Matemática, por sus enseñanzas y su aporte a mi crecimiento académico y personal. Extiendo también mi gratitud a mi alma mater, la Universidad Industrial de Santander (UIS), por brindarme oportunidades, espacios y experiencias que acompañaron este proceso.

Finalmente, agradezco a Dios y a la vida por mi paso por la universidad y por permitirme conocer a personas tan maravillosas como lo son mis amigos. Su compañía y amistad hicieron de este camino una experiencia mucho más amena, y las conexiones que formé, estoy segura, van más allá de la universidad o del colegio. Agradezco a mi mejor amigo, a mis amigos de la carrera, a aquellos amigos que, aunque pertenecen a otras carreras, han estado presentes y a mis amigas del colegio, por su apoyo, su compañía y por todo lo vivido. Sin duda, ha sido la etapa más bonita de mi vida, y gran parte de ello ha sido gracias a ustedes.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	7
1. Preliminares	8
1.1. Filtros	8
1.1.1. La compactificación de Stone-Čech de \mathbb{N}	8
1.2. Espacios normados y espacios de Banach	14
2. Identificaciones Isométricas	17
2.1. ℓ_∞ es isométrico a $C(\beta\mathbb{N})$	17
2.2. ℓ_∞/c_0 es isométrico a $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$	20
3. Complementación en espacios de Banach	26
3.1. Complementación en espacios de Banach	26
3.2. c_0 no es complementado en ℓ_∞	30
BIBLIOGRAFÍA	35

LISTA DE FIGURAS

	pág.
3.1. Gráfica de algunas funciones f_n	27

RESUMEN

TÍTULO: EL ESPACIO ℓ_∞/c_0 *

AUTOR: SOFÍA VANEGAS MONCADA **

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS DE BANACH, ESPACIOS COCIENTE, ULTRAFILTROS, COMPACTIFICACIÓN DE STONE–ČECH, IDENTIFICACIONES ISOMÉTRICAS, COMPLEMENTACIÓN, ℓ_∞ , c_0 .

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo estudia el espacio cociente ℓ_∞/c_0 dentro del marco del análisis funcional, con énfasis en sus propiedades estructurales y sus relaciones con espacios de funciones continuas. A partir de los fundamentos de los espacios de Banach y el uso de herramientas topológicas como la compactificación de Stone–Čech de los números naturales, se establecen conexiones fundamentales entre ℓ_∞ y el espacio de funciones continuas $C(\beta\mathbb{N})$, así como entre el espacio cociente ℓ_∞/c_0 y $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$.

El desarrollo del trabajo se organiza en tres partes principales. En primer lugar, se presentan los conceptos preliminares necesarios, incluyendo filtros, ultrafiltros, espacios normados y la construcción de la compactificación de Stone–Čech. En segundo lugar, se demuestran identificaciones isométricas clave que permiten describir los elementos de ℓ_∞ y ℓ_∞/c_0 mediante funciones continuas sobre espacios compactos, utilizando el concepto de p -límite asociado a ultrafiltros. Finalmente, se aborda el estudio de la complementación en espacios de Banach, destacando la complementación de subespacios de dimensión finita y el análisis de la no complementación de c_0 en ℓ_∞ .

Entre los principales resultados se encuentra la demostración de que ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N})$, y que ℓ_∞/c_0 es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Asimismo, se establece que, aunque c_0 es complementado en ciertos espacios como $C[0, 1]$, no lo es en ℓ_∞ , lo cual evidencia que la propiedad de complementación no se preserva en general en espacios de Banach.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE SPACE ℓ_∞/c_0 *

AUTHOR: SOFÍA VANEGAS MONCADA **

KEYWORDS: BANACH SPACES, QUOTIENT SPACES, ULTRAFILTERS, STONE-ČECH COMPACTIFICATION, ISOMETRIC IMBEDDINGS, COMPLEMENTATION, ℓ_∞ , c_0 .

DESCRIPTION:

The present work studies the quotient space ℓ_∞/c_0 within the framework of functional analysis, emphasizing its structural properties and its relationships with spaces of continuous functions. Starting from the fundamentals of Banach spaces and the use of topological tools such as the Stone–Čech compactification of the natural numbers, fundamental connections are established between ℓ_∞ and the space of continuous functions $C(\beta\mathbb{N})$, as well as between the quotient space ℓ_∞/c_0 and $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$.

The development of the work is organized into three main parts. In the first place, the necessary preliminary concepts are presented, including filters, ultrafilters, normed spaces, and the construction of the Stone–Čech compactification. In the second place, key isometric identifications are proved, which allow the elements of ℓ_∞ and ℓ_∞/c_0 to be described by means of continuous functions on compact spaces, using the concept of p -limit associated with ultrafilters. Finally, the study of complementation in Banach spaces is addressed, highlighting the complementation of finite-dimensional subspaces and the analysis of the non-complementation of c_0 in ℓ_∞ .

Among the main results is the proof that ℓ_∞ is isometrically isomorphic to $C(\beta\mathbb{N})$, and that ℓ_∞/c_0 is isometrically isomorphic to $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Likewise, it is established that, although c_0 is complemented in certain spaces such as $C[0, 1]$, it is not complemented in ℓ_∞ , which shows that the property of complementation is not preserved in general in Banach spaces.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Michael Alexander Rincón Villamizar, Ph.D.

INTRODUCCIÓN

Los fundamentos de la teoría de espacios de Banach, establecidos por el matemático polaco **Stefan Banach** en su monografía de 1932, *Théorie des opérations linéaires*, introdujo la teoría de los espacios normados completos, y conceptos esenciales del análisis funcional moderno. En este contexto, los espacios ℓ_∞ y c_0 aparecen como ejemplos clásicos que han sido ampliamente estudiados.

Si bien la construcción del cociente ℓ_∞/c_0 no se encuentra desarrollada en los trabajos originales de Banach, las ideas introducidas allí sobre espacios normados y operadores lineales sentaron las bases para su posterior estudio. Este espacio puede analizarse mediante la compactificación de Stone–Čech de los números naturales¹, lo que permite establecer una relación con espacios de funciones continuas².

El propósito de este trabajo es estudiar algunas propiedades del espacio ℓ_∞/c_0 a partir de estas relaciones. En particular:

1. Estudiar la conexión entre ℓ_∞ y $C(\beta\mathbb{N})$, donde $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone–Čech de los números naturales.
2. Estudiar la conexión entre ℓ_∞/c_0 y $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$, donde \mathbb{N} es la copia natural de \mathbb{N} en $\beta\mathbb{N}$.
3. Estudiar la no complementación de c_0 en ℓ_∞ .

¹ R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, 1998.

² E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

1. Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones básicas¹ y los resultados que se usarán en el desarrollo del trabajo.

1.1. Filtros

Definición 1.1.1. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es llamada *filtro sobre X* si verifica las siguientes propiedades:

F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

F3) Si A y B están en \mathcal{F} , entonces $A \cap B$ está en \mathcal{F} ;

F4) Si A está en \mathcal{F} y $A \subseteq B$, entonces B está en \mathcal{F} .

Definición 1.1.2. Sean X un espacio topológico y \mathcal{U} un filtro en X . Diremos que \mathcal{U} es un *ultrafiltro*¹ si \mathcal{U} es un filtro maximal.

Ejemplo 1.1.3. Si X es un conjunto y $x \in X$, la colección

$$\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$$

es un ultrafiltro. Este filtro es llamado *ultrafiltro principal generado por x* .

1.1.1. La compactificación de Stone-Čech de \mathbb{N}

Definición 1.1.4. Definamos

$$\beta\mathbb{N} = \{p \subset 2^{\mathbb{N}} : p \text{ es un ultrafiltro}\}.$$

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, sea

$$\hat{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}.$$

¹ M. Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer, 2011.

Proposición 1.1.5. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La colección $\{\widehat{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ es una base para una topología $\tau := \tau_{\mathcal{U}(\mathbb{N})}$ sobre $\beta\mathbb{N}$.*
2. *$(\beta\mathbb{N}, \tau)$ es un espacio compacto Hausdorff.*
3. *La aplicación $n \in \mathbb{N} \mapsto \mathcal{F}_n \in \beta\mathbb{N}$ es un encaje, cuya imagen es un subconjunto denso de $\beta\mathbb{N}$. Además, la imagen de \mathbb{N} es un subconjunto discreto de $\beta\mathbb{N}$.*

El espacio $(\beta\mathbb{N}, \tau)$ es llamado compactificación de Stone-Čech de \mathbb{N} . La imagen de \mathbb{N} bajo la aplicación $n \in \mathbb{N} \mapsto \mathcal{F}_n \in \beta\mathbb{N}$ se denota como \mathbb{N} .

Demostración. Verifiquemos las dos condiciones de base.

Primero,

$$\beta\mathbb{N} = \bigcup_{A \subset \mathbb{N}} \widehat{A}.$$

Sea $p \in \beta\mathbb{N}$. Como p es un ultrafiltro, $p \neq \emptyset$, luego existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $A \in p$. Por tanto, $p \in \widehat{A}$, y así

$$\beta\mathbb{N} \subset \bigcup_{A \subset \mathbb{N}} \widehat{A}.$$

La otra contención se sigue de que $\widehat{A} \subset \beta\mathbb{N}$ para todo $A \subset \mathbb{N}$.

Ahora, sean $A, B \subset \mathbb{N}$ y suponga que

$$p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}.$$

Entonces $A \in p$ y $B \in p$. Como p es un filtro,

$$C := A \cap B \in p.$$

De aquí,

$$p \in \widehat{C}.$$

Además, si $q \in \widehat{C}$, entonces $C \in q$. Como $C \subset A$ y $C \subset B$, se sigue que $A \in q$ y $B \in q$. Por tanto,

$$q \in \widehat{A} \cap \widehat{B}.$$

Luego

$$\widehat{C} \subset \widehat{A} \cap \widehat{B}.$$

Con esto, la colección $\{\widehat{A} : A \subset \mathbb{N}\}$ es una base para una topología sobre $\beta\mathbb{N}$.

Veamos que es Hausdorff. Sean $p, q \in \beta\mathbb{N}$ con $p \neq q$. Entonces existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que

$$A \in p \quad \text{y} \quad A \notin q.$$

Como q es un ultrafiltro, se tiene

$$\mathbb{N} \setminus A \in q.$$

Por tanto,

$$p \in \widehat{A}, \quad q \in \widehat{\mathbb{N} \setminus A}.$$

Además,

$$\widehat{A} \cap \widehat{\mathbb{N} \setminus A} = \emptyset,$$

pues ningún filtro puede contener simultáneamente A y $\mathbb{N} \setminus A$. Luego $(\beta\mathbb{N}, \tau)$ es Hausdorff. Veamos ahora que es compacto. Sea $\{\widehat{A}_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de $\beta\mathbb{N}$. Supongamos que no existe una subcubierta finita. Entonces, para todo subconjunto finito $F \subset I$,

$$\beta\mathbb{N} \neq \bigcup_{i \in F} \widehat{A}_i.$$

Por tanto, existe $p^* \in \beta\mathbb{N}$ tal que

$$p^* \notin \bigcup_{i \in F} \widehat{A}_i.$$

Esto implica que

$$A_i \notin p^* \quad \text{para todo } i \in F.$$

Como p^* es un ultrafiltro,

$$\mathbb{N} \setminus A_i \in p^* \quad \text{para todo } i \in F.$$

Luego

$$\bigcap_{i \in F} (\mathbb{N} \setminus A_i) \in p^*,$$

y en particular

$$\bigcap_{i \in F} (\mathbb{N} \setminus A_i) \neq \emptyset.$$

Así, la familia $\{\mathbb{N} \setminus A_i : i \in I\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por el Lema de Zorn,

existe un ultrafiltro q sobre \mathbb{N} que contiene a todos los conjuntos $\mathbb{N} \setminus A_i$. Entonces

$$A_i \notin q \quad \text{para todo } i \in I,$$

y por tanto

$$q \notin \widehat{A_i} \quad \text{para todo } i \in I,$$

lo cual contradice que $\{\widehat{A_i} : i \in I\}$ cubre $\beta\mathbb{N}$.

Se concluye que toda cubierta abierta admite una subcubierta finita. Por tanto, $(\beta\mathbb{N}, \tau)$ es compacto.

Finalmente, consideremos la aplicación

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}, \quad \varphi(n) = \mathcal{F}_n,$$

donde

$$\mathcal{F}_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$$

es el ultrafiltro principal generado por n .

Veamos primero que φ es inyectiva. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Entonces

$$\{n\} \in \mathcal{F}_n,$$

mientras que

$$\{n\} \notin \mathcal{F}_m.$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}_n \neq \mathcal{F}_m,$$

y así φ es inyectiva.

Veamos ahora que la imagen de \mathbb{N} es un subconjunto discreto de $\beta\mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos el abierto

$$\widehat{\{n\}} = \{p \in \beta\mathbb{N} : \{n\} \in p\}.$$

Como $\{n\} \in \mathcal{F}_n$, se tiene

$$\mathcal{F}_n \in \widehat{\{n\}}.$$

Además, si $\mathcal{F}_m \in \widehat{\{n\}}$, entonces

$$\{n\} \in \mathcal{F}_m,$$

lo cual equivale a decir que

$$m \in \{n\}.$$

Por consiguiente, $m = n$. Luego

$$\widehat{\{n\}} \cap \varphi(\mathbb{N}) = \{\mathcal{F}_n\}.$$

Esto muestra que la topología inducida sobre $\varphi(\mathbb{N})$ coincide con la topología discreta de \mathbb{N} .

Por tanto, φ es un encaje y $\varphi(\mathbb{N})$ es discreto.

Probemos finalmente que $\varphi(\mathbb{N})$ es denso en $\beta\mathbb{N}$. Sea \widehat{A} un abierto no vacío de $\beta\mathbb{N}$, con $A \subset \mathbb{N}$. Como $\widehat{A} \neq \emptyset$, existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que

$$p \in \widehat{A}.$$

Por definición de \widehat{A} , esto significa que

$$A \in p.$$

En particular, $A \neq \emptyset$. Sea entonces $n \in A$. Como $n \in A$, por definición del ultrafiltro principal \mathcal{F}_n se tiene

$$A \in \mathcal{F}_n.$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}_n \in \widehat{A}.$$

Así,

$$\widehat{A} \cap \varphi(\mathbb{N}) \neq \emptyset.$$

Como todo abierto no vacío de $\beta\mathbb{N}$ intersecta a $\varphi(\mathbb{N})$, concluimos que $\varphi(\mathbb{N})$ es denso en $\beta\mathbb{N}$. □

Definición 1.1.6. Sean (X, τ) un espacio topológico, (x_n) una sucesión en X y $p \in \beta\mathbb{N}$ dado. Diremos que $x \in X$ es un p -límite de la sucesión (x_n) , y escribimos $x = p\text{-}\lim x_n$, si para cada $U \subset X$ abierto con $x \in U$ tenemos que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in p$.

Teorema 1.1.7. Sean X un espacio topológico compacto Hausdorff, (x_n) una sucesión en X y $p \in \beta\mathbb{N}$ dado. Entonces $p\text{-}\lim x_n$ existe y es único.

Demostración. Considere

$$Y = \bigcap_{A \in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}.$$

Para cada $A \in p$, el conjunto $F_A = \overline{\{x_n : n \in A\}}$ es cerrado en X . Si $A_1, \dots, A_k \in p$, entonces $A_1 \cap \dots \cap A_k \in p$ y

$$\overline{\{x_n : n \in A_1 \cap \dots \cap A_k\}} \subseteq \bigcap_{i=1}^k F_{A_i}.$$

Como $A_1 \cap \dots \cap A_k \in p$, este conjunto no es vacío, luego

$$\bigcap_{i=1}^k F_{A_i} \neq \emptyset.$$

Así, la familia $\{F_A : A \in p\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Como X es compacto, la intersección de todos los F_A es no vacía, es decir,

$$Y \neq \emptyset.$$

Sea $x \in Y$. Sea U abierto con $x \in U$ y defina

$$B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}.$$

Si $B \notin p$, entonces $\mathbb{N} \setminus B \in p$. Como $x \in Y$,

$$x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus B\}}.$$

Pero $\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus B\} \subseteq X \setminus U$ y $X \setminus U$ es cerrado, por lo que

$$\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus B\}} \subseteq X \setminus U,$$

lo cual contradice que $x \in U$. Por tanto $B \in p$, y $x = p\text{-}\lim x_n$.

Para la unicidad, como X es Hausdorff, si $x \neq y$ existen abiertos disjuntos U, V tales que

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Entonces

$$\{n : x_n \in U\}, \{n : x_n \in V\} \in p,$$

y como p es un filtro,

$$\{n : x_n \in U\} \cap \{n : x_n \in V\} \in p.$$

Pero esta intersección es vacía, lo cual es imposible. Por tanto el límite es único. \square

1.2. Espacios normados y espacios de Banach

Definición 1.2.1. ² Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (o \mathbb{C}). Una función

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$$

se llama *norma* si para todos $x, y \in X$ y todo escalar α , se cumplen:

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

El par $(X, \|\cdot\|)$ se llama **espacio normado**.

Definición 1.2.2. Un **espacio de Banach** es un espacio normado que es completo con respecto a su norma, es decir, toda sucesión de Cauchy en X converge en la norma a un elemento de X .

A continuación, se presentan dos ejemplos clásicos.

Ejemplo 1.2.3. ℓ_∞ es el conjunto de todas las sucesiones acotadas de escalares reales o complejos:

$$\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Definimos en ℓ_∞ la *norma del supremo* por

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Es conocido que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach².

Ejemplo 1.2.4. Sea c_0 el subconjunto de ℓ_∞ formado por todas las sucesiones que convergen a cero:

$$c_0 = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \}.$$

El espacio c_0 , provisto de la norma $\| \cdot \|_\infty$, es un subespacio cerrado de ℓ_∞ , y por lo tanto, es un espacio de Banach.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio normado y $Y \subset X$ un subespacio cerrado. Se define el *espacio cociente* X/Y como el conjunto de clases de equivalencia

$$\hat{x} = x + Y = \{ x + y : y \in Y \},$$

donde $x, z \in X$ son equivalentes si $x - z \in Y$. Las operaciones se definen por

$$\hat{x} + \hat{z} := (x + z) + Y, \quad \alpha \hat{x} := (\alpha x) + Y, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Definición 1.2.6. La norma en X/Y se define por

$$\|\hat{x}\| = \inf\{ \|x - y\| : y \in Y \}.$$

Teorema 1.2.7. Si X es un espacio de Banach y $Y \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces el espacio cociente X/Y , provisto de la norma

$$\|\hat{x}\| = \inf\{ \|x - y\| : y \in Y \},$$

también es un espacio de Banach¹.

Demostración. Es suficiente ver que toda serie en X/Y absolutamente convergente es convergente. Sea $\sum \hat{x}_n$ una serie absolutamente convergente en X/Y , es decir,

$$\sum \|\hat{x}_n\| < \infty.$$

Para cada n , elija $x_n \in X$ tal que $\hat{x}_n = x_n + Y$ y

$$\|x_n\| \leq \|\hat{x}_n\| + 2^{-n}.$$

Entonces

$$\sum \|x_n\| < \infty,$$

por lo que $\sum x_n$ converge en X , ya que X es Banach.

Sea $q : X \rightarrow X/Y$ la aplicación cociente. Como q es lineal y continua,

$$q\left(\sum x_n\right) = \sum q(x_n) = \sum \hat{x}_n,$$

de donde $\sum \hat{x}_n$ converge en X/Y . Por tanto, X/Y es completo. \square

Teorema 1.2.8 (Hahn–Banach (Thm. 2.2, 1)). *Sea $Y \subset X$ un subespacio de un espacio normado X . Si $f \in Y^*$, entonces existe $F \in X^*$ tal que*

$$F|_Y = f \quad \text{y} \quad \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

2. Identificaciones Isométricas

En este capítulo se demuestran dos identificaciones isométricas fundamentales en espacios de Banach¹. En particular, probaremos que ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N})$, y que el espacio cociente ℓ_∞/c_0 es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Estas identificaciones se establecen mediante el uso de p -límites asociados a ultrafiltros. Este enfoque permite describir elementos de estos espacios en términos de funciones continuas sobre espacios compactos.

2.1. ℓ_∞ es isométrico a $C(\beta\mathbb{N})$

Teorema 2.1.1. *Los espacios de Banach ℓ_∞ y $C(\beta\mathbb{N})$ son isométricamente isomorfos². Más precisamente, la aplicación*

$$T : x \in \ell_\infty \longrightarrow T(x) \in C(\beta\mathbb{N}), \quad T(x)(p) = p\text{-}\lim x_n, \text{ para todo } p \in \beta\mathbb{N},$$

es una isometría lineal y sobreyectiva.

Demostración.

Veamos primero que T es lineal. Sean $a, b \in \ell_\infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Fijado $p \in \beta\mathbb{N}$, denotemos

$$\alpha = T(a)(p) = p\text{-}\lim a_n, \quad \beta = T(b)(p) = p\text{-}\lim b_n.$$

Probemos que

$$p\text{-}\lim(a_n + b_n) = \alpha + \beta.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de p -límite,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in p, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in p.$$

Como p es un ultrafiltro, $A \cap B \in p$. Si $n \in A \cap B$, entonces

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon.$$

¹ I. E. Leonard y J. H. M. Whitfield. A classical Banach space: ℓ_∞/c_0 . En: *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 13.3 (1983), págs. 531-541.

Dado que para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\{n \in \mathbb{N} : |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon\} \in p,$$

por lo tanto

$$p\text{-}\lim(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

y así $T(a + b)(p) = T(a)(p) + T(b)(p)$ para todo $p \in \beta\mathbb{N}$.

Ahora, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in \beta\mathbb{N}$. Denotemos $\alpha = p\text{-}\lim a_n$. Si $\lambda = 0$, es claro que

$$p\text{-}\lim(\lambda a_n) = 0 = \lambda\alpha.$$

Supongamos $\lambda \neq 0$ y sea $\epsilon > 0$. Por definición de p -límite,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}\} \in p.$$

Si $n \in A$, entonces

$$|\lambda a_n - \lambda\alpha| = |\lambda| |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

Como para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\{n \in \mathbb{N} : |\lambda a_n - \lambda\alpha| < \epsilon\} \in p,$$

por tanto,

$$p\text{-}\lim(\lambda a_n) = \lambda\alpha,$$

y así $T(\lambda a)(p) = \lambda T(a)(p)$ para todo $p \in \beta\mathbb{N}$. Concluimos que T es lineal.

Probemos ahora que T es inyectiva. Supongamos que $T(a) = T(b)$, con $a, b \in \ell_\infty$. Entonces

$$p\text{-}\lim a_n = p\text{-}\lim b_n \quad \text{para todo } p \in \beta\mathbb{N}.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos el ultrafiltro principal F_m . Entonces

$$F_m\text{-}\lim a_n = a_m \quad \text{y} \quad F_m\text{-}\lim b_n = b_m.$$

Como $F_m \in \beta\mathbb{N}$, por la hipótesis se tiene que

$$a_m = b_m.$$

Dado que esto vale para todo $m \in \mathbb{N}$, se concluye que $a = b$. Por lo tanto, T es inyectiva. Veamos ahora que T es sobreyectiva. Sea $f \in C(\beta\mathbb{N})$ y definamos la sucesión $a = (a_n)$ por

$$a_n := f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\beta\mathbb{N}$ es compacto y f es continua, la imagen $f(\beta\mathbb{N})$ es compacta en \mathbb{R} , y por tanto acotada. En consecuencia, $a \in \ell_\infty$.

Queremos probar que $T(a) = f$, es decir, que para todo $p \in \beta\mathbb{N}$ se cumple

$$p\text{-lím } a_n = f(p).$$

Sea $p \in \beta\mathbb{N}$ y sea V un abierto de $f(p)$ en \mathbb{R} . Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto de p en $\beta\mathbb{N}$. Por tanto, existe un abierto básico \widehat{A} tal que

$$p \in \widehat{A} \subseteq f^{-1}(V).$$

Por definición de \widehat{A} , se tiene que $A \in p$. Además, de $\widehat{A} \subseteq f^{-1}(V)$ se sigue que

$$A \subseteq f^{-1}(V) \cap \mathbb{N}.$$

Como $A \in p$, concluimos que

$$f^{-1}(V) \cap \mathbb{N} \in p.$$

Pero

$$f^{-1}(V) \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in V\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in V\}.$$

Por definición de p -límite, esto implica que $p\text{-lím } a_n = f(p)$.

Como p era arbitrario, se sigue que $T(a) = f$. Por tanto, T es sobreyectivo.

Finalmente, probemos que T preserva la norma. Sea $a \in \ell_\infty$ y $M = \|a\|_\infty$. Entonces

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $p \in \beta\mathbb{N}$ y escribamos $\alpha = p\text{-lím } a_n$. Para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - \alpha| < \varepsilon\} \in p.$$

Si n pertenece a este conjunto, entonces

$$|\alpha| - \varepsilon < |a_n| \leq M,$$

de donde se deduce que $|\alpha| \leq M$. Por tanto,

$$\|T(a)\|_\infty \leq \|a\|_\infty.$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea p_n el ultrafiltro principal en n . Entonces

$$p_n\text{-}\lim a_k = a_n,$$

y por tanto

$$|a_n| \leq \|T(a)\|_\infty.$$

Tomando supremo en $n \in \mathbb{N}$,

$$\|a\|_\infty \leq \|T(a)\|_\infty.$$

En consecuencia,

$$\|T(a)\|_\infty = \|a\|_\infty \quad \text{para todo } a \in \ell_\infty.$$

Como T es lineal y acotado, es continuo. □

2.2. ℓ_∞/c_0 es isométrico a $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$

Lema 2.2.1. ¹ Sea $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Entonces

$$\|x + c_0\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

Demostración. Sea

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

Primero veamos que $\|x + c_0\| \geq L$. Sea $y \in c_0$. Entonces $y_n \rightarrow 0$, y por tanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = L.$$

Como

$$\|x - y\|_\infty \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n|,$$

se sigue que

$$\|x - y\|_\infty \geq L \quad \text{para todo } y \in c_0.$$

Tomando ínfimo en $y \in c_0$, obtenemos

$$\|x + c_0\| = \inf_{y \in c_0} \|x - y\|_\infty \geq L.$$

Ahora veamos que $\|x + c_0\| \leq L$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de \limsup , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{n \geq N} |x_n| \leq L + \varepsilon.$$

Definimos $y = (y_n)$ por

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n < N, \\ 0, & n \geq N. \end{cases}$$

Entonces $y \in c_0$, y además

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{n \geq N} |x_n| \leq L + \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\|x + c_0\| \leq L + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\|x + c_0\| \leq L.$$

Por lo tanto,

$$\|x + c_0\| = L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

□

Teorema 2.2.2. *El espacio cociente ℓ_∞/c_0 es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})^1$. En términos precisos, la aplicación*

$$\tilde{T} : x + c_0 \in \ell_\infty/c_0 \longrightarrow \tilde{T}(x + c_0) \in C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}), \quad \tilde{T}(x + c_0)(p) = p\text{-}\lim x_n, \text{ para todo } p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$$

es una isometría lineal y sobreyectiva.

Demostración. Definamos la aplicación

$$\tilde{T} : \ell_\infty/c_0 \longrightarrow C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}), \quad \tilde{T}(x + c_0)(p) = p\text{-}\lim x_n.$$

Veamos primero que \tilde{T} está bien definida. Supongamos que $x + c_0 = y + c_0$. Entonces $x - y \in c_0$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Sea $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Entonces

$$p\text{-}\lim(x_n - y_n) = 0,$$

y por tanto

$$p\text{-}\lim x_n = p\text{-}\lim y_n.$$

De este modo,

$$\tilde{T}(x + c_0) = \tilde{T}(y + c_0).$$

Veamos ahora que $\tilde{T}(x + c_0) \in C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ para todo $x \in \ell_\infty$. Sea $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos

$$\alpha = \tilde{T}(x + c_0)(p) = p\text{-}\lim x_n.$$

Por definición de p -límite,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \alpha| < \varepsilon/2\} \in p.$$

Si $q \in \hat{A}$, entonces $A \in q$, y por definición de q -límite se tiene

$$|q\text{-}\lim x_n - \alpha| \leq \varepsilon.$$

Por tanto,

$$|\tilde{T}(x + c_0)(q) - \tilde{T}(x + c_0)(p)| < \varepsilon,$$

lo cual muestra que $\tilde{T}(x + c_0)$ es continua en p . Como p es arbitrario,

$$\tilde{T}(x + c_0) \in C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}).$$

Probemos ahora que \tilde{T} es lineal. Sean $x, y \in \ell_\infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ se tiene que

$$p\text{-}\lim(x_n + y_n) = p\text{-}\lim x_n + p\text{-}\lim y_n,$$

y

$$p\text{-}\lim(\lambda x_n) = \lambda p\text{-}\lim x_n.$$

Por tanto,

$$\tilde{T}((x + y) + c_0) = \tilde{T}(x + c_0) + \tilde{T}(y + c_0), \quad \tilde{T}(\lambda x + c_0) = \lambda \tilde{T}(x + c_0).$$

Veamos ahora que \tilde{T} es inyectiva. Supongamos que

$$\tilde{T}(x + c_0) = 0.$$

Entonces

$$p\text{-}\lim x_n = 0 \quad \text{para todo } p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Supongamos que $x \notin c_0$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon_0\}$$

es infinito. Sea $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $A \in p$. Entonces

$$|p\text{-}\lim x_n| \geq \varepsilon_0/2,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $x \in c_0$ y así $x + c_0 = 0$. Luego \tilde{T} es inyectiva.

Veamos ahora que \tilde{T} es sobreyectiva. Sea $f \in C(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Por el resultado anterior (isomorfismo entre ℓ_∞ y $C(\beta\mathbb{N})$), existe $x \in \ell_\infty$ tal que

$$p\text{-}\lim x_n = f(p) \quad \text{para todo } p \in \beta\mathbb{N}.$$

En particular, esto vale para todo $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, y por tanto

$$\tilde{T}(x + c_0) = f.$$

Finalmente, probemos que \tilde{T} preserva la norma. Sea $x \in \ell_\infty$.

Primero veamos que

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \leq \|x + c_0\|.$$

Sea $y \in c_0$. Como $p\text{-}\lim y_n = 0$ para todo $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, se tiene

$$\tilde{T}(x + c_0)(p) = p\text{-}\lim x_n = p\text{-}\lim(x_n - y_n).$$

Por tanto,

$$|\tilde{T}(x + c_0)(p)| = |p\text{-}\lim(x_n - y_n)| \leq \|x - y\|_\infty \quad \text{para todo } p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Tomando supremo en p , obtenemos

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty.$$

Como $y \in c_0$ es arbitrario, al tomar ínfimo en $y \in c_0$ se sigue que

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \leq \|x + c_0\|.$$

Por el lema anterior, basta probar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty.$$

Sea

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > L - \varepsilon\}$$

es infinito. Por tanto, al menos uno de los conjuntos

$$A_+ = \{n \in \mathbb{N} : x_n > L - \varepsilon\}, \quad A_- = \{n \in \mathbb{N} : x_n < -(L - \varepsilon)\}$$

es infinito.

Supongamos que A_+ es infinito. Entonces existe un ultrafiltro libre $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $A_+ \in p$. Si

$$\alpha = p\text{-}\lim x_n,$$

entonces necesariamente $\alpha \geq L - \varepsilon$. En efecto, si $\alpha < L - \varepsilon$, tome $\delta > 0$ tal que

$$\alpha + \delta < L - \varepsilon.$$

Como $\alpha = p\text{-}\lim x_n$, el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \alpha| < \delta\}$$

pertenece a p . Además, $A_+ \in p$, luego

$$A_+ \cap B \in p,$$

y en particular es no vacío. Si $n \in A_+ \cap B$, entonces

$$x_n \leq \alpha + |x_n - \alpha| < \alpha + \delta < L - \varepsilon,$$

lo cual contradice que $n \in A_+$. Por tanto,

$$\alpha \geq L - \varepsilon.$$

De aquí,

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \geq |\tilde{T}(x + c_0)(p)| = |\alpha| \geq L - \varepsilon.$$

Si A_- es infinito, de manera análoga se obtiene

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \geq L - \varepsilon.$$

En cualquier caso,

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \geq L - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \geq L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

Por lo tanto,

$$\|x + c_0\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty \leq \|x + c_0\|,$$

y en consecuencia

$$\|\tilde{T}(x + c_0)\|_\infty = \|x + c_0\|.$$

□

3. Complementación en espacios de Banach

En este capítulo se estudia la complementación de subespacios en espacios de Banach¹. En particular, se demuestra que todo subespacio de dimensión finita es complementado. Además, se analiza el caso del espacio c_0 en distintos contextos. Se prueba que c_0 es complementado en $C[0, 1]$, mientras que no lo es en ℓ_∞ .

3.1. Complementación en espacios de Banach

Definición 3.1.1. Un subespacio cerrado Y de un espacio de Banach X se dice que es complementado en X si existe una proyección lineal acotada de X sobre Y , es decir, un operador lineal y continuo $P: X \rightarrow Y$ tal que $P(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Proposición 3.1.2. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach es complementado¹.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach y sea $M \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Tome una base $\{m_1, \dots, m_n\}$ de M . Entonces, para cada $x \in M$, existen únicos escalares a_1, \dots, a_n tales que

$$x = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n.$$

Defina, para cada $j = 1, \dots, n$, el funcional lineal sobre M

$$m_j^*(x) = a_j.$$

Como M es de dimensión finita, cada m_j^* es continuo en M . Por el teorema de Hahn–Banach (Teorema 1.2.8), existe una extensión continua $x_j^* \in X^*$ de m_j^* a todo X .

Definimos

$$P: X \rightarrow M, \quad P(x) = x_1^*(x)m_1 + \dots + x_n^*(x)m_n.$$

Entonces P es lineal y continua. Además, si

$$x = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n \in M,$$

se tiene que

$$P(x) = x_1^*(x)m_1 + \cdots + x_n^*(x)m_n = a_1m_1 + \cdots + a_nm_n = x.$$

Por tanto, $P(x) = x$ para todo $x \in M$. En consecuencia, P es una proyección continua sobre M , y así M es complementado en X . \square

Proposición 3.1.3. *El espacio c_0 es isométrico a un subespacio complementado de $C[0, 1]^2$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $\varepsilon_n \in (0, 1)$ de modo que:

1. $\frac{1}{n} \in I_n := [\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n] \subset [0, 1]$ y $0 \notin I_n$;
2. $I_n \cap I_{n+1} = \emptyset$;
3. La sucesión (ε_n) es decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

En cada I_n , definimos $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - \frac{1}{n}|}{\varepsilon_n}, & \text{si } x \in I_n, \\ 0, & \text{si } x \notin I_n. \end{cases}$$

En la siguiente figura podemos ver las gráficas de algunas de estas funciones.

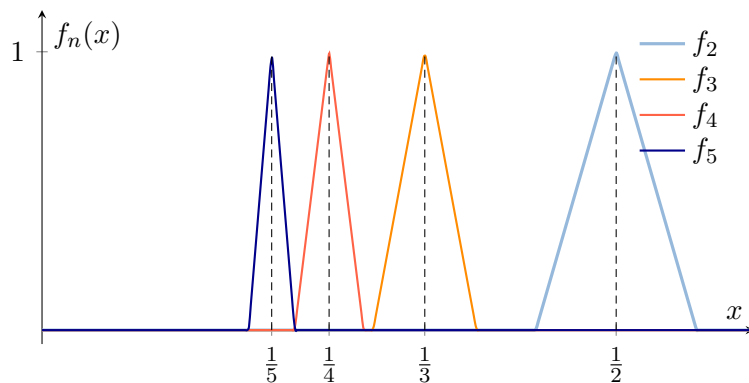


Figura 3.1: Gráfica de algunas funciones f_n .

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. f_n es continua;

$$2. 0 \leq f_n(x) \leq 1 \text{ y } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1;$$

$$3. f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin I_n.$$

Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|.$$

En efecto, como $0 \leq f_i(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ e $i = 1, \dots, m$, y además los intervalos I_1, \dots, I_m son disjuntos, para cada $x \in [0, 1]$ a lo sumo una de las funciones $f_1(x), \dots, f_m(x)$ es distinta de cero. Por tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i f_i(x) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \quad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Tomando supremo en x , se obtiene

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|.$$

Por otra parte, para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, al evaluar en $x = \frac{1}{k}$ se tiene

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = 1 \quad \text{y} \quad f_i\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \text{ si } i \neq k.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^m a_i f_i\left(\frac{1}{k}\right) = a_k,$$

y en consecuencia

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} \geq |a_k| \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, m\}.$$

De aquí se sigue que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} \geq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|.$$

Se concluye la igualdad.

Sea ahora

$$Y = \overline{\text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Definimos

$$P : C[0, 1] \longrightarrow Y, \quad P(g)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g(1/n) - g(0)) f_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Como g es continua en $[0, 1]$, se tiene que $g(1/n) \rightarrow g(0)$, y por tanto

$$a_n := g(1/n) - g(0) \longrightarrow 0.$$

Así, $(a_n) \in c_0$. De la igualdad anterior se deduce que la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{n=1}^m a_n f_n$$

es de Cauchy en $C[0, 1]$, y por tanto converge en $C[0, 1]$. En consecuencia, $P(g)$ está bien definida y pertenece a Y .

La aplicación P es lineal por construcción. Veamos que es una proyección. Sea $g \in Y$. Entonces existe una sucesión $(a_n) \in c_0$ tal que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n.$$

Evaluando en $x = 1/n$, se tiene

$$g(1/n) = a_n, \quad g(0) = 0,$$

ya que $0 \notin I_n$ para todo n . Por tanto,

$$g(1/n) - g(0) = a_n,$$

y así

$$P(g)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = g(x).$$

Luego $P(g) = g$ para todo $g \in Y$. En consecuencia, P es una proyección continua de $C[0, 1]$ sobre Y , y por tanto Y es un subespacio complementado de $C[0, 1]$. Finalmente, la

igualdad

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|$$

implica que Y es isomorfo a c_0 . Para verlo, consideremos la aplicación

$$T : c_0 \longrightarrow Y, \quad T((a_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i,$$

donde la serie se entiende como el límite en $C[0, 1]$ de la sucesión de sumas parciales

$$S_m = \sum_{i=1}^m a_i f_i, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\|S_m\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|.$$

Como $(a_i) \in c_0$, se cumple que

$$\max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \longrightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| = \|(a_i)\|_{\infty}.$$

Por otra parte, como $S_m \rightarrow T((a_i))$ en $C[0, 1]$, y la norma es continua, se obtiene

$$\|T((a_i))\|_{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m\|_{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| = \|(a_i)\|_{\infty}.$$

Así, T es una isometría. Además, por la definición de Y , T es sobreyectiva. En consecuencia, Y es isomorfo a c_0 .

Por lo tanto, c_0 está complementado en $C[0, 1]$. □

3.2. c_0 no es complementado en ℓ_{∞}

El hecho de que c_0 no sea complementado en ℓ_{∞} fue demostrado por primera vez por **Richard S. Phillips**¹ en 1940. Este resultado muestra que no todo subespacio cerrado de

¹ R. S. Phillips. On linear transformations. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 48.3 (1940), págs. 516-541. DOI: 10.1090/S0002-9947-1940-0004094-3.

un espacio de Banach admite una proyección lineal acotada.

En esta sección se presenta una demostración de este resultado. Comenzamos por un lema que es atribuido a W. Sierpiński.

Lema 3.2.1. *Existe una familia no numerable $\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que:*

1. *Todo elemento de Γ es un conjunto infinito.*
2. *Para cualesquiera $A, B \in \Gamma$ con $A \neq B$, se tiene que $A \cap B$ es finito.*

Demostración. Para cada $x \in (0, 1)$, defina

$$A(x) = \{2^n(2\lfloor nx \rfloor + 1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que $A(x)$ es infinito para todo $x \in (0, 1)$. Considere la familia

$$\Gamma = \{A(x) : x \in (0, 1)\}.$$

Sean $x, y \in (0, 1)$, con $x \neq y$. Si

$$2^n(2\lfloor nx \rfloor + 1) = 2^m(2\lfloor my \rfloor + 1),$$

entonces, como $2\lfloor nx \rfloor + 1$ y $2\lfloor my \rfloor + 1$ son impares, por unicidad de la descomposición de un número natural en la forma $2^k r$, con r impar, se tiene

$$n = m \quad \text{y} \quad \lfloor nx \rfloor = \lfloor ny \rfloor.$$

De aquí,

$$|nx - ny| < 1,$$

y por tanto

$$n|x - y| < 1.$$

En consecuencia

$$n < \frac{1}{|x - y|}.$$

Así, si un elemento pertenece a $A(x) \cap A(y)$, corresponde a algún n tal que

$$n < \frac{1}{|x - y|},$$

por lo que $A(x) \cap A(y)$ es finito. Finalmente, como $(0, 1)$ es no numerable, tenemos que Γ es no numerable. \square

Teorema 3.2.2. *El espacio c_0 no está complementado en ℓ_∞* ¹

Demostración. Suponga, por contradicción, que existe una proyección lineal acotada P de ℓ_∞ sobre c_0 . Sea

$$Q = I - P,$$

donde I denota la aplicación identidad en ℓ_∞ . Note que, si $x \in c_0$, entonces

$$Q(x) = x - P(x) = x - x = 0.$$

En efecto, como $P^2 = P$ y $c_0 = \text{Im}(P)$, dado $x \in c_0$ existe $y \in \ell_\infty$ tal que $P(y) = x$. Entonces

$$P(x) = P(P(y)) = P^2(y) = P(y) = x.$$

Por tanto, $P(x) = x$ para todo $x \in c_0$, y así

$$\text{Ker}(Q) = c_0.$$

Por el lema anterior, existe una familia $\{A_\gamma : \gamma \in (0, 1)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $A_\gamma \cap A_\eta$ es finito siempre que $\gamma \neq \eta$.

Para cada $\gamma \in (0, 1)$, denotemos por $x_\gamma = \chi_{A_\gamma}$ la función característica de A_γ .

Veamos que, para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\text{Card}\{\gamma \in (0, 1) : |Q(x_\gamma)_n| > \varepsilon\} < \infty,$$

es decir,

$$\text{Card}\{\gamma \in (0, 1) : |x_\gamma(n) - P(x_\gamma)(n)| > \varepsilon\} < \infty.$$

En efecto, asuma que

$$|Q(x_{\gamma_i})_n| \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k.$$

y defina

$$x'_{\gamma_i} = \chi_{A_{\gamma_i} \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k A_{\gamma_j}}.$$

Note que

$$x_{\gamma_i} - x'_{\gamma_i} = \chi_{A_{\gamma_i} \cap \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k A_{\gamma_j}}.$$

Además,

$$A_{\gamma_i} \cap \bigcup_{j \neq i} A_{\gamma_j} = \bigcup_{j \neq i} (A_{\gamma_i} \cap A_{\gamma_j}),$$

y cada intersección $A_{\gamma_i} \cap A_{\gamma_j}$ es finita. Por lo tanto, esta unión es finita, de donde se sigue que la sucesión $x_{\gamma_i} - x'_{\gamma_i}$ es nula salvo en un número finito de índices. En consecuencia,

$$x_{\gamma_i} - x'_{\gamma_i} \in c_0.$$

De este modo,

$$Q(x_{\gamma_i} - x'_{\gamma_i}) = 0$$

y por linealidad de Q

$$Q(x_{\gamma_i}) = Q(x'_{\gamma_i}).$$

Para $i = 1, \dots, k$ tenemos

$$\begin{aligned} Q \left(\sum_{i=1}^k \text{sign}(Q(x'_{\gamma_i})_n) x'_{\gamma_i} \right)_n &= \sum_{i=1}^k \text{sign}(Q(x'_{\gamma_i})_n) Q(x'_{\gamma_i})_n \\ &= \sum_{i=1}^k |Q(x'_{\gamma_i})_n| \\ &= \sum_{i=1}^k |Q(x_{\gamma_i})_n| \geq \sum_{i=1}^k \varepsilon = k\varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\left\| \sum_{i=1}^k \text{sign}(Q(x'_{\gamma_i})_n) x'_{\gamma_i} \right\|_{\infty} \leq 1.$$

Por tanto,

$$k\varepsilon \leq Q \left(\sum_{i=1}^k \text{sign}(Q(x'_{\gamma_i})_n) x'_{\gamma_i} \right)_n \leq \|Q\| \left\| \sum_{i=1}^k \text{sign}(Q(x'_{\gamma_i})_n) x'_{\gamma_i} \right\|_{\infty} \leq \|Q\|.$$

Por lo tanto,

$$k \leq \frac{\|Q\|}{\varepsilon}.$$

Usando la afirmación anterior, se sigue que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\gamma \in (0, 1) : Q(x_\gamma)_n \neq 0\}$$

es numerable. Por tanto, existe $\gamma \in (0, 1) \setminus E$ tal que $Q(x_\gamma)_n = 0$ para todo n . Así,

$$Q(x_\gamma) = 0,$$

y en consecuencia

$$x_\gamma = P(x_\gamma).$$

Esto implica que $x_\gamma \in c_0$, lo cual es una contradicción, pues x_γ es la función característica de un conjunto infinito.

□

Bibliografía

Fabian, M. et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer, 2011 (vid. págs. 8, 15, 16, 26).

Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978 (vid. págs. 7, 14, 17, 27).

Leonard, I. E. y J. H. M. Whitfield. A classical Banach space: ℓ_∞/c_0 . En: *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 13.3 (1983), págs. 531-541 (vid. págs. 17, 20, 21).

Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, 1998 (vid. págs. 7, 8, 26).

Phillips, R. S. On linear transformations. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 48.3 (1940), págs. 516-541. DOI: 10.1090/S0002-9947-1940-0004094-3 (vid. págs. 30, 32).