ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA Y DIAGRAMAS DE DYNKIN

ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005

ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA Y DIAGRAMAS DE DYNKIN

ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS

Monografía presentada como
requisito para optar al título
de *Licenciado en Matemáticas*

Sofía Pinzón Durán
Directora

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005

TITULO: ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA Y DIAGRAMAS DE DYNKIN*

AUTOR: ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS**

PALABRAS CLAVES: Álgebras de Lie, Representaciones, Criterios de Cartan, Subálgebras de Cartan, Diagramas de Dynkin.

DESCRIPCIÓN

En esta monografía se presentan algunas nociones básicas acerca de la estructura, representación y clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita por medio de sus respectivos diagramas de Dynkin

Esta monografía comprende cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan algunos conceptos elementales sobre álgebra lineal, la estructura de un álgebra de Lie, y como se definen los morfismos y las representaciones, se presentan las álgebras solubles y las álgebras nilpotentes y relacionadas a ellas se encuentran los Teoremas de Lie y Engel respectivamente, se presentan las definiciones clásicas de álgebra de Lie semisimple y simple. El segundo Capítulo esta relacionado con los criterios y subálgebras de Cartan, el primer criterio nos permite saber cuando un álgebra es soluble mediante su forma de Cartan-Killing y el segundo criterio el cual garantiza que un álgebra de Lie es semisimple cuando su forma de Cartan-Killing es no degenerada. Definiremos cuando una subálgebra es de Cartan y presentaremos algunos resultados y ejemplos sobre el tema.

En el tercer Capítulo se establecen algunas propiedades sobre las subálgebras de Cartan y las álgebras semisimples, además, se presentan algunos tópicos sobre sistemas simples de raíces, la fórmula de Killing y para finalizar la matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces. En el cuarto Capítulo a partir de un sistema simple de raíces, damos las pautas para construir los diagramas de Dynkin y se presentan la clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita, y se incluye los diagramas de Dynkin y las matrices de Cartan asociados a cada una de ellas.

---

*Tesis

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR **Sofía Pinzón Durán**.

TITLE: FINITE DIMENSION SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND DYNKIN DIAGRAMS *

AUTHOR: ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS**

KEY WORDS: Lie algebras, Representations, Cartan's Criterion, Cartan´s subalgebra, Dynkin diagram.

DESCRIPTION

In this monograph some basic slight knowledge appear about the structure, representation and classification of finite dimension semisimple Lie algebra by means of their respective Dynkin diagrams.

This monograph includes four chapters. In the first chapter some elementary concepts on linear algebra, the structure of Lie algebra, and as the morfismos and the representations are defined, soluble algebras appear and algebras nilpotentes and related them are the Lie´s theorem and Engel's theorem respectively, the classic definitions of semisimple Lie algebra and simple Lie algebra. The second Chapter this related to the Cartan's criterion and Cartan's subalgebra, the first criterion allows us to know when an algebra is soluble by means of its form of Cartan-Killing and the second criterion which guarantees that an algebra of Lie is semisimple when its form of Cartan-Killing is not degenerated. We will define when an Cartan´s subalgebra and will present some results and examples on the subject.

In the third Chapter some properties settle down on Cartan´s subalgebras and semisimple algebras, in addition, appear some topics on simple roots systems, the formula of Killing and to finalize the Cartan's matrix associated to the simple roots system. In the fourth Chapter from a simple roots system, we set the standards to construct the Dynkin's diagrams and they appear the classification of finite dimension semisimple Lie algebras, and one includes the Dynkin diagram and the associated Cartan's matrices to each one of them.

---

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR **Sofía Pinzón Durán**.

DEDICATORIA

*A las personas que alegran y me hacen mas fácil la vida: mi madre **EMILIA**, mi hermana **YOLIMA INÉS** y mis hermanos.*

*A la memoria de **Hector Armando Castro** (Q.P.D.).*

AGRADECIMIENTOS

Doy mi más profundo agradecimiento a aquellos sin cuya colaboración y apoyo este trabajo no hubiera sido posible:

- A **DIOS** por darme la fuerza necesaria para seguir adelante y no dejarme vencer por los obstáculos que se me han presentado.

- A mi madre Emilia, mis hermanos, Nubia, Marcos, Jorge y Yolima, le agradezco por el apoyo durante mi época de estudiante y porque sin ellos la vida no sería tan llevadera.

- A mi padre Hernando Villarreal y a su familia, porque gracias a sus criticas y consejos me esforcé para superar las adversidades.

- A **Sofía Pinzón**, mi directora, porque gracias a sus orientaciones, sus ideas y su gran apoyo fue posible realizar este trabajo y sobre todo por su paciencia.

- A **Gabriel Yáñez Canal**, porque gracias a él fue posible la elaboración de este trabajo, y principalmente por la confianza y apoyo que me ha brindado durante este último año de carrera.

- A los profesores de la Escuela de Matemáticas, en especial a **Marlio Paredes** y **Diana Jaramillo**, por sus enseñanzas, apoyo incondicional y ejemplo.

- A los integrantes del grupo de educación matemática (**EDUMAT-UIS**), especialmente a Sandra León y Daniel Moreno.

- A mis **grandes amigos**, Felix Páez, Hernán Rincón, Francisco Gutiérrez, Oscar Madiedo y Alexander Mendez porque gracias a ellos, fue posible la culminación de este trabajo.

- A mis compañeros, especialmente a Daniel Bernal, Francisco Niño, Viviana Ardila, Angelica Gutiérrez, José Luis Puello, Isnardo Arenas y Javier Moyano, ya que me hicieron mas grata y alegre la estadía en la universidad y estuvieron presentes apoyándome en los momentos difíciles.

- A mis calificadores **Elder Villamizar** y **Rafael Isaacs**, por sus aportes, correcciones y paciencia al leer este trabajo.

- A Nubia y Rosalba, las secretarias de la Escuela de Matemáticas.

- A todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para el desarrollo de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las Álgebras de Lie nacieron de la tentativa de obtener una teoría para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales análogo a la teoría de Galois, para las ecuaciones polinomiales. La teoría que se conoce sobre las Álgebras de Lie, es el resultado de estudios realizados por los matemáticos: Sophus Lie, Wilhelm Killing y Elie Cartan.
En esta monografía se exploran nociones básicas sobre álgebras de Lie, esta teoría actualmente no sólo se aplica en matemáticas, sino que cada vez es mayor su utilización en física teórica, en la moderna teoría de supercuerdas, y en óptica, constituyendo una importante aproximación a la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad general. Este trabajo es introductorio dado que es una teoría bastante compleja y se necesita un bagaje matemático mucho mayor para su profundización.

Esta monografía se divide en cuatro capítulos, en el primer Capítulo se presentan algunos conceptos elementales sobre álgebra lineal, la estructura de un álgebra de Lie, y como se definen los morfismos y las representaciones, se presentan las álgebras solubles y las álgebras nilpotentes y relacionadas a ellas se encuentran los Teoremas de Lie y Engel respectivamente. Para culminar se presentan las definiciones clásicas de álgebra de Lie semisimple y simple.
El segundo Capítulo esta relacionado con los criterios y subálgebras de Cartan, el primer criterio nos permite saber cuando un álgebra es soluble mediante su forma de Cartan-Killing y el segundo criterio el cual garantiza que un álgebra de Lie es semisimple cuando su forma de Cartan-Killing es no degenerada. Definiremos cuando una subálgebra es de Cartan y presentaremos algunos resultados y ejemplos sobre el tema.

En el tercer Capítulo se establecen algunas propiedades sobre las subálgebras de Cartan y las álgebras semisimples, además, se presentan algunos tópicos sobre sistemas simples de raíces, la fórmula de Killing y para finalizar la matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces.

En el cuarto Capítulo a partir de un sistema simple de raíces, damos las pautas para construir los diagramas de Dynkin y se presentan la clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita, y se incluye los diagramas de Dynkin y las matrices de Cartan asociados a cada una de ellas.

Para el mejor entendimiento del tema se recomienda que el lector este familiarizado con áreas como álgebra moderna, álgebra Lineal y teoría de matrices.

CAPÍTULO 1

ÁLGEBRAS DE LIE

Este capítulo está formado en su mayor parte por definiciones básicas sobre la teoría de las álgebras de Lie, las cuales nos facilitarán la comprensión del tema a tratar, y se presentan los Teoremas de Engel y Lie relacionados con las álgebras de Lie nilpotentes y solubles respectivamente.

1.1. Aspectos sobre álgebra lineal.

En esta sección se tratarán principalmente los conceptos necesarios sobre álgebra lineal y teoría de matrices para poder entender las siguientes secciones y capítulos, donde se trataran las álgebras de Lie. Denotaremos por $\mathbb{F}$ un campo que puede ser el campo de los números reales ($\mathbb{R}$) o el campo de los números complejos ($\mathbb{C}$). Solo cuando sea necesario haremos la distinción correspondiente.

Definición 1.1.1. [5] Un conjunto V se denomina espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si se tiene en él dos operaciones llamadas adición ($+$) y multiplicación por escalar ($.$) las cuales satisfacen los siguientes diez axiomas :

1. Si $x, y \in V$, entonces $x + y \in V$.

2. Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$.

3. Para todo $x, y, z \in V$, $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Existe un elemento $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ (el 0 se llama módulo de la adición).

5. Si $x \in V$, existe $y \in V$ tal que $x + y = 0$.

6. Si $x \in V$ y $\rho \in \mathbb{F}$, entonces $\rho x \in V$.

7. Si $x, y \in V$ y $\rho \in \mathbb{F}$, entonces $\rho(x + y) = \rho x + \rho y$.

8. Si $x \in V$ y $\rho, \beta \in \mathbb{F}$, entonces $(\rho + \beta)x = \rho x + \beta x$.

9. Si $x \in V$ y $\rho, \beta \in \mathbb{F}$, entonces $\rho(\beta x) = (\rho\beta)x$

10. Para todo $x \in V, 1x = x1 = x$, en donde 1 es el elemento unidad de $\mathbb{F}$.

Los elementos de V se llaman vectores y los elementos de $\mathbb{F}$ escalares.

Ejemplo 1.1.1. Algunos ejemplos de espacio vectorial son los siguientes:

1. El conjunto $M_n(\mathbb{F})$ de matrices de tamaño $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ con la suma y multiplicación por un escalar empleadas usualmente.

2. Si V es el conjunto de todos los polinomios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ donde los a_i son elementos de $\mathbb{R}$ y n es cualquier entero no negativo. La suma y la multiplicación de polinomios por constantes son los usuales. Con estas operaciones V resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.2. [5] Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y solo si:

1. Para todo $u, w \in W$, entonces $u + w \in W$.

2. Para todo $a \in \mathbb{F}$ y $w \in W$ implica que $aw \in W$.

Definición 1.1.3. [2] Sea $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Decimos que G genera V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los vectores en G, es decir, para todo $v \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

Definición 1.1.4. [2] Un conjunto finito de vectores $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si:

1. G es un conjunto linealmente independiente, es decir, si

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$

   entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

2. G genera a V.

Definición 1.1.5. [2] Sean V, W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una aplicación que asigna a cada vector $v \in V$ un vector $T(v) \in W$ y que satisface, para cada $u, v \in V$ y cada escalar α:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Definición 1.1.6. Dada una matriz A en $M_n(\mathbb{F})$, la traza de A, notada como $tr(A)$ se define como

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Expresado en palabras, la traza de una matriz es la suma de sus componentes diagonales.

En las siguientes propiedades de la traza, A y B representan matrices y $a \in \mathbb{F}$.

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$;
2. $tr(aA) = a\,tr(A)$;
3. $tr(AB) = tr(BA)$;
4. $tr(AB - BA) = 0$.

Definición 1.1.7. [5] Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se llama autovalor de A si existe un vector v diferente de cero tal que

$$Av = \lambda v.$$

El vector $v \neq 0$ se llama autovector de A correspondiente al autovalor λ.

Definición 1.1.8. [5] Sea λ un autovalor de A, el subespacio $E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$ se llama autoespacio de A correspondiente al valor propio λ.

Definición 1.1.9. Un espacio vectorial V es un espacio con producto interno si para cada par ordenado de vectores u y v en V, existe un único número (u, v) en el campo $\mathbb{F}$ llamado producto interno de u y v, tal que si u, v y w están en V y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

1. $(v, v) \geq 0$;
2. $(v, v) = 0$ si y solo si $v = 0$;
3. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$;
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;
5. $(u, v) = \overline{(v, u)}$;
6. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$;
7. $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$.

La barra de las condiciones 5. y 7. denota el conjugado del número (en caso de que el campo sea los complejos).
Se dice que un producto interno es no degenerado, si además satisface que: si v es un elemento de V y $(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Denotemos con V^* el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en $\mathbb{K}$. Sabemos que V^* es en si mismo un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ya que podemos sumar aplicaciones lineales y multiplicarlas por escalares. Los elementos de V^* se conocen como funcionales (sobre V) y a V^* se le denomina espacio dual.

Ejemplo 1.1.2. Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la proyección sobre la primera componente, esto es, $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_1$; φ es un funcional. Análogamente, para cada $i = 1, ..., n$ tenemos un funcional φ_i tal que

$$\varphi_i(x_1, ..., x_n) = x_i.$$

Supongamos V un espacio vectorial con producto interno no degenerado, a cada elemento $v \in V$ le podemos asociar un funcional L_v en el espacio dual. L_v es definido como

$$L_v(w) = (v, w)$$

para todo $w \in V$. Si v_1, $v_2 \in V$, entonces $L_{v_1+v_2} = L_{v_1} + L_{v_2}$. Si $c \in \mathbb{K}$, entonces $cL_v = L_{cv}$. Podemos decir que la aplicación $v \to L_v$ es una aplicación lineal de V en el espacio dual V^*.

Teorema 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, con un producto interno no degenerado. Dado un funcional $L : V \to \mathbb{K}$ existe un único elemento $v \in V$ tal que $L(w) = (v, w)$ para todo $w \in V$.*

Demostración. Consideremos el conjunto de todos los funcionales sobre V que son del tipo L_v para algún $v \in V$. Este conjunto es un subespacio de V^*, porque el funcional nulo es de este tipo y, además, son verdaderas las siguientes fórmulas: $L_{v_1+v_2} = L_{v_1} + L_{v_2}$ y $cL_v = L_{cv}$.
Ademas, si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, entonces $L_{v_1}, ..., L_{v_n}$ son linealmente independientes, ya que si $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ tales que $x_1 L_{v_1} + ... + x_n L_{v_n} = 0$ entonces

$$L_{x_1 v_1} + ... + L_{x_n v_n} = 0,$$

y, por lo tanto,

$$L_{x_1 v_1 + ... + x_n v_n} = 0.$$

Sin embargo, si $v \in V$ y $L_v = 0$, entonces $v = 0$ dado que el producto interno es no degenerado tenemos que $x_1 v_1 + ... + x_n v_n = 0$ y en consecuencia $x_1 = ... = x_n = 0$, entonces $L_{v_1}, ..., L_{v_n}$ son linealmente independientes. Concluimos que el espacio de los funcionales de tipo $L_v (v \in V)$, de la misma dimensión que la de V^*, por lo tanto igual a V^*, con lo que se termina la demostración. ■

1.2. Álgebras de Lie.

Está sección esta constituida por la estructura básica del tema, como es la definición de álgebra y subálgebra de Lie, además, se mostrará como se presentan los morfismos entre ellas.

Definición 1.2.1. Una algebra de Lie consiste en un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de una operación producto llamada corchete o conmutador denotado por:

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad, es decir, que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{F}$ se cumple que

$$[aX + bY\,, Z] = a[X\,, Z] + b[Y\,, Z], \tag{1.1}$$

$$[Z\,, aX + bY] = a[Z\,, X] + b[Z\,, Y]. \tag{1.2}$$

2. Antisimetría, es decir, que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[X\,, Y] = -[Y\,, X]. \tag{1.3}$$

3. La identidad de Jacobi, esto es, para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[\,X\,, [Y\,, Z]\,] + [\,Y\,[Z\,, X]\,] + [\,Z\,, [X\,, Y]\,] = 0, \tag{1.4}$$

que puede ser reescrita alternativamente de la siguiente forma

$$[\,X\,, [Y\,, Z]\,] = [[X\,, Y]\,, Z\,] + [\,Y\,, [X\,, Z]]. \tag{1.5}$$

Aplicando solamente la definición de álgebra de Lie obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *Para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$; $[X\,, Y] = -[Y\,, X]$.
2. *Para todo* $X \in \mathfrak{g}$; $[X\,, X] = 0$.

Demostración.

i) $1 \Rightarrow 2$
Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, por hipótesis tenemos que $[X + Y\,, X] = -[X\,, X + Y]$ que se puede reescribir de la forma $[X + Y\,, X] + [X\,, X + Y] = 0$ obtenemos que:

$$0 \;=\; [X + Y\,, X] + [X\,, X + Y]$$

$$\begin{aligned} 0 &= [X\,,X]+[Y\,,X]+[X\,,X]+[X\,,Y] \\ 0 &= [X\,,X]+[Y\,,X]+[X\,,X]-[Y\,,X] \\ 0 &= [X\,,X]+[X\,,X] \\ 0 &= 2[X\,,X]. \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de X se tiene que para todo $X \in \mathfrak{g}\, [X\,,X] = 0$.

ii) $2 \Rightarrow 1$

Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces por hipótesis $[X, X] = 0$ y $[Y, Y] = 0$, además:

$$\begin{aligned} 0 &= [X+Y\,,X+Y] \\ 0 &= [X\,,X+Y]+[Y\,,X+Y] \\ 0 &= [X\,,X]+[X\,,Y]+[Y\,,X]+[Y\,,Y] \\ 0 &= [X\,,Y]+[Y\,,X]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$; $[X\,,Y] = -[Y\,,X]$.

De i) y ii) concluimos la equivalencia de las proposiciones dadas. ■

Ejemplo 1.2.1. Un campo $\mathbb{F}$ es una álgebra de Lie donde el corchete esta dado por el conmutador, esto es $[X, Y] = XY - YX$ con $X, Y \in \mathbb{F}$, veamos:
Es evidente, que el corchete se anula para todos los elementos de $\mathbb{F}$ debido a que el campo cumple la propiedad conmutativa, por lo tanto $\mathbb{F}$ es una álgebra de Lie.

Sea $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ el conjunto de todas las transformaciones de un espacio vectorial de dimensión n en $\mathbb{F}$, o sea, el álgebra de las matrices de tamaño $n \times n$.

Ejemplo 1.2.2. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ es una álgebra de Lie donde el corchete esta dado por el conmutador, esto es $[X, Y] = XY - YX$ con $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, veamos:

Para que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ sea una álgebra de Lie debe cumplir las condiciones dadas en la Definición 1.2.1, por lo tanto debemos demostrar que: el corchete en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ es bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi.

- **Bilinealidad**

  Sean $a, b \in \mathbb{F}$ y X, Y, Z matrices entonces debemos demostrar que:

1. $[aX + bY\,, Z] = a[X\,, Z] + b[Y\,, Z]$.

$$\begin{aligned}[aX + bY\,, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY)\\ &= aXZ + bYZ - ZaX - ZbY\\ &= aXZ + bYZ - aZX - bZY\\ &= aXZ - aZX + bYZ - bZY\\ &= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY)\\ &= a[X\,, Z] + b[Y\,, Z].\end{aligned}$$

2. $[Z\,, aX + bY] = a[Z\,, X] + b[Z\,, Y]$.

$$\begin{aligned}[Z\,, aX + bY] &= Z(aX + bY) - (aX + bY)Z\\ &= ZaX + ZbY - aXZ - bYZ\\ &= aZX + bZY - aXZ - bYZ\\ &= aZX - aXZ + bZY - bYZ\\ &= a(ZX - XZ) + b(ZY - YZ)\\ &= a[Z\,, X] + b[Z\,, Y].\end{aligned}$$

De a) y b) obtenemos la bilinealidad del corchete en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

- **Antisimetría del corchete.** Para demostrar que es antisimétrica podemos usar cualquiera de las dos proposiciones en el Teorema 1.2.1 esto es:
  Sea $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, entonces $[X\,, X] = X.X - X.X = X^2 - X^2 = 0$. Y así por el Teorema 1.2.1 tenemos que $[X\,, Y] = -[Y\,, X]$ en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

- **Identidad de Jacobi.**

  Para demostrar que cumple la propiedad de Jacobi, usaremos la Ecuación (1.5), sean $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] &= ([X,Y]Z - Z[X,Y]) + (Y[X,Z] - [X,Z]Y)\\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) + Y(XZ - ZX)\\ &\qquad - (XZ - ZX)Y\\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YXZ - YZX\\ &\qquad - XZY + ZXY\\ &= XYZ + ZYX - YZX - XZY\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (XYZ - XZY) + (ZYX - YZX) \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\
&= X[Y,Z] - [Y,Z]X \\
&= [X\,,[Y,Z]].
\end{aligned}
$$

Definición 1.2.2. Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie abeliana si $[X,Y]=0$, para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$.

Observe que todo campo $\mathbb{F}$ es un álgebra de Lie abeliana.

Definición 1.2.3. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por el corchete, es decir, $[X\,,Y]\in\mathfrak{h}$, si $X,Y\in\mathfrak{h}$.

Ejemplo 1.2.3. $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}), X+X^t=0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Aqui X^t es la transpuesta de X y $n\geq 2$.
Debemos comprobar que si $X,Y\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X\,,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$. Para que $[X\,,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ se debe cumplir que $[X\,,Y]+[X\,,Y]^t=0$ veamos

$$
\begin{aligned}
[X\,,Y]+[X\,,Y]^t &= XY-YX+(XY-YX)^t \\
&= XY-YX+(XY)^t-(YX)^t \\
&= XY-YX+Y^tX^t-X^tY^t \\
&= XY-YX+YX-XY=0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $[X\,,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ y se demuestra que $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ejemplo 1.2.4. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}), tr(X)=0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.
Debemos comprobar que si $X,Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X\,,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. Para que $[X\,,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ se debe cumplir que $tr([X\,,Y])=0$, veamos:

$$
\begin{aligned}
tr([X\,,Y]) &= tr(XY-YX) \\
&= tr(XY)-tr(YX) \\
&= tr(XY)-tr(XY) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2.5. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})=\{X\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F})|\,XJ+JX^t=0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ donde J esta dada en bloques de tamaño n

$$
J=\begin{pmatrix} 0 & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}
$$

aqui $1_{n\times n}$ representa la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Debemos comprobar que si $X, Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$, esto es, se debe cumplir que $[X\,,Y]J + J[X\,,Y]^t = 0$. Como $X, Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ entonces $XJ + JX^t = 0$ y $YJ + JY^t = 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
[X\,,Y]J + J(X\,,Y]^t &= (XY - YX)J + J(XY - YX)^t \\
&= XYJ - YXJ + J(XY)^t - J(YX)^t \\
&= XYJ - YXJ + (JY^t)X^t - (JX^t)Y^t \\
&= XYJ - YXJ - Y(JX^t) + X(JY^t) \\
&= XYJ - YXJ + YXJ - XYJ \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.6. $\mathfrak{o}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{F}) |\, XJ + JX^t = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ donde J esta dada en bloques de tamaño $n \times n$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n\times n} \\ 0 & 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

La demostración de que $\mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra de Lie se hace de forma análoga al Ejemplo 1.2.5 y por eso omitiremos la demostración.

Ejemplo 1.2.7. El subespacio generado por las matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 son una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, las matrices son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ahora introduciremos algunos conceptos provenientes de la teoría de grupos, que apoyaran el desarrollo de nuestra temática.

Definición 1.2.4. Una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie es un:

- Homomorfismo si $\varphi[X,Y] = [\varphi X\,, \varphi Y]$.
- Isomorfismo si es un homomorfismo biyectivo.

- Epimorfismo si la imagen de φ es $\mathfrak{h}$.
- Automorfismo si es un isomorfismo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Definición 1.2.5. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y I un subespacio tal que $I \subset \mathfrak{g}$. I es un ideal si para todo $Y \in I$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$ se cumple que $[X, Y] \in I$.

De la definición de subálgebra es claro que todo ideal es una subálgebra, pero no toda subálgebra es un ideal. También 0 (el subespacio consistente únicamente del vector nulo) y $\mathfrak{g}$ misma son ideales de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.2.8. El centro de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definido como:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} | \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g},\ [X\,, Y] = 0\}$$

es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.2.9. El subespacio W de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal de tamaño 3×3 es un ideal del espacio generado por las matrices descritas en el Ejemplo 1.2.7.

Definición 1.2.6. El normalizador de una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{h} : [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

es la mayor subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ como un ideal.

Para una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ construimos el álgebra cociente $\mathfrak{g}/I$ de $\mathfrak{g}$ por un ideal I de manera análoga a los anillos cocientes. El espacio vectorial $\mathfrak{g}/I$ es simplemente el cociente de un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ por el subespacio I, dotado con la operación corchete, la cual es definida naturalmente en $\mathfrak{g}/I$ por $[X + I, Y + I] = [X, Y] + I$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. La operación en $\mathfrak{g}/I$ esta bien definida ya que si $X + I = X' + I$ y $Y + I = Y' + I$ entonces tenemos que $X' = X + U,\ Y' = Y + V$ para algún $U, V \in I$, como $[X', Y'] - [X, Y] = [X + U, Y + V] - [X, Y] = [X, V] + [U, Y] + [U, V] \in I$.
Los siguientes teoremas introducen los resultados clásicos sobre homomorfismos, cuyas demostraciones son análogas a aquellas que aparecen en cualquier libro de teoría de grupos.

Teorema 1.2.1 (1° Teorema de Isomorfismo)**.** *Sea $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}'$ un homomorfismo de álgebras de Lie, si I es un ideal de $\mathfrak{g}$ incluido en el $Ker\ \varphi$ entonces existe un único* *homomorfismo de álgebras $\psi : \mathfrak{g}/I \mapsto \mathfrak{g}'$ de Lie que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathfrak{g}' \\ & \mathfrak{g}/I \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\psi \circ \pi = \varphi$, donde $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ es la proyección canónica, esto es que para $X \in \mathfrak{g},\ \pi(X) = X + I$. Particularmente tenemos que

$$\frac{\mathfrak{g}}{Ker\varphi} \cong Im\,\varphi.$$

Teorema 1.2.2 (2° Teorema de Isomorfismo)**.** *Si I, J son ideales de $\mathfrak{g}$ entonces*

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

donde el isomorfismo esta dado naturalmente.

Teorema 1.2.3 (3° Teorema de Isomorfismo)**.** *Si I, J son ideales de $\mathfrak{g}$ tales que $I \subset J$, entonces J/I es un ideal de $\mathfrak{g}/I$ y por lo tanto tenemos el isomorfismo natural entre*

$$\frac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \frac{\mathfrak{g}}{J}.$$

Definición 1.2.7. Sean $\mathfrak{g}_1, ..., \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie y

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_n$$

su suma directa como espacios vectoriales. Esto es, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times ... \times \mathfrak{g}_n$ como una estructura vectorial producto. Para $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ y $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n) \in \mathfrak{g}$ se define el corchete de la siguiente forma

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]..., [X_n, Y_n])$$

definiendo así sobre $\mathfrak{g}$ una estructura de álgebra de Lie.

1.3. Representaciones.

En esta sección presentaremos una herramienta muy importante para el estudio de las álgebras de Lie, como lo es la representación adjunta, para ello es necesario presentar algunas nociones básicas sobre la representaciones.

Definición 1.3.1. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, V un espacio vectorial y $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie de las transformaciones lineales de V. Una representación de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V).$$

V se denomina espacio de representación y su dimensión se denomina dimensión de representación. Una representación ρ es fiel si $Ker(\rho) = \{0\}$.

Dada una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V, se puede tomar la representación ρ^* de $\mathfrak{g}$ en el dual V^* de V dada por la fórmula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \quad \lambda \in V^*.$$

La verificación de que ρ^* es una representación es inmediata. El signo negativo que aparece es necesario para que los corchetes aparezcan en el orden correcto.

Definición 1.3.2 (Subespacio Invariante)**.** Si ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $W \subset \mathfrak{g}$, decimos que W es un espacio invariante, si para todo $X \in \mathfrak{g}$

$$\rho(X)W \subset W.$$

Definición 1.3.3 (Restricción de Representaciones)**.** Sean ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y W un espacio invariante, la aplicación

$$\rho|_W : X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho(X)|_W \in \mathfrak{gl}(W)$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

Definición 1.3.4. Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, decimos que ρ es irreducible si sus únicos subespacios invariantes son los triviales, es decir, 0 y V.

Definición 1.3.5. Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, decimos que ρ es un representación completamente reducible si V se puede descomponer como

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$$

con cada V_i invariante tal que $\rho|_{V_i}$ es irreducible, esta representación se conoce como representación semisimple.

Para un elemento X de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sea la transformación lineal

$$ad(X) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)(Y) = [X, Y]$. La aplicación

$$ad : X \in \mathfrak{g} \mapsto ad(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, denominada representación adjunta.

Ejemplo 1.3.1. [Representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$] Veamos la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, las matrices de esta subálgebra son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Una base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ es el conjunto $\{X, Y, H\}$. Donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular la adjunta con respecto a X obtenemos que:

$$ad(X)(Y) = [X, Y] = H, \quad ad(X)(X) = [X, X] = 0, \quad ad(X)(H) = [X, H] = -2X.$$

Comprobemos que $ad(X)(Y) = [X, Y] = H$

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H.
\end{aligned}$$

Podemos escribir que:

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma se pueden calcular $ad(H)$ y $ad(Y)$ y obtener que:

$$ad(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\{X, Y, H\}$ es una base para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ podemos escribir

$$ad\, A = a\, ad\, H + b\, ad\, X + c\, ad\, Y$$

por lo tanto se puede definir de forma general la aplicación $ad : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \to \mathfrak{sl}(3, \mathbb{K})$, es decir, dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ obtenemos que $ad(A) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{K})$.

Definición 1.3.6 (Derivaciones)**.** Una derivación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ tal que para todo $X\,, Y \in \mathfrak{g}$ satisface la siguiente igualdad

$$D[X\,, Y] = [DX\,, Y] + [X\,, DY].$$

De una forma mas general, una derivación de una álgebra es una transformación lineal que satisface la regla de Leibnitz para la derivada de un producto $D(XY) = D(X)Y + XD(Y)$.

Proposición 1.3.1. *La representación adjunta es una derivación.*

Demostración. Por definición de representación adjunta tenemos que

$$ad(X)[Y\,, Z] = [X\,, [Y\,, Z]]$$

y por la ecuación (1.5) obtenemos que

$$ad(X)[Y\,, Z] = [[X\,, Y]\,, Z\,] + [\,Y\,, [X\,, Z]] = [ad(X)Y\,, Z] + [Y\,, ad(X)Z]$$

por lo tanto $ad(X)$ es una derivación. ■

Las derivaciones que tienen como imagen un subconjunto de $\mathfrak{g}$, como la adjunta son consideradas derivaciones internas.

1.4. Álgebras nilpotentes y solubles.

Para hablar de las álgebras nilpotentes y de las álgebras solubles debemos hablar primero de las series de composición, ya que serán la base para poder definirlas.
Las series de composición que nos servirán para definir las álgebras nilpotentes y las álgebras solubles son las siguientes:
Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, para dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathfrak{g}$ definimos

$$[A\,,B] = \{[X\,,Y]|X \in A, Y \in B\}.$$

Definimos por inducción los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}\,,\mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}\,,\mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

La serie $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', ..., \mathfrak{g}^{(k)}$ se les conoce como serie derivada de $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.4.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y I un ideal. Sea también $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ el homomorfismo canónico. Entonces*

$$\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}.$$

Demostración. Por inducción sobre k. Es claro que $\pi(\mathfrak{g}^{(0)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(0)}$. Asumiendo que la igualdad es valida para $k-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) &= \pi[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] = [\pi(\mathfrak{g}^{(k-1)}), \pi(\mathfrak{g}^{(k-1)})] \\ &= [(\mathfrak{g}/I)^{(k-1)}, (\mathfrak{g}/I)^{(k-1)}] \\ &= (\mathfrak{g}/I)^{(k)}. \end{aligned}$$

■

La serie central descendente de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definida por inducción de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}\,,\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}\,,\mathfrak{g}^{k-1}].\end{aligned}$$

Proposición 1.4.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y I un ideal. Sea también $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ el homomorfismo canónico. Entonces*

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/I)^k.$$

Demostración. Por inducción sobre k. Es claro que $\pi(\mathfrak{g}^0) = (\mathfrak{g}/I)^0$. Asumiendo que la igualdad es valida para $k-1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi(\mathfrak{g}^k) &= \pi[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g}^{k-1})] \\ &= [(\mathfrak{g}/I), (\mathfrak{g}/I)^{k-1}] \\ &= (\mathfrak{g}/I)^k.\end{aligned}$$

■

Es fácil demostrar que la serie derivada decrece mas rápido que la serie central descendente, es decir, que

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}.$$

Conociendo las series de composición pasemos a definir las álgebras nilpotentes, y algunas propiedades sobre ellas, posteriormente estudiaremos las álgebras solubles.

1.4.1. Álgebras nilpotentes.

Definición 1.4.1. Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra nilpotente, si su serie central descendente se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}.$$

y para todo $k \geq k_0, \mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Un ejemplo clásico sobre las álgebras de Lie nilpotentes es el siguiente.

Ejemplo 1.4.1. Las álgebras de Lie abelianas son nilpotentes ya que $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$.

Ejemplo 1.4.2. El subespacio $\mathfrak{g}$ generado por las matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 es un álgebra de Lie nilpotente, debido a que:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^4 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^3] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación presentaremos algunas propiedades que se preservan en las álgebras de Lie nilpotentes.

Proposición 1.4.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente entonces tenemos que:*

1. *Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, entonces $\mathfrak{h}$ es nilpotente.*
2. *El centro de $\mathfrak{g}$ no es el trivial.*

Demostración.

1. Como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$ y como $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ entonces $\mathfrak{h}^k = 0$ por lo tanto $\mathfrak{h}$ es nilpotente.
2. Sea k un entero positivo tal que $\mathfrak{g}^k \neq \{0\}$ y $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$ entonces por definición de serie central descendente $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \{0\}$ entonces $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ por lo tanto el centro no es el trivial. ■

Definición 1.4.2 (Representación Nilpotente)**.** Sea ρ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V. Decimos que ρ es una representación nilpotente si existe un entero positivo k tal que $\rho(X)^k = 0$.

Un resultado interesante e importante sobre las álgebras de Lie nilpotentes es el teorema de Engel, para demostrarlo necesitamos primero demostrar las siguientes proposiciones.

Proposición 1.4.4. *Si $X \in \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente entonces $ad(X)$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{gl}(V)$ un elemento nilpotente y asociemos a X dos automorfismos de $End(V)^*$, $\lambda_X(Y) = XY$ y $\rho_X(Y) = YX$ las traslaciones a izquierda y derecha

*Es el conjunto de todos los automorfismos definido es V.

respectivamente, claramente son estas traslaciones automorfismos nilpotentes, ya que X es nilpotente. Además para cualquier anillo en especial $End(\,End(V))$, la suma o diferencia de dos automorfismos nilpotentes es nilpotente entonces $ad(X) = \lambda_X(Y) - \rho_X(Y)$ es nilpotente. ∎

Proposición 1.4.5. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $gl(V)$ con V un espacio de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$ entonces existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $\mathfrak{g}.v = 0$.*

Demostración. La siguiente demostración la haremos por inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es igual a 1, sea $X \in \mathfrak{g}$, como X es nilpotente existe un $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ y $X^{k-1} \neq 0$, sea $W \in V$ tal que $v = X^{k-1}.W \neq 0$ y $Xv = X.X^{k-1}.W = 0$. Supongamos que $K \neq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. De acuerdo con la Proposición 1.4.4, K actúa como una álgebra de Lie de automorfismo nilpotente sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, y también sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}/K$. Como $dim\, K < dim\, \mathfrak{g}$, la hipótesis de inducción nos proporciona un vector $X + K \neq K$ en $\mathfrak{g}/K$ anulado por una imagen de K en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$, es decir, $[Y, X] \in K$ para todo $Y \in K$, con $X \notin K$. En otras palabras K esta propiamente contenido en $\mathfrak{N}(K)$.

Ahora, si K es una subálgebra propia maximal de $\mathfrak{g}$, el argumento precedente implica que $\mathfrak{N}(K) = \mathfrak{g}$, o sea, que K es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}/K < 1$, entonces la imagen inversa en $\mathfrak{g}$ de una subálgebra unidimensional de $\mathfrak{g}/K$ será una subálgebra propia contenida en K propiamente, lo que contradice la hipótesis de maximalidad de K; por lo tanto K tiene codimensión 1. Esto nos permite escribir $\mathfrak{g} = K + Z$ para cualquier $Z \in \mathfrak{g} - K$.

Por inducción, $W = \{v \in V : K.v = 0\}$ es no nulo. Como K es un ideal, W es invariante bajo $\mathfrak{g}$. En efecto, sean $X \in \mathfrak{g}, Y \in K,$ y $v \in W$ implica que $[X, Y].v = XY.v - YX.v = 0$. Escojamos $Z \in \mathfrak{g} - K$, como arriba, de modo que el automorfismo Z (ahora actuando sobre el subespacio W) tenemos un autovector, es decir, que existe un vector no nulo $v \in W$ para el cual $Z.v = 0$. Finalmente, tenemos que $\mathfrak{g}.v = 0$, es decir, $X.v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. ∎

Teorema 1.4.1 (Teorema de Engel)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie constituida por elementos ad-nilpotentes, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Demostración. Los elementos $\mathfrak{g}$ so ad-nilpotentes, luego el álgebra $ad(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ satisface la hipótesis de la Proposición 1.4.5. Asumiendo $\mathfrak{g} \neq 0$, tenemos un vector $X \neq 0$ en $\mathfrak{g}$

para el cual $[\mathfrak{g}, X] = 0$, en consecuencia, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.
Pero a su vez, $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ también es ad-nilpotente y tiene dimensión menor $\mathfrak{g}$. Nuevamente por la hipótesis de inducción aplicada a la dimensión de $\mathfrak{g}$ garantizamos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es nilpotente, y en consecuencia $\mathfrak{g}$ es nilpotente. ■

1.4.2. Álgebras solubles.

Definición 1.4.3. Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra soluble, si alguna de sus álgebras derivadas se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0.$$

y para todo $k \geq k_0, \mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

Un ideal soluble es un ideal que cumple la definición anterior.

Ejemplo 1.4.3. Las álgebras de Lie abelianas son solubles ya que $\mathfrak{g}' = 0$.

Ejemplo 1.4.4. El subespacio $\mathfrak{g}$ generado por las matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 es un álgebra de Lie soluble, debido a que:

$$\mathfrak{g}^(0) = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposición 1.4.6. *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie soluble, tenemos que*

1. *$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra entonces $\mathfrak{h}$ es soluble.*

2. *$I \subset \mathfrak{g}$ es un ideal, entonces $\mathfrak{g}/I$ es soluble.*

Demostración.

1. Las álgebras derivadas sucesivas de $\mathfrak{h}$ están contenidas en las correspondientes álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{h}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k+1)}$ por lo tanto $\mathfrak{h}$ es una subálgebra soluble.

2. Como $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}$ y como sabemos que si alguna álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ se anula lo mismo sucede con el álgebra derivada correspondiente de $\mathfrak{g}/I$ por lo tanto $\mathfrak{g}/I$ es soluble. ■

Proposición 1.4.7. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal. Supongamos que tanto I como $\mathfrak{g}/I$ son solubles, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. Sea k_1 tal que $(\mathfrak{g}/I)^{(k_1)} = \{0\}$. Dado que $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}$ tenemos que $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = 0$. Esto significa que $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subset I$. Como I es soluble existe k_2 tal que $I^{(k_2)} = \{0\}$, obtenemos así que $\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subset I^{(k_2)} = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es soluble. ■

Proposición 1.4.8. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie , I_1 y I_2 ideales solubles entonces la suma $I_1 + I_2$ es un ideal soluble.*

Demostración. Se puede demostrar fácilmente que $I_1 + I_2$ es ideal. Luego por el Teorema 1.2.2 tenemos que

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} \cong \frac{I_1}{I_1 \cap I_2}.$$

Como I_1 es soluble, $\dfrac{I_1}{I_1 \cap I_2}$ es soluble luego $\dfrac{I_1 + I_2}{I_2}$ es soluble. Como I_2 es soluble, entonces $I_1 + I_2$ es soluble por la Proposición 1.4.7. ■

Proposición 1.4.9. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe un único ideal soluble $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contiene a todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea n la maxima dimensión de los ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{r}$ un ideal soluble con $dim\, \mathfrak{r} = n$ entonces, todo ideal soluble de $\mathfrak{g}$ está contenido en $\mathfrak{r}$. En efecto, si $\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ también es un ideal por la Proposición 1.4.8, por lo tanto $dim\, \mathfrak{r} + \mathfrak{h} = dim\, \mathfrak{r}$ entonces $(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{r}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Entonces $\mathfrak{r}$ contiene todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y evidentemente es único. ■

Definición 1.4.4. El ideal $\mathfrak{r}$ de la proposición anterior es llamado radical soluble (o simplemente radical) de $\mathfrak{g}$. Para el radical de $\mathfrak{g}$ será utilizada la notación $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Recordemos que un campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado si cada polinomio f de grado mayor o igual que uno, con coeficientes en $\mathbb{F}$, tiene raíces en $\mathbb{F}$. Por ejemplo, el campo $\mathbb{R}$ de los números reales no es algebraicamente cerrado ya que el polinomio $f(X) = X^2 + 1$ no tiene raíces reales.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. El polinomio característico de A es $P_T(\lambda) = det(\lambda 1 - T)$ donde 1 denota la aplicación identidad. Ese polinomio es de la forma

$$P_T(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$$

donde n es la dimensión de V. El teorema de Cayley-Hamilton (véase [5]) garantiza que P_T se anula en T, esto es,

$$P_T(T) = a_0 1 + a_1 T + ... + A^T = 0.$$

Sea $P_T = P_1^{m_1}....P_s^{m_s}$ la descomposición primaria de P_T. En esa descomposición, cada p_i es un polinomio irreducible. Sea $A : V \to V$ una transformación lineal. El teorema de descomposición primaria descompone a V en subespacios A-invariantes

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$$

que son los autoespacios generalizados $V_i = \{v \in V \,|\, P_i(A)^k v = 0 \text{ para algún } k \geq 1\}$ donde los polinomios irreducibles P_i, $i = 1, ..., s$, son las componentes primarias del polinomio minimal $P = P_1^{m_1}....P_s^{m_s}$ de A. En el caso en que el campo sea algebraicamente cerrado, $P_i(A) = A - \lambda_i$ con λ_i autovalor de A y los subespacios de la descomposición se escriben como

$$V_i = \{v \in V \,|\, (A - \lambda_i)^k v = 0 \,\text{para algún } k \geq 1\}.$$

Para enfatizar la relación de los subespacios con los autovalores de A, serán denotados por V_λ.

Definición 1.4.5. [8] Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Un peso de ρ es un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que el subespacio V_λ de V definido por

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

satisface que $V_\lambda \neq 0$. El subespacio V_λ es llamado el subespacio de pesos asociados a λ. La dimensión de V_λ es llamada la multiplicidad de λ.

Relacionado con las álgebras solubles existe el Teorema de Lie, para demostrarlo necesitamos del siguiente teorema que solo lo enunciaremos ya que su demostración se sale de los propósitos del presente trabajo.

Teorema 1.4.2. *[8] Sean $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra soluble. Entonces, existe $v \in V$, $v \neq 0$ y un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que $Xv = \lambda(X)v$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir, v es un autovector común para $X \in \mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda(X)$.*

Teorema 1.4.3 (Teorema de Lie)**.** *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra soluble. Entonces, existe una base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_3\}$ de V y funcionales lineales $\lambda_1, ..., \lambda_n : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que, en relación a β cualquier $X \in \mathfrak{g}$ se escribe como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Como estamos en las condiciones del Teorema 1.4.2 sea v_1 autovector común de los elementos de $\mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda_1(X)$. Sabemos que λ_1 es un funcional lineal. Sea V_1 el espacio generado por v_1, entonces $\mathfrak{g}$ deja invariante a V_1, por lo tanto, se representa en V/V_1. Como $\mathfrak{g}$ es soluble, existe $w \in V/V_1$ que es un autovector común para los elementos de la representación de $\mathfrak{g}$ con autovalor dado por el funcional lineal λ_2. Tomando v_2 como representante de w en V, tenemos que $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u$ con $u \in V_1$. Como $w \neq 0$ en V/V_1, entonces $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Al repetir el anterior procedimiento (tantas veces como la dimensión de V) obtenemos la base de los pesos requeridos. ∎

Las siguientes definiciones son las que usualmente se dan sobre las álgebras de Lie simples y semisimples, en un capítulo posterior trataremos las álgebras de Lie semisimples con más profundidad.

Definición 1.4.6 (Álgebra semisimple)**.** Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie semisimple si $\mathfrak{g}$ no contiene ideales solubles diferentes de cero, es decir,

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0.$$

Definición 1.4.7 (Álgebra simple)**.** Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie simple si

1. Sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{g}$.

2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie que no posee ideales no triviales, como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es un ideal, debe ser igual a 0 o $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple, si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ no se cumple cuando la $dim\, \mathfrak{g} \geq 2$. Eso porque si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{g}$ es soluble y por lo tanto, $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$, como $\mathfrak{g}'$ es un ideal, entonces $\mathfrak{g}' = 0$, es decir, $\mathfrak{g}$ es abeliana. Mas eso es imposible si $dim\, \mathfrak{g} \geq 2$, pues todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal. En otras palabras, las álgebras de Lie simples son semisimples.

CAPÍTULO 2

CRITERIOS Y SUBÁLGEBRAS DE CARTAN

En este capítulo presentaremos los criterios y subálgebras de Cartan y se presentarán resultados necesarios para nuestro estudio de las álgebras de Lie semisimples.

2.1. Criterios de Cartan.

Antes de demostrar los criterios de Cartan, necesitamos presentar algunos teoremas y proposiciones que nos ayudaran a construirlos.

Proposición 2.1.1. *[8] Sea $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ una derivación de una álgebra de Lie de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Tomando una descomposición primaria de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_2} \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$ donde*

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0, \ \textit{para algún } n \geq 1\}$$

es un autoespacio generalizado asociado al autovalor λ_i. Entonces $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. ($\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ si $\lambda_i + \lambda_j$ no es autovalor de D).

La anterior proposición la ilustraremos con el siguiente ejemplo, ya que su demostración es demasiado tediosa y no hace parte esencial de nuestro estudio.

Ejemplo 2.1.1. Considere el álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, sea $H = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ una matriz diagonal en $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Su adjunta $ad(H)$ es diagonalizable y sus autovalores son $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ con $i, j = 1, \ldots, n$. Supongamos que $\alpha_{ij} \neq \alpha_{rs}$, si $i \neq j$ y $(i, j) \neq (r, s)$ Entonces los autoespacios de $ad(H)$ son dados de la siguiente forma:

- El subespacio $\mathfrak{h}$ de las matrices diagonales es el autoespacio asociado al autovalor cero. Este subespacio es evidentemente una subálgebra de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.
- El autoespacio generado por E_{ij}, $i \neq j$, que es la matriz cuja entrada (i, j)-esima es 1 y las demás entradas son nulas, es el autoespacio asociado al autovalor α_{ij}. El corchete entre dos de estas matrices esta dado por $[E_{ij}, E_{rs}] = \delta_{jr} E_{is} - \delta_{si} E_{rj}$ donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y 0 en caso contrario. Así, por ejemplo, el corchete entre los elementos del autoespacio asociado a $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ y los elementos del autoespacio asociado al autovalor $\alpha_{js} = \lambda_j - \lambda_s$ están contenidos en el auto espacio asociado al autovalor $\alpha_{is} = (\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_s) = \alpha_{ij} + \alpha_{js} = \lambda_i - \lambda_s$ que es un subespacio generado por E_{is}.

Teorema 2.1.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita y D una derivación de $\mathfrak{g}$ en un campo algebraicamente cerrado, D escrita de manera única como $D = S + N$, donde S es semisimple, N es nilpotente, y $[D, S] = [D, N] = [S, N] = 0$, entonces, S y N son derivaciones.*

Demostración. Como se cumplen las condiciones de la Proposición 2.1.1, para mostrar que S es una derivación, es suficiente mostrar que $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$ para X, Y elementos de una base. Como $\mathfrak{g}$ se descompone en autoespacios generalizados de D, es suficiente mostrar la propiedad de derivación para $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ y $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ con λ_i y λ_j autovalores. Por la Proposición 2.1.1 tenemos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$. Los autoespacios generalizados de D son autoespacios de S, por lo tanto $S[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$ siendo que $[X, Y] = 0$ si $\lambda_i + \lambda_j$ no es un autovalor.
Por otro lado, $[SX, Y] + [X, SY] = \lambda_i[X, Y] + \lambda_j[X, Y]$, entonces $[SX, Y] + [X, SY] = \lambda_i[X, Y] + \lambda_j[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y] = S[X, Y]$ por lo tanto tenemos que S es una derivación. Como $N = D - S$ y D es una derivación tenemos que N es una derivación. ■

Teorema 2.1.2. *Sea S una derivación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita y suponga que S es diagonalizable, esto es, $SX_i = \lambda_i X_i$ para $i = 1, ..., n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ los autovalores y $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ una base de autovectores de $\mathfrak{g}$ y sea $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k)$ una sucesión que se comporta de la misma forma que λ, definimos la transformación lineal $T_\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por $T_\mu X_i = \mu_i X_i,\ i = 1, ..., n$ entonces T_μ es una derivación.*

Demostración. Debemos mostrar que

$$T_\mu[X_i, X_j] = [T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j] \tag{2.1}$$

para $i = 1, ..., n$. Si $\lambda_i + \lambda_j$ no es autovalor, $[X_i, X_j] = 0$ la igualdad se satisface trivialmente.

Si $\lambda_i + \lambda_j$ es autovalor entonces $\lambda_l = \lambda_i + \lambda_j$, es decir, que la terna (i, j, l) es λ-cerrada, para algún l. Como μ imita a λ, entonces $\mu_l = \mu_i + \mu_j$, por lo tanto el segundo miembro de la igualdad (2.1) coincide con $\mu_l[X_i, X_j]$. Por otro lado, por la Proposición 2.1.1, $S[X_i, X_j] = \lambda_l[X_i, X_j]$. En tanto, los autovectores de S asociados al autovalor λ_l son autovalores de T_μ, asociados a μ_l lo que muestra que $T_\mu[X_i, X_j] = \mu_l[X_i, X_j]$ sustituyendo obtenemos que T_μ es una derivación. ∎

La anterior proposición sobre derivaciones diagonalizables, permite mostrar el siguiente lema, que entre otras cosas, será utilizado para demostrar los criterios de Cartan.

Lema 2.1.1. *[8] Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita y D una derivación de $\mathfrak{g}$. Supongamos que para toda derivación M de $\mathfrak{g}$ se tiene que $tr(D\,M) = 0$. Entonces, D es nilpotente.*

Antes de presentar los criterios de Cartan definamos lo que es la forma traza.

Dada una representación ρ de dimensión finita del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define en $\mathfrak{g}$ *la forma traza β_ρ* como la forma bilineal simétrica dada por:

$$\beta_\rho(X, Y) = tr(\rho(X)\rho(Y)).$$

Cuando ρ corresponde a la representación adjunta, la forma traza será llamada **"forma de Cartan-Killing"** del álgebra y será denotada como $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Una consecuencia inmediata de la definición es que $\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0$, ya que la forma traza de un conmutador se anula.

Ejemplo 2.1.2. Si ρ es una representación nilpotente de $\mathfrak{g}$, entonces $\beta_\rho(X, X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, pues la forma traza de una transformación nilpotente se anula. En particular la forma de Cartan-Killing de una álgebra nilpotente es idénticamente nula.

Proposición 2.1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita y suponga que su forma de Cartan-Killing sea idénticamente nula, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. Para mostrar que $\mathfrak{g}$ soluble, se mostrará que su álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, para esto sea $X \in \mathfrak{g}'$, entonces X se escribe como

$$X = \sum_{i=1}^{n} [Y_i, Z_i]$$

con $Y_i, Z_i \in \mathfrak{g}$. Ahora, para una derivación D de $\mathfrak{g}$, $tr(ad(X)D) = 0$. De hecho,

$$\begin{aligned} tr(ad(X)D) &= \sum_{i=1}^{n} tr([adY_i, adZ_i]D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} tr(ad\,Y_i\,ad\,Z_i\,D - ad\,Y_i\,ad\,Z_i\,D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} tr(ad\,Z_i\,D\,ad\,Y_i - ad\,Z_i\,ad\,Y_i\,D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} tr(ad\,Z_i[D, ad\,Y_i]) = \sum_{i=1}^{n} tr(ad\,Z_i ad\,D\,ad\,Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle Z_i, D\,ad\,Y_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Debido a que por hipótesis la forma de Cartan-Killing es idénticamente nula. Esta igualdad unida al Lema 2.1.1, muestra que $ad(X)$ es nilpotente, pues la derivación D fue tomada de manera arbitraria. por lo tanto, la representación adjunta de $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, por el teorema de Engel obtenemos que $\mathfrak{g}'$ es nilpotente y por lo tanto $\mathfrak{g}$ es soluble. ■

Teorema 2.1.3 (Primer Criterio de Cartan)**.** *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita, tenemos que $\mathfrak{g}$ es soluble si y solo si $\langle X, Y \rangle = 0$ para toda $X \in \mathfrak{g}'$ y $Y \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. La necesidad se garantiza por el Teorema de Lie como fue comentado en el Ejemplo 2.1.2. Por otro lado, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}'$ garantiza, en particular, que la forma de Cartan-Killing es idénticamente nula en $\mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}'$ es un ideal, por lo tanto la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ es nula, y por la Proposición 2.1.2, concluimos que $\mathfrak{g}'$ es soluble, luego, $\mathfrak{g}$ es soluble. ■

A partir del criterio de Cartan para las álgebras solubles, podemos mostrar el segundo criterio de Cartan que será utilizado para la clasificación de las álgebras semisimples.

Teorema 2.1.4 (Segundo Criterio de Cartan). *La forma Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ es no degenerada si y solamente si $\mathfrak{g}$ es semisimple.*

Demostración. Supongamos en primer lugar, que $\mathfrak{g}$ no es semisimple, tenemos que $\mathfrak{g}$ admite un ideal abeliano $\mathfrak{i}$ no trivial. Eso porque $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq 0$ y por tanto $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k)}$ es un ideal abeliano no nulo para algún k. Sea $X \in \mathfrak{i}$. Entonces, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, la imagen de $ad(Y)ad(X)$ está contenida en $\mathfrak{i}$ dado que $\mathfrak{i}$ es un ideal. Por esta razón, la traza de $ad(Y)ad(X)$ coincide con la traza de su restricción a $\mathfrak{i}$. Pero $ad(Y)ad(X)|_{\mathfrak{i}} = 0$ dado que $\mathfrak{i}$ es abeliano. Por lo tanto

$$\langle Y, X\rangle = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{i}$, y, $Y \in \mathfrak{g}$. Eso muestra que las álgebras que tienen la forma Cartan-Killing no degenerada son semisimples. Recíprocamente, asumiendo que $\mathfrak{g}$ es semisimple, sea $\mathfrak{g}^{\perp}$ el subespacio de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : \langle Y, X\rangle = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Entonces, $\mathfrak{g}^{\perp}$ es un ideal puesto que

$$\langle [Z, X], Y\rangle = -\langle X, [Z, Y]\rangle = 0,$$

si $X \in \mathfrak{g}^{\perp}$ e Y, Z son arbitrarios. Como la restricción de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ a $\mathfrak{g}^{\perp}$ es idénticamente nula, y esta coincide con su forma de Cartan-Killing, se concluye a partir del primer criterio de Cartan, que $\mathfrak{g}^{\perp}$ es soluble. El hecho que $\mathfrak{g}$ sea semisimple implica entonces que $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$. Pero esto es lo mismo que decir que la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ es no degenerada, concluyendo la demostración del teorema. ■

Ejemplo 2.1.3. Veamos que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es semisimple, para ello debemos calcular $\langle X, Y\rangle$ para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$, como $\langle X, Y\rangle = tr(ad\,(X)\,ad\,(Y))$ y sabemos por el Ejemplo 1.3.1 que si $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ entonces $ad(A) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{K})$. Al calcular $\langle X, Y\rangle$ tenemos que es diferente de cero, entonces $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es semisimple.

2.2. Subálgebras de Cartan.

A continuación presentaremos la definición de subálgebra de Cartan y un ejemplo sobre ellas y algunas propiedades relacionadas.

Definición 2.2.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisface:

1. $\mathfrak{h}$ es nilpotente, esto es, $\mathfrak{h}^{k_0} = \{0\}$ para algún $k_0 \geq 1$.
2. El normalizador de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ coincide con $\mathfrak{h}$, esta condición es equivalente a:

2'. Si $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, entonces $x \in \mathfrak{h}$.

Ejemplo 2.2.1. Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$ es una subálgebra de Lie nilpotente por ser abeliana. Además $\mathfrak{h}$ es claramente su propio normalizador por la misma razón, luego $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

En general el subconjunto de matrices diagonales de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ es una subálgebra de Cartan, debido a que es una subálgebra de Lie nilpotente por ser una subálgebra abeliana y ella es su propio normalizador.

Definición 2.2.2. El rango de una álgebra de Lie de dimensión finita es el menor índice i en el que P_i no es idénticamente nulo, donde P_i denota los coeficientes de los polinomios característicos. Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ es regular si $P_i(X) \neq 0$ donde i es el rango de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.2.1. *Sea $X \in \mathfrak{g}$ y denotemos por $\mathfrak{g}_0(X)$ el autoespacio generalizado asociado al autovalor nulo en la descomposición primaria*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1}(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_2}(X) \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}(X)$$

de $ad(X)$ con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ autovalores no nulos. Entonces $\mathfrak{g}_0$ es subálgebra de Cartan para X regular.

Demostración. Para demostrar que $\mathfrak{g}_0(X)$ es subálgebra de Cartan se deben comprobar las condiciones dadas en la Definición (2.2.1).

1. $\mathfrak{g}_0(X)$ es subálgebra, pues tenemos que $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$.

2. Tomemos $Y \notin \mathfrak{g}_0$, que se escribe como $Y = Y_0 + Y_1 + ... + Y_k$ con $Y_0 \in \mathfrak{g}_0,\ Y_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ con algun Y_i no nulo. Y como $[X, Y] = [X, Y_0] + [X, Y_1] + ... + [X, Y_k]$ lo que garantiza que $[X, Y] \notin \mathfrak{g}_0$. En efecto, la restricción de $ad(X)$ en cada $\mathfrak{g}_i$, es invertible dado que los autovalores son diferentes de cero, se tien que $[X, Y_i] \neq 0$ para algún $i = 1, ..., k$. Como $X \in \mathfrak{g}_0(X)$, tenemos que Y no normaliza a $\mathfrak{g}_0(X)$. Luego $\mathfrak{g}_0(X)$ coincide con su normalizador.

3. Para verificar que $\mathfrak{g}_0(X)$ es nilpotente se usara el hecho de que X es regular. El objetivo es mostrar que, para $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ es nilpotente y aplicar el teorema de Engel. Esto, se garantiza mostrando que el polinomio característico de $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ es de la forma λ^r donde r es la dimensión de $\mathfrak{g}_0(X)$. Obsérvese que $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ es nilpotente, pues es el subespacio generalizado asociado al autovalor nulo.

   De esa forma, denotese por π_0 el polinomio característico de $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ y supongamos, por absurdo, que este polinomio no es de la forma λ^r entonces

   $$\pi_0(\lambda) = \lambda^r + ... + q_{r-i}(Y)\lambda^{r-i}$$

   con $i > 0$ y $q_{r-i}(Y) \neq 0$. Los subespacios $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ son invariantes por $ad(Y)$, pues $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{\lambda_i}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, el polinomio característico de $ad(Y)$ es dado por $P_Y(\lambda) = \pi_0\pi_1...\pi_k$ con π_i el polinomio característico de $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$. El término constante de π_i es dado por $det(ad(Y)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})$.

   Ahora, la aplicación $d_i(Z) = ad(Z)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$ es un polinomio en $\mathfrak{g}_0$ que no es idénticamente nulo, puesto que $ad(X)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$ es invertible. Además, el término de menor grado de P_Y tiene por coeficiente el polinomio $q_{r-i}(Y)d_1(Y)...d_k(Y)$ que no es idénticamente nulo en Y como el en cada uno de sus factores. Mas esto contradice el hecho de que X es regular, pues el término de menor grado se anula en X ya que q_{r-1} se anula en X, pues $ad(Y)|_{\mathfrak{g}0}$ es nilpotente. Como esa contradicción nos lleva a que q_{r-1} no es idénticamente nulo para algún $i > 0$, tenemos que $ad(X)$ es nilpotente en $\mathfrak{g}_0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_0$, por lo tanto, el álgebra $\mathfrak{g}_0$ es nilpotente.

Así $\mathfrak{g}_0(X)$ satisface las condiciones requeridas para ser una subálgebra de Cartan. ■

Lema 2.2.1. *Sean* $\mathfrak{g}$ *una álgebra de Lie,* $\mathfrak{h}$ *una subálgebra de Cartan y* ρ *una representación de* $\mathfrak{h}$ *en* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *inducida por la representación adjunta de* $\mathfrak{h}$ *en* $\mathfrak{g}$*, entonces, si* $X \in \mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{h}$ *si y solo si* ρ *es invertible.*

Demostración. $\rho(X)$ es invertible si y solo si $Ker\rho(X) = 0$ lo que ocurre si y solo si $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}$, ya que $ad(X)$ es nilpotente en $\mathfrak{g}_0(X)$ y $\rho(X)$ es inducida por $ad(X)$. Como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, queda demostrado el lema. ■

Lema 2.2.2. *Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, entonces, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Demostración. Para verificar la igualdad para algún X, consideremos el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ y la representación ρ de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ inducida por la representación adjunta $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Tomado la extensión de la representación en un campo algebraicamente cerrado de la base, la extensión se descompone en subespacios de pesos, ya que $\mathfrak{h}$ es nilpotente. Como $\mathfrak{h}$ coincide con su normalizador en $\mathfrak{g}$, uno de esos pesos se anula.

De hecho, el anulamiento de algún peso en la extensión implica la existencia de $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ con $\rho(X)v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, que significa, que existe $Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ con $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{h}$ lo que contradice el hecho de que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Cartan. Por lo tanto existe $X \in \mathfrak{h}$ que no anula ningún peso, lo que significa que $\rho(X)$ es invertible en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Para ese X el Lema 2.2.1 garantiza que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. ■

CAPÍTULO 3

ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES

En el primer capítulo definimos lo que es una álgebra de Lie semisimple y en el segundo capítulo se presentaron los criterios de Cartan que permiten determinar cuando una álgebra de Lie es soluble y mediante la forma de Cartan-Killing cuando es semisimple, en este capítulo presentaremos propiedades sobre las álgebras semisimples y tópicos sobre sistemas de raíces asociados.

3.1. Propiedades de las álgebras semisimples.

Teorema 3.1.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple. Entonces $\mathfrak{g}$ se descompone en suma directa*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_s \tag{3.1}$$

con $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, ..., s$ ideales simples. En esa misma descomposición $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ si $i \neq j$. Además tenemos que,

1. *El ortogonal $\mathfrak{g}_i^{\perp}$ de una componente simple, en relación a la forma de Cartan-Killing, es la suma de las demás componentes.*

2. *los ideales de $\mathfrak{g}$ son sumas de algunas de sus componentes.*

3. La descomposición es única (a menos de permutación en los indices).

Demostración. Sean $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ un ideal no trivial, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{i}}$ es una restricción a $\mathfrak{i}$ de la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{i}^{\perp}$ el ortogonal a $\mathfrak{i}$ con relación a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entonces $\mathfrak{i}^{\perp}$ es el ideal complementario a $\mathfrak{i}$. En efecto, si $X \in \mathfrak{i}^{\perp}$ y $Y \in \mathfrak{g}$ entonces para todo $Z \in \mathfrak{i}$ $\langle [X,Y], Z \rangle = -\langle X, [Y,Z] \rangle$ lo que demuestra que $\mathfrak{i}^{\perp}$ es un ideal. Además de eso, $\mathfrak{j} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^{\perp}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, y por definición tenemos que para todo $X \in \mathfrak{j}$, $\langle X, X \rangle = 0$, por el primer criterio de Cartan obtenemos que $\mathfrak{j}$ es soluble, luego $\mathfrak{j} = 0$ dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple. Como $\mathfrak{i}^{\perp}$ complementa a $\mathfrak{i}$, La restricción a $\mathfrak{i}$ de la forma de Cartan-Killing es no degenerada y por el segundo criterio de Cartan $\mathfrak{i}$ es semisimple. Por la misma razón la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es completamente reducible y por lo tanto se descompone como suma directa de subespacios invariantes irreducibles. Es claro que un subespacio invariante irreducible es un ideal simple de $\mathfrak{g}$.

Para demostrar 1., 2. y 3., supongamos que $\mathfrak{g}$ se descompone como la suma de dos ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ entonces el complemento ortogonal de uno de los ideales es el otro, es decir, $\mathfrak{h}_1^{\perp}$ complementa a $\mathfrak{h}_1$, por lo tanto, $\mathfrak{h}_1^{\perp}$ tiene la misma dimensión de $\mathfrak{h}_2$. Además, si $X \in \mathfrak{h}_1$ y $Y \in \mathfrak{h}_2$, tenemos que $ad(X)ad(Y)$ se anula en $\mathfrak{h}_1$ y en $\mathfrak{h}_2$, ya que los ideales son ortogonales en relación a la forma de Cartan-Killing. Tomando entonces una base de $\mathfrak{g}$ cuyos elementos están contenidos en $\mathfrak{h}_1$, o en $\mathfrak{h}_2$, se ve que $\langle X, Y \rangle = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1^{\perp}$ y esa contenencia es una igualdad ya que las dimensiones coinciden.
Sea $\mathfrak{g}_i$ una componente simple y $\mathfrak{c}_i$ la suma de las demás componentes simples. Entonces $\mathfrak{c}_i$ es un ideal, pues el corchete entre componentes simples diferentes se anula. Como $\mathfrak{c}_i$ coincide con el complemento ortogonal de $\mathfrak{g}_i$, aplicando el razonamiento dado en el párrafo anterior queda demostrado 1.
Para demostrar 2., sea $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_i$, o $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ para algún $i = 1$, ..., s, pues $\mathfrak{g}_i$ es simple. Cuando $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_i$ tenemos que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}_i$ es un ideal que si es no nulo, un argumento por inducción permite mostrar que es suma de componentes simples y lo mismo sucede con $\mathfrak{h}$. Ahora, si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ entonces $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}_i$, y si $X \in \mathfrak{g}_i$, $Y \in \mathfrak{h}$ entonces $ad(X)$ se anula en $\mathfrak{c}_i$ y $ad(Y)$ se anula en $\mathfrak{g}_i$, lo que garantiza que $\langle X, Y \rangle = tr(ad(X)ad(Y)) = 0$, mostrando así que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_i^{\perp} = \mathfrak{c}_i$, usando nuevamente un argumento por inducción, concluimos que $\mathfrak{h}$ es suma de componentes simples de la descomposición (3.1). El item 3 se obtiene a partir del item anterior que garantiza que $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, ..., s$, son los únicos ideales simples de $\mathfrak{g}$. ■

Algunas consecuencias del anterior teorema son las siguientes.

Corolario 3.1.1. *Si* $\mathfrak{g}$ *es semisimple, entonces* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Demostración. Como $\mathfrak{g}'$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, el teorema anterior garantiza que existe un ideal $\mathfrak{i}$ que complementa a $\mathfrak{g}'$. Dados $X, Y \in \mathfrak{i}$, tenemos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{i} = \{0\}$, es decir, $\mathfrak{i}$ es un ideal abeliano y por lo tanto $\mathfrak{i} = 0$ en consecuencia $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. ■

Corolario 3.1.2. *Si* $\mathfrak{g}$ *es semisimple y* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra abeliana entonces la aplicación idénticamente nula es el único homomorfismo de* $\mathfrak{g}$ *en* $\mathfrak{h}$.

Demostración. Sea $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo, entonces como $\mathfrak{h}$ es abeliana $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ tenemos que $\phi = 0$. ■

Corolario 3.1.3. *Si* $\mathfrak{g}$ *es una álgebra semisimple y* $\mathfrak{i}$ *un ideal propio de* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *es semisimple.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.1, existe un ideal $\mathfrak{j}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$ podemos ver que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i} \approx \mathfrak{j}$, como $\mathfrak{j}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ es semisimple. ■

Proposición 3.1.1. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una álgebra semisimple, entonces, toda derivación de* $\mathfrak{g}$ *es una derivación interna.*

Demostración. Sea D una derivación y sea el funcional lineal en $\mathfrak{g}$ dado por

$$X \to tr(Dad(X)).$$

Como la forma de Cartan-Killing es no degenerada, por el Teorema 1.1.1 existe $Y_D \in \mathfrak{g}$ tal que

$$tr(Dad(X)) = \langle Y_D, X\rangle \tag{3.2}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Sea $E = D - ad(Y_D)$ una derivación y por la Igualdad (3.2) se tiene que $tr(Ead(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Ahora, tomando X y Y arbitrarios, veamos que $ad(EX) = [E, ad(X)]$, en efecto, $ad(EX)(Y) = [EX, Y]$ y $[E, ad(X)](Y) = E\,ad(X)(Y) - ad(X)E(Y) = E[X, Y] - [X, EY] = E[X, Y] - E[X, Y] + [EX, Y] = [EX, Y]$. Ahora veamos que

$$\begin{aligned}\langle EX, Y\rangle &= tr(ad(EX)ad(Y)) = tr([E, ad(X)]ad(Y)) \\ &= tr(E\,ad(X)ad(Y) - ad(X)Ead(Y))\end{aligned}$$

$$= \quad tr(E\,ad[X,Y]) = 0,$$

lo que muestra que $E = 0$, por lo tanto $D = ad(Y_D)$, es decir que D es una derivación interna. ■

A partir de la Proposición 3.1.1 y el hecho de que las componentes semisimples y nilpotentes de una derivación son derivaciones, obtenemos las siguiente descomposición de los elementos de una álgebra semisimple.

Corolario 3.1.4. *Supongamos que $\mathfrak{g}$ es semisimple y sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces X se descompone de manera única $X = X_S + X_N$ con $X_S, X_N \in \mathfrak{g}$ tales que $ad(X_S)$ es semisimple, $ad(X_N)$ es nilpotente y $[X_S, X_N] = [X_S, X] = [X, X_N] = 0$.*

Demostración. Tomemos la descomposición $ad(X) = S + N$ con S y N derivaciones que conmutan entre si con $ad(X)$. Por la Proposición 3.1.1 existe un X_S y X_N tal que $S = ad(X_S)$ y $N = ad(X_N)$, por lo tanto $ad(X - X_S - X_N) = 0$, es decir, $X = X_S + X_N$, pues como $\mathfrak{g}$ es semisimple el $Ker\, ad = 0$. La unicidad de la descomposición y la conmutatividad en $\mathfrak{g}$, son verificadas de la misma forma, a través de la inyectividad de la representación adjunta. ■

Este corolario garantiza que las álgebras semisimples contienen elementos cuyas adjuntas son semisimples, ya que existen elementos que no son nilpotentes, y por lo tanto, admiten componentes semisimples no nulas.

3.2. Subálgebras de Cartan de álgebras semisimples.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{K}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Por el Teorema 2.1.1 el álgebra se descompone como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k} \tag{3.3}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ los pesos no nulos de la representación adjunta de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Siguiendo la terminología usual, esos pesos serán denominados raíces de $\mathfrak{h}$ en relación a $\mathfrak{g}$ y su conjunto será denotado por Π. Los espacios $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ serán denominados espacios de raíces.

La representación de $\mathfrak{h}$ dentro de cada $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ es dada por las matrices de la forma

$$ad(H) = \begin{pmatrix} \alpha_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_i(H) \end{pmatrix}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$, además, tenemos que $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}$.

Lema 3.2.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y α y β dos raíces de $\mathfrak{h}$, si $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ entonces $\langle X, Y\rangle = 0$ a menos que $\beta = -\alpha$.*

Demostración. Sea $Z \in \mathfrak{g}_\gamma$, entonces $ad(X)Z \in \mathfrak{g}_{\alpha+\gamma}$ y $ad(Y)ad(X)Z \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$. Así, tomando una base de $\mathfrak{g}$ adaptada a la descomposición en espacios de raíces, ningún elemento de la base contribuye para la traza de $ad(Y)ad(X)$, a menos que $\alpha+\beta = 0$, lo que muestra el lema. ■

Este lema unido al hecho de que la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ es no degenerada, tiene las siguientes consecuencias.

Corolario 3.2.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, entonces*

1. *La restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{h}$ es no degenerada.*
2. *Si α es una raíz, entonces $-\alpha$ es raíz.*
3. *Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$.*

Demostración.

1. Sea $H \in \mathfrak{h}$, como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es no degenerada, existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle H, X\rangle \neq 0$, escribiendo a $X = H_1 + X_1 + ... + X_k$, con $H_1 \in \mathfrak{h}$ y $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, el Lema 3.2.1 garantiza que $\langle H, X_i\rangle = 0$, por lo tanto $\langle H, H_1\rangle \neq 0$, lo que muestra que la restricción es no degenerada.
2. Sea $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, como existe $Y \in \mathfrak{g}$ por el Lema 3.2.1 $\langle X, Y\rangle \neq 0$ que implica que $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$, es decir que $-\alpha$ es raíz.

3. Si $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, entonces por el Lema 3.2.1 tenemos que $\langle X, Z\rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$, lo que contradice el hecho de que la forma de Cartan-Killing es no degenerada. ■

Proposición 3.2.1. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Para todo $H \in \mathfrak{h}$ y toda raíz α, $ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)\, id$ y las transformaciones lineales $ad(H)$, $H \in \mathfrak{h}$ son simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. La restricción de $ad(H)$ a un subespacio de raíces es de la forma

$$ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha(H) \end{pmatrix}.$$

Sea la descomposición $H = H_S + H_N$ con $ad(H_S)$ semisimple $ad(H_N)$ nilpotente y H, H_S y H_N conmutan dos a dos. Entonces $ad(H_S)$ es una parte diagonal de $ad(H)$, por lo tanto, $ad(H_N)$ restringida a $\mathfrak{g}_\alpha$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando en particular $\alpha = 0$ (esto es $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$), muestra que $ad(H_N)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ y obtenemos que $ad(H_N) \in \mathfrak{h}$ pues $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan. Por otro lado, para todo $H' \in \mathfrak{h}$, $ad(H_N)ad(H')$ es triangular superior con ceros en la diagonal, por lo tanto, $\langle H_N, H'\rangle = 0$ lo que muestra que $H_N = 0$, ya que la forma de Cartan-Killing es no degenerada en $\mathfrak{h}$, por lo tanto $ad(H)$ es nilpotente. ■

Proposición 3.2.2. *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. El conjunto Π de las raíces genera $\mathfrak{h}^*$ el dual de $\mathfrak{h}$, es decir, $H = 0$ si $\beta(H) = 0$ para toda raíz β.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.1, $ad(H) = 0$ si $\beta(H) = 0$ para toda raíz β. Como el núcleo de la representación adjunta es nulo, entonces $H = 0$ si $\beta(H) = 0$ para toda raíz β. ■

Antes de proseguir, es necesario definir la correspondiente forma de Cartan-Killing en el dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. Como $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es una forma bilineal, ella define una aplicación $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ por

$$H \to \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot\rangle.$$

Como la restricción de la forma de Cartan-Killing a $\mathfrak{h}$ es no degenerada, esa aplicación es un isomorfismo entre $\mathfrak{h}^*$ y $\mathfrak{h}$. Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, su imagen por la inversa de ese isomorfismo sera denotada por H_α, es decir, H_α es definido por la igualdad $\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.
Usando ese isomorfismo, se puede "pasar" la forma de Cartan-Killing a $\mathfrak{h}^*$, definiendo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha)$$

si α y β que pertenecen a $\mathfrak{h}^*$. Esta es una forma bilineal simétrica no degenerada en $\mathfrak{h}^*$. Ella también será denominada forma de Cartan-Killing.
Las raíces $\alpha \in \Pi$ definen un número finito de elementos especiales H_α en $\mathfrak{h}$. Como el conjunto de las raíces genera $\mathfrak{h}^*$, el conjunto $\{H_\alpha \,|\, \alpha \text{ es raíz }\}$ genera a $\mathfrak{h}$.
Consideremos la siguiente sucesión de elementos de $\mathfrak{h}^*$

$$..., \beta - 2\alpha,\ \beta - \alpha,\ \beta,\ \beta + \alpha,\ \beta + 2\alpha, ...$$

que será denominada una α-sucesión iniciada en β. Se desea saber cuantos de los elementos de la sucesión son raíces. La respuesta esta dada por la fórmula de Killing.
Los elementos de la α-sucesión iniciada en β que son raíces forman un intervalo que contiene a β, es decir, existen enteros p, $q \geq 0$ tal que

$$\beta - p\alpha,\ ...,\ \beta - \alpha,\ \beta,\ \beta + \alpha,\ ....\ \beta + q\alpha$$

son las únicas raíces de la forma $\beta + k\alpha$ con k entero, además, es valida la siguiente fórmula, llamada fórmula de Killing

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \tag{3.4}$$

De lo anterior tenemos las siguientes observaciones:

1. En la fórmula de Killing α y β no son simétricos, para la β-sucesión iniciada en α, son otros los valores de p y q que definen el intervalo de las raíces.

2. El segundo miembro de la Igualdad (3.4) es un entero que es denominado número de Killing asociado a las raíces α y β.

Como consecuencia de la fórmula de Killing se tienen la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Los únicos múltiplos de una raíz α que son raíces son $\pm\alpha$.*

Demostración. Supongamos que $\beta = c\alpha$ con $c \neq 0$ y β, α raíces entonces $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2c$ y $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2}{c}$. Sean $n = 2c$ y $m = \frac{2}{c}$, entonces m, n son enteros y $mn = 4$. Esto es posible si $n = \pm 1, \pm 2$, o, ± 4, es decir que, $c = \pm 1, \pm 2$, o, $\pm\frac{1}{2}$, por lo tanto $c = \pm 1$ pues hemos demostrado que los únicos múltiplos enteros de una raíz son ella misma y su opuesta. ■

Como el conjunto Π de las raíces de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ genera el dual $\mathfrak{h}^*$ del álgebra. De la misma forma, los elementos $H_\alpha,\ \alpha \in \Pi$, duales de las raíces en relación a la forma de Cartan-Killing generan $\mathfrak{h}$. Dentro del conjunto de las raíces, escogeremos bases especiales de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$, de tal manera que, en relación a ellas, los elementos de Π serán escritos con coordenadas enteras, por eso es conveniente trabajar sobre los subespacios racionales de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ generados por las raíces y sus duales (la razón por lo que es posible trabajar sobre subespacios racionales se debe a que la forma de Cartan-Killing asume valores racionales cuando es evaluada en las raíces). Como el campo de escalares $\mathbb{K}$ es de característica cero, contiene el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales. Por ello $\mathfrak{h}$ puede ser considerada como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. El subespacio racional de $\mathfrak{h}$ generado por $H_\alpha,\ \alpha \in \Pi$ será denotado por

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \{a_1 H_{\alpha_1} + ... + a_k H_{\alpha_k} \,|\, a_i \in \mathbb{Q},\, \alpha_i \in \Pi\}.$$

Como el conjunto de las raíces es finito, $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre los racionales. La restricción de la forma de Cartan-Killing define en $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ una forma bilineal simétrica, pues $\langle\cdot,\cdot\rangle$ asume valores racionales en Π. Como las dimensiones de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ coinciden, la forma es no degenerada.

Proposición 3.2.4. *La forma de Cartan-Killing restringida a $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ es un producto interno.*

Demostración. Sea $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ entonces

$$\langle H, H\rangle = tr(ad(H)^2) = \sum_{\alpha\in\Pi} \alpha(H)^2 = \sum \langle H_\alpha, H\rangle^2 \geq 0,$$

por lo tanto $\langle H, H\rangle \geq 0$, además $\langle H, H\rangle = 0$ si y solo si $\langle H_\alpha, H\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \Pi$, lo que ocurre solamente si $H = 0$, ya que Π genera a $\mathfrak{h}^*$. Como la forma de Cartan-Killing es bilineal simétrica, es fácil verificar que si H, T, $R \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ entonces
$\langle H, T + R\rangle = \langle H, T\rangle + \langle H, R\rangle$, $\quad \langle H + T, R\rangle = \langle H, R\rangle + \langle T, R\rangle$, $\quad \langle H, T\rangle = \langle T, H\rangle$,
$\langle aH, T\rangle = a\langle H, T\rangle$ con $a \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, la forma de Cartan-Killing es un producto interno. ■

Definición 3.2.1. Una raíz $\alpha \in \Pi$ es simple si $\alpha > 0$ y no existen β, $\gamma \in \Pi$ tal que β y γ son positivas y $\alpha = \beta + \gamma$.

El conjunto (finito) de las raíces simples será denotado por Σ.

Proposición 3.2.5. *$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ si α, $\beta \in \Sigma$ y $\alpha \neq \beta$.*

Demostración. Utilizaremos la fórmula de Killing. La primera observación que se hace es que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\beta - \alpha \notin \Pi$, porque si $\beta - \alpha$ fuese raíz, entonces si $\beta - \alpha \leq 0$, tenemos $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ pero β es simple y si $\beta - \alpha \geq 0$, pues $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ pero α es simple. Por lo tanto, en la α-sucesión iniciada en β, $p = 0$. Por la fórmula de Killing

$$0 \geq -q = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

así $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ si $\alpha \neq \beta$ son raíces simples. ■

Definición 3.2.2. Un subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ que satisface que

1. Σ es una base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

2. Toda raíz β puede ser escrita como $\beta = n_1\alpha_1 + ... + n_l\alpha_l$ con coeficientes enteros y todos los elementos del mismo signo.

Es denominado sistema simple de raíces.

Podemos decir que toda raíz positiva es combinación lineal de Σ con coeficientes enteros positivos o, lo que es lo mismo, es una suma -con posibles repeticiones- de elementos de Σ; de esa forma, para encontrar las raíces positivas (por lo tanto, todas las raíces, ya que $\Pi = \Pi^+ \cup -\Pi^+$) se debe determinar cuales de las sumas de Σ son raíces y para ello recurriremos a la fórmula de Killing.
Sea $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ un sistema simple de raíces. Si β es una raíz positiva, entonces $\beta = n_1\alpha_1 + ... + n_l\alpha_l$ con los coeficientes enteros no negativos. La altura de β es el entero positivo $n_1 + ... + n_l$. Por ejemplo, las raíces positivas de altura 1 son exactamente las raíces simples. Las raíces de altura 2 son de la forma $\alpha_i + \alpha_j$ con $i \neq j$ (pues ya sabemos que si α es raíz ,2α no lo es).
La fórmula de Killing para α_i y α_j permite encontrar cuales de las sumas no son raíces.

Si $\alpha_j - p\alpha_i$, ..., $\alpha_j + q\alpha_i$ es una α_i-sucesión iniciada en α_j entonces $p = 0$ pues $\alpha_i - \alpha_j$ no es raíz. Por lo tanto,

$$-q = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

de ahí que $q > 0$ (si $\alpha_i + \alpha_j$ es raíz) si y solo si $\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0$ (cabe recordar que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ si α y β son raíces simples distintas). De esa forma, para decidir cuales de esas raíces son de altura 2, basta obtener la tabla

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \quad i, j = 1, \ldots, l,$$

de los números de Killing asociados a las raíces simples.

Sea ahora β una raíz de altura 3, podemos escribirla como $\beta = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ con $i \neq j$. La fórmula de Killing para la α_k-sucesión iniciada en $\alpha_i + \alpha_j$ es

$$p - q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Con eso, existen las siguientes posibilidades:

- $i \neq j \neq k$, En este caso, $p = 0$ pues $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ no es raíz por ser una combinación lineal en la que aparecen tanto coeficientes positivos como negativos. Partiendo de que $\alpha_i + \alpha_j \in \Pi^+$, los valores de k para los cuales $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ es raíz positiva son aquellos en los que
$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0.$$
- $k = i$ o $k = j$. Por ejemplo, $k = j$, en este caso α_k-sucesión iniciada en $\alpha_i + \alpha_j$ hace parte de la α_j-sucesión iniciada en α_i. Como $\alpha_i - \alpha_j$ no es raíz, para decidir si $\alpha_i + 2\alpha_j$ es raíz basta obtener
$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}.$$

En cada caso, los números de Killing correspondiente a las raíces simples determina las raíces de altura 3.

En general se procede por inducción de la forma anterior. Las raíces de altura $n + 1$ son de la forma $\alpha + \alpha_k$ con α raíz de altura n y α_k raíz simple. La fórmula de Killing muestra cuales de esas sumas son raíces : la α_k-sucesión iniciada en α es dada por p y q con

$$p - q = \frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Por inducción, p es conocido, pues $\alpha - \alpha_k$, $\alpha - 2\alpha_k$, ... , si son raíces son positivas (ya que los coeficientes de α son positivos) y de altura menor que n. Si $\alpha = n_1\alpha_1 + ... + n_l\alpha_l$, entonces

$$\frac{2\langle\alpha,\alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k,\alpha_k\rangle} = n_1\frac{2\langle\alpha,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} + ... + n_l\frac{2\langle\alpha,\alpha_l\rangle}{\langle\alpha_l,\alpha_l\rangle}$$

y nuevamente q es encontrado a partir de los números de Killing correspondientes a los elementos de Σ. Por lo tanto, los números de Killing asociados a los elementos de un sistema simple determinan todas las raíces de $\mathfrak{h}$.

Los números de Killing asociados a las raíces simples son colocados en forma de matriz $l \times l$ como

$$C = \left(\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\right)_{i,j}.$$

Esta matriz recibe el nombre de *Matriz de Cartan* del sistema simple de raíces. Los elementos de la diagonal de la matriz son todos iguales a 2 y los elementos de fuera de la diagonal son enteros negativos. La proposición siguiente muestra que las posibilidades para los elementos de fuera de la diagonal son bastantes restringidas.

Proposición 3.2.6. *[8] Sean α y β raíces.*

1. *Si θ denota el ángulo entre α y β entonces,*

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2},$$

   esto es, $\theta = k\pi/6$ o $k\pi/4$.

2. *Los posibles valores para los números de Killing son*

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3.$$

Demostración.

1. La forma de Cartan-Killing es un producto interior entonces $\langle\alpha,\beta\rangle = |\alpha||\beta|\cos\theta$, y sabemos que

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \quad \text{y} \quad \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$$

   son enteros, tenemos que

$$4\cos^2\theta = \frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle}$$

es un entero. Luego,

$$4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4,$$

así tenemos que

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}.$$

2. Por el item anterior,

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} \tag{3.5}$$

es uno de los enteros 0,1,2,3,4 y cada uno de los factores es un entero positivo. Además, si uno de ellos se anula, digamos $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ el otro también se anula. De ahí que cada uno de los factores del producto en (3.5) pueden asumir apenas los valores

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

siendo que ± 4 no ocurre. De hecho, si por ejemplo

$$\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \pm 4,$$

solo ocurre cuando $\beta = \pm 2\alpha$ y esto no es posible en sistemas de raíces. ■

La Proposición 3.2.6 muestra que los elementos por fuera de la diagonal de una matriz de Cartan asumen apenas los valores 0,-1,-2 o -3. Ella también muestra que si θ es el ángulo entre dos raíces simples α_i y α_j, entonces $\theta = 0$(si las raíces coinciden) o $\theta = 90°, 120°, 135$ o 150°, si las raíces simples son distintas. Además, el hecho que $\cos^2\theta < 1$ para $i \neq j$ garantiza que si

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -2 \text{ o } -3,$$

entonces necesariamente,

$$\frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -1$$

pues el producto de esos dos números de Killing coinciden con $4\cos^2\theta$. En otras palabras, si una entrada $c_{ij}, i \neq j$ de la matriz de Cartan es -2 o -3, entonces la entrada c_{ji} es -1. De la misma forma, si $c_{ij} = 0$, lo mismo ocurre con c_{ji}. Como un resumen de lo anterior, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.7. *[8] Sea $C = (c_{ij})$ la matriz de Cartan de un sistema simple de raíces. Entonces,*

1. *$c_{ii} = 2$ para todo i,*

2. *$c_{ij} = 0, -1, -2$ o -3,*

3. *$c_{ji} = -1$ si $c_{ij} = -2$ o -3 y*

4. *$c_{ij} = 0$ si y solo si $c_{ji} = 0$.*

No todas las matrices $l \times l$ que satisfacen esas cuatro propiedades son efectivamente matrices de Cartan de algún sistema simple de raíces. Las matrices de Cartan serán encontradas posteriormente a través de los diagramas de Dynkin.

Ejemplo 3.2.1. La matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

es la matriz de Cartan $\mathfrak{s}l(3, \mathbb{F})$. Las raíces simples son $\alpha_1 = \alpha_{12}$ e $\alpha_2 = \alpha_{23}$, donde

$$\alpha_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que satisfacen

$$\frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -1.$$

La α_1-sucesión iniciada en α_2 se tiene que $p = 0$ y, por lo tanto, $q = 1$. Lo mismo ocurre con la α_2-sucesión iniciada en α_1. De ahí que $\alpha_1 + \alpha_2$ es la única raíz no simple positiva ya que $\alpha_1 + 2\alpha_2$ y $2\alpha_1 + \alpha_2$ no son raíces y, por lo tanto, no existen raíces de altura 3.

Ejemplo 3.2.2. La matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

es una matriz de Cartan $\mathfrak{sl}(4)$. Las raíces positivas son obtenidas de la matriz de Cartan de la siguiente forma.

1. Las raíces de altura uno son las raíces simples $\alpha_1 = \alpha_{12}, \alpha_2 = \alpha_{23}$, y $\alpha_3 = \alpha_{34}$, donde

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Las raíces de altura dos son $\alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha_2 + \alpha_3$. La suma $\alpha_1 + \alpha_3$ no es raíz, pues $\frac{2\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} = 0$.

3. La única raíz de altura tres es $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, ya que $\alpha_i + 2\alpha_j$ no es raíz para ningún par de raíces simples α_i y α_j.

No existen raíces de altura cuatro, ya que la α_i-sucesión iniciada en $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, p = 1$ si $i = 1$ o 3 y $p = 0$ si $i = 2$ ya que las raíces de altura dos son $\alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha_2 + \alpha_3$. De la matriz de Cartan, se ve que esos valores coinciden con

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

y, por tanto, $q = 0$.

CAPÍTULO 4

DIAGRAMAS DE DYNKIN

El diagrama de Dynkin es un diagrama(grafo) que contiene las mismas informaciones que las matrices de Cartan. Esta definido a partir de un sistema simple de raíces fijado:

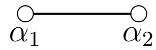
$$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}.$$

El diagrama contiene l puntos (vértices) representando cada una de las raíces simples. Los vértices son conectados o no por uno, dos o tres segmentos(aristas) de acuerdo con las siguientes instrucciones.

1. Si
$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$$
no existen conexiones.

$$\underset{\alpha_1}{\circ} \qquad \underset{\alpha_2}{\circ}$$

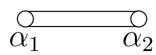
2. Si
$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1,$$
α_i y α_j son conectadas por un segmento.

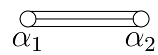


3. Si

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \text{ ó } \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$$

es -2 (respectivamente -3) entonces los vértices estarán conectados por dos (respectivamente tres) segmentos.

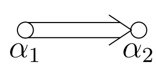


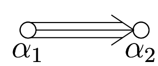


La idea del diagrama de Dynkin es poderlo utilizar para obtener la matriz de Cartan. Sea $C = (c_{ij})$ esa matriz. Si el diagrama fue construido de acuerdo con las reglas anteriores, entonces $c_{ij} = c_{ji} = 0$ cuando las raíces α_i y α_j no son conectadas y $c_{ij} = c_{ji} = -1$ si las raíces son conectadas por un segmento. Sin embargo, cuando la conexión es hecha por dos o tres segmentos, no queda claro cual de las entradas c_{ij} o c_{ji} de la matriz de Cartan es -2 o -3. Para distinguir eso, se orienta la conexión en dirección a la raíz α_j si

$$c_{ij} = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = -2 \text{ o } -3$$

(y, por tanto, $c_{ji} = -1$). Se obtiene de esa forma las conexiones orientadas.

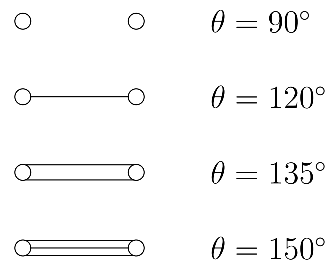




El número de conexiones entre dos raíces en el diagrama de Dynkin tienen la siguiente interpretación geométrica. Si θ es un ángulo entre α_i y α_j entonces,

$$4\cos\theta = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$$

y, por tanto, este valor es el número de aristas que conectan las raíces ya que, si uno de los factores de ese producto es nulo, lo mismo ocurre con el otro y, en el caso contrario, por lo menos uno de ellos es uno. De esa forma, el número de conexiones entre dos raíces simples y el ángulo θ que ellas forman entre sí están relacionados por la siguiente tabla.



El caso de conexiones con dos o tres segmentos ya vimos que, la dirección convenida para la conexión está asociada al comportamiento relativo entre las raíces. De hecho, el cociente entre los números de Killing correspondientes es

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle/\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle/\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = \frac{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}.$$

Por tanto, si dos raíces están conectadas por un único segmento entonces ellas tienen la misma magnitud mientras que, si ellas estuvieran conectadas por dos o tres segmentos, el cuadrado de sus magnitudes es dos o tres, respectivamente. Por el anterior cociente se ve que la dirección de una conexión múltiple fue escogida de tal forma que ella apunta para la raíz de menor magnitud entre las dos raíces de conexión.

4.1. Álgebras de Lie semisimples y sistemas de raíces.

En esta sección presentaremos la clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita, la matriz de Cartan asociada a las raíces simples y el diagrama de Dynkin de cada una de las álgebras. Para efectos de notación, haremos $\mathfrak{sl}(n)$ cuando deseemos referirnos a $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ y así con todas las álgebras.

4.1.1. Álgebras clásicas.

Los detalles de la construcción de estas álgebras serán presentadas a continuación. En cada uno de los casos, es hecha una elección de una subálgebra de Cartan y de un sistema simple de raíces.

A_l, $l \geq 1$

- Esta asociada al álgebra $\mathfrak{sl}(l+1)$.
- Una subálgebra de Cartan es el álgebra de las matrices diagonales de traza cero.
- Las raíces son $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, donde λ_i es dado por

$$\lambda_i : diag\{a_1, \, ..., \, a_{l+1}\} \to a_i.$$

- Un sistema simple de raíces es

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \, \lambda_2 - \lambda_3, \, ..., \, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}.$$

- Las raíces positivas en relación a este sistema simple son

$$\{\lambda_i - \lambda_j \,|\, i < j, \, 1 \leq i, j \leq l\}.$$

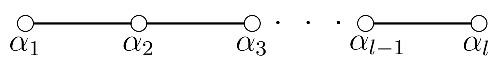
  Usando la notación $\Sigma = \{\alpha_1, \, \alpha_2, \, ..., \, \alpha_l\}$ las raíces positivas son dadas como combinación lineal

$$\{\alpha_i + \alpha_{i+1} + ... + \alpha_j \,|\, 1 \leq i \leq j \leq l\}.$$

- La dimensión de A_l es $l(l+2)$. La restricción a $\mathfrak{h}$ de la forma de Cartan-Killing es

$$\langle H, H' \rangle = 2l \, tr(HH').$$

- El diagrama de Dynkin asociado a A_l es



- La matriz de Cartan de las raíces simples de A_l es

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}.$$

B_l, $l \geq 2$

- Esta asociada al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar, es decir, $\mathfrak{so}(2l+1)$.

- Para encontrar una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2l+1)$ es mas conveniente escribir esta álgebra de la siguiente forma: Las matrices de $\mathfrak{so}(n)$ son matrices de transformaciones lineales antisimétricas en relación a una forma cuadrática no degenerada, definida por la matriz identidad. Dos formas cuadráticas no degeneradas son equivalentes debido a que el campo de escalares es algebraicamente cerrado, lo que lleva a que las álgebras de matrices antisimétricas en relación a formas cuadráticas no degeneradas distintas son isomorfas. Supongamos que J_1 y J_2 son matrices simétricas que definen formas cuadráticas equivalentes, entonces existe una matriz invertible g tal que $J_1 = g^t J_2 g$. Para $i = 1, 2$, definimos $\mathfrak{g}_i = \{A \in \mathfrak{sl}(2l+1) \,|\, A^t J_i + J_i A = 0\}$. Es evidente que $A \in \mathfrak{g}_2$ si solo si $gAg^{-1} \in \mathfrak{g}_1$, en otras palabras, $g\mathfrak{g}_2 g^{-1} = \mathfrak{g}_1$ y las álgebras son isomorfas. Por lo tanto, existen diferentes maneras de realizar $\mathfrak{so}(2l+1)$, escogiendo diferentes formas cuadráticas. La forma cuadrática mas conveniente para escribir una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2l+1)$ es dada por la matriz J escrita en bloques como
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix},$$
donde 1_l indica la matriz identidad de tamaño $l \times l$. Esa matriz es simétrica y no degenerada y si
$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i1_l & 1_l \\ 0 & 1_l & i1_l \end{pmatrix},$$
donde $i = \sqrt{-1}$ entonces $g^t g = J$. Por lo tanto, el álgebra de las matrices antisimétricas en relación a J es isomorfa a $\mathfrak{so}(2l+1)$.
Escribiendo una matriz A de tamaño $(2l+1) \times (2l+1)$ en bloques del mismo tamaño de J y usando la condición $AJ + JA^t = 0$, $A \in \mathfrak{so}(2l+1)$ si y solo si A es de la forma:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

con β y γ matrices de tamaño $1 \times l$ y a, b, c de tamaño $l \times l$ con b y c matrices antisimétricas. Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de dimensión l de las matrices diagonales en $\mathfrak{so}(2l+1)$, esto es, $H \in \mathfrak{h}$ si H es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda & \\ & & -\Lambda \end{pmatrix},$$

con Λ una matriz diagonal arbitraria de tamaño $l \times l$. Sean λ_j, $j = 1, \ldots, l$ funcionales definidos como:

$$\lambda_j : \Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\} \to a_j.$$

- Las raíces con los espacios de raíces correspondientes, son dadas por:
  - λ_j, $j = 1, ..., l$, con el espacio de raíces formado por las matrices A de la forma (4.1) en que $a = b = c = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = (0, \ldots, x_j, \ldots, 0)$.
  - $-\lambda_j$, $j = 1, \ldots, l$, con el espacio de raíces formado por las matrices A de la forma (4.1) en que $a = b = c = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = (0, \ldots, x_j, \ldots, 0)$.
  - $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, l$, con el espacio de raíces formado por las matrices A de la forma (4.1) en que $b = c = 0$, $\gamma = \beta = 0$ y a una matriz de tamaño $l \times l$ cuya única entrada no nula es $i\,j$.
  - $\lambda_i + \lambda_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, l$, con el espacio de raíces formado por las matrices A de la forma (4.1) en que $a = c = 0$, $\gamma = \beta = 0$ y b una matriz antisimétrica cuyas únicas entradas no nulas son las posiciones $i\,j$ y $j\,i$.
  - $-(\lambda_i + \lambda_j)$ con $i \neq j$ con el espacio de raíces dado por las matrices transpuestas del anterior ítem.
- Un sistema simple de raíces es dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

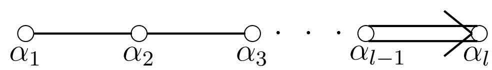
Como cada uno de los espacios de raíces es de dimensión uno y $H = 0$ si $\alpha(H) = 0$ para toda raíz α, como es de esperarse para una álgebra semisimple.

- Las raíces positivas son de la siguiente forma:

- Para cada $j = 1, \ldots, l, \quad \lambda_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \ldots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l.$
- Si $i < j, \quad \lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \ldots + (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \ldots + 2\lambda_l.$

- La dimensión de B_l es $l(2l+1)$. La restricción a $\mathfrak{h}$ de la forma de Cartan-Killing es dado por
$$\langle H, H' \rangle = 2(2l-1) \sum_{i=1}^{l} a_i a_i^{'}.$$
donde $a_i^{'} \in \Lambda = diag\{a_1^{'}, \ldots, a_l^{'}\}$ y $a_i \in \Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\}$.

- El diagrama de Dynkin asociado a B_l es



- La matriz de Cartan de las raíces simples de B_l es
$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}.$$

- Cuando $l = 1$, $\mathfrak{so}(3)$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. El isomorfismo puede ser visto por la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2)$ (ver Ejemplo 1.3.1). La imagen de esa representación es una subálgebra de $\mathfrak{so}(3)$. Como las dos álgebras tiene la misma dimensión y la representación adjunta es fiel, entonces son isomorfas.

C_l, $l \geq 2$

- Está asociada al álgebra de las matrices simplécticas, es decir, $\mathfrak{sp}(l) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{F}) |\, XJ + JX^t = 0\}$ donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{l \times l} \\ 1_{l \times l} & 0 \end{pmatrix}$.

- Escribiendo una matriz de tamaño $2l \times 2l$ en bloques de tamaño $l \times l$, $A \in \mathfrak{sp}(l)$ si y solo si A es de la forma
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$
con β y γ son matrices simétricas de tamaño $l \times l$. Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ corresponde a las matrices diagonales en $\mathfrak{sp}(l)$. Los elementos $H \in \mathfrak{h}$ son de la forma
$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix},$$
con $\Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\}$ una matriz diagonal arbitraria de tamaño $l \times l$. Si α es una raíz, $\alpha(H)$ es una diferencia de autovalores de H. Aquí, al contrario de B_l, $\pm 2\alpha_i$ es un autovalor de $ad(H)$ ya que β y γ son matrices simétricas y pueden tener entradas no nulas en sus componentes en la diagonal.

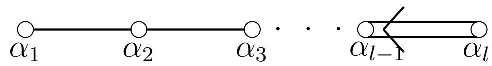
- Las raíces de $\mathfrak{h}$ con sus correspondientes espacios de raíces son dados por:
  - $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por las matrices en (4.2) tal que $\beta = \gamma = 0$ y α es una matriz de tamaño $l \times l$ cuya única entrada no nula es ij.
  - $\lambda_i + \lambda_j$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por $\alpha = \gamma = 0$ y β es una matriz de tamaño $l \times l$ con entradas no nulas ij y ji.
  - $-(\lambda_i + \lambda_j)$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por $\beta = \alpha = 0$ y γ es una matriz de tamaño $l \times l$ con entradas no nulas ij y ji.

- Un sistema simple de raíces es dado por
$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}.$$
cuyo número de elementos es la dimensión de $\mathfrak{h}$.

- Las raíces positivas son
  - $\lambda_i - \lambda_j$, $i < j$ con $i, j = 1, \ldots, l$.
  - $\lambda_i + \lambda_j$, $i \neq j$ con $i, j = 1, \ldots, l$.

- La dimensión de C_l es $l(2l+1)$. La restricción a $\mathfrak{h}$ de la forma de Cartan-Killing es dada por
$$\langle H, H' \rangle = 4(l+1) \sum_{i=1}^{l} a_i a_i^{'}.$$
donde $a_i^{'} \in \Lambda = diag\{a_1^{'}, \ldots, a_l^{'}\}$ y $a_i \in \Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\}$.

- El diagrama de Dynkin asociado a C_l es



- La matriz de Cartan asociada a las raíces simples de C_l es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Para $l \leq 2, \mathfrak{sp}(l)$ es isomorfa a $\mathfrak{so}(2l+1)$ debido a que los diagramas coinciden, por lo tanto, $\mathfrak{sp}(1) \approx \mathfrak{so}(3) \approx \mathfrak{sl}(2)$ y $\mathfrak{sp}(2)$ es isomorfa a $\mathfrak{so}(5)$.

D_l, $l \geq 4$

- Está asociada a las matrices simétricas de dimensión par, es decir, $\mathfrak{so}(2l)$.

- Como en el caso de dimensión impar, $\mathfrak{so}(2l)$ es isomorfa a las matrices antisimétricas en relación a una forma bilineal simétrica no degenerada cualquiera. Así, tomando

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_{l\times l} \\ 1_{l\times l} & 0 \end{pmatrix},$$

escrita en bloques de tamaño $l \times l$, es decir, $\mathfrak{so}(2l)$ es isomorfa al álgebra $\{A \in \mathfrak{sl}(2l) |\, AJ + JA^t = 0\}$. Escribiendo una matriz de tamaño $2l \times 2l$ en bloques de tamaño $l \times l$, $A \in \mathfrak{so}(2l)$ si A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

con β y γ antisimétricas. Una subálgebra $\mathfrak{h}$ de las matrices diagonales es de Cartan y sus elementos se escriben como

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix},$$

con $\Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\}$ una matriz diagonal arbitraria de tamaño $l \times l$.

- Las raíces evaluadas en H son diferencias de autovalores de H y como β y γ son antisimétricas, las raíces y los correspondientes espacios de raíces son dados por:
  - $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por las matrices (4.3) en las que $\beta = \gamma = 0$ y α con entradas no nulas en ij y ji.
  - $\lambda_i + \lambda_j$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por las matrices (4.3) en las que $\alpha = \gamma = 0$ y β con entradas no nulas en ij y ji.
  - $-(\lambda_i + \lambda_j)$, $i \neq j$, con el espacio de raíces dado por las matrices (4.3) en las que $\beta = \alpha = 0$ y γ con entradas no nulas en ij y ji.
- Un sistema simple de raíces es dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$$

el número de elementos de Σ coincide con la dimensión de $\mathfrak{h}$.

- Las raíces positivas son
  - $\lambda_i - \lambda_j$, $i < j$ con $i, j = 1, \ldots, l$.
  - $\lambda_i + \lambda_j$, $i \neq j$ con $i, j = 1, \ldots, l$.
- La dimensión de D_l es $l(2l-1)$. La restricción a $\mathfrak{h}$ de la forma de Cartan-Killing es dado por

$$\langle H, H' \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^{l} a_i a_i^{'}.$$

donde $a_i^{'} \in \Lambda = diag\{a_1^{'}, \ldots, a_l^{'}\}$ y $a_i \in \Lambda = diag\{a_1, \ldots, a_l\}$.
Los duales H_α de las raíces es dada por

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)}\, diag\{0, \ldots, 1_i, \ldots, -1_j, \ldots, 0\}$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)}\, diag\{0, \ldots, 1_i, \ldots, 1_j, \ldots, 0\}.$$

El vértice en el que hay bifurcación es dado por la raíz $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}$, pues

$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-3} - \lambda_{l-2} \rangle = \frac{1}{2(l-1)},$$

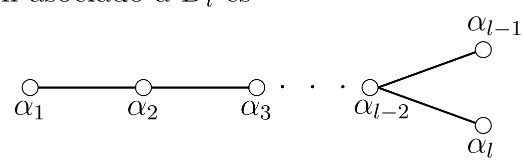
$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} - \lambda_l \rangle = \frac{1}{2(l-1)}$$

y

$$\langle \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} + \lambda_l \rangle = \frac{1}{(l-1)},$$

por lo tanto $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}$ esta conectado a 3 vertices si $l \geq 4$.

- El diagrama de Dynkin asociado a D_l es



- La matriz de Cartan asociada a las raíces simples de D_l es

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & & -1 & 2 & -1 & -1 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & & 0 & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}.$$

- Para $l < 4$ existen las siguientes posibilidades:
  - Si $l = 1$ es $\mathfrak{so}(2)$ que es abeliana, más no es semisimple.
  - Si $l = 2$, Σ se reduce a $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$ cuyas raíces son ortogonales, por lo tanto, $\mathfrak{so}(4) \approx \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$.
  - El diagrama $\mathfrak{so}(6)$ es A_3, por eso es isomorfa a $\mathfrak{sl}(4)$.

4.1.2. Álgebras excepcionales.

G_2

Sea $V = \mathbb{K}$ un espacio vectorial, el álgebra G_2 la construiremos sobre el espacio vectorial

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3) \oplus\ V \oplus V^*.$$

El álgebra $\mathfrak{sl}(3)$ se representa de manera canónica en $V = \mathbb{K}^3$ y por lo tanto en el dual V^* via la representación dual. Las representaciones serán denotadas por Xv, $X \in \mathfrak{sl}(3)$, $v \in V$ y $X\alpha$, $X \in \mathfrak{sl}(3), \alpha \in V^*$ que es dada por la expresión $X\alpha = -\alpha \circ X$.
El corchete en $\mathfrak{g}$ lo definiremos a partir de las identificaciones entre V, V^* y espacios de productos exteriores. Veamos algunas construcciones relacionadas a estos espacios.
Como V es dimensión 3, el producto exterior $\bigwedge^3 V = V \wedge V \wedge V$ es de dimensión uno, y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{K}$. Fijando una forma volumen, esto es, un elemento $v \neq 0$ en $\bigwedge^3 V$, un isomorfismo entre $\bigwedge^3 V$ y $\mathbb{K}$ dado por $x \in \mathbb{K} \to xv \in \bigwedge^3 V$. La forma volumen será tomada como $v = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ con $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V. Una vez fijado el isomorfismo, el producto exterior $\bigwedge^2 V$ se identifica con V^*. La identificación es hecha por el isomorfismo

$$T : \bigwedge^2 V \to V^*,$$

que asocia el elemento $u \wedge v$ el funcional α tal que $\alpha(w) = u \wedge v \wedge w \in \mathbb{K}$ para todo $w \in V$, es decir, $\alpha = T(u \wedge v)$ es dado por la igualdad $\alpha(w)v = u \wedge v \wedge w$. Que define un operador de intercambio entre las representaciones de $\mathfrak{sl}(3)$ en V y una representación tensorial en $\bigwedge^2 V$ dado por $X(u \wedge v) = Xu \wedge v + u \wedge Xv$, se debe a que para cualquier u, v, $w \in V$ tenemos valida la igualdad $Xu \wedge v \wedge w + u \wedge Xv \wedge w + u \wedge v \wedge Xw = tr(X) u \wedge v \wedge w = 0$. Si $\alpha = T(u \wedge v)$, entonces $-\alpha(Xw) = \beta(w)$ para todo $w \in V$ donde β es el funcional $T(Xu \wedge v + u \wedge Xv)$.
Analogamente, se obtiene una identificación de V con $\bigwedge^2 V^*$ dado por

$$S : \bigwedge^2 V^* \to V,$$

por la relación $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \gamma(v)v^*$, donde $v^* \in \bigwedge^3 V^*$, α, β, $\gamma \in V^*$ y $S(\alpha \wedge \beta) = v$.
Los isomorfismos T y S son esencialmente productos vectoriales entre dos vectores de un espacio de dimensión 3.
Tomaremos a $v^* = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \epsilon_3$ donde $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ es una base dual de la base usada para definir V.
El corchete en $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3) \oplus V \oplus V^*$, lo definiremos en pares de elementos de los diferentes subespacios que componen a $\mathfrak{g}$.

1. El corchete entre dos elementos de $\mathfrak{sl}(3)$ es el usual.

2. Si $X \in \mathfrak{sl}(3)$ y $v \in V$ entonces $[X, v] = -[v, X] = Xv$.

3. Si $X \in \mathfrak{sl}(3)$ y $\alpha \in V^*$ entonces $[X, \alpha] = -[\alpha, X] = X\alpha$.

4. El corchete entre dos elementos u, $v \in V$ es dado por $[u,v] = -\frac{4}{3}u \wedge v \in \bigwedge^2 V$. El coeficiente $-\frac{4}{3}$ es necesario para obtener la identidad de Jacobi.

5. Si α, $\beta \in V^*$, $[\alpha,\beta] = \frac{4}{3}\alpha \wedge \beta$.

6. Para $v \in V$ y $\alpha \in V^*$, $[v,\alpha] = v \otimes \alpha - \frac{1}{3}\alpha(v)$, donde $(v \otimes \alpha)(u) = \alpha(u)v$ por lo tanto el corchete $[v,\alpha](u) = \alpha(u)v - \frac{1}{3}\alpha(v)u$.

Las expresiones usadas para definir el corchete son bilineales y antisimétricas, solo nos queda por comprobar la identidad de Jacobi que dejaremos como ejercicio para el lector, se aconseja utilizar la igualdad (1.5).
Ahora verifiquemos que $\mathfrak{g}$ es semisimple. En primer lugar debemos verificar de manera directa que $\mathfrak{g}$ es simple tomando un ideal $\mathfrak{i} \neq 0$ y mostrando que $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$. Para eso es necesario mostrar que $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{sl}(3) \neq 0$ unido al hecho de que $\mathfrak{sl}(3)$ es simple, garantiza que $\mathfrak{i} \supset \mathfrak{sl}(3)$ y , por lo tanto, que $V = [V, \mathfrak{sl}(3)]$ y $V^* = [V^*, \mathfrak{sl}(3)]$ están contenidos en $\mathfrak{i}$. Sea $X \in \mathfrak{i}$ un elemento no nulo que se descompone como $X = A + \alpha + v$ con $A \in \mathfrak{sl}(3)$, $\alpha \in V^*$ y $v \in V$. Supongamos que:

1. $A\alpha \neq 0$ y $Av \neq 0$. Entonces, $[A,X] = A\alpha + Av$ y tomando el corchete de ese elemento con $A\alpha$ se obtiene un elemento no nulo de $\mathfrak{sl}(3)$ contenido en $\mathfrak{i}$. Debido a que $[\alpha, w] \neq 0$ si $\beta \in V^*$ y $w \in V$ son no nulos.

2. $A\alpha \neq 0$ y $Av = 0$. Entonces $[A,X] = A\alpha \in \mathfrak{i}$. Tomando $[w, A\alpha]$ con $w \in V, w \neq 0$ se concluye que $\mathfrak{i}$ intercepta a $\mathfrak{sl}(3)$ no trivialmente. El caso en que $A\alpha = 0$ y $Av \neq 0$ se verifica de la misma manera.

3. Si $A\alpha = 0 = Av$. Existen dos posibilidades. En primer lugar, si $\alpha \neq 0 \neq v$, entonces, $[\alpha, X] = [\alpha, v] \neq 0$ y ese corchete pertenece a $\mathfrak{sl}(3) \cap \mathfrak{i}$. En segundo lugar si $\alpha = 0$ o $v = 0$, nos interesa el que es distinto de cero, por ejemplo, si $\alpha = 0$, $v \neq 0$, entonces, tomando $w \in V$ linealmente independiente de v,

$$[w,X] = Aw + w \wedge v = u + \beta \quad u \in V,\, \beta \in V^*$$

   y $\beta \neq 0$. Si $u = 0$, entonces $[\beta, z]$ con $z \neq 0$, $z \in V$ y un elemento no nulo de $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{sl}(3)$. Ya que si $u \neq 0$, entonces $[\beta, [w, X]]$ es no nulo y pertenece a $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{sl}(3)$.

Con lo cual demostramos que $\mathfrak{g}$ es simple y por lo tanto semisimple. Cuando $\alpha = 0$, $v = 0$ tenemos que la subálgebra $\mathfrak{h}$ de las matrices diagonales en $\mathfrak{sl}(3)$ es de Cartan en $\mathfrak{g}$.

Para ver la estructura de las raíces de G_2, sea λ_i el funcional de $\mathfrak{h}$ definido por

$$\lambda_i = diag\{a_1, a_2, a_3\} \to a_i$$

entonces las raíces de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ son dadas por:

- $\pm(\lambda_i - \lambda_j)$, $i \neq j$ cuyos subespacios de raíces están contenidos en $\mathfrak{sl}(3)$.
- λ_i, $i = 1, 2, 3$ cuyos subespacios de raíces están contenidos en V y son los subespacios generados por los elementos de la base en que $\mathfrak{h}$ es diagonal.
- $-\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$ cuyos subespacios de raíces están contenidos en V^*.

Como los elementos de $\mathfrak{sl}(3)$ tienen traza nula, las raíces de 3 son dadas también por $\lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$.

- Un sistema simple de raíces es dado por

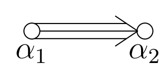
  $$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad \alpha_2 = \lambda_2$$

  que genera las raíces positivas:

  $\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1$ $\qquad$ $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_3$

  $\alpha_1 + 3\alpha_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_3$ $\qquad$ $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_3$

- G_2 es un álgebra de rango 2 y dimensión 14.
- El diagrama de Dynkin asociado a G_2 es



- La matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces es

  $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E_6, E_7 y E_8

La construcción de las álgebras E_6 y E_7 se realizará a partir del álgebra E_8, ya que al retirar una o dos raíces del diagrama de Dynkin de E_8 obtenemos E_6 y E_7.

El camino para construir E_8 es semejante al realizado con G_2, tomando ahora representaciones de $\mathfrak{sl}(9)$ en vez de $\mathfrak{sl}(3)$. Sea V el producto exterior

$$V = \bigwedge^3 \mathbb{K}^9.$$

El álgebra $\mathfrak{sl}(9)$ se representa en V por extensión lineal de

$$X(u \wedge v \wedge w) = Xu \wedge v \wedge w + u \wedge Xv \wedge w + u \wedge v \wedge Xw$$

donde u, v, $w \in \mathbb{K}^9$, $X \in \mathfrak{sl}(9)$ y Xu, Xv y Xw indican la representación canónica de $\mathfrak{sl}(9)$ en $\mathbb{K}^9$. De forma semejante, $\mathfrak{sl}(9)$ se representa en

$$V^* = \bigwedge^2 (\mathbb{K}^9)^*.$$

Tomando una base $\{e_1, \ldots, e_9\}$ de $\mathbb{K}^9$, una base de V es dada por $\{e_i \wedge e_j \wedge e_k \,|\, i < j < k\}$ por lo tanto, $\dim V = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 84$. De la misma forma, tomando la base dual $\{\epsilon_i, \ldots, \epsilon_9\}$, una base de V^* es dada por $\{\epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_k \,|\, i < j < k\}$, y claramente las dimensiones de V y V^* coinciden.

El álgebra E_8 la construiremos sobre el espacio

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9) \oplus \; V \oplus V^*.$$

De la misma forma que en G_2 el corchete entre elementos de V debe definir una aplicación bilineal antisimétrica en V a valores de V^*.

El corchete en $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9) \oplus \; V \oplus V^*$ es definido ahora en pares formados por elementos de los subespacios que componen esta suma

1. El corchete entre dos elementos de $\mathfrak{sl}(9)$ es el usual.

2. Si $X \in \mathfrak{sl}(9)$ y $v \in V$ entonces $[X, v] = -[v, X] = Xv$.

3. Si $X \in \mathfrak{sl}(9)$ y $\alpha \in V^*$ entonces $[X, \alpha] = -[\alpha, X] = X\alpha$.

4. El corchete entre dos elementos u, $v \in V$ es dado por $[u, v] = au \wedge v \in V^*$ con a un escalar que será determinado por la identidad de Jacobi.

5. Si α, $\beta \in V^*$, $[\alpha, \beta] = b\alpha \wedge \beta \in V$ de la misma forma forma, b es un escalar que será determinado por la identidad de Jacobi.

6. Para $v \in V$ y $\alpha \in V^*$, $[v, \alpha]$ es un múltiplo del valor en $v \otimes \alpha$ de la aplicación momento de la representación de $\mathfrak{sl}(9)$ en V. Explícitamente $[v, \alpha] \in \mathfrak{sl}(9)$ es el único elemento de $\mathfrak{sl}(9)$ que satisface $\langle [v, \alpha], Z \rangle = c\alpha(Zv)$ para todo $Z \in \mathfrak{sl}(9)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la forma trazo de la representación de $\mathfrak{sl}(9)$ en $\mathbb{K}^9$. De esta definición c es un escalar que se determina de acuerdo con a y b.

Como se ha definido el corchete, cumple las condiciones para ser álgebra de Lie. La subálgebra $\mathfrak{h}$ de las matrices diagonales en $\mathfrak{sl}(9)$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Denotemos por λ_i el funcional

$$\lambda_i : diag\{a_1, \ldots, a_9\} \to a_i$$

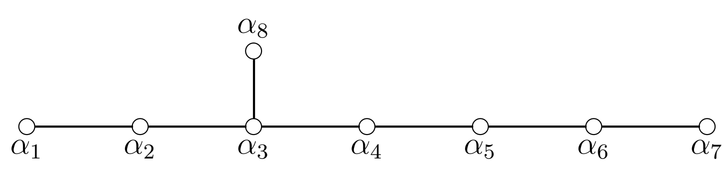
las raíces de $\mathfrak{h}$ son dadas por:

- $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$ cuyos espacios de raíces están contenidos en $\mathfrak{sl}(9)$
- $\beta_{ijk} = \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k$, $i < j < k$ que son los autovalores de los elementos de $\mathfrak{h}$ representados en $V = \bigwedge^3 \mathbb{K}^9$. Los espacios de raíces correspondientes son generados por $e_i \wedge e_j \wedge e_k$.
- $-\beta_{ijk} = -(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$, $i < j < k$ cuyos espacios están contenidos en V^*.

Un sistema simple de raíces es

$$\Sigma_8 = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_8 - \lambda_9, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$$

cuyo diagrama de Dynkin es



con $\alpha_8 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$. La raíz α_8 esta conectada a $\alpha_5 = \lambda_4 - \lambda_5$ ya que

$$-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_4 - \lambda_5) = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5).$$

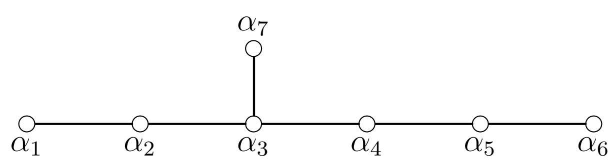
El orden del diagrama es dado por $\alpha_1 = \lambda_8 - \lambda_9$ y $\alpha_7 = \lambda_2 - \lambda_3$.
Como la dimensión de $\mathfrak{sl}(9)$ es 80 y la de V y V^* es $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 84$, la dimensión de E_8 es

248.

La matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El diagrama de E_7 es



se construye retirando de E_8 la raíz más a la izquierda de su base, por la realización de E_8 es $\lambda_8 - \lambda_9$.

El sistema simple de raíces es

$$\Sigma_7 = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

Tomando sumas sucesivas de elementos de Σ_7, las raíces positivas de E_7 son:

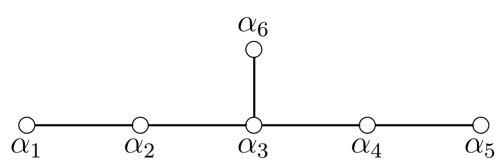
- $\lambda_i - \lambda_j$, $2 \leq i < j \leq 8$.
- $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k$, $2 \leq i < j < k \leq 8$ y
- $\lambda_1 + \lambda_i + \lambda_9$, $2 \leq i \leq 8$.

En el primer de esos conjuntos de raíces existen 21 elementos, en el segundo $\binom{7}{3} = 35$ y el tercero 7. Existen por lo tanto, $21 + 35 + 7 = 63$ raíces positivas y de ahí que la dimensión de E_7 es $2 \cdot 63 + 7 = 133$.

La matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El diagrama de E_6 es



se construye retirando de E_7 la raíz más a la izquierda de su base, por la realización de E_7 es $\lambda_7 - \lambda_8$.

El sistema simple de raíces es

$$\Sigma_6 = \{\lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_6 - \lambda_7, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

Tomando sumas sucesivas de elementos de Σ_6, las raíces positivas de E_6 son:

- $\lambda_i - \lambda_j$, $2 \leq i < j \leq 7$.
- $\lambda_i + \lambda_j \lambda_k$, $2 \leq i < j < k \leq 7$ y
- $\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9$.

El total de raíces positivas es $15 + 20 + 1 = 36$. La dimensión de E_6 es $2 \cdot 36 + 6 = 78$.

- La matriz de Cartan asociada al sistema simple de raíces es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

F_4

El álgebra F_4 puede ser construida como la subálgebra de los puntos fijos de un automorfismo involutivo de E_6.
Si $\theta : V \to V$es una transformación lineal de un espacio vectorial V tal que $\theta^2 = 1$, sus autovalores son ± 1 y V se descompone en suma directa de los autoespacios asociados a los autovalores. En particular , si $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un automorfismo del álgebra $\mathfrak{g}$, que se descompone en autoespacios de θ. En tanto, como θ es automorfismo, el subespacio de los puntos fijos

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \theta(X) = X\}$$

es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Por intermedio de la forma de Cartan-Killing, se define a partir de ahí una transformación lineal que es una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ que deja invariante el conjunto de raíces.
El subespacio $\mathfrak{k}$ de los puntos fijos por el automorfismo es una subálgebra simple que realiza a F_4. Para ver eso, se considera en primer lugar el subespacio $\mathfrak{h}_f = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ de los elementos de $\mathfrak{h}$ fijos por el automorfismo. Permutando las raíces en el diagrama de Dynkin de E_6 de la siguiente forma $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_5$, $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4$ y dejando fijas las raíces α_3 y α_6. Los funcionales $\alpha_1 + \alpha_5$ y $\alpha_2 + \alpha_4$ son fijos por θ, en cuanto que $\theta(\alpha_1 - \alpha_5) = -(\alpha_1 - \alpha_5)$ y $\theta(\alpha_2 - \alpha_4) = -(\alpha_2 - \alpha_4)$.
Así, $\mathfrak{h}_f$ es el subespacio de dimensión cuatro de $\mathfrak{h}$ generado por

$$\{H_{\alpha_1+\alpha_5}, \, H_{\alpha_2+\alpha_4}, \, H_{\alpha_3}, \, H_{\alpha_6}\},$$

con $H \in \mathfrak{h}$. Ese subespacio es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$. Los autoespacios de θ son ortogonales, pues θ es una transformación ortogonal. De esa forma, $\mathfrak{h}_f$ es el anulador de

$$\{\alpha_1 - \alpha_5, \, \alpha_2 - \alpha_4\}$$

y un elemento de $\mathfrak{h}^*$ se anula idénticamente en $\mathfrak{h}_f$ si y solo si él pertenece al subespacio de $\mathfrak{h}^*$ generado por los funcionales. Cualquier funcional en ese subespacio se expresa en términos de las raíces simples como combinaciones lineales en que alguno de los coeficientes es negativo. por lo tanto, alguna raíz se anula el $\mathfrak{h}_f$. Como el número de raíces es finito, existe $H \in \mathfrak{h}_f$ tal que $\alpha(H) \neq 0$ para toda raíz α. Ese elemento de $\mathfrak{h}_f$ es regular en E_6 y por lo tanto en $\mathfrak{k}$. El centralizador de $\mathfrak{k}$ es $\mathfrak{h}_f$ y de ahí que el subespacio es una subálgebra de Cartan.
El subespacio $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\theta(\alpha)}$ es invariante por θ y se descompone como suma directa de los

subespacios V_α^+ y V_α^- generados por $X_\alpha + \theta X_\alpha$ y por $X_\alpha - \theta X_\alpha$ respectivamente. Los elementos de V_α^+ son fijados por θ, en cambio que $\theta(Y) = -Y$ para V_α^-. El subespacio V_α^- es de dimensión uno si $\theta(\alpha) \neq \alpha$ y se reduce a $\{0\}$ si $\theta(\alpha) = \alpha$. Haciendo α recorrer el conjunto de todas las raíces, los subespacios $V_\alpha^\pm$ conjuntamente con $\mathfrak{h}$ generan a $\mathfrak{g}$. De esa forma, la subálgebra $\mathfrak{k}$ de los puntos fijos dado por

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_f \oplus \sum V_\alpha^+.$$

Con esa igualdad la subálgebra $\mathfrak{k}$ queda determinada tan pronto se conozca la acción de θ en el conjunto de todas las raíces. Las raíces de E_6 fueron dadas en términos de funcionales λ_j, $2 \leq j \leq 7$. Por eso, es conveniente calcular θ en términos de los funcionales. Usando la expresión de Σ_6 en términos de λ_j se checa que

$$[\theta] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya j-esima columna indica los coeficientes de $\theta(\lambda_j)$ en relación a Σ_6. En esa matriz todos los elementos de la columna j son iguales a $\frac{1}{3}$, excepto en la línea $\sigma(j)$ donde σ es la permutación $\sigma = (2,7)(3,6)(4,5)$. Usando esas permutaciones, los valores de θ en las raíces positivas son:

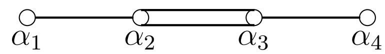
- $\theta(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_{\sigma(j)} - \lambda_{\sigma(i)}$, $2 \leq i \leq j \leq 7$.
- $\theta(-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)) = -(\lambda_{i'} + \lambda_{j'} + \lambda_{k'})$ donde $\{i', j', k'\}$ es el complementario en $\{2, \ldots, 7\}$ de $\{\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)\}$.
- $\theta(\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9) = -\theta(\lambda_2 + \ldots + \lambda_7) = \lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9$.

De lo anterior, tenemos que las raíces fijas por θ son:

- $\lambda_i - \lambda_{\sigma(i)}$, $i = 2, 3, 4$.
- $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$ de tal forma que alguno de los indices i, j, k es imagen de otro por σ y
- $\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9$.

Existen por lo tanto, 12 raíces positivas invariantes por θ y como en E_6 existen 36 raíces positivas, la cantidad de raíces que no son invariantes es 24. El subespacio generado por V_α^+, $\alpha > 0$ tiene dimensión 24, por lo tanto la dimensión de $\mathfrak{t}$ es $24 + 24 + 4 = 52$.

- El diagrama de Dynkin asociado a F_4 es



- La matriz de Cartan para el sistema simple de raíces es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] GILMORE, . Lie Groups, Lie Algebras, and some of Their Applications. *Jhon Wiley Sons*. New York. 1974.

[2] GROSSMAN, Stanley. Álgebra Lineal. Quinta edición. *Editorial Mc Graw Hill*, México, 1996.

[3] HUMPHREYS, James. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. *SpringerVerlag New York Inc.*, 1972.

[4] JACOBSON, Nathan. Lie Algebras. *Interscience.*,New York, 1962.

[5] LANG, Serge. Álgebra lineal. *Fondo Educativo Interamericano S.A.*. 1974.

[6] LIMA, Elon. Algebra linear. Terceira Edição. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (CNPQ)*. Rio de Janeiro, 1998.

[7] SALMENSON, Hans. Notes on Lie Algebras. *SpringerVerlag New York Inc.*, 1990.

[8] SAN MARTÍN, Luiz A.B.. Álgebras de Líe. *Editora da Unicamp*. 1999.