

Efecto de las colisiones en un plasma parcialmente ionizado para la manifestación de fulguraciones  
solares en la región cromosférica

Adrian Ricardo Montañez Lobo

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

*Físico*

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2025

### **Agradecimientos**

Quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres y mis dos hermanas, quienes me apoyaron en seguir en la carrera que quería. También quisiera agradecerle a mis amigos, por evitar que desistiese de rendirme cuando me sentía presionado. Tengo especial gratitud con mi director de tesis, el cual me fue guiando a lo largo de este proyecto, y me permitió culminar el mismo. Finalmente, quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander, dado que me permitió hacer parte de su comunidad, y me brindó las herramientas necesarias para poder llevar a cabo este proyecto.

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. MHD para dos fluidos</b>	<b>17</b>
1.1. Colisiones elásticas	21
1.2. Colisiones inelásticas	25
1.3. Parámetro Beta Plasma	28
<b>2. Reconexión magnética</b>	<b>31</b>
2.1. Hoja de Harris	34
<b>3. Análisis de resultados</b>	<b>38</b>
3.1. El papel de los términos de colisiones en la atmósfera solar	38
3.1.1. Reconexión magnética en un plasma cromosférico bajo el efecto de colisiones elásticas e inelásticas.	57
<b>4. Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>77</b>
<b>Apéndices</b>	<b>84</b>

### Lista de Figuras

Figura 1.	Representación gráfica de la manifestación de una fulguración solar bajo el modelo CSHKP, resultado del proceso de reconexión.	13
Figura 2.	Representación de los procesos de ionización y recombinación.	26
Figura 3.	Modelo del parámetro beta plasma a lo largo de la atmósfera solar.	29
Figura 4.	Representación de la componente $B_z$ del campo magnético en la hoja de corriente de Harris.	36
Figura 5.	Perfiles bajo el modelo de sol en equilibrio, con base en el modelo de Avrett.	41
Figura 6.	Representación de las frecuencias de colisiones inelásticas	42
Figura 7.	Representación de las frecuencias de colisiones elásticas	44
Figura 8.	Morfología del campo magnético y el flujo de corriente sobre el eje y	47
Figura 9.	Perfiles de velocidad y temperatura de la especie cargada en función de la altura y de los términos de colisiones	49
Figura 10.	Medición de las tasas de reconexión durante el proceso de la reconexión magnética	51
Figura 11.	Mediciones de la energía liberada durante el proceso de reconexión	55
Figura 12.	Grado de ionización del plasma en la atmósfera solar	59

Figura 13. Representación de las frecuencias de colisiones elásticas bajo el equilibrio de ionización y recombinación	60
Figura 14. Perfil solar bajo el modelo de equilibrio hidrostático para las cargadas, y en equilibrio químico para las neutrales	62
Figura 15. Morfología de la presión de la especie cargada	64
Figura 16. Morfología de la temperatura de la especie cargada	66
Figura 17. Resultados de la medición de las tasas de reconexión durante el proceso de la reconexión magnética	67
Figura 18. Mediciones de la energía liberada durante el proceso de reconexión en la cromósfera	70
Figura 19. Representación gráfica de un elemento de volumen computacional	87

**Lista de Apendices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Modelo computacional	84
Apéndice B. Integrador numérico IMEX	87

## Resumen

**Título:** Efecto de las colisiones en un plasma parcialmente ionizado para la manifestación de fulguraciones solares en la región cromosférica. \*

**Autor:** Adrian Ricardo Montañez Lobo \*\*

**Palabras Clave:** Fulguraciones cromosféricas, Magnetohidrodinámica (MHD), Reconexión magnética, Plasma parcialmente ionizado.

**Descripción:** Las fulguraciones solares son fenómenos caracterizados por la liberación explosiva de la energía que está almacenada en el campo magnético solar, en forma de energía cinética, térmica y por radiación electromagnética, a través del mecanismo de la reconexión magnética. Estos fenómenos son caracterizados por considerarse de carácter coronal, por lo cual han sido estudiados bajo el marco de los fluidos totalmente ionizados. Sin embargo, durante estos eventos se han registrado trazas de emisión en el espectro del hidrógeno, las cuales sugieren la presencia de procesos de ionización y recombinación. En el presente trabajo de grado se desarrolla la reconexión magnética en el marco de las fulguraciones solares de origen cromosférico. Para ello, se analiza la posibilidad de que ocurran estos eventos en un entorno que involucre plasma parcialmente ionizado, por medio del análisis energético y morfológico del sistema. Así mismo, se observa el efecto de la interacción por medio las colisiones elásticas e inelásticas, sobre el proceso de la reconexión magnética. Con este propósito, se emplea el código MAGNUS, un código magnetohidrodinámico diseñado para computación paralela que integra los efectos de la resistividad óhmica y la transferencia de calor. Este código está adaptado para simular la interacción de dos fluidos, la cual se describe mediante términos de colisiones. Para resolver estos términos, se implementa un esquema de evolución Explícito-Implícito, que facilita el cálculo de términos rígidos. De este trabajo se obtuvo que, para un volumen de  $0.4 \times 0.0078 \times 0.4 [Mm^3]$  en la cromósfera, las escalas de energía liberada comprenden los  $10^{19}$  y los  $10^{20}$  ergios, lo cual son escalas aceptables considerando el volumen tan reducido en comparación con las escalas esperadas de una fulguración. Así mismo, se determinó que en esta región el efecto de las colisiones juega un papel importante, mostrando aumentos de hasta un 50% de la energía liberada cuando se tiene en consideración el efecto de las colisiones.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D.

## Abstract

**Title:** Effect of collisions in a partially ionized plasma on the manifestation of solar flares in the chromospheric region. \*

**Author:** Adrian Ricardo Montañez Lobo \*\*

**Keywords:** Chromospheric flares, Magnetohydrodynamics (MHD), Magnetic reconnection, Partially ionized plasma.

**Description:** Solar flares are phenomena characterized by the explosive release of energy stored in the solar magnetic field, in the form of kinetic energy, thermal energy, and electromagnetic radiation, through the mechanism of magnetic reconnection. These phenomena are typically considered coronal in nature, and thus have been studied within the framework of fully ionized fluids. However, during these events, traces of hydrogen emission have been recorded in the spectrum, suggesting the presence of ionization and recombination processes. In this undergraduate thesis, magnetic reconnection is developed within the framework of solar flares of chromospheric origin. To achieve this, the possibility of such events occurring in an environment involving partially ionized plasma is analyzed through an energetic and morphological analysis of the system. Additionally, the effect of elastic and inelastic collisions on the magnetic reconnection process is examined. For this purpose, the MAGNUS code is employed, a magnetohydrodynamic code designed for parallel computing that incorporates the effects of Ohmic resistivity and heat transfer. This code is adapted to simulate the interaction of two fluids, described through collision terms. To solve these terms, an Explicit-Implicit evolution scheme is implemented, facilitating the calculation of stiff terms. From this work, it was found that for a volume of  $0.4 \times 0.0078 \times 0.4 [Mm^3]$  in the chromosphere, the energy release scales range between  $10^{19}$  and  $10^{20}$  ergs, which are acceptable scales considering the small volume compared to the expected scales of a solar flare. Furthermore, it was determined that in this region, the effect of collisions plays a significant role, showing increases of up to 50% in the released energy when collision effects are taken into account.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* School of Physics, Faculty of Sciences, Industrial University of Santander. Advisor: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D.

## Introducción

Dentro de la comunidad científica, existe un interés particular en el estudio del espacio, centrado en analizar la evolución de los cuerpos celestes y comprender su impacto en la Tierra. En particular, el Sol destaca al ser la estrella central de nuestro sistema solar, así como su principal fuente de energía. Esto da a lugar a que los fenómenos solares posean un gran impacto sobre la Tierra. Dentro de los fenómenos solares se destacan las fulguraciones, las eyecciones de masa coronal (CME), el viento solar, las prominencias y las manchas solares, entre otros (E. Priest, 2014). Es así como el clima espacial nace para estudiar la influencia del Sol en el entorno geoespacial, el entorno interplanetario, y sobre la magnetosfera terrestre (Baker, 1998). Esto con el fin de observar, predecir y determinar su impacto sobre el desarrollo y tecnología terrestre (Moldwin, 2008).

En un principio, el clima espacial se enfocaba en la observación de auroras y manchas solares (Moldwin, 2008). Sin embargo, a medida que avanza el desarrollo tecnológico, el impacto negativo que tienen estos eventos se vuelven más significativos para el desarrollo y la salud humana. Esto se aprecia en la afectación a los sistemas de comunicación por el daño a satélites (Miteva et al., 2023). Un ejemplo de esto fue la caída de 38 satélites de la compañía Starlink, suponiendo un corte en la comunicación y pérdidas millonarias por la compañía (Fang et al., 2022). Para los sistemas de potencia, se han registrado una disminución de su capacidad dada por el 10% anual, lo cual compromete su funcionamiento y reduce su vida útil (Schrijver, 2015). Respecto a la salud, se ha observado influencia sobre la manifestación de problemas cardíacos, vasculares, y el surgimiento de

cáncer (Unger, 2019).

De los diversos fenómenos ocurridos en el entorno solar, se tiene particular interés en las fulguraciones solares. Estas consisten en una liberación explosiva de energía, almacenada en el campo magnético, lo cual produce el calentamiento y la aceleración de partículas en el plasma solar, así como la emisión de energía en forma de radiación electromagnética (Shibata & Magara, 2011). Las primeras observaciones de las fulguraciones solares fueron obtenidas al analizar la aparición de fuentes intensas de luz blanca provenientes del sol (Carrington, 1859), (Hodgson, 1859). En principio fueron propuestas como fenómenos ocurridos en la atmósfera solar, con su principal manifestación en la región cromosférica, debido a aparición de la banda de absorción y emisión del hidrógeno  $H_\alpha$  (Smith & Smith, 1963). Sin embargo, gracias a la caracterización de las arcadas y prominencias asociadas con la manifestación de las fulguraciones, se determinó que la energía almacenada, tiempo de vida y el espectro de emisión de estas estructuras eran más acordes con su manifestación en la corona solar (Bruzek, 1964).

Las fulguraciones solares se caracterizan por liberar energía entre las escalas de  $10^{28}$  y  $10^{32}$  ergios (Shibata & Magara, 2011). Esta energía se estima a partir del análisis de la intensidad de la radiación electromagnética, comprendida desde las ondas de radio hasta la luz ultravioleta, teniendo especial consideración de los rayos X, los cuales son asociados con la emisión de las partículas aceleradas de forma no-térmica (E. R. Priest y Forbes, 2002, Tomozov et al., 2020). Así mismo, se encuentra que estos fenómenos presentan escalas características de longitud comprendidas entre los

$10^4$  y los  $10^5$  [Km], siendo esta magnitud determinante en el tiempo de duración de la fulguración, comprendida entre  $10^3$  y  $10^4$  [s] (Shibata & Magara, 2011). Así mismo, las fulguraciones solares suelen relacionarse con la manifestación de otros fenómenos solares, como lo son las eyecciones de masa coronal (Harrison, 2003), los jets solares (Musset et al., 2020), entre otros.

Con base en lo anteriormente mencionado, las fulguraciones solares poseen diversos tipos de clasificaciones. La primera consiste en su clasificación dado el pico de intensidad máxima registrado en la banda de rayos X, en la banda de 1 - 8 Å, donde se determina la clase de una fulguración como A, B, C, M o X (Guo et al., 2014). Por otra parte, las fulguraciones pueden ser de tipo impulsivo o eruptivo. Las de tipo impulsivo no presenta una cúspide, y el plasmóide queda atrapado dentro del campo magnético, mientras manifiestan intensas líneas de emisión en el espectro de rayos X suave. Las fulguraciones eruptivas manifiestan arcadas de mayores escalas, lo que facilita la formación y expulsión de plasmoides (E. Priest, 2014).

Para explicar el proceso de la liberación de energía, un mecanismo ampliamente aceptado consiste en la reconexión magnética. Esta consiste en la desconexión y reconexión de las líneas de campo magnético, produciendo un cambio en la topología del campo, y dando lugar a la liberación de la energía almacenada en este (Birn & Priest, 2007). Estos cambios de la topología en el campo magnético han sido registrados a través de imágenes de rayos X, por satélites como explorador de la región de transición y coronal (o *Trace*, por sus siglas en inglés) (Yamada et al., 2010). Se considera que este mecanismo es iniciado por la presencia de una región de resistividad anómala, lo cual

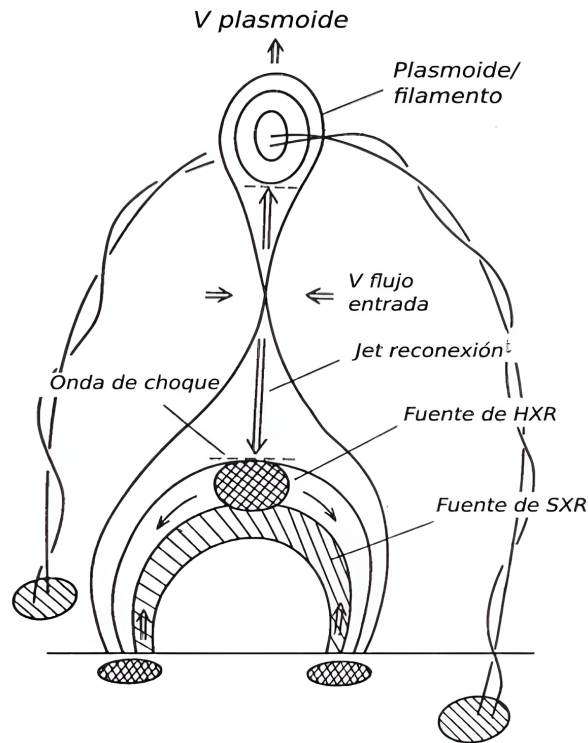
induce a la difusión de las líneas de campo (Kulsrud, 2001).

En la actualidad, el modelo estándar más ampliamente aceptado para explicar la fenomenología de las fulguraciones solares es el modelo CSHKP, el cual se fundamenta en los aportes teóricos realizados por Carmichael, Sturrock, Hirayama, Kopp y Pneuman (Shibata y Magara, 2011, E. Priest, 2014). Este plantea que, en un principio se da la activación de una región atmosférica, propiciando a la formación de estructuras magnéticas, como las sigmoides y los filamentos (Shibata & Magara, 2011). Esto da lugar a la liberación de energía como consecuencia del proceso reconexión magnética entre dos regiones con polaridades del campo magnético opuestas, separadas por una región denominada hoja de corriente. En la figura 1, se representa el proceso de la fulguración solar bajo el modelo CSHKP, poco después de haberse manifestado la reconexión magnética. En esta se aprecia la reestructuración de las líneas de campo, así como la propagación del plasma, la manifestación de ondas, y la fuentes de radiación en Rayos X (E. Priest, 2014).

Aunque el desarrollo actual desestima la posibilidad de ocurrencia de una fulguración de gran escala en la región cromosférica, se considera su contribución a la evolución del evento por medio de la evaporación cromosférica (Hirayama, 1974). Por medio de mecanismos de transporte de energía térmica, tales como el impacto de partículas o convección, se generan bulbos los cuales ascienden a la corona, permitiendo el ingreso plasma caliente plasma parcialmente ionizado dentro de las espirales magnéticas (Hudson, 2007). Así mismo, cuando el material baja su temperatura, este se condensa volviendo a bajar a la cromósfera. La presencia de ambos fenómenos permiten

**Figura 1**

*Representación gráfica de la manifestación de una fulguración solar bajo el modelo CSHKP, resultado del proceso de reconexión.*



**Nota.** En esta, se puede apreciar las regiones donde se produce la reconexión magnética, la aceleración de partículas, la emisión de rayos X y la eyección de masa solar. Imagen adaptada de Shibata y Magara, 2011.

explicar la aparición de los espectros de radiación en las series del hidrógeno  $H_{\alpha}$ , en el espectro ultravioleta (EUV), y por medio de rayos X, fuertes y suaves (HXR y SXR, respectivamente); en determinadas regiones de la fulguración, además de que, debido al movimiento del plasma, se explica el corrimiento de las líneas espectrales (Wang et al., 2023).

Sin embargo, el modelo de la evaporación cromosférica presenta algunos problemas en su implementación. Dado el análisis de algunas fulguraciones por medio de IRIS (Sadykov et al.,

2015), se ha registrado el corrimiento al rojo en diversas de las etapas, antes, durante y finalizada la fulguración, cuya explicación no es clara. Por último, se presentan regímenes de velocidad de flujo, los cuales no son acordes a la cantidad de energía asociada con dicho tipo de evaporación. Es por esto que, para explicar las tasas de ionización reflejadas en los análisis del espectro de emisión durante las fulguraciones solares, se considera la formación del fenómeno en una región de la atmósfera solar donde el plasma se encuentre parcialmente ionizado. De esta manera, aunque los desarrollos actuales no están enfocados en la cromósfera, esta tomaría mayor relevancia en la formación de la fulguración.

En este trabajo se evaluó el impacto en la energía liberada por una fulguración solar, cuando está se manifiesta en una región de plasma parcialmente ionizado, en el cual interceden efectos de colisiones elásticas e inelásticas. Por este motivo, se completaron una serie de actividades. Inicialmente, se describe la evolución del plasma solar por medio de las ecuaciones MHD para dos fluidos, en las cuales se establecen las leyes de conservación de materia, momento y energía para las especies de cargados y neutrales, acopladas por medio de los términos de colisiones. De igual forma, se determinaron las tasas de ionización y recombinación acordes a modelos semi-empíricos acordes a datos observacionales del perfil solar, así como las tasas de colisiones elásticas de manera análoga.

Acto seguido, referente a la parte computacional, se determinaron las condiciones de frontera y los perfiles iniciales apropiados para la generación de la fulguración. Para ello, se hizo uso del

código MAGNUS adaptado para la simulación de dos fluidos. Para esto, se añadió un modulo para el perfil de la atmósfera solar por medio de datos empíricos. Por otra parte, se añaden 3 módulos que permiten calcular la evolución de los fluidos así como la interacción por los términos de colisiones de manera que soportase las fuentes con comportamiento rígido". Por último, se implementa un modulo que permite medir la energía evaluada durante el proceso de reconexión. Es entonces que se establecen 3 simulaciones, las cuales consisten en simular un plasma totalmente ionizado, uno acoplado con colisiones elásticas, y otro el cual presente tasas de colisiones elásticas e inelásticas acordes a estimaciones de modelos solares. De esta manera, se puede comparar la variación en la eficiencia de la fulguración y su energía liberada, vista desde la perspectiva donde la interacción entre dos fluidos puede acarrear interacciones o fenómenos que no se perciben al ver el fluido en general.

La organización del presente documento se describe a continuación. En la sección 1 se describen las ecuaciones de la magnetohidrodinámica para dos fluidos, denotando la interacción entre especies por medio de los términos de colisiones elásticas e inelásticas. Adicionalmente, en 1.3 se realiza una descripción del entorno solar, mostrando la influencia de los fenómenos hidrodinámicos y magnéticos sobre el comportamiento de las regiones en las que se puede desarrollar la fulguración. A continuación, en la sección 2 se explica el proceso de reconexión magnética como mecanismo de liberación de energía en las fulguraciones, así como el inicio de dicho proceso a causa de la presencia de una resistividad anómala. En la sección 3 se muestran los perfiles iniciales, así como los resultados para cada simulación, donde se analizaron dos puntos de reconexión, así

como la influencia de las colisiones. Por último, se evidencian la discusión y las conclusiones en la sección 4. Finalizando el documento, se encuentran las referencias bibliográficas, así como una serie de anexos como complemento del trabajo.

## 1. MHD para dos fluidos

La magnetohidrodinámica (MHD) es un modelo matemático que describe la evolución de fluidos conductores, resultado de la interpretación macroscópica de las ecuaciones de transporte de Boltzmann (Bittencourt, 2004). Este modelo está compuesto por el conjunto de las ecuaciones de la conservación de la masa, el momento y la energía, junto con las ecuaciones de Maxwell. Es a través de este conjunto de ecuaciones que se determina la evolución del plasma solar, el cual se asume compuesto principalmente solo por dos especies. La primera es la especie de partículas neutras, conformada únicamente por átomos de hidrógeno; mientras que la segunda especie corresponde a las partículas cargadas, siendo esta una mezcla entre electrones y los núcleos de los átomos de hidrógeno, predominando la dinámica de estos últimos. La formulación de las ecuaciones de la MHD para dos fluidos (Ballester et al., 2018) viene a estar dada como

$$\partial_t \rho_n + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{u}_n) = S_n, \quad (1)$$

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = S_i, \quad (2)$$

$$\partial_t (\rho_n \mathbf{u}_n) + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n + P_n \mathbf{I}) = \rho_n \mathbf{g} + \mathbf{R}_n, \quad (3)$$

$$\partial_t (\rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot \left[ \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu_0} + \left( P_i + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} \right] = \rho_i \mathbf{g} + \mathbf{R}_i, \quad (4)$$

$$\partial_t E_n + \nabla \cdot [(E_n + P_n) \mathbf{u}_n] = \rho_n \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_n + H_n, \quad (5)$$

$$\partial_t E_i + \nabla \cdot \left[ \left( E_i + P_i + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) \mathbf{u}_i - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{B}) \right] = -\nabla \cdot \left[ \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] + \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_i + H_i, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}_i) = -\nabla \times \eta \mathbf{J}, \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (9)$$

Las variables correspondientes a las especies neutra y cargada se denotan por medio de los subíndices  $n$  e  $i$ , respectivamente. Las variables  $\rho_{i,n}$  representan las densidades de cada especie,  $\mathbf{u}_{i,n}$  son los campos de velocidad, mientras  $P_{i,n}$  corresponden a las presiones cinéticas. El término  $\mathbf{I}$  corresponde a la matriz identidad,  $\mathbf{B}$  es el campo magnético solar,  $\mathbf{J}$  es la corriente eléctrica,  $\mu_0$  es la permitividad magnética en el vacío y  $\eta$  es la resistividad eléctrica del medio. El término  $\mathbf{g}$

corresponde al campo gravitacional, cuyo comportamiento en la atmósfera solar permite tener un valor aproximado  $|g| = 274 [m/s^2]$  en dirección descendente. Las variables  $E_{i,n}$  representan las densidades de energía de cada fluido, las cuales están dadas como

$$E_i = \frac{1}{2}\rho_i u_i^2 + \frac{B^2}{2\mu} + \rho_i e_i, \quad E_n = \frac{1}{2}\rho_n u_n^2 + \rho_n e_n,$$

donde los términos  $e_{i,n}$  representan la energía interna del sistema. De esta manera, se tiene en cuenta la contribución de la energía cinética, la energía térmica y la energía que está almacenada en las líneas de campo magnético, para el caso de la especie cargada. Para poder cerrar el sistema de ecuaciones, es necesario incorporar una ecuación de estado para cada especie, siendo estas descritas tal que

$$P_{i,n} = (\gamma - 1)\rho_{i,n}e_{i,n} = \frac{k_B}{m_{i,n}}\rho_{i,n}T_{i,n}, \quad (10)$$

donde  $k_B$  representa la constante de Boltzmann,  $m_{i,n}$  son las masas de una partícula de la especie y  $\gamma$  corresponde al coeficiente adiabático, cuyo valor es de 5/3. Estas expresiones son semejantes a las utilizadas para un gas ideal. Sin embargo, las implicaciones físicas en ambos materiales difieren considerablemente. En esta ocasión, estas ecuaciones de estado son obtenidas en Kelly, 1963 como resultado teoría de Debye-Hückel (Debye & Hückel, 1923) y del teorema del virial para un plasma en equilibrio (Goldstein et al., 2002).

Este conjunto es conocido como las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, donde las expresiones (1) y (2) manifiestan la conservación de la masa. El segundo conjunto (3) y (4) determina las ecuaciones de movimiento, expresando la conservación del momento. Las ecuaciones (5) y (6) relatan el flujo y la conservación de energía; y finalmente las ecuaciones (7), (8) y (9) representan la ley soneidal del campo magnético, la ley de inducción de Faraday y la aproximación de la ley de Ámpere para bajas velocidades.

Finalmente, los términos  $S_{i,n}$ ,  $\mathbf{R}_{i,n}$  y  $H_{i,n}$ , son denominados como términos de colisiones, dado que determinan las interacciones entre las especies por medio de transferencia de masa, momento y energía, respectivamente. Las interacciones por las colisiones se clasifican como elásticas e inelásticas, de manera que se pueden reescribir los términos de colisiones de manera que

$$\mathbf{R}_{i,n} = \mathbf{R}_{i,n}^{el} + \mathbf{R}_{i,n}^{inel}, \quad (11)$$

$$H_{i,n} = H_{i,n}^{el} + H_{i,n}^{inel}, \quad (12)$$

siendo  $\mathbf{R}_{i,n}^{el}$  y  $H_{i,n}^{el}$  las contribuciones elásticas al sistema, mientras  $\mathbf{R}_{i,n}^{inel}$  y  $H_{i,n}^{inel}$  están asociados con los procesos inelásticos. Respecto los términos  $S_{i,n}$ , estos son de carácter exclusivamente inelásticos.

### 1.1. Colisiones elásticas

Las colisiones elásticas son interacciones en las que no hay transferencia de partículas entre especies, sino únicamente intercambio de momento y energía. Es debido a la existencia de un gradiente entre velocidad, energía o temperatura, que se produce esta transferencia entre el sistema. Por este motivo, se establece que los términos de colisiones son proporcionales a dichos gradientes por medio de una frecuencia de interacción de las especies (Wargnier et al., 2022). A partir de esto, los términos de colisiones asociados con la transferencia de momento se expresan tal que

$$\mathbf{R}_i^{el} = \alpha (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_i), \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_n^{el} = -\mathbf{R}_i^{el} = \alpha (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n), \quad (14)$$

donde  $\alpha$  está asociado con la frecuencia de colisiones entre las especies. Estos términos corresponden la densidad de fuerza ejercida por la interacción elástica entre partículas. En ellos se ve reflejado que el cambio en la dinámica de cada especie solo se llevará a cabo cuando exista una diferencia en el movimiento de cada una. Así mismo, se denota que este gradiente exhibe un comportamiento que incita al equilibrio de manera natural, donde el sistema tiende a distribuir el momento entre las especies, de manera que ambas se propaguen a la misma velocidad. Por otra parte, la transferencia de energía esta dada por las expresiones

$$H_i^{el} = \frac{1}{2} \alpha (u_n^2 - u_i^2) + \frac{\alpha}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (T_n - T_i), \quad (15)$$

$$H_n^{el} = -H_i^{el} = \frac{1}{2} \alpha (u_i^2 - u_n^2) + \frac{\alpha}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (T_i - T_n), \quad (16)$$

donde  $\bar{m} = (m_i + m_n)/2$ , es decir, la masa promedio entre átomos cargados y neutrales. En dichas expresiones se evidencian dos clases términos, siendo el primer tipo asociado con la transferencia de energía a causa de la existencia de un gradiente energía cinética. Por otro lado, el segundo tipo es aquel que hace referencia a la transferencia de energía térmica, resultante la existencia de un gradiente de temperatura entre los fluidos (Ballester et al., 2018). Al analizar con mayor detalle los componentes asociado al gradiente de energía cinética de las ecuaciones (15) y (16), se puede obtener mayor información de la física subyacente al fenómeno. Dichos términos se re-expresan de la siguiente forma

$$\frac{1}{2} \alpha (u_n^2 - u_i^2) = \alpha (\mathbf{u}_i \cdot [\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_i]) + \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_i|^2, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \alpha (u_i^2 - u_n^2) = \alpha (\mathbf{u}_n \cdot [\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n]) + \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n|^2. \quad (18)$$

Nuevamente, al tomar los primeros términos de las ecuaciones (17) y (18), utilizando las expresiones (13) y (14), se pueden simplificar como

$$\alpha(\mathbf{u}_i \cdot [\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_i]) = \mathbf{u}_i \cdot R_i^{el}, \quad \alpha(\mathbf{u}_n \cdot [\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n]) = \mathbf{u}_n \cdot R_n^{el}.$$

Esto da a entender que parte de la transferencia de la energía cinética es producida por la potencia que transmiten las colisiones elásticas por medio de los términos de densidades de fuerza. Por otro lado, el segundo término de las ecuaciones (17) y (18) está asociado con la transferencia de energía por la existencia de una velocidad relativa entre los fluidos. A diferencia del primer término mencionado, esta transferencia de energía se puede asociar con la fricción entre los fluidos, además de permitir que el sistema sea consistente, generando que la suma de los términos de los cargados y neutrales se anulen.

Para determinar el comportamiento del parámetro  $\alpha$ , se modela a partir de una distribución Maxwelliana de velocidad, y en presencia de partículas en su primer grado de ionización (Braginskii, 1965, Ballester et al., 2018). Esto da como resultado la expresión

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{\sigma \rho_i \rho_n}{m_i + m_n} \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right)}, \quad (19)$$

donde  $\sigma$  representa la sección transversal eficaz de colisiones entre núcleo de hidrógeno y el átomo neutro. Esta sección es obtenida a partir de asumir un modelo de colisiones de esferas sólidas (Leake et al., 2012). En dichos modelos se establece la sección eficaz en función del potencial de interacción entre las partículas, siendo este un parámetro que es ajustado según observaciones

empíricas de la probabilidad de colisión entre las especies. Para el desarrollo de este trabajo, se utiliza una sección eficaz de  $10^{-20} [1/m^2]$ , conforme a los valores utilizados en Braginskii, 1965 y Zaqrashvili et al., 2011.

Para comprender mejor la interpretación del parámetro  $\alpha$ , se realiza un análisis dimensional. De este se obtiene que sus dimensiones son acordes a  $kg \cdot m^{-1} s^{-1}$ , correspondiendo a unidades de densidad sobre tiempo. Por este motivo, se puede expresar  $\alpha$  como

$$\alpha = \rho_i v_{ni} = \rho_n v_{in}, \quad (20)$$

donde  $v_{ni}$  representa la frecuencia con la que colisiona la especie neutral sobre la especie cargada, mientras  $v_{in}$  representa la frecuencia con la que colisiona la especie cargada sobre la neutral. Escrito de esta forma, el parámetro  $\alpha$  exhibe que, a pesar de los términos de colisión en cada especie se comporte de manera semejante, cada especie tiene su propia frecuencia asociada, determinada por la temperatura, la sección eficaz, y la densidad de la especie con la que colisiona. Así mismo, el término de densidad, correspondiente a la especie recibe el impacto de la colisión, se asocia con la inercia del fluido, dado que a medida que aumente esta densidad, menor será el efecto de las colisiones sobre esta especie.

## 1.2. Colisiones inelásticas

Por otra parte, las colisiones inelásticas involucran la transformación de las partículas entre especies. Para las especies cargadas y neutras del plasma solar, estas transformaciones están dadas por medio de los procesos de ionización y recombinación. En la figura 2 se presenta el proceso de la ionización, mostrando como la colisión de un electrón lo suficientemente energético con un átomo neutro de hidrógeno, arrancando su electrón y aumentando así la densidad de la especie cargada. A su vez, se muestra la recombinación como su proceso inverso, donde un núcleo de hidrógeno interactúa con un electrón, vinculándose, emitiendo un fotón y aumentando las partículas neutras en el fluido (Goldston, 2020).

Con base en lo anterior, a través de los términos de colisiones  $S_{i,n}$ , se desarrollan los procesos de transformación entre las especies cargadas y neutras. Estos términos son descritos como

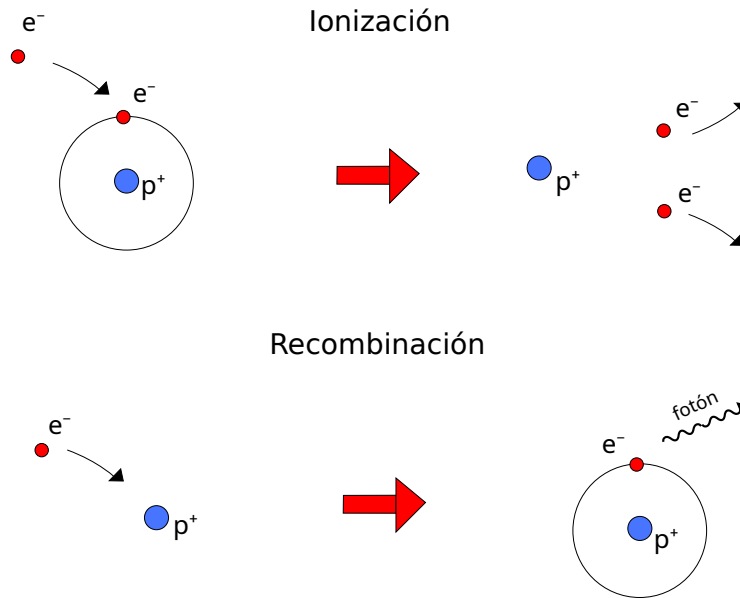
$$S_i = \rho_n \Gamma^{ion} - \rho_i \Gamma^{rec}, \quad (21)$$

$$S_n = -S_i = \rho_i \Gamma^{rec} - \rho_n \Gamma^{ion}. \quad (22)$$

Aquí, los términos  $\Gamma^{ion}$  y  $\Gamma^{rec}$  representan la frecuencia con la que suceden los procesos de ionización y recombinación, respectivamente. Es así como, la tasa de ionización se asocia con la cantidad de neutras que se pueden ionizar, mientras que la tasa de recombinación se relaciona con la cantidad de cargados que pueden neutralizarse nuevamente. Por otro lado, la transferencia de

**Figura 2**

Representación de los procesos de ionización y recombinación.



**Nota.** Representación gráfica del proceso de ionización (imagen superior) y del proceso de recombinación (imagen inferior), para un átomo de Hidrógeno.

momento por medio de los procesos inelásticos está dada como

$$\mathbf{R}_i^{inel} = \rho_n \mathbf{u}_n \Gamma^{ion} - \rho_i \mathbf{u}_i \Gamma^{rec}, \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_n^{inel} = -\mathbf{R}_i^{inel} = \rho_i \mathbf{u}_i \Gamma^{rec} - \rho_n \mathbf{u}_n \Gamma^{ion}. \quad (24)$$

A diferencia de las colisiones elásticas, la transferencia de momento en las colisiones inelásticas se debe a que, al momento de intercambiarse partículas entre especies, sus propiedades

intrínsecas como lo es momento pasa a ser parte de la nueva especie de la que formará parte. De manera análoga al momento, para la transferencia de energía se tiene que

$$H_i^{inel} = \frac{1}{2}\rho_n u_n^2 \Gamma^{ion} - \frac{1}{2}\rho_i u_i^2 \Gamma^{rec} + \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (\rho_n T_n \Gamma^{ion} - \rho_i T_i \Gamma^{rec}), \quad (25)$$

$$H_n^{inel} = -H_i^{inel} = \frac{1}{2}\rho_i u_i^2 \Gamma^{rec} - \frac{1}{2}\rho_n u_n^2 \Gamma^{ion} + \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (\rho_i T_i \Gamma^{rec} - \rho_n T_n \Gamma^{ion}). \quad (26)$$

Nuevamente, la transferencia de energía cinética y térmica en los procesos de ionización y recombinación ocurre porque cada partícula posee una cantidad de energía asociada, la cual se transfiere cuando la partícula cambia de especie.

Las tasas de ionización y recombinación son obtenidas a partir de modelos semi-empíricos, resultando en las ecuaciones para la ionización (Voronov, 1997) y para la recombinación (Smirnov, 2003) dadas, respectivamente, como

$$\Gamma^{ion} = 2.91 \cdot 10^{-14} n_e \frac{1}{X + \phi_{ion}/T_e^*} \left( \frac{\phi_{ion}}{T_e^*} \right)^K e^{-\phi_{ion}/T_e^*}; [s^{-1}], \quad (27)$$

$$\Gamma^{rec} = 2.6 \cdot 10^{-19} \frac{n_e}{\sqrt{T_e^*}}; [s^{-1}], \quad (28)$$

donde  $X = 0.232$  y  $K = 0.39$  son los parámetros de ajuste obtenidos de la interpolación de datos;

$T_e^*$  representa la temperatura de los electrones registrada en electrón-voltios,  $n_e$  es la densidad de número de los electrones y  $\phi_{ion} = 1.6 [eV]$  es la energía necesaria para arrancar un electrón del átomo de hidrógeno en su estado base. En su interpretación y análisis dimensional, estas representan frecuencia con la cual se transforman los átomos de cada especie. El modelo de Voronov y Smirnov, junto con el mostrado Cox y Tucker, 1969 hacen parte de los pocos modelos los cuales permiten describir los procesos de ionización y recombinación en el plasma solar. En particular, se hace uso del primero por su estructura semejante al grado de ionización dado por la formula de Saha.

### 1.3. Parámetro Beta Plasma

Dentro de la complejidad de la estructura solar, se tiene en consideración la incidencia del campo magnético y la presión del plasma sobre la dinámica del fluido. Para determinadas regiones, el papel que desempeña cada una de estas interacciones varia considerablemente. Para caracterizar cual es el papel dominante en la dinámica del plasma, se utiliza el parámetro  $\beta$  plasma, el cual está definido como

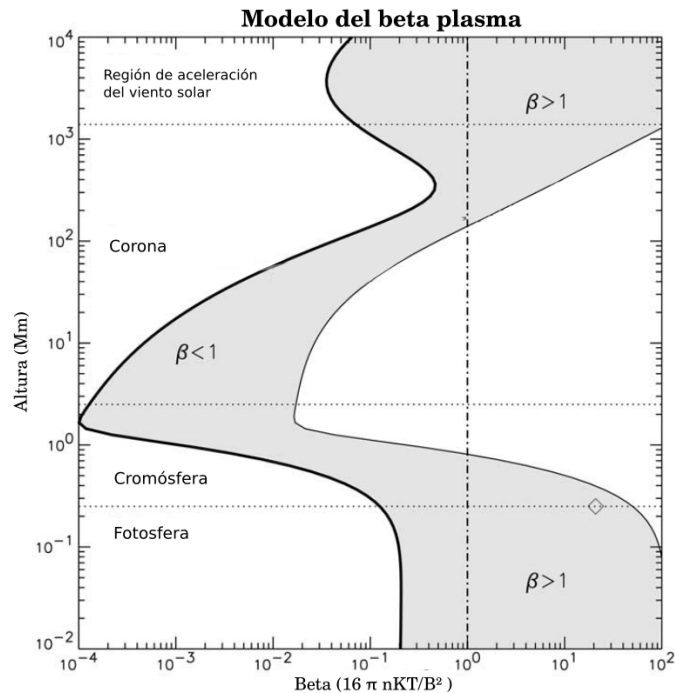
$$\beta = \frac{P_i}{P_B} = \frac{nk_B T}{B^2/2\mu_0}. \quad (29)$$

Esta expresión, dada por el cociente entre las presión cinética sobre la presión magnética, describe la relación entre las magnitudes de ambas interacciones, y nos permite distinguir dos tipos de regiones (Bittencourt, 2004). La primera clase de región se caracteriza por tener  $\beta \ll 1$ . Esta región está dominada principalmente por la presión magnética, propiciando la formación de

estructuras magnéticas, así como el confinamiento de las partículas por las líneas de campo. Por otro lado, para las regiones caracterizadas por presentar  $\beta \gtrsim 1$ , la presión cinética representa el papel principal, siendo dominantes los fenómenos hidrodinámicos, los cuales se ven poco influenciados por el campo magnético.

### Figura 3

*Modelo del parámetro beta plasma a lo largo de la atmósfera solar.*



**Nota.** Se muestra una representación del comportamiento de parámetro beta plasma en una región activa del sol, registrados en función de la altura. Este abarca un rango de actividad comprendido desde plagas solares, de 150 [G], hasta manchas solares, de 2500 [G] (adaptado de Gary, 2001).

Para determinar el perfil del parámetro beta plasma en el sol, se han establecido modelos semi-empíricos los cuales permiten inferir el comportamiento del campo magnético, así como de

presión de plasma. Estos modelos son acordes a las observaciones del modulo SXT del satélite Yohkoh (Gary & Alexander, 1999). Dichas observaciones corresponden al promedio de emisión de rayos X, los cuales brindan información acerca de la intensidad, la morfología y el movimiento de los puntos de emisión de diversos fenómenos que comprenden situaciones de baja actividad del campo magnético, hasta fenómenos de alta actividad (Gary, 2001).

En la figura 3 se puede apreciar el comportamiento del parámetro  $\beta$  plasma dentro de una región activa del sol, bajo la consideración de un plasma en equilibrio, junto con la presencia de un campo magnético libre de fuerzas. En esta se puede apreciar el particular cambio de roles que se da entre la región cromosférica y la región de corona media, manifestando una región con  $\beta \ll 1$ , atrapada entre dos regiones con  $\beta \gtrsim 1$ . Gracias a este criterio, al desarrollar el entorno de los modelos computacionales, los perfiles de presión y de campo magnético están sujetos a la condición de satisfacer su relación dado el parámetro beta plasma de la región en que se encuentran. En este caso, esto permite la implementación de un campo magnético promedio de ordenes de  $B_0 \sim 10^2$  para la región inferior de la atmósfera solar.

## 2. Reconexión magnética

La reconexión magnética consiste en la desconexión y reconexión de líneas de campo magnético en regiones que presentan un cambio en la polaridad. Esta reorganización del campo produce un cambio en la topología, produciendo una transferencia de energía al medio en forma de aceleración y calentamiento de partículas, así como en radiación electromagnética (Birn & Priest, 2007). Este mecanismo es ampliamente aceptado como responsable de la liberación de energía en las fulguraciones solares, al observarse la evolución de estructuras magnéticas en el espectro de rayos X (Yamada et al., 2010). Para entender el proceso de la reconexión magnética, se retoma la ecuación (8), correspondiente a la ley de inducción de Faraday en casos resistivos, descrita como

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}_i) = -\nabla \times \eta \mathbf{J}. \quad (30)$$

Esta corresponde a una ecuación de conservación de las líneas de campo magnético, donde la evolución del campo está dada por el flujo del campo magnético a través del espacio. El término a la derecha de la igualdad está asociado a la interacción del campo magnético con la materia cuando se tiene presencia de resistividad. En este caso, es este término de fuente el que provoca la no conservación, dando lugar al comienzo del proceso de reconexión.

En el entorno solar, dadas las altas escalas de temperatura, y las densidades tan bajas que presenta la región atmosférica, en especial en la corona, se considera que la resistividad eléctrica  $\eta$

es despreciable comparada con las demás interacciones del entorno. Sin embargo, en un instante de tiempo, se puede manifestar una localidad del plasma donde esto no necesariamente se debe satisfacer, presentando un punto de resistividad Óhmica anómalo. En ese instante, se expresa la resistividad como

$$\eta = \eta_0 \exp \left( - \left[ \frac{x^2 + (z - h_{rec})^2}{w_\eta^2} \right] \right), \quad (31)$$

donde  $\eta_0$  representa la amplitud máxima de la resistividad,  $h_{rec}$  es la altura de la reconexión y  $w_\eta$  corresponde al ancho promedio de la región resistiva. Es así como, al comportarse como una función gaussiana, la perturbación está restringida a una localidad del plasma.

Retomando la evolución del campo magnético, esta se describe bajo un comportamiento de advección, hasta que la presencia de la resistividad provoca una componente difusiva, responsable de la reestructuración del campo. Para determinar la relación entre las escalas de difusividad y advección, se utiliza el número de Lundquist, también denominado el número de Reynolds magnético (E. Priest & Forbes, 2000). Este es definido como

$$S = \frac{\mu_0 l_a v_a}{\eta}, \quad (32)$$

donde  $l_a$  y  $v_a$  corresponden a las escalas características de longitud y velocidad en el proceso de reconexión. Por otra parte, se tiene en consideración el número de Mach, siendo definido como la razón entre la velocidad a la que se desplaza el plasma en la reconexión y las velocidades

características de Alfvén. Este a su vez permite determinar las escalas de tiempo en las que se da el proceso de reconexión. El número de Mach y el tiempo en que se produce la reconexión están definidos como

$$M_A = \frac{v_i}{v_A}, \quad t_{rec} = \frac{t_A}{M_A}.$$

Los términos  $t_A$  y  $t_{rec}$  representan los tiempos de propagación de las ondas de Alfvén y el tiempo en que se produce la reconexión magnética. Las variables  $v_i$  y  $v_A$  hacen referencia a la velocidad del plasma, así como a la velocidad de Alfvén, respectivamente.

Para comprender como están dados los tiempos de reconexión en función de las escalas del fenómeno, se han propuesto modelos 2D, de los cuales destacan el modelo de Sweet-Parker (Sweet, 1958, Parker, 1957), junto con el modelo de Petschek (Petschek, 1964). El primero consiste en que, dado el sitio de cambio de polaridad del campo, el efecto de resistividad y el proceso de reconexión se manifiestan sobre toda la región, resultando en valor del número de Mach de  $M_A = S^{-1/2}$ . Mientras tanto, en el modelo de Petschek el proceso de reconexión se da en una sección más pequeña, contenida en la capa de reconexión, provocando que se manifieste de forma más rápida y permitiendo valores de  $M_A = \pi/8 \ln S$ .

Los números Lundquist propuestos para una fulguración solar usualmente satisfacen que

$S \gg 10^6$  (E. Priest, 2014). Sin embargo, para hojas de corriente con escalas de  $l_a = 10^6$  [m] y  $v_a = 10^6$  [m/s], se da lugar a resistividades tales que  $\eta \ll 10^{-2}$  [ $\Omega \cdot m$ ]. Estos valores de resistividad implican valores adimensionales para el cómputo de ordenes de  $10^{-8}$  o inferiores, significando que los errores provenientes de los cálculos asociados a la resistividad son cada vez más significativos, al punto de no garantizarse que los resultados de la simulación no se vean influenciados por el error numérico. Además, estas escalas para el número de Lundquist produce tiempos de reconexión los cuales no suelen coincidir con las escalas de tiempo habituales en una fulguración (Shibata & Magara, 2011).

Con base en lo anterior, dado que aun no existe un consenso para el número de Lundquist, para este trabajo se utilizan valores entre los ordenes de  $10^2 - 10^4$ , correspondientes a una reconexión rápida (Murtas et al., 2021). De esta elección se tiene como resultado valores para el número de Mach entre 0.01 y 0.1, coherente a las escalas de tiempo de una fulguración, bajo el modelo de Petscheck. Por este motivo, bajo las escalas de longitud y velocidad mencionadas, se utiliza un valor para la resistividad máxima de  $\eta_0 = 6,28 \cdot 10^4$  [ $\Omega \cdot m$ ]. De esta forma, se manejan valores adimensionales para la resistividad del orden de  $10^{-2}$ , reduciendo la posibilidad de un error asociado al cálculo computacional.

## 2.1. Hoja de Harris

En el proceso de la reconexión magnética, la configuración del campo magnético juega un papel crucial, puesto que de esta depende cuanta energía almacenada se puede liberar durante el

proceso, así como el tiempo que tarda en llevarse a cabo. Para el proceso de reconexión en las fulguraciones solares, la configuración de hoja de corriente es una de las más aceptadas para su desarrollo.

Las hojas de corriente consisten en una región, caracterizada por formar una interfaz de cambio en la polaridad de las líneas de campo, donde circula una delgada capa de corriente eléctrica. Estas tienen la propiedad de presentar un flujo magnético que se nulifica localmente. Se han reportado observaciones en las cuales se han visto indicios de dichas estructuras en la banda ultravioleta (Li et al., 2018) y en rayos X (Reva et al., 2022). Se estima que la introducción de la hoja de corriente da lugar a procesos de reconexión más rápidos y eficientes, cuyas escalas son comparables con las escalas esperadas en una fulguración (E. R. Priest, 1976).

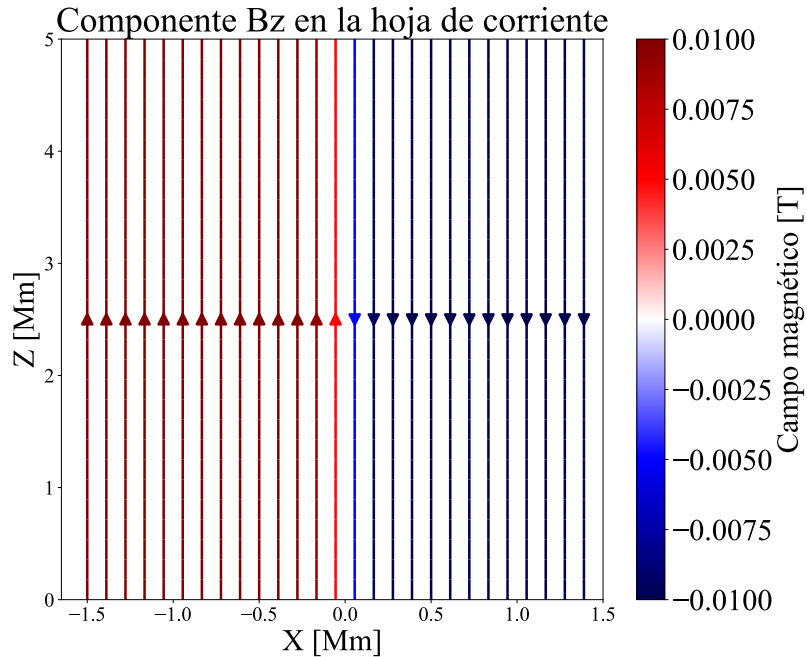
En este caso, se tiene un especial interés en la solución de hoja de corriente de Harris para el modelo de campo magnético. La hoja de Harris plantea la solución de las ecuaciones de Vlasov a partir de un campo magnético el cual depende de solo una coordenada cartesiana, en este caso  $x$ , con el fin de que las componentes del momento  $y$  y  $z$  sean constantes de movimiento. (Harris, 1962). Es así como podemos escribir las componentes del campo magnético como

$$B_z = -B_0 \tanh\left(\frac{x}{w_0}\right), \quad (33)$$

$$B_y = \sqrt{B_0^2 - B_z^2}, \quad (34)$$

**Figura 4**

Representación de la componente  $B_z$  del campo magnético en la hoja de corriente de Harris.



**Nota.** El campo magnético en cuestión tiene una magnitud  $|B_0| = 100 [G]$ , según se implementa en nuestro modelo.

$$B_x = 0. \quad (35)$$

En estas expresiones,  $B_0$  corresponde a la amplitud de campo magnético, mientras  $w_0$  se relaciona con el ancho promedio de la hoja de corriente. Escritas de esta forma, se puede apreciar que  $B_z$  corresponde a la componente del campo que presenta la inversión de polaridad. Esto se puede observar por medio de la gráfica 4, donde se puede apreciar dicha transición en la polaridad. Por otra parte, la componente  $B_y$  corresponde al campo magnético guía, sobre el cual circula el

plasma, permitiendo el almacenamiento de una mayor cantidad de energía y un proceso más rápido de reconexión. Finalmente, para preservar la divergencia nula de campo, la componente  $B_x$  es cero. Para la magnitud del campo magnético se opta por un valor  $B_0 = 100 [G]$ , dado a que este corresponde a un valor promedio del modelo de Vernazza et al., 1981, el cual abarca las escalas de campo características para la manifestación de una fulguración solar (Shibata & Magara, 2011). Por último, se establece que el ancho para la hoja de corriente satisface que  $w_0 = 0.1 L_{0x}$ , siendo  $L_{0x}$  la longitud que abarca el dominio en la dirección  $x$ . Con esta relación, se espera que el fenómeno de reconexión se de en escalas de tiempo acordes con las esperadas con los fenómenos de las fulguraciones solares (Li et al., 2018).

### 3. Análisis de resultados

#### 3.1. El papel de los términos de colisiones en la atmósfera solar

En esta sección analizaremos el impacto que ejercen las colisiones elásticas e inelásticas en el proceso de reconexión para las regiones cromosférica y coronal. Esto con el fin de determinar la relevancia de la interacción de ambos fluidos, mostrando si se hace necesario su consideración en el estudio a diferentes alturas de la atmósfera solar, o si se puede prescindir de su incorporación. Para ello, primero se debe establecer el entorno en que se va a manifestar la fulguración, que en este caso corresponde al modelo de sol en reposo. En este modelo, se establece que las variables físicas de los fluidos, neutral y cargado, no varían temporalmente hablando. Esto implica que las derivadas parciales con respecto al tiempo, son iguales a cero. De esta condición, surgen las ecuaciones de equilibrio hidrostático, las cuales se expresan como

$$\nabla P_i = \rho_i \mathbf{g}, \quad \nabla P_n = \rho_n \mathbf{g}.$$

Estas expresiones surgen de considerar las ecuaciones (3) y (4) en un sistema en reposo y en el cual se presenta un campo magnético libre de fuerza. Es así como el sistema se mantiene en equilibrio cuando la presión del fluido contrarresta a la fuerza gravitacional ejercida. Para una región de la atmósfera solar, se asume que el sistema es homogéneo en las direcciones  $x$  y  $y$ , lo cual implica que las variables del sistema solo varían en dirección  $z$ . A partir de este hecho, e implementando las

ecuaciones de estado mostradas en (10), la condición de equilibrio se re-expresa como

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} = -\rho_i |\mathbf{g}| = -\frac{P_i m_i}{T_i k_B} |\mathbf{g}|, \quad \frac{\partial P_n}{\partial z} = -\rho_n |\mathbf{g}| = -\frac{P_n m_n}{T_n k_B} |\mathbf{g}|.$$

Dadas estas consideraciones, la presión se calcula como

$$P_i = P_{i0} e^{-T_{0i} \int \frac{1}{T_i} dz}, \quad P_n = P_{n0} e^{-T_{0n} \int \frac{1}{T_n} dz}.$$

Dentro de las soluciones para el equilibrio hidrostático, se definen las constantes de la exponencial como  $T_{0\alpha} = m_\alpha |\mathbf{g}| / k_B$ , cuyas unidades corresponden a una temperatura de referencia, las cuales dictan la rapidez con la que decrece la curva. Por otro lado, las constantes  $P_{i0}$  y  $P_{n0}$  corresponden a la presión de referencia de los cargados y neutrales, respectivamente, que permiten ajustar los perfiles según el modelo. Así mismo, los perfiles de densidad son calculados a partir de la ecuación de estado (10). Finalmente, dada la presencia de colisiones elásticas, se debe garantizar que estos términos de fuente sean nulos en el perfil inicial. En el caso de las colisiones  $R_\alpha$ , al partir del reposo, los términos se anulan. Sin embargo, en el caso de la transferencia de energía, se debe satisfacer la condición

$$H_n^{el} = -H_i^{el} = \frac{\alpha}{(\gamma - 1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (T_i - T_n) = 0. \quad (36)$$

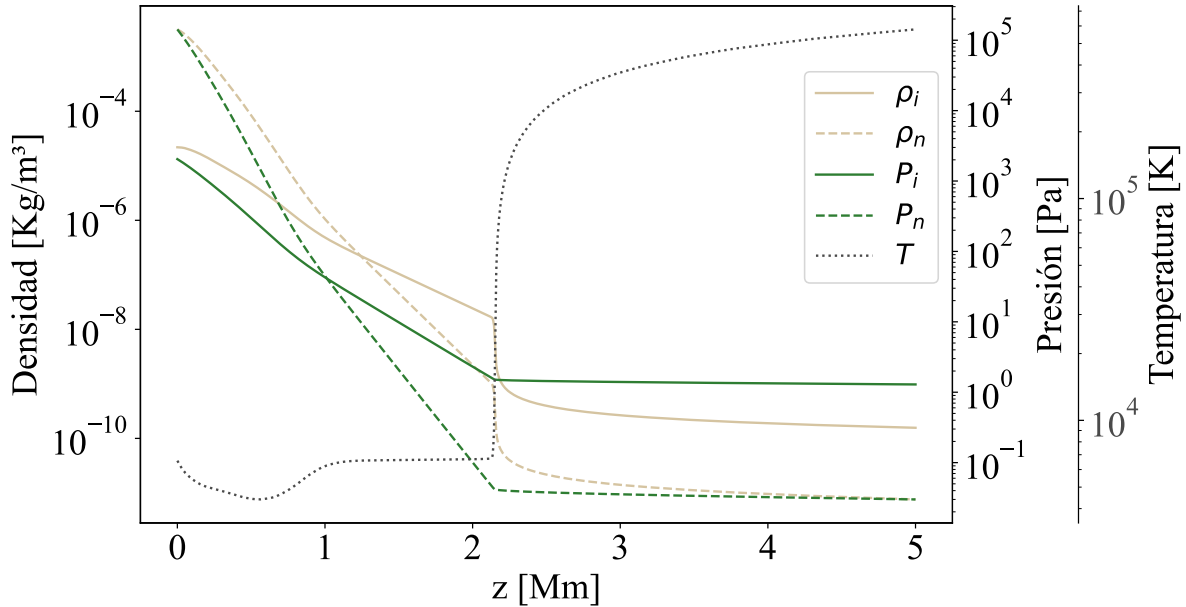
Esto solo se cumple si los perfiles de temperatura de cargados y neutrales satisfacen que  $T_i = T_n$  al comienzo del fenómeno. En este documento se implementa el modelo de Avrett para determinar el perfil de temperatura tanto de cargados como de neutrales. Para ello, se realizó una interpolación de los datos obtenidos por medio del espectrógrafo SUMER, mediante el modelo semi-empírico C7 (Avrett & Loeser, 2008). En la figura 5 se puede apreciar el comportamiento de la temperatura bajo este modelo, siendo posible apreciar el comportamiento anómalo en la corona baja, así como el fenómeno de calentamiento coronal.

Para definir las presiones de referencia, se utilizan los valores del Modelo Val C (Zhang et al., 2021) (Vernazza et al., 1981). Es así como se obtienen valores de referencia  $P_{i0} = 1.29 [Pa]$  y  $P_{n0} = 3.0 \cdot 10^{-3} [Pa]$ . Estos valores, aunque suelen resultar elevados para la base de la atmósfera solar en el modelo Val C, resultan en perfiles bastantes acordes a los esperados en la región cromosférica y superiores. Estos perfiles de presión se pueden apreciar en la figura 5, representados en el eje derecho en escala logarítmica. Al mismo tiempo, los perfiles de las densidades son obtenidos por medio de la ecuación de estado de ambos fluidos, y representados en la gráfica por medio del eje izquierdo.

Adicionalmente, se debe determinar el impacto esperado de las colisiones. Para ello, se analizan las frecuencias de colisiones características para los procesos elásticos e inelásticos. Comenzando con los procesos inelásticos, se puede establecer los perfiles de ionización y recombinación con base en las expresiones (27) y (28). Es así como en la figura 6, se grafican las frecuencias de

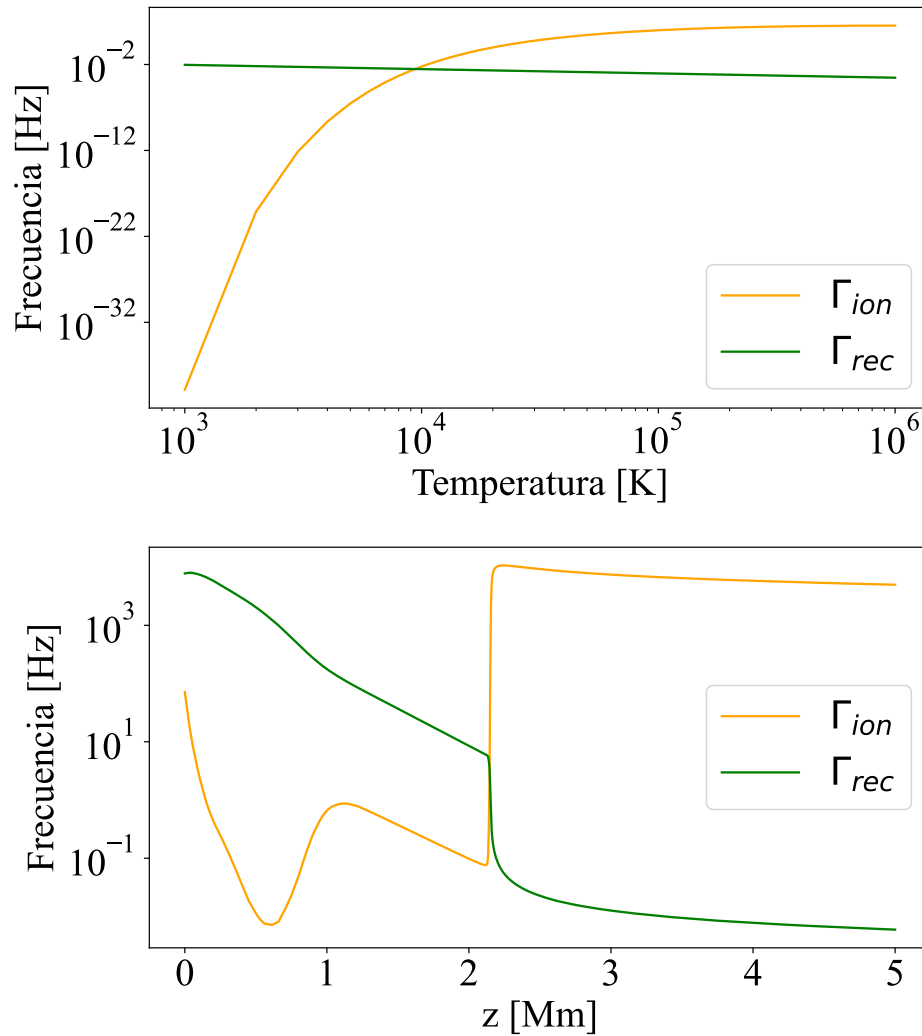
**Figura 5**

Perfiles bajo el modelo de sol en equilibrio, con base en el modelo de Avrett.



**Nota.** Representación del perfil para el sol en equilibrio desde la base hasta una altura  $h = 5$  [Mm]. En este se muestra el perfil de temperatura (puntos negros), con sus respectivos valores en la barra flotante de la derecha, el cual es obtenido por medio de los modelos observacionales de Avrett. Así mismo, se muestran los perfiles interpolados de la especie neutral (línea discontinua), y la especie cargada (línea sólida), para los perfiles de densidad (color beige), y los perfiles de presión (color verde).

ionización (naranja) y de recombinación (verde), de tal manera que en el panel superior se observa la dependencia de dichas frecuencias en función de la temperatura, para una densidad de referencia de  $10^{-12}$  [Kg/m]; mientras en el panel inferior, se ve la dependencia de las frecuencias en función de la altura, calculadas en base al perfil de Avrett mostrado en la figura 5. Cabe resaltar que estos valores son proporcionales a la densidad de número de cargados, por lo cual el comportamiento y los cocientes de estas frecuencias no cambiarían, solo sus escalas.

**Figura 6***Representación de las frecuencias de colisiones inelásticas*

**Nota.** Se caracterizan las frecuencias de colisiones en función de la temperatura (panel superior), en el intervalo de temperatura  $10^3 - 10^6$  [K]; y en función de la altura (panel inferior), desde la base hasta una altura de 5 [Mm]. En esta se muestran las frecuencias de ionización (traza naranja) y de recombinación (traza verde).

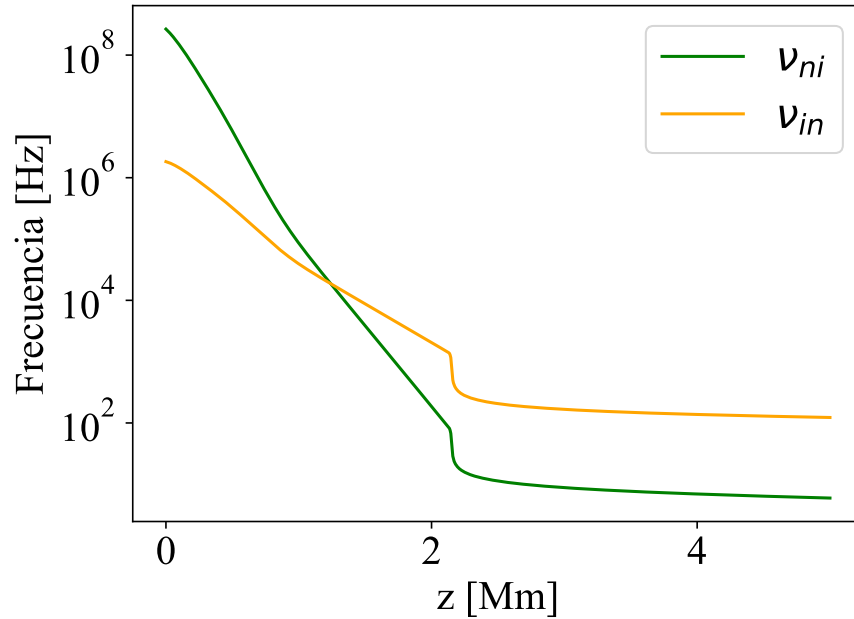
A medida que las escalas de temperatura aumentan, también lo hacen las frecuencias de ionización hasta el punto que son considerablemente alta comparadas con las de recombinación, esperando que su comportamiento sea semejante a los que se podría observar en un modelo de un solo fluido. Retomando el perfil de Avrett, en la corona solar se tienen valores de temperatura de los ordenes iguales o superiores a  $10^5$  [K], con lo que esperaríamos que las frecuencias de ionización sean 6 ordenes de magnitud superiores a las de recombinación. Por este motivo, se habla un de un plasma totalmente ionizado, en el cual los efectos de las colisiones inelásticas no tendrían un efecto significativo.

Ahora, es necesario analizar el efecto de las colisiones elásticas. Para ello, en la figura 7 se aprecian las frecuencias de interacción de la especie neutra sobre la cargada (verde) y la interacción de las cargadas sobre las neutrales (naranja), por medio de los términos  $\nu_{ni}$  y  $\nu_{in}$ , definidos en la ecuación 20. Estos son calculados en función de la altura, comprendida desde la base de la atmósfera hasta una altura de 5 [Mm], nuevamente, utilizando el perfil de Avrett mostrado en la figura 5.

Nuevamente, es apreciable que el efecto de las colisiones se ve reducido considerablemente a medida que aumenta la altura en la atmósfera, a tal punto que su efecto se reduce de 3 a 6 ordenes de magnitud. Así mismo, se aprecia que, luego de la zona de transición, el efecto de las colisiones de las cargadas sobre las neutrales predomina sobre las colisiones de las neutrales sobre las cargadas, denotando que la dinámica de las neutrales incide en menor medida en la dinámica de las cargadas cuando se encuentran en la región coronal. Por estos motivos, se espera que pa-

**Figura 7**

Representación de las frecuencias de colisiones elásticas



**Nota.** Se caracterizan las frecuencias de colisiones elásticas en función de la altura atmosférica. En esta se puede apreciar el efecto de las colisiones de las partículas neutrales sobre las cargadas (línea verde), así como el efecto de las cargadas sobre las neutrales (línea naranja).

ra el proceso de una fulguración en la corona solar, los términos de colisiones no afecten su dinámica.

Con el fin de corroborar el efecto de las colisiones en las fulguraciones solares, se plantea observar el fenómeno cuando la reconexión se da a una altura  $z_{rec} = 3$  [Mm] (Corona baja), y a una altura de  $z_{rec} = 1.5$  [Mm] (Cromósfera media). Para llevar a cabo esta tarea, se utiliza el código MAGNUS (Navarro et al., 2017), el cual es un código magnetohidrodinámico bajo el modelo 2.5D, en el régimen newtoniano enfocado en la dinámica de la atmósfera solar, el cual considera

efectos de resistividad óhmica y está adaptado para la simulación de dos fluidos. Este resuelve las ecuaciones de conservación por medio del método de volúmenes finitos, mostrado a mayor detalle en el apéndice 1, bajo los esquemas HLLE y HLLC para solucionar los problemas de Riemann, mientras controla el crecimiento de la divergencia del campo magnético por medio del uso de métodos *Flux Constrained Transport*. Parte del desarrollo de este trabajo fue el de adaptar un conjunto de rutinas que permitiesen modelar los perfiles iniciales para ambos fluidos, así como realizar los cálculos de los términos de colisiones. Adicionalmente, se tuvo que incorporar una rutina para la evolución bajo el método de líneas de sistemas con términos rígidos, correspondiente a un esquema Implícito-Explícito, también denominado modelo ImEx. El proceder de este modelo se explica en mayor detalle en el apéndice 2.

En estas simulaciones, se desea abarcar la región fotosférica, la cromosfera, la región de transición y parte de la corona baja. Por este motivo, se establece una malla espacial, la cual está definida de  $[-1.5:1.5]$  [Mm] en  $x$ , de  $[-0.01:0.01]$  [Mm] en  $y$  y de  $[0:5]$  [Mm] en el eje  $z$ . Esta está dividida en cada dirección tal que  $N_x = 600$ ,  $N_y = 4$  y  $N_z = 1000$ , donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  son los números de puntos en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Es así como obtenemos que en cada dirección presentemos una variación espacial de  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5 * 10^{-3}$  [Mm], garantizando que el volumen para los cálculos de la malla sean cuadrados. De esta forma, con esta resolución del orden de  $5$ [Km] se espera captar a detalle los procesos implícitos de la evolución de la fulguración.

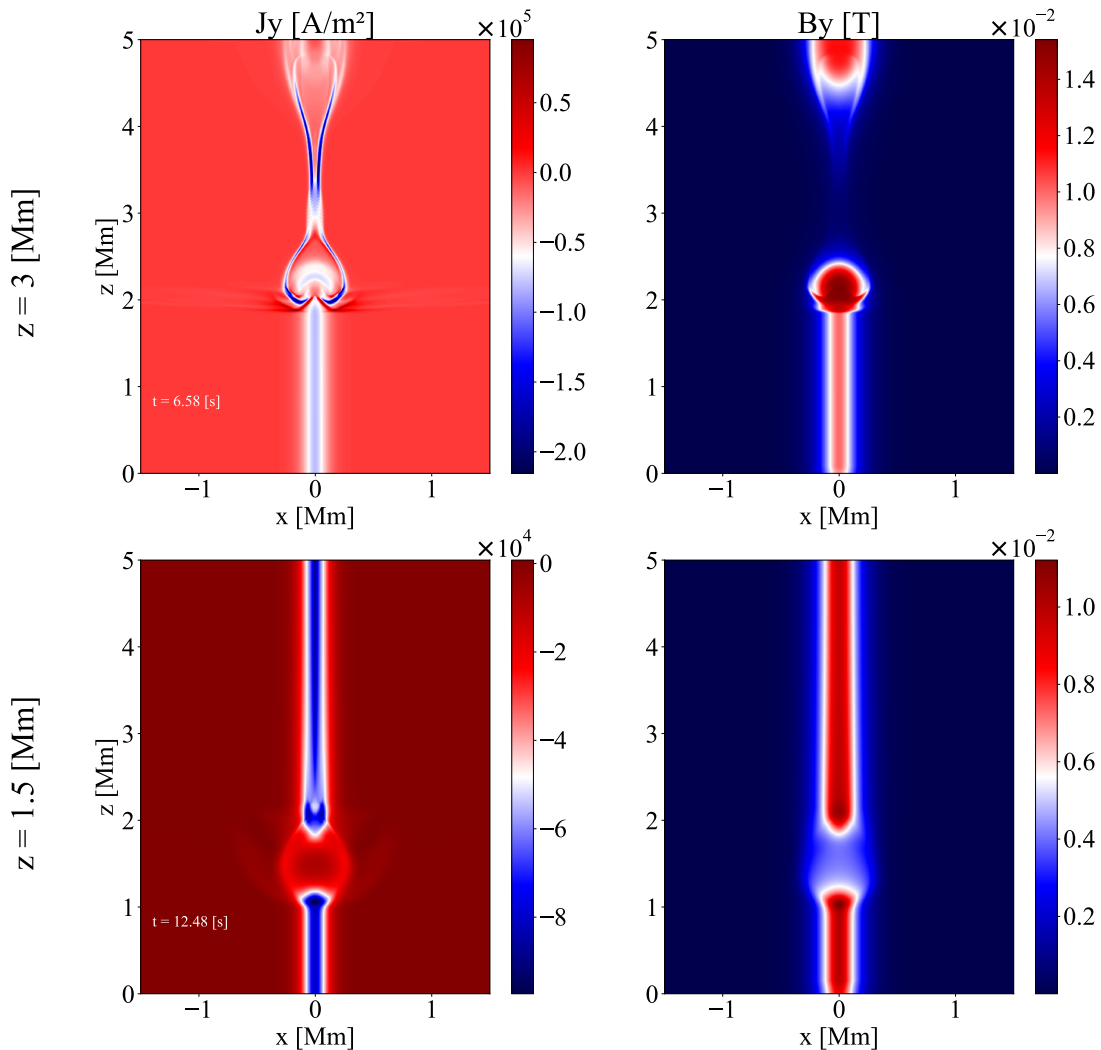
En primera instancia, se desea mostrar la relevancia de la altura de reconexión a la hora de

desarrollarse la reconexión magnética. Para ello, se analiza la morfología del fenómeno cuando se manifiesta en la corona baja, y en la cromosfera solar. En ambos casos, se realiza la evolución sin ningún tipo de colisiones, con el fin de ver únicamente el efecto de la altura. En la gráfica 8, podemos observar, agrupados por columnas, los perfiles de corriente en el eje  $y$ , y el campo magnético guía en dirección  $y$ . Los perfiles son plasmados en los instantes  $t = 6.58$  [s] y  $t = 12.48$  [s], dada la reconexión en la altura  $z_{rec} = 3$  [Mm] y  $z_{rec} = 1.5$  [Mm], respectivamente. El motivo de escoger estos instantes de tiempo radica en la manifestación de un punto máximo en la tasa de reconexión, momento en el cual se espera que el proceso de la reconexión magnética y la energía liberada llega a su valor más alto y empieza a disminuir.

Lo primero que se puede apreciar de estas gráficas es el cambio radical en la formación de las estructuras características de una fulguración. Mientras en el caso coronal se manifiesta la formación de una hoja de corriente y la aparición de una arcada en las líneas de campo magnético, en la cromosfera no evidencia aún estructuras de este tipo. Esto a pesar de que, en ambos casos, se evoluciona el sistema hasta el instante de tiempo en donde las tasas de reconexión detienen su crecimiento. También se resalta la diferencia de magnitudes, siendo que la reconexión en la corona alcanza mayores escalas de corriente y de campo magnético significativamente mayores en intervalos de tiempo más cortos. Esto se supone ocurre debido a la diferencia de densidad y presión, siendo la región cromosférica una región que está varios ordenes por encima de la región coronal, dificultando que el plasma se perturbe.

**Figura 8**

*Morfología del campo magnético y el flujo de corriente sobre el eje y*



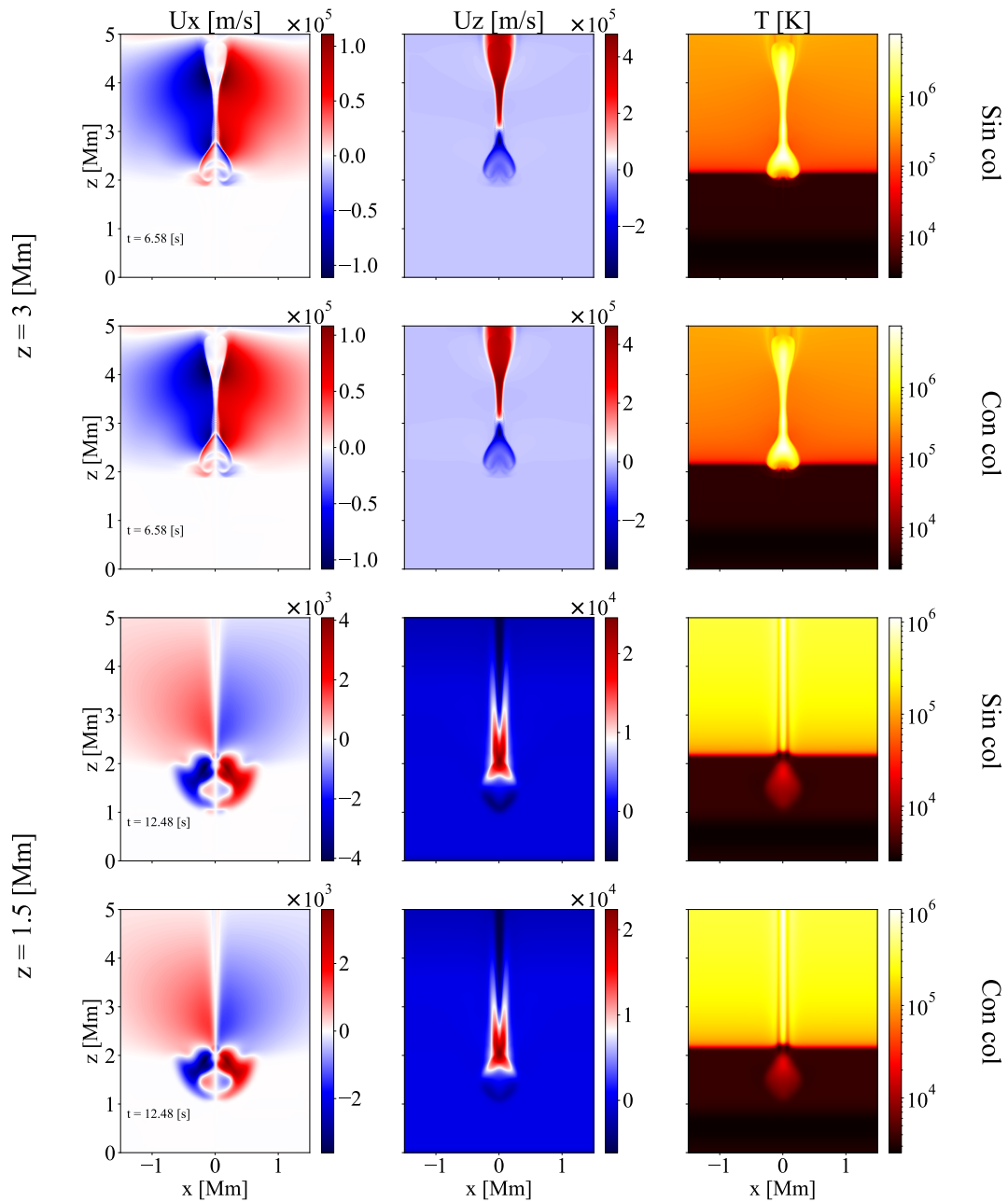
**Nota.** La primera columna da información acerca de la corriente de cargados que circula en  $y$ , mientras que la segunda columna se aprecia el comportamiento la componente  $y$  del campo magnético. Las filas agrupan los perfiles según la altura de reconexión y el tiempo en que se midió el fenómeno. La primera fila consta de las mediciones para  $z_{rec} = 3 [Mm]$ , con un tiempo de  $t = 6.58 [s]$ . La segunda fila muestra los perfiles para  $z_{rec} = 1.5 [Mm]$ , con un tiempo de  $t = 12.48 [s]$ .

A continuación, se analiza el efecto de las colisiones en la dinámica de la reconexión. Para ello, se observan los perfiles de velocidades en  $x$  y en  $y$  para el fluido cargado, así como su temperatura. En la gráfica 9 se pueden apreciar dichos perfiles organizados de tal manera que la primera columna corresponde a los perfiles de velocidad en  $x$ , la segunda columna contiene los perfiles de velocidad en  $z$ , y la tercera columna muestra los perfiles de temperatura. Por otro lado, las filas están asociadas con las configuraciones del fluido, siendo las primeras 2 filas correspondientes al fenómeno dada la altura  $z = 3 [Mm]$ , en el instante  $t = 6.58 [s]$ , donde la fila superior muestra la dinámica sin colisiones, mientras la fila inferior a esta muestra la dinámica con colisiones. Así mismo, las últimas dos filas retratan este mismo esquema para mostrar la reconexión en  $z = 1.5 [Mm]$ , en el tiempo  $t = 12.48 [s]$ . Cabe resaltar que, en los casos del fenómeno con colisiones, se utiliza una sección transversal  $\sigma = 2.98 * 10^{-21} [m^2]$ , por motivos de adimensionalización. Se trabaja un orden por debajo de los valores propuestos en el modelo de Braginskii, con la intención de ver la afectación cuando el acople no es tan rígido.

Cuando se observan estos perfiles, se aprecia que la dinámica de las partículas cargadas en la corona solar no presenta cambios significativos entre los casos sin colisiones y con colisiones. Esto se evidencia al observar que la morfología y magnitud de los perfiles de velocidad y temperatura alcanzadas son semejantes. Respecto al caso cromosférico, se puede apreciar un cambio en la dinámica por el efecto de las colisiones. Esto se refleja principalmente en los perfiles de velocidad donde, a pesar de tener estructuras similares, se empieza exhibir una diferenciación en la intensidad del movimiento en las regiones más bajas del fenómeno, así como se observa que las magnitudes

**Figura 9**

Perfiles de velocidad y temperatura de la especie cargada en función de la altura y de los términos de colisiones



**Nota.** En la primera, segunda, y tercera columna se agrupan los perfiles de velocidad en  $x$ , velocidad en  $z$  y la temperatura respectivamente. Las filas representa la configuración de la evolución, siendo las primeras dos filas aquellas que corresponden a la altura  $z = 3$  [Mm], sin colisiones y con colisiones, respectivamente; mientras las ultimas dos filas corresponden a una altura  $z = 1.5$  [Mm], sin colisiones y con colisiones, respectivamente.

alcanzadas son menores en el caso con colisiones. Este comportamiento parece indicar que los términos de colisiones toman verdadera relevancia en la región cromosférica, a diferencia de la región coronal donde su impacto es mínimo.

A pesar de que el análisis morfológico ha proporcionado información del impacto de la altura y el efecto de las colisiones, se hace necesario hacer un estudio cuantitativo del sistema para determinar el grado de influencia de ambas condiciones. Por este motivo, analizaremos el comportamiento de las tasas de reconexión y del flujo reconectado para cada configuración. Comenzando por las tasas de reconexión, su calculo está dado por

$$R = \frac{u_{in}}{u_A} \Big|_p, \quad \text{donde se cumple que} \quad u_A^2 = \frac{\mathbf{B}_p^2}{\sqrt{\mu_0 \rho_{ip}}}.$$

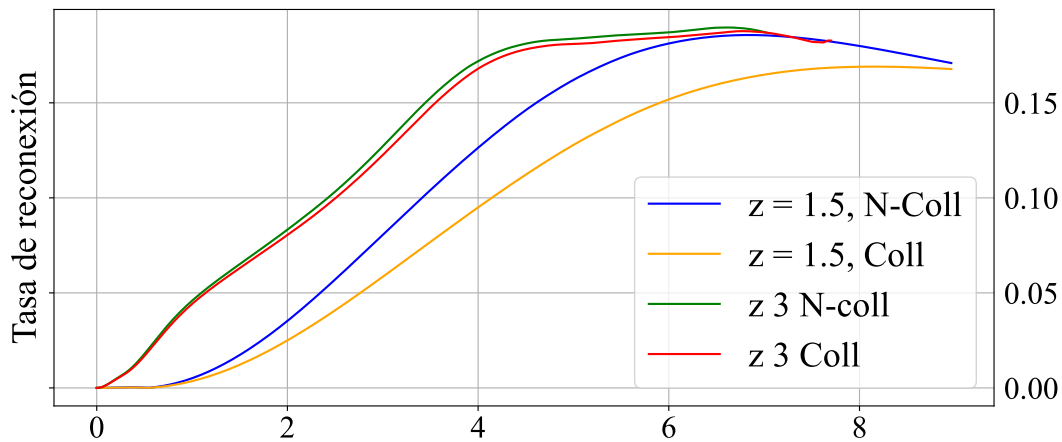
En este, se calcula el cociente entre las velocidad de entrada del fluido sobre la velocidad característica de Alfvén en el punto  $p$ . Este punto en particular es situado sobre el borde del campo guía, a la altura del punto de reconexión. Para estos casos, esto corresponde al punto  $p = (x, y, z) = (0.1; 0; z_{rec})$  [Mm]. Con esto se busca registrar el cambio de las líneas de campo en la dirección  $x$ .

Con la anterior explicación, se procede a mostrar los resultados obtenidos. En la gráfica 10, se registra la evolución de las tasas de reconexión. Estos datos son registrados desde el inicio del

fenómeno hasta el momento donde la tasa de reconexión se muestra como máxima. Para los casos con altura  $z_{rec} = 3 [Mm]$ , se tiene un tiempo de medición de aproximadamente 7.8 [s], donde se destaca el instante 6 [s], momento en el cual el crecimiento de las tasas parece detenerse. A esta altura se puede apreciar que los comportamientos para el caso colisional (rojo) y el caso no colisional (verde) son similares. Por otro lado, para la altura  $z_{rec} = 1.5 [Mm]$ , se registraron las mediciones durante 8.6 [s], en donde se aprecian que el proceso de crecimiento finaliza a los 6.3 [s] para el caso sin colisiones, mientras que, para el caso con colisiones este se detiene en 8 [s], presentando a su vez una menor amplitud que anterior caso.

### Figura 10

*Medición de las tasas de reconexión durante el proceso de la reconexión magnética*



**Nota.** Se aprecian las tasas obtenidas para la altura  $z_{rec} = 3 [Mm]$  con colisiones (franja roja) y sin colisiones (franja verde). Así mismo sucede con la altura  $z_{rec} = 1.5 [Mm]$  con colisiones (franja naranja) y sin colisiones (franja azul). Estas son medidas sobre el borde de la hoja de corriente, y el tiempo de medición está dado según su crecimiento.

De estos resultados podemos destacar el hecho que el proceso de reconexión se ve fuertemente afectado por la altura en la cual se manifiesta, siendo las magnitudes alcanzadas por la corona solar son mayores que las alcanzadas en la cromosfera solar. Adicionalmente, el tiempo en que se da el proceso de reconexión de líneas de campo es considerablemente más corto en la corona solar. Es así como la reconexión llega a un máximo de tasas de reconexión mucho antes en dicha región que en la cromosfera. Ahora, analizando el cambio de la dinámica cuando se introducen las colisiones al sistema, se puede observar que su impacto se manifiesta principalmente en la cromosfera. Esto debido a que, en la altura  $z_{rec} = 3 [Mm]$ , para los casos sin colisiones y con colisiones, presentan las mismas escalas de magnitud y tiempo en las tasas de reconexión. Por otra parte, en la altura  $z_{rec} = 1.5 [Mm]$ , el hecho de introducir colisiones a la dinámica implica una menor amplitud en las tasas de reconexión así como un mayor tiempo para llegar a un máximo.

Respecto a la energía liberada durante el proceso de fulguración, se pone especial atención en su transformación en energía cinética, térmica y electromagnética (Birn et al., 2009). Para ello, se calculan los flujos de energía cinética, de entalpía y el vector de Poynting, registrados en función de la altura de reconexión, para los casos de plasma en presencia y ausencia de colisiones. En primera instancia, se procede a calcular el flujo de energía cinética. Esta se obtiene al proyectar la energía cinética del fluido a través de su campo de velocidades, resultando en la expresión

$$\mathbf{k}_\alpha = \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha u_\alpha^2 \right) \mathbf{u}_\alpha. \quad (37)$$

Esto permite conocer la conversión de energía cinética para las especies cargadas y neutrales. Por otro lado, el flujo de entalpía se define como

$$\mathbf{h}_\alpha = (\rho_\alpha e_\alpha + P_\alpha) \mathbf{u}_\alpha. \quad (38)$$

En esta expresión, el primer término refleja el flujo de energía interna, mientras que el segundo término se asocia a la contribución del trabajo realizado por la compresión del sistema. Finalmente, para definir al vector de Poynting, se tiene la expresión

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (39)$$

Es a través de este que se describe como la energía de la especie cargada se ve reflejada en radiación electromagnéticas. Dados estos flujos de energía, se desea conocer la contribución total en la transferencia de energía de cada una de las componentes de los flujos en volumen determinado. Para ello, se integran cada componente en un volumen de la malla espacial, dando lugar a

$$\mathbf{K}_\alpha = \int_{V_0} \mathbf{k}_\alpha dV, \quad \mathbf{H}_\alpha = \int_{V_0} \mathbf{h}_\alpha dV, \quad \mathbf{S}_\alpha = \int_{V_0} \mathbf{s}_\alpha dV.$$

El término  $V_0$  representa el volumen del dominio donde se desea conocer la contribución de los flujos. Para realizar un análisis comparativo, en todos los casos se asigna un volumen comprendido

por  $2.0 \times 0.02 \times 1.2 [Mm^3]$ , cuya base está situada  $0.2 [Mm]$  por debajo del punto de reconexión y se centra en la mitad del eje  $x$ . A continuación, se procede a utilizar los flujos anteriormente calculados para determinar la energía liberada durante la evolución del sistema, así como la forma en que se manifiesta. Esto se logra a partir de la integral temporal de los flujos, dada de la forma

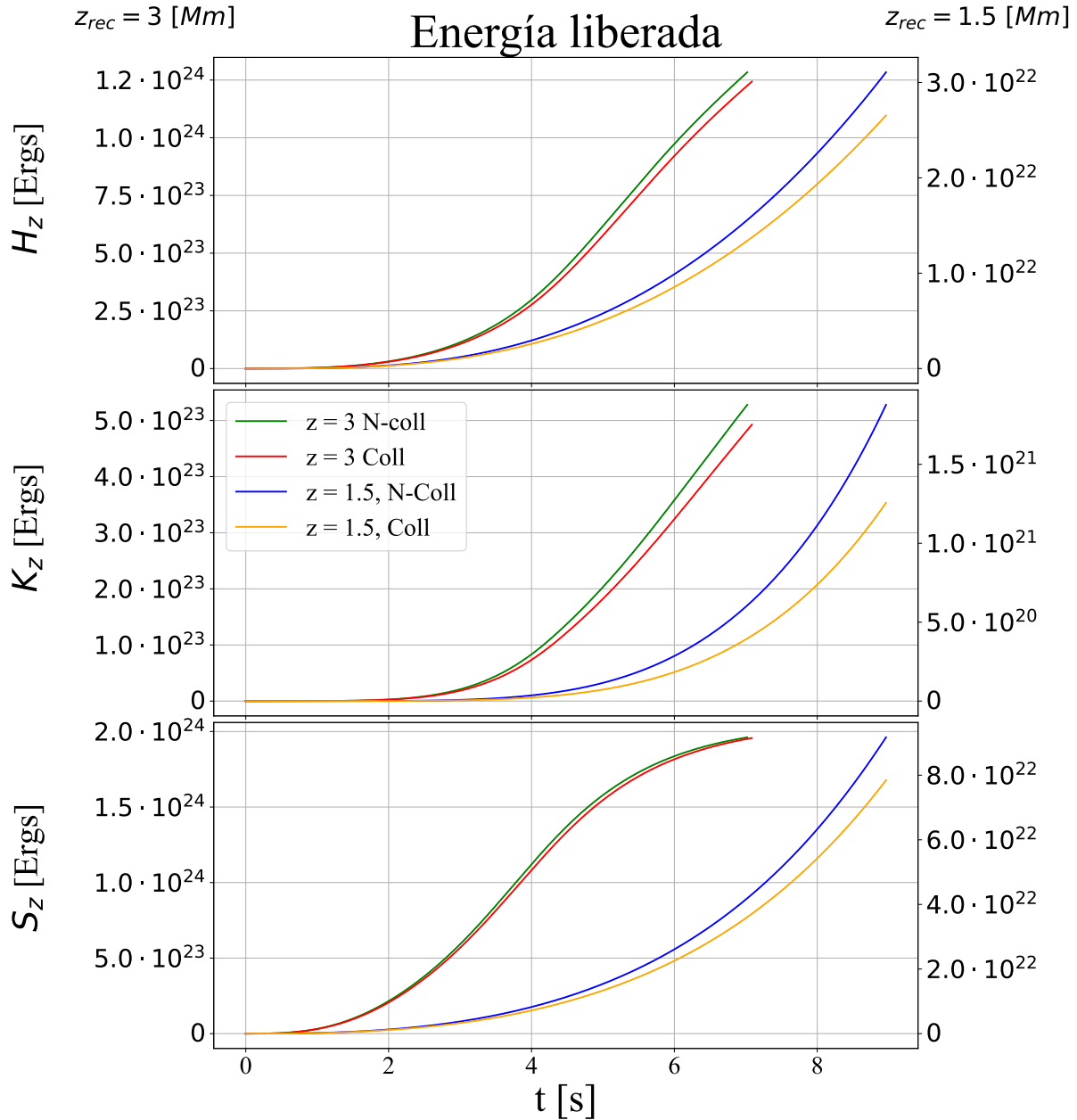
$$\Delta E_F = \int \frac{F}{l_a} dt. \quad (40)$$

En esta expresión,  $F$  corresponde a la componente del flujo que se desea conocer, así como  $l_a$  representa la longitud característica del sistema. Los resultados de estas mediciones se pueden apreciar en la gráfica 11, la cual está constituida de tres cuadros organizados en columna, donde se registran el flujo de entalpía, de la energía cinética y el vector de Poynting, puestos en forma descendente. Cada una de estas gráficas dispone de 4 registros, donde se muestran las escalas, para el caso coronal, del fenómeno sin colisiones (verde) y con colisiones (rojo), en el eje izquierdo de a gráfica. Para el caso cromosférico, las escalas de los datos sin colisiones (azul) y con colisiones (naranja) son registrados en el eje derecho. Esta distinción de ejes se realiza con el fin de mostrar simultáneamente los resultados de ambas alturas sin perder detalles por el ajuste de las gráficas. El esquema utilizado en la medición del flujo de entalpía se mantendrá a la hora de realizar las mediciones del flujo de energía cinética y del vector de Poynting.

Nuevamente podemos observar que las escalas obtenidas en la región coronal son mucho mayores que las obtenidas en la cromosfera. Se puede resaltar que la energía liberada en la reconexión

**Figura 11**

Mediciones de la energía liberada durante el proceso de reconexión



**Nota.** En las gráficas están ordenadas de forma descendente la entalpía, la energía cinética y el vector de Poynting, respectivamente, producto de la evolución del sistema. En cada una de estas, se muestran las mediciones en la altura  $z_{rec} = 3$  [Mm], sin colisiones (franja verde) y con colisiones (franja roja), y las mediciones para la altura  $z_{rec} = 1.5$  [Mm], sin colisiones (franja azul) y con colisiones (franja naranja).

dada en la corona solar, llega a un valor máximo al verse frenado su aumento, especialmente en la radiación electromagnética. Sin embargo, la energía liberada en la cromosfera no exhibe este comportamiento, a pesar de haber llegado a un máximo de la tasa de reconexión. De hecho, pareciese que se seguirá liberando energía del proceso de reconexión, por lo cual se tienen que tener en cuenta intervalos más longevos para su observación. Ahora, respecto al efecto de las colisiones, se vuelve a apreciar que en la región de la corona, su consideración no genera gran impacto en la dinámica del sistema, alcanzándose valores de energía similares, en las mismas escalas de tiempo. Por otro lado, cuando se tiene en consideración las colisiones en la cromosfera, la energía liberada disminuye con respecto al caso sin colisiones, denotando su comportamiento una tendencia de separación de las líneas de energía que aumenta cada vez más.

Con base en todo lo anteriormente mencionado, se tienen razones suficientes para no enfocarnos en la región de la corona baja, puesto que, como se evidenció, los efectos de las colisiones no afecta considerablemente a la dinámica de la reconexión. Adicionalmente, Dicho todo lo anterior, nos enfocaremos especialmente en el comportamiento de la región cromosférica para el proceso de la reconexión magnética, verificando si el entorno puede propiciar la manifestación de las fulguraciones bajo el efecto de las colisiones elásticas e inelásticas para mayores intervalos de tiempo.

**3.1.1. Reconexión magnética en un plasma cromosférico bajo el efecto de colisiones elásticas e inelásticas..** Ahora en más, el enfoque de este documento es el estudio exclusivo de la cromosfera solar, priorizando el determinar el efecto de las colisiones elásticas e inelásticas sobre el sistema, y si estas condiciones son propicias para la liberación de energía y la formulación de estructuras características de una fulguración solar.

Dada la cromosfera solar, se habla de una región donde las densidades de los neutrales empiezan a ser significativas, y donde las frecuencias de ionización y recombinación juegan un papel importante. Es a través de estas frecuencias que se establece el perfil inicial para ambas especies. En primera instancia, los perfiles de presión y densidad de la especie cargada se siguen calculando por medio de la condición de equilibrio hidrostático y la ecuación de estado, respectivamente, manteniendo la condición de que la presión de referencia corresponde a  $P_{i0} = 1.29 [Pa]$ . Sin embargo, para el cálculo del perfil de densidad de la especie neutral se satisface la condición

$$\rho_n = \rho_i \frac{\Gamma^{rec}}{\Gamma^{ion}}. \quad (41)$$

Esta expresión, correspondiente a la proporción de los cargados respecto a los neutrales, es aquella que garantiza el término de colisiones asociado con la transferencia de materia  $S_\alpha = 0$ . Es así como se reduce un grado de libertad, al ser  $\Gamma^{rec}$  y  $\Gamma^{ion}$  frecuencias establecidas por modelos empíricos, sin variables libres para ajuste. Respecto al perfil de presión de los neutrales, este es calculado por medio de la ecuación de estado. Finalmente, dado que se considera que se parte del equilibrio,

se debe cumplir que los términos de colisiones asociados con la transferencia de energía deben anularse en la condición inicial de la evolución. Si se toma la forma explícita de la ecuación 12, y se considera la condición 41, se llega a la expresión

$$H_n = -H_i = \frac{\alpha}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (T_i - T_n) + \frac{\rho_n \Gamma^{ion}}{(\gamma-1)} \frac{k_B}{\bar{m}} (T_i - T_n) = 0. \quad (42)$$

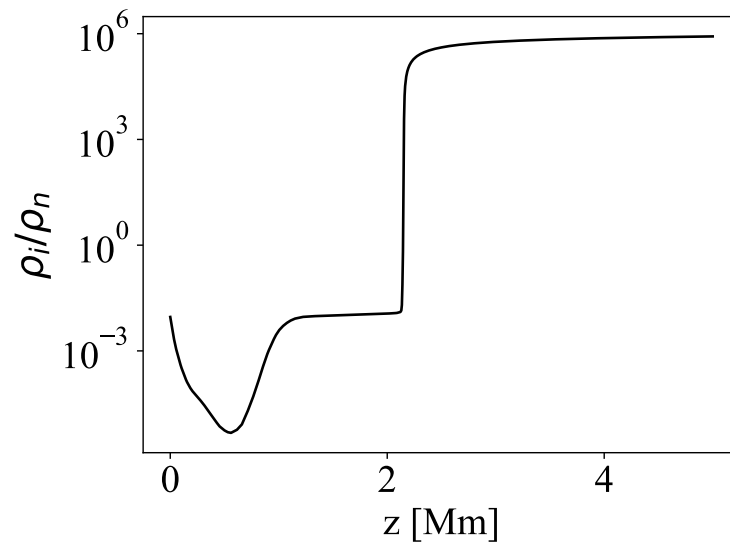
Como en casos anteriores, esta expresión solo se cumple si se tiene que  $T_n = T_i$ , por lo cual, en la condición inicial, los perfiles de temperatura de las especies cargada y neutral son idénticos. Es necesario mencionar que, dado que la presión de los neutrales puede ser calculada por medio de la ecuación de estado y por medio de la condición de equilibrio, el sistema se encuentra sobre determinado. En este caso, se opta por la ecuación de estado, dado que es por medio de esta que se calculan las frecuencias de ionización y recombinación. Por ende, no se satisface la condición de equilibrio, por lo cual el perfil de velocidad de los neutrales se aceleraría aun en ausencia del proceso de reconexión. Este problema puede ser resuelto al considerar escoger otros perfiles de colisiones o al introducir efectos como la presión de radiación al sistema, aunque esto no es el tema en el que se concentra este documento.

Bajo estas nuevas consideraciones, es necesario observar el comportamiento de las frecuencias de colisiones asociadas al sistema. En primera instancia, se observa el grado de ionización que presenta el fluido. La figura 12 exhibe el grado de ionización, por medio del cociente entre la densidad de partículas cargadas con respecto a las partículas neutras, lo cual a su vez representa la relación entre

las frecuencias de ionización sobre las de recombinación. Esta relación se muestra en función de la altura, comprendida desde la base de la atmósfera hasta una altura de 5 [Mm].

### Figura 12

*Grado de ionización del plasma en la atmósfera solar*



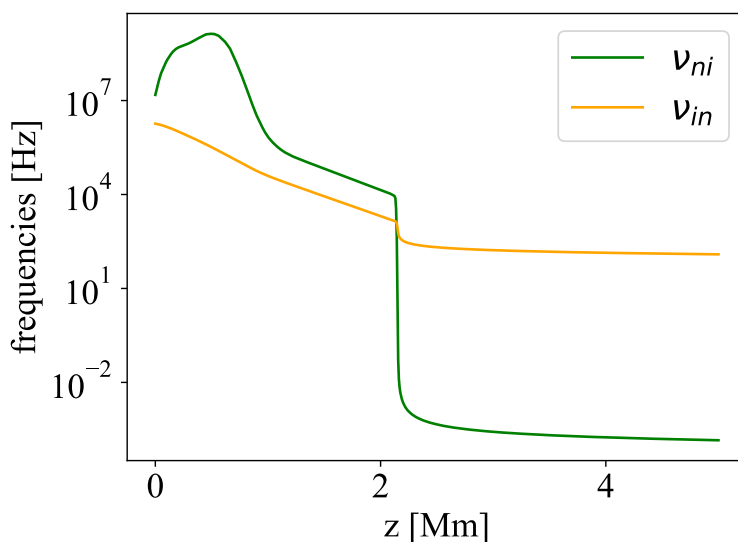
**Nota.** En este se denota la proporción de las especies cargadas y neutras en función de la altura, bajo el modelo de equilibrio hidrostático para las cargadas, y en equilibrio químico para las neutras.

Es posible apreciar que, aun en este modelo, la frecuencias de ionización en la corona solar es considerablemente mayor que las frecuencias de recombinación. Esto da a lugar que la proporción de cargados sea varios ordenes de magnitud mayor que la de los neutrales, permitiendo considerar al fluido como totalmente ionizado en la corona. Por otro lado, respecto a las colisiones elásticas, en la figura 14 se aprecian las frecuencias de colisiones elásticas tomando en consideración el actual

grado de ionización. Nuevamente, se muestra la interacción de la especie neutra sobre la cargada (verde) y la interacción de las cargadas sobre las neutrales (naranja), ambas en función de la altura, comprendida desde la base hasta una altura de 5 [Mm].

### Figura 13

*Representación de las frecuencias de colisiones elásticas bajo el equilibrio de ionización y recombinación*



**Nota.** Para ello, se denotan las frecuencias de colisiones elásticas en función de la altura atmosférica, bajo el modelo de equilibrio hidrostático para las cargadas, y en equilibrio químico para las neutrales. En esta se puede apreciar el efecto de las colisiones de las partículas neutrales sobre las cargadas (línea verde), así como el efecto de las cargadas sobre las neutrales (línea naranja).

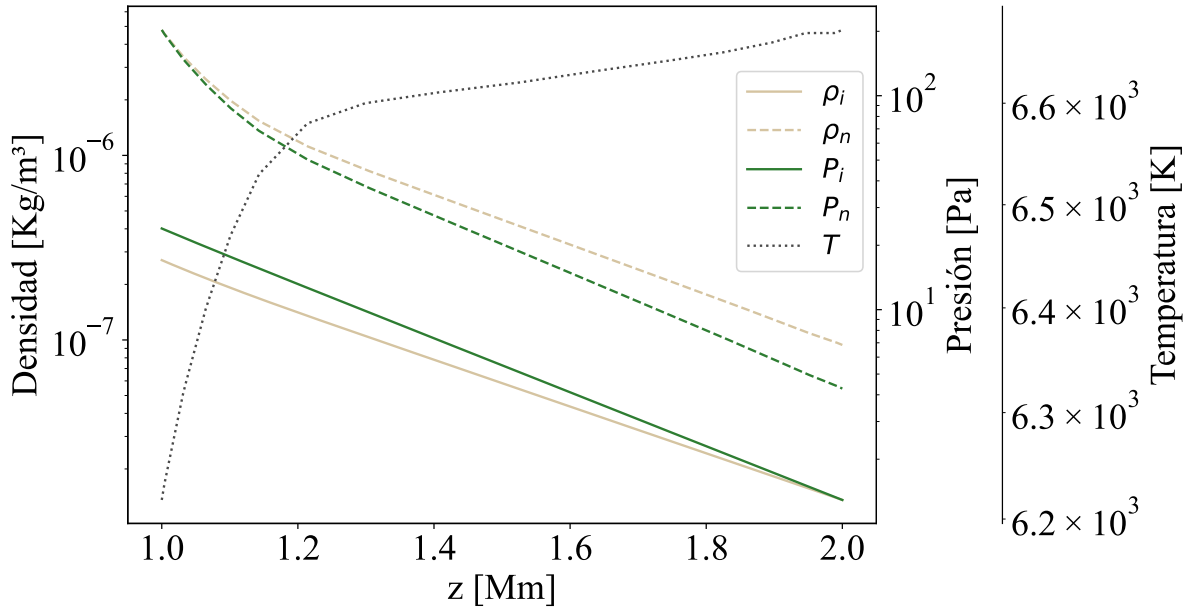
Aquí se puede apreciar que, no solo la afectación de las colisiones de los cargados sobre los neutrales es mayor que la de los neutrales sobre los cargados, si no que, a diferencia del modelo en equilibrio hidrostático para las especies cargadas y neutrales, dado al actual perfil de grado de ionización, la

cantidad de partículas neutrales es mucho menor. Esto produce que su efecto por colisiones sobre las cargadas sea hasta 6 ordenes de magnitud por debajo del efecto de las cargadas sobre los neutrales. En esta sección se desea trabajar principalmente con la región cromosférica, por lo cual se establecen los modelos de densidad, presión y temperatura, en dicha región. Para ello, en la figura ?? se muestran las variables de temperatura, presión y densidad, desde la altura 1 [Mm] hasta 2 [Mm]. Para los valores de temperatura, nuevamente se recurre al modelo de Avrett, representado en el eje flotante. Los perfiles de densidad y presión de la especie cargada (línea sólida), son determinados a través de la condición de equilibrio hidrostático, con un valor de presión de referencia  $P_{i0} = 1.29 [Pa]$ . A su vez, los perfiles de los neutrales (línea discontinua) son obtenidos bajo las consideraciones del grado de ionización y del uso de la ecuación de estado. Estos perfiles de presión (verde) son representados en el eje derecho en escala logarítmica, mientras los perfiles de densidad (beige) representados en la gráfica por medio del eje izquierdo.

Para ello, se trabaja con una malla la cual está contenida en el volumen comprendido en  $[-0.5:0.5]$  [Mm] en  $x$ , aproximadamente  $[-0.00195:0.00195]$  [Mm] en  $y$  y de  $[1:2]$  [Mm] en el eje  $z$ . El número de punto en cada intervalo espacial de la malla están dados por  $N_x = 512$ ,  $N_y = 4$  y  $N_z = 512$ . La razón por la cual se escogen estos valores particulares parte del hecho de como está constituidos las divisiones de los bloques computacionales, siendo el valor 512 un valor particular en que se divide el almacenamiento de bytes. Es así como se obtienen las variaciones de cada intervalo, definidas como  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.953 * 10^{-3}$  [Mm], exhibiendo una resolución mayor a la utilizada en los resultados mostrados en la anterior sección.

**Figura 14**

Perfil solar bajo el modelo de equilibrio hidrostático para las cargadas, y en equilibrio químico para las neutrales

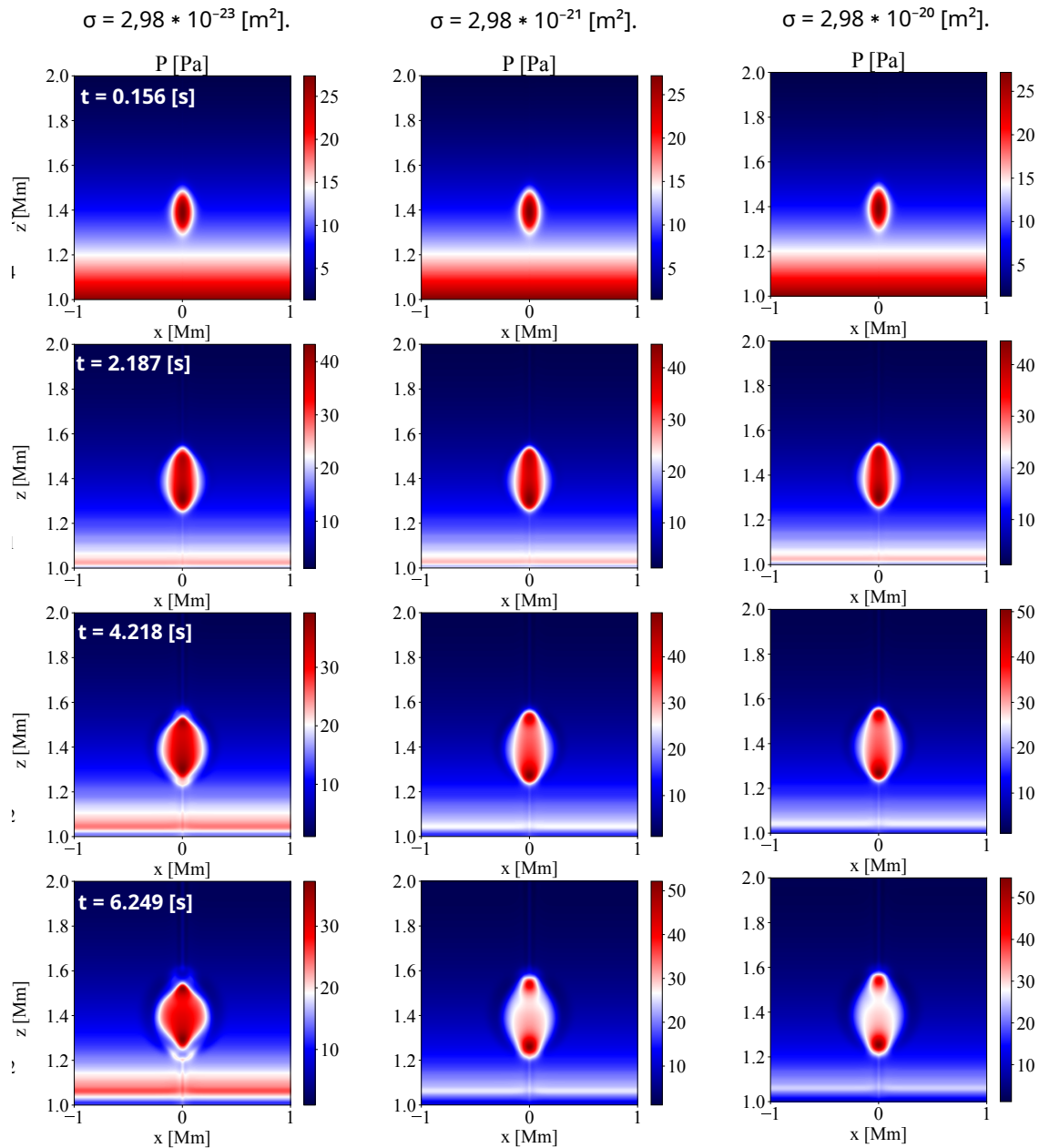


**Nota.** Representación de los perfiles solares bajo el modelo de equilibrio hidrostático para las cargadas, y en equilibrio químico para las neutrales, desde la altura 1 [Mm] hasta 2 [Mm]. En este se muestra el perfil de temperatura (puntos negros), con sus respectivos valores en la barra flotante de la derecha, el cual es obtenido por medio de los modelos observacionales de Avrett. Así mismo, se muestran los perfiles interpolados de la especie neutral (línea discontinua), y la especie cargada (línea sólida), para los perfiles de densidad (color beige), y los perfiles de presión (color verde)..

En un inicio, se desea analizar morfológicamente el cambio de la evolución del fenómeno de reconexión, a medida que se varia la sección eficaz de las colisiones elásticas. Para ello, en la gráfica 15 se puede observar la evolución de la presión para los casos  $\sigma = 2.98 * 10^{-23} [m^2]$ ,  $\sigma = 2.98 * 10^{-21} [m^2]$  y  $\sigma = 2.98 * 10^{-20} [m^2]$ , ordenados en columnas, de izquierda a de-

recha, respectivamente. Los paneles están dispuestos de tal manera que, cada fila representa un mismo instante de tiempo durante la evolución. En esta ocasión, se observó el fenómeno a través de los tiempos  $t = 0.156$  [s],  $t = 2.187$  [s],  $t = 4.218$  [s] y  $t = 6.249$  [s], organizados de forma descendente. Nuevamente, cabe resaltar que estos momentos son escogidos con la finalidad de observar la evolución hasta el punto en que la tasa de reconexión magnética llega a un punto máximo.

Analizando los resultados obtenidos en la figura 15, lo primero que cabe resaltar es que, a medida que incrementa el efecto de los términos de colisiones elásticas, es notable un aumento considerable de la presión. Es así como entre el caso de  $\sigma = 2.98 * 10^{-23}$  [ $m^2$ ] y  $\sigma = 2.98 * 10^{-20}$  [ $m^2$ ] hubo un incremento superior al 66% de la presión máxima registrada. Así mismo, es posible observar que a medida aumentan la sección eficaz también se produce un cambio notable en la formación de estructuras en el sistema. Para el caso  $\sigma = 2.98 * 10^{-23}$  [ $m^2$ ] se presenta una región con un aumento en la presión con respecto a sus alrededores, pero sin ninguna estructura bien definida. Cuando el sistema pasa a tener  $\sigma = 2.98 * 10^{-21}$  [ $m^2$ ], se puede apreciar la formación de una estructura con la presencia de dos regiones de alta presión formándose. Finalmente, en el caso  $\sigma = 2.98 * 10^{-20}$  [ $m^2$ ], se aprecia mejor como emerge de la reconexión una región que es semejante a lo que en la literatura correspondería a la formación de un plasmoide (Shibata & Magara, 2011), así como la región inferior correspondería al material que es eyectado contra las zonas inferiores de la atmósfera solar. Este resultado muestra que, como las presiones de los fluidos se ven acopladas, la presión neutral tiende a confinar en mayor medida el fenómeno, y forzándolo a llegar a mayores escalas para su propagación.

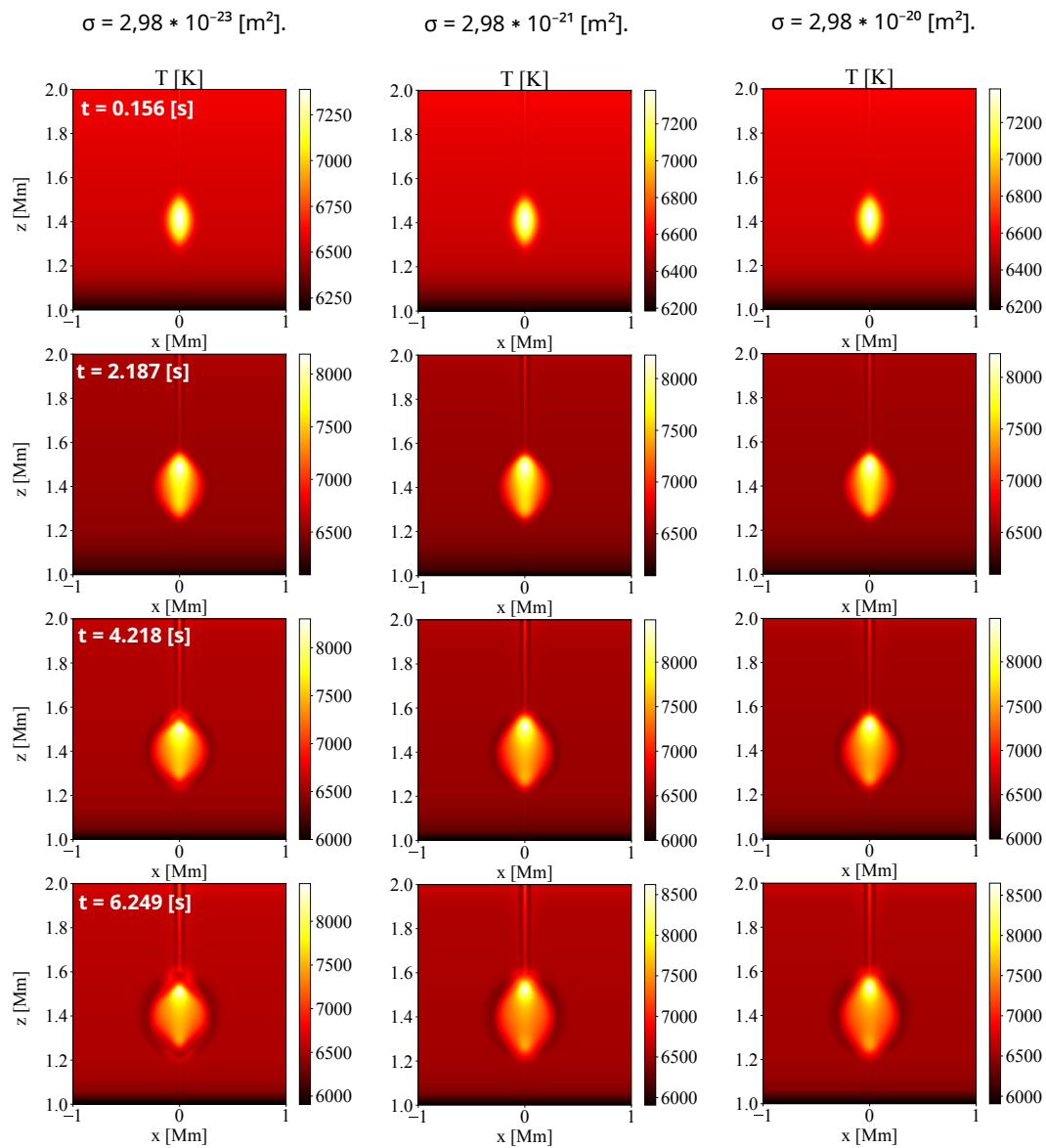
**Figura 15***Morfología de la presión de la especie cargada*

**Nota.** Aquí se compara evolución de la morfológica de la presión para los casos  $\sigma = 2.98 \times 10^{-23} \text{ [m}^2\text.]$ ,  $\sigma = 2.98 \times 10^{-21} \text{ [m}^2\text.]$  y  $\sigma = 2.98 \times 10^{-20} \text{ [m}^2\text.]$ , organizados en columnas, de izquierda a derecha, respectivamente. Se muestra la evolución en los instantes  $t = 0.156 \text{ [s]}$ ,  $t = 2.187 \text{ [s]}$ ,  $t = 4.218 \text{ [s]}$  y  $t = 6.249 \text{ [s]}$ , agrupados en filas y organizados en forma descendente, respectivamente.

A continuación, se observa el cambio en la evolución de la temperatura para cada uno de los 3 casos. Para ello, la gráfica 16 muestran los perfiles de temperatura para los casos  $\sigma = 2.98 * 10^{-23} [m^2]$ ,  $\sigma = 2.98 * 10^{-21} [m^2]$  y  $\sigma = 2.98 * 10^{-20} [m^2]$ , bajo el mismo esquema de organización en columnas, mostrado en el análisis de la presión. Nuevamente, los paneles son agrupados por filas para representar los instantes de tiempo  $t = 0.156 [s]$ ,  $t = 2.187 [s]$ ,  $t = 4.218 [s]$  y  $t = 6.249 [s]$ , ordenados en forma descendente, respectivamente.

De los perfiles de temperatura, al igual como el caso de la presión, se observa que el aumento de las colisiones elásticas produce un mayor calentamiento y cambio en la morfología. Se aprecia que, a partir del caso  $\sigma = 2.98 * 10^{-23} [m^2]$  y en contraste con  $\sigma = 2.98 * 10^{-20} [m^2]$ , se exhibe un aumento de la temperatura en el centro de la reconexión. Así mismo, a medida que aumentan las colisiones elásticas, se repite el comportamiento de la formación de regiones con forma de plasmoides, en las cuales el aumento de la temperatura es más significativo. Es así como el sistema, el aumento de las colisiones elásticas implica un incremento en la fricción entre las especies, conllevando a un calentamiento más eficiente del material, y una liberación más significativa de energía térmica.

Para tener una descripción completa del fenómeno, es necesario retomar el estudio cuantitativo. Para ello, se procede a calcular las tasas de reconexión producto de cada modelo. En la figura 17 se registran las de reconexión para los 3 casos. Estas tasas son registradas desde el inicio de la reconexión hasta el instante cerca de  $t = 8 [s]$ , momento en el cual las tasas de reconexión empiezan a decaer. Para ello, se realizan las mediciones de las velocidades características de Alfvén y de

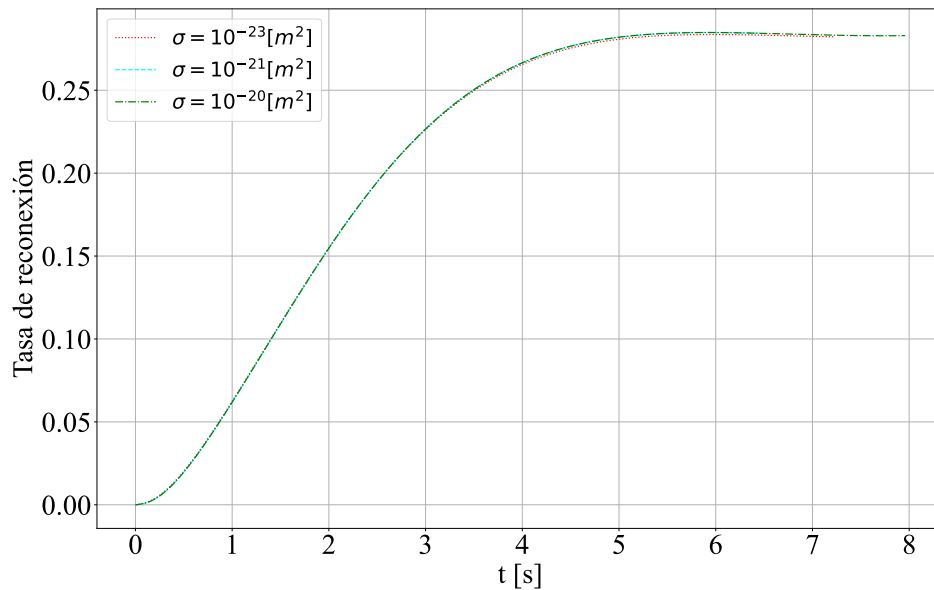
**Figura 16***Morfología de la temperatura de la especie cargada*

**Nota.** Aquí se compara la evolución morfológica de la temperatura para los casos  $\sigma = 2.98 * 10^{-23} [m^2]$ ,  $\sigma = 2.98 * 10^{-21} [m^2]$  y  $\sigma = 2.98 * 10^{-20} [m^2]$ , organizados en columnas, de izquierda a derecha, respectivamente. Se muestra la evolución en los instantes  $t = 0.156 [s]$ ,  $t = 2.187 [s]$ ,  $t = 4.218 [s]$  y  $t = 6.249 [s]$ , agrupados en filas y organizados en forma descendente, respectivamente.

ingreso del fluido sobre el punto  $p = (x, y, z) = (0.0\bar{3}; 0; z_{rec})$ , correspondiendo al borde de la hoja de corriente.

### Figura 17

Resultados de la medición de las tasas de reconexión durante el proceso de la reconexión magnética



**Nota.** Se aprecian las tasas obtenidas para el caso  $\sigma = 2.98 \times 10^{-23} [m^2]$  con colisiones (franja naranja), para el caso  $\sigma = 2.98 \times 10^{-21} [m^2]$  (franja cian) y para  $\sigma = 2.98 \times 10^{-20} [m^2]$  (franja verde).

Lo primero a observar es el hecho del aumento de las tasas de reconexión en comparación con el modelo de la sección analizada previamente. Esto debido al cambio del tamaño de la hoja de corriente, así como de las dimensiones en las que se evoluciona el entorno. Por otro lado, en esta gráfica salta a la vista un resultado interesante, el cual consiste en el hecho de que los resultados para las 3 situaciones, a pesar de variar el parámetro del colisiones elásticas, parecen exhibir el mismo

comportamiento. Como se apreció en el análisis de la sección anterior, el introducir colisiones efectivamente produce un cambio en el tiempo y la magnitud de las tasas de reconexión. Sin embargo, el aumento de las frecuencias de colisiones parece no producir el mayor cambio en la dinámica de las tasas de reconexión.

Ahora, dado que el aumento de la frecuencia de colisiones elásticas no mostró gran impacto en las tasas de reconexión, se tiene especial interés en observar si se repite este mismo comportamiento respecto a la energía liberada en el sistema. En este caso, al igual que en la sección anterior, se realiza la medición de los flujos de energía cinética, de entalpía y el vector de Poynting hasta el instante donde se registra el punto máximo en las tasas de reconexión. Para esta configuración espacial, los cálculos se realizan dentro de un volumen delimitado del dominio, que en este caso corresponde un volumen de  $0.4 \times 0.0078 \times 0.4 [Mm^3]$ , cuya base está situada  $1.4 [Mm]$  por debajo del punto de reconexión y se centra en la mitad del eje  $x$ . Esto aplica para cada uno de los casos, con el fin de realizar mediciones comparables entre fenómenos. Los resultados de estas mediciones se pueden apreciar en la gráfica 18, donde se puede apreciar el flujo de entalpía, de energía cinética y el vector de Poynting, organizadas en forma descendente. Para dichas gráficas, se tienen en consideración los 3 casos presentados, siendo identificados a través de un código de color para determinar la sección eficaz utilizada, mostrando los casos  $\sigma = 2.98 * 10^{-23} [m^2]$  (línea verde),  $\sigma = 2.98 * 10^{-21} [m^2]$  (línea roja) y  $\sigma = 2.98 * 10^{-20} [m^2]$  (línea azul). Así mismo, para el flujo de entalpía y de energía cinética, se hace una distinción por si se trata del flujo de energía de la especie cargada (línea continua), o de la especie neutral (línea discontinua). Para el vector de Poynting, al estar asociado

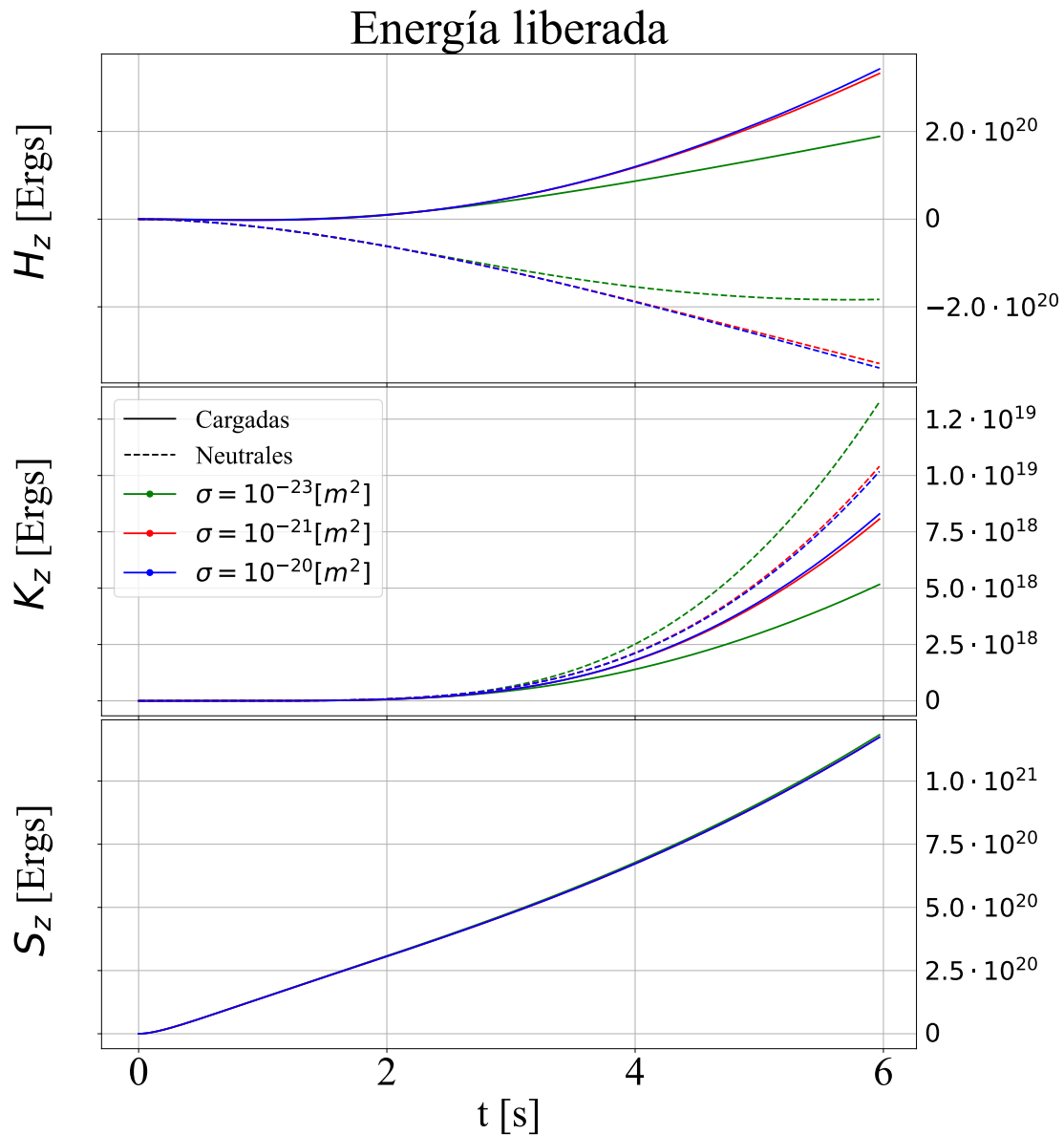
directamente con los campos electromagnéticos, no tiene una distinción entre especies.

Lo primero a remarcar es el hecho de que las curvas representativas del vector de Poynting no presentan variaciones significativas entre modelos. Esto, coherente al resultado de las tasas de reconexión, plantea el hecho de que los términos de colisiones, luego de darse el acople entre especies, ven reducido su impacto sobre las variables electromagnéticas. Esto puede ser explicado si se considera que, dado que la evolución del campo magnético está directamente ligado con el campo de velocidades de la especie cargada, cuando se da la interacción entre especies, este último se ve fuertemente afectado. Sin embargo, luego de que se da el acople, el aumento de las frecuencias de colisión no representa un cambio significativo en la dinámica de las velocidades, disminuyendo así su impacto sobre las líneas de campo.

Por otro lado, cuando se observa el flujo de entalpía y de energía cinética, la situación cambia. En primera instancia se analiza el flujo de entalpía. Se aprecia que, a medida que incrementa la frecuencias de colisiones elásticas, el flujo de entalpía de la especie cargada incrementa, mientras que el de la neutral disminuye. Esto parece indicar que, a medida que el acople es más fuerte, la especie neutral tiende a ceder cada vez más una mayor cantidad de energía a la especie cargada, lo cual se ve reflejado en el aumento de la presión y de la temperatura de esta última. Esto ocurre dado que las colisiones entre especies generan que la especie neutral genere un trabajo de compresión sobre la especie cargada, así como la consideración de efectos de fricción entre estas mismas. Por otro lado, analizando el flujo de energía cinética, a medida que aumenta la

**Figura 18**

Mediciones de la energía liberada durante el proceso de reconexión en la cromósfera



**Nota.** En las gráficas están ordenadas de forma descendente la entalpía, la energía cinética y el vector de Poynting, respectivamente, producto de la evolución del sistema. Para las 3 gráficas, se utiliza un código de color para determinar la sección eficaz utilizada, para los casos  $\sigma = 2.98 \cdot 10^{-23} [m^2]$  (línea verde),  $\sigma = 2.98 \cdot 10^{-21} [m^2]$  (línea roja) y  $\sigma = 2.98 \cdot 10^{-20} [m^2]$  (línea azul). Así mismo, para la entalpía y la energía cinética, el estilo de línea define si se trata de la energía de la especie cargada (línea continua), o de la especie neutral (línea discontinua).

frecuencia de colisión, el flujo de la especie neutral así como el de la especie cargada tienden a acercarse a una curva específica. Durante este proceso, se puede apreciar como el flujo de la especie neutral empieza a disminuir, mientras que el de la especie cargada aumenta, dando a entender que la primera le trasfiere su energía a la segunda. Sin embargo, a medida que el acople es mayor, el cambio de las curvas de flujo de energía es menor, denotando que se alcanza un equilibrio. Esto se puede entender al considerar que, parte de la transferencia de energía cinética está dada por el gradiente de velocidad, siendo que cuando las velocidades de la especie cargada neutral y la especie cargada sean semejantes, se mantendrá el comportamiento de su flujo de energía cinética.

Luego de haber analizado el efecto de las colisiones sobre la energía liberada, es necesario hablar de las magnitudes alcanzadas por estas mismas. Como se ha mencionado con anterioridad, las magnitudes para la liberación de energía de una fulguración solar están dadas entre escalas de  $10^{28} - 10^{32}$  ergios. Por parte de los resultados obtenidos en la cromosfera, se puede observar que se obtuvieron escalas de liberación de energía del orden de  $10^{18} - 10^{21}$ , siendo estos valores varios ordenes magnitud inferiores a los valores estimados por lo menos a la energía registrada en las micro fulguraciones, con escalas comprendidas entre los  $10^{26}$  y  $10^{29}$  ergios (Shibata y Magara, 2011, Duncan et al., 2021).

Sin embargo, aunque parezca que estos resultados señalan que la cromosfera no es apta para alcanzar las energías necesarias para una fulguración, se debe tener en consideración dos factores. El primero consiste en el tamaño de la hoja de Harris, la cual, para el análisis del proceso de reconexión, fue considerada de escalas menores a las registradas en la manifestación de fulguraciones solares. Es

así como, en los modelos estándar para fulguraciones solares, se tienen escalas características de 5 [Mm] hasta 1000 [Mm], y dado estima que la energía magnética almacenada escala de manera proporcional a  $E_{mag} \propto L^3$  (Shibata & Magara, 2011), en el escalado de este modelo se esperaría un incremento considerable de la energía liberada en la reconexión para escalas acordes a las mediciones. El segundo factor a considerar es el hecho de que la energía liberada sigue en proceso de liberación. A pesar de llegar de llegar a un máximo en sus tasas de reconexión, no se puede decir lo mismo de sus vectores de flujo de energía, cuya tendencia exhibe que se mantienen en crecimiento. Por este motivo, se puede estimar que la energía liberada, luego de cierto tiempo, pueda encontrarse dentro del rango anteriormente mencionado de una fulguración.

#### 4. Conclusiones

El presente documento tuvo como fin el determinar la posibilidad de la manifestación de una fulguración solar de carácter cromosférico, teniendo en consideración el efecto de las colisiones elásticas e inelásticas entre las especies cargadas y neutras. Para ello, se realizaron simulaciones en las que se desarrolla el proceso de la reconexión magnética en la cromósfera y en la coronal solar, a medida que se variaban los parámetros de acople entre las especies. Gracias a esto, fue posible realizar un análisis energético en el cual se pudo apreciar el efecto de las colisiones en la eficiencia de la liberación de energía, así observar la viabilidad de una fulguración cromosférica, en términos energéticos.

Para este fin, se empleó el código MAGNUS, un código magnetohidrodinámico bajo programación en paralelo, que considera resistividad óhmica y transferencia de calor. Este fue adaptado para simular la interacción de dos fluidos mediante términos de colisión. Para ello, el esquema Implícito-Explícito (IMEX) fue implementado, dado que de esta forma es posible abordar las altas frecuencias de colisión, las cuales podrían generar inestabilidades numéricas. Este enfoque permitió un cálculo preciso de las variables conservativas, asegurando la estabilidad numérica y la fiabilidad de los resultados, lo que constituye una contribución fundamental en el estudio de las fulguraciones en la sección cromosférica.

Inicialmente, en la sección 3.1 se concluye que los términos de colisiones no juegan un papel

determinante en la evolución de la fulguración en la corona solar como sí lo hacen en la cromosfera. Esto se observa con base en las simulaciones en esta región, en las cuales se puede apreciar que la variación de las tasas de reconexión al introducir las colisiones elásticas, así como el cambio en la liberación de la energía cinética, térmica y por radiación, es poco significativa con respecto a las escalas del fenómeno. Por otra parte, al llevar a cabo el mismo procedimiento en la región de la cromosfera solar, se observa que las colisiones afectan notablemente la dinámica del sistema. En un principio, el tiempo en que se desarrolla el fenómeno se ve afectado, siendo que las colisiones tienden a aumentar el tiempo en que desarrolla el fenómeno, reflejado en la disminución en las tasas de reconexión. Además, se observa que la energía liberada llega a variar hasta en 50 % al introducir las colisiones.

Así mismo, se puede observar que la energía liberada durante el proceso de reconexión en la cromosfera alcanza ordenes de  $10^{22}$  ergios, estando dos ordenes de magnitud por debajo de la energía liberada en la corona solar, la cual exhibió escalas de hasta  $10^{24}$  ergios. Sin embargo, dado que esto es calculado en el volumen de integración  $2.0 \times 0.02 \times 1.2 [Mm^3]$ , estos valores de energía no necesariamente son bajos, puesto que al momento realizarse esta medición en las escalas características de una fulguración, se espera un incremento considerable de la energía liberada. A su vez, para el caso de la cromosfera, la liberación de energía no ha concluido, lo cual se puede apreciar en la pendiente de su comportamiento. De esta forma, si se realizasen simulaciones más longevas, se esperarían mayores escalas de energía liberada. De esto se concluye que la energía liberada en la cromosfera puede llegar a alcanzar las escalas esperadas para una fulguración solar.

Acto seguido, en la sección 3.1.1 se observa el comportamiento de la reconexión exclusivamente en la cromosfera solar. Para ello, se realizaron mediciones de la energía liberada en el volumen  $0.4 \times 0.0078 \times 0.4 [Mm^3]$ , obteniendo así escalas de energía de ordenes de  $10^{19}$  y  $10^{20}$  ergios. Para esta parte, se tuvieron en consideración los procesos de ionización y recombinación en todo momento de la evolución. De los resultados de esta sección se obtuvo que, en los primeros momentos de la evolución, dadas las escalas de velocidad que manifiesta la reconexión, el acople dado por las colisiones inelásticas es lo suficientemente fuerte como para que el tiempo de la reconexión se vea disminuido. Es así como, al aumentar las colisiones elásticas, en un principio no se ven cambios significativos en las tasas de reconexión, dado a que los fluidos ya están acoplados. Así mismo, se puede apreciar la incidencia de las colisiones en la liberación de energía, de forma que, a medida que aumentó el impacto de las colisiones elásticas, la energía cinética y térmica liberada de la especie cargada aumento considerablemente, a la vez que la energía de la especie neutra disminuía. Esto da a entender que la interacción de las colisiones da lugar a un proceso más eficiente en la aceleración de partículas así como en el calentamiento térmico.

Por último, se puede concluir de todas estas simulaciones que, dado las escalas de energía obtenidas, así como de los valores de las tasas de reconexión obtenidos, la cromosfera se presenta como un lugar viable para la manifestación de las fulguraciones solares. Este proceso no necesariamente tiene que ser exclusivo de esta región, sin embargo, se ha mostrado que las energías liberadas, al presentarse en las escalas características de una fulguración, corresponderían de magnitud a las

esperadas para una fulguración y, dada la tendencia del fenómeno, se esperaría que en simulaciones más longevas se llegase a registrar escalas de energía liberada de igual magnitud que las mostradas para una fulguración de carácter coronal.

### Referencias Bibliográficas

- Avrett, E. H., & Loeser, R. (2008). Models of the Solar Chromosphere and Transition Region from SUMER and HRTS Observations: Formation of the Extreme-Ultraviolet Spectrum of Hydrogen, Carbon, and Oxygen., *175*(1), 229-276. <https://doi.org/10.1086/523671>
- Baker, D. (1998). What is space weather? *Advances in Space Research*, *22*(1), 7-16.
- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Gilbert, H., Khodachenko, M., Khomenko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler, R., Vázquez-Semadeni, E., & Zaqrashvili, T. (2018). Partially Ionized Plasmas in Astrophysics., *214*(2), Artículo 58, 58. <https://doi.org/10.1007/s11214-018-0485-6>
- Birn, J., & Priest, E. R. (2007). *Reconnection of magnetic fields : magnetohydrodynamics and collisionless theory and observations.*
- Birn, J., Fletcher, L., Hesse, M., & Neukirch, T. (2009). Energy release and transfer in solar flares: simulations of three-dimensional reconnection. *The Astrophysical Journal*, *695*(2), 1151.
- Bittencourt, J. A. (2004). *Fundamentals of Plasma Physics.*
- Braginskii, S. I. (1965). Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, *1*, 205.
- Bruzek, A. (1964). On the Association Between Loop Prominences and Flares., *140*, 746. <https://doi.org/10.1086/147969>
- Carrington, R. C. (1859). Description of a Singular Appearance seen in the Sun on September. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *20*(1), 13-15.

- Cox, D. P., & Tucker, W. H. (1969). Ionization equilibrium and radiative cooling of a low-density plasma. *Astrophysical Journal*, vol. 157, p. 1157, 157, 1157.
- Debye, P., & Hückel, E. (1923). De la theorie des electrolytes. I. abaissement du point de congelation et phenomenes associes. *Physikalische Zeitschrift*, 24(9), 185-206.
- Duncan, J., Glesener, L., Grefenstette, B., Vievering, J., Hannah, I., Smith, D. M., Krucker, S., White, S., & Hudson, H. (2021). NuSTAR Observation of Energy Release in 11 Solar Microflares. *The Astrophysical Journal*, 908. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abca3d>
- Durrán, D. R. (2010). *Numerical Methods for Fluid Dynamics*.
- Fang, T.-W., Kubaryk, A., Goldstein, D., Li, Z., Fuller-Rowell, T., Millward, G., Singer, H. J., Steenburgh, R., Westerman, S., & Babcock, E. (2022). Space weather environment during the SpaceX Starlink satellite loss in February 2022. *Space weather*, 20(11), e2022SW003193.
- Gary, G. A. (2001). Plasma Beta above a Solar Active Region: Rethinking the Paradigm., 203(1), 71-86. <https://doi.org/10.1023/A:1012722021820>
- Gary, G. A., & Alexander, D. (1999). Constructing the Coronal Magnetic Field By Correlating Parameterized Magnetic Field Lines With Observed Coronal Plasma Structures., 186, 123-139. <https://doi.org/10.1023/A:1005147921110>
- Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., & Addison, S. R. (2002). *Classical mechanics*.
- Goldston, R. J. (2020). *Introduction to plasma physics*. CRC Press.
- Guo, J., Lin, J., & Deng, Y. (2014). The dependence of flares on the magnetic classification of the source regions in solar cycles 22–23. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(3), 2208-2211.

- Harris, E. G. (1962). On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic field. *II Nuovo Cimento*, 23(1), 115-121. <https://doi.org/10.1007/BF02733547>
- Harrison, R. A. (2003). Soho observations relating to the association between flares and coronal mass ejections. *Advances in Space Research*, 32(12), 2425-2437. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2003.03.016>
- Harten, A., Lax, P. D., & Leer, B. v. (1983). On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Review*, 25(1), 35-61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
- Hirayama, T. (1974). heoretical Model of Flares and Prominences. I: Evaporating Flare Model. *Solar Physics*, 34(1), 323-338.
- Hodgson, R. (1859). Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 20(1), 15-16.
- Hudson, H. S. (2007, mayo). Chromospheric Flares. En P. Heinzel, I. Dorotovič & R. J. Rutten (Eds.), *The Physics of Chromospheric Plasmas* (p. 365, Vol. 368). <https://doi.org/10.48550/arXiv.0704.0823>
- Jørgensen, J. B., Kristensen, M. R., & Thomsen, P. G. (2018). A Family of ESDIRK Integration Methods. <https://arxiv.org/abs/1803.01613>
- Kelly, D. C. (1963). Plasma Equation of State. *American Journal of Physics*, 31(11), 827-828. <https://doi.org/10.1119/1.1969134>
- Kulsrud, R. M. (2001). Magnetic reconnection: Sweet-Parker versus Petschek. *Earth, Planets and Space*, 53, 417-422. <https://doi.org/10.1186/BF03353251>

- Leake, J. E., Lukin, V. S., Linton, M. G., & Meier, E. T. (2012). Multi-fluid Simulations of Chromospheric Magnetic Reconnection in a Weakly Ionized Reacting Plasma., *760*(2), Artículo 109, 109. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/760/2/109>
- Li, Y., Xue, J. C., Ding, M. D., Cheng, X., Su, Y., Feng, L., Hong, J., Li, H., & Gan, W. Q. (2018). Spectroscopic Observations of a Current Sheet in a Solar Flare., *853*(1), Artículo L15, L15. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aaa6c0>
- Miteva, R., Samwel, S. W., & Tkatchova, S. (2023). Space weather effects on satellites. *Astronomy*, *2*(3), 165-179.
- Moldwin, M. (2008). *An Introduction to Space Weather*.
- Murtas, G., Hillier, A., & Snow, B. (2021). Coalescence instability in chromospheric partially ionized plasmas. *Physics of Plasmas*, *28*(3), Artículo 032901, 032901. <https://doi.org/10.1063/5.0032236>
- Musset, S., Jeunon, M., & Glesener, L. (2020). Statistical Study of Hard X-Ray Emitting Electrons Associated with Flare-related Coronal Jets., *889*(2), Artículo 183, 183. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab6222>
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F. D., & González, G. A. (2017). Magnus: A New Resistive MHD Code with Heat Flow Terms., *844*(1), Artículo 57, 57. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa7a13>
- Parker, E. N. (1957). Sweet's Mechanism for Merging Magnetic Fields in Conducting Fluids., *62*(4), 509-520. <https://doi.org/10.1029/JZ062i004p00509>
- Petschek, H. E. (1964). 50 MAGNETIC FIELD ANNIHILATION. *NASA SP.*, (50), 425.

- Popescu Braileanu, B., Lukin, V. S., Khomenko, E., & de Vicente, Á. (2019). Two-fluid simulations of waves in the solar chromosphere. I. Numerical code verification., *627*, Artículo A25, A25. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834154>
- Priest, E. R. (1976). Current sheet models of solar flares., *47*(1), 41-75. <https://doi.org/10.1007/BF00152244>
- Priest, E. R., & Forbes, T. G. (2002). The magnetic nature of solar flares., *10*(4), 313-377. <https://doi.org/10.1007/s001590100013>
- Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139020732>
- Priest, E., & Forbes, T. (2000). *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications*. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511525087>
- Reva, A. A., Bogachev, S. A., Loboda, I. P., Ulyanov, A. S., & Kirichenko, A. S. (2022). Observations of Current Sheet Heating in X-Ray during a Solar Flare., *931*(2), Artículo 93, 93. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac6b3d>
- Sadykov, V. M., Vargas Dominguez, S., Kosovichev, A. G., Sharykin, I. N., Struminsky, A. B., & Zimovets, I. (2015). Properties of Chromospheric Evaporation and Plasma Dynamics of a Solar Flare from Iris., *805*(2), Artículo 167, 167. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/805/2/167>
- Schrijver, C. J. (2015). Socio-Economic Hazards and Impacts of Space Weather: The Important Range Between Mild and Extreme. *Space Weather*, *13*(9), 524-528. <https://doi.org/10.1002/2015SW001252>

- Shibata, K., & Magara, T. (2011). Solar Flares: Magnetohydrodynamic Processes. *Living Reviews in Solar Physics*, 8(1), Artículo 6, 6. <https://doi.org/10.12942/lrsp-2011-6>
- Smirnov, B. M. (2003). *Physics of atoms and ions*.
- Smith, H. J., & Smith, E. V. P. (1963). *Solar flares*.
- Sweet, P. A. (1958, enero). The Neutral Point Theory of Solar Flares. En B. Lehnert (Ed.), *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics* (p. 123, Vol. 6).
- Tomozov, V. M., Yazev, S. A., & Isaeva, E. S. (2020). Solar Gamma-Ray Flares and Activity Complexes. *Astronomy Reports*, 64(8), 722-730. <https://doi.org/10.1134/S1063772920090073>
- Unger, S. (2019). The impact of space weather on human health. *Health Perspect*, 103(8), 241-243.
- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. (1981). Structure of the solar chromosphere. III. Models of the EUV brightness components of the quiet sun., 45, 635-725. <https://doi.org/10.1086/190731>
- Verwer, J. G., Spee, E. J., Blom, J. G., & Hundsdorfer, W. (1999). A second-order Rosenbrock method applied to photochemical dispersion problems. *SIAM journal on scientific computing*, 20(4), 1456-1480.
- Voronov, G. S. (1997). A Practical Fit Formula for Ionization Rate Coefficients of Atoms and Ions by Electron Impact:  $Z = 1-28$ . *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 65, 1. <https://doi.org/10.1006/adnd.1997.0732>
- Wang, L., Li, Y., Li, Q., Cheng, X., & Ding, M. (2023). Spectral Features of the Solar Transition Region and Chromospheric Lines at Flare Ribbons Observed with IRIS. *arXiv e-prints*, Artículo arXiv:2308.11275, arXiv:2308.11275. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.11275>

- Wargnier, Q. M., Martínez-Sykora, J., Hansteen, V. H., & De Pontieu, B. (2022). Detailed Description of the Collision Frequency in the Solar Atmosphere., *933*(2), Artículo 205, 205. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac6e62>
- Yamada, M., Kulsrud, R., & Ji, H. (2010). Magnetic reconnection. *Rev. Mod. Phys.*, *82*, 603-664. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.603>
- Zaqarashvili, T. V., Khodachenko, M. L., & Rucker, H. O. (2011). Magnetohydrodynamic waves in solar partially ionized plasmas: two-fluid approach., *529*, Artículo A82, A82. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201016326>
- Zhang, F., Poedts, S., Lani, A., Kuźma, B., & Murawski, K. (2021). Two-fluid Modeling of Acoustic Wave Propagation in Gravitationally Stratified Isothermal Media., *911*(2), Artículo 119, 119. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abe7e8>

## Apéndices

### Apéndice A. Modelo computacional

El sistema de ecuaciones de la MHD representan un sistema para dos fluidos el cual permiten entender de forma general su dinámica y evolución. Sin embargo, al tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, estas no presentan una solución analítica general, además del hecho de que conllevan un alto grado de dificultad a la hora de buscarse resultados por medio del análisis numérico. Por este motivo es que se tiene en cuenta el esquema de volúmenes finitos, en el cual se toma las ecuaciones de conservación, de manera que se calculan los flujos a través de la malla para determinar la evolución temporal del sistema (Durrán, 2010).

Para abordar este tema, se denomina como  $\mathbf{u}$  al conjunto de las variables conservativas del sistema. Cabe resaltar que estas variables difieren de la variable  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}_n$ , definidas como los campos de velocidades de las especies cargada y neutras, respectivamente. Las variables físicas del fluido  $\mathbf{u}$  satisfacen una ley de conservación genérica dada como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}). \quad (43)$$

En esta ecuación, los términos  $\mathbf{f}_j$  representan la matriz de flujos en cada dirección del sistema, mientras que  $\mathbf{s}$  corresponde a los términos de fuente, y son los que determinan la evolución del

sistema. Sin embargo, este esquema presenta un problema subyacente. Dada una discontinuidad, o que la no linealidad de los flujos pueda propiciar a su formación, los operadores diferenciales carecen de validez para describir el sistema. Para solucionar esto, se abordan las ecuaciones en su forma integral, las cuales permiten reducir el sistema de evolución a través del flujo por una interfaz de volumen. Es así como se integra sobre un volumen dado por la malla computacional, resultando en

$$\frac{1}{\Delta V_0} \int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{\Delta V_0} \int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) dV = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{V_0} \mathbf{s}(\mathbf{u}) dV. \quad (44)$$

Para esta ecuación,  $V_0$  corresponde al volumen donde se evalúa la integral, correspondiente en este caso a un bloque de la malla computacional. El elemento  $\Delta V_0$  representa la variación del intervalo de volumen, cuya función consiste en conservar las dimensiones del sistema después de la integral. Si se desarrolla la parte de la integral del segundo término de la ecuación, utilizando el teorema de Gauss para la divergencia, se obtiene que

$$\int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) dV = \oint_{S_0} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (45)$$

El cambio del operador diferencial por la integral doble cerrada denota como el flujo de las líneas de campo a través de la superficie son las únicas que contribuyen al cambio de las variables físicas contenidas en el volumen. Es así como se llega a la segunda forma de la ecuación de conservación, expresada tal que

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (46)$$

Esta corresponde a una ecuación lineal de evolución a primer orden. Este esquema, al no presentar operadores diferenciales espaciales, tiene la ventaja de poder trabajar bajo condiciones de altos gradientes y discontinuidades, como las presentes en la atmósfera solar. Es así como el enfoque consiste en determinar la evolución temporal del conjunto de estas nuevas variables. Estas expresiones son definidas como

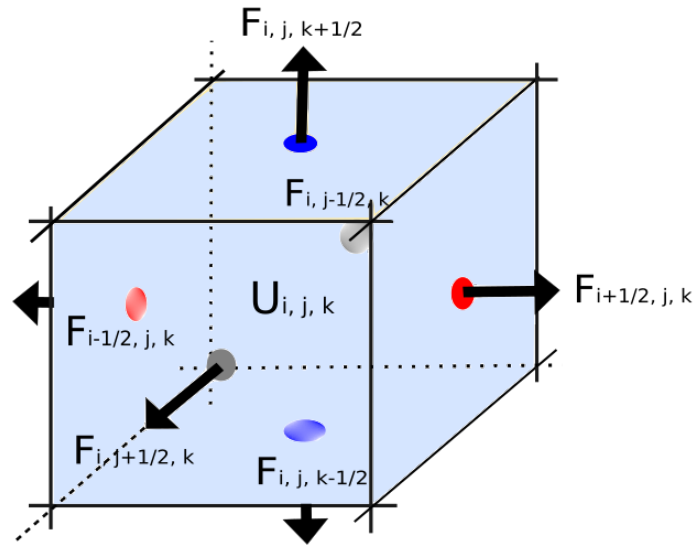
$$\mathbf{U} = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{V_0} \mathbf{u} dV, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{\Delta V_0} \oint_{S_0} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{V_0} \mathbf{s}(\mathbf{u}) dV. \quad (47)$$

Por ende, estas representan los valores promedios de las variables físicas, los flujos y las fuentes, en este respectivo de orden. Una forma más clara de verla es a través de figura 19, en donde se representa una celda de volumen computacional en la cual, en su interior se encuentra la información promedio del fenómeno físico, mientras que las flechas sobre las superficies dan una primera intuición de la contribución de los flujos en el intercambio de información.

Sin embargo, existe un problema en el planteamiento de este esquema puesto que, cuando se define la malla numérica para las variables promedio, teóricamente se encuentran centradas en el centro del volumen, mientras que los flujos son calculados en las interfaces del volumen, los cuales no están comprendidos en la malla. Para solventar este problema, se recurren al método HLL

**Figura 19**

*Representación gráfica de un elemento de volumen computacional*



**Nota.** Dentro de este elemento, están contenidas las variables promedio de evolución  $U$  en la malla  $i, j, k$ , mientras que las caras superficiales del elemento se calculan los promedio del flujo del variables, en los pasos medios  $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$ .

propuesto por Harten, Lax y van Leer (Harten et al., 1983). Este método plantea el cálculo de los flujos promedio por medio de los valores propios de la matriz Jacobiana, utilizando y promediando la información a ambos lados de la interfaz para calcular una aproximación de las variables en el paso intermedio.

### Apéndice B. Integrador numérico IMEX

Es así como la ecuación de evolución (46) se puede abarcar por medio de un método de líneas, bajo los esquemas Runge-Kutta (RK). Sin embargo, para las simulaciones en la atmósfera solar, los esquemas convencionales Runge-Kutta suelen ser inestables. Esto debido a la naturaleza

de las colisiones, las cuales implicaban un alto grado de rigidez a la hora de integrar numéricamente. Este problema se ve aún más acentuado cuando se tiene en cuenta el entorno estratificado de la atmósfera solar. Para comprender esto, se re expresa la evolución de cada variable del sistema como

$$\frac{d\mathbf{U}^n}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (48)$$

donde  $\mathbf{U}^n$  corresponden a el arreglo de las variables conservativas en el instante  $n$ , el cual está dado como

$$\mathbf{U} = (\rho_i, \rho_i \mathbf{u}_i, E_i, \mathbf{B}, \rho_n, \rho_n \mathbf{u}_n, E_n). \quad (49)$$

La variable  $\mathbf{E}$  representa los términos no rígidos, los cuales se asocian con los términos de flujos de las ecuaciones de conservación. Por último  $\mathbf{P}$  representa los términos rígidos, asociado a las colisiones y cuyas escalas características son bastantes altas en comparación con la dinámica del sistema. Para solucionar este problema computacional, se implementa el uso de integradores Implícitos-Explícitos (ImEx), los cuales proporcionan esquemas numéricos con mayor grado de estabilidad. En particular, se utiliza un modelo que está basado en el esquema numérico implementado en el artículo (Popescu Braileanu et al., 2019). Para entender su implementación, se expresa el cálculo de las variables en el siguiente paso de tiempo, el cual está dado por

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \left[ \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{E}(\mathbf{U}_i) + \sum_{i=1}^s \hat{b}_i \mathbf{P}(\mathbf{U}_i) \right], \quad (50)$$

en donde

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^n + \Delta t \left[ \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \mathbf{E}(\mathbf{U}_j) + \sum_{j=1}^i \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}_j) \right]. \quad (51)$$

En estas expresiones,  $b_i$ ,  $\hat{b}_i$ ,  $A_{ij}$  y  $\hat{A}_{ij}$  son las componentes del esquema RK escogido. Los términos rígidos y no-rígidos poseen su propio esquema de evolución, siendo los coeficientes del esquema no-rígido como

$c$	$A$	0	0	
		0	0	0
		1	0	1
	$b$		0	
		0	1/2	1/2

correspondiente a un esquema bajo el método de Heun (Durrán, 2010). Por otro lado, los términos rígidos obedecen a la tabla de Butcher

	0			
$\hat{c}$		0		
$\hat{A}$				
	1	$1 - \beta$	$\beta$	
	1/2	0	$(1 - \beta)/2$	$\beta/2$
		0	1/2	1/2
$\hat{b}$				

En esta última tabla, el valor de  $\beta$  corresponde a un parámetro libre que permite ajustar la contribución de la parte explícita e implícita. Se ha observado que, en modelos ImEx de orden 2, se recomienda la utilización de  $\beta = 1 - \sqrt{2}/2$ , dado a que este valor exhibe una mayor estabilidad en los resultados (Verwer et al., 1999, Durrant, 2010).

En la parte rígida, un esquema ESDIRK es escogido (Jørgensen et al., 2018), implicando que los términos de la diagonal no estén definidos de forma explícita, dado que se requiere calcularse las fuentes en el paso de tiempo el cual se está calculando. Para solucionar este problema, se replantea la evolución como

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^* + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}_j) + \Delta t \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}_i), \quad (52)$$

donde

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \mathbf{E}(\mathbf{U}_j). \quad (53)$$

La variable  $\mathbf{U}^*$  se puede asociar con un paso intermedio en la evolución, donde está contenida la información de los términos no-rígidos. Esto es posible gracias a que los términos no-rígidos no presentan problemas de estabilidad al momento de la evolución, calculándose de forma explícita. Entonces, para resolver la ecuación (52), se hace uso de la expansión en series de Taylor dada como

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{U}^*) + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}^*), \quad (54)$$

donde la variable  $\mathbf{J}$  representa al jacobiano de los términos de fuente, y en este caso, asociado a las colisiones. Este término está definido tal que

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*}. \quad (55)$$

La expansión se realiza al rededor del semi-paso explícito dado que se estima que estas variables, al ser más próximas a la solución real, manifestarían un menor error a la hora de realizar la aproximación en series. Con esto presente, resulta en la expresión

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^* + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}_j) + \Delta t \hat{A}_{ij} [\mathbf{P}(\mathbf{U}^*) + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^*)]. \quad (56)$$

Como esta expresión ahora solo depende de variables ya conocidas, al despejar a  $\mathbf{U}_i$ , se obtiene

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}^* + \Delta t [\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{J} \hat{A}_{ij}]^{-1} \left( \sum_{j=1}^{i-1} \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}_j) + \hat{A}_{ij} \mathbf{P}(\mathbf{U}^*) \right). \quad (57)$$

Es así como el problema de determinar las variables implícitas se reduce al cálculo de la matriz jacobiana, así inversión de la misma.