

**UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE BANACH QUE
CONTIENEN UN SUBESPACIO ISOMORFO A c_0**

JULIETH KATHERINE GIRATÁ VIVIESCAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2018

**UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE BANACH QUE
CONTIENEN UN SUBESPACIO ISOMORFO A c_0**

JULIETH KATHERINE GIRATÁ VIVIESCAS

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Matemática

Director
Ronald Eduardo Paternina Salgado
Matemático, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2018

A mis padres y hermanos

AGRADECIMIENTOS

*Agradezco primeramente a **Dios** por darme la oportunidad de lograr mis metas y todo lo que hasta el día de hoy me he propuesto.*

*A mi **familia** por su comprensión y constante estímulo durante este tiempo.*

*Al profesor **Ronald E. Paternina** por dirigir este trabajo, por sus sugerencias, enseñanzas y el constante apoyo durante el desarrollo de éste.*

*A los **docentes** de la Universidad Industrial de Santander, en especial a los docentes de la Escuela de Matemáticas por todas sus enseñanzas durante mi formación como Matemática.*

A mis compañeros y amigos de la universidad por su amistad y apoyo durante el desarrollo de este trabajo.

Índice general

INTRODUCCIÓN	13
1. PRELIMINARES	15
2. BASES DE SCHAUDER	18
2.1. SERIES Y SUCESIONES	18
2.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS FUNDAMENTALES	20
2.3. EJEMPLOS DE BASES DE SCHAUDER EN ESPACIOS DE BANACH	32
2.3.1. c_0 : El espacio de las sucesiones convergentes a 0	32
2.3.2. El espacio de las sucesiones convergentes	33
2.3.3. El espacio l_p con $1 \leq p < \infty$	33
2.3.4. Base Sumante	34
2.3.5. Una Base en $l_2(\mathbb{N})$	35
2.3.6. El sistema de Haar	37
2.3.7. El espacio de las funciones continuas $C([0, 1])$	45
2.3.8. l_∞ : Un espacio de Banach sin base de Schauder	47
2.3.9. Una sucesión en X que genera a X pero que no es una base de X	47
3. SUCESIONES BÁSICAS Y EQUIVALENTES	50
3.1. SUCESIONES BÁSICAS	50
3.2. SUCESIONES EQUIVALENTES	59
4. BASES INCONDICIONALES Y EL TEOREMA DE BESSAGA-PEŁCZYŃSKI	77
4.1. CONVERGENCIA INCONDICIONAL	77
4.2. BASES INCONDICIONALES	86

4.3. SERIES W.U.C Y EL TEOREMA DE BESSAGA Y PEŁCZYŃSKI . . .	91
BIBLIOGRAFÍA	98

Índice de figuras

2.1. Base para el espacio $L_p[0, 1]$ con $1 \leq p < \infty$	37
2.2. Base Ortonormal para el espacio $L_p[0, 1]$ con $1 \leq p < \infty$	37
2.3. Base para el espacio de las funciones continuas $C([a, b])$	45

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Matemáticos

Símbolos	Terminología
c_0	Espacio de sucesiones escalares convergentes a 0
E, F, X, Y, \dots	Espacios de Banach
$\mathcal{L}(c_0, X)$	Operadores Lineales de c_0 en X
u, w, x, y, z, \dots	Elementos de X
$u^*, x^*, y^*, z^*, \dots$	Elementos de X^*
X^*	Dual topológico del espacio X
$[x_n]$	Clausura del Subespacio generado por (x_n)
$w(X)$ o w	Topología débil
$w^*(X^*)$ o w^*	Topología débil*

Subíndices

Subíndice	Término
n	Índice de la sucesión
n_k	Índice de la subsucesión

Abreviaturas

Abreviatura	Término
$w.u.C$	Serie Débilmente Incondicional de Cauchy

RESUMEN

TÍTULO: UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE BANACH QUE CONTIENEN UN SUBESPACIO ISOMORFO A c_0 .¹

AUTOR: Julieth Katherine Giratá Viviescas ²

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS DE BANACH; SUCESSIONES BÁSICAS; PRINCIPIO DE SELECCIÓN; ESPACIO c_0 ; BESSAGA-PEŁCZYŃSKI.

DESCRIPCIÓN: El presente trabajo consiste principalmente en el estudio de las características que debe satisfacer un espacio de Banach para ser isomorfo a un subespacio de c_0 (espacio de las sucesiones convergentes a 0). En el primer capítulo (Preliminares), se enunciarán diferentes teoremas y definiciones que se usarán durante el desarrollo de la presente monografía. En el segundo capítulo se realizará un estudio de algunos conceptos básicos de análisis funcional, series y sucesiones (en espacios de Banach) y las bases de Schauder. Además, se presentarán una serie de ejemplos de espacios de Banach con base de Schauder y algunos espacios que no tienen base. En el tercer capítulo se realizará un amplio estudio de las sucesiones básicas y equivalentes (definiciones, propiedades y teoremas), en el cuarto capítulo se definirán las bases condicionales e incondicionales y se presentarán algunos resultados importantes para el desarrollo de este trabajo, resultados como el Principio de Selección de Bessaga-Pełczyński y una caracterización de las sucesiones equivalentes. Para finalizar, realizaremos la prueba del teorema que motiva este trabajo, el Teorema de Bessaga-Pełczyński en el que se prueba la caracterización deseada de los espacios de Banach que no contienen copia de c_0 y presentaremos una aplicación de este, el Teorema de Orlicz-Pettis.

¹Proyecto de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ph.D. Ronald Eduardo Paternina Salgado

ABSTRACT

TITLE: A CHARACTERIZATION OF BANACH SPACES THAT CONTAINING A SUBSPACE ISOMORPHIC TO c_0 .¹

AUTHOR: Julieth Katherine Giratá Viviescas ²

KEYWORDS: BANACH SPACES; BASIC SEQUENCES; SELECTION PRINCIPLE; c_0 SPACE; BESSAGA-PEŁCZYŃSKI.

DESCRIPTION: The present work consists mainly in the study of the characteristics that a Banach space must satisfy to be isomorphic to a subspace of c_0 (space of the convergent sequences to 0). In the first chapter (Preliminaries), different theorems and definitions will be enunciated that will be used during the development of the present monograph. In the second chapter there will be a study of some basic concepts of functional analysis, series and successions (in Banach spaces) and the bases of Schauder. In addition, it will be presented a series of examples of Banach spaces with Schauder base and some spaces that have no base. In the third chapter there will be a broad study of basic and equivalent successions (definitions, properties and theorems), in the fourth chapter the unconditional and unconditional bases will be defined, and some important results will be presented for the development of this work, results such as Selection Principle of Bessaga-Pełczyński and a characterization of the equivalent sequences. Finally, we will perform the proof of the theorem that motivates this work, the Bessaga-Pełczyński Theorem in which the desired characterization of Banach spaces that do not contain a copy of c_0 is tested and we present an application of this, Orlicz-Pettis Theorem.

¹Bachelor Thesis

²Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ph.D. Ronald Eduardo Paternina Salgado

INTRODUCCIÓN

El concepto abstracto de un espacio de Banach surgió muy naturalmente del trabajo en los inicios del siglo XX por Fredholm, Hilbert, F. Riesz y otros en espacios funcionales concretos tales como $C[0, 1]$ y l_p para $1 \leq p < \infty$. La motivación de estos autores fue estudiar ecuaciones lineales diferenciales e integrales utilizando los métodos de álgebra lineal con análisis. Por el final de la primera guerra mundial, la definición de un espacio de Banach era casi exigente por lo que no es sorprendente que se descubrieran en forma independiente por Norbert Wiener y Stefan Banach alrededor del mismo tiempo.

Los axiomas para un espacio de Banach se introdujeron en la tesis de Banach (1920) publicado en *Fundamenta Mathematica* en 1922 en Francés. Los resultados iniciales del Análisis funcional son los principios subyacentes (Teorema de acotación uniforme, gráfico cerrado, aplicación abierta y Hanh-Banach) cristalizaron el tema común en tantos argumentos en el Análisis de principios del siglo XX.

Sin embargo, después de esto, fue Banach y la escuela (Steinhaus, Mazur, Orlicz, Schauder, Ulam, etc) en Lvov (entonces en Polonia, pero ahora en Ucrania) que desarrolló el programa de estudio de la teoría isomórfica de los espacios de Banach. Esta escuela floreció hasta el momento de la segunda guerra mundial, en 1939 bajo los términos del pacto Nazi-Soviético, poco después de que Alemania invadiera Polonia, incluyendo Lvov. Después de la invasión Alemana de 1941 terminó de manera efectiva y trágica el trabajo de su grupo. El propio Banach sufrió grandes dificultades durante la ocupación y murió poco después del final de la guerra, en 1945.

Este estudio se revivió con la aparición de una nueva escuela Polaca en Varsovia alrededor de 1958. Hubo algunos avances profundos en la teoría de Banach entre 1941 y 1958 (por ejemplo el trabajo de James y Grothendieck) pero parece que solo después de 1958 hubo un ataque concertado sobre los problemas de la estructura isomórfica.

El motor principal en esta dirección era Bessaga y Pełczyński junto con sus colaboradores desarrollaron la teoría de Bases y sucesiones básicas el cual es una herramienta útil y eficaz en la teoría de espacios de Banach y un espacio agradable de la nueva teoría de Bases era que las sucesiones básicas podían ser usadas para establecer algunos resultados clásicos. En este trabajo vamos a estudiar uno de los resultados obtenidos por Bessaga y Pełczyński y para ello vamos a profundizar un

poco en el estudio de las sucesiones básicas y las Bases de Schauder.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos:

- En el primer capítulo (Preliminares), se enunciarán diferentes teoremas y definiciones que se usarán durante el desarrollo de la presente monografía.
- En el capítulo 2 se desarrolla una teoría general del estudio de las bases de Schauder en los espacios de Banach. En éste, se enuncian los conceptos más generales y se comienza el estudio de las bases definiéndose los conceptos de base de Schauder, funcional coordinado y constante básica. También se presentarán una serie de ejemplos de espacios de Banach en los que mostraremos si tienen o no una base de Schauder.
- Como ya se mencionó antes, el objetivo de esta monografía es demostrar el Teorema de Bessaga-Pelczysński, pero éste, tiene varias versiones y cada una de ellas se puede probar de una forma diferente, la versión que se desarrolló en esta monografía es la que se encuentra enunciada en el libro de Diestel (ver [4]) la cual es realizada usando sucesiones básicas. Es por eso que en el capítulo 3 se trabajó la teoría relacionada con las sucesiones básicas y equivalentes: definiciones, propiedades y teoremas.
- En el capítulo 4, se definen las bases incondicionales, probando diversas caracterizaciones equivalentes, finalizando con la demostración que motiva este trabajo, el Teorema de Bessaga-Pelczyński, en el que se prueba la caracterización deseada de los espacios de Banach que no contienen copia de c_0 . Además, se presenta un resultado que es una consecuencia de este teorema conocido como Teorema de Orlicz-Pettis.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este primer capítulo será dedicado a recordar algunos resultados de Análisis (Lineal y Funcional) y ciertas notaciones que serán usadas durante el desarrollo de este trabajo. Así mismo, las demostraciones no serán realizadas, pero serán referenciadas adecuadamente.

Definición 1.1 (Conjunto Denso) *Un conjunto es llamado Denso en un espacio topológico X , si su clausura es X . Éste es llamado a ser nunca denso si su clausura no contiene un conjunto abierto. Un espacio es separable, si éste contiene un conjunto enumerable denso.*

Definición 1.2 (Espacio de las sucesiones convergentes) *Se define c , el espacio de las funciones convergentes por:*

$$c = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \text{ converge}\}$$

El espacio c es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \forall x = (x_n) \in c$$

Definición 1.3 (Espacio c_0) *Se define c_0 por:*

$$c_0 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \text{ converge a } 0\}$$

El espacio c_0 es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \forall x = (x_n) \in c_0$$

Definición 1.4 (Los espacios l_p ($1 \leq p < \infty$)) *Sobre el espacio vectorial de las sucesiones de números reales y para $1 \leq p < \infty$ se define l_p por:*

$$l_p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

Los espacios l_p son espacios de Banach dotados de la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right)^{1/p} \quad \forall x = (x_n) \in l_p$$

Definición 1.5 (Espacio l_∞) Se define l_∞ por:

$$l_\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \text{ está acotada}\}$$

El espacio l_∞ es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \forall x = (x_n) \in l_\infty$$

Definición 1.6 (Espacio $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$)) Se define $L^p(\Omega)$ por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}$$

El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

Definición 1.7 (Espacio de las funciones continuas) Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $I = [a, b]$. Para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ se define el espacio $C^k(I)$ como el espacio formado por las restricciones a I de las funciones de clase k en \mathbb{R} , es decir, tales que son derivables hasta el orden k con derivadas continuas, y en el caso $k = 0$ son simplemente las funciones continuas en I . El espacio $C^k(I)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|f\|_{C^k(I)} = \sum_{i=0}^k \max_{t \in I} |f^i(t)|, \quad \forall f \in C^k(I)$$

Teorema 1.8 (Principio de Acotación Uniforme) Sea $T_n : X \rightarrow Y$ una sucesión de transformaciones lineales continuas entre espacios de Banach X e Y . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ existe para cada $x \in X$ entonces el límite $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ es una transformación lineal continua.

Teorema 1.9 (Principio de la Aplicación Abierta) Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal continuo sobreyectivo entre dos espacios de Banach X e Y . La imagen de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y .

Definición 1.10 Sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. El gráfico de T es el conjunto de todos los puntos en el espacio producto $X \times Y$ de la forma (x, Tx) con $x \in X$.

Teorema 1.11 (Teorema del Gráfico Cerrado) Sean X e Y dos espacios de Banach, entonces toda transformación lineal $T : X \rightarrow Y$ con gráfico cerrado es continua.

Teorema 1.12 Para una función lineal T entre espacios lineales normados las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a. T es continua.
- b. T es continua en algún punto.
- c. El supremo $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ es finito.
- d. Para algún escalar M , $\|Tx\| \leq M\|x\|$, para cada $x \in X$.

Teorema 1.13 (Teorema de Hahn-Banach) Sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal, esto es:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \alpha \geq 0 \text{ y } x, y \in X.$$

Si f es un funcional lineal sobre un subespacio Y de X con $f(x) \leq p(x)$ para $x \in Y$, entonces existe un funcional lineal real F sobre X tal que $F(x) = f(x)$ para $x \in Y$ y $F(x) \leq p(x)$ para $x \in X$.

Corolario 1.14 Sea x un vector no nulo en el subespacio cerrado Y de el espacio lineal normado X . Entonces, existe un funcional $x^* \in X^*$ con $x^*(x) = 1$; $x^*(y) = 0$ para $y \in Y$.

Corolario 1.15 Para cada $x \neq 0$ en un espacio lineal normado X , existe un $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$.

Definición 1.16 Un isomorfismo entre dos espacios lineales normados X e Y es un operador $T : X \rightarrow Y$ continuo, inyectivo y con inversa continua. Cuando tal isomorfismo existe, los espacios X e Y son llamados equivalentes. Un isomorfismo isométrico entre dos espacios lineales normados X e Y es un isomorfismo T entre X e Y para el cual $\|Tx\| = \|x\|$. Cuando tal T existe los espacios son llamados isométricamente equivalente o isométricamente isomorfos.

Definición 1.17 Sea X un espacio vectorial normado. Para cada $x \in X$ considere el funcional $Jx : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $Jx(x^*) = x^*(x)$, para todo $x^* \in X^*$. Entonces $Jx \in X^{**}$ para cada $x \in X$ y $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|$. La función $J : X \rightarrow X^{**}$ definida por $J(x) = Jx$ es llamado el *embedimiento natural* de X en su bidual.

Teorema 1.18 El *embedimiento natural* de un espacio lineal normado X en su segundo dual es un isomorfismo isométrico entre X y JX .

Capítulo 2

BASES DE SCHAUDER

El concepto de base en un espacio de Banach fue introducido por Schauder [14] en 1927, y al igual que en las bases algebraicas, la idea de base consiste en tener una familia de vectores tal que, para cada elemento del espacio, exista una única representación de éste en términos de la familia, por ejemplo, como combinación lineal de los elementos (caso algebraico) o como suma de una serie (espacios de Banach). En esta sección vamos a introducir la noción fundamental de una base de Schauder en un espacio de Banach y concluiremos que estos espacios son aquellos que se pueden representar de manera natural como espacios de sucesiones. También, estudiaremos algunos resultados que serán importantes para el desarrollo del trabajo.

2.1. SERIES Y SUCESSIONES

Comenzaremos incluyendo algunas definiciones y propiedades de las series y sucesiones de elementos en un espacio de Banach que esencialmente no difieren de las definiciones y propiedades correspondientes a las series numéricas ordinarias.

Definición 2.1.1 (Series en espacios de Banach) Una serie de elementos de un espacio de Banach X , es una expresión que tiene la forma de la suma de un número infinito de términos que pertenecen a X , i.e.,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots \quad (2.1)$$

Para simplificar la notación de series usamos el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Es necesario recordar que en la expresión (2.1) no hacemos referencia a la suma ordinaria (en el sentido usual de la palabra), porque en un espacio de Banach la adición es definida sólo para un número finito de términos.

Definición 2.1.2 La n -ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es la suma definida como $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ que está dada por los primeros n -términos.

Definición 2.1.3 (Serie Convergente) Una serie en X se llama convergente si la sucesión de sus sumas parciales converge en la norma de X . El límite de esta sucesión se llama la suma de la serie y escribimos:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{si } \|S_n - s\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así, si escribimos $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge y su suma es igual a s .

Definición 2.1.4 (Segmento) Un segmento de una serie es una suma de un número finito de términos consecutivos $\sum_{k=m+1}^n x_k = S_n - S_m$. Algunas veces por un segmento entendemos el conjunto $\{x_k\}_{k=m+1}^n$.

Teorema 2.1.5 (Criterio de Convergencia de Cauchy) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si y sólo si la sucesión de sus segmentos converge a 0, esto es:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| = 0.$$

Demostración: Suponga que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge a s . Luego:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| = \|s_n - s_m\| \leq \|s_n - s\| + \|s_m - s\|.$$

Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$ entonces $\|s_n - s\| < \frac{\epsilon}{2}$ y si $m \geq N$ entonces $\|s_m - s\| < \frac{\epsilon}{2}$. Así, por la desigualdad triangular se tiene que:

$$\|s_n - s_m\| \leq \|s_n - s\| + \|s - s_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Por tanto los segmentos convergen a 0. Recíprocamente, suponga que la condición de Cauchy es satisfecha para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|s_n - s_m\| = 0$. Esto significa que la sucesión de sumas parciales forman una sucesión de Cauchy en X . Como X es un espacio de Banach entonces la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto de X . ■

Definición 2.1.6 La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ se llama **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge en \mathbb{R} .

Teorema 2.1.7 Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X . Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge absolutamente entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X .

Demostración: Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge absolutamente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ es convergente en \mathbb{R} y por tanto es una sucesión de Cauchy de números reales. Así, dado $\epsilon > 0$ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n > m \geq N_\epsilon$ entonces:

$$\sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \epsilon.$$

Defina, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Por la desigualdad triangular tenemos que si $n > m \geq N_\epsilon$ entonces:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \epsilon.$$

Por tanto, la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y como X es de Banach, entonces $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. ■

Nota

1. No es difícil demostrar que si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos en X y las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ también converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

2. También, se puede demostrar que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio de Banach X y $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales tal que $\|x_k\| < a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge a un punto de $x \in X$.
3. Finalmente, si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal continuo, entonces para cualquier serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de elementos de X la serie $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$ es convergente y vale:

$$T \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k).$$

Por tanto, muchos teoremas de convergencia clásica para series numéricas ordinarias pueden ser generalizados a las series en Espacios de Banach. Nosotros no lo haremos ya que no es nuestro objetivo.

2.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS FUNDAMENTALES

A lo largo del capítulo, X es un espacio vectorial normado real y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X .

Definición 2.2.1 (Base de Schauder) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X es una base de Schauder de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge a x .

Nota

1. Si X es de dimensión finita, i.e., $\dim X = m$, entonces un sistema $(x_j)_{j=1}^m$ es llamado una base de Schauder en X si esta es una base del espacio vectorial X en el sentido algebraico usual, es decir, que para cada $x \in X$ existe un único sistema de n -escalares $\{a_j\}_{j=1}^m$ tal que $x = \sum_{k=1}^m a_k x_k$. Así, si X es de dimensión finita entonces nociones cuantitativas relacionadas a bases de Schauder pueden ser extendidas a bases algebraicas y no causará confusión. Si X es 0 – dimensional el conjunto \emptyset es una base.

*En este trabajo, se reservará el termino **base** para referirnos únicamente a las bases de Schauder.*

2. Es esencial notar que la definición de una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ depende del orden preescrito de los términos, si intercambiamos el orden en que los puntos x_1, \dots, x_n son puestos, la serie puede converger a otro punto o puede no converger como es el caso de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Sin embargo, algunas veces consideramos bases indexadas por subconjuntos de los números naturales. Por ejemplo, si escribimos $(x_v)_{v \in V}$ o $\sum_{v \in V} a_v x_v$ Quiere decir

$$(x_{v_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_{v_n} x_{v_n}.$$

3. En los espacios de Hilbert, existen las bases ortonormales que han demostrado ser una herramienta muy útil en muchas áreas del análisis. Recordemos que si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H , entonces para $x \in H$ hay una única sucesión de escalares $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $a_n = \langle x, e_n \rangle$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. La utilidad de las bases ortonormales se debe en parte al hecho de que son relativamente fáciles de encontrar. De hecho, cada espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal.

El siguiente teorema nos permite dar una caracterización de los espacios de Banach con base.

Teorema 2.2.2 Si existe una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X , entonces X es separable.

Demostración: Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X . Definamos el conjunto $S = \{\sum_{i=1}^n r_i x_i : \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ y } r_i \in \mathbb{Q}\}$ y veamos que S es denso en X .

Sea $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Como $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una base, existen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ escalares tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y por tanto existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - \sum_{i=1}^N a_i x_i\| < \frac{\epsilon}{2}$. Defina $M = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|$. Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , para $i = 1, 2, \dots, N$ existen $r_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_i - r_i| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}MN}$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_N = \sum_{i=1}^N r_i x_i$, entonces $x_N \in S$ y también:

$$\begin{aligned}
\|x - x_N\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N a_i x_i - \sum_{i=1}^N r_i x_i \right\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^N (a_i - r_i) x_i \right\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^N |a_i - r_i| \|x_i\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + M \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon}{2^{i+1}MN} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^{i+1}} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto S es denso en X . Demostremos que S es enumerable. Para ello, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{\sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in \mathbb{Q} \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}$, entonces $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ y por tanto es suficiente demostrar que S_n es enumerable para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, sea $n \in \mathbb{N}$ y defina $f : S_n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ por $f(\sum_{i=1}^n r_i x_i) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Primero, f es inyectiva, ya que si tomamos $f(\sum_{i=1}^n r_i x_i) = f(\sum_{i=1}^n s_i x_i)$ tenemos que $(r_1, r_2, \dots, r_n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y por tanto $r_1 = s_1, r_2 = s_2, \dots, r_n = s_n$, luego, S_n es equipotente con $f(S_n)$. Además, como \mathbb{Q} es enumerable, entonces \mathbb{Q}^n es enumerable, y ya que $f(S_n)$ es subconjunto de \mathbb{Q}^n . Así $f(S_n)$ es enumerable y concluimos que S_n es enumerable para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Nota: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X , entonces definimos

$$\text{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Denotamos por $[x_n]$ a la clausura del $\text{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

El lector no debe confundir la noción de base en un espacio de Banach de dimensión infinita X con el concepto puramente algebraico de base de Hamel para $(e_i)_{i \in I}$ de un espacio vectorial X . Recordemos que una base de Hamel $(e_i)_{i \in I}$ para X es una

colección de vectores linealmente independientes en X tal que cada $x \in X$ se puede representar de forma única como una combinación lineal $(e_i)_{i \in I}$.

A continuación demostraremos que si $(e_i)_{i \in I}$ es una base de Hamel para un espacio de Banach de dimensión infinita X entonces $(e_i)_{i \in I}$ no puede ser enumerable.

Teorema 2.2.3 *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita entonces X no tiene base de Hamel enumerable.*

Demostración: La demostración se realizara en varias partes.

- Cualquier subespacio lineal cerrado Y de X es un conjunto nunca denso en X , i.e., $\overline{Y} = \emptyset$. En efecto, sea Y un subespacio lineal cerrado de X . Si Y no es nunca denso, existe un $a \in Y$ y $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subseteq Y$. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$, entonces $a + \frac{\epsilon x}{2\|x\|} \in B(a, \epsilon)$. Sigue que $a + \frac{\epsilon x}{2\|x\|} \in Y$, y como $a \in Y$, concluimos que $x \in Y$. Luego $X \subseteq Y$ y por tanto $Y = X$ lo que contradice que Y es un subespacio propio de X .
- En esta parte procederemos con la demostración del teorema. Sea X un espacio de Banach que tiene una base algebraica denotada por $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dados números naturales n e i_1, i_2, \dots, i_n distintos, denotamos por $Y_{i_1, \dots, i_n} = \text{span}\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\}$. Como $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X , si $x \in X$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}\}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{n_0} a_k e_{i_k}$ y por tanto $x \in Y_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}}$. Así

$$X = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0} \in \mathbb{N}} Y_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}},$$

y la unión es contable. Como cada $Y_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}}$ tiene dimensión finita entonces son cerrados y como X es de dimensión infinita entonces $X \neq Y_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero por lo demostrado en la parte anterior, $Y_{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}}$ es nunca denso, es decir, X es de primera categoría de Baire, lo que contradice que X es de Banach. Por tanto X no tiene base de Hamel enumerable. ■

Definición 2.2.4 *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de un espacio de Banach X . Definimos los funcionales coordenados $x_n^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $x_n^*(x) = a_n$ donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Es fácil verificar que cada x_n^* es lineal y $x_k^*(x_j) = 1$ si $j = k$ y $x_k^*(x_j) = 0$ si $j \neq k$. Esto es, $x_k^*(x_n) = \delta_{n,k}$. Las sucesiones de pares (x_n, x_n^*) son llamadas biortogonales. Aunque en verdad solo solemos decir que $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ es biortogonal a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Nota: Podemos siempre usar el lema de Zorn y establecer la existencia de una base algebraica en un espacio de Banach, lo cual no es cierto para las bases de Schauder. A pesar de esto, las bases de Hamel no poseen una información satisfactoria porque esta no tiene vínculo con la topología del espacio. Esto es, sea $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una base algebraica en un espacio de Banach X y considere $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en el

espacio de Banach X tal que z_n converge a z . Cada uno de los z_n y z tiene descomposiciones finitas

$$z_n = \sum_i \alpha_i^{(n)} e_i \quad y \quad z = \sum_i \alpha_i e_i.$$

Pero no hay razón para concluir que $\alpha_i^{(n)}$ converge a α_i para todo i como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea $X = l_\infty$ y defina $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 1, 1, \dots); \\ e_2 &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right); \\ e_3 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right); \\ &\vdots \\ e_n &= \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-2 \text{ veces}}, \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right). \end{aligned}$$

Claramente $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es linealmente independiente (si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \rightarrow \lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$). Defina la sucesión por $z_n = e_1 - \sum_{i=2}^{n+1} e_i$, es decir,

$$\begin{aligned} z_1 &= e_1 - e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right) \rightarrow \|z_1\| = \frac{1}{2}; \\ z_2 &= e_1 - (e_2 + e_3) = \left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right) \rightarrow \|z_2\| = \frac{1}{4}; \\ z_3 &= e_1 - (e_2 + e_3 + e_4) = \left(0, 0, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right) \rightarrow \|z_3\| = \frac{1}{8}; \\ &\vdots \\ z_n &= e_1 - \sum_{i=2}^{n+1} e_i = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-\text{veces}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \dots\right) \rightarrow \|z_n\| = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Así, $\|z_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ y por tanto $z_n \rightarrow 0$ en l_∞ . Pero si $i \geq 2$ entonces la i -ésima coordenada es dada por:

$$x_i^*(z_n) = x_i^*(e_1) - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^*(e_i) = -1 \quad \forall i \geq 2.$$

Lo anterior se obtiene al usar la definición 2.2.4 la cual indica que $x_k^*(x_j) = 1$ si $j = k$ y $x_k^*(x_j) = 0$ si $j \neq k$. Por tanto, la i -ésima coordenada converge a -1 . ■

Nota: Nuestro primer objetivo es demostrar que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X entonces los funcionales coordenados asociados a la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son continuos en el espacio X . Pero antes demosetremos que un espacio de Banach puede representarse de manera natural como un espacio de sucesiones.

Lema 2.2.5 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y defina F el espacio vectorial de sucesiones reales

$$F = \left\{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ converge} \right\},$$

con la norma

$$\|(a_i)_{i \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Entonces F es un espacio de Banach.

Demostración: Para probar que $(F, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, primero demostraremos que $\|\cdot\|$ es una norma. Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge entonces la sucesión de sumas parciales $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, y por tanto tiene un supremo, así $\|(a_i)_{i \in \mathbb{N}}\|$ es finita. Veamos que satisface las propiedades de la norma:

1. Hagamos $x = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un elemento de F y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha a_i x_i \right\| \\ &= |\alpha| \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &= |\alpha| \|x\|. \end{aligned}$$

2. Sean $x = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $y = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ elementos de F . Entonces,

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x_i \right\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n b_i x_i \right\| \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

3. Suponga que $x = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es tal que $\|x\| = 0$ entonces,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = 0.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ y por tanto $a_n = 0$ o $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $x = 0$.

Así, tenemos demostrado que $(F, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado. Veamos que $(F, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Para ello, sea $w_n = (w_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F . Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|w_n - w_m\| < \epsilon$ para $n > m > N_\epsilon$. Esto es,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^p (w_i^n - w_i^m) x_i \right\| < \epsilon$$

Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|(w_i^n - w_i^m) x_i\| &= \left\| \sum_{j=1}^i (w_j^n - w_j^m) x_j - \sum_{j=1}^{i-1} (w_j^n - w_j^m) x_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^i (w_j^n - w_j^m) x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{i-1} (w_j^n - w_j^m) x_j \right\| \\ &\leq \|w_n - w_m\| + \|w_n - w_m\| < 2\epsilon \end{aligned}$$

Para todo $n, m \geq N_\epsilon$. Como $x_n \neq 0$ entonces para cada $n, m > N_\epsilon$ se tiene:

$$|w_i^n - w_i^m| \leq \frac{2\epsilon}{\|x_i\|}.$$

Esto demuestra que para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $w_n = (w_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo existe un $\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} w_i^n$ tal que $w_i^n \rightarrow \lambda_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Demostremos que $x \in F$ y que $w_n \rightarrow x$ en la norma de F . De hecho, para $n > m > N_\epsilon$ tenemos,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^p (w_i^n - w_i^m) x_i \right\| < \epsilon.$$

Luego, para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left\| \sum_{i=1}^p (w_i^n - w_i^m) x_i \right\| < \epsilon.$$

Haciendo $m \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^p (w_i^n - \lambda_i) x_i \right\| \leq \epsilon.$$

Para toda $n \geq N_\epsilon$ y todo $p \in \mathbb{N}$. Además, tenemos de esto que:

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+l} \lambda_i x_i \right\| \leq 2\epsilon + \left\| \sum_{i=n+1}^{n+l} w_i^k x_i \right\|. \quad (2.2)$$

Por tanto, como cada serie $\sum_{i=1}^{\infty} w_i^k x_i$ es convergente y como X es un espacio de Banach se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ es convergente (ya que es de Cauchy). Así, $x = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in F$. Tomando el supremo en (2.2) obtenemos $\|w^n - x\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq N_\epsilon$. Así, $w^n \rightarrow x$. Luego, F es un espacio de Banach. ■

Teorema 2.2.6 *Sea X un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y considere $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales coordenados. Entonces:*

- a. *El espacio de Banach F introducido en el lema anterior es isomorfo a X por la función*

$$T : \{\alpha_n\} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i.$$

- b. *La función*

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i \right\| \quad (2.3)$$

define una norma sobre X que es equivalente a la norma inicial de X .

Demostración:

- a. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base del espacio de Banach X , tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el lema, F es un espacio de Banach. La función T de F en X es obviamente lineal y como para cada $n \in \mathbb{N}$ con $x = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un elemento de F

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| = \|x\|_F.$$

Entonces tenemos $\|Tx\| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$. Así, T es acotada.

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base entonces $Tx = 0$ si y solo si $x = 0$ y T es sobreyectiva. Entonces por el teorema de la aplicación abierta tenemos que T es un isomorfismo de F sobre X .

- b. Es fácil verificar que la ecuación (2.3) es una norma sobre X (igual que en el lema anterior). Como T es un isomorfismo existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|Tx\| \leq \|x\|_F \leq C\|Tx\| \text{ para } x \in F.$$

Luego,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|,$$

esto es,

$$\|x\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \|x\| \leq C\|x\|,$$

para cada $x \in X$. Así, las normas son equivalentes. ■

Por tanto, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X , entonces para cada $x \in X$ tenemos $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ donde $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ son los funcionales coordenados. También se tiene:

Teorema 2.2.7 *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de un espacio de Banach X . Entonces los funcionales coordenados $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ asociados con la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son continuos sobre X . Además, existe una constante $M > 0$ tal que $1 \leq \|x_n\| \|x_n^*\| \leq M$.*

Demostración: Sea $\|x\|$ la norma definida en el teorema anterior. Como la norma es equivalente a $\|\cdot\|$, existe una constante $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Como $x_n \neq 0$ se sigue que para todo $x \in X$ y $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x_n^*(x)| &= \frac{\|x_n^*(x)x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|\sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x)x_i\|}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{\|\sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i\| + \|\sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x)x_i\|}{\|x_n\|} \\ &\leq \frac{2\|x\|}{\|x_n\|} \leq 2C \frac{\|x\|}{\|x_n\|}. \end{aligned}$$

Por tanto, $x_n^* \in X^*$ y $\|x_n^*\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|}$ y podemos tomar $M = 2C$. Finalmente, por la definición de x_n^* tenemos que:

$$x_n^*(x_n) = 1 \leq \|x_n^*\| \|x_n\|.$$

Por tanto, $1 \leq \|x_n^*\| \|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

El concepto de base de Schauder está íntimamente ligado con el de cierta sucesión de proyecciones que definimos a continuación.

Definición 2.2.8 (Sucesión de Proyecciones) *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de X . Definimos la sucesión de proyecciones $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre X por:*

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

De la definición sigue claramente que P_n es lineal y $P_n^2 = P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, la familia $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface $P_n P_m = P_{\min\{m,n\}}$. En particular, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una proyección sobre $\text{span}\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder tenemos que para cada $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$. Del teorema anterior se sigue que los P_n son continuos, ya que

$$P_n x = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i \quad \text{donde} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Teorema 2.2.9 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach X y $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Proyecciones asociada con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces,

$$\sup_{n \geq 1} \|P_n\| < \infty.$$

Demostración: Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder se tiene que para cada $x \in X$, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x$. Por tanto, la sucesión $(P_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ es limitada para cada $x \in X$. Como los P_n son continuos para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos por el principio de acotación uniforme que $\sup_{n \geq 1} \|P_n\| < \infty$. ■

El hecho de que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea una base o no queda determinado por su comportamiento en los subespacios $[x_i]_{i=1}^n$ y eso lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.2.10 Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X si y sólo si las siguientes tres propiedades son válidas:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$.
2. Existe un $K > 0$ tal que para toda sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $n < m \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\|.$$

3. $X = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$

Demostración:

⇒] Supongamos primero que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base. Entonces:

1. Es parte de la definición.
2. Por el Teorema 2.2.9 existe una constante $K > 0$ tal que $\|P_n\| \leq K$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ($K = \sup_{n \geq 1} \|P_n\|$). Por tanto, si $n < m$ y a_1, a_2, \dots, a_m son escalares arbitrarios tenemos:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| = \left\| P_n \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) \right\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\|.$$

3. Es claro de la definición de base.

⇐] Suponga que 1, 2, y 3 son válidas. Demostremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X . Veamos primero que cada $x \in X$ se escribe de manera única y luego demostremos la existencia.

1. **Unicidad:** Suponga que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i$. Entonces la condición 2 implica para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i) x_i \right\| = K \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^m \beta_i x_i \right\| \rightarrow 0,$$

Cuando $m \rightarrow \infty$. Por tanto, $\|\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i\| = 0$ lo que implica que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$ probando así la unicidad.

2. **Existencia:** Defina:

$$Y = \{x \in X : \text{existe una sucesión } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de escalares tal que } x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n x_n\}.$$

Claramente Y es un subespacio vectorial de X . Demostremos que Y es cerrado y aplicando la hipótesis de que $\bar{Y} = X$ entonces concluimos que $Y = X$. Para demostrar que Y es cerrado, suponga que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ satisface que $y_n \rightarrow y \in X$. Defina $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n x_i$ y fije un $\epsilon > 0$. Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y , existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq k_1$ se tiene $\|y_n - y\| < \epsilon$.

Además, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X , por tanto, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq k_2$ entonces $\|y_n - y_m\| < 2\epsilon$ para todo $n, m \geq k_2$. Defina $k = \max\{k_1, k_2\}$. Entonces $\|y_n - y\| < 2\epsilon$ para $n > k$ y $\|y_n - y_m\| < 2\epsilon$ para $n, m \geq k$. Además:

$$\left\| y - \sum_{i=1}^k \alpha_i^k x_i \right\| \leq \|y - y_k\| + \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k x_i - \sum_{i=1}^k \alpha_i^k x_i \right\| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

La última desigualdad se sigue del $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k x_i$ entonces existe un $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $r \geq r_0 > k$ entonces:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k x_i - \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i \right\| < \epsilon.$$

Además, para cualquier $n, m, r \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right\| &= \left\| P_r \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right) \right\| \\ &\leq \sup_{r \geq 1} \|P_r\| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right\| \\ &\leq K \|y_n - y_m\| \\ &\leq K \epsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Por tanto, si $j > 1$ es fijo y $m > n \geq k$ tenemos:

$$\begin{aligned} |\alpha_j^n - \alpha_j^m| \|x_j\| &= \left\| \sum_{i=1}^j (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i - \sum_{i=1}^{j-1} (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^j (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} (\alpha_i^n - \alpha_i^m) x_i \right\| \\ &\leq K \|y_n - y_m\| + K \|y_n - y_m\| \\ &\leq 2K \|y_n - y_m\| \\ &< 4K\epsilon. \end{aligned}$$

Esto garantiza que para cada j (incluyendo $j = 1$) la sucesión de números reales (α_j^n) es una sucesión de Cauchy. Entonces $\alpha_j^n \rightarrow \alpha_j$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Si hacemos $n = k$ y $m \rightarrow \infty$ en (1) obtenemos $\left\| \sum_{i=1}^r (\alpha_i^k - \alpha_i) x_i \right\| \leq K\epsilon$ para cada r . Por tanto, para cada $r \geq r_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right\| &= \left\| y - \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i - \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| y - \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i^k x_i - \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right\| \\ &< 2\epsilon + \left\| \sum_{i=1}^r (\alpha_i^k - \alpha_i) x_i \right\| \\ &< 2\epsilon + K\epsilon \\ &< (2 + K)\epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = y$ esto es $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. ■

Definición 2.2.11 Sean X un espacio de Banach y $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de proyecciones sobre X , decimos que:

1. El número $K = \sup_{n \geq 1} \|P_n\|$ es llamado la constante básica de la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Una base con constante 1 se denomina monótona.
3. Una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X se llama una base acotada si

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

4. La base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada normalizada si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota: Del teorema anterior podemos deducir que cualquier espacio de Banach con una base se puede dar una norma equivalente bajo el cual la constante básica se convierte en 1. En efecto, defina

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n x\| \text{ con } x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Si $n < m$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| &= \left\| P_n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_j \right) \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| P_n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_j \right) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|. \end{aligned}$$

Por tanto $\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|$ para $n < m$ y la base es monótona. ■

2.3. EJEMPLOS DE BASES DE SCHAUDER EN ESPACIOS DE BANACH

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de bases en espacios de Banach separables. Entre los más destacados tenemos el sistema de Schauder y el de Haar. Comenzaremos con bases en los espacios de Banach clásicos.

2.3.1. c_0 : El espacio de las sucesiones convergentes a 0

El espacio de las sucesiones convergentes a 0, con la norma del supremo es un espacio de Banach. Definimos una base de Schauder por:

$$e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}} \text{ donde } \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j; \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Veamos que es una base. Sea $x = (x_k) \in c_0$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$. Por tanto, $\sup_{k > n} |x_k| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_{\infty} = \sup_{k > n} |x_k| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Además, si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \eta_i) e_i = 0$. Así,

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \eta_i) e_i \right\|_{\infty} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - \eta_i| = 0.$$

Por tanto, $|x_i - \eta_i| = 0$ para $i = 1, 2, \dots$, esto es $x_i = \eta_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ lo que demuestra la unicidad de la representación. De lo anterior, concluimos que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Schauder para c_0 .

2.3.2. El espacio de las sucesiones convergentes

El espacio de las sucesiones convergentes es un subespacio cerrado de l_∞ y por tanto es un espacio de Banach con la norma del supremo que hereda de este último. Observemos también que c se obtiene añadiendo una recta a c_0 o, con más precisión, c_0 es un hiperplano en c . Concretamente, si denotamos por u a la sucesión constantemente igual a 1, es claro que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}u$.

Consideremos los vectores unidad $\{e_n\}$ definidos en el ejemplo anterior. El subespacio que generan, visto ahora como subespacio de c_0 , suele denotarse por c_{00} . Además vimos en el ejemplo anterior que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0 , y así añadiendo a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión constante igual a 1 se obtiene una base de Schauder de c y cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c$ se representa como:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) e_i + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot (1, 1, 1, \dots).$$

Es la representación de x en términos de la base de c .

2.3.3. El espacio l_p con $1 \leq p < \infty$

Para $1 \leq p < \infty$, el espacio de sucesiones:

$$l_p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$, es un espacio de Banach al cual se le puede definir una base por:

$$e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}} \text{ donde } \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j; \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge y por tanto existe un N tal que si $n \geq N$ se tiene $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p$. Así, para $n \geq N$ se tiene que:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \epsilon.$$

Por tanto

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \text{ en } l_p.$$

Por otro lado, si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \eta_k) e_k = 0.$$

Así,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \eta_k) e_k \right\|_p = 0 \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |x_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Lo que implica que $|x_k - \eta_k| = 0$ para cada $k = 1, 2, \dots$. Así, $x_k = \eta_k$ lo que demuestra la unicidad. Por tanto $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de l_p .

2.3.4. Base Sumante

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ con $e_n \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para c_0 , es decir, para cada $\varepsilon \in c_0$ con $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\varepsilon) x_n,$$

donde $x_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$ son los funcionales biortogonales de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N x_n^*(\varepsilon) x_n &= \sum_{n=1}^N (e_n^*(\varepsilon) - e_{n+1}^*(\varepsilon)) x_n \\ &= \sum_{n=1}^N (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) x_n = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n - \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n+1} x_n \\ &= \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n - \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon_n x_{n-1} = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n - \sum_{n=2}^N \varepsilon_n x_{n-1} - \varepsilon_{N+1} x_N \\ &= \sum_{n=1}^N \varepsilon_n (x_n - x_{n-1}) - \varepsilon_{N+1} x_N \\ &= \sum_{n=1}^N \varepsilon_n e_n - \varepsilon_{N+1} x_N. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left\| \varepsilon - \sum_{n=1}^N x_n^*(\varepsilon)x_n \right\| &= \left\| \varepsilon - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n e_n - \varepsilon_{N+1} x_N \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e_n - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n e_n - \varepsilon_{N+1} x_N \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n e_n + \varepsilon_{N+1} x_N \right\|_{\infty} \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n e_n \right\|_{\infty} + |\varepsilon_{N+1}| \|x_N\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e_n$ converge (ya que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de c_0) entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n e_n \right\| = 0,$$

y $\varepsilon_{N+1} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$ ya que $\varepsilon = (\varepsilon_n) \subset c_0$. Así

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varepsilon - \sum_{n=1}^N x_n^*(\varepsilon)x_n \right\|_{\infty} = 0.$$

Lo que muestra que $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\varepsilon)x_n$ con $x_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$. Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de c_0 . ■

2.3.5. Una Base en $l_2(\mathbb{N})$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $0 < |\frac{\beta}{\alpha}| < 1$. Sea $x_1 = (\alpha, \beta, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (0, \alpha, \beta, 0, \dots)$, $x_3 = (0, 0, \alpha, \beta, 0, 0, \dots)$, etc. Veamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de schauder en l_2 .

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder en l_2 debemos tener que para cada $x = (\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$ hay una única sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ y la serie es convergente en l_2 . Obtenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle x, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x_n, e_k \rangle = \lambda_1 \langle x_1, e_k \rangle + \lambda_2 \langle x_2, e_k \rangle + \dots + .$$

Es decir, la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha = \mathcal{E}_1 &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{\alpha} \\ \lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha = \mathcal{E}_2 &\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\mathcal{E}_2 - \frac{\beta}{\alpha} \mathcal{E}_1 \right) \\ \vdots &\Rightarrow \vdots \\ \lambda_{n-1} \beta + \lambda_n \alpha = \mathcal{E}_n &\Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{\alpha} \left(\mathcal{E}_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-k} \mathcal{E}_k \right) \end{aligned}$$

Así, la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si existe, tiene los valores mencionados arriba. Para tener una base de Schauder debemos mostrar que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in l_2$, es decir:

$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Pero, $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = (\lambda_1 \alpha, \lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha, \dots, \lambda_{n-1} \beta + \lambda_n \alpha, \lambda_n \beta, 0, \dots)$ y por tanto obtenemos:

$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n - x\|^2 = |\lambda_1 \alpha - \mathcal{E}_1|^2 + |\lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha - \mathcal{E}_2|^2 + \dots + |\lambda_{n-1} \beta + \lambda_n \alpha - \mathcal{E}_n|^2 + |\lambda_n \beta - \mathcal{E}_{n+1}|^2 + |\mathcal{E}_{n+2}|^2 + \dots$$

Tomando en consideración la expresión para $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenemos que:

$$\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n - x\|^2 = |\lambda_n \beta - \mathcal{E}_{n+1}|^2 + \sum_{k=n+2}^{\infty} |\mathcal{E}_k|^2.$$

Pero $\sum_{k=n+2}^{\infty} |\mathcal{E}_k|^2 \rightarrow 0$ ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_k|^2$ converge. También $\mathcal{E}_{n+1} \rightarrow 0$. Sabemos que si $\mathcal{E}_k \rightarrow 0$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces:

$$a_{n-1} \mathcal{E}_1 + a_{n-2} \mathcal{E}_2 + \dots + a_2 \mathcal{E}_{n-2} + a_1 \mathcal{E}_{n-1} \rightarrow 0.$$

Aplicando este hecho para $\lambda_n = \frac{1}{\alpha} \left(\mathcal{E}_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-k} \mathcal{E}_k \right)$ obtenemos que $\lambda_n \rightarrow 0$. Lo anterior, se puede garantizar puesto que: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k$ es absolutamente convergente, en efecto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^k < \infty, \quad \text{ya que } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1.$$

Por lo tanto, $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n - x\|^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ es una base de Schauder para el espacio l_2 . ■

2.3.6. El sistema de Haar

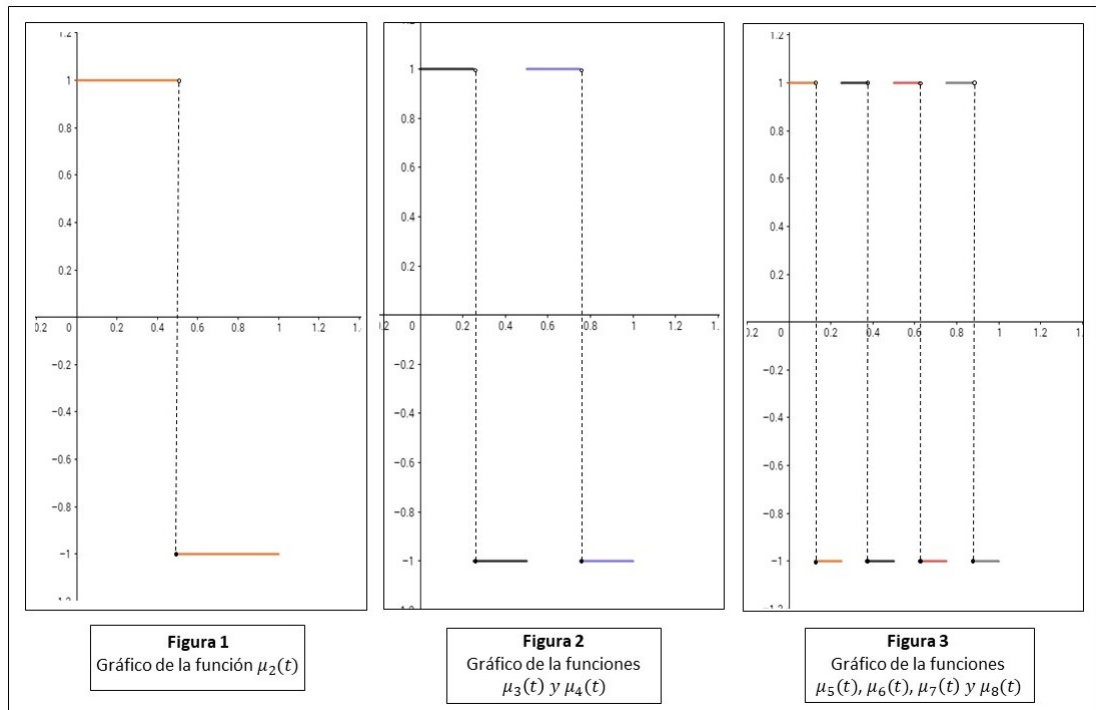


Figura 2.1: Base para el espacio $L_p[0, 1]$ con $1 \leq p < \infty$

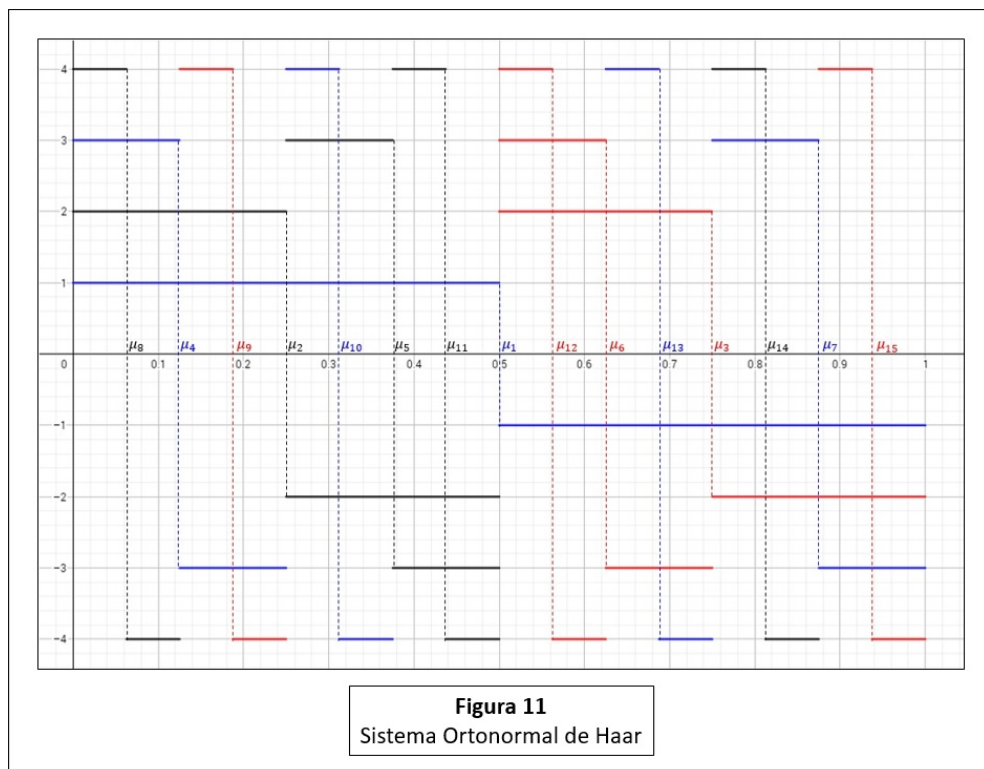


Figura 2.2: Base Ortonormal para el espacio $L_p[0, 1]$ con $1 \leq p < \infty$

El sistema de Haar $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre $[0, 1]$ es definido por $\mu_0 = 1$ sobre $[0, 1]$. Para $n \geq 1$ sea r el mayor entero tal que $2^r \leq n$, es decir, $2^r \leq 2^{r+1}$ y sea $k = n - 2^r$ entonces $0 \leq k \leq 2^r - 1$. Definimos el par:

$$\mu_n(t) = \begin{cases} 2^{r/2}, & \text{si } t \in \left[\frac{2k}{2^{k+1}}, \frac{2k+1}{2^{k+1}}\right); \\ -2^{r/2}, & \text{si } t \in \left[\frac{2k+1}{2^{k+1}}, \frac{2k+2}{2^{k+1}}\right); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Afirmación 1: Demostremos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de $L^p[0, 1]$ ($p \geq 1$) y en el caso de $L^2[0, 1]$ los $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son base ortonormal. Denotemos por $\mu_n = \mu_{2^r+k} = \mu_{r,k}$ con $k = n - 2^r$ y $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Comenzamos con el caso $L^2[0, 1]$ y luego seguiremos con $L^p[0, 1]$.

Primero; notemos que:

$$\|\mu_0\|^2 = \int_0^1 1 \, dt = 1.$$

Además, para μ_n tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mu_n\|^2 &= \int_0^1 [\mu_n(t)]^2 \, dt \\ &= \int_{\frac{2k}{2^{k+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{k+1}}} (2^{r/2})^2 \, dt + \int_{\frac{2k+1}{2^{k+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{k+1}}} (-2^{r/2})^2 \, dt \\ &= 2^r \left[\frac{2k+1}{2^{k+1}} - \frac{2k}{2^{k+1}} \right] + 2^r \left[\frac{2k+2}{2^{k+1}} - \frac{2k+1}{2^{k+1}} \right] \\ &= 2^r \left[\frac{1}{2^{r+1}} \right] + 2^r \left[\frac{1}{2^{r+1}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que en el caso L^2 , los $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son ortogonales. Es decir, mostremos que $\langle \mu_p, \mu_q \rangle = 0$ para $p < q$. Para ello defina $\sum(\mu) = \{t \in [0, 1] : \mu(t) \neq 0\}$. Entonces, $\sum(\mu)$ está formado por dos intervalos consecutivos. Supongamos que $p = 2^r + k$ y $q = 2^r + h$ con $0 \leq k < h < 2^r$ tenemos que $\mu_p(t)\mu_q(t) = 0$ sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$ y por tanto $\sum(\mu_p) \cap \sum(\mu_q) = \emptyset$ y $\langle \mu_p, \mu_q \rangle = 0$.

Supongamos ahora que r es variable, es decir, tenemos $p = 2^r + k$ ($0 \leq k < 2^r$) y $q = 2^s + h$ ($0 \leq h < 2^s$) con $r \neq s$. Luego, $2^r \leq p < 2^{r+1}$ y $2^s \leq q < 2^{s+1}$, entonces, $2^r \leq p < q < 2^{s+1}$ y por tanto $r < s + 1$ y como $r \neq s$ podemos suponer que $r < s$. Entonces, el conjunto de puntos de subdivisión en 2^{r+1} partes iguales están contenidos en los puntos de subdivisión de los 2^{s+1} partes. Entonces, tenemos los siguientes casos:

1. Si $\mu_p(t) = 0$ en ese intervalo, entonces, es claro que $\mu_p(t)\mu_q(t) = 0$ en ese intervalo.
2. Si $\mu_p(t) = 2^{r/2}$ entonces:

$$\begin{aligned}\langle \mu_p, \mu_q \rangle &= 2^{r/2} \int_0^1 \mu_q(t) dt \\ &= \int_{\frac{2h}{2^{h+1}}}^{\frac{2h+1}{2^{h+1}}} (2^{s/2})^2 dt + \int_{\frac{2h+1}{2^{h+1}}}^{\frac{2h+2}{2^{h+1}}} (-2^{s/2})^2 dt \\ &= 2^{r/2} \left[2^{s/2} \frac{1}{2^{s+1}} - 2^{s/2} \frac{1}{2^{s+1}} \right] = 0.\end{aligned}$$

3. Si $\mu_p(t) = -2^{r/2}$ entonces igual que en el caso 2, tenemos:

$$\langle \mu_p, \mu_q \rangle = -2^{r/2} \int_0^1 \mu_q(t) dt = 0.$$

Hemos agotado casi todos los casos posibles, los únicos casos que nos quedan son los siguientes:

$$a.) \frac{2k+1}{2^{k+1}} \left(\text{está en medio de } \sum (\mu_q) \right) \qquad b.) \frac{2k}{2^{k+1}} \text{ o } \frac{2k+2}{2^{k+2}}$$

Pero estos tres casos son imposibles ya que por el caso 1 tenemos:

$$\frac{2k+1}{2^{k+1}} = \frac{2h+1}{2^{s+1}} \Rightarrow 2h+1 = \frac{(2k+1)2^{s+1}}{2^{r+1}} \Rightarrow 2h+1 = 2^{s-r} = 2^{s-r}(2k+1),$$

y como $s > r$ lo anterior implica que un número impar es igual a un número par, lo que es imposible. El caso b.) tampoco es posible. Por tanto, $\langle \mu_p, \mu_q \rangle = 0$ para $p \neq q$.

Afirmación 2: Esta afirmación es válida tanto para $L^2[0, 1]$ como para $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$. Sea $F_n = \text{span}\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$. Demostremos que para cada n , existe una división de $[0, 1]$ en $n+1$ -intervalos disyuntos de la forma $[a, b)$ tal que en cada uno de estos intervalos toda función $w \in F_n$ es constante y recíprocamente cada función constante sobre estos intervalos pertenece a F_n . Esto es,

$$F_n = \text{span}\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \text{span}\{\chi_{I_p} : p = 0, 1, \dots, n\}.$$

En efecto, sea $n = 2^r + k$ fijo. Los 2^{r+1} intervalos de longitud $\frac{1}{2^{r+1}}$ que divide en 2^{r+1} partes al intervalo casi responde la pregunta, pero hay demasiados. Consideremos los intervalos de longitud $\frac{1}{2^{r+1}}$ hasta $\left[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}} \right)$ es claro que en cada uno de estos intervalos las funciones $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ son constantes. En el intervalo $\left[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}} \right)$ sabemos que μ_n es constante, por tanto, se pueden formar los μ_p para $0 \leq p \leq n-1$ y

de la misma forma con el intervalo $\left[\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}}\right)$. Cuando $k = 2^r - 1$ entonces no existe un intervalo, pero en el resto de casos sí los hay y es una cantidad par de intervalos.

Si agrupamos estos intervalos en grupos de a dos (contiguos) podemos ver que los μ_p son constantes en los intervalos agrupados arriba. En caso que no haya intervalo después $\left[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}}\right)$ tomamos los $n + 1 = 2^r$ intervalos de la división (caso donde $k = 2^r - 1$). Tenemos así los intervalos:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \left[0, \frac{1}{2^{r+1}}\right); \\
 I_1 &= \left[\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{2}{2^{r+1}}\right); \\
 I_2 &= \left[\frac{3}{2^{r+1}}, \frac{4}{2^{r+1}}\right); \\
 I_3 &= \left[\frac{5}{2^{r+1}}, \frac{6}{2^{r+1}}\right); \\
 &\vdots \\
 I_{2k-1} &= \left[\frac{2k-1}{2^{r+1}}, \frac{2k}{2^{r+1}}\right); \\
 I_{2k} &= \left[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}}\right); \\
 I_{2k+1} &= \left[\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}}\right); \\
 I_{2k+2} &= \left[\frac{2k+2}{2^{r+1}}, \frac{2k+4}{2^{r+1}}\right); \\
 I_{2k+3} &= \left[\frac{2k+4}{2^{r+1}}, \frac{2k+6}{2^{r+1}}\right); \\
 &\vdots \\
 I_{n-1} &= \left[\frac{2^{r+1}-4}{2^{r+1}}, \frac{2^{r+1}-2}{2^{r+1}}\right); \\
 I_n &= \left[\frac{2^{r+1}-2}{2^{r+1}}, 1\right).
 \end{aligned}$$

Los $n - 2k - 1$ últimos intervalos se pueden escribir como:

$$I_{2k+1} = \left[\frac{k+1}{2^r}, \frac{k+2}{2^r}\right), I_{2k+2} = \left[\frac{k+2}{2^r}, \frac{k+3}{2^r}\right), \dots, I_n = \left[\frac{2^r-1}{2^r}, 1\right).$$

Por tanto, hemos encontrado $n+1$ intervalos sobre el cual las funciones $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ son constantes. Ahora, si $w \in F_n$, entonces $w = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mu_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y por tanto w es constante sobre cada intervalo I_j con $0 \leq j \leq n$.

Recíprocamente, sea χ_{I_i} ($0 \leq i \leq n$) la función característica del intervalo I_i . Considere E_n el subespacio de $L^p[0, 1]$ formado por las funciones constantes sobre cada I_i . Es claro que F_n es un subespacio vectorial de E_n . Además, las funciones características son linealmente independientes y en número son $n + 1$ intervalos, por tanto $\dim E_n = n + 1$ de donde podemos concluir que $E_n = F_n$.

Esto nos permite usar las funciones mucho más simples χ_i en lugar de las funciones Haar en algunos argumentos. Por ejemplo, el conjunto $\text{span}\{\chi_I : I \text{ intervalo}\}$ es denso en $L^p[0, 1]$. Calculemos las proyecciones:

1. Caso $L^p[0, 1]$ con $p \neq 2$

Sea P_k la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ y Q_k la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{\chi_I : I \text{ intervalo}\}$. Entonces, $P_k f = Q_k f$ para todo $f \in L^p[0, 1]$. Pero Q_k es más fácil de calcular, ya que las I_k son disjuntos dos a dos, así:

$$\begin{aligned} P_k f &= Q_k f = \sum_{i=0}^n \langle f, m(I_i)^{-1/2} \chi_{I_i} \rangle m(I_i)^{-1/2} \chi_{I_i} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} f \right) \chi_{I_i}. \end{aligned}$$

Si llamamos Σ_k la σ -álgebra generada por los I_i , $i = 0, \dots, n$. Entonces $P_k f$ es la única función Σ_k medible tal que:

$$\int_I f = \int_I P_k f \quad \forall I \in \Sigma_k.$$

Ahora, consideremos $f \in L^1[0, 1]$; entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P_k f| &= \sum_{i=0}^n \left| \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} f \right| m(I_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \int_{I_i} |f| \\ &= \int_0^1 |f| = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ahora, si $1 < p < \infty$ y $f \in L^p[0, 1]$ usamos la desigualdad de Holder:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P_k f|^p &= \sum_{i=0}^n \left| \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} f \right|^p m(I_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^n m(I_i)^{1-p} m(I_i)^{p/q} \int_{I_i} |f|^p \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{I_i} |f|^p = \int_0^1 |f|^p. \end{aligned}$$

Así, $\|P_k\| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para el caso general, sea P la proyección ortogonal en el generado de $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$. Dada $f \in L^p[0, 1]$ escriba $f = f\chi_I + f\chi_J$ donde I y J son conjuntos disyuntos cuya unión es $[0, 1]$ tal que $f\chi_I \in \text{span}\{\mu_0, \dots, \mu_{2^r-1}\}$ y $f\chi_J \in \text{span}\{\mu_{2^r}, \dots, \mu_n\}$. Luego:

$$\begin{aligned} Pf &= P(f\chi_I) + P(f\chi_J) \\ &= P_{k-1}(f\chi_I)\chi_I + P_k(f\chi_J)\chi_J. \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \|Pf\|_p^p &= \|P_{k-1}(f\chi_I)\chi_I\|_p^p + \|P_k(f\chi_J)\chi_J\|_p^p \\ &= \|f\chi_I\|_p^p + \|f\chi_J\|_p^p = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Así, P es la proyección y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base monótona de $L^p[0, 1]$.

2. Caso $L^2[0, 1]$

A pesar que el argumento anterior aplica al caso $L^2[0, 1]$ veamos ese caso por separado con otro método. En efecto, dado $v \in L^2[0, 1]$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un $v_n \in F_n$ que satisface lo siguiente:

$$\|v - v_n\| = \inf_{w \in F_n} \|v - w\|.$$

Debemos probar que en cada intervalo $[a, b]$ donde todas las funciones $w \in F_n$ son constantes se tiene:

$$v_n(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt.$$

En primer lugar, para simplificar la notación del ítem anterior, denotemos por $I_i = [a_i, b_i)$ a los intervalos obtenidos anteriormente con longitud $\frac{1}{2^{r+1}}$ o $\frac{1}{2^r}$. Entonces, sea v_n la proyección sobre F_n , tenemos que v_n es constante en cada

intervalo I_i y por tanto podemos tomar como $v_n(a_i)$ en cada uno de esos intervalos.

Determinemos el valor de las constantes. En efecto,

$$\|v - v_n\|^2 = \int_0^1 (v - v_n)^2 dt = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{b_i} (v - v_n)^2 dt.$$

(Ya que los intervalos I_i son contiguos, disjuntos y la unión de ellos es el intervalo $[0, 1]$). Definamos:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|v - v_n\|^2 &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2 \int_{a_i}^{b_i} v(t)v_n(t) dt + \int_{a_i}^{b_i} [v_n(t)]^2 dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2v_n(a_i) \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt + [v_n(a_i)]^2 \int_{a_i}^{b_i} dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2v_n(a_i)(b_i - a_i)\varepsilon_i + [v_n(a_i)]^2(b_i - a_i) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt + (b_i - a_i)[v_n(a_i) - \varepsilon_i]^2 - (b_i - a_i)\varepsilon_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Es claro que al tomar $\varepsilon_i = v_n(a_i)$ minimizamos el término derecho (que prueba la existencia de v_n de forma independiente). Así, el valor sobre $[a_i, b_i]$ es el valor medio de v en ese intervalo. Por tanto,

$$v_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt \right) \mu_i.$$

Demostremos ahora que dada una función continua $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, \mu_n \rangle \mu_n(t),$$

uniformemente en relación a $t \in [0, 1]$. Como, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de F_n entonces:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, \mu_i \rangle \mu_i(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ y todo $t \in [0, 1]$, $|v(t) - v_n(t)| \leq \epsilon$. Como v es continua sobre $[0, 1]$, es uniformemente

continua. Así, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que si $s, t \in [0, 1]$ y $|s-t| \leq \eta$ tenemos $|v(s) - v(t)| \leq \epsilon$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} \leq \eta$. Sea $n \geq N$ y $t \in [0, 1]$ entonces existe un i con $0 \leq i \leq n$ tal que $t \in I_i(n)$ con $I_i(n) = [a_i, b_i]$ la función v_n sobre $I_i(n)$ toma el valor

$$\varepsilon_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt.$$

Entonces, por el Teorema de la Media existe un $\theta_i \in I_i(n)$ tal que $v_n(t) = v(\theta_i)$ tenemos $|v(t) - v_n(t)| = |v(t) - v(\theta_i)| \leq \epsilon$. Lo que completa la demostración. Así, en la norma de $L^2[0, 1]$ tenemos:

$$\|v - v_n\|^2 = \int_0^1 |v(t) - v_n(t)|^2 dt \leq \|v - v_n\|_\infty^2 \leq \epsilon^2.$$

Así, $\|v - v_n\|_\infty \leq \epsilon$. Por tanto, usando el hecho de que las funciones continuas son densas en $L^2[0, 1]$ obtenemos que:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, \mu_n \rangle \mu_n \text{ en } L^2[0, 1].$$

■

Nota: Se puede demostrar que el sistema de Haar es una base monótona en $L^p[0, 1]$. Suponga que $1 \leq p < \infty$. La función $\theta(t) = t^p$ con $t \geq 0$ es creciente y convexa. Esto se sigue de $\theta'(t) = pt^{p-1} \geq 0$ y $\theta''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Esto implica que $\psi(t) = |t|^p$ con $t \in \mathbb{R}$ es también una función convexa. Además, para dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tal que $\alpha + \beta = 1$, entonces:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = |\alpha x + \beta y|^p \leq (\alpha|x| + \beta|y|)^p \leq \alpha|x|^p + \beta|y|^p = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y)$$

En particular de $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ conseguimos: $|x|^p \leq \frac{1}{2}|x+y|^p + \frac{1}{2}|x-y|^p$ lo que es equivalente a tener que: $2|x|^p \leq |x+y|^p + |x-y|^p$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Ahora, sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, escalares arbitrarios y considere las dos funciones $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i$ y $g = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i h_i = f + \lambda_{n+1} h_{n+1}$. También, sea $[a, b]$ el intervalo soporte de h_{n+1} , y como las funciones h_1, h_2, \dots, h_n son todas constantes sobre $[a, b]$, sigue que existe algún escalar c tal que $f(c) = c$ para todo $c \in [a, b]$. Lo anterior implica que las funciones f y g coinciden fuera de $[a, b]$, es decir, $f = c$ sobre $[a, b]$ y g toma el valor $c + \lambda_{n+1}$ sobre el intervalo $[a, \frac{a+b}{2}]$ y el valor $c - \lambda_{n+1}$ sobre el intervalo $[\frac{a+b}{2}, b]$. Lo anterior lo podemos ver como:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)|^p dt &= |c|^p(b-a) \\ &= 2|c|^p \left(\frac{b-a}{2} \right) \\ &\leq |c + \lambda_{n+1}|^p \left(\frac{b-a}{2} \right) + |c - \lambda_{n+1}|^p \left(\frac{b-a}{2} \right) \\ &= \int_a^b |g(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\int_0^1 |f(t)|^p dt \leq \int_0^1 |g(t)|^p dt$, por lo cual tenemos que:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \right\|_p.$$

Esto muestra que $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base monótona de $L_p[0, 1]$. ■

2.3.7. El espacio de las funciones continuas $C([0, 1])$

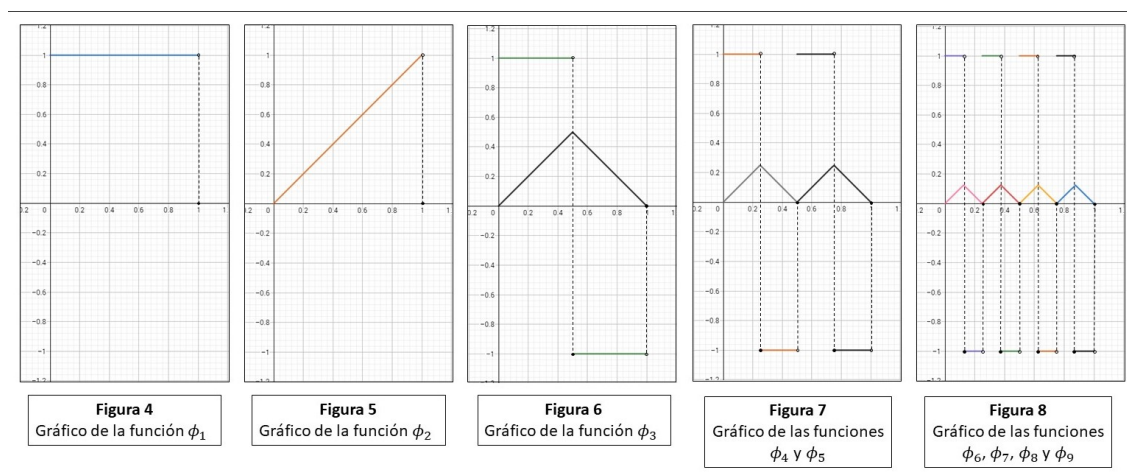


Figura 2.3: Base para el espacio de las funciones continuas $C([a, b])$

Consideremos en el espacio de Banach $C[0, 1]$ la sucesión $\varphi_0(t) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$, $\varphi_1(t) = t$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego, si $n = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 1, 2, \dots, 2^n$ entonces:

$$\phi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} 2^{n+1} \left(t - \frac{2k-2}{2^{n+1}} \right), & \text{si } t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right); \\ 2^{n+1} \left(\frac{2k}{2^{n+1}} - t \right), & \text{si } t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $\phi_{2^n+k} \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ y $l = 1, 2, \dots, 2^k$. Veamos que si $f \in C[0, 1]$ entonces la serie

$$f(0)\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n,$$

donde $a_1 = f(1) - f(0)$ y para $n = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 1, 2, \dots, 2^n$

$$a_{2^n+k} = \frac{1}{2} \left[f \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) - f \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}} \right) - f \left(\frac{2k}{2^{n+1}} \right) + f \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) \right],$$

converge uniformemente a f en $[0, 1]$. En el intervalo $[0, 1]$, ordenamos a los racionales diádicos, es decir a los de la forma $\frac{m}{2^n}$, como sigue: $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ y para $m = 2^n + k$ con $1 \leq k \leq 2^n$, $m = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$. Denotemos por ϱ_0 a la función definida en $[0, 1]$ mediante $\varrho_0(t) = f(0)$ y por ϱ_m la función poligonal dada por $\varrho_m(s_i) = f(s_i)$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y lineal entre dos s_i consecutivos con $i \leq m$. Entonces ϱ_m converge uniformemente a f en $[0, 1]$. En efecto, entre dos pares consecutivos s_{i_1}, s_{i_2} tenemos

$$\varrho_m[\lambda s_{i_1} + (1 - \lambda)s_{i_2}] = \lambda f(s_{i_1}) + (1 - \lambda)f(s_{i_2}), \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como f es uniformemente continua en $[0, 1]$, existe un $\eta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(t') - f(t'')| < \epsilon$ siempre que $t', t'' \in [0, 1]$ y $|t' - t''| < \eta(\epsilon)$. Como la sucesión $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es densa en $[0, 1]$ existe un entero tal que para $n > N(\eta(\epsilon))$ tenemos: $\max_{i_1, i_2} |s_{i_1} - s_{i_2}| < \eta$ donde el máximo es tomado sobre todos los pares consecutivos de $\{s_i\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} |f(t) - \varrho_m(t)| &= |f(t) - \lambda f(s_{i_1}) + (1 - \lambda)f(s_{i_2})| \\ &\leq \max_{t', t'' \in [s_{i_1}, s_{i_2}]} |f(t') - f(t'')| \\ &< \epsilon \quad \text{para } n > N. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$ para $n > N$. así, $\varrho(t)$ converge uniformemente a f . De esto sigue que la serie $\varrho_0(t) + \sum_{m=1}^\infty (\varrho_m(t) - \varrho_{m-1}(t))$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$. Sea $m = 2^n + k$. Como:

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} < s_m < \frac{2k}{2^{n+1}},$$

entonces, $\varrho_m(t) = \varrho_{m-1}(t)$ para cada $t \notin (\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}})$. Además,

$$\varrho_m(t) - \varrho_{m-1}(t) = a_m \phi_m(t).$$

Por tanto, la serie $\varrho_0(t) + \sum_{m=1}^\infty (\varrho_m(t) - \varrho_{m-1}(t)) = \varrho_0 + \sum_{m=1}^\infty a_m \phi_m(f)$ converge uniformemente a $f(t)$. Por tanto, el espacio cerrado generado por la sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es todo $C[0, 1]$.

Por otro lado, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales la función

$$f = a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^m a_n \phi_n \text{ coincide con } g = a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n,$$

para todo $t \in [0, 1]$ que no se encuentra en $(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}})$ y su gráfica es una poligonal cuyos vértices están en los puntos con abscisa s_i para $i = 1, 2, \dots, m$. Por tanto,

$$\left\| a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n \right\|_\infty \leq \left\| a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^m a_n \phi_n \right\|_\infty,$$

lo que demuestra que es una base monótona. ■

2.3.8. l_∞ : Un espacio de Banach sin base de Schauder

Puesto que l_∞ es un espacio normado, es suficiente demostrar que l_∞ no es separable. Para ello, veamos que todo subconjunto denso es no numerable.

Sea B un subconjunto denso de l_∞ , y sea $A \subset l_\infty$ el conjunto de todas las sucesiones compuestas por ceros y unos cuyo cardinal es no numerable (mayor que $\text{card}(\mathbb{N})$). Si $\text{card}(B) \geq \text{card}(A)$, entonces B es no numerable.

Veamos porqué el cardinal de B es mayor o igual al cardinal de A . Sean $a = (a_k)$ y $d = (d_k)$ dos elementos distintos de A , es decir, dos sucesiones distintas compuestas de ceros y unos. Entonces $\|a - d\|_\infty = 1$ y por lo tanto $B_{d_\infty}(a, \frac{1}{3}) \cap B_{d_\infty}(d, \frac{1}{3}) = \phi$.

Por otro lado, todo subconjunto denso B tiene al menos un punto en cada una de estas bolas. Por lo tanto $\text{card}(B) \geq \text{card}(A)$. Luego, todos los subconjuntos densos de l_∞ son no numerables. Por lo cual, no hay subconjuntos densos y numerables; de donde se puede concluir que l_∞ es no separable.

2.3.9. Una sucesión en X que genera a X pero que no es una base de X

Veamos ahora un ejemplo de una sucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X tal que $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $[x_n]_{n \in \mathbb{N}} = X$ pero las proyecciones P_n no son uniformemente convergentes y por tanto no es una base de X .

Sea Π el círculo unitario $\{z \in \mathbb{C} = |z| = 1\}$. Denotemos un elemento típico de Π por $e^{i\theta}$ y entonces podemos identificar el espacio $C_c(\Pi)$ de funciones continuas de valores complejos sobre Π con el espacio de funciones continuas 2π -periódicas sobre \mathbb{R} . Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $e_n \in C_c(\Pi)$ es la función tal que $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. La cuestión que deseamos abordar es que la sucesión $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2}, \dots)$ es una base de $C_c(\Pi)$.

Veremos que no lo es. Aunque este es un resultado clásico en el Análisis de Fourier que es equivalente a la afirmación de que hay una función continua cuya serie de Fourier no converge en algún punto, demostraremos esto a continuación. Los coeficientes de Fourier de $f \in C_c(\Pi)$ son definidos por la fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Los funcionales lineales $e_n^* : C_c(\Pi) \rightarrow \mathbb{C}$ por $e_n^*(f) = \hat{f}(n)$ son biortogonales a la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. La serie de Fourier de f es la expresión formal

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Para cada entero $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n : C_c(\Pi) \rightarrow C_c(\Pi)$ el operador $T_n(f) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k)e_k$ que nos da la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f . Entonces:

$$\begin{aligned} T_n f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(t) e^{ik(\theta-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t) \sum_{k=-n}^n e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t) \frac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\text{sen}(\frac{t}{2})} dt. \end{aligned}$$

La función $D_n(t) = \frac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\text{sen}(\frac{t}{2})}$ es conocido como núcleo de Dirichlet. Consideremos también los operadores $A_n = \frac{1}{n}(T_0 + \dots + T_{n-1})$ con $n = 2, 3, 4, \dots$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_n f(\theta) &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\text{sen}(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t) \left(\frac{\text{sen}(\frac{nt}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

La función $F_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\text{sen}(\frac{nt}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \right)^2$ es llamado el núcleo de Fejer. Note que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1.$$

Sin embargo, una diferencia crucial es que F_n es una función positiva mientras que D_n no lo es. Vamos a demostrar que si $f \in C_c(\Pi)$ entonces $\|A_n f - f\| \rightarrow 0$. Como f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ encontramos un $0 < \delta < \Pi$ tal que $|\theta - \theta'| < \delta$ implica $|f(\theta) - f(\theta')| \leq \epsilon$. Entonces, para cualquier θ tenemos:

$$A_n f(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) (f(\theta-t) - f(\theta)) dt.$$

Entonces,

$$\|A_n f - f\| \leq \|f\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt + \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) dt.$$

Ahora,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\delta}{2})},$$

y así, $\limsup \|A_n f - f\| \leq \epsilon$. Lo que demuestra que $[e_n]_{n \in \mathbb{Z}} = C_c(\Pi)$.

Como los funcionales biortogonales son dados por los coeficientes de Fourier, sigue que si $\{e_0, e_1, e_{-1}, \dots\}$ es una base, entonces los operadores de sumas parciales $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfacen $s_{2n+1} = T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para demostrar que esto no es una base es suficiente demostrar que la sucesión de operadores $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente limitada. Sea $\varphi \in C_c(\Pi)^*$ dado por $\varphi(f) = f(0)$. Entonces,

$$\varphi(T_n f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(-t) dt.$$

Entonces,

$$\|T_n^* \varphi\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Así, ya que $|\text{sen}(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|T_n\| &\geq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{(2n+1)\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\text{sen}(t)}{\text{sen}\left(\frac{t}{2n+1}\right)} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\text{sen}(t)|}{t} dt. \end{aligned}$$

Por el lema de Fatou tenemos:

$$\liminf \|T_n\| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx = \infty.$$

Por tanto, por el principio de acotación uniforme debe existir $f \in C_c(\Pi)$ tal que $((T_n f(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ es no limitado. Si trabajamos con el espacio de funciones reales de valor real $C(\Pi)$ exactamente los mismos cálculos muestran que el sistema trigonométrico $\{1, \cos(\theta), \text{sen}(\theta), \cos(2\theta), \text{sen}(2\theta), \dots\}$ no es una base. De hecho, los operadores $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son ilimitados en el espacio $C(\Pi)$ y corresponden a los operadores de sumas parciales (P_{2n+1}) como antes. ■

Capítulo 3

SUCESIONES BÁSICAS Y EQUIVALENTES

De gran importancia para el desarrollo de nuestros objetivos es la noción de sucesión básica. Es por ello que en este capítulo presentaremos la base teórica que motiva este trabajo, es decir, introduciremos la teoría relacionada a las sucesiones básicas y resultados que son importantes y necesarios para el desarrollo de este trabajo.

3.1. SUCESIONES BÁSICAS

Definición 3.1.1 (Sucesión Básica) La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será llamada sucesión básica en X si para todos los puntos $x \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ podemos encontrar una única sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares tal que la serie $\sum_{n=1}^k a_n x_n$ converge a x .

Para reconocer una sucesión de elementos en un espacio de Banach como sucesión básica usamos la siguiente caracterización, el cual es una condición de las proyecciones sobre subconjuntos finitos $[x_i]_{i=1}^n$. Esta caracterización es conocida como **Criterio de Grunblum**.

Teorema 3.1.2 (Criterio de Grunblum) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores no nulos en un espacio de Banach X . Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica si y solo si existe una constante finita $K > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y cualquier entero $m < n$ tenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Demostración: Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base en el espacio lineal cerrado $H = [x_n]$ y para toda $k \in \mathbb{N}$ defina: $P_k : H \rightarrow H$ por:

$$P_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^k a_n x_n$$

Como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de H , entonces los funcionales x_k^* son continuos en H y por tanto P_k es continuo en H para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, si $x \in H$ entonces $x = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k x$. Así, $(P_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ es limitado para cada $x \in H$ y por el Teorema de Banach-Steinhaus se tiene que $\sup_n \|P_n\| < \infty$. De ello que, para $m < n$ y $\sum_k a_k x_k \in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\| &= \left\| P_m \sum_k a_k x_k \right\| \\ &= \left\| P_m P_n \sum_k a_k x_k \right\| \\ &= \left\| P_m \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \\ &\leq \|P_m\| \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \\ &\leq \sup_n \|P_n\| \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|. \end{aligned}$$

Hagamos $K = \sup_n \|P_n\|$, entonces, si $m < n$, tenemos que:

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|.$$

Recíprocamente, suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores diferentes de cero y para la cual existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $m < n$ se cumple que:

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|.$$

Demostremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica.

1. **Unicidad** Observemos que la representación es única ya que si $\sum_n \alpha_n x_n = \sum_n \beta_n x_n = x$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$

$$|\alpha_j - \beta_j| \|x_j\| = \|(\alpha_j - \beta_j)x_j\| \leq K \left\| \sum_{i=j}^{j+p} (\alpha_i - \beta_i)x_i \right\| \rightarrow 0 \text{ cuando } p \rightarrow \infty.$$

Así, $|\alpha_j - \beta_j| = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Luego, $\alpha_j = \beta_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

2. **Existencia** Consideremos E , el subespacio de H formado por las combinaciones lineales finitas de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; entonces E es denso en H . Definamos ahora el operador $P_m : E \rightarrow [x_k]_{k \in \mathbb{N}}$ definido por:

$$P_m \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} a_k x_k.$$

Por densidad de E en H , P_m se extiende a H con la misma norma, esto es, existe $P'_m : H \rightarrow [x_k]_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|P'_m\| = \|P_m\| \leq K$. De esto, podemos deducir la continuidad de los funcionales coordenados, que son dados por $x'_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Definidos mediante la fórmula,

$$x'_n(x) x_n = P_n(x) - P_{n-1}(x), \quad \forall x \in E.$$

Así,

$$|x'_n(x)| = \frac{\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|}{\|x_n\|} \leq \frac{2K}{\|x_n\|}, \quad \forall x \in E.$$

Por tanto $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en E y por densidad existe $x_n^* : H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que x_n^* es continua y extiende a x'_n en E . Finalmente, solo nos falta demostrar que para todo $x \in H$, esta se puede escribir como $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. En efecto, sea $x \in H$ y $\epsilon > 0$. Como E es denso en H , existe un $y = \sum_{k=1}^{n_\epsilon} a_k x_k$ en E tal que $\|x - y\| < \epsilon$. Luego, si $n \geq n_\epsilon$ entonces:

$$\begin{aligned} \|x - P'_n x\| &\leq \|x - y\| + \|y - P'_n y\| + \|P'_n x - P'_n y\| \\ &< \epsilon + \|y - P'_n y\| + \|P'_n(x - y)\|. \end{aligned}$$

Como $n \geq n_\epsilon$, entonces $P'_n y = P_n y = \sum_{k=1}^{\min\{n, n_\epsilon\}} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n_\epsilon} a_k x_k = y$, así, $\|y - P'_n y\| = 0$. Luego:

$$\|x - P'_n x\| < \epsilon + K\|x - y\| = \epsilon + K\epsilon = (1 + K)\epsilon, \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n x = x$, $\forall x \in H$ lo que completa la demostración. Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de H . ■

De este teorema, podemos fácilmente demostrar:

Teorema 3.1.3 Sea X un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de X . Entonces $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica.

Demostración: Utilizaremos el Teorema 3.1.2. Es claro que $x_{n_k} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que existe una constante $M > 0$ tal que para $n, m \in \mathbb{N}$ con $m < n$ tenemos:

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_{n_k} x_{n_k} \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n a_{n_k} x_{n_k} \right\|.$$

Ahora, sea $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales coordenados asociada a la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y tome l_k la sucesión creciente de enteros positivos complementarios a $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Entonces, $x_{l_m}^*(x_{n_k}) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda $k \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de los x_n^* tenemos que $x_{l_m}^*(x) = 0$ para cada $x \in [x_{n_k}]_{n \in \mathbb{N}}$ y por tanto, $x = \sum_{k=1}^{\infty} e_{n_k}^*(x) a_{n_k}$ lo que completa la demostración. ■

Teorema 3.1.4 Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X y $T : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en Y .

Demostración: Utilizaremos el Teorema 3.1.2. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X , existe una constante $C > 0$ tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $m < n$ tenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Como, T es un isomorfismo existen constantes $K, R > 0$ tal que $K\|x\| \leq \|T(x)\| \leq R\|x\|$ para todo $x \in X$. Luego, si $n, m \in \mathbb{N}$ con $m < n$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i T(x_i) \right\| &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i \right) \right\| \\ &\leq R \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \\ &\leq R \cdot C \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &= \frac{R \cdot C}{K} \left\| T \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \right\| \\ &= M \left\| \sum_{i=1}^n a_i T(x_i) \right\|. \end{aligned}$$

■

Ahora, si X es un espacio de Banach con una base, su espacio dual X^* puede no tener base, por ejemplo, l_1 tiene base pero l_∞ no tiene. Pero, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.5 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base en un espacio de Banach X con constante básica K . Entonces, $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X^* , donde x_n^* son los funcionales lineales coordenados asociados a x_n con constante básica K .

Demostración: Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de proyecciones de X definida para $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, por $P_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Por hipótesis, existe una constante $K > 0$ tal que $\|P_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $P_n^* : X^* \rightarrow X^*$ el adjunto de P_n para cada

$n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\|P_n^*\| = \|P_n\|$ y $(P_n^*y^*)(x) = y^*(P_n(x))$ para todo $y^* \in X^*$ y $x \in X$.

Además, si $n < m$:

$$\begin{aligned}
 P_n^* \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^* \right) (x) &= \sum_{i=1}^m a_i x_i^* (P_n(x)) \\
 &= \sum_{i=1}^m a_i x_i^* \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) \\
 &= a_1 x_1^* \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) + \dots + a_n x_n^* \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) + \underbrace{\dots + a_m x_m^* \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right)}_0 \\
 &= a_1 x_1^*(x) + \dots + a_n x_n^*(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k x_k^*(x), \quad \forall x \in X.
 \end{aligned}$$

Luego, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base con constante K se tiene:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\| &= \left\| P_n^* \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right) \right\| \\
 &\leq \|P_n^*\| \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\| \\
 &\leq K \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\|.
 \end{aligned}$$

Y aplicando el Teorema 3.1.2, obtenemos que $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica. ■

Ejemplo: Considere en l_1 la sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $h_1 = e_1$ y $h_n = e_{n-1} - e_n$ con $n \in \mathbb{N}$ donde $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la base de vectores coordenados unitarios de l_1 . Por el ejemplo 2.3.4 sabemos que $x_n = \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{n\text{-veces}}$ es una base de c_0 . Ahora note

que la sucesión de funcionales en $c_0^* = l_1$ asociado a la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, por el teorema anterior $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica, por lo tanto $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es una base de l_1 ya que por ejemplo $e_1 \notin \text{span}[h_n]_{n \in \mathbb{N}}$, pues si $e_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i$ entonces

$$e_1^*(e_1) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(e_1) = a_1,$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= e_1^*(e_n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i (e_{n-1} - e_n)(e_n) \\ &= a_{n-1} - a_n. \end{aligned}$$

Por tanto, $a_n = a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, así $a_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Pero esto no es posible ya que $a_n \rightarrow 0$. ■

En los ejemplos del capítulo anterior vimos que todos los espacios de Banach separables familiares tienen una base. Esto fue bien conocido por Banach, lo que le llevó a preguntar:

¿Cada espacio de Banach separable tiene una base?

La respuesta a esta pregunta es NO, y fue resuelta 40 años después por **Per Enflo** (actualmente en Kent State) y como es de esperarse, un problema que demoró 40 años en resolverse debe tener una solución larga, y no la estudiaremos en este trabajo. Aquí, hablaremos sobre la siguiente pregunta

¿Cada espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica?

La respuesta es Sí y este resultado se le debe a Mazur. En este trabajo daremos una breve prueba de éste, para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.1.6 (ε -red) Sea A un conjunto relativamente compacto en un espacio de Banach X . Un conjunto finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq A$ es llamado una ε -red de A si para todo $y \in A$ existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\|y - y_i\| \leq \varepsilon$.

Un teorema conocido es el siguiente:

Teorema 3.1.7 Si A es un subconjunto compacto de un espacio de Banach de dimensión finita X entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un ε -red de A .

Nota: Suponga que X es un espacio normado de dimensión infinita y y_1^*, \dots, y_n^* son funcionales lineales en X , entonces

$$\bigcap_{i=1}^n \ker y_i^* \neq \{0\}.$$

En efecto, si $\bigcap_{i=1}^n \ker y_i^* = \{0\}$ podemos definir $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)).$$

Como y_1^*, \dots, y_n^* son lineales, entonces T es lineal y $x \in \ker T$ si y solo si $Tx = 0$ es decir, si $y_i^*(x) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ tenemos que $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker y_i^*$ por lo cual $x = 0$. Así, $\ker T = \{0\}$ y por tanto X es isomorfo a TX . Ahora, TX es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y por tanto es de dimensión finita, esto quiere decir que X es de dimensión finita lo que contradice la hipótesis sobre X , concluyendo así la demostración. ■

Lema 3.1.8 Sea F un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio de Banach de dimensión infinita X , y tome $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|,$$

para todo $y \in F$ y todos los escalares λ .

Demostración: Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como F es de dimensión finita, el conjunto

$$S_F = \{y \in F : \|y\| = 1\},$$

es compacto en F , y por Teorema 3.1.7 podemos escoger una $\frac{\varepsilon}{2}$ -red de S_F , es decir, existen $z_1, z_2, \dots, z_k \in S_F$ tal que

$$S_F \subseteq \bigcup_{i=1}^k B\left(z_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por el corolario del Teorema de Hanh-Banach para cada $i = 1, 2, \dots, k$ existen funcionales $z_i^* \in X^*$ tal que $z_i^*(z_i) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k$. Por la nota anterior existe un x de norma 1 tal que $x \in \bigcap_{i=1}^k \ker z_i^*$. Así, si $y \in F$ e $y \neq 0$, entonces existe un $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - z_{i_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{y}{\|y\|} + \alpha x \right\| &= \left\| \frac{y}{\|y\|} - z_{i_0} + z_{i_0} + \alpha x \right\| \\
&\geq \|z_{i_0} + \alpha x\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} - z_{i_0} \right\| \\
&\geq z_{i_0}^*(z_{i_0} + \alpha x) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \underbrace{z_{i_0}^*(z_{i_0})}_{=1} + \underbrace{\alpha z_{i_0}^*(x)}_{=0} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Así, tomando $\lambda = \alpha\|y\|$, tenemos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|y + \lambda x\| \geq \frac{\|y\|}{1 + \varepsilon}, \text{ esto es}$$

$$(1 + \varepsilon) \|y + \lambda x\| \geq \|y\|.$$

■

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos continuar con el siguiente teorema.

Teorema 3.1.9 *Todo espacio de Banach X de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

Demostración: Fijemos una sucesión $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tal que

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mathcal{E}_n) < \infty.$$

Para ello considere por ejemplo $\mathcal{E}_n = e^{n^{-2}} - 1$ con $n \in \mathbb{N}$. Escoja un elemento $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$ y defina el espacio 1-dimensional $F_1 = \text{span}\{x_1\}$. Entonces, por el Lema 3.1.8 existe un $x_2 \in X$ con $\|x_2\| = 1$ tal que para cada $x \in F_1$ se tiene:

$$\|x\| \leq (1 + \mathcal{E}_1) \|x + \lambda x_2\|.$$

Defina el espacio 2-dimensional $F_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$. Entonces, por el Lema 3.1.8 existe $x_3 \in X$ con $\|x_3\| = 1$ tal que para cada $x \in F_2$ se tiene:

$$\|x\| \leq (1 + \mathcal{E}_2)\|x + \lambda x_3\|.$$

Repitiendo el proceso, si tomamos el espacio n-dimensional $F_n = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ podemos encontrar un $x_{n+1} \in X$ con $\|x_{n+1}\| = 1$ tal que para cada $x \in F$ se tiene que:

$$\|x\| \leq (1 + \mathcal{E}_n)\|x + \lambda x_{n+1}\|.$$

Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tenemos:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \leq (1 + \mathcal{E}_n) \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right\|.$$

Por tanto, para cualesquiera enteros m, n con $m \leq n$ ($n = m + k$) y $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ números reales, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k \right\| &\leq (1 + \mathcal{E}_m) \left\| \sum_{k=1}^{m+1} a_k x_k \right\| \\ &\leq (1 + \mathcal{E}_m)(1 + \mathcal{E}_{m+1}) \left\| \sum_{k=1}^{m+2} a_k x_k \right\| \\ &\leq (1 + \mathcal{E}_m)(1 + \mathcal{E}_{m+1}) \dots (1 + \mathcal{E}_{m+k}) \left\| \sum_{k=1}^{m+k} a_k x_k \right\| \\ &\leq M \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante básica M . ■

Definición 3.1.10 Decimos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X es seminormalizada si existe una constante $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{K} \leq \|x_n\|_X \leq K,$$

y normalizada si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\|_X \leq 1.$$

Lema 3.1.11 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica en un espacio de Banach con constante de base K . Entonces si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que:

$$|a_n| \|x_n\| \leq 2K \|x\|.$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es además seminormalizada y para cada n vale que: $\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M$, entonces:

$$\sup_n |a_n| \leq 2KM \|x\|.$$

Demostración: Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Entonces para cada $n \geq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} |a_n| \|x_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ &= \|P_n x\| + \|P_{n-1} x\| \\ &\leq 2K \|x\|. \end{aligned}$$

Probando así la primera parte del teorema. La segunda es inmediata. ■

Nota

1. El teorema anterior se puede interpretar de la siguiente manera: Dada una sucesión básica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, si para cada n definimos $x_n^* : [x_n]_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}$ mediante:

$$x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n,$$

entonces, x_n^* es un funcional acotado con:

$$\|x_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}.$$

2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base en X , y $x \in X$, entonces podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n.$$

3. Si X es un espacio de Banach con base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y si $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = x \in X$, entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_n^*(z_m) = x_n^*(x).$$

3.2. SUCESIONES EQUIVALENTES

En esta sección estudiaremos las sucesiones equivalentes, las cuales son una técnica poderosa para estudiar la estructura isomórfica de Espacios de Banach. Primero, vamos a introducir un tipo especial de sucesiones básicas que nos proporcionará un método útil para obtener nuevas sucesiones básicas partiendo de la base de una sucesión básica.

Definición 3.2.1 (Sucesión básica Bloque) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base para un espacio de Banach X . Suponga que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números enteros con $p_0 = 0$ y que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son escalares. Entonces una sucesión de vectores no nulos $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X de la forma

$$\mu_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j x_j,$$

se llama una sucesión básica bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 3.2.2 Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para un espacio de Banach X con constante básica K . Sea $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual a K .

Demostración: Suponga que

$$\mu_k = \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j$$

con $k \in \mathbb{N}$ es una sucesión básica bloque de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces para cualesquiera escalares $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y enteros m, n con $m \leq n$ tenemos que $p_n < p_m$ y

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} b_k a_j x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=p_0+1}^{p_1} b_1 a_j x_j + \sum_{j=p_1+1}^{p_2} b_2 a_j x_j + \sum_{j=p_2+1}^{p_3} b_3 a_j x_j + \dots + \sum_{j=p_{m-1}+1}^{p_m} b_m a_j x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{p_m} c_j x_j \right\| \text{ donde } c_j = b_k a_j \text{ si } p_{k-1} \leq j \leq p_k \\ &< K \left\| \sum_{j=1}^{p_m} c_j x_j \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq K \left\| \sum_{j=p_0+1}^{p_1} b_1 a_j x_j + \sum_{j=p_1+1}^{p_2} b_2 a_j x_j + \sum_{j=p_2+1}^{p_3} b_3 a_j x_j + \dots + \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} b_n a_j x_j \right\| \\ &\leq K \left\| \sum_{k=1}^n b_k \mu_k \right\|. \end{aligned}$$

Es decir, $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisface el Teorema 3.1.2 y por tanto $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual a K . ■

Si tenemos una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podemos especificar cada $x \in X$ por sus coordenadas $(x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$, pero no es cierto que cada sucesión de escalares define un elemento de X . Así, X está coordinado por un cierto espacio de sucesiones y debemos tener la capacidad de reconocer la presencia de estas bases (o sucesiones básicas) en diferentes circunstancias y así saber si esta base es única salvo isomorfismos. Esto último motiva la siguiente definición:

Definición 3.2.3 (Sucesión Equivalente) Sean X e Y dos espacios de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones básicas de X e Y respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es **equivalente** a $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y solamente si cada vez que tomamos una sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \text{ converge}.$$

Teorema 3.2.4 Si E es c_0 o $l_p (1 \leq p < \infty)$ y $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la base canónica de E , entonces:

- Cualquier sucesión de bloques normalizadas $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sobre las bases $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base equivalente a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\overline{\text{span}}[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$ es isométrico a E .
- $\overline{\text{span}}[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$ es 1-complementado en E .

Demostración: Daremos esta prueba para $E = l_p$ y el caso de c_0 es similar.

a. Si

$$\mu_j = \sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} \lambda_n e_n,$$

entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$1 = \|\mu_j\|_p = \left(\sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} |\lambda|^p \right)^{1/p}.$$

Por tanto, para cada sucesión finita $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j a_j \mu_j \right\|_p &= \left[\sum_j |a_j|^p \left(\sum_{n=1}^{q_{j+1}} |\lambda|^p \right) \right]^{1/p} \\ &= \left(\sum_j |a_j|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la sucesión $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica y que la aplicación $T : \overline{\text{span}}[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow E$ es una isometría.

- b. Para demostrar b) vamos a escoger, para todo $j \in \mathbb{N}$, un funcional lineal μ_j^* sobre el espacio vectorial $\text{span}\{e_{q_j+1}, \dots, e_{q_{j+1}}\}$ con $\|\mu_j^*\| = 1$, $\mu_j^*(\mu_j) = 1$. Ahora, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in l_p$. Ponga

$$P(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j^* \left(\sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} a_n e_n \right) \mu_j.$$

Entonces, obtenemos:

$$\|P(x)\|_p^p = \sum_j \left| \mu_j^* \left(\sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} a_n e_n \right) \right|^p \leq \sum_j \left\| \sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} a_n e_n \right\|_p^p = \|x\|_p^p,$$

y por tanto P es una proyección de norma 1 de E sobre $\overline{\text{span}}[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$. ■

El próximo teorema nos da una condición para decidir si dos sucesiones básicas son equivalentes.

Teorema 3.2.5 Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones básicas en un espacio de Banach. Entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes si y solamente si existe un isomorfismo $T : [x_n] \rightarrow [y_n]$ tal que $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $X = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ e $Y = [y_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y defina $T : X \rightarrow Y$ por

$$T \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i.$$

Entonces T es lineal, inyectivo y sobreyectivo. Veamos que T es continuo. Para ello usaremos el teorema del Gráfico cerrado. Suponga que $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\mu_j \rightarrow \mu$ en X y $T\mu_j \rightarrow v$ en Y.

Consideremos $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ los funcionales biortogonales asociados a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente. Como

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu_j) x_n \quad \text{y} \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu) x_n,$$

y por hipótesis $\mu_j \rightarrow \mu$ y $T\mu_j \rightarrow v$, sigue de la continuidad de x_n^* y y_n^* que

$$x_n^*(\mu_j) \rightarrow x_n^*(\mu) \text{ y } y_n^*(T\mu_j) \rightarrow y_n^*(v) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por definición de T se tiene que

$$T\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu_j)y_n,$$

y por tanto

$$y_p^*(T\mu_j) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu_j)y_p^*(y_n) = x_p^*(\mu_j).$$

Ahora

$$x_p^*(\mu_j) \rightarrow x_p^*(\mu), \text{ cuando } j \rightarrow \infty \text{ y } p \in \mathbb{N}.$$

Luego, por unicidad del límite

$$y_p^*(v) = x_p^*(\mu) \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Así:

$$T\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu)y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(\mu)y_n = v.$$

Por el teorema del gráfico cerrado tenemos que T es continua, y como X e Y son espacios de Banach y T es sobreyectiva entonces T^{-1} es un isomorfismo. ■

De la caracterización de un isomorfismo tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.6 Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones básicas para los espacios de Banach X e Y respectivamente. Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y solo si, existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión de escalares $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se tiene:

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|. \quad (3.1)$$

Nota: Del Corolario 3.2.6 se sigue que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica y si encontramos que alguna sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisface (3.1) entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión básica y es equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una constante básica K y si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface 3.1 entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una constante básica a lo más $C^2 K$ ya que:

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq CK \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\| \leq C^2 K \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|.$$

Como un ejemplo particular, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de l_p si y solo si:

$$\frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

y es equivalente a la base de c_0 si:

$$\frac{1}{C} \sup_{i \geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \sup_{i \geq 1} |a_i|.$$

A continuación presentaremos dos caminos útiles para encontrar sucesiones básicas. El primero es un argumento de pequeña perturbación que nos dice que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en un espacio de Banach X y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión en X con $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ suficientemente rápido entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes. Este Teorema es debido a Krein-Milman-Rutman, pero antes tenemos el lema. Aquí I_X denota la función identidad en el espacio X .

Lema 3.2.7 *Sea X un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de X y $T : X \rightarrow Y$ un operador acotado tal que $\|T\| < 1$. Entonces $I_Y - T$ es invertible y*

$$\|(I_Y - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Además, si $Y = X$ entonces $I_X - T$ es un isomorfismo de X en X .

Demostración: Sea $y \in Y$ con $y \neq 0$. Entonces

$$\left\| T \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \leq \|T\| \|y\|^{-1} \|y\| = \|T\| \quad \text{y} \quad \|(I_Y - T)(y)\| \geq \|I_Y(y)\| - \|Ty\|.$$

Así,

$$\frac{\|(I_Y - T)(y)\|}{\|y\|} \geq \frac{\|I_Y(y)\|}{\|y\|} - \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = 1 - \|T\| \left\| T \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\|.$$

Luego,

$$\|(I_Y - T)(y)\| \geq 1 - \|T\| \left\| T \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \geq (1 - \|T\|)\|y\|,$$

y como

$$\|(I_Y - T)(y)\| \leq \|I_Y - T\| \|y\|.$$

Es decir,

$$\|I_Y - T\| \|y\| \geq \|(I_Y - T)(y)\| \geq (1 - \|T\|)\|y\|.$$

Así, $I_Y - T$ es invertible y $\|(I_Y - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$. Suponga que $Y = X$ y sea

$$s_n = \sum_{k=0}^n T^k,$$

donde para cada $n \geq 1$ tenemos que $T^n = T^{n-1} \circ T$ y $T^0 = I_X$. Si $\|T\| < 1$ entonces la serie de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ es convergente y por tanto es de Cauchy, así dado $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ con $m < n$ entonces

$$\sum_{k=m+1}^n \|T\|^k < \epsilon.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n T^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|T^k\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \|T\|^k \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Así, la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y por tanto, existe un operador acotado s tal que $s_n \rightarrow s$ en la norma de $L(X, X)$. Por otro lado, como $\|T^k\| \rightarrow 0$ entonces $T^k \rightarrow 0$ en la norma de $L(X, X)$ y así:

$$\begin{aligned}(I_X - T)s_n &= s_n - Ts_n \\ &= \sum_{k=0}^n T^k - \sum_{k=1}^{n+1} T^k \\ &= I_X - T^{n+1},\end{aligned}$$

y de la misma forma se demuestra que $s_n(I_X - T) = I_X - T^{n+1}$. Así, pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la norma de $L(X, X)$ obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_X - T)s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_X - T^{n+1}) \Rightarrow (I_X - T)s = I_X,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(I_X - T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_X - T^{n+1}) \Rightarrow s(I_X - T) = I_X,$$

probando así que $I_X - T$ es un isomorfismo con inversa s . ■

Teorema 3.2.8 (Principio de Perturbación pequeña) *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica seminormalizada con constante básica K tal que para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M.$$

1. *Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2KM}.$$

Entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Además, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también lo es.

2. Supongamos que $[x_n]$ es complementado por una proyección $P : X \rightarrow [x_n]$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión en X tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - y_k\| < \frac{1}{8KM\|P\|}.$$

Entonces $[y_n]$ es complementado con proyección $Q : X \rightarrow [y_n]$.

Demostración:

1. Sea $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales biortogonales asociados a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y sea $T : [x_n]_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X$ dado para cada $x \in [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Defina

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n.$$

Entonces $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el Teorema 3.1.11 sabemos que

$$\|x_n^*\| \|x_n\| \leq 2K,$$

es decir,

$$\|x_n^*\| \leq 2MK.$$

Así, para cada $x \in [x_n]$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|x - T(x)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(x_n - y_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| \|y_n - x_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|x\| \|y_n - x_n\| \leq 2KM\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - x_n\| \\ &< 2KM\|x\| \frac{1}{2KM} = \|x\|. \end{aligned}$$

Entonces $\|x - T(x)\| < \|x\|$ y por tanto $\|T(x)\| \leq 2\|x\|$, lo que demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n \text{ converge para cada } x \in X,$$

y también $\|I - T\| < 1$ en $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Así, por el lema anterior T es invertible y por tanto un isomorfismo. Luego $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Recordemos que si P es una proyección no trivial tiene norma $\|P\| \geq 1$ y entonces los funcionales biortogonales para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tienen norma $\|x_n^*\| \leq 2KM$, es decir, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ entonces $\sup_{n \geq 1} |a_n| \leq 2KM\|x\|$, además:

$$T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Por tanto, como: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y P es una proyección sobre $[x_n]$ entonces:

$$TP \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Demostremos que TP es un isomorfismo sobre $[y_n]_{n \in \mathbb{N}}$. En efecto, si

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \in [y_n]_{n \in \mathbb{N}},$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \|TP(y) - y\| &= \|TP(y - x)\| \\ &= \left\| TP \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n - x_n) \right) \right\| \\ &\leq \|T\| \|P\| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|y_n - x_n\| \\ &\leq \|T\| \|P\| 2KM \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - x_n\| \\ &\leq \|T\| \|P\| 2KM \|x\| \frac{1}{8KM \|P\|} \quad (\text{como } \|T\| \leq 2) \\ &\leq \frac{\|x\|}{2}. \end{aligned}$$

Como $\|P\| \geq 1$ y ya demostramos en el ítem 1 que:

$$\begin{aligned} \|x - T(x)\| &\leq 2KM \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \\ &\leq 2KM \|x\| \frac{1}{8KM \|P\|} \\ &\leq \frac{\|x\|}{4}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|x\| = \|x - T(x) + T(x)\| \leq \|x - T(x)\| + \|T(x)\| \leq \frac{1}{4}\|x\| + \|T(x)\|.$$

Luego

$$\frac{3}{4}\|x\| \leq \|T(x)\| = \|y\|,$$

es decir,

$$\|x\| \leq \frac{4}{3}\|y\|,$$

y así,

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{1}{3}\|y\|.$$

Reemplazando obtenemos:

$$\|TP(y) - y\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{1}{3}\|y\|, \quad \forall y \in Y.$$

En otras palabras,

$$\|TP - I_Y\| \leq \frac{1}{3} < 1.$$

Por tanto, aplicando el lema obtenemos que $S = TP|_Y$ es un operador lineal invertible sobre Y. Defina $Q = S^{-1}TP$, entonces Q es un operador cuyo dominio es X y rango Y, tal que, para cada $x \in X$:

$$\begin{aligned} Q^2x &= S^{-1} \underbrace{TPS^{-1}}_{I_Y} TP(x) \\ &= S^{-1}TP(x) \\ &= Q(x), \end{aligned}$$

lo que demuestra que Q es una proyección de X sobre Y. ■

Nota: La demostración que acabamos de dar nos da una pista sobre cómo se puede mejorar aún más este resultado. El teorema nos dice que si $\|x_n^*\|\delta < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde x_n^* es el n-ésimo funcional coordenado que por Hanh-Banach podemos tomar como un elemento de X^* .

Tenemos así el siguiente corolario:

Corolario 3.2.9 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica en X y sea $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ los funcionales coordenados asociados a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de vectores en X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \|x_n^*\| \delta < 1.$$

Entonces, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Si además $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementado por una proyección P con $\|P\| < \frac{1}{\delta}$ entonces $[y_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementado en X .

Demostración:

a. Vamos a definir $T : [x_n]_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X$ por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n.$$

Obviamente $Tx_n = y_n$ y de

$$\|x - Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| \|y_n - x_n\| \leq \delta \|x\|,$$

tenemos, $\|I - T\| < 1$ y por tanto T es un isomorfismo sobre su imagen. Por tanto, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Defina $A = I_X - P + TP$ donde T es definida en el ítem a). Así,

$$\|I - A\| = \|P - TP\| \leq \|P\|\delta < 1,$$

y por tanto A es invertible. El lector puede verificar que APA^{-1} es una proyección sobre $[y_n]_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Como una aplicación obtenemos el siguiente resultado conocido como Principio de Selección de Bessaga-Pelczyński.

Teorema 3.2.10 (Principio de Selección de Bessaga-Pelczyński) Sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base para un espacio de Banach X con constante básica K y funcionales lineales coordenados $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$. Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X que satisface las condiciones:

1. $\inf_{n \geq 1} \|x_n\| > 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} e_k^*(x_n) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que es equivalente a una sucesión básica bloque $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración: Sea $\alpha = \inf_n \|x_n\| > 0$ y K la constante básica de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $0 < v < \frac{1}{4}$. Escoja $n_1 = 1$ y $r_0 = 0$. Sabemos que $x_{n_1} = x_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} P_r x_1$ donde P_r es la r -ésima suma parcial con respecto a la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, para

$$\varepsilon = \frac{v\alpha}{2K} > 0,$$

existe un $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{n_1} - P_{r_1}x_{n_1}\| < \frac{v\alpha}{2K}.$$

Ahora, de la hipótesis 2 se deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{r_1}x_n\| = 0$, donde

$$P_{r_1}x_n = \sum_{k=1}^{r_1} e_k^*(x_n)x_k,$$

y por tanto existe un $n_2 > n_1$ tal que

$$\|P_{r_1}x_{n_2}\| < \frac{v^2\alpha}{2K}.$$

De nuevo, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{r_2}x_n\| = 0$ existe un $n_3 > n_2$ tal que

$$\|P_{r_2}x_{n_3}\| < \frac{v^3\alpha}{2K}.$$

Continuando así, conseguimos una sucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ en X y una sucesión creciente de enteros $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $r_0 = 0$ tal que

$$\|P_{r_{k-1}}x_{n_{k-1}}\| < \frac{v^k\alpha}{2K},$$

y

$$\|x_{n_k} - P_{r_k}x_{n_k}\| < \frac{v^k\alpha}{2K}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $y_k = P_{r_k}x_{n_k} - P_{r_{k-1}}x_{n_k}$ esto es,

$$y_k = \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} e_i^*(x_{n_k})x_{n_k}.$$

Entonces, como $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión bloque de la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces por el Teorema 3.2.2 $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante menor o igual a K . Además,

$$\begin{aligned} \|y_k - x_{n_k}\| &= \|P_{r_k}x_{n_k} - P_{r_{k-1}}x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_{n_k} - P_{r_k}x_{n_k}\| + \|P_{r_{k-1}}x_{n_k}\| \\ &< \frac{v^k\alpha}{2K} + \frac{v^k\alpha}{2K} \\ &= \frac{v^k\alpha}{K}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\alpha}{K} \sum_{k=1}^{\infty} v^k < \frac{\alpha}{3K} < +\infty.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k^*\| \|y_k - x_{n_k}\| &< \frac{\alpha}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \|e_k^*\| v^k \\
&\leq \frac{\alpha}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2K}{\|x_k\|} v^k \\
&\leq \frac{\alpha}{K} \frac{2K}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} v^k \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} v^k \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \\
&= 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right) \leq \frac{2}{3} < 1.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.2.8 obtenemos que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a una sucesión básica bloque $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como deseabamos demostrar. ■

Otra aplicación del Teorema 3.2.8 es el siguiente teorema que es muy usado en el estudio de los subespacios complementados de un espacio de Banach y en particular es una herramienta poderosa para investigar si un espacio es primario. A pesar que la demostración es similar al teorema anterior la presentaremos completa.

Teorema 3.2.11 *Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$. Si F es un subespacio cerrado de X de dimensión infinita existe una base bloque normalizada $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en X y existe un subespacio de dimensión infinita G de F que tiene una base normalizada $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j - \mu_j\| < \epsilon.$$

Demostración: Sea K la constante básica de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Demostremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe en F un y con $\|y\| = 1$ de la forma $y = \sum_{j=n}^{\infty} a_j x_j$. Para esto, considere la función de F en \mathbb{R}^n por $Tz = (x_1^*(z), \dots, x_n^*(z))$ donde x_i^* son los funcionales lineales coordinados asociados a la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, T es lineal y continua. Como F es de dimensión infinita, el $\ker T$ es no nulo, pues si $\ker T = \{0\}$ entonces F es isomorfo a $T(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ lo que contradice que F tiene dimensión infinita. Luego, existe

$z \in F$ con $x_i^*(z) = 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $y = \frac{z}{\|z\|}$ cumple con lo requerido. Sean $0 < \epsilon < 1$, $m_1 = 0$ e $y_1 \in F$ con $\|y_1\| = 1$ tal que

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} x_n.$$

Como la serie es convergente, existe $m_2 > m_1$ tal que:

$$\left\| \sum_{n=m_2+1}^{\infty} a_n^{(1)} x_n \right\| < \frac{\epsilon}{2^3 K}.$$

Nuevamente, podemos hallar en F un elemento y_2 tal que $\|y_2\| = 1$ y

$$y_2 = \sum_{n=m_2+1}^{\infty} a_n^{(2)} x_n.$$

Sea m_3 tal que

$$\left\| \sum_{n=m_3+1}^{\infty} a_n^{(2)} x_n \right\| < \frac{\epsilon}{2^4 K}.$$

De esta manera construimos inductivamente una sucesión $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en F con $\|y_j\| = 1$ y una sucesión $(m_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $0 < m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ y

$$y_j = \sum_{n=m_j+1}^{\infty} a_n^{(j)} x_n \quad \text{y} \quad \left\| \sum_{n=m_{j+1}+1}^{\infty} a_n^{(j)} x_n \right\| < \frac{\epsilon}{2^{j+2} K}.$$

Defina

$$y_j = \sum_{n=m_j+1}^{m_{j+1}} a_n^{(j)} x_n \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Como $\|y_j\| = 1$ se tiene $v_j \neq 0$. Defina $\mu_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$ entonces:

$$|1 - \|v_j\|| \leq \|y_j - v_j\| < \frac{\epsilon}{2^{j+2} K}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|y_j - \mu_j\| &\leq \|y_j - v_j\| + \|v_j - \mu_j\| \\ &= \|y_j - v_j\| + \left\| v_j - \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\| \\ &= \|y_j - v_j\| + |1 - \|v_j\|| < \frac{\epsilon}{2^{j+1} K}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j - \mu_j\| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Como $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una base bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces por teorema es una sucesión básica con constante básica menor o igual a K . Luego, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y tomando $G = [y_n]_{n \in \mathbb{N}}$ completa la demostración del teorema. ■

Corolario 3.2.12 *Sea X un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y E un subespacio cerrado de dimensión infinita de X . Entonces E contiene una sucesión básica equivalente a una base bloque de $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demostración: Es suficiente demostrar que E contiene una sucesión de vectores de norma uno $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_i^*(z_n) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$ es decir, E contiene un vector de norma uno de la forma

$$z_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n x_n.$$

En efecto, $\cap_{i=1}^m \ker e_i^*$ es un subespacio vectorial de X y como E es de dimensión infinita debe existir un $z \in E$ tal que $z \in \cap_{i=1}^m \ker e_i^*$, pues la aplicación lineal $T : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $Tz = (e_1^*(z), e_2^*(z), \dots, e_m^*(z))$ la cual tiene núcleo $\cap_{i=1}^m \ker e_i^*$ que no puede ser cero.

Por tanto, existe $z \in E$ con $\|z\| = 1$ y $e_i^*(z) = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un z_m con $\|z_m\| = 1$ y

$$z_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x_k$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e_i^*(z_m) = 0.$$

Aplicando el Teorema de Bessaga y Pelczyński concluimos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión básica equivalente a una base bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Nota: Es bien conocido que cada espacio de Banach separable se incrusta isomórficamente en $C[0, 1]$, usando este teorema y el hecho que $C[0, 1]$ tiene una base se obtiene que cada espacio de Banach contiene una sucesión básica (equivalente a una base bloque de la base de Schauder de $C[0, 1]$). Para demostrar esto, basta observar que cada espacio de Banach contiene un subespacio cerrado separable y aplicar el teorema anterior.

Corolario 3.2.13 (Principio de Selección de Bessaga-Pelczyński) *Sea X un espacio de Banach y suponga que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $z_n \rightarrow 0$ débilmente pero $\|z_n\| \not\rightarrow 0$. Entonces $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión básica.*

Demostración: Podemos suponer $\|z_n\| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $E = [z_n]$ entonces E es un subespacio cerrado separable de X de dimensión infinita. Entonces E se

incrusta isométricamente en $C[0, 1]$. Como $C[0, 1]$ tiene una base entonces por el corolario anterior concluimos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión básica equivalente a una base de Schauder de $C[0, 1]$. ■

El teorema anterior lo podemos demostrar de la siguiente manera sin usar el isomorfismo de E en $C[0, 1]$.

Teorema 3.2.14 (Bessaga-Pelczyński) *Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión seminormalizada que converge débilmente a 0 en X , entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión equivalente a una base bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demostración: Sea $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que

$$0 < \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon_k) < \infty,$$

y supongamos que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\|y_n\| \geq \delta > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n \rightarrow 0$ débilmente. La demostración la haremos por inducción matemática. Suponga que en nuestra búsqueda de la subsucesión básica hemos logrado escoger $n_0 = 0, x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ tal que $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ y para todo $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}$ y todo $l < k$

$$\left\| \sum_{i=0}^l a_i x_{n_i} \right\| \leq (1 + \varepsilon_k) \left\| \sum_{i=0}^k a_i x_{n_i} \right\|.$$

Defina $Y_k = [x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}]$ y escogemos $\{y_0, y_1, \dots, y_{N_k}\}$ una $\frac{\varepsilon_{k+1}}{4}$ -red de S_{Y_k} . Por el teorema de Hanh-Banach podemos escoger $\{y_0^*, y_1^*, \dots, y_{N_k}^*\}$ en S_{X^*} tal que

$$y_i^*(y_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon_{k+1}}{4},$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, N_k$. Como la sucesión converge débilmente a 0, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$|y_i^*(x_{n_{k+1}})| \leq \frac{\varepsilon_{k+1}}{4},$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, N_k$. Ahora, evaluemos

$$\left\| \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x_{n_i} \right\|,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+2}$. Consideremos dos casos dependiendo del valor de $|\alpha_{k+1}|$

■ **Primer caso:**

$$|\alpha_{k+1}| > \frac{\left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|}{\|x_{n_{k+1}}\|}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x_{n_i} \right\| &\geq \left\| \alpha_{k+1} x_{n_{k+1}} \right\| - \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| \\
&\geq 2 \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| - \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|.
\end{aligned}$$

■ Segundo caso:

$$|\alpha_{k+1}| < \frac{2 \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|}{\|x_{n_{k+1}}\|}.$$

Como

$$\frac{\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i}}{\left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|} \in S_{Y(k)},$$

existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \frac{\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i}}{\left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|} - y_{i_0} \right\| \leq \frac{\varepsilon_{k+1}}{4}.$$

De ello tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x_{n_i} \right\| &\geq \left| y_{i_0}^* \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} + \alpha_{k+1} x_{n_{k+1}} \right) \right| \\
&\geq \left| y_{i_0}^* \left(y_{i_0} \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| \right) \right| - \left| y_{i_0}^* \left(y_{i_0} \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| - \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \\
&\quad - |\alpha_{k+1}| |y_{i_0}^*(x_{n_{k+1}})| \\
&\geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| |y_{i_0}^*(y_{i_0})| - \left\| y_{i_0} \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| - \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| - |\alpha_{k+1}| \frac{\varepsilon_{k+1}}{4} \\
&\geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| \left(1 - \frac{\varepsilon_{k+1}}{4} \right) - \frac{\varepsilon_{k+1}}{4} \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| - \frac{2 \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\|}{\|x_{n_k}\|} \frac{\varepsilon_{k+1}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| \left(1 - \frac{\varepsilon_{k+1}}{4} - \frac{\varepsilon_{k+1}}{4} - \frac{2\varepsilon_{k+1}}{4} \right) \\ &\geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| (1 - \varepsilon_{k+1}). \end{aligned}$$

En los dos casos se obtiene:

$$\left\| \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i x_{n_i} \right\| \geq \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n_i} \right\| (1 - \varepsilon_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Así, por inducción matemática y usando un argumento similar al del teorema de Mazur obtenemos que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante básica:

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^{\infty} (1 - \varepsilon_k)}.$$

■

Capítulo 4

BASES INCONDICIONALES Y EL TEOREMA DE BESSAGA-PEŁCZYŃSKI

Para nuestro objetivo es necesario estudiar cuidadosamente algunas clases especiales de bases, en particular consideraremos brevemente la noción de base incondicional y luego estudiaremos detalladamente las series débilmente incondicionalmente de Cauchy. Antes de estudiar las bases incondicionales presentaremos algunos hechos generales relacionados a la convergencia condicional.

4.1. CONVERGENCIA INCONDICIONAL

Definición 4.1.1 (Serie Incondicionalmente Convergente) Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en un espacio de Banach X se llama incondicionalmente convergente si es convergente para cualquier permutación de sus términos, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} < \infty$ para cada biyección $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Nota: Del Teorema de Riemman se sigue que una serie de números reales es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente. Imitando la demostración del Teorema 2.1.7, podemos demostrar que convergencia absoluta implica convergencia incondicional. El recíproco es falso como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea $X = l_2$ y $x_k = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots, 0, \dots) = \frac{1}{k}e_k$ donde la coordenada no nula está en la k -ésima posición. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge a $s = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ pues si

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \Rightarrow \|s_n - s\|_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Si $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una permutación y $s_n = \sum_{k=1}^n x_{\pi(k)}$ entonces

$$\|s_n - s\|_2 = \sum_{k \notin \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así, la serie converge incondicionalmente.

Pero esta serie no converge absolutamente ya que $\|x_k\|_2 = \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$. Así:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

■

En el caso de espacios de dimensión finita tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.2 Sea X un espacio vectorial normado de dimensión n . Entonces, en X cada serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente.

Demostración: Como en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes, podemos suponer que $X = l_1^{(n)}$. Denote por f_i con $i = 1, \dots, n$ los funcionales lineales coordenados que asignan a cada vector su i -ésima componente. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie incondicionalmente convergente en X , entonces la serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} f_i(x_k)$ es incondicionalmente convergente para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y por el teorema de Riemman tenemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_i(x_k)$ es absolutamente convergente para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, de la definición de norma en $l_1^{(n)}$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x_k)| \right) < \infty,$$

y por tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge absolutamente. ■

Definición 4.1.3 (Serie condicionalmente convergente) Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en un espacio de Banach X se llama condicionalmente convergente si converge pero no incondicionalmente, es decir, entre sus reordenamientos hay uno que es divergente.

Teorema 4.1.4 Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en el espacio de Banach X es incondicionalmente convergente entonces todos sus reordenamientos tienen la misma suma.

Demostración: La prueba se hará por reducción al absurdo. Sea $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y suponga que para alguna permutación π la suma s' de una serie reordenada no es igual a s .

Sea $f \in X^*$ un funcional tal que $f(s) \neq f(s')$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ no converge absolutamente ya que la permutación π cambia su suma. Entonces, por el

teorema de Riemman, existe una permutación σ para la cual la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\sigma(k)})$ diverge y por tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ diverge, lo cual contradice la convergencia incondicional de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. ■

Definición 4.1.5 (Serie perfectamente convergente) Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de elementos de un espacio de Banach se llama perfectamente convergente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ converge para cualquier elección de los coeficientes $\alpha_i = \pm 1$.

Ejemplo: Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica con $\|e_n\| = 1$ para dado $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la serie

$$e_1 - e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \dots \quad (4.1)$$

Donde cada grupo de 2^n términos de la forma

$$\pm 2^{-(n+1)}e_n$$

se anulan mutuamente. Entonces la serie converge a 0. Ahora, si en 4.1 reemplazamos todos los signos \pm por $+$ obtenemos una serie divergente ya que los segmentos formados por los vectores $2^{-(n+1)}e_n$ da el vector $2e_n$ que no converge a 0. Luego la serie no es perfectamente convergente. ■

El próximo teorema nos da una caracterización de la convergencia incondicional.

Teorema 4.1.6 Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente
- ii. Cada subserie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ con $(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$ es convergente.
- iii. La serie converge perfectamente.
- iv. Para cada $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito

$$F \subseteq \{n + 1, n + 2, \dots\}$$

se tiene que:

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \epsilon.$$

Demostración:

$i \Rightarrow ii$] Suponga que ii) no es válida. Entonces existe una sucesión creciente

$$n_1 < n_2 < \dots$$

Para el que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ diverge. Entonces, por el criterio de Cauchy la sucesión de sumas parciales

$$s_k = \sum_{i=1}^k x_{n_i}$$

no es de Cauchy. Por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen números p, q con $p < q$ tales que $p, q > 1$ pero $\|s_p - s_q\| > 1$. Defina $r_1 = n_{p+1}$ y $m_1 = n_q$, entonces para $m < r$ y $n = 2, 3, \dots$ tenemos que:

$$\|s_p - s_q\| = \|x_{n_{p+1}} + x_{n_{p+2}} + \dots + x_{n_q}\| > 1.$$

Tomando $n = 1, 2, 3, \dots$ encontramos una sucesión creciente de enteros $m_1 < r_1 < m_2 < n_2 < \dots$ tal que

$$\left\| \sum_{i=m_k}^{r_k} x_{n_i} \right\| \geq \epsilon.$$

Denote los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ que no aparecen en cualquiera de los segmentos $\{x_{n_i}\}_{i=m_k}^{n_k}$ por y_1, y_2, y_3, \dots y construyamos un reordenamiento de la serie $\sum x_k$ como sigue. Escriba primero el segmento $\{x_{n_i}\}_{i=m_1}^{n_1}$ y el término y_1 , luego el segmento $\{x_{n_i}\}_{i=m_2}^{n_2}$ y el término y_2 y así sucesivamente. Por el criterio de Cauchy la serie reordenada diverge lo que contradice la convergencia incondicional de la serie inicial.

ii \Rightarrow *iii*] Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera ± 1 . Escribamos una partición de los números naturales como $\mathbb{N} = A \cup B$ donde $A = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ es el conjunto de índices n para los que $\alpha_n = 1$ y $B = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ es el conjunto de índices n para los que $\alpha_n = -1$. Entonces, por hipótesis ambas series $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ convergen y por tanto la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$$

también converge.

iii \Rightarrow *ii*] Sean $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ índices arbitrarios. Defina $A = \{n_1, n_2, \dots\}$, $B = \mathbb{N} - A$ y considere dos sucesiones de coeficientes α_i tal que $\alpha_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y β_i tal que $\beta_i = 1$ para $i \in A$ y $\beta_i = -1$ para $i \in B$. Por hipótesis la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge y también la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i$ converge. Luego:

$$x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + x_{n_4} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} (\alpha_i x_i + \beta_i x_i)$$

también converge.

ii \Rightarrow *i*] Suponga que *i*) no es válido y sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ un reordenamiento divergente de nuestra serie. Por el criterio de la Cauchy, existen segmentos disjuntos Δ_i $i \in \mathbb{N}$,

de la serie reordenada para el cual el ínfimo de las normas es más grande que $\epsilon > 0$. Reordene los términos de Δ_i en orden creciente de sus índices (es decir en el orden original) y denote el índice del primer término en Δ_i por m_i y el del último término por r_i . Entonces $\Delta_i \subset \{x_k\}_{k=m_i}^{r_i}$. Pasando, si es necesario a subsucesiones podemos fácilmente escoger Δ_i de modo que $r_1 < m_1 < r_2 < m_2 < \dots$. Entonces, escribiendo sucesivamente todos los términos de Δ_1 , luego de Δ_2 , de Δ_3 y así sucesivamente obtenemos una subserie de la serie $\sum x_k$ que diverge, lo cual contradice ii).

$i \Rightarrow iv]$ Suponga que iv) es falsa. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada n podemos encontrar subconjuntos finitos F_n de $\{n+1, n+2, \dots\}$ con

$$\left\| \sum_{j \in F_n} s_j \right\| \geq \epsilon.$$

Construimos una permutación π de \mathbb{N} tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ diverge. Tome $n_1 = 1$ y sea $A_1 = F_{n_1}$. Defina $n_2 = \max A_1$ y $B_1 = \{n_1 + 1, \dots, n_2\} - A_1$. Ahora, repetimos el proceso tomando $A_2 = F_{n_2}$ y $n_3 = \max A_2$ y $B_2 = \{n_2 + 1, \dots, n_3\} - A_2$. Iterando, generamos una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y una partición $\{n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1}\} = A_k \cup B_k$. Defina π de modo que esta permute los elementos de $\{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}$ con la condición de que A_k preceda a B_k . Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ es divergente, pues la condición de Cauchy falla.

$iv \Rightarrow i]$ Suponga por contradicción que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es incondicionalmente convergente. Es decir, existe una permutación π de \mathbb{N} tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converge en norma. Así, existe algún $\epsilon > 0$ y una sucesión estrictamente creciente (x_n) de números naturales tal que

$$\left\| \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} x_{\pi(i)} \right\| > \epsilon, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, fije un $k \in \mathbb{N}$. Como π es una permutación de \mathbb{N} existe r tal que

$$\{1, 2, \dots, k\} \subset \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(k_r)\}.$$

Así, si $A = \{\pi(i) : k_r < i \leq k_{r+1}\}$ entonces $\min A > k$ y

$$\left\| \sum_{i \in A} x_{\pi(i)} \right\| = \left\| \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} x_{\pi(i)} \right\| > \epsilon.$$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto finito no vacío $A \subset \mathbb{N}$ con $\min A > k$ y $\left\| \sum_{i \in A} x_{\pi(i)} \right\| > \epsilon$. Lo que contradice vi). ■

Nota: El teorema anterior nos ayuda a dar una demostración directa del hecho que si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach converge incondicionalmente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \text{ para cada permutación } \pi \text{ de } \mathbb{N}.$$

En efecto, sean $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ y $\epsilon > 0$ fijo. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{i \in F} x_i\| < \epsilon$ para cada subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ con $\min F \geq k$. Ahora, escoja $r \geq k$ tal que:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^r x_i \right\| < \epsilon,$$

y seleccione algún $m > r$ tal que, $\{1, 2, \dots, r\} \subseteq \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(m)\}$. El subconjunto finito $F = \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(m)\} - \{1, 2, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$ es no vacío y

$$\left\| y - \sum_{i=1}^m x_{\pi(i)} \right\| < \epsilon.$$

La existencia del m se sigue del hecho que π es una permutación de \mathbb{N} . Claramente, $\min F > k$ y note que:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^r x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^r x_i - \sum_{i=1}^r x_{\pi(i)} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^r x_{\pi(i)} - y \right\| \\ &< \epsilon + \left\| \sum_{i \in F} x_i \right\| + \epsilon \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario entonces $x = y$. ■

Ejemplo: Consideremos l_1 y las sucesiones $h_1 = (1, 0, \dots)$ y $h_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ veces}}, 1, -1, 0, \dots)$ para $n \geq 2$. Demostremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ es condicionalmente convergente en l_1 .

Sea $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ los vectores básicos de l_1 . Entonces para $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ escalares tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{m+p} \alpha_i h_i &= \sum_{i=m}^{m+p} \alpha_i (e_{i-1} - e_i) \\ &= \alpha_m (e_{m-1} - e_m) + \alpha_{m+1} (e_m - e_{m+1}) + \alpha_{m+2} (e_{m+1} - e_{m+2}) \\ &\quad + \dots + \alpha_{m+p} (e_{m+p-1} - e_{m+p}) \\ &= \alpha_m e_{m-1} + (\alpha_{m+1} - \alpha_m) e_m + (\alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}) e_{m+1} + (\alpha_{m+3} - \alpha_{m+2}) e_{m+2} \\ &\quad + \dots + (\alpha_{m+p} - \alpha_{m+p-1}) e_{m+p-1} - \alpha_{m+p} e_{m+p}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\left\| \sum_{i=m}^{m+p} \alpha_i h_i \right\|_1 = |\alpha_m| + \sum_{i=m}^{m+p-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| + |\alpha_{m+p}|.$$

Por tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i$ converge si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \infty$. En particular, si tomamos $\alpha_n = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ y así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|i - (i+1)|}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty. \end{aligned}$$

De modo que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i$ converge. Pero $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha_i h_i$ no converge ya que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha_i h_i &= (-1, 0, \dots) + \frac{1}{2}(1, -1, 0, \dots) - \frac{1}{3}(0, 1, -1, 0, \dots) + \frac{1}{4}(0, 0, 1, -1, 0, \dots) \\ &\quad - \frac{1}{5}(0, 0, 0, 1, -1, 0, \dots) + \dots \\ &= -e_1 + \frac{1}{2}(e_1 - e_2) - \frac{1}{3}(e_2 - e_3) + \frac{1}{4}(e_3 - e_4) - \frac{1}{5}(e_4 - e_5) + \dots \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2}\right) e_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) e_2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) e_3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) e_4 + \dots \\ &= -\frac{1}{2} e_1 - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}\right) e_i. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha_i h_i \right\|_1 &= \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i+1+i}{i(1+i)} \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2i+1}{i(1+i)} \\
 &\geq \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2i}{i(1+i)} \geq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+i} > \infty,
 \end{aligned}$$

y sigue que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha_i h_i$ diverge. Así hemos demostrado que la serie es condicionalmente convergente. ■

Finalizamos esta sección con la siguiente caracterización de convergencia incondicional por medio de operadores compactos.

Teorema 4.1.7 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en un espacio de Banach X . Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente en X si y sólo si el operador $T : c_0 \rightarrow X$ tal que $T(e_n) = x_n$ es compacto.

Demostración: Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente. Demostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - TP_n\| = 0$ donde $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son las proyecciones de sumas parciales asociados a la base canónica $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de c_0 . Note que el operador TP_n tiene rango finito para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, siendo T el límite uniforme de operadores de rango finito tenemos que T será compacto. Dado $\epsilon > 0$, como la serie converge incondicionalmente existe un $n = n(\epsilon)$ tal que si F es un subconjunto finito de $\{n+1, n+2, \dots\}$ entonces:

$$\left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego para cada $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$ tenemos que

$$\left| \sum_{j \in F} x^*(x_j) \right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

y por tanto

$$\sum_{\substack{j \in F \\ x^*(x_j) > 0}} x^*(x_j) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$\sum_{j \in F} |x^*(x_j)| \leq \epsilon.$$

Luego, si $z \in c_{00}$ con $\|z\|_0 \leq 1$ se sigue que:

$$\begin{aligned} (T - TP_m)z &= T(z) - TP_m(z) \\ &= T(z) - T\left(\sum_{k=1}^m e_k z_k\right) \\ &= T\left(z - \sum_{k=1}^m e_k z_k\right) = T\left(\sum_{k \geq m} e_k z_k\right) \\ &= \sum_{k \geq m} (Te_k)z_k = \sum_{k \geq m} x_k z_k. \end{aligned}$$

Por tanto, $x^*(T - TP_m)z = \sum_{k \geq m} x^*(x_k z_k)$ y

$$\begin{aligned} |x^*(T - TP_m)z| &= \left| \sum_{k \geq m} x^*(x_k z_k) \right| \\ &\leq \sum_{k \geq m} |z_k| |x^*(x_k)| \\ &\leq \sum_{k \geq m} |x^*(x_k)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Sigue que, $|x^*(T - TP_m)z| \leq \epsilon$ para todo $m \geq n$ y todo $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$ y $z \in c_{00}$. Así por la densidad de c_{00} en c_0 concluimos que $|x^*(T - TP_m)z| \leq \epsilon$ para todo $z \in c_0$ y todo $x^* \in X^*$. De modo que, $\|(T - TP_m)z\| \leq \epsilon \forall m \geq n$. Por tanto, T es el límite uniforme de operadores de rango finito y por tanto es compacto.

Recíprocamente, suponga que $T : c_0 \rightarrow X$ es compacto y que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en el espacio de Banach X con $Te_n = x_n$. Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente. Por el teorema de Schauder $T^* : X^* \rightarrow l_1$ es compacto, es decir, $T^*(B_{X^*}) \subseteq l_1$ es relativamente compacto en l_1 . Entonces, por la caracterización de conjuntos compactos en l_1 , se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N_\epsilon+1}^{\infty} |(T^*(x^*))_k| \leq \epsilon \forall x^* \in X^* \text{ con } \|x^*\| \leq 1.$$

Como $x_n = Te_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}(T^*x)_k &= (T^*x^*)e_k \\ &= x^*(Te_k) \\ &= x^*(x_k),\end{aligned}$$

y de este Teorema,

$$\sum_{k=N_{\epsilon}+1}^{\infty} |(T^*(x^*))_k| \leq \epsilon, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Sea ahora $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de \mathbb{N} . Entonces para $m > p \geq N_{\epsilon}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=p+1}^m Te_{n_k} \right\| &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{k=p+1}^m x^*(Te_{n_k}) \right| \\ &\leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{k=p+1}^m x^*(Te_{n_k}) \right) \leq \epsilon,\end{aligned}$$

y como X es un espacio de Banach entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge y por tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente (ver Teorema 4.1.6). ■

4.2. BASES INCONDICIONALES

Definición 4.2.1 (Base incondicional) Una base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X se llama incondicional si para cada $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n$ converge incondicionalmente a x . En otras palabras, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base incondicional de X si y solo si $(e_{\pi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X para todas las permutaciones $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

El Teorema 4.1.6 podemos reescribirlo como:

Teorema 4.2.2 Para una base de Schauder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes:

- $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base incondicional.
- Para cada serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y cada sucesión estrictamente creciente de enteros $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la subserie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_i} e_{n_i}$ converge.
- Para cada serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y cada sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\varepsilon_n = \pm 1 \forall n \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_n$ converge.
- Para cada $\epsilon > 0$ y cada serie convergente $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ existe un subconjunto finito $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada A finito con $A \supseteq A_0$ entonces

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i e_i - x \right\| < \epsilon.$$

Ejemplos:

1. Los vectores de la base unitaria de c_0 y l_p ($1 \leq p < \infty$) son una base incondicional de c_0 y l_p ($1 \leq p < \infty$).
2. **Base sumante de c_0 (Base no incondicional)** Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Se demostró en el ejemplo 2.3.4 que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de c_0 . Demostremos que esta base no es incondicional. En efecto, para $m, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{m+p} \alpha_i x_i &= \sum_{i=m}^{m+p} \alpha_i \sum_{j=1}^i e_j = \alpha_m \left(\sum_{j=1}^m e_j \right) + \alpha_{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m+1} e_j \right) + \dots + \alpha_{m+p} \left(\sum_{j=1}^{m+p} e_j \right) \\ &= \alpha_m (e_1 + \dots + e_m) + \alpha_{m+1} (e_1 + \dots + e_{m+1}) + \dots + \alpha_{m+p} (e_1 + \dots + e_{m+p}) \\ &= e_1 (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_{m+p}) + \dots + e_m (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_{m+p}) \\ &\quad + e_{m+1} (\alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_{m+p}) + \dots + \alpha_{m+p} e_{m+p} \\ &= e_1 \left(\sum_{j=m}^{m+p} \alpha_j \right) + \dots + e_m \left(\sum_{j=m}^{m+p} \alpha_j \right) + e_{m+1} \left(\sum_{j=m}^{m+p} \alpha_j \right) + \dots + \alpha_{m+p} e_{m+p}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=m}^{m+p} \alpha_j x_j \right\|_{c_0} &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=m}^{m+p} \alpha_j \right|, \left| \sum_{j=m+1}^{m+p} \alpha_j \right|, \left| \sum_{j=m+2}^{m+p} \alpha_j \right|, \dots, |\alpha_{m+p}| \right\} \\ &= \sup_{0 \leq k \leq p} \left| \sum_{j=m+k}^{m+p} \alpha_j \right|. \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge, si y solo si la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y por tanto la sucesión de sumas parciales de $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ también es de Cauchy en \mathbb{R} y por tanto converge, lo que no es cierto para toda sucesión $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Puede tomar por ejemplo $\alpha_j = (-1)^j$. ■

Continuamos ahora con algunos teoremas que serán de ayuda para nuestro teorema principal.

Teorema 4.2.3 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base incondicional de un espacio de Banach X . Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n x_n$ es convergente para todo $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en l_{∞} .

Demostración: Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es incondicionalmente convergente, del Teorema 4.1.4 existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de signos y cada subconjunto finito no vacío F de \mathbb{N} con $\min F > m$ se tiene que:

$$\left\| \sum_{n \in F} s_n a_n x_n \right\| < \epsilon. \quad (4.2)$$

Fijemos F que satisface la ecuación 4.2 y sea $x^* \in X^*$ de norma uno tal que

$$x^* \left(\sum_{n \in F} a_n \alpha_n x_n \right) = \left\| \sum_{n \in F} a_n \alpha_n x_n \right\|.$$

Ahora, considere la sucesión de signos $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ definida por

$$s_n = 1 \text{ si } \alpha_n x^*(a_n x_n) \geq 0,$$

y

$$s_n = -1 \text{ si } \alpha_n x^*(a_n x_n) < 0.$$

Esto implica,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in F} a_n \alpha_n x_n \right\| &= x^* \left(\sum_{n \in F} a_n \alpha_n x_n \right) \\ &= \sum_{n \in F} \alpha_n x^*(a_n x_n) \\ &\leq \sum_{n \in F} s_n x^*(a_n x_n) \\ &= x^* \left(\sum_{n \in F} s_n a_n x_n \right) \\ &\leq \left\| \sum_{n \in F} s_n a_n x_n \right\| \|x^*\| \\ &= \left\| \sum_{n \in F} s_n a_n x_n \right\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n x_n$ es de Cauchy y así es convergente. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n x_n$ es convergente. ■

Teorema 4.2.4 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base incondicional de un espacio de Banach X . Si $|b_n| \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ es convergente.

Demostración: Sea π una permutación de \mathbb{N} y suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente junto con $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} x_{\pi(n)}$. Así, si $x^* \in X^*$ entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n) \right| \leq \infty,$$

y

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} x^*(x_{\pi(n)}) \right| \leq \infty.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n)$ es incondicionalmente convergente en \mathbb{R} y como en \mathbb{R} la convergencia incondicional de las series es equivalente a la convergencia absoluta tenemos que:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^*(x_n)| \leq \infty.$$

Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $|b_n| \leq |a_n|$. Entonces, para todo subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left| x^* \left(\sum_{n \in F} b_n x_n \right) \right| \leq \sum_{n \in F} |b_n x^*(x_n)| \leq A. \quad (4.3)$$

Sea $J : X \rightarrow X^{**}$ la isometría canónica, entonces aplicando el principio de acotación uniforme y de 4.3 se sigue que:

$$P = \left\{ J \left(\sum_{n \in F} b_n x_n \right) : |b_n| \leq |a_n| \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } F \text{ finito} \right\} < \infty.$$

Entonces concluimos que:

$$B = \left\{ \left\| \sum_{n \in F} b_n x_n \right\| : |b_n| \leq |a_n| \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } F \text{ finito} \right\} < \infty.$$

Así, para cada $\sum_{n \in F} a_n x_n \in X$ definimos $B = \left\| \sum_{n \in F} a_n x_n \right\|$, entonces es fácil ver que $(X, \left\| \cdot \right\|_1)$ es un espacio normado y completo, además

$$\left\| \sum_{n \in F} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in F} a_n x_n \right\|_1.$$

De modo que el operador $T : (X, \left\| \cdot \right\|_1) \rightarrow (X, \left\| \cdot \right\|)$ definido por

$$T \left(\sum_{n \in F} a_n x_n \right) = \sum_{n \in F} a_n x_n$$

es biyectivo, de donde sigue que T es continuo y por el Teorema de la aplicación abierta existe un $K \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $x \in X$

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq K \|x\|.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ se tiene que:

$$\left\| \sum_{r=m}^n b_r x_r \right\| \leq \left\| \sum_{r=m}^n a_r x_r \right\|_1 < \epsilon,$$

es decir, $\{\sum_{r=m}^n b_r x_r\}_{r=1}^m$ es una sucesión de Cauchy en X y por tanto se sigue de esta implicación que la serie $\sum_{r=m}^n b_r x_r$ es convergente. ■

Nota: Se sigue del teorema anterior que si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base incondicional de X si y solo si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ son números reales tales que $|a_n| \leq |b_n| \forall n = 1, \dots, N$ entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^N b_n e_n \right\|. \quad (4.4)$$

Definición 4.2.5 (Constante básica de Incondicionalidad) Sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base incondicional de un espacio de Banach X , la constante básica de incondicionalidad K_μ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la menor constante K tal que la expresión (4.4) es válida. Entonces, decimos que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es K -incondicional.

Corolario 4.2.6 Sea X un espacio de Banach con base incondicional $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y A un subconjunto finito de \mathbb{N} . Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ definimos

$$P_A(x) = \sum_{n \in A} a_n x_n.$$

Entonces, P_A es una proyección y $\sup\{\|P_A\| : A \subseteq \mathbb{N}, A \text{ es finito}\} < \infty$.

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $|A| < +\infty$ y defina

$$P_A \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \right) = \sum_{n \in A} a_n e_n.$$

Como $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base entonces los P_A son continuos. Demostremos que

$$\sup\{\|P_A\| : A \subseteq \mathbb{N}, |A| < \infty\} \text{ es finito.}$$

Por el Teorema de Banach-Steinhaus es suficiente probar que para todo x fijo en E $\sup\{\|P_A x\| : A \subseteq \mathbb{N}, |A| < \infty\}$ es finito. Supongamos que no. Entonces, para algún $x \in X$, podemos encontrar $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $A_k \subseteq \mathbb{N}$, $|A_k| < \infty$ tal que $\|P_{A_k} x\| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Por hipótesis, existe un $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| < 1 \quad \forall A \supseteq A_0.$$

Como, $A_k \cup A_0 \supseteq A_0$, entonces $\|x - P_{A_k \cup A_0} x\| < 1$. Así, $\|P_{A_k \cup A_0} x\| < \|x\| + 1$. Pero,

$$\|P_{A_k \cup A_0} x\| = \|P_{A_k} x + P_{A_0 - A_k} x\| \geq \|P_{A_k} x\| - \|P_{A_0 - A_k} x\|,$$

y como $A_0 - A_k \subset A_0$, entonces $\|P_{A_0 - A_k} x\|$ es acotado, lo que obliga $\|P_{A_k \cup A_0} x\| \rightarrow \infty$ lo que es absurdo. ■

4.3. SERIES W.U.C Y EL TEOREMA DE BESSAGA Y PEŁCZYŃSKI

Definición 4.3.1 (Serie w.u.C) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X es débilmente incondicionalmente de Cauchy o débilmente incondicionalmente convergente (w.u.C) si para cada $x^* \in X^*$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty.$$

Teorema 4.3.2 Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente a algún x en un espacio de Banach X , entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente incondicionalmente convergente.

Demostración: Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente, entonces para cada funcional lineal $x^* \in X^*$ la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_{\pi(n)})$ converge para cada permutación π . Por el teorema de Riemman, una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge incondicionalmente si y solo si esta converge absolutamente, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Así que, $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty$. Por tanto la serie es débilmente incondicionalmente convergente. ■

Lema 4.3.3 Suponga que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente incondicionalmente convergente en X . Entonces:

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty.$$

Demostración: Sea $T : X^* \rightarrow l_1$ definida por $T(x^*) = (x^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. La hipótesis garantiza que $T(x^*) \in l_1 \forall x^* \in X^*$. Defina $T_n : X^* \rightarrow l_1$ por

$$T_n(x^*) = (x^*(x_1), x^*(x_2), \dots, x^*(x_n), 0, 0, \dots).$$

Entonces, como para cada $x^* \in X^*$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|$ converge se sigue que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x^*(x_k)| \rightarrow 0,$$

es decir, $\|Tx^* - T_n x^*\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto $T_n x^* \rightarrow Tx^* \forall x^* \in X^*$. Además, T_n es lineal y continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Como X^* es un espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus sigue que T es lineal, continua y

$$\|T\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|Tx^*\|_{l_1} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty.$$

■

Teorema 4.3.4 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en un espacio de Banach X . Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente incondicionalmente convergente si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{\infty}$ se tiene:

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right\| \leq C \sup_n |t_n|.$$

Demostración: Tomemos

$$C = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|.$$

Entonces, para $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{\infty}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left\| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right\| \leq \sup_{n \geq 1} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right) \right|.$$

De ello que,

$$\begin{aligned} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n t_k x^*(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |t_k| |x^*(x_k)| \\ &\leq \sup_{k \geq 1} |t_k| \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)| \\ &\leq C \sup_{k \geq 1} |t_k| \quad \forall x^* \in X^*, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\left\| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right\| \leq C \sup_n |t_n|.$$

De donde se puede concluir que:

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right\| \leq C \sup_n |t_n|.$$

Recíprocamente, sea $x^* \in X^*$ y definamos $t_n = \pm 1$, entonces $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{\infty}$ y para

todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N |x^*(x_n)| &= \sum_{n=1}^N t_n x^*(x_n) \\
 &= \left| \sum_{n=1}^N x^*(t_n x_n) \right| \\
 &\leq \left| x^* \left(\sum_{n=1}^N t_n x_n \right) \right| \\
 &\leq \|x^*\| \left\| \sum_{n=1}^N t_n x_n \right\| \\
 &\leq C \|x^*\|.
 \end{aligned}$$

Por lo cual la sucesión $\left(\sum_{n=1}^N |x^*(x_n)| \right)_{N \in \mathbb{N}}$ es limitada y por ser de términos no negativos es creciente y por tanto converge. ■

Ejemplo: En el espacio c_0 considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ formada por los vectores unitarios de c_0 . Esta serie diverge ya que sus términos generales e_k no convergen a 0. Sea f un funcional lineal de $l_1 = c_0^*$, entonces $f = (f_1, f_2, \dots)$ con $f_k \in \mathbb{R}$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|f\| < +\infty.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| < +\infty.$$

Es decir, la serie es débilmente incondicionalmente convergente. Así, construimos una serie en c_0 que es débilmente incondicionalmente convergente pero diverge en la topología de la norma. Además, la serie diverge en la topología débil también, pues si fuera convergente las coordenadas de su suma deberían ser iguales a 1 pero c_0 no contiene tal elemento. ■

Definición 4.3.5 A partir de ahora, cada vez que digamos que un espacio de Banach X contiene una copia de un espacio de Banach Y queremos decir que X contiene un subespacio E cerrado que es isomorfo a Y .

Corolario 4.3.6 Si un espacio de Banach X contiene una copia de c_0 entonces en X existe una serie débilmente incondicionalmente convergente que diverge (tanto en la norma como en la topología débil).

El próximo teorema nos da una caracterización de los espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de c_0 el cual es el objetivo de nuestro trabajo.

Teorema 4.3.7 (Teorema de Bessaga-Pelczyński) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a. X no contiene un subespacio isomorfo a c_0 .
- b. Cada serie débilmente incondicionalmente convergente en X es débilmente convergente.
- c. Cada serie débilmente incondicionalmente convergente en X es incondicionalmente convergente.
- d. Cada serie débilmente incondicionalmente convergente en X es convergente en norma.

Demostración: Demostraremos que:

$$d) \rightarrow c) \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow d).$$

$d) \rightarrow c)$] Considere la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X y suponga que es débilmente incondicionalmente convergente en X . Entonces las series $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ con $\alpha_i = \pm 1$ es débilmente incondicionalmente convergente también. Luego por $d)$ las series $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ con $\alpha_i = \pm 1$ son convergente en norma que (por Teorema 4.1.6) significa precisamente que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente convergente.

$c) \rightarrow b)$] Suponga que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es débilmente incondicionalmente convergente. Entonces, por hipótesis la serie es incondicionalmente convergente y por tanto es convergente, luego es débilmente convergente.

$b) \rightarrow a)$] Se sigue del corolario.

$a) \rightarrow d)$] Supongamos que existe una serie débilmente incondicionalmente convergente en X que no es convergente en norma. Por el criterio de Cauchy la sucesión de sumas parciales $s_k = \sum_{i=1}^k x_i$ no es de Cauchy. Por tanto, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen dos números naturales $p_n > q_n > n$ tal que $\|s_{q_n} - s_{p_n}\| > \delta$.

Aplicando esto, podemos encontrar enteros $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ y una sucesión $y_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i$ tal que $\inf_k \|y_k\| \geq \delta > 0$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es débilmente incondicionalmente convergente y por tanto (y_k) converge débilmente a 0. Luego, por el Principio de Selección de Bessaga y Pelczyński, podemos extraer una subsucesión básica $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Así, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es también débilmente incondicionalmente convergente y por Teorema 4.3.4 existe una constante $A > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(z_k)| \leq A \|x^*\|, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Defina el operador $T : c_0 \rightarrow X$ como $T(e_k) = z_k$ donde $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es la base estándar de c_0 . Sean t_1, t_2, \dots, t_n números reales arbitrarios. Entonces,

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\sum_{k=1}^n t_k e_k \right) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n t_k T(e_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n t_k z_k \right\| \\ &= \sup_{f \in X^*} \left| f \left(\sum_{k=1}^n t_k z_k \right) \right| = \sup_{f \in X^*} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) t_k \right| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \sup_{f \in X^*} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \right| \leq A \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| = A \left\| \sum_{k=1}^n t_k e_k \right\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Esto implica que T es un operador lineal bien definido y continuo. (En realidad, $T : c_0 \rightarrow X$ es una extensión continua de el mismo operador pero definida en c_{00} y c_{00} es denso en c_0). Demostremos que T es un isomorfismo sobre su imagen.

Como $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica existe una constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n t_k z_k \right\| &\geq K \max_k |t_k| \quad \text{y como } \|z_k\| \geq 1 \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ tenemos} \\ &\geq K \delta \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \\ &\geq K \delta \left\| \sum_{k=1}^n t_k e_k \right\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\sum_{k=1}^n t_k e_k \right) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n t_k z_k \right\| \\ &\geq K \delta \left\| \sum_{k=1}^n t_k e_k \right\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Así, T es un isomorfismo sobre su imagen. ■

El teorema de Bessaga-Pelczyński es un prototipo de los teoremas de exclusión que dicen que si podemos excluir un cierto tipo de espacios de Banach entonces se tendrá una propiedad particular.

Ya hemos visto que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X converge incondicionalmente en norma si y solo si cada subserie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ lo hace. En particular, cada subserie de una serie incondicionalmente convergente es débilmente convergente. El teorema de Orlicz-Pettis establece que el recíproco es también verdadero.

Teorema 4.3.8 (Teorema de Orlicz-Pettis) *Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie en un espacio de Banach X para el cual cada subserie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge débilmente. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente en norma.*

Demostración: La hipótesis implica fácilmente que la serie es débilmente incondicionalmente convergente. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es incondicionalmente convergente, entonces existen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos con $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots$ tal que la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$y_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} x_{r_i}$$

satisface $\|y_n\| \geq \epsilon > 0$.

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una subserie de $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ y por tanto es débilmente convergente también. En particular, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente nula y $\inf_{n \geq 1} \|y_n\| > 0$. Luego por el Principio de Selección de Bessaga-Pelczyński existe una subsucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que es básica. Como $\sum z_n$ es débilmente incondicionalmente convergente existe un $C > 0$ tal que:

$$\left\| \sum_{k=1}^n t_k z_k \right\| \leq C \sup_{1 \leq k \leq n} |t_k| = C \left\| \sum_{k=1}^n t_k e_k \right\|_0.$$

Por tanto, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equivalente a los vectores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de c_0 . Pero la serie $\sum e_k$ no es débilmente convergente y por tanto la serie $\sum z_k$ tampoco lo es, lo que contradice lo afirmado. ■

Corolario 4.3.9 *Si un espacio de Banach X es débilmente secuencialmente completo entonces cada serie débilmente incondicionalmente de Cauchy es incondicionalmente convergente.*

Demostración: Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy entonces $\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_n)$ es absolutamente convergente para cada $x^* \in X^*$ lo que equivale a decir que $\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{n_k})$ converge. Pero cada subserie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es débilmente de Cauchy y por tanto converge débilmente por hipótesis. Luego $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente por el teorema de Orlicz-Pettis. ■

Teorema 4.3.10 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en l_p para $1 \leq p < \infty$ (respectivamente c_0) tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente nula. Entonces hay una subsucesión $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ que es una sucesión básica equivalente a la base canónica de l_p y tal que $[x_{n_k}]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementada en l_p (respectivamente en c_0).

Demostración: Por el Teorema de Bessaga-Pełczyński obtenemos una subsucesión $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ y una sucesión básica bloque de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ es básica. Por el Teorema 3.2.4 la sucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y es complementada en l_p . ■

Bibliografía

- [1] Bessaga, C. and Pełczyński, A. "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces". *Studia Math.* p.151–164. (1958).
- [2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London. (2011).
- [3] Cembranos, P. *Investigación de Análisis Funcional*. First Edition, New York, NY Springer. (1997).
- [4] Diestel, J. *Sequences and series in Banach spaces*. First Edition, New York, NY Springer. (1984).
- [5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. (1978).
- [6] Fetter, H. and Gamboa, B. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Centro de Investigación en Matemáticas, México. (2008).
- [7] Guerre-Delabriere, S. *Classical sequences in Banach spaces*. First Edition, New York, Marcel Dekker, Inc.
- [8] K.Yosida, *Functional Analysis*. Sixth Edition, Springer-Verlag, New York. (1980).
- [9] Liendo, V. and Finol, C. *Notas de Análisis Funcional*. Caracas, Octubre (2002).
- [10] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces* First Edition, New York, NY Springer-Verlag, (1997).
- [11] Rynne B.P. and Youngson M.A., *Linear Functional Analysis*. Second Edition, Springer-Verlag, London. (2008).
- [12] Rosenthal, H. *A Characterization of Banach Spaces Containing c_0* . *Journal Of The American Mathematical Society*, 7(3), 707. (1994).
- [13] Rosenthal, H. *A subsequence principle characterizing Banach spaces containing c_0* . *Bulletin Of The American Mathematical Society*, 30(2). (1994).
- [14] Schauder J. "Zur theorie stetiger Abbildungen in Funktionenräumen", *Math. Zeitsch* Vol. 26 p.47-65, (1927).
- [15] Tsirel'son, B.S. "Not every Banach space contains an imbedding of l^p or c_0 ". *Functional Analysis and its applications*. p.138-141, (1974).