

**MODELADO MAGNÉTICO DE TRANSFORMADORES
MEDIANTE EL MÉTODO SEMI ANALÍTICO INTEGRAL
(MSAI)**

Ernesto Arenas Santos, Yorman Ronaldo Carrillo Martinez

Trabajo de Grado para Optar el Título de Ingeniero Electricista

Director:

Guillermo Andrés Díaz Flórez

Ph.D Ingeniería Eléctrica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica

y de Telecomunicaciones

Bucaramanga

2026

Índice

Introducción	10
1 Objetivos	12
1.1 Objetivo General	12
1.2 Objetivos Específicos	12
2 Marco Teórico	13
3 Consideraciones Previas	14
4 Formulación Matemática	16
4.1 Modelado del Núcleo	16
4.2 Elementos	17
4.3 Vectores Normales Asociados	17
4.4 Densidad de corriente superficial	18
4.5 Elementos de contribución nula	18
4.6 Modelado de los conductores	18
4.7 Puntos de evaluación	19
4.8 Valores de interés	20
4.9 Matriz solución	24
5 Pérdidas del transformador	24
5.1 Pérdidas I^2R	24
5.2 Pérdidas por efecto eddy	25
5.3 Intensidad de campo magnético de conductores sobre si mismos	25
5.4 Intensidad de campo magnético del núcleo sobre los conductores	25
5.5 Pérdidas totales	27
6 Implementación del modelo mediante Matlab	27

6.1	Diagrama de flujo propuesto	27
6.2	Transformador caso de estudio	29
6.3	Parámetros utilizados para el modelado	30
6.4	Resultados MSAI	30
7	Modelado en FEMM	31
7.1	Mallado del Transformador	31
7.2	Resultados obtenidos en el simulador FEMM	34
8	Comparación de resultados y divulgación	34
8.1	Comparación de resultados	34
8.2	Divulgación	35
9	Conclusiones	36
10	Referencias Bibliográficas	37

Dedicatoria

A Dios primeramente por brindarnos fortaleza para culminar satisfactoriamente nuestra carrera.

A nuestras familias por haber sido un pilar fundamental a lo largo de estos años

A todas las personas que conocimos a través de todos estos años contribuyeron de alguna u otra manera en nuestra formación y en ayudarnos a obtener este logro

A todos aquellos que en este momento se encuentran con dudas, con miedos, con angustia de sentir si lo lograrán, sigan adelante lo que tanto anhelan lo alcanzarán así será

Ernesto Arenas, Yoman Carrillo

Este trabajo no se podría haber realizado sin el apoyo de mis padres, Agustín Arenas y Mónica Lucía Santos, que me brindaron lo necesario para llevar a cabo todo este proceso, también a mis hermanos Nicolás y Andrés que me apoyaron a lo largo de todo este proceso y por último, pero no menos importante Berta Arenas y Sandra Santos, mis tías que me apoyaron a lo largo de toda esta carrera profesional

De igual forma quiero extender mi más sincero agradecimiento al doctor Guillermo Díaz y a mi compañero Yorman Carrillo, por la confianza depositada en mí para el desarrollo de este proyecto, por su orientación, acompañamiento y los aportes realizados a lo largo de este trabajo; sin ellos este proyecto no habría llegado a buen término.

También quiero extender un agradecimiento a Diego, Brayan, Darío, Catherine y Camila; mis amigos de la infancia que estuvieron para mí a lo largo de todo este proceso, confiando en mí y dándome el apoyo para continuar.

Por último agradecer a todos aquellos que me brindaron su colaboración a lo largo de todo este proceso, tanto profesores como familiares que confiaron y brindaron su fortaleza para que este proceso llegara a buen término.

Ernesto Arenas

Primeramente, agradezco a Dios por haberme brindado luz en aquellos momentos de oscuridad en los que no lograba ver con claridad el camino.

Mi gratitud infinita a mis padres, Arnulfo Carrillo y Marlene Martínez, quienes me han apoyado de manera incondicional a lo largo de toda mi trayectoria académica. Sin su esfuerzo, confianza y amor, nada de esto habría sido posible.

De igual manera, a mis hermanas, Yuly, Yessika y Zulma, quienes han sido parte fundamental de este proceso. Este logro también es por y para ustedes.

A ese amigo que la vida me ha regalado desde la infancia y que, a lo largo de los años, siempre ha estado ahí, Edwin Suárez. Gracias.

A mi amada pareja y compañera de vida, Camila Henao, por ser un pilar esencial durante todo este camino y en mi vida. Resulta imposible expresar en unas cuantas líneas todo lo que me has ayudado en este tiempo. Gracias por tu apoyo, paciencia y amor incondicional.

A mi senguda familia, mis suegros, cuñadas gracias por siempre estar al pendiente de todos mis avances y dificultades a lo largo de esta travesía

Agradezco también a los amigos que este espacio universitario me brindó, quienes fueron una constante voz de aliento en los momentos más difíciles.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a ese hermano que la universidad me regaló, cuyo nombre ya pocos recuerdan, pero cuyo apoyo fue invaluable cuando todo parecía perdido. Gracias por darme ánimo en los momentos más complicados. Gracias, Harry.

Yorman Carrillo

Índice de figuras

1	Curva de Saturación	15
2	Representación bidimensional del núcleo	16
3	Representación bidimensional de los devanados y conductores	19
4	Diagrama de flujo propuesto para la implementación en Matlab	28
5	Modelado 2D transformador en FEMM	33
6	Acercamiento a la zona de los conductores	33

Lista de tablas

1	Especificaciones del transformador Siemens utilizado en el estudio	29
2	Parámetros eléctricos y constructivos del transformador	30
3	Resultados obtenidos mediante el método semi-analítico integral (MSAI)	31
4	Parámetros de la simulación en FEMM a 0 Hz	32
5	Parámetros de la simulación en FEMM a 60 Hz	32
6	Pérdidas obtenidas mediante simulación en FEMM	34
7	Comparación de Pérdidas Calculadas Mediante MSAI y FEMM	34
8	Errores Relativos Entre MSAI y FEMM	35

Resumen

Título: Modelado Magnético de Transformadores Mediante el Método Semi-Analítico Integral (MSAI)

Autores: Yorman Ronaldo Carrillo Martínez, Ernesto Arenas Santos

Palabras clave: Transformador, Método semi analítico integral, Optimización, Simulación, Método de elementos finitos, Modelado magnético.

Descripción: El objetivo del proyecto es evaluar la exactitud del modelado magnético de un transformador mediante la aplicación del método semi analítico integral (MSAI) con respecto al ampliamente conocido Método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) en un caso de estudio real. Para el desarrollo de este trabajo se enfocó la simulación en el caso de estudio de un transformador trifásico de 10MVA, mediante el software Matlab se llevó a cabo el modelado de los componentes relevantes del transformador partiendo de los devanados de alta y baja tensión; siguiendo esta línea se aprovechó este mismo software para realizar las simulaciones para la obtención de los campos magnéticos mediante el MSAI y posteriormente se obtuvieron los datos relevantes para el análisis; por otro lado para la obtención de resultados del método de elementos finitos se aprovechó el software FEMM el cual suministró toda la información necesaria y al comparar los resultados dejó en evidencia la similitud entre los resultados de ambos métodos probando así la exactitud del MSAI y ofreciendo así una mayor confianza y robustez en su aplicabilidad.

¹ Trabajo de grado.

Abstract

Title: Magnetic modeling of transformers using the integral semi-analytical method(SAIM)

Authors: Yorman Ronaldo Carrillo Martínez, Ernesto Arenas Santos

Keywords: Transformer, Semi-Analytical Integral Method, Optimization, Simulation, Finite Element Method, Magnetic Modeling.

Description: The objective of the project is to evaluate the accuracy of the magnetic modeling of a transformer by applying the Semi-Analytical Integral Method (MSAI) in comparison with the widely known Finite Element Method (FEM) in a real case study. For the development of this work, the simulation focused on a 10 MVA three-phase transformer as the case study. Using MATLAB software, the modeling of the relevant transformer components was carried out, starting with the high- and low-voltage windings. Along this line, the same software was used to perform simulations to obtain the magnetic fields using the MSAI, and the relevant data for the analysis were subsequently extracted. On the other hand, to obtain results using the Finite Element Method, the FEMM software was employed, which provided all the necessary information. The comparison of the results clearly showed a strong similarity between both methods, thereby demonstrating the accuracy of the MSAI and offering greater confidence and robustness in its applicability.

¹ Trabajo de grado.

Introducción

En los sistemas de potencia, el transformador desempeña un papel fundamental al permitir la transmisión y distribución de energía eléctrica de manera eficiente y segura. La importancia de este dispositivo radica en su capacidad para adaptar los niveles de voltaje y corriente según las necesidades de transporte y consumo, lo que contribuye a la reducción de pérdidas en el sistema y a la estabilidad de la red eléctrica. Sin embargo, la creciente demanda de energía y la competitividad del mercado de transformadores imponen a los fabricantes la necesidad de optimizar sus procesos de diseño y producción, impulsándolos a la búsqueda de la reducción de tiempos de diseño y costos de fabricación. En este contexto, la mejora de los métodos de cálculo de los parámetros de diseño de los transformadores se ha convertido en una prioridad para garantizar la viabilidad técnica y económica de los proyectos.

El proceso de diseño de un transformador implica un análisis detallado de sus características electromagnéticas, lo que tradicionalmente se ha realizado mediante el método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés). El FEM permite una simulación precisa de los campos magnéticos al discretizar el dominio del problema y resolver sistemas de ecuaciones complejos. Sin embargo, esta metodología presenta una limitación significativa: la necesidad de representar detalladamente cada uno de los conductores y componentes del transformador, lo que incrementa considerablemente el tiempo de cómputo y los recursos computacionales requeridos para la simulación.

Para superar estas limitaciones, han surgido alternativas metodológicas como el método semi-analítico integral (MSAI), que propone una reducción sustancial en el tamaño del problema y, en consecuencia, en el tiempo de cálculo, sin comprometer significativamente la exactitud de los resultados. En este sentido, el trabajo de Guillermo Diaz, Enrique Mombello, Jhon Perez y David Pinzón (2021) en su artículo "New method for fast coupled magnetic field-circuit simulation of power transformers based on a semi-analytical approach" destaca el potencial del MSAI, describiendo sus

ventajas frente a otras metodologías de modelado magnético, como las analíticas y numéricas.

Este trabajo de grado se enfoca en la implementación práctica del MSAI en un caso de estudio relevante para la industria, con el propósito de facilitar su adopción por parte de los fabricantes de transformadores, todo mediante el análisis y obtención de las variables \mathbf{k} correspondientes a las densidades de corriente necesarias para el modelado equivalente del material magnético del núcleo del transformador.

Además, el objetivo final no es sólo obtener las pérdidas correspondientes al transformador, tanto las de eddy como las I^2R , sino que también se busca evaluar la exactitud del método comparándolo con los resultados obtenidos a través del FEM, ofreciendo así una mayor confianza en su aplicabilidad y robustez; al tiempo que se confirman los beneficios que puede representar para la industria.

De esta manera, se espera contribuir al desarrollo de metodologías más eficientes para el diseño de transformadores, que permitan a la industria enfrentar los desafíos actuales de forma más competitiva y alineada con las exigencias del mercado; pero no sólo eso sino que también se espera poder apoyar a reducir la brecha presente entre los ingenieros enfocados en la investigación y aquellos enfocados en la implementación de herramientas de cálculo, al proveer una herramienta fácil e intuitiva capaz de validar la información suministrada por los diseñadores, la cual sólo requiere de determinadas variables ya presentes en las placas de datos y en la hoja de diseño del transformador..

1. Objetivos

1.1. Objetivo General

Implementar el modelo magnético de un transformador real usando el MSAI y validar los resultados con el método de elementos finitos MEF

1.2. Objetivos Específicos

Formular matemáticamente el modelo magnético del transformador usando MSAI.

Implementar el modelo matemático del transformador en Matlab.

Validar el modelo implementado mediante la comparación con un modelo en el programa Finite Element Method Magnetics (FEMM).

Difundir la metodología implementada y los resultados obtenidos mediante un video en la plataforma YouTube.

2. Marco Teórico

Desde el punto de vista físico, el comportamiento electromagnético de un transformador se describe a partir de las leyes fundamentales del electromagnetismo. En particular, la generación del campo magnético debido a corrientes eléctricas puede explicarse mediante la ley de Biot–Savart, mientras que la superposición lineal permite determinar el campo total como la suma de las contribuciones individuales generadas por conductores y materiales ferromagnéticos. La intensidad de campo magnético H y la densidad de flujo magnético B se relacionan a través de las propiedades magnéticas del material, siendo esta relación clave para el análisis del núcleo del transformador.

Como alternativa intermedia surgen los métodos semi-analíticos, entre los cuales se destaca el Método Semi-Analítico Integral (MSAI). Este método combina fundamentos analíticos con formulaciones integrales que permiten reducir significativamente el tamaño del problema, manteniendo una adecuada exactitud en los resultados. En el MSAI, el efecto del núcleo se representa mediante corrientes superficiales equivalentes, mientras que los devanados se modelan como conductores filamentosos, lo que simplifica la descripción geométrica y reduce los grados de libertad del sistema.

Dentro de este enfoque, resulta fundamental el análisis de las interacciones electromagnéticas presentes en el transformador. Estas interacciones incluyen la influencia del núcleo sobre sí mismo, la interacción entre los devanados y el núcleo, así como la interacción entre los propios conductores. Para su correcta formulación, se definen conceptos como puntos fuente, desde los cuales se genera el campo magnético, y puntos campo, en los cuales se evalúa dicho campo. Esta distinción permite estructurar de manera ordenada el cálculo de las magnitudes magnéticas de interés.

Finalmente, el análisis del campo magnético permite determinar las principales pérdidas del transformador, entre las que se destacan las pérdidas resistivas por efecto Joule (I^2R) y las pérdidas por corrientes parásitas o efecto eddy en los conductores.

3. Consideraciones Previas

Cuando el núcleo del transformador opera en su zona lineal, la relación constitutiva entre la densidad de flujo magnético B y la intensidad de campo H puede aproximarse mediante una relación lineal $B = \mu H$, con una permeabilidad efectiva μ prácticamente constante en el rango de excitación considerado. Bajo esta hipótesis, las ecuaciones que gobiernan el problema magnético se expresan en forma lineal, lo cual habilita el uso de soluciones analíticas o semi-analíticas. En este contexto, el Método Analítico Semi Integral (MSAI) aprovecha la estructura lineal del sistema para transformar el problema del campo magnético en expresiones integrales manejables, capaces de describir con buena precisión la distribución de campo en el espacio alrededor de los devanados y del núcleo.

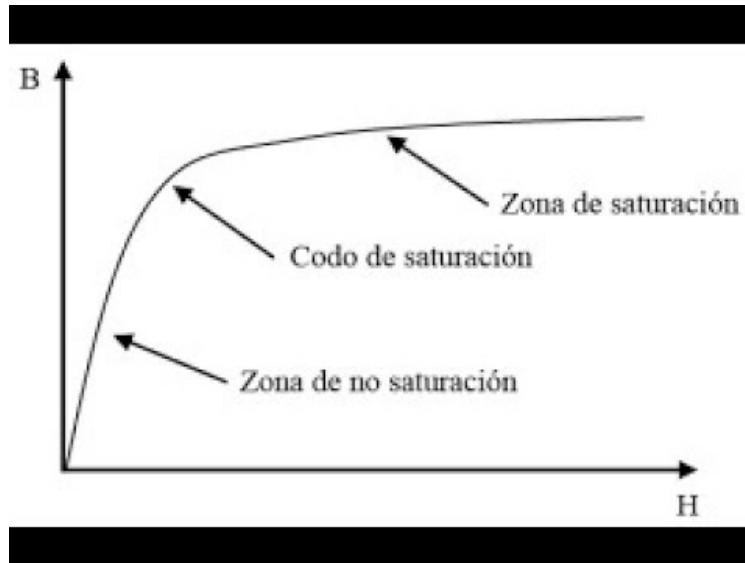
Desde el punto de vista práctico, la validez del MSAI en la zona lineal se traduce en ventajas claras frente a métodos numéricos completos, tales como un menor costo computacional, una convergencia rápida y una interpretación física directa de las contribuciones de cada región geométrica al campo total. Estas ventajas son aprovechables siempre que la excitación del transformador se mantenga dentro del rango donde la permeabilidad del núcleo no presenta variaciones significativas y los efectos de histéresis o saturación puedan despreciarse. En condiciones normales de operación, este supuesto se cumple con frecuencia, por lo cual el MSAI representa una herramienta eficiente y confiable para el cálculo de parámetros como la distribución de flujo, las reactancias y los campos de fuga en dicho régimen.

Sin embargo, es importante resaltar que la hipótesis de linealidad constituye la condición de validez del MSAI. Cuando el núcleo entra en saturación o se presentan excitaciones elevadas (por ejemplo, picos transitorios, alto contenido armónico o corrientes de energización), la permeabilidad deja de ser constante y aparecen efectos no lineales que no pueden ser representados adecuadamente por el modelo lineal. En tales escenarios, se recomienda complementar el análisis con modelos numéricos no lineales, como el Método de Elementos Finitos (FEM), o con aproximaciones de

linealización por tramos, además de realizar validaciones adicionales. Por esta razón, en este trabajo el MSAI se emplea como método principal dentro del rango lineal esperado del transformador real, y sus resultados se contrastan con simulaciones FEM para verificar la confiabilidad de las predicciones obtenidas.

Figura 1

Curva de Saturación



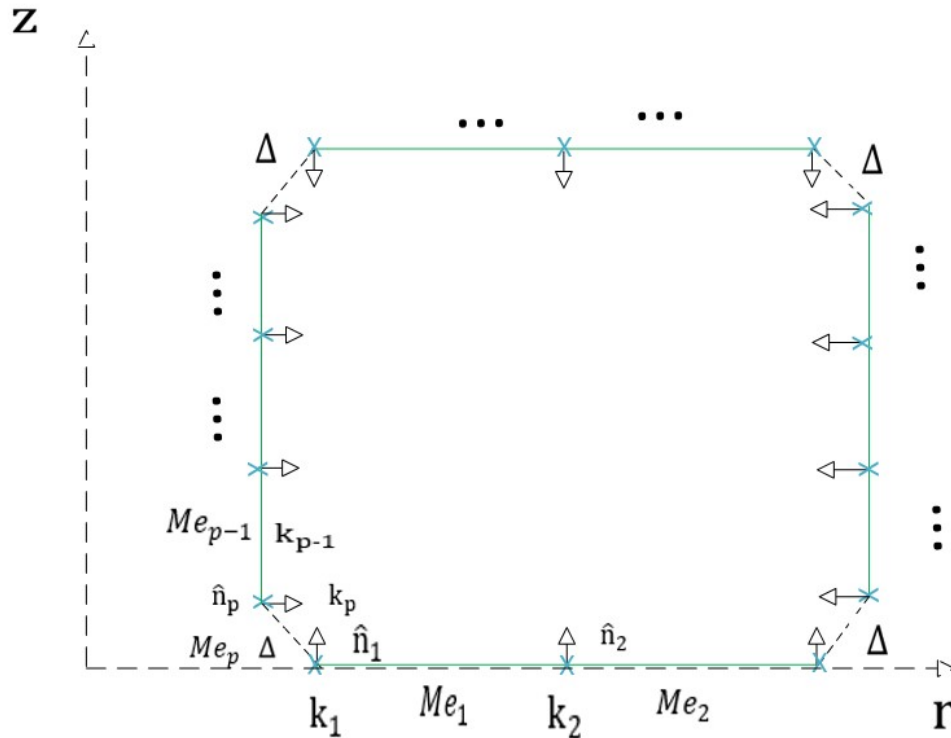
4. Formulación Matemática

En este apartado se presentará de manera detallada la formulación matemática correspondiente al modelo del núcleo y de los devanados del transformador. Asimismo, se describirá la interacción que existe entre ambos elementos, analizando cómo sus características magnéticas influyen mutuamente en su comportamiento.

4.1. Modelado del Núcleo

Figura 2

Representación bidimensional del núcleo



Partimos de la elaboración de un modelo bidimensional del núcleo del transformador, definido en el plano de coordenadas r y z . En dicho modelo se representan todas las variables de interés, así como la magnitud desconocida que se desea determinar que para nuestro caso son las densidades de corrientes superficial. De este modo, se establece la base para el análisis detallado del comportamiento magnético del núcleo.

4.2. Elementos

La discretización del núcleo se realiza dividiendo la superficie del mismo en \mathbf{p} secciones, las cuales hemos denominado cómo elementos. Definimos como elementos todos los segmentos que conforman la ventana del núcleo del transformador. Cada uno de estos segmentos queda descrito mediante dos puntos en el plano, con coordenadas (r_1, z_1) y (r_2, z_2) Este conjunto de elementos permite representar de forma fiel la geometría de la ventana del núcleo, sirviendo posteriormente como base para el modelo y análisis de las magnitudes magnéticas asociadas.

La matriz de elementos se define como .

$$[\mathbf{M}_e] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & z_{11} & z_{21} \\ r_{12} & r_{22} & z_{12} & z_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & z_{1p} & z_{2p} \end{bmatrix}_{p \times 4}$$

donde cada fila contiene las coordenadas en metros (r_1, r_2, z_1, z_2) correspondientes al elemento i -ésimo

4.3. Vectores Normales Asociados

Cada elemento superficial del núcleo posee un vector normal asociado. El vector normal del elemento i -ésimo se define como

$$\mathbf{n}_p = n_i^{(r)} \hat{\mathbf{r}} + n_i^{(z)} \hat{\mathbf{z}}.$$

Los vectores columna de componentes radiales y axiales para todos los elementos se expresan como

$$\mathbf{n}_r = \begin{bmatrix} n_1^{(r)} \\ n_2^{(r)} \\ \vdots \\ n_p^{(r)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} n_1^{(z)} \\ n_2^{(z)} \\ \vdots \\ n_p^{(z)} \end{bmatrix}$$

4.4. Densidad de corriente superficial

Se define el vector \mathbf{k} , que contiene las densidades de corriente superficial nodales [A/m] para cada uno de los p elementos, la cuál constituye nuestra variable desconocida y es de nuestro interés determinar, la cuál se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix}$$

el cual es un vector columna de dimensión $p \times 1$

4.5. Elementos de contribución nula

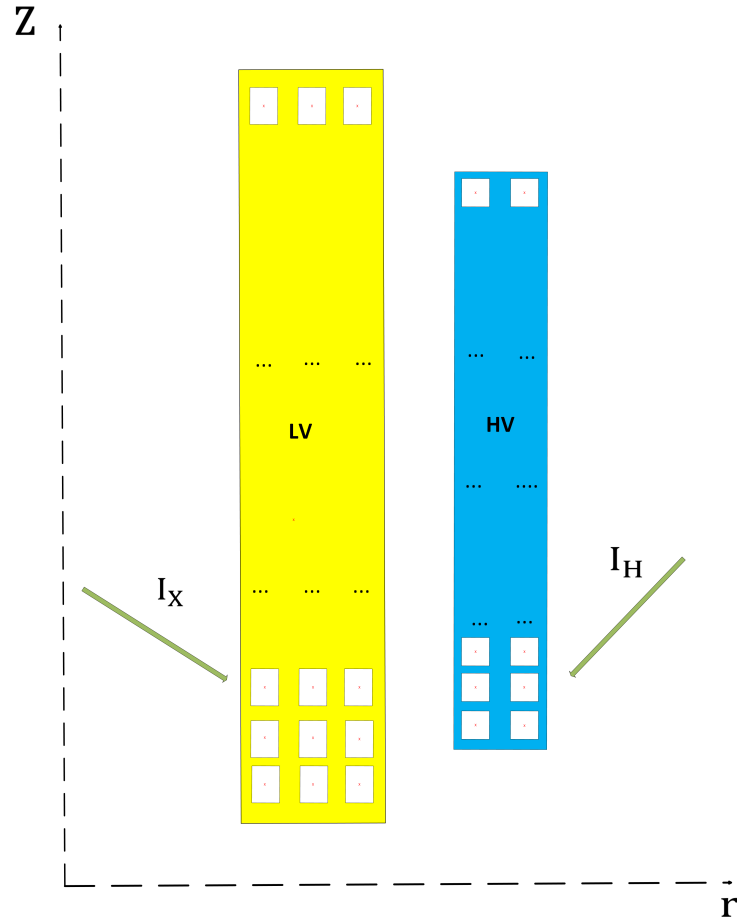
Como se observa en las esquinas del modelo bidimensional del transformador, se introducen unas pequeñas distancias considerablemente pequeñas en comparación con las medidas del transformador denominadas Δ . Dichos elementos que hacen parte del modelado del transformador se han denominado como dummy's. Estas distancias permiten suprimir los vértices del núcleo con el fin de evitar la aparición de singularidades numéricas durante el desarrollo de los cálculos correspondientes.

4.6. Modelado de los conductores

Se propone un modelo bidimensional (2D) para los devanados de baja tensión (BT) y alta tensión (AT), el cual está conformado por todos los conductores que integran cada devanado, junto con las coordenadas de los centros de dichos conductores, (r_c, z_c) . Adicionalmente, el modelo incluye las inyecciones de corriente correspondientes en los devanados, denotadas por I .

Figura 3

Representación bidimensional de los devanados y conductores



Estas coordenadas se organizan en las matrices columna

$$\mathbf{r}_c = [r_1, r_2, \dots, r_g]^T \in \mathbb{R}^{g \times 1}, \quad \mathbf{z}_c = [z_1, z_2, \dots, z_g]^T \in \mathbb{R}^{g \times 1},$$

donde g es el número total de conductores de los devanados .

De manera análoga, las corrientes inyectadas en cada conductor se agrupan en el vector columna

$$\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_g]^T$$

donde I_j en $[A]$ representa la corriente inyectada en el conductor j -ésimo.

4.7. Puntos de evaluación

En las secciones subsecuentes se describen las distintas interacciones que tienen lugar en el transformador; por esta razón, es necesario realizar algunas precisiones

conceptuales que faciliten su comprensión.

Puntos fuente: Corresponden a los puntos desde los cuales se genera el campo, ya sea ubicados en los centros de los conductores o en los elementos superficiales empleados en la discretización del núcleo.

Puntos campo: Se refieren a los puntos en los cuales se evalúa el campo generado por un punto fuente determinado.

4.8. Valores de interés

Intensidad de campo magnético de elementos superficiales

Con base en la formulación propuesta en (Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen, 2023). La intensidad de campo magnético generada por el j -ésimo elemento de superficie en el i -ésimo punto de campo se evalúa en los puntos de interés donde se desea determinar el campo magnético. Dicha interacción la hemos denominado *interacción Núcleo–Núcleo*, y se define de la siguiente manera:

$$\vec{H}_{i,j}^{(s)} = (a_{i,j}k_j + a'_{i,j}k_{j+1})\hat{r} + (b_{i,j}k_j + b'_{i,j}k_{j+1})\hat{z}, \quad [\text{A/m}] \quad j = 1 \cdots p, \quad i = 1 \cdots p \quad (1)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (9) (Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen, 2023)

En la expresión las variables $a_{i,j}$ $a'_{i,j}$ $b_{i,j}$ $b'_{i,j}$ son denominados **factores geométricos**, los cuales son dependientes de la geometría del elementos que produce campo y del punto dónde se desea calcular el campo. Los cuales se pueden disponer en una matriz de dimensión $p \times p$. Para más información revisar Babic, Akyel, Gavrilovic, y Ke (1999) Díaz, Mombello, y Stephan (2012) Kythe y Schäferkötter (2004)

Intensidad de campo magnético de elementos filamentosos

Con base en la formulación propuesta en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023). Se define la intensidad del campo magnético debida a la j -ésima corriente por conductor en el i -ésimo punto de campo de la superficie del núcleo lo que hemos

denominado la interacción Devanado-Núcleo de la siguiente forma.

$$\vec{H}_{i,j}^{(c)} = c_{i,j}I_j \hat{r} + d_{i,j}I_j \hat{z} \quad [\text{A/m}] \quad \text{for } j = 1 \cdots g \quad \text{and} \quad i = 1 \cdots p \quad (2)$$

Nota. Ecuación adaptada de la Ecuación (10) en (Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen, 2023).

Donde los coeficientes $c_{i,j}$ y $d_{i,j}$ son factores geométricos, en este caso, los cuales se pueden disponer en una matriz de dimensión $p \times g$.

Intensidad de campo magnético total

La intensidad total del campo magnético se determina como la superposición lineal de los dos campos previamente definidos.

$$\vec{H}_i = \sum_{j=1}^p H_{i,j}^{(s)} + \sum_{j=1}^g H_{i,j}^{(c)}. \quad (3)$$

Para estas expresiones se debe cumplir la siguiente ecuación de frontera

$$\hat{n} \times \vec{H}_i = \gamma \cdot \vec{k}_i \quad (4)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (1) en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

Se puede reescribir la intensidad de campo magnético total en función de los factores geométricos, densidades de corriente superficiales y corrientes por conductor de la siguiente forma

$$\vec{H}_i = \sum_{j=1}^p \left\{ (a_{i,j}k_j + a'_{i,j}k_{j+1})\hat{r} + (b_{i,j}k_j + b'_{i,j}k_{j+1})\hat{z} \right\} + \sum_{j=1}^g \{c_{i,j}I_j\hat{r} + d_{i,j}I_j\hat{z}\} \quad (5)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (14) en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

El siguiente proceso se realiza con la finalidad de agrupar toda la información de manera matricial esto con la intención de que sea más sencillo de manipular y entender la información con la que se está trabajando. A su vez el trabajar con matrices nos permitirá realizar los cálculos respectivos de manera más eficiente

Para ello realizamos el producto cruz correspondiente

$$\hat{n}_i \times \vec{H}_i = \left(n_i^{(r)} H_i^{(z)} - n_i^{(z)} H_i^{(r)} \right) \hat{\phi}$$

$$\left(n_i^{(r)} H_i^{(z)} - n_i^{(z)} H_i^{(r)} \right) \hat{\phi} = \gamma_i k_i \hat{\phi}$$

Lo cuál nos da como resultado la siguiente expresión

$$n_i^{(r)} H_i^{(z)} - n_i^{(z)} H_i^{(r)} = \gamma_i k_i \quad (6)$$

Ahora agrupamos las componentes radiales y axiales de la intensidad de campo magnético respectivamente

$$\begin{aligned} & n_i^{(r)} \left[\sum_{j=1}^p (b_{i,j} k_j + b'_{i,j} k_{j+1}) + \sum_{j=1}^g d_{i,j} I_j \right] \\ & - n_i^{(z)} \left[\sum_{j=1}^p (a_{i,j} k_j + a'_{i,j} k_{j+1}) + \sum_{j=1}^g c_{i,j} I_j \right] = \gamma_i k_i \end{aligned}$$

Agrupando por coeficientes:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p k_j \left[n_i^{(r)} b_{i,j} - n_i^{(z)} a_{i,j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^p k_{j+1} \left[n_i^{(r)} b'_{i,j} - n_i^{(z)} a'_{i,j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^g I_j \left[n_i^{(r)} d_{i,j} - n_i^{(z)} c_{i,j} \right] = \gamma_i k_i \end{aligned}$$

Expresando $\gamma_i k_i = \gamma_i \sum_{j=1}^p k_j \delta_{i,j}$ donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker: definido como

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

De este modo, el término $\gamma_i k_i$ puede escribirse dentro de la sumatoria como $-\gamma_i \delta_{i,j} k_j$.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^p k_j \left[n_i^{(r)} b_{i,j} - n_i^{(z)} a_{i,j} - \gamma_i \delta_{i,j} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^p k_{j+1} \left[n_i^{(r)} b'_{i,j} - n_i^{(z)} a'_{i,j} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^g I_j \left[n_i^{(r)} d_{i,j} - n_i^{(z)} c_{i,j} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente agrupando y reordenando los términos obtenemos

$$\sum_{j=1}^p \left\{ k_j \left(a_{i,j} n_i^{(z)} - b_{i,j} n_i^{(r)} - \gamma_i \delta_{i,j} \right) + k_{j+1} \left(a'_{i,j} n_i^{(z)} - b'_{i,j} n_i^{(r)} \right) \right\} + \sum_{j=1}^g \left\{ I_j \left(c_{i,j} n_i^{(z)} - d_{i,j} n_i^{(r)} \right) \right\} = 0 \quad (8)$$

Ahora seguidamente dicha expresión podemos escribirla en forma matricial, para poder determinar nuestra variable de interés

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{a} \circ (\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{1}_p^T) - \mathbf{b} \circ (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{1}_p^T) \mid \mathbf{0}_p \right] + \left[\mathbf{0}_p \mid \mathbf{a}' \circ (\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{1}_p^T) - \mathbf{b}' \circ (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{1}_p^T) \right] \quad (9)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (16) en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

En esta matriz \mathbf{F} Se almacena la primera parte de la ecuación 8 la cuál es de dimensiones $p \times (p + 1)$. No obstante esta última columna que aparece en dicha matriz es redundante por eso es válido eliminarla, por consiguiente definimos una nueva matriz que nace de esta matriz \mathbf{F} demostrada anteriormente

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{F}_{[:,1:p]}$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (11) en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

La segunda parte de la ecuación 8 la podemos reescribir de la siguiente manera

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{c} \circ (\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{1}_g^T) - \mathbf{d} \circ (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{1}_g^T) \quad (11)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (17) en Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

4.9. Matriz solución

Finalmente una vez almacenado todos los parámetros de interés podemos expresar toda la información en una sola ecuación matricial

$$[\mathbf{M}_s - \gamma][\mathbf{k}] + [\mathbf{M}_c][\mathbf{I}] = \mathbf{0}_p$$

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{M}_s - \gamma]^{-1} [-\mathbf{M}_c][\mathbf{I}] \quad [\text{A/m}] \quad (12)$$

Dónde

$$\gamma_i = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i), \quad \gamma_i^{(r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \mu_i^{(r)}}{1 - \mu_i^{(r)}}, \quad \gamma_i^{(z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \mu_i^{(z)}}{1 - \mu_i^{(z)}}.$$

Nota. Ecuación tomada de Díaz, Mombello, Perez G., y Høidalen (2023).

Dónde las variables $\mu_i^{(r)}$, $\mu_i^{(z)}$ corresponde a las permeabilidades relativas del núcleo.

La ecuación 12 nos permitiría determinar las densidades de corrientes superficiales presentes en el núcleo del transformador.

5. Pérdidas del transformador

A continuación, basándose en los cálculos realizados previamente, se procede a determinar las pérdidas del transformador.

5.1. Pérdidas I^2R

Las pérdidas resistivas monofásicas del transformador se pueden determinar mediante la siguiente expresión:

$$P_R^{[j]} = 2\pi \left| \frac{I_\phi^{(h)}}{\sqrt{2}} \right|^2 \frac{r^{[j]}}{\sigma^{(h)} s^{(h)}} \quad (13)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (3.149) en Díaz Flórez (2019)

Dónde

$r^{[j]}$: es el centro de todos los conductores tanto de los devanados de BT, como AT.

$\sigma^{(h)}$: Conductividad eléctrica del material de los conductores, para este caso en particular cobre.

$s^{(h)}$: Sección transversal de los conductores.

5.2. Pérdidas por efecto eddy

Para el cálculo de las pérdidas por efecto eddy en los conductores del transformador, es necesario conocer la distribución del campo magnético que interactúa tanto con el propio conductor como con el núcleo y los conductores adyacentes. Estas pérdidas se originan debido a los campos magnéticos variables que atraviesan las regiones conductoras, induciendo corrientes parásitas cuyo valor depende directamente de la intensidad y orientación del campo magnético local. En este trabajo, las pérdidas por efecto Eddy se determinan mediante las expresiones dadas en las ecuaciones 18 y 19, las cuales permiten cuantificar dichas pérdidas

5.3. Intensidad de campo magnético de conductores sobre si mismos

Para la intensidad total del campo magnético en las direcciones radial y axial, debida a la interacción de los conductores consigo mismos, se utiliza la expresión análoga a (2). Considerando que esta interacción ahora no es con elementos superficiales, si no con cada uno de los conductores y los factores geométricos resultantes en esta interacción los hemos denotado como q , q'

$$\vec{H}_{i,j}^{(c)} = q_{i,j}I_j \hat{r} + q'_{i,j}I_j \hat{z} \quad [\text{A/m}] \quad \text{for } j = 1 \dots g \quad \text{and} \quad i = 1 \dots p \quad (14)$$

5.4. Intensidad de campo magnético del núcleo sobre los conductores

Seguidamente para determinar la intensidad de campo magnético de la interacción entre elementos superficiales y conductores se usa una expresión análoga a 15 que nos da cómo expresión final:

$$\vec{H}_{i,j}^{(SC)} = (O_{i,j}k_j + O'_{i,j}k_{j+1}) \hat{r} + (L_{i,j}k_j + L'_{i,j}k_{j+1}) \hat{z}, \quad [\text{A/m}] \quad i = 1 \dots g \quad j = 1 \dots p \quad (15)$$

Los factores geométricos presentes en esta interacción, $O_{i,j}$, $O'_{i,j}$, $L_{i,j}$ y $L'_{i,j}$, poseen dimensiones $g \times p$.

Nótese que dicha interacción depende explícitamente de las densidades de corriente superficial \mathbf{k} definidas en el modelo matemático previo. Por esta razón, resultó de vital interés determinar con exactitud los valores de estas densidades, dado su papel fundamental.

De este modo, se obtiene la siguiente expresión para la intensidad total del campo magnético.

$$\vec{H}_r = \vec{H}_{i,j}^{(SC)} \hat{r} + \vec{H}_{i,j}^{(c)} \hat{r} \quad [\text{A/m}] \quad (16)$$

$$\vec{H}_z = \vec{H}_{i,j}^{(SC)} \hat{z} + \vec{H}_{i,j}^{(c)} \hat{z} \quad [\text{A/m}] \quad (17)$$

La intensidad total del campo magnético resultante, tanto en la dirección radial como en la axial, tiene dimensiones $g \times 1$. Esto es congruente, ya que corresponde con la cantidad de conductores presentes en el transformador.

Las pérdidas debidas al efecto eddy pueden ser determinadas de la siguiente manera

$$p_z^{[j]} = \frac{\sigma^{(h)} \omega^2 (d_{tb})^2 \mu_0^2}{24} |H_z^{[j]}|^2 \quad [\text{W/m}^3] \quad (18)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (3.147) en Díaz Flórez (2019).

$$p_r^{[j]} = \frac{\sigma^{(h)} \omega^2 (h_{tb})^2 \mu_0^2}{24} |H_r^{[j]}|^2 \quad [\text{W/m}^3] \quad (19)$$

Nota. Ecuación tomada de la Ecuación (3.148) en Díaz Flórez (2019).

$$P^{(h)} = \sum_{j=m+1}^{m+n} v_c^{(h)[j]} (p_r^{[j]} + p_z^{[j]}) \quad [W] \quad (20)$$

Nota. Ecuación adaptada de la Ecuación (3.152) en Díaz Flórez (2019).

d_{tb} : Dimensión radial de los conductores.

h_{tb} : Dimensión axial de los conductores.

$v_c^{(h)[j]}$: Volumen de cada conductor Los vectores $H_r^{[j]}$ y $H_z^{[j]}$ representan, respectivamente, las componentes radial y axial de la intensidad del campo magnético

H presentes sobre los conductores, originadas tanto por la interacción entre los propios conductores como por la interacción entre los elementos superficiales del núcleo y dichos conductores.

5.5. Pérdidas totales

Finalmente definimos las pérdidas totales del transformador.

$$P_T = P_{eddy} + P_R \quad [\text{W}] \quad (21)$$

6. Implementación del modelo mediante Matlab

Una vez obtenido el modelo matemático con el cual se puede representar el transformador, y contando con los datos necesarios para su desarrollo, se procede a implementar dicho modelado en el software *Matlab*. Esta implementación incluye los cálculos correspondientes de los factores geométricos; sin embargo, para el desarrollo de este trabajo no es objetivo principal detallar el procedimiento mediante el cual estos son calculados. Para más información sobre el cálculo de los factores geométricos ver referencias Babic, Akyel, Gavrilovic, y Ke (1999) Díaz, Mombello, y Stephan (2012) Kythe y Schäferkötter (2004)

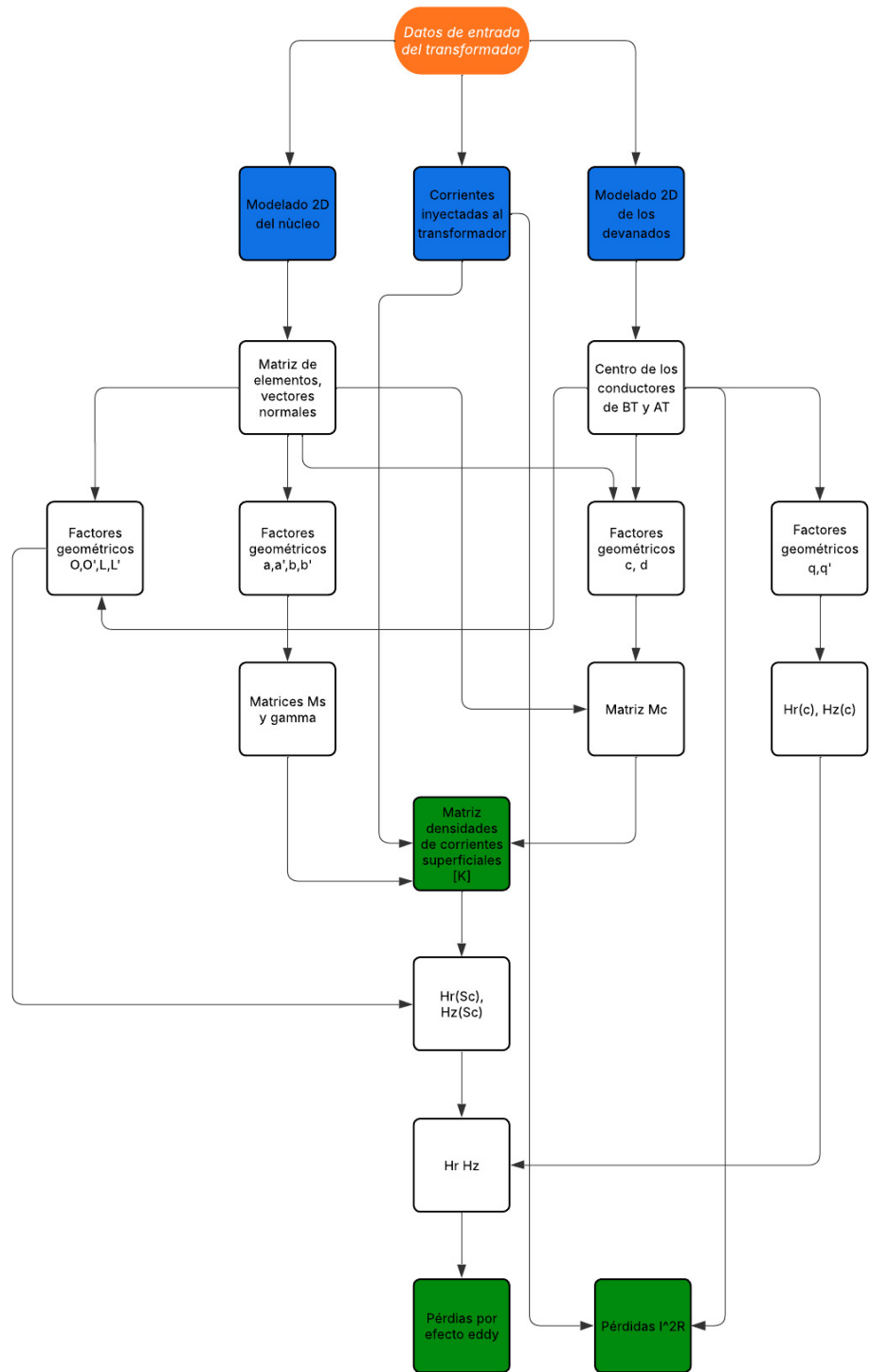
6.1. Diagrama de flujo propuesto

Con el fin de facilitar la comprensión e interpretación del método propuesto, se desarrolló un algoritmo que permite determinar de manera sistemática todas las variables de interés definidas previamente. Dicho algoritmo estructura el procedimiento de cálculo paso a paso, lo que contribuye a una mejor trazabilidad de los resultados y a la reproducibilidad de la metodología empleada.

No obstante, es importante aclarar que la implementación completa del algoritmo, junto con los detalles computacionales y las rutinas utilizadas, se encuentra consignada en los anexos del documento, con el propósito de no sobrecargar el cuerpo principal del texto y mantener un enfoque centrado en los fundamentos teóricos y en el análisis de resultados.

Figura 4

Diagrama de flujo propuesto para la implementación en Matlab



6.2. Transformador caso de estudio

Cuadro 1

Especificaciones del transformador Siemens utilizado en el estudio

Parámetro	Valor
Potencia nominal	10 [MVA]
Tensión nominal de AT	34.5 [kV]
Tensión nominal de BT	13.8 [kV]
Conexión	<i>Dyn5</i>
LTC	$\pm 2,5\%$
Devanado de baja tensión (BT)	149 capas, compuesto por 3 conductores en paralelo
Devanado de alta tensión (AT)	677 capas, compuesto por 2 conductores en paralelo
Dimensión radial de un conductor de BT	3.9 [mm]
Dimensión axial de un conductor de BT	14.3 [mm]
Dimensión radial de un conductor de AT	4 [mm]
Dimensión axial de un conductor de AT	6 [mm]
Altura de la ventana núcleo	849 [mm]
Ancho de la ventana núcleo	325 [mm]

Para el desarrollo del caso de estudio se utilizó un transformador del fabricante Siemens, seleccionado por presentar características representativas de los transformadores de potencia empleados en sistemas eléctricos reales. Este equipo fue empleado como referencia para la aplicación del método propuesto, y sus especificaciones técnicas, las cuales se detallan en [1], sirvieron como base para el modelado y análisis del comportamiento magnético del transformador. La elección de este transformador permitió contar con parámetros confiables y acordes a un entorno industrial, lo que contribuye a garantizar la validez de los resultados obtenidos y su aplicabilidad en escenarios reales.

6.3. Parámetros utilizados para el modelado

Cuadro 2

Parámetros eléctricos y constructivos del transformador

Parámetro	Valor
Tensión lado AT con tap nominal (V_H)	35.363 [kV]
Tensión lado BT (V_x)	13.8 [kV]
Corriente nominal lado AT (I_H)	163.2 [A]
Corriente nominal lado BT (I_x)	418.4 [A]
Cantidad total de conductores AT	1354
Cantidad total de conductores BT	447
Número de elementos superficiales del núcleo	173
Permeabilidad relativa en dirección axial $\mu_i^{(r)}$	10000
Permeabilidad relativa en dirección radial $\mu_i^{(z)}$	10000

El ancho y la altura de la ventana del núcleo se encuentran presentes en la tabla 1

6.4. Resultados MSAI

En la tabla mostrada a continuación se muestran los resultados obtenidos con el modelo implementado en este trabajo, se hace de nuevo la aclaración que todos estos resultados pueden ser verificados en el anexo correspondiente

Nota. La simulación fue ejecutada en un equipo con procesador AMD Ryzen 5 3500U, velocidad del procesador 2.1 GHz, 8 GB de memoria RAM y sistema operativo Windows.

Cuadro 3

Resultados obtenidos mediante el método semi-analítico integral (MSAI)

Magnitud	Valor
Pérdidas por efecto Eddy (MSAI)	4.36 [kW]
Pérdidas I ² R (MSAI)	8.30 [kW]
Pérdidas totales estimadas (MSAI)	12.66 [kW]
Tiempo de simulación	1.2 [s]

7. Modelado en FEMM

Finalmente, para validar los resultados obtenidos a partir del modelo propuesto e implementado en Matlab, se empleó el simulador de Elementos Finitos Finite Element Method Magnetics (FEMM). Dicha validación se realizó mediante la comparación de las principales magnitudes calculadas por ambos enfoques, permitiendo evaluar la exactitud, consistencia y viabilidad del modelo desarrollado.

Se resalta que los valores utilizados para la simulación son exactamente los mismos utilizados para el modelo planteado en Matlab

7.1. Mallado del Transformador

A continuación se muestra el esquema 2D del simulación la cual posee las siguientes características. El modelado del transformador se realizó utilizando los datos presentes en la tabla 2.

Cuadro 4*Parámetros de la simulación en FEMM a 0 Hz*

Parámetro	Valor
Tipo de solución	Ejesimétrica
Frecuencia	0 Hz
Número de nodos	2 024 442
Número de elementos	4 048 590
Tiempo de simulación	0.48 horas

Cuadro 5*Parámetros de la simulación en FEMM a 60 Hz*

Parámetro	Valor
Tipo de solución	Ejesimétrica
Frecuencia	60 Hz
Número de nodos	2 024 442
Número de elementos	4 048 590
Tiempo de simulación	2.3 horas

En primera instancia se realizó una simulación a 0 Hz, esto con la finalidad de poder determinar de manera confiable las pérdidas resistivas del transformador.

Seguidamente se realizó una simulación a 60 Hz para poder determinar las pérdidas totales del transformador.

Figura 5

Modelado 2D transformador en FEMM

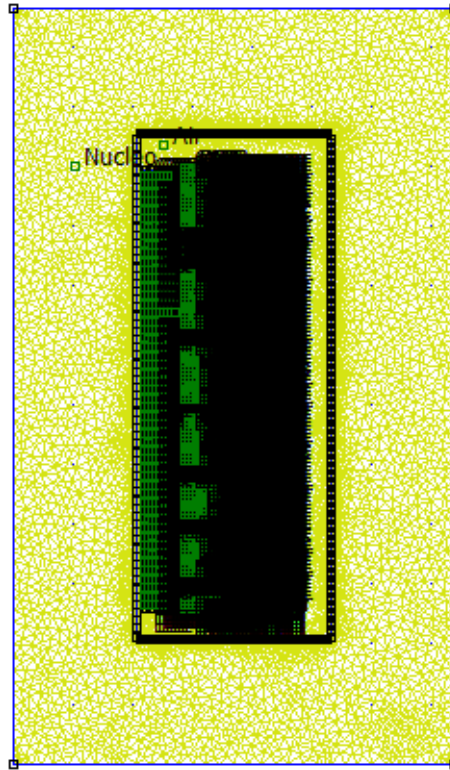
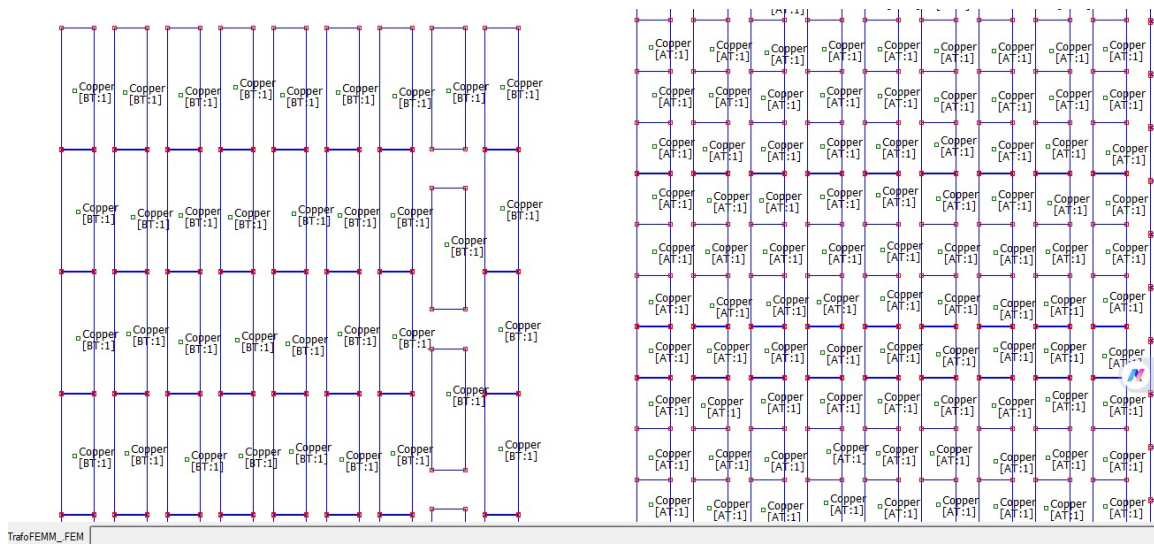


Figura 6

Acercamiento a la zona de los conductores



7.2. Resultados obtenidos en el simulador FEMM

Cuadro 6

Pérdidas obtenidas mediante simulación en FEMM

Frecuencia [Hz]	Tipo de pérdida	Valor
0 Hz	Pérdidas I^2R	8.29 kW
60 Hz	Pérdidas totales	12.40 kW

8. Comparación de resultados y divulgación

8.1. Comparación de resultados

Como apartado final, se presenta la comparación entre ambos métodos: el modelo planteado e implementado en el presente documento y su equivalente basado en el Método de Elementos Finitos, desarrollado de la simulación FEMM. En este caso, las pérdidas por efecto eddy solo pueden obtenerse calculando la diferencia entre las pérdidas totales y las pérdidas I^2R obtenidas de la simulación, esto debido a que por limitaciones del simulador FEMM no está habilitado el cálculo de las pérdidas por efecto eddy de manera directa.

Cuadro 7

Comparación de Pérdidas Calculadas Mediante MSAI y FEMM

Magnitud	MSAI (kW)	FEMM (kW)
Pérdidas por efecto Eddy	4.36	4.11
Pérdidas I^2R	8.30	8.29
Pérdidas totales	12.66	12.40

Cuadro 8*Errores Relativos Entre MSAI y FEMM*

Magnitud	Error relativo (%)
Pérdidas I^2R	0.12
Pérdidas por efecto eddy	6.8
Pérdidas totales	2.10

De acuerdo con los criterios establecidos en la norma IEEE C57.12.00-2021 *IEEE Standard for General Requirements for Liquid-Immersed Distribution, Power, and Regulating Transformers* (2021), las pérdidas totales de los transformadores están sujetas a tolerancias aceptables durante los procesos de diseño y fabricación, permitiéndose una desviación máxima de hasta el 6% respecto a los valores garantizados. En este sentido, el valor de pérdidas totales obtenido mediante el método MSAI presenta una desviación del 2.10%, la cual se encuentra claramente dentro de los márgenes establecidos por la normativa.

8.2. Divulgación

Con el propósito de contribuir a la divulgación y apropiación de la metodología desarrollada en este trabajo, se realizó un video de carácter explicativo en el cual se presenta de manera clara y estructurada el enfoque propuesto. En dicho material audiovisual se describen los fundamentos teóricos de la metodología, las principales etapas del procedimiento de implementación y los resultados más relevantes obtenidos, con el fin de facilitar su comprensión y posible aplicación en contextos académicos y profesionales. El cuál puede ser encontrado en la sección de anexos.

9. Conclusiones

Como se puede observar las pérdidas resistivas calculadas por el MSAI y el FEMM; son casi idénticas, a tal punto que manejan un error relativo inferior al 1 % mostrando la viabilidad del MSAI para aplicaciones industriales .

Al aplicar el método semianalítico integral al caso de estudio se encontró una reducción en el tiempo de cálculo de las pérdidas del transformador que puede resultar de gran interés para las empresas encargadas del diseño de estos equipos, al permitir una disminución de los gastos económicos asociados con el proceso de diseño de transformadores

Se observa que el error en las pérdidas por efecto eddy alcanza hasta un 6 %. Esto podría atribuirse que MSAI calcula las pérdidas por efecto eddy con el campo en un solo punto (punto central del conductor), mientras que FEM obtiene la distribución de densidad de corriente en cada elemento que compone un conductor y después realiza la integración numérica elemento a elemento. A pesar de esto, se considera que la relación de compromiso entre exactitud y velocidad de cálculo de MSAI es adecuada para propósitos de diseño de transformadores.

10. Referencias Bibliográficas

- Babic, S., Akyel, C., Gavrilovic, M. M., y Ke, W. (1999). New closed-form expressions for calculating the magnetic field of thin conductors with azimuthal current direction. En *Telecommunications in modern satellite, cable and broadcasting services* (Vol. 1, pp. 44–47).
- Díaz Flórez, G. A. (2019). Nueva metodología para el modelado magnético de transformadores con devanados en conductor laminado. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 61(2), 273–292. doi: 10.3233/JAE-180107
- Díaz, G. A., Mombello, E. E., Perez G., J., y Høidalen, H. K. (2023). Methodology for fast calculation of impedance matrix of power transformers for high frequency transient studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 38(2), 1148–1159. doi: 10.1109/TPWRD.2022.3209878
- Díaz, G. A., Mombello, E. E., y Stephan, V. (2012). Magnetic vector potential and magnetic field intensity due to a finite current carrying cylinder considering a variable current density along its axial dimension. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 40(2).
- Díaz Flórez, G. A. (s.f.). Opensaim: Semi-analytical integral method for magnetic field analysis. <https://myuserhub.github.io/OpenSAIM/SAIM.html>. (Repositorio de rutinas en `Matlab` para el método semi-analítico integral)
- Ieee standard for general requirements for liquid-immersed distribution, power, and regulating transformers* (n.º IEEE Std C57.12.00-2021). (2021). IEEE.
- Kythe, P. K., y Schäferkötter, M. R. (2004). *Handbook of computational methods for integration*. Chapman and Hall/CRC.
- Meeker, D. (2010). Finite element method magnetics (femm) version 4.2 (x64) user's manual [Manual de software informático]. (Disponible en línea: <https://www.femm.info/wiki/HomePage>)
- OpenSAIM Project. (2026). *Semi-analytical integral method (saim)*. <https://>

`myuserhub.github.io/OpenSAIM/SAIM.html`. (Accessed: 2026-01-21)

Para la correcta ejecución del código se deberá tener en el directorio de trabajo las rutinas para el cálculo de los factores geométricos presentes en OpenSAIM Project (2026)

- Entrar al siguiente enlace para visualizar el vídeo de divulgación del método aquí
- Entrar al siguiente link para visualizar el código de Matlab
- Entrar al siguiente link para visualizar la simulación en el FEMM.