PROPIEDADES DEL ESPACIO DE JAMES

Herson Stiven Suárez Chávez

Santiago José Delgado Benítez

Edgar Eduardo Mantilla Pedroza

Yeny Paola Moreno Pabón

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

PROPIEDADES DEL ESPACIO DE JAMES

Herson Stiven Suárez Chávez

Santiago José Delgado Benítez

Edgar Eduardo Mantilla Pedroza

Yeny Paola Moreno Pabón

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director

Sergio Andrés Pérez León

Doctor en Matemática

Codirector

Michael Alexander Rincón Villamizar

Doctor en Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2024

DEDICATORIAS

Dedico este logro a las personas mas importantes en mi vida, mis padres y mi hermano.

Herson Stiven Suárez Chávez

Este trabajo está dedicado, principalmente, a todas las personas que me apoyaron durante este proceso de aprendizaje, como mis padres, Carlos y Ledy, mis hermanos, tíos, abuelos y amigos. Ellos me brindaron su apoyo incondicional y me alentaron en los momentos más oscuros.

Santiago José Delgado Benítez

Dedico este trabajo a mis padres, mis hermanos, mi sobrina, mi novia, mis amigos, y a todas las personas que siempre confiaron en mí y me apoyaron, incluso frente a las adversidades que surgieron en el proceso.

Edgar Eduardo Mantilla Pedroza

Quiero dedicar este trabajo a mi tía Marlene.

Yeny Paola Moreno Pabón

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al creador por permitirme lograr un objetivo más, por los retos puestos en esta aventura, pues de cada uno de ellos he obtenido únicamente aprendizajes. A mis padres y hermano quienes son un motor en mi vida y quienes siempre estuvieron presentes brindándome su apoyo incondicional e impulsándome a seguir adelante.

A Residencias Universitarias, un segundo hogar quien me recibió de manera cálida y amable, especialmente a cada uno de sus integrantes con quienes tuve la fortuna de compartir buenos momentos entre chistes y risas, a esa bonita familia de residentes UIS que siempre llevare en el corazón.

A mis compañeros y amigos de estudio Juan Camilo Camacho, Juan José Forero, Liber Andrés, Santiago Delgado y Edgar Mantilla, por esos días de estudio constantes entre parciales y madrugadas.

A mis compañeros de trabajo Santiago y Edgar, quienes siempre estuvieron presentes y dispuestos con sacar este proyecto adelante, y especialmente a nuestro director Sergio Pérez quien sin su tiempo, dedicación y paciencia este trabajo no hubiera llegado a los objetivos obtenidos.

A todas aquellas personas, amigos, compañeros y profesores por su paciencia y acompañamiento en todo este proceso académico.

Herson Stiven Suárez Chávez

Quiero expresar mi más profunda gratitud a mi familia, quienes me han apoyado desde el inicio de esta travesía que no ha sido fácil. Todos ellos conocen las dificultades que he atravesado, y si no fuera por su constante apoyo, hoy no estaría celebrando este logro.

También quiero agradecer a todos mis amigos, especialmente a mis más cercanos: Diego Sebastián, Edgar Eduardo, Herson Stiven, Liber Andrés, Johan Sebastián, Ana María, William Oswaldo y Carlos Quintero. Con ellos compartí momentos maravillosos y siempre estuvieron a mi lado en los momentos difíciles.

Asimismo, me gustaría agradecer a todos aquellos profesores que dedicaron su tiempo y paciencia para enseñarme. Gracias a sus clases divertidas y estimulantes, despertaron mi interés y fomentaron mi amor por las matemáticas. Gran parte del conocimiento que he adquirido se lo debo a ellos.

Especialmente, quiero expresar mi agradecimiento a Edgar Mantilla y a Herson Suárez por ser mis compañeros en este proyecto y por su total compromiso. También agradezco enormemente al profesor Sergio Pérez, quien dedicó una considerable cantidad de su tiempo y paciencia para brindarme el conocimiento necesario y guiar este trabajo. Sin su orientación y apoyo, este proyecto no habría sido posible.

Por último, gracias a todas las personas con las que he tenido la oportunidad de hablar, quienes me ofrecieron conversaciones estimulantes y me enriquecieron como ser humano. A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

Santiago José Delgado Benítez

En primer lugar, quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a mi madre, Luz Adriana; a mi padre, Eduardo; a mi hermano Félix; a mi sobrina Ella; a mi tío Martín; y a mi hermano Juan Diego. Su apoyo incondicional a lo largo de todo este proceso ha sido mi mayor fuente de fortaleza y motivación durante mi carrera. Gracias por estar siempre a mi lado, brindándome el aliento necesario para superar cada desafío.

Al director de mi tesis, el profesor Sergio Pérez, expreso mi más profunda gratitud por su inagotable paciencia, su confianza en mis capacidades, y su constante dedicación. Su guía y apoyo incondicional no solo fueron fundamentales para superar los desafíos de este trabajo, sino que también hicieron posible que lo culminara con éxito, lo cual me permitió crecer tanto académica como personalmente.

A mis compañeros Santiago Delgado y Herson Suárez, por su dedicación incansable, su invaluable compromiso, y por la generosidad con la que compartieron su tiempo y conocimientos. Gracias, especialmente, por su disposición para guiarme y acompañarme en cada etapa de este largo y desafiante camino, haciendo que el recorrido fuera más llevadero y enriquecedor.

A mi novia, Laura Serrano, por su incondicional apoyo, su constante motivación, y la inspiración que me brinda cada día. Su amor y confianza en mí han sido una fuente inagotable de fortaleza que me ha impulsado a superar desafíos. No puedo expresar con palabras lo agradecido que estoy por tenerla a mi lado en este camino.

Finalmente, agradezco a Diego, Esneyder, Santiago, Herson, Luis, Andrés, Juliana y Jackson por su valiosa amistad y por todas las experiencias compartidas a lo largo de este camino. Su compañía y apoyo han sido fundamentales, y cada momento vivido juntos ha dejado una huella en mi vida.

Edgar Eduardo Mantilla Pedroza

CONTENIDO

pág.

Introducción **11**

1. Preliminares **12**

1.1. Teoremas de Hahn-Banach 12

1.2. Bases reductoras y acotadamente completas 13

1.3. Bases incondicionales 24

2. Reflexividad **25**

2.1. Caracterización de reflexividad 34

3. Espacio de James **45**

3.1. Definición del espacio de James 45

3.2. Propiedades del espacio de James 51

Bibliografia **64**

4. Apéndices **66**

4.1. Apéndice A. Protocolo de las sesiónes 1, 2 y 3 66

4.2. Apéndice B. Protocolo de la sesión 4 70

4.3. Apéndice C. Protocolo de las sesiónes 5, 6 y 7 75

4.4. Apéndice D. Protocolo de las sesiónes 8 y 9 80

4.5. Apéndice E. Protocolo de las sesiónes 10 y 11 87

LISTA DE FIGURAS

pág.

$\mathbb{R}$	Cuerpo de escalares o $\mathbb{C}$.
X^*	Dual topológico de X.
X^{**}	Doble dual topológico de X.
$\\|\cdot\\|$	La norma de un espacio vectorial.
$\\|f\\|$	Norma de un operador lineal o un funcional.
j	La inyección canónica.
c_0	El espacio de Banach de todas las sucesiones de valores reales convergentes a 0, dotado con la norma del supremo.
$Span(A)$	El espacio generado por A.
l^p	Espacio vectorial de las sucesiones reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert^p < \infty$.
$\oplus$	Suma directa.
$\sigma(X, X^*)$, w	Topología débil sobre un espacio normado X.
$\sigma(X^*, X)$, w^*	Topología débil estrella sobre el espacio X^*.
$[X]$	La clausura del espacio generado por X. Aunque en ocaciones también se usa $z^{n+1} \oplus z^{n+2} \oplus \cdots$, donde z^k están en el espacio de Banach.
$B(X, Y)$	Espacio de todos los operadores lineales que van de X a Y.

RESUMEN

TÍTULO: PROPIEDADES DEL ESPACIO DE JAMES [*]

AUTORES: HERSON STIVEN SUÁREZ CHÁVEZ; SANTIAGO JOSÉ DELGADO BENÍTEZ; EDGAR EDUARDO MANTILLA PEDROZA; YENY PAOLA MORENO PABÓN [**]

PALABRAS CLAVE: ESPACIO DE JAMES, BANACH, REFLEXIVIDAD, ISOMETRIA, ISOMORFISMO, NORMA.

DESCRIPCIÓN:

Un espacio es reflexivo si es isomorfo a su doble dual bajo la inyección canónica, dicha idea se examinó a través de diferentes conceptos preliminares, colocando énfasis en la construcción del matemático Robert C. James, quien por medio del *Espacio de James*[1] $\mathcal{J}$ demostró con este contraejemplo la solución a la pregunta planteada años atras: *¿un espacio de Banach X es necesariamente reflexivo si, y solo si, es isométricamente isomorfo a su doble dual?* En este contexto, el trabajo se centró en la exploración de las propiedades principales de $\mathcal{J}$ como la monotonicidad, el estudio de su base reductora y el resultado primordial que motivo este trabajo donde se muestra que el espacio $\mathcal{J}$ es isométrico a $\mathcal{J}^{**}$ y es cuasirreflexivo de orden 1, donde dicho espacio $\mathcal{J}$ no posee ninguna base incondicional.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Sergio Andrés Pérez León, Doctor en Matemáticas.

[1] James, R. C. (1951). A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proceedings of the National Academy of Sciences, 37 (3), 174-177

ABSTRACT

TITLE: PROPERTIES OF JAMES SPACE *

AUTHORS: HERSON STIVEN SUÁREZ CHÁVEZ; SANTIAGO JOSÉ DELGADO BENÍTEZ; EDGAR EDUARDO MANTILLA PEDROZA; YENY PAOLA MORENO PABÓN **

KEYWORDS: JAMES, BANACH SPACE, REFLEXIVITY, ISOMETRY, ISOMORPHISM, NORM.

DESCRIPTION:

A space is reflexive if it is isomorphic to its dual double under the canonical injection, this idea was examined through different preliminary concepts, placing emphasis on the construction of the mathematician Robert C. James, who by means of the *James space* $\mathcal{J}$ proved with this counterexample the solution to the question posed years ago: *is a Banach space X necessarily reflexive if, and only if, it is isometrically isomorphic to its dual double?*. In this context, the work focused on the exploration of the main properties of $\mathcal{J}$ such as monotonicity, the study of its reductive basis and the primary result that motivated this paper where it is shown that the space $\mathcal{J}$ is isometric to $\mathcal{J}^{**}$ and is quasi-reflexive of order 1, where such a space $\mathcal{J}$ does not possess any unconditional basis.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Sergio Andrés Pérez León, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Es ampliamente conocido que todo espacio de Banach reflexivo es isométricamente isomorfo a su doble dual. Sin embargo, a principios del siglo XX, surgió la siguiente conjetura: Si X es un espacio de Banach separable e isométricamente isomorfo a su doble dual, entonces X es reflexivo.

Esta conjetura fue resuelta en el año 1951 por el matemático estadounidense Robert James, en su artículo titulado “A Non-Reflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjugate Space”, James mostró un ejemplo de un espacio de Banach separable isométricamente isomorfo a su doble dual, pero no reflexivo. Tal espacio recibió el nombre de espacio de James. Además de esta propiedad el espacio de James es un espacio con base de Schauder, pero sin base incondicional.

Inicialmente, vamos a establecer algunas nociones preliminares, tomando como referencia el libro “Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach”de H. Fetter Nathansky y B. Gamboa de Buen. Este libro explora algunos de los resultados obtenidos por R. James en sus dos artículos “Bases and Reflexivity of Banach Spaces” y “A Non-Reflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjugate Space”, utilizando una forma y notación más actualizada.

1. Preliminares

Es necesario establecer ciertos teoremas y definiciones que, aunque hayan sido discutidos en el seminario de investigación, son fundamentales para comprender plenamente los resultados obtenidos por R. James en sus artículos. Estos conceptos proporcionan una base sólida para el análisis y la interpretación de sus contribuciones. Además, nos permiten contextualizar adecuadamente los hallazgos de James dentro del marco más amplio del análisis funcional y la teoría de espacios de Banach.

1.1. Teoremas de Hahn-Banach

Teorema 1.1.1. *(Kreyszig, 1991, Teorema 4.3-2, p. 221) Sea f un funcional lineal acotado sobre un subespacio Z de un espacio normado X. Entonces existe un funcional lineal acotado $\tilde{f}$ sobre X el cual es una extensión de f a X y tienen la misma norma,*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$

donde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|.$$

Teorema 1.1.2. *(Kreyszig, 1991, Teorema 4.3-3, p. 223) Sea X un espacio normado y sea $x_0 \neq 0$ cualquier elemento de X. Entonces existe un funcional lineal acotado $\tilde{f}$ sobre X tal que*

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \|\tilde{f}(x_0)\| = \|x_0\|.$$

Definición 1.1.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 4.51) Denotamos por $j : X \to X^{**}$ la inyección canónica del espacio de Banach X en su doble dual X^{**}, dada por*

$$\langle j(x), x^* \rangle = x^*(x)$$

Para cada $x \in X$ y cada $x^* \in X^*$. El espacio de Banach X se dice reflexivo si $j(X) = X^{**}$.

Teorema 1.1.4. *(Kreyszig, 1991) Dado un espacio de Banach X, este es isométrico a su doble dual X^{**} via la inyección canónica.*

En las charlas del seminario se abordaron de manera detallada las definiciones y conceptos relacionados con las topologías débiles, así como las nociones de convergencia débil y fuerte. En las relatorías se encuentran documentadas las definiciones clave y los teoremas más importantes tratados en relación con estos temas.

1.2. Bases reductoras y acotadamente completas

Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. La existencia de esta base en el espacio proporciona información limitada. Sin embargo, si esta base posee ciertas propiedades adicionales, podemos extraer más información significativa, como saber si el espacio es reflexivo o si contiene algún subespacio isomorfo a c_0 o ℓ^p.

Es natural pensar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en el espacio de Banach X, esto implica que la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio dual X^* de los funcionales biortogonales asociados a la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es una base de Schauder. Sin embargo, esto no es siempre cierto, ya que para que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base de Schauder en X^*, implica que X^* debe ser separable lo cual no siempre sucede. Un contraejemplo es el espacio de Banach ℓ_1 con la base de Schauder canónica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $e_n = \Big(0, 0, ..., \underset{n}{1}, 0, 0, ...\Big)$. Note que su dual es ℓ^{∞}, el cual no es separable.

Lema 1.2.1. *(Nathansky & de Buen, 1994, Lema 6.23, p. 241) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder en un espacio de Banach X con constante de base K. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, es una sucesión básica con constante de base menor o igual a K y las proyecciones asociadas a esta sucesión son $P_n^*|_{[x_i^*]_{i=1}^{\infty}}, n = 1, 2, ...$, donde P_n^* es el operador adjunto a la proyección P_n.*

Además, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es monótona, es decir si* $K = 1$*, se tiene que para* $x^* \in X^*$

$$\|x^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^*\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n^* x^*\|.$$

Demostración. En el lema 6.8 (Nathansky & de Buen, 1994) se probó que el funcional biortogonal x_n^* es acotado. Sean $P_n : X \to X$, con $n = 1, 2, ...$ las proyecciones asociadas a la base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por el teorema 4.81 (Nathansky & de Buen, 1994) se obtiene que los operadores adjuntos $P_n^* : X^* \to X^*$ son acotados tales que $\|P_n^*\| = \|P_n\|$. Entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n^*\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| = K. \tag{1.1}$$

Ahora, sean $x^* \in X^*$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$. Nuevamente, por el teorema 4.81 (Nathansky & de Buen, 1994) se tiene que:

$$\langle P_n^*(x^*), x\rangle = \langle x^*, P_n(x)\rangle = \left\langle x^*, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\rangle = x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right),$$

por la linealidad de x^* y por la definición del funcional biortogonal $a_i = x_i^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)$, de esta manera, se obtiene lo siguiente:

$$x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^*(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*, \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*, x \right\rangle$$

Por tanto, $\langle P_n^*(x^*), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*, x \right\rangle$, esto implica que

$$P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*, \tag{1.2}$$

lo cual significa que

$$P_n^*(X^*) \subset [x_i^*]_{i=1}^{\infty}. \tag{1.3}$$

En particular, si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i^* \in [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$, de la ecuación 1.2 es posible deducir que

$$P_n^* \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^*$$

De lo anterior, de las ecuaciones 1.3 y 1.1 es posible concluir que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| P_n^*|_{[x_i^*]_{i=1}^{\infty}} \right\| \leq K. \tag{1.4}$$

Note que del corolario 6.13 (Nathansky & de Buen, 1994) se sigue que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica cuya constante de base es menor o igual a K, solo basta probar que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto linealmente independiente.

Sea $\{x_i^*\}_{i\in I}$ con I finito. Supongamos que $\sum_{i\in I} a_i x_i^* = 0$ y sea $j \in I$ fijo, entonces $\left(\sum_{i\in I} a_i x_i^*\right)(x_j) = 0$. Así, $a_j = 0$ y como j fue tomado arbitrariamente, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es linealmente independiente, entonces la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es básica.

Ahora, supongamos que la sucesión es monótona, es decir, $K = 1$ y sean $\varepsilon > 0$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que $|x^*(x)| > (1-\varepsilon)\|x^*\|$. Por la continuidad de x^* se tiene que $x^*(x) = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n)$ y existe N tal que para $n > N$,

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty} a_i x^*(x_i)\right| < \varepsilon\|x^*\|. \tag{1.5}$$

Así,

$$(1-\varepsilon)\|x^*\| < |x^*(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^*(x_i)\right|, \tag{1.6}$$

por la desigualdad triangular se sigue que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n)\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x^*(x_i)\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x^*(x_i)\right| = |(P_n^* x^*)(x)| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x^*(x_i)\right|$$

$$\leq \|P_n^* x^*\| + \varepsilon \|x*\|. \tag{1.7}$$

De la ecuación 1.7 y como $K = 1$, se tiene que para $n > N$

$$(1 - 2\varepsilon)\|x^*\| < \|P_n^* x^*\| \leq \|x^*\|.$$

Por tanto, al evaluar el límite, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^*\| = \|x^*\|$. Por hipótesis, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, es decir, $\|P_n^* x^*\| \leq \|P_{n+1}^* x^*\|$. Esto implica que $\|x^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^*\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n^* x^*\|$. □

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos el espacio c_0 con la base sumante $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, definido como,*

$$\xi_n = e_1 + e_2 + ... + e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

cuyo dual de c_0 es el espacio ℓ_1 que es separable. Donde se tiene que $\xi_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$, donde $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a la base canónica de c_0. Como ya es conocido $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de ℓ_1. Por lo tanto ξ_n^* es el elemento

$$\Big(0, 0, ..., \underset{n}{1}, -1, 0, 0, ...\Big)$$

y su norma es 2. Veremos que $e_1^* \notin [\xi_n^*]_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que

$$e_1^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^*$$

Entonces $1 = e_1^*(e_1) = a_1$ y si $n > 1$

$$0 = e_1^*(e_n) = a_n - a_{n-1}$$

de donde $a_n = 1$ para $n = 1, 2, ...$; pero por el lema 6.2 (Nathansky & de Buen, 1994, *p. 219), la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ deberia converger a 0. Hemos demostrado así que $\{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ no es base de ℓ_1, es decir, la sucesión de funcionales biortogonales $\{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ asociados a la base sumante $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ no conforma una base para el dual de c_0, el cual es ℓ_1.*

El teorema siguiente nos da una condición necesaria y suficiente para que la sucesión básica $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base para X^*.

Teorema 1.2.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.24, p. 244) Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de X^* si y solo si para cada $x^* \in X^*$*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0. \tag{1.8}$$

*Si una base de Schauder satisface el límite anterior, se le llama **base reductora**.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder del dual X^*, entonces por definición, para todo funcional $x^* \in X^*$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* - P_n^* x^*\| = 0. \tag{1.9}$$

Sea $y \in [x_i]_{i=n}^{\infty}$. Entonces, como $P_{n-1}y = 0$, pues P_{n-1} proyecta hasta el término $n-1$,

$$|\langle x^*, y\rangle| = |\langle x^*, y\rangle - \langle x^*, P_{n-1}y\rangle| = |\langle x^*, y\rangle - \langle P_{n-1}^* x^*, y\rangle|$$

$$= |\langle x^* - P_{n-1}^* x^*, y\rangle| \leq \|x^* - P_{n-1}^* x^*\| \|y\|.$$

Lo cual implica que

$$0 \leq \left\| x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| \leq \left\| x^* - P_{n-1}^* x^* \right\|$$

y de la ecuación 1.9 se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0.$$

Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que satisface la ecuación 1.8 y sea $x^* \in$

X^*, entonces para todo $x \in X$ con $\|x\| = 1$,

$$|\langle x^* - P_n^* x^*, x\rangle| = |\langle x^*, x\rangle - \langle P_n^* x^*, x\rangle| = |\langle x^*, x\rangle - \langle x^*, P_n x\rangle|$$

$$= |\langle x^*, x - P_n x\rangle| = |\langle x^*, (I - P_n)x\rangle| = \left|\left\langle x^*|_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}}, (I - P_n)x\right\rangle\right|$$

$$\leq \left\|x^*|_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}}\right\| \|I - Pn\| \leq \left\|x^*|_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}}\right\| (1 + K)$$

Donde K representa la constante de base de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. De lo anterior se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^* - P_n^* x^*\| = 0.$

$\square$

Ejemplo 1.2.4. *En los ejemplos anteriores se ha mostrado que las bases canónicas en c_0 y en ℓ_p, $1 < p < \infty$, son reductoras. es decir, la sucesión de funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ asociados a la base canónica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ conforman una base para ℓ_1 y ℓ_q respectivamente, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$*

Teorema 1.2.5. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.25, p. 245) Si X es un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:*

Siempre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ es tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\} < \infty$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ también converge, entonces X es isomorfo al dual del espacio $[x_n^*]_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$

*A una base de Schauder que cumple la propiedad anterior se le llama **base acotadamente completa**.*

Demostración. Sean $Y = [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ y $J : X \to Y^*$ dada por

$$\langle J(x), y\rangle = y(x); \forall y \in Y, x \in X. \tag{1.10}$$

Esto es, $J(x) = j(x)|_Y$, donde j es la inyección canónica de X en X^{**}. Note que $\|J\| \leq \|j\| = 1$, pues la aplicación J es la inyección canónica j restringida.

Ahora, sean $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 1.1.2, existe un funcional $z^* \in X^*$ con $\|z\| = 1$ tal que $z^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$. Por la ecuación 1.2 sabemos que $P_n^* z^* \in Y$, es decir, $P_n^* z^* = \sum_{i=1}^{n} z^*(x_i) x_i^*$ y

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = z^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \left\langle z^*, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\rangle = \left\langle z^*, P_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle P_n^* z^*, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} z^*(x_i) x_i^*, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} z^*(x_i) x_i^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z^*(x_i) a_i = \left\langle J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, P_n^* z^* \right\rangle = \left\langle P_n J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, z^* \right\rangle = z^* \left(P_n J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)$$

$$= \left\| P_n J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \|P_n\| \left\| J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

donde K es la constante de base de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$;

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \lim_{n \to \infty} K \left\| J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|,$$

y por la continuidad de la norma se obtiene lo siguiente:

$$\left\| \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \lim_{n \to \infty} J \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = K \left\| J \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

De lo anterior se tiene que $\|x\| \leq K\|Jx\|$ y como $\|J\| \leq 1$ entonces $\|Jx\| \leq \|x\|$, lo que implica que

$$\frac{\|x\|}{K} \leq \|Jx\| \leq \|x\|. \tag{1.11}$$

Probemos que J es inyectiva. Recordemos que J es inyectiva si y sólo si $Ker(J) = \{0\}$. Supongamos por contradicción que existe $y \in X$ tal que $Jy = 0$ con $y \neq 0$. Por la ecuación 1.11 tenemos que

$$0 < \frac{\|y\|}{K} \leq \|Jy\| = 0$$

lo cual es una contradicción, por tanto $Ker(J) = \{0\}$ y J es inyectiva.
Ahora, probemos que J es sobreyectiva. Note que por la definición de funcionales biortogonales

$$\langle J(x_i), x_n^* \rangle = x_n^*(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = i \\ \\ 0, \text{ si } n \neq i \end{cases}$$

es decir, $\{J(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociados a $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en Y^*.

Sea $y^* \in Y^*$. Denotemos como $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de proyecciones asociadas a $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en Y, entonces $Q_n^* : Y^* \to Y^*$ es la proyección adjunta de Q_n. Por resultados del lema 1.2.1 (ver las ecuaciones 1.1 y 1.4) y como la constante de base de la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es menor o igual a K, entonces $\|Q_n\| = \|Q_n^*\| \leq K$.
Por tanto, para toda $y \in Y$ con $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \langle J(x_i), y \rangle x_i^*$,

$$\langle Q_n^* y^*, y \rangle = \langle y^*, Q_n y \rangle = \left\langle y^*, \sum_{i=1}^{n} \langle J(x_i), y \rangle x_i^* \right\rangle = y^* \left(\sum_{i=1}^{n} \langle J(x_i), y \rangle x_i^* \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle J(x_i), y \rangle y^*(x_i^*) = \sum_{i=1}^{n} y^*(x_i) \langle J(x_i), y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle y^*(x_i^*) J(x_i), y \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} y^*(x_i^*) J(x_i), y \right\rangle.$$

Es decir

$$Q_n^* y^* = \sum_{i=1}^{n} y^*(x_i^*) J(x_i)$$

y $\|Q_n^* y^*\| \leq \|Qn^*\| \|y^*\| \leq K \|y^*\|$. De lo anterior y por la ecuación 1.11

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} y^*(x_i^*) x_i \right\| \leq K \left\| J \left(\sum_{i=1}^{n} y^*(x_i^*) x_i \right) \right\| = K \left\| \sum_{i=1}^{n} y^*(x_i^*) J(x_i) \right\|$$

$$= K \|Q_n^* y^*\| \leq K(K\|y^*\|) = K^2 \|y^*\|$$

Como la base es acotadamente completa entonces la serie es convergente en el espacio

X, esto es, $x = \sum_{i=1}^{\infty} y^*(x_i^*)x_i \in X$ y note que

$$Jx = J\left(\sum_{i=1}^{\infty} y^*(x_i^*)x_i\right) = y^*$$

Finalmente J es sobreyectiva y por tanto X es isomorfo a Y^*. □

Teorema 1.2.6. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.26, p. 247) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base reductora en un espacio de Banach X. Entonces el espacio X^{**} es isomorfo al espacio $\mathcal{X}$ de sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_X\right\} < \infty,$$

donde

$$\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{X}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_X\right\}.$$

La identificación está dada por

$$x^{**} \leftrightarrow \{x^{**}(x_1^*), x^{**}(x_2^*), \ldots\} = \mathrm{x}.$$

Si además $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces $\|x^{**}\|_{X^{**}} = \|\mathrm{x}\|_{\mathcal{X}}$.

Teorema 1.2.7. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.27, p. 249) Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y sólo si la base es a la vez reductora y acotadamente completa.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Supongamos por contradicción que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es una base reductora, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}\|$ no tiende a cero. Es claro que $\{\|x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}\|\}_n$ es decreciente, esto implica que existen $\varepsilon > 0$ y para $n = 1, 2, \ldots$ $y_n \in [x_i]_{i=n}^{\infty}$ tales que

a) $\|y_n\| = 1$,

b) $x^*(y_n) > \varepsilon$ para $n = 1, 2, \ldots$

Por el corolario 4.69 (Nathansky & de Buen, 1994) es posible suponer sin pérdida de generalidad que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente; sea $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y)x_n$ su límite.

Entonces $\lim_{n\to\infty} x_m^*(y_n) = x_m^*(y)$ para todo m. Note que por definición de funcional biortogonal, $x_m^*(y_n) = 0$ para todo $n > m$, esto implica que $x_m^*(y) = 0$ para todo m, de ahí $y = 0$ pero esto contradice el inciso b), por tanto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora.

Ahora, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \right\} < \infty$$

entonces por resultado del teorema 6.26 (Nathansky & de Buen, 1994) existe $x^{**} \in X^{**}$ con $x^{**}(x_i^*) = a_i$ para todo i. Sea j la inyección canónica de X en X^{**}. Por hipótesis se tiene que X es reflexivo, entonces $\{j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^{**}, donde x^{**} se expresa como $x^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n j(x_n)$ donde $a_n = b_n$ para todo n. De lo anterior se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n j(x_n)$ converge en X y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora y acotadamente completa de X. Sea $x^{**} \in X^{**}$; entonces por el teorema 1.2.6 se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*) x_i \right\| < \infty$$

y como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*)x_n$ es convergente. Por tanto

$$y^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*) j(x_n) \in X^{**}$$

y como $y^{**}(x_n^*) = x^{**}(x_n^*)$ para todo n, y por teorema1.2.3 tenemos que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base de X^*, esto implica que $y^{**} = x^{**}$, es decir

$$x^{**} = j\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*)x_n\right).$$

Por tanto X es reflexivo. $\square$

Ejemplo 1.2.8. ***(a)*** *La base canónica de ℓ_p para $1 < p < \infty$ es a la vez reductora y acotadamente completa y note que por el teorema anterior, ℓ_p es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

(b) *En ℓ_1 la base canónica es acotadamente completa, pero, ℓ_1 no puede tener una base de reductora porque su dual es ℓ_∞ y este espacio no es separable.*

(c) *La base canónica en c_0 no es acotadamente completa, ya que se tiene,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|(\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...)\| = 1$$

pero esta serie $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ no converge en c_0 pues la sucesión $(1,1,1,...)$ no pertenece al espacio c_0.

(d) *La base sumante de c_0 dada por $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ no es reductora puesto que el funcional lineal e_1^* satisface que $e_1^*(\xi_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto no satisface la condición del teorema 1.2.3. Note además que, (ξ_n) tampoco es acotadamente completa, pues*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\xi_n\right\|\right\} = 1$$

pero la serie $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\xi_n$ no es convergente.

1.3. Bases incondicionales

Las bases incondicionales son otro tipo de bases las cuales permiten estudiar más a fondo las propiedades de los espacios de Banach. Este concepto está muy relacionado con la convergencia de series incondicionales.

Definición 1.3.1. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 6.28, p. 250) Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio de Banach. Diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente, si para cualquier permutación* π *de* $\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *converge.*

Definición 1.3.2. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 6.31, p. 253) Una base de Schauder* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *se llama base incondicional, si para todo* $x \in X$ *con* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, *tenemos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *converge incondicionalmente.*

Ejemplo 1.3.3. *La base vectorial unitaria estándar* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base incondicional de* c_0 *y* ℓ_p *para* $1 \leq p < \infty$. *Un ejemplo de una base que es condicional (es decir, no incondicional) es la base sumante de* c_0, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, *definida como,*

$$\xi_n = e_1 + e_2 + ... + e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1.3.4. *En el espacio de Banach de las sucesiones convergentes* C, *tenemos la base de Schauder formada por las sucesiones* $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \; veces}, 1, 1, \ldots)$. *Es bien conocido que* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no es una base incondicional.*

2. Reflexividad

En este capítulo se analizarán los resultados presentados en los artículos de James James, 1951 y James, 1950, los cuales resultaron fundamentales en el estudio de la reflexividad de ciertos espacios de Banach. Estos resultados también serán utilizados para la caracterización del espacio de James, el cual fue previamente introducido y analizado en este trabajo. Este espacio de James representa el primer ejemplo conocido de un espacio que no es reflexivo, pero que sí es isométricamente isomorfo a su doble dual.

En la sección anterior, se emplean técnicas similares, aunque de manera más rigurosa y actualizada. Es importante destacar que estos artículos presentan una notación algo anticuada. Sin embargo, resulta valioso revisar los teoremas originales que fueron el punto de partida para el estudio de este y otros espacios.

Es necesario presentar algunas definiciones y conceptos que fueron introducidos en los artículos y que desempeñan un papel fundamental en el presente estudio. Si bien en el capítulo anterior se estableció la noción de sucesión básica en un espacio de Banach B, es importante señalar que en los artículos mencionados se introduce una definición adicional.

Definición 2.0.1. *Dada una suceción básica $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach B, se dice que la suceción es fundamental cuando existe un número $\delta > 0$ tal que para cualesquiera enteros positivos n, p y cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ se tiene*

$$\delta \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_B \leq \left\| \sum_{i=1}^{n+p} a_i x_i \right\|_B . \tag{2.1}$$

Además, si $\delta = 1$, entonces la base será llamada una base ortogonal.

Teorema 2.0.2. *(James, 1951, Teorema, p. 174)*

- *Sea B un espacio de Banach con una base ortogonal $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ para la cual $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$ para cada $f \in B^*$, donde $\|f\|_n$ es la norma de f sobre $z^{n+1} \oplus z^{n+2} \oplus \cdots$. Entonces $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base para B^* donde*

$$\delta_m^n = z_n^*(z^m) = \begin{cases} 1, & \textit{si } n = m \\ 0, & \textit{si } n \neq m. \end{cases}$$

- *Si $F \in B^{**}$, entonces $\|F\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i z^i \right\|$, donde $F_i = F(z_i^*)$.*

- *Si la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i z^i \right\| < +\infty$, entonces $F \in B^{**}$, donde $F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i$ para cada $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i z_i^* \in B^*$.*

Demostración. **(i)** Ya se vio previamente que $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base para B^* puesto que $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora, al cumplir la condición

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$$

para cada $f \in B^*$.

(ii) De lo que se deduce que $F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i$ para cada F de B^{**} y cada $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i z_i^*$ de B^*, donde $F_i = F(z_i^*)$. Esto es claro ya que al ser $\{z_i^*\}_{n=1}^{\infty}$ base para el dual B^*, cada funcional en B^* se puede escribir de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i z_i^*,$$

donde $f_i = f(z^i)$.

De manera que

$$F(f) = F\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i z_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i F(z_i^*)$$

Asi, para

$$F_i = F(z_i^*)$$

se tiene el resultado que buscamos.

Además, cada funcional se puede escribir como combinaciones lineales de elementos de su base, por lo tanto $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i z_i^*$, asimismo, observe que se cumple

$$\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} F_i f(z^i)\right|$$

debido a la linealidad del funcional f. Note ahora que

$$f(z^i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_i z_i^*(z^j) = f_i$$

de modo que se tiene:

$$\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} F_i f(z^i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} F_i f_i\right|$$

o escrito de otra forma

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F_i f_i\right| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right)\right|.$$

Puesto que el funcional f es acotado se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F_i f_i\right| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right)\right| \leq \|f\| \left\|\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\|.$$

Por otra parte tenemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{n} F_i f_i\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i f_i\right| \leq \lim_{n\to\infty} \|f\| \left\|\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\|$$

Es decir,

$$|F(f)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i\right| \leq \|f\| \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\|$$

De la anterior desigualdad se llega a que

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i\right\|$$

Pero la norma $\|F\|$ esta definida en términos del supremo como:

$$\|F\| = \sup_{\substack{f\in B^* \\ f\neq 0}} \left\{\frac{|F(f)|}{\|f\|}\right\}$$

Por lo tanto, aplicando el supremo a la desigualdad inmediatamente anterior sobre todos los $f \in B^*$ y los $f \neq 0$, se tiene,

$$\|F\| = \sup_{\substack{f\in B^* \\ f\neq 0}} \left\{\frac{|F(f)|}{\|f\|}\right\} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i\right\|$$

es decir,

$$\|F\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i\right\|.$$

Demostrando así la primera desigualdad buscada. Ahora, para un n fijo, sea

$$u^n = \sum_{i=1}^{n} F_i z^i.$$

Sea $Z := span\{u^n, z^{n+1}, z^{n+2}, \ldots\} \subset B$. Note que cada elemento $x \in Z$ está dado de la siguiente forma

$$x = \alpha u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i z^i,$$

donde α es único.

Definimos un funcional $h : Z \to \mathbb{K}$ dado por

$$h(x) = h\left(\alpha u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i z^i\right) = \alpha \|u^n\|.$$

De manera implícita tenemos que $h(u^n) = \|u^n\|$ y $h(z^i) = 0$ si $i > n$. Veamos que h es un funcional lineal y acotado en Z.

Sean $x, y \in Z$ y $\lambda, \gamma, \alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
h(\lambda x + \gamma y) &= h\left(\lambda\left(\alpha u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i z^i\right) + \gamma\left(\beta u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i z^i\right)\right) \\
&= h\left(\lambda \alpha u^n + \gamma \beta u^n + \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i z^i + \gamma \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i z^i\right) \\
&= h\left((\lambda\alpha + \gamma\beta) u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} (\lambda\alpha_i + \gamma\beta_i) z^i\right) \\
&= (\lambda\alpha + \gamma\beta)\|u^n\| \\
&= \lambda\alpha\|u^n\| + \gamma\beta\|u^n\| \\
&= \lambda(\alpha\|u^n\|) + \gamma(\beta\|u^n\|) \\
&= \lambda h(x) + \gamma h(y)
\end{aligned}$$

por lo tanto se concluye la linealidad de h.

Por otra parte, sea $x \in Z$, así

$$x = a u^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^i$$

Al evaluar el operador h definido anteriormente y usando que $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortogonal, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
|h(x)| &= \left| h\left(au^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^i \right) \right| \\
&= \|au^n\| \\
&\leq \left\| au^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^i \right\| \\
&= \|x\|.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para cada $x \in Z$ se tiene que $|h(x)| \leq \|x\|$, esto directamente implica que

$$
\|h\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{|h(x)|}{\|x\|} \right\} \leq 1.
$$

Concluyendo así que h es acotado y lineal. Además para $\dfrac{u^n}{\|u^n}\| \in Z$,

$$
\left| h\left(\frac{u^n}{\|u^n\|} \right) \right| = \left| \frac{h(u^n)}{\|u^n\|} \right| = \frac{|h(u^n)|}{\|u^n\|} = \frac{\|u^n\|}{\|u^n\|} = 1.
$$

Por tanto $\|h\| = 1$. Extendiendo ahora este funcional h sobre todo B y haciendo uso del teorema 1.1.1, (teorema de Hahn-Banach para espacios normados), se cumple que,

$$
1 = \|h\|_Z = \|\widetilde{h}\|_B.
$$

Como $\widetilde{h} \in B^*$ entonces

$$
\widetilde{h} = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{h}_i z_i^*,
$$

donde

$$
\widetilde{h}_i = \widetilde{h}(z^i) = h(z^i) = 0
$$

para $i > n$. Por lo tanto tenemos que

$$
\left| \sum_{i=1}^{\infty} F_i \widetilde{h}_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} F_i \widetilde{h}_i \right|
$$

Note que

$$\widetilde{h}|_{Z=u^n\oplus z^{n+1}\oplus\ldots} = h$$

de lo que se cumple

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} F_i\widetilde{h}_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} F_i\widetilde{h}_i\right| = |\widetilde{h}(u^n)| = |h(u^n)|$$

Recordando que

$$\begin{aligned}
h &= \sum_{i=1}^{n} h(z^i)z_i^* \\
F(h) &= F\left(\sum_{i=1}^{n} h(z^i)z_i^*\right) \\
F(h) &= \sum_{i=1}^{n} h(z^i)F(z_i^*) \\
F(h) &= \sum_{i=1}^{n} h(z^i)F_i
\end{aligned}$$

Así, reemplazando $u^n = \sum_{i=1}^{n} F_i z^i$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|h(u^n)| = \left|h\left(\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} F_i h(z^i)\right| \\
&= |F(h)| \\
&\leq \|F\|\|h\| \\
&= \|F\|
\end{aligned}$$

Note que apartir del procedimiento anterior se llega a que

$$|h(u^n)| \leq \|F\|$$

Así que por la definición de h se llega al resultado buscado, es decir, se cumple la siguente desigualdad

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right| = \|u^n\| = |h(u^n)| \leq \|F\|$$

para cada n, y por lo tanto, aplicando el limite,

$$\|F\| \geq \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i\right\|$$

De este modo, se ha demostrado que

$$\|F\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i\right\|$$

para cada elemento $F \in B^{**}$.

(iii) Ahora supongamos que $\{F_n\}$ es una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} F_i z^i\right\| = M < +\infty$$

Recuerde que $F_i = F_i(z_i^*)$ y por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F_i(z_i^*) z^i - M\right| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $m > n$ donde existe p de modo que $m = n + p$. Puesto que la sucesión dada por

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} F_i(z_i^*) z^i\right\|$$

es monotona creciente y su límite es M, entonces se cumple que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(z_i^*)z^i \right\| \leq M,$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i \right\| \leq M$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$, De lo anterior se tiene que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i - \sum_{i=1}^{n} F_i(z_i^*)z^i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i(z_i^*)z^i \right\| \leq 2M$$

Entonces

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i \right\| \leq 2M$$

Así que para cualquier $f \in B^*$ fijo

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i f_i \right\| &= \left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i(z_i^*) f(z^i) \right\| \\
&= \left\| f\left(\sum_{i=n}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i \right) \right\| \\
&\leq \|f\| \left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i(z_i^*)z^i \right\| \\
&\leq \|f\|_n (2M)
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i f_i \right\| \leq \|f\|_n (2M)$$

Puesto que por hipótesis se tiene que $\lim_{n \to \infty} \|f\|_n = 0$, lo que implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f\|_n < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall n > N$$

Lo que conlleva que

$$(2M)\|f\|_n < \varepsilon, \quad \forall n > N$$

y por lo tanto,

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} F_i f_i \right\| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Concluyendo así que $\sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i$ es convergente. Entonces,

$$F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i f_i$$

esta definida para cada $f \in B^*$ y

$$\|F\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} F_i z^i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i \right\|.$$

$\square$

2.1. Caracterización de reflexividad

Los siguientes teoremas fueron presentados por Robert James en su artículo “Bases and Reflexivity of Banach Spaces” James, 1950 y resultan de gran utilidad para caracterizar la reflexividad en espacios de Banach. Más adelante, estos teoremas serán de apoyo esencial al analizar las propiedades del espacio $\mathcal{J}$ de James.

Lema 2.1.1. *(James, 1950, Lema 1, p. 520) Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si X no contiene un subespacio cerrado isomorfo a c_0, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa*

Demostración. Considere el espacio X con la siguiente norma

$$\begin{aligned} &|||\cdot|||\colon X \to \mathbb{R} \\ &\qquad x \mapsto |||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{p_i} x_{p_i} \right\| \; : \; p_1, p_2, \cdots, p_n, n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. De la definición obtenemos que $|||x||| \geq \|x\|$ para todo $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ el número de la definición 2.0.1. Se sigue que

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{p_i}x_{p_i}\right\| \leq \|x\|, \quad \text{si } x=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \tag{2.2}$$

para cualesquiera $p_1, \cdots, p_n, n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\varepsilon |||x||| \leq \|x\|$. De lo anterior concluimos que

$$\varepsilon |||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||,$$

para todo $x \in X$, es decir, la nueva norma es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|$.

Supongamos que existe una serie no convergente $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|\right\} < \infty.$$

Sea $c > 0$ tal que

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right|\right|\right| < c, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Como $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ no es convergente, existe $d > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\left|\left|\left|\sum_{i=n}^{n+p} \alpha_i x_i\right|\right|\right| > d.$$

Construyamos una sucesión creciente de números naturales $\{n_r\}$ de modo que $n_1 = 1$ y

$$c > \left|\left|\left|\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} \alpha_i x_i\right|\right|\right| > d$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Si $n_1 = 1$, entonces existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\left| \sum_{i=n_1}^{n_1+p_1} \alpha_i x_i \right|\right|\right| > d.$$

Defina $n_2 = n_1 + p_1 + 1$. Supongamos que hemos definido $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ de modo que $n_1 < \ldots < n_{k-1} < n_k$ y

$$\left|\left|\left| \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \alpha_i x_i \right|\right|\right| > d, \quad \text{si } j = 2, \ldots, k-1.$$

Por lo que hemos supuesto, existe $p_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\left| \sum_{i=n_k}^{n_k+p_k} \alpha_i x_i \right|\right|\right| > d.$$

Defina entonces $n_{k+1} = n_k + p_k + 1$. Así, $n_{k+1} > n_k$ y

$$\left|\left|\left| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_i x_i \right|\right|\right| > d.$$

Esto completa el argumento inductivo.

Sean

$$z_r = \sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} \alpha_i x_i$$

para cada $r \in \mathbb{N}$, y $T = [z_r]_{r \in \mathbb{N}}$. Probaremos que T es un subespacio isomorfo a c_0. Para tal fin, demostraremos que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$, entonces

$$2c \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \geq |||x|||.$$

Si lo anterior fuese falso, existirían una sucesión (b_n) y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$2c \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| < \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} b_i z_i \right|\right|\right|.$$

Si $\beta_i = \dfrac{b_i}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_n|}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \right|\!\right|\!\right| > 2c, \tag{2.4}$$

donde $|\beta_i| \leq 1$ para cada i. Mostraremos que 2.4 es falsa. Observe que

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|\!\right|\!\right| = \left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \alpha_j x_j \right) \right|\!\right|\!\right| = \left|\!\left|\!\left| \sum_{i=n_1}^{n_{n+1}-1} \alpha_i x_i \right|\!\right|\!\right| < c. \tag{2.5}$$

Ahora, fijando $n, k \geq 2$ y escribiendo $u = \sum_{i=1}^{k-1} a_i z_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i z_i$, por la definición de $|||\cdot|||$ tenemos que $|||u + \theta z_k||| \geq |||u|||$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Como $\theta \in \mathbb{R} \mapsto |||u + \theta z_k|||$ es una función convexa con mínimo en $\theta = 0$, vemos que $\theta \in \mathbb{R} \mapsto |||u + \theta z_k|||$ es creciente. Así,

$$|||u + z_k||| \geq |||u + \theta z_k|||, \quad \text{si } 0 \leq \theta \leq 1.$$

De la arbitrariedad de $k \geq 2$ se sigue que

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|\!\right|\!\right| \geq \left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} \theta_i z_i \right|\!\right|\!\right|, \tag{2.6}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \theta_i \leq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Finalmente si $J = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \beta_i \geq 0\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \right|\!\right|\!\right| &= \left|\!\left|\!\left| \sum_{i\in J} \beta_i z_i + \sum_{i\in J^c} \beta_i z_i \right|\!\right|\!\right| \\
&\leq \left|\!\left|\!\left| \sum_{i\in J} \beta_i z_i \right|\!\right|\!\right| + \left|\!\left|\!\left| \sum_{i\in J^c} \beta_i z_i \right|\!\right|\!\right| \\
&\leq \left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|\!\right|\!\right| + \left|\!\left|\!\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|\!\right|\!\right| \\
&< 2c,
\end{aligned}$$

donde en las últimas desigualdades hemos usado 2.6 y 2.5. Esto contradice 2.4. De modo que $|||x||| \leq (2c)\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$. El mismo razonamiento que usamos para probar 2.6 muestra que $|||x||| \geq |||a_n z_n||| \geq d|a_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$. Por lo tanto

$$d\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\right) \leq |||x||| \leq 2c\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\right),$$

para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i \in T$. Lo anterior demuestra que el operador lineal $\Psi\colon c_0 \to T$ dado por

$$\Psi((a_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$$

es un isomorfismo. $\square$

Teorema 2.1.2. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.36, p. 257) Sea X un espacio de Banach con una base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora si y sólo si X no tiene ningún subespacio cerrado isomorfo a ℓ_1, es decir, si y sólo si no existe ningún operador lineal acotado biyectivo entre un subespacio cerrado de X y ℓ_1.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que X está dotado con la norma $|||\cdot|||_1$ definida en la prueba del teorema 6.32 (Nathansky & de Buen, 1994). Supongamos por contradicción que ℓ_1 es isomorfo a un subespacio cerrado F de X, entonces por teorema 4.74 (Nathansky & de Buen, 1994), es posible identificar a F^* con $X^*/F^{\perp}$. Note que como $\ell_1 \cong F$, entonces $l^{\infty} \cong F^*$, es decir, F^* no es separable, por lo que X^* tampoco lo es y por tanto los funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ asociados a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no pueden ser una base de Schauder de X^*, de lo anterior se concluye que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es una base reductora.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty}\|f\|_n = 1$ para algún funcional lineal $f \in X^*$. Tomando una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_r\}$ y elementos $\{z_r\}$ tal que $\|z_r\| = 1$ para todo $r, z_r \in [x_i]_{i=n_r}^{n_{r+1}-1}$, y $f(z_r) > \frac{1}{2}$. Sea Y el espacio de Banach generado por los z_r. Definimos una nueva norma en Y dada por $\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i\right|\right|\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$. Note que $\|x\| \leq |||x|||$. Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$ y $\{b_i\}$ y $\{c_i\}$ definidos como:

$$b_i = \begin{cases} a_i, \text{ si } a_i \geq 0 \\ 0, \text{ si } a_i < 0 \end{cases},$$

$$c_i = \begin{cases} -a_i, \text{ si } a_i \leq 0 \\ 0, \text{ si } a_i > 0 \end{cases},$$

entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i - \sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i$. También se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\right\| \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon} \text{ y } \left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i\right\| \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

donde ε es la constante positiva mencionada en la propiedad (James, 1950, p. 518) para la base incondicional $\{z_r\}$ de Y. De la definición de $\|f\|$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i f(z_i) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\right) \leq \|f\|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\right\|$$

y

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} c_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i f(z_i) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i\right) \leq \|f\|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i\right\|$$

Sumando las desigualdades anteriores

$$|||x||| \leq 2\|f\|\left[\left\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i\right\|\right] \leq \frac{4}{\varepsilon}\|f\|\|x\|$$

Así, $|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|$ como normas para Y y Y es isomorfo con ℓ_1. $\square$

El recíproco del teorema anterior fue demostrado por primera vez en 1951 por R. James.

Teorema 2.1.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.38, p. 261) Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y sólo si no contiene ningún subespacio cerrado isomorfo a ℓ_1 ni a c_0.*

Demostración. Si X es reflexivo entonces no puede tener copia de c_0 ni de ℓ_1, debido a que subespacios cerrados de espacios reflexivos también deben ser reflexivos (Nathansky y de Buen, 1994, corolario 4.77).

Si X no contiene ni a ℓ_1 ni a c_0, por los dos teoremas anteriores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta ser tanto reductora como acotadamente completa, y por el teorema 1.2.7 X es reflexivo. $\square$

Corolario 2.1.4. *(James, 1950, corolario 1, p. 521) Sea B un espacio de Banach con base incondicional. Si B^{**} es separable, entonces B es reflexivo.*

Demostración. Como B^{**} es separable, B^{*} no tiene copia de l_1. Por el teorema 2.1.2, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora, y por el Teorema 1.2.3, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base de Schauder de B^*. Ahora por el lema 2.1.1, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa, entonces, B es reflexivo por el teorema 1.2.7. $\square$

Teorema 2.1.5. *(James, 1950, Teorema 3, p. 522) Sea B un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ funcionales lineales para los que $x_n^*(x_m) = \delta_m^n$. Entonces:*

(1). *Una condición necesaria y suficiente para que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base para B^* es que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$ por cada f de B^*, donde $\|f\|_n$ es la norma de f en $[x_i]_{i=n}^{\infty}$.*

(2). *Si $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para B^*, entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$ converge si*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\|_{B^*}\right\}< \infty.$$

(3). *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para B y $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$ para cada f de B^*, entonces $\{x_n^*\}$ es una base incondicional para B^*.*

Demostración. **(1)** Se tiene por el teorema 1.2.3.

(2) Sea $\{x_n^*\}$ una base para B^*. Además, suponga que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\|_{B^*}\right\} = M < \infty.$$

Ahora, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para B, entonces para cada $x \in B$, existe una única sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i x_i\right\|_B < \varepsilon$, para todo $n > N_0$, y para cada $p \in \mathbb{N}$.

Particularmente para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i x_i\right\|_B < \frac{\varepsilon}{2M},$$

para todo $n > N$, y $p \in \mathbb{N}$. Asimismo, note que:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*\left(\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i x_i\right)\right| \leq \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*\right\|_{B^*}\left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i x_i\right\|_B.$$

Por otro lado, se tiene que $\left\|\sum_{i=1}^{n+p} a_i x_i^*\right\|_{B^*} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*\right\|_{B^*} &= \left\|\sum_{i=1}^{n+p} a_i x_i^* - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\|_{B^*} \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n+p} a_i x_i^*\right\|_{B^*} + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\|_{B^*} \\
&\leq 2M.
\end{aligned}$$

Por esto se tiene que $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*(x)\right| \leq 2M\left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i x_i\right\|_B$.

Ahora, para cada $n > N$, se tiene que $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i x_i^*(x)\right| < \varepsilon$. Y por lo tanto la sucesión dada por, $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$ es de Cauchy en el dual de B. Así, esta es convergente, es decir

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$ converge.

(3) Por lo demostrado en el item 1 tenemos que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para B^*. Ahora, veamos que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es incondicional.

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional. Ahora, usando la propiedad (James, 1950, p. 518) sobre bases incondicionales. Como una implicación de esta propiedad, se tiene que para algún $\delta > 0$,

$$\delta \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)} \right\|_B \leq \|x\|_B. \tag{2.8}$$

Para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, usando el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, elija un $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que

$$\|f\|_N < \frac{\varepsilon\delta}{(1+\delta)} \tag{2.9}$$

donde δ es el mismo de la ecuación 2.8.

Por otra parte sea $\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ un reordenamiento cualquiera de los términos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Elija $M \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(n) \geq N$ si $n \geq M$. Ahora por el corolario 6.30 (Nathansky & de Buen, 1994), se tiene que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)}$ y $x_n^*(x) = a_n$.
Por lo que para cada n y $f \in B^*$, se tiene que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{\pi(i)}\right) x_{\pi(i)}^*(x) + f\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{\pi(i)} x_{\pi(i)}\right)$$

por lo tanto, para cada $n > M$, se tiene:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{\pi(i)})x^*_{\pi(i)}(x)\right| &= \left|f\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right)\right| \\ &\leq \|f\|_N \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B\end{aligned}$$

Además, note que,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)} - \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B + \frac{1}{\delta}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}x_{\pi(i)}\right\|_B \\ &= \|x\|_B\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\end{aligned}$$

Así,

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{\pi(i)})x^*_{\pi(i)}(x)\right| \leq \|x\|_B\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\|f\|_N$$

Luego, por ecuación 2.9, se cumple que,

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{\pi(i)})x^*_{\pi(i)}(x)\right| \leq \|x\|_B\left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)\left(\frac{\varepsilon\delta}{1+\delta}\right) = \|x\|_B\varepsilon$$

De ahí que,

$$\left\|f - \sum_{i=1}^{n} f(x_{\pi(i)})x^*_{\pi(i)}\right\| < \varepsilon$$

para $n > M$. Por ende, se cumple que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})x^*_{\pi(i)}$$

Es decir, $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional.

$\square$

Corolario 2.1.6. *(James, 1950, corolario 2, p. 523) Sea B un espacio de Banach con una base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sean $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ los funcionales lineales tales que $x_n^*(x_m) = \delta_m^n$. Si ningún subespacio de B es isomorfo con ℓ_1, o si B^* es separable, entonces $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para B^*.*

Demostración. Como ningún subespacio de B es isomorfo a ℓ_1, por el teorema 2.1.2, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora; Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* \,|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \| = 0,$$

para todo $x^* \in B^*$. Por el teorema 2.1.5 (1) concluímos que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base para B^*. Ahora, si B^* es separable, entonces B no posee un subespacio isomorfo a ℓ_1 y la conclusión se sigue de la parte anterior. $\square$

3. Espacio de James

Este espacio no es tan conocido como el espacio ℓ^p o $C[0,1]$, el espacio $\mathcal{J}$ de *James*, uno de los ejemplos más importantes en la teoría de los espacios de Banach. Apareció en un trabajo de *R.C. James* en 1950 como un contraejemplo a una pregunta de *S.Banach*. Desde ese entonces para acá, el espacio ha probado ser una de las fuentes más ricas de contraejemplos para varios de los problemas que han ocupado a los expertos en espacios de Banach. Dicho espacio es un ejemplo de un espacio de Banach con base de Schauder, pero sin base incondicional. También respondía a otras cuestiones abiertas en aquel momento. Por ejemplo, no se sabía si un espacio de Banach X era necesariamente reflexivo si su bidual era separable. El espacio de James $\mathcal{J}$ es separable y tiene codimensión uno en $\mathcal{J}^{**}$, y por tanto da un contraejemplo. Más tarde, James fue más allá y modificó la definición de la norma para hacer $\mathcal{J}$ isométrico a $\mathcal{J}^{**}$, demostrando así que un espacio de Banach puede ser isométricamente isomorfo a su bidual y, sin embargo, no ser reflexivo.

3.1. Definición del espacio de James

Definición 3.1.1. *(Albiac & Kalton, 2006, Definition 3.4.1)*
El espacio de James $\mathcal{J}$ es el espacio de las sucesiones $x = (a_1, a_2, \ldots)$ de valores reales, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y cuya norma viene dada por:

$$\|x\|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right)^{1/2} \right\} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todos los posibles valores de n y sobre todas las posibilidades de sucesiones finitas $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_{n+1}$ de números naturales.

La definición de la norma en el espacio de James no es del todo natural; claramente, la norma es equivalente a la norma alternativa dada por la fórmula

$$\|x\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2\right)^{1/2} \right\},$$

donde, de nuevo, el supremo se toma sobre todas las secuencias de números enteros $\{p_j\}_{j=1}^{n+1}$. De hecho, se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_0 \leq \|x\|_{\mathcal{J}} \leq \sqrt{2}\|x\|_0 \ , \qquad x \in \mathcal{J}$$

Note que la primera desigualdad se puede demostrar de forma sencilla:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2\right)^{1/2} \right\}$$

Donde es claro que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2\right)^{1/2} \right\} = \|x\|_{\mathcal{J}}$$

Puesto que al segundo término de la desigualdad se le está sumando $(a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2$.

Faltaría mostrar la desigualdad

$$\|x\|_{\mathcal{J}} \leq \sqrt{2}\,\|x\|_0\,,$$

o de forma equivalente, demostrar que se cumple

$$\sqrt{2}\,\|x\|_{\mathcal{J}} \leq 2\,\|x\|_0\,.$$

Demostración. Note que inicialmente se cumple la siguiente desigualdad, ya que cada elemento de la sumatoria es positivo,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2} + \sqrt{(a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2}.$$

Ademas, es claro que por la definicion del supremo se tiene que,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}\right\}.$$

Veamos ahora que se cumple,

$$\sqrt{(a_{p_{n+1}}-a_{p_1})^2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}\right\},$$

para $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_{n+1}$, una posible sucesión de números naturales, donde es claro que si $n = 1$, es decir, para la sucesión $p_1 < p_2$, se tiene este resultado,

$$\sqrt{(a_{p_2}-a_{p_1})^2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{1}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{(a_{p_2}-a_{p_1})^2}\right\}.$$

Por lo tanto, la definición de la norma que toma el espacio de James, nos permite elegir cualquier posibilidad de sucesiones de numeros naturales, en especial, tomando la sucesión de números finitos

$$p_1 < p_{n+1}$$

dejando fijo el primer elemento de la sucesión inicial, se concluye que,

$$\sqrt{(a_{p_{n+1}}-a_{p_1})^2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}\right\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2+(a_{p_{n+1}}-a_{p_1})^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}+\sqrt{(a_{p_{n+1}}-a_{p_1})^2}\\ &\leq 2\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{p_{i+1}}-a_{p_i})^2}\right\}\end{aligned}$$

Aplicando el supremo sobre los $n \in \mathbb{N}$ en la desigualdad anterior, se obtiene que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right)^{1/2} \right\} \leq 2 \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2} \right\}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\|x\|_{\mathcal{J}} &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right)^{1/2} \right\} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right)^{1/2} \right\}
\end{aligned}$$

Donde,

$$2 \cdot \|x\|_0 = 2 \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 \right) \right\}$$

Concluyendo así que $\sqrt{2}\|x\|_{\mathcal{J}} \leq 2\|x\|_0$. □

Observe que, $\|e_n\|_{\mathcal{J}} = 1$ para toda n y además $\|e_n\|_0 = \sqrt{2}$ para $n \geq 2$. El espacio de James $\mathcal{J}$ junto con las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ y $\|\cdot\|_0$ conforma un espacio de Banach, pero ya que las normas son equivalentes, se mostrará únicamente que $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_0)$ es un espacio de Banach.

Proposición 3.1.2. *(Megginson, 2012, Proposición 4.5.4, p. 416)* $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_0)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Anteriormente se definió la norma $\|x\|_{\mathcal{J}}$ sobre $\mathcal{J}$, ahora mostramos su completitud, es decir, toda sucesión de Cauchy en el espacio de James es convergente en este espacio.

Suponga que

$$\{(\beta_{n,j})\}_{j=1}^{\infty} = ((\beta_{n,1}),\ (\beta_{n,2}),\ (\beta_{n,3}), \ldots)$$

es una sucesión de cauchy de elementos de $\mathcal{J}$, observe que los elementos en James son sucesiones, por ende la sucesión de cauchy que estamos tomando es una sucesión de sucesiones. Si $(\alpha_n) \in \mathcal{J}$ y $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $p_1 = n_0 < n_1 = p_2$ entonces se tiene,

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{n_0} - \alpha_{n_1}| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\alpha_{n_1} - \alpha_{n_0})^2 + (\alpha_{n_1} - \alpha_{n_0})^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|(\alpha_n)\|_{\mathcal{J}}
\end{aligned}
$$

Dejando que n_1 tienda a infinito se demuestra que $|\alpha_{n_0}| \leq \|(\alpha_n)\|_{\mathcal{J}}$ siempre y cuando $(\alpha_n) \in \mathcal{J}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Dado que $\{(\beta_{n,j})\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de cauchy, se deduce que cada elemento de la sucesión anterior $\{\beta_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ es de cauchy, por lo tanto convergente, siempre que $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$
\beta_n = \lim_{j \to \infty} (\beta_{n,j})
$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea ε un número positivo arbitrario y sea j_ε, un número entero positivo tal que $\|(\beta_{n,j}) - (\beta_{n,j'})\|_{\mathcal{J}} < \varepsilon$, donde $j, j' \geq j_\varepsilon$. Si $j, j', n, p_1, ..., p_{n+1}$ son enteros positivos tales que $j, j' \geq j_\varepsilon$, $n \geq 1$, $p_1 < ... < p_{n+1}$, entonces por la definición de la norma $\|x\|_{\mathcal{J}}$ se tiene que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left((\beta_{p_{i+1},j} - \beta_{p_{i+1},j'}) - (\beta_{p_i,j} - \beta_{p_i,j'}) \right)^2 + \right. \\
&\qquad \left. \left((\beta_{p_{n+1},j} - \beta_{p_{n+1},j'}) - (\beta_{p_1,j} - \beta_{p_1,j'}) \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|(\beta_{n,j}) - (\beta_{n,j'})\|_{\mathcal{J}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Haciendo que j' tienda hacia infinito se llega a que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left((\beta_{p_{i+1},j} - \beta_{p_{i+1}}) - (\beta_{p_i,j} - \beta_{p_i}) \right)^2 + \right. \\
&\qquad \left. \left((\beta_{p_{n+1},j} - \beta_{p_{n+1}}) - (\beta_{p_1,j} - \beta_{p_1}) \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Siempre que $j \geq j_\varepsilon$, $m \geq 1$ y $p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1}$. Lo anterior demuestra que $(\beta_n) \in \mathcal{J}$ y que

$$\|(\beta_{n,j}) - (\beta_n)\|_{\mathcal{J}} \leq \varepsilon$$

Para $j \geq j_\varepsilon$, es decir, como $(\beta_{n,j}) \to (\beta_n)$ cuando $j \to \infty$, el espacio $\mathcal{J}$ es completo. $\square$

3.2. Propiedades del espacio de James

Teorema 3.2.1. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.2, p. 63) La sucesión* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de vectores unitarios estándar es una base monótona para* $\mathcal{J}$ *(con ambas normas* $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ *y* $\|\cdot\|_0$*).*

Demostración. Note que la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores canónicos cumple con las tres condiciones necesarias para ser una base descrita en el teorema 2.10 (Nathansky & de Buen, 1994, p. 225), por lo tanto $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base en $\mathcal{J}$ para ambas normas. Mostraremos ahora que la sucesión es monótona, para ello consideremos la base en la norma $\|\cdot\|_0$, pues es más sencilla de trabajar. Observe que la monotonicidad de una sucesión está ligada a la constante de base de las proyecciones asociadas a esta, es decir,

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_0$$

donde K es la constante de base y P_n las proyecciones asociadas a la base, Además, si $K = 1$, la base asociada es monótona, es decir,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\| \quad para \quad n \leq m$$

Sea $p \leq q$ y $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{J}$. Note que $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, además se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{p} a_i e_i \right\|_0 &= \|(a_1, a_2, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots)\|_0 \\
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 \right)^{1/2} : p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1} < p \right\} \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 \right)^{1/2} : p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1} < p \leq q \right\} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{q} a_i e_i \right\|_0
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} a_i e_i \right\|_0 \leq \left\| \sum_{i=1}^{q} a_i e_i \right\|_0$$

para $p \leq q$, concluyendo que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona.

Teorema 3.2.2. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.3, p. 63) Sea $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques normalizada con respecto a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_0)$. Entonces, para cualquier sucesión de escalares $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ se mantiene la siguiente desigualdad:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \right\|_0 \leq \sqrt{5} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 3.2.3. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.4, p. 64) La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios estándar es una base reductora para $\mathcal{J}$ (con ambas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ y $\|\cdot\|_0$).*

Supongamos ahora que la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es reductora contradiciendo de esta manera 1.2.3, entonces existe $x^* \in \mathcal{J}^*$ tal que se cumple,

$$\lim_{n \to \infty} \|x^*\|_n \neq 0$$

donde

$$\|x^*\|_n = \|x^*|_{[e_i]_{i=n}^{\infty}}\|$$

es decir $\|x^*\|_n$ denota la norma de x^* restringida al subespacio $[e_i]_{i=n}^{\infty}$. Por ende, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $n_k < n_{k+1}$ para $k = 1, 2, \ldots$, de modo que

$$\|x^*|_{[e_i]_{i=n_k}^{\infty}}\| = \|x^*\|_{n_k} > \varepsilon$$

Note que de lo anterior, implica la existencia de elementos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$ a partir de cada $k = 1, 2, \ldots$, además se tiene que cada uno de estos elementos están contenidos en el subespacio $[e_i]_{i=n_k}^{\infty}$, donde, estos elementos $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ forman una nueva sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$ con $\|z_k\| = 1$, y se tiene que

$$z_k = \sum_{i=n_k}^{\infty} \langle e_i^*, z_k \rangle e_i$$

tal que sigue cumpliendo,

$$x^*(z_k) = x^* \left(\sum_{i=n_k}^{\infty} \langle e_i^*, z_k \rangle e_i \right) = \sum_{i=n_k}^{\infty} \langle e_i^*, z_k \rangle x^*(e_i) \quad > \varepsilon$$

es decir, $x^*(z_k) > \varepsilon$, donde $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ denotan los funcionales biortogonales asociados a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para llegar a la contradicción que buscamos, se construirá a partir de la sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una nueva sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ de tal modo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}$ converja en $\mathcal{J}$ pero $x^* \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} \right)$ no converja, ya que la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}$ en $\mathcal{J}$ implica también la convergencia de x^*, es decir, debería existir dicho límite.

Note que de lo anterior

$$x^*(z_k) > \varepsilon$$

se tiene de forma equivalente que

$$x^* \left(\lim_{r\to\infty} \sum_{i=n_k}^{r} \langle e_i^*, z_k \rangle e_i \right) = x^*(z_k) = \lim_{r\to\infty} x^* \left(\sum_{i=n_k}^{r} \langle e_i^*, z_k \rangle e_i \right) > \varepsilon$$

Sea $m_1 = n_1$. Como se tiene que

$$z_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_1}^{n} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i$$

existe $n_r \in \mathbb{N}$ tal que $n_r > m_1 = n_1$ y suficientemente grande, de tal modo que siga cumpliendo

$$x^*\left(\sum_{i=m_1}^{n_r-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right) > \varepsilon$$

Si $m_2 = n_r$, se construye el primer elemento

$$y_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i}{\left\|\displaystyle\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}} = \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\langle e_i^*, z_1\rangle}{\left\|\displaystyle\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}} \cdot e_i$$

de modo que $\|y_1\| = 1$, y además

$$\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}} = \left\|(0, \ldots, \langle e_{m_1}^*, z_1\rangle, \ldots, \langle e_{m_2-1}^*, z_1\rangle, 0, \ldots)\right\|_{\mathcal{J}} \leq 1$$

Note que $x^*(y_1) > \varepsilon$ pues se esta tomando $m_2 = n_r$ y además

$$\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}} \leq 1$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
x^*(y_1) &= x^*\left(\sum_{i=m_1}^{m_2-1} \frac{\langle e_i^*, z_1\rangle}{\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}} e_i\right)\\
&= x^*\left(\sum_{i=m_1}^{n_r-1} \frac{\langle e_i^*, z_1\rangle}{\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}} e_i\right)\\
&> \varepsilon
\end{aligned}
$$

Supongamos que hemos construido $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$ y $y_1, y_2, \ldots, y_k$ tales que $\{m_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, además

$$
\frac{\langle e_i^*, z_1\rangle}{\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}} = \left\langle e_i^*, \frac{z_1}{\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\langle e_i^*, z_1\rangle e_i\right\|_{\mathcal{J}}}\right\rangle = \langle e_i^*, y_1\rangle
$$

por lo tanto, podemos tener la expresión explícita de los términos de esta nueva sucesión $\{y_k\}$.

$$
y_k = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \langle e_i^*, y_k\rangle e_i
$$

y através de lo expuesto anteriormente y por la construcción se tiene que $\|y_k\| = 1$, $x^*(y_k) > \varepsilon$.

Veremos que $\sum_{k=1}^{\infty} y_k/k$ converge en $\mathcal{J}$. Note que $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ cumple con las condiciones de ser base de bloque respecto a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (Nathansky & de Buen, 1994, Corolario 6.12) puesto que esta sucesión de vectores unitarios es una sucesión básica en $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_0)$ y $\langle e_i^*, y_k\rangle$ son escalares que están en el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$.

Note que se cumplen las condiciones del teorema inmediatamente anterior 3.2.2 donde $\{y_k\}$ es una sucesión básica de bloques normalizada, y $\{\lambda_k\}_{k=1}^n = \{1/k\}_{k=1}^n$, por lo que se tiene,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{k}\right\|_0 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot y_k\right\|_0 \leq \sqrt{5}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{1/2}$$

así, aplicando $\lim_{n\to\infty}$ se deduce que

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}\right\|_0^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{k}\right\|_0^2 \leq \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)\right] = 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$$

Se concluye que la serie es acotada con la norma $\|\cdot\|_0$ en $\mathcal{J}$, es decir, la sucesión de sumas parciales de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{k}$ es convergente al ser monótona y acotada y por ende la serie es convergente. Observe que se tenía

$$x^*(y_k) > \varepsilon \quad para \quad k = 1, 2, \ldots$$

de manera que

$$\begin{aligned}
x^*\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k}\right) &= x^*\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \ldots + \frac{y_n}{n}\right)\\
&= x^*(y_1) + x^*\left(\frac{y_2}{2}\right) + \ldots + x^*\left(\frac{y_n}{n}\right)\\
&= x^*(y_1) + \frac{x^*(y_2)}{2} + \ldots + \frac{x^*(y_n)}{n}\\
&> \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n}\\
&= \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\\
&= \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

por lo tanto, del procedimiento anterior:

$$x^*\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k}\right) > \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Al aplicar el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que,

$$x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} \right) = \lim_{n\to\infty} x^* \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{k} \right) > \lim_{n\to\infty} \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \varepsilon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente, se tiene que,

$$x^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} \right)$$

no es convergente, llegando a la contradicción buscada. Finalizando así la prueba de que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora e implicando que la sucesión de funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base para $\mathcal{J}^*$. $\square$

Observación 3.2.4. *Note que con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$, la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$ es una base monótona, normalizada y reductora en $\mathcal{J}$.*

Ejemplo 3.2.5. *Note que en el teorema inmediatamente anterior se probó que la sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora para $\mathcal{J}$; donde dicha sucesión no es una base acotadamente completa ya que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| \right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n}, 0, 0, ...)\| = 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ pero la serie $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ no es convergente en $\mathcal{J}$.

El siguiente teorema constituye una pieza central, ya que proporciona la propiedad de que $\mathcal{J}$ es isométrico a su doble dual, aunque no es “igual” a su doble dual debido a que tiene una codimensión de 1 en $\mathcal{J}^{**}$. No obstante, el espacio de James fue el primero en poseer esta propiedad. Desde la publicación del trabajo de James, se han construido otros espacios que son isométricos a sus dobles duales, pero no son idénticos a ellos. De hecho, para cada k existe un espacio isométrico a su doble dual, pero con una codimensión k en él; a estos espacios se les denomina cuasirreflexivos de orden k.

Teorema 3.2.6. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.64, p. 294) El espacio $\mathcal{J}$ es isométrico a $\mathcal{J}^{**}$ y es cuasirreflexivo de orden 1, es decir el espacio $j(\mathcal{J})$, donde j es la inyección canónica de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}^{**}$, tiene codimensión 1 .*

Demostración. Por el teorema 1.2.6 se tiene que $\mathcal{J}^{**}$ es isomorfo al espacio

$$\mathrm{X} = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{X}} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right\} < \infty \right\}. \tag{3.1}$$

Mediante la aplicación $T : \mathcal{J}^{**} \to \mathrm{X}$ dada por $T(x^{**}) = (x^{**}(e_1^*), x^{**}(e_2^*), \ldots)$, donde $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a la base canónica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además, como esta base es monótona, entonces T es una isometría.

Ahora se verá que toda sucesión en X tiene límite, para esto, suponga por contradicción que existe alguna sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{X}$ que no converge. Si esto es así, entonces existe algún $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $|a_{n_{m+1}} - a_{n_m}| \geq \varepsilon$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Considere a $M = \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{X}}$ y sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $L\varepsilon^2 > 2M^2$. Entonces

$$2M^2 = 2(\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{X}})^2 = 2\left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right\} \right)^2 \geq 2\left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right)^2.$$

Además ya se sabe que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_0 \leq \left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}}$, de ahí se sigue

$$\frac{1}{2}\left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_0 \right)^2 \leq \left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right)^2$$
$$\left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_0 \right)^2 \leq 2\left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right)^2$$

Y como se define $\|\cdot\|_0$,entonces $\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_0 \geq \left(\sum_{i=1}^{L} (a_{n_{i+1}} - a_{n_i})^2 \right)^{1/2}$.

Por lo tanto $\left(\left\| \sum_{i=1}^{L} a_i e_i \right\|_0 \right)^2 \geq \sum_{i=1}^{L} (a_{n_{i+1}} - a_{n_i})^2 = \sum_{i=1}^{L} |a_{n_{i+1}} - a_{n_i}|^2$, finalmente se tiene que $2M^2 \geq \sum_{i=1}^{L} |a_{n_{i+1}} - a_{n_i}|^2 > \sum_{i=1}^{L} \varepsilon^2 = L\varepsilon^2 > 2M^2$, lo cual es absurdo, de ahí que toda sucesión en X tenga límite.

Ahora considere la aplicación $S : \mathrm{X} \to \mathcal{J}$, dada por

$$S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = -\lambda e_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(a_{i-1} - \lambda)e_i, \quad donde \ \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \tag{3.2}$$

Es decir $S(a_1, a_2, \ldots) = (-\lambda, a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \ldots)$. Veamos que la aplicación S está bien definida, para esto, veamos que $S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) \in \mathcal{J}$.

Claramente $\lim\limits_{n\to\infty} S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$. Hace falta ver qué $\|S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})\|_{\mathcal{J}} < \infty$, para esto, veamos qué S es una isometría. Considere una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X.

$$\begin{aligned}
\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{X}} &= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\|_{\mathcal{J}}\right\} \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}}\{\|(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N, 0, \ldots)\|_{\mathcal{J}}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{1\leq m\leq N}\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{m+1}} - a_{p_1})^2\right)^{1/2}\right\}.
\end{aligned}$$

Donde se toman todas las posibles sucesiones $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_m + 1$ de naturales. Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{N\in\mathbb{N}}\{\|(a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots)\|_{\mathcal{J}}\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{m+1}} - a_{p_1})^2\right)^{1/2}\right\} \\
= \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{N\in\mathbb{N}}&\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}((a_{p_{i+1}} - \lambda) - (a_{p_i} - \lambda))^2 + ((a_{p_{m+1}} - \lambda) - (a_{p_1} - \lambda))^2\right)^{1/2}\right\},
\end{aligned}$$

donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Así, se tiene que $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{X}} = \|S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})\|_{\mathcal{J}} < \infty$, luego como la isometría implica inyectividad, solo quedaría ver que la aplicación S es sobreyectiva, para esto, es necesario ver que para cada sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{J}$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $S(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{J}$, considere a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X tal que $a_n = b_{n+1} - b_1$, note que como $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{J}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -b_1$, considere a $-b_1 = \lambda$. Luego

$$\begin{aligned}
S(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}) &= (-\lambda, a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \ldots, a_k - \lambda, \ldots) \\
&= (-\lambda, (b_2 - b_1) - \lambda, (b_3 - b_1) - \lambda, \ldots, (b_{k+1} - b_1) - \lambda, \ldots) \\
&= (-(-b_1), (b_2 - b_1) - (-b_1), \ldots, (b_{k+1} - b_1) - (-b_1), \ldots) \\
&= (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, \ldots) \\
&= \{b_n\}_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{J}$ y X son espacios isométricamente isomorfos vía $S : \mathrm{X} \to \mathcal{J}$, de ahí que el operador $T^{-1} \circ S^{-1} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}^{**}$ es una isometría.

Ahora veamos que efectivamente $j(\mathcal{J})$ tiene codimensión 1 en $\mathcal{J}^{**}$.

Para esto, considere un nuevo operador $U : \mathcal{J} \to \mathrm{X}$ dado por $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ en $\mathcal{J}$ tal que $x \mapsto U(x) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Note que

$$\left\| U\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\mathrm{X}} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right\}$$

Además, claramente se tiene que $\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum\limits_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right\} \leq \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} < \infty$.

Note que $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \leq \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} = \|x\|_{\mathcal{J}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Luego, $\|x\|_{\mathcal{J}}$ es una cota para el conjunto $\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_{\mathcal{J}} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Por lo tanto

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\|_{\mathcal{J}}\right\} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right\|_{\mathcal{J}}.$$

Así el operador U está bien definido.

Ahora veamos qué $T^{-1} \circ U = j$, donde $j : \mathcal{J} \to \mathcal{J}^{**}$ es la inyección canónica y T^{-1} es el operador definido anteriormente.

En efecto, si $x^{**} = T^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$, entonces $x^{**}(e_n^*) = a_n$. Como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora, entonces por el teorema 1.2.3 la sucesión $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para $\mathcal{J}^*$, así, para cada $x^* \in \mathcal{J}^*$ existe una única sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n^*$.

Ahora, tome $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{J}$ y un funcional $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n^* \in \mathcal{J}^*$ arbitrario, luego

$$\langle (T^{-1} \circ U)(x), x^* \rangle = \langle T^{-1}(U(x)), x^* \rangle = \langle T^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), x^* \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle = x^{**}(x^*).$$

Así, se tiene que

$$x^{**}(x^*) = x^{**}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n^*\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{**}(e_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n,$$

Además, como $x^*(e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n^*(e_j) = b_j$, de ahí que

$$\langle j(x), x^* \rangle = x^*(x) = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{i=n}^{\infty} a_n x^*(e_n) = \sum_{i=n}^{\infty} a_n b_n$$

Por lo tanto $\langle (T^{-1} \circ U)(x), x^* \rangle = \langle j(x), x^* \rangle$, así se tiene que $T^{-1} \circ U = j$.

Por otro lado si $\mathrm{y} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{X}$, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces se tiene que

$\|y\|_{\mathcal{J}} \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|_{\mathcal{J}} \right\} < \infty$,y por la definición del espacio de James $\mathcal{J}$, así $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{J}$, es decir $U(\mathrm{y}) = x$.

Note que la sucesión constante 1 está en X, así que para algún funcional $\tilde{x}^{**} \in \mathcal{J}^{**}$ tal que $T(\tilde{x}^{**}) = (\tilde{x}^{**}(e_1^*), \tilde{x}^{**}(e_2^*), \ldots) = (1, 1, \ldots)$, esto implica que

$$\tilde{x}^{**} = T^{-1}(\tilde{x}^{**}(e_1^*), \tilde{x}^{**}(e_2^*), \ldots) = T^{-1}(1, 1, \ldots)$$

Denote a $\tilde{x}^{**} = \xi$.

Ahora, sea el funcional $x^{**} \in \mathcal{J}^{**}$, con $\lim_{n\to\infty} x^{**}(e_n^*) = \lambda$. Así que se puede escribir

$$x^{**} = (x^{**} - \lambda\xi) + \lambda\xi,$$

Debido a que $x^{**} - \lambda\xi \in \mathcal{J}^{**}$, claramente se tiene $\lim_{n\to\infty} (x^{**} - \lambda\xi)(e_n^*) = 0$, así por lo anterior, se tiene que

$$T(x^{**} - \lambda\xi) = ((x^{**} - \lambda\xi)(e_1^*), (x^{**} - \lambda\xi)(e_2^*), \ldots)$$

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{**} - \lambda\xi)(e_n^*) e_n \in \mathcal{J}$, es decir, luego

$$U(x) = ((x^{**} - \lambda\xi)(e_1^*), (x^{**} - \lambda\xi)(e_2^*), \ldots) = T(x^{**} - \lambda\xi)$$

Por lo tanto $j(x) = T^{-1}(U(x)) = x^{**} - \lambda\xi$, de ahí que $x^{**} = j(x) + \lambda\xi$. Esto implica que $J^{**} = j(\mathcal{J}) + [\xi]$, ahora veamos que $j(\mathcal{J}) \cap [\xi] = \{0\}$.

Supongamos que $0 = y^{**} + \mu\xi$, donde $y^{**} \in j(\mathcal{J})$ y $\mu\xi \in [\xi]$, entonces se tiene que

$$0 = (S \circ T)(0) = (S \circ T)(y^{**} + \mu\xi) = (S \circ T)(y^{**}) + \mu(S \circ T)(\xi).$$

Como $y^{**} \in j(\mathcal{J})$, entonces $y^{**} = j(x)$ para algún $x \in \mathcal{J}$, de ahí que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, por lo que $j(x) = j\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n j(e_n)$.

$$T(y^{**}) = T(j(x)) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n j(e_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(j(e_n)).$$

Note que $T(j(e_n)) = (\langle j(e_n), e_1^* \rangle, \langle j(e_n), e_2^* \rangle, \ldots, \langle j(e_n), e_n^* \rangle, \ldots) = e_n$, es por eso que se tiene

$$T(y^{**}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(j(e_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Así que $S(T(y^{**})) = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = S(x) = -\lambda e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} - \lambda) e_n$, pero como $x \in \mathcal{J}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda = 0$, de ahí que $S(T(y^{**})) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} e_n$.

Además, se tiene que $T(\xi) = (1, 1, \ldots)$, luego $S(T(\xi)) = S(1, 1, \ldots) = -e_1$, de ahí que $\mu S(T(\xi)) = -\mu e_1$. Por lo tanto

$$0 = (S \circ T)(y^{**} + \mu\xi) = -\mu e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} e_n.$$

Así se deduce que $\mu = a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = 0$ eso implica que $j(x) = 0$, de ahí que $j(\mathcal{J}) \cap [\xi] = \{0\}$, por lo tanto $\mathcal{J}^{**} = j(\mathcal{J}) \oplus [\xi]$. Se concluye que $j(\mathcal{J})$ tiene codimensión 1 en $\mathcal{J}^{**}$, esto significa que el espacio de James $\mathcal{J}$ no es reflexivo. $\square$

Lema 3.2.7. *(Nathansky & de Buen, 1994, Lema 6.65, p. 296) $\mathcal{J}$ no contiene ni a c_0 ni a ℓ^1 y por esto la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es incondicional. Es más, $\mathcal{J}$ no tiene ninguna base incondicional.*

Demostración. Como $\mathcal{J}$ es isomorfo a $\mathcal{J}^{**}$, y puesto que $\mathcal{J}$ y $\mathcal{J}^*$ tenen base de schauder, implica que estos tres espacios son separables. Pero se tiene que ni c_0^{**} ni ℓ_1^* son separables y por ello no pueden ser subespacios de $\mathcal{J}$. Como $\mathcal{J}$ no es reflexivo y no contiene ni a c_0 ni a ℓ_1, concluimos del Teorema 2.1.3 que ni $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ni ninguna otra base de $\mathcal{J}$ pueden ser incondicionales. $\square$

Bibliografía

Kreyszig, E. (1991). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. (Vid. págs. 12, 13, 71, 72, 74).

Nathansky, H. F., & de Buen, B. G. (1994). *Introducción al análisis funcional ya la geometrıa de espacios de Banach*. CIMAT. (Vid. págs. 12-18, 21, 22, 24, 38, 40, 42, 51, 55, 58, 63, 67-69, 76-78, 80-86, 89).

James, R. C. (1951). A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *37*(3), 174-177 (vid. págs. 25, 26).

James, R. C. (1950). Bases and reflexivity of Banach spaces. *Annals of Mathematics*, 518-527 (vid. págs. 25, 34, 39, 40, 42, 44).

Albiac, F., & Kalton, N. J. (2006). *Topics in Banach space theory* (Vol. 233). Springer. (Vid. págs. 45, 51, 52, 88, 89).

Megginson, R. E. (2012). *An introduction to Banach space theory* (Vol. 183). Springer Science & Business Media. (Vid. pág. 48).

4. Apéndices

4.1. Apéndice A. Protocolo de las sesiónes 1, 2 y 3

Seminario de Trabajo de Grado
Relator: Yeny Paola Moreno
Correlator: Edgar Eduardo Mantilla
Documento: Topología débil y débil estrella.
Fecha: 24 Enero 2024 - 26 Enero 2024 - 29 Enero 2024
Actividades a desarrollar:

- Exposición del documento
- Análisis del tema
- Conclusiones

Durante esta sesión, se estudió el tema Topologías débil y débil estrella del libro *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*. La exposición estuvo a cargo del estudiante Santiago Delgado, quien presentó de manera detallada los teoremas mas importantes que componen el capítulo, y posterior a eso, hacer el análisis de los teoremas.

- **Exposición del documento:**

  El análisis funcional se adentra en el estudio de espacios de funciones y operadores lineales. A medida que estudiamos este campo, nos encontramos con conceptos fundamentales que permiten comprender la convergencia de funciones, la continuidad de operadores y la dualidad entre espacios vectoriales y sus duales.

  En el estudio de este documento, nos enfocaremos en dos aspectos importantes: la topología débil y la topología débil estrella. Estos conceptos desempeñan un papel importante al ofrecer una perspectiva alternativa a la topología fuerte.

- **Análisis del tema:**

En el análisis funcional, la topología débil y débil estrella son herramientas esenciales para estudiar espacios de funciones y operadores lineales. La topología débil se diferencia de la topología fuerte al permitir la convergencia puntual o débil, mientras que la topología débil estrella es una extensión natural de la topología débil, especialmente en espacios de Hilbert.

Para dar inicio a las definiciones y teoremas tratados del capítulo, se revisó la siguiente pregunta: ¿Por qué se introduce la topología débil? La topología débil en un conjunto X es la topología con menos abiertos en X, que hace que todo elemento de la familia de funcionales lineales definidos en X sea continuo.

A continuación veremos la definición formal de los abiertos básicos que se usan en la topología débil.

Definición 4.1.1. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 4.53) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La topología débil de X, denotada por $\sigma(X, X^*)$ o por w, es la topología más gruesa o con menos abiertos en X para la cual todo elemento de X^* es continuo.*

La topología débil en X tiene como base local de $x_0 \in X$ a los conjuntos de la forma

$$V(x_0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : |\langle x_i^*, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\}$$

con $x_0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, donde $\langle x^*, x \rangle$ significa lo mismo que $x^*(x)$.

Además sobre X^* se puede definir una topología diferente a la topología fuerte y a la topología débil, esta es la topología débil-*, denotada por $\sigma(X^*, X)$ o por w^*.

La base local de la topología débil-* en X^* se definen de manera análoga. Así para cada $x_0^* \in X^*$, la base local es dada por los conjuntos de la forma

$$V(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x^* \in X^* : |\langle x_0^* - x^*, x_i \rangle| < \varepsilon\}$$

con $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomando ahora el enfoque para la topología débil estrella, un primer resultado que veremos es una de las propiedades más importantes de la topología débil estrella y prueba que, contrario a la topología débil, los conjuntos cerrados y acotados en X^* con la topología fuerte son siempre w^* compactos.

Teorema 4.1.2. *(Banach-Alaoglu) (Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 4.65, p. 123) Para todo espacio normado X, la bola B_{X^*} es w^* compacta y en consecuencia todo subconjunto w^* cerrado y acotado de X^* es w^* compacto.*

Si tenemos que X es separable, la restricción de la topología débil estrella a conjuntos acotados sí es metrizable, es más, estos conjuntos son débil estrella separable.

Teorema 4.1.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 4.67, p. 125) Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

- *Toda bola cerrada en X^* es $\sigma(X^*, X)$ metrizable.*
- *B_{X*} es $\sigma(X^*, X)$ metrizable.*
- *X es separable.*
- *B_{X^*} es w^* separable.*

Como resultado del teorema anterior y del teorema de Banach-Alaoglu obtenemos el siguiente corolario conocido como teorema de selección de Helly:

Corolario 4.1.4. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 4.68, p. 127) Si X es un espacio normado separable, entonces toda sucesión acotada en X^* tiene una subsucesión w^* convergente.*

- **Conclusiones:**

La sesión se centró en comprender los teoremas fundamentales relacionados con estas topologías y su aplicación en el análisis funcional. Durante la exposición, se exploraron las definiciones y propiedades clave de la topología débil y débil estrella, resaltando su importancia en el estudio de espacios de funciones y operadores lineales. Se discutió cómo la topología débil ofrece una perspectiva alternativa a la topología fuerte, permitiendo la convergencia puntual o débil de manera más general.

Se presentaron teoremas importantes como el de Banach-Alaoglu, que establece la compacidad de la bola unitaria en el dual de un espacio normado bajo la topología débil estrella. Además, se discutió la metrizabilidad de ciertos conjuntos en el dual bajo la topología débil estrella, especialmente en el caso de espacios normados separables. Finalmente, se concluyó que estos resultados tienen implicaciones significativas en el análisis funcional, especialmente en la convergencia de sucesiones y la compacidad de conjuntos en el dual de un espacio normado.

4.2. Apéndice B. Protocolo de la sesión 4

Seminario de Trabajo de Grado
Relator: Edgar Eduardo Mantilla
Correlator: Yeny Paola Moreno
Documento: Convergencia fuerte y débil en sucesiones, sucesiones de operadores y funcionales
Fecha: 31 Enero 2024
Actividades a desarrollar:

- Exposición del documento
- Análisis del tema
- Conclusiones

Durante la sesión dedicada al estudio del tema *Convergencia de sucesiones, sucesiones de operadores y funcionales*, se exploraron los conceptos fundamentales presentados en el libro *Introductory Functional Analysis* de *Kreyszig*. La exposición liderada por el estudiante Herson Suárez, proporcionó una visión detallada de las generalidades asociadas con los distintos tipos de convergencia. En este contexto, se enfatizaron los resultados más relevantes que abordan este tema, los cuales fueron objeto de un análisis exhaustivo posteriormente. La intención de estas sesiones fue no solo comprender la convergencia en sus diversas manifestaciones, sino también explorar su aplicación en el análisis funcional y su relevancia en la resolución de problemas prácticos dentro del campo matemático.

- **Exposición del documento:**

  En el campo del cálculo se establecen varios tipos de convergencia, que incluyen la convergencia ordinaria, condicional, absoluta y uniforme. Esta diversidad en las definiciones conlleva a una mayor flexibilidad tanto en la teoría como en la aplicación de sucesiones y series. Similarmente, en el análisis funcional, nos encontramos con una amplia gama de posibilidades que resultan ser de gran interés práctico. En esta sesión, se hizo un enfoque principal en la *convergencia débil*, un concepto fundamental que se abordó minuciosamente y se estudió de una forma profunda a partir de los resultados principales los cuales fueron la equivalencia en las convergencias fuerte y débil para espacios de dimensión finita y la diferencia de convergencia en la norma y convergencia fuerte para sucesiones de operadores.

- **Análisis del tema:**

La convergencia débil tiene varias aplicaciones a lo largo del análisis (por ejemplo, en el cálculo de variaciones y en la teoría general de ecuaciones diferenciales). Para aplicar la convergencia débil es necesario conocer ciertos conceptos básicos. Se evidencia que en algunas pruebas de los resultados expuestos en la charla se utiliza la prueba del teorema de Hahn – Banach. Se expuso como pilar de la presentación, la definición de convergencia fuerte y débil, la cual se mostrará a continuación:

Definición 4.2.1. ***(Convergencia Fuerte):*** *(Kreyszig, 1991, Definición 4.8-1, p. 256) Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio normado X se dice que converge fuerte o converge en la norma si existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Definición 4.2.2. ***(Convergencia débil):*** *(Kreyszig, 1991, Definición 4.8-2, p. 257) Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio normado X decimos que converge débil si existe $x \in X$ tal que para todo $f \in X^*$,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Se planteó una interesante pregunta que puede surgir en la mente del lector: ¿En un espacio de dimensión finita hay diferencias entre la topología débil y la topología fuerte? La respuesta es bastante sencilla: en los espacios normados de dimensión finita, la distinción entre convergencia fuerte y débil desaparece por completo. Durante la presentación, se llevó a cabo una demostración de este hecho, además de proporcionar una justificación detallada de los términos *fuerte* y *débil*. Este análisis permitió a los asistentes comprender mejor las diferencias y similitudes entre estos conceptos, así como su aplicación en diversos contextos matemáticos. Como eje primordial se encuentra el siguiente resultado:

Teorema 4.2.3. *(Kreyszig, 1991, Teorema 4.8-4, p. 261) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio normado X. Entonces:*

a). *Convergencia fuerte implica convergencia débil.*

b). *La recíproca de (a) no es generalmente cierta.*

c). *Si $dim(X) < \infty$, entonces convergencia débil es equivalente a la convergencia fuerte.*

Se mostró como prueba de la afirmación **(b)** un ejemplo donde una sucesión converge débilmente pero no fuerte.

Ejemplo 4.2.4. *(Kreyszig, 1991, Ejemplo 4.8-5, p. 260) Se puede ver a partir de una secuencia ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un Espacio de Hilbert H. De hecho, cada $f \in H^*$ por el Teorema de representación de Riesz $f(e_n) = \langle e_n, z\rangle$, para algún $z \in H$. Usando la desigualdad de Bessel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z\rangle|^2 \leq \|z\|^2$$

Notemos que la serie de la izquierda converje, por lo que sus términos deben acercarse a cero cuando $n \to \infty$. Esto implica que

$$f(e_n) = \langle e_n, z\rangle \to 0$$

Como el funcional que se tomó fué arbitrario, se tiene que e_n converge débilmente por definición. Sin embargo, esta sucesión no converge fuerte porque:

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n \rangle = 2 \qquad \textit{para} \quad m \neq n.$$

Se discutió la relevancia de las sucesiones de operadores y funcionales lineales acotados, las cuales son frecuentes en la formulación abstracta de diversas situaciones concretas. Por ejemplo, estas sucesiones aparecen en problemas de convergencia de series de Fourier, sucesiones de polinomios de interpolación y métodos de integración numérica. En tales casos, el foco principal suele estar en la convergencia de estas sucesiones de operadores o funcionales, junto con las correspondientes sucesiones de normas o propiedades similares. La experiencia ha demostrado que, en el contexto de sucesiones de elementos en un espacio normado, tanto la convergencia fuerte como la débil son conceptos útiles. Además, en el caso de sucesiones de operadores $T_n \in B(X,Y)$ tenemos tres tipos de convergencias, que resultan ser de gran valor tanto teórico como práctico. Estos incluyen

(i). Convergencia en la norma sobre $B(X,Y)$.

(ii). Convergencia fuerte de $(T_n x)$ en Y.

(iii). Convergencia débil de $(T_n x)$ en Y.

Durante la exposición, se profundizó en la comprensión de estos conceptos y se destacó su importancia en la resolución de problemas tanto teóricos como prácticos en el análisis funcional. Para el caso de sucesiones de funcionales se introduce un nuevo concepto *convergencia débil-**. Notemos que los funcionales están definidos sobre el cuerpo de los reales o los complejos, los cuales son de dimensión finita y por lo tanto, del resultado mostrado inicialmente se tiene que la convergencia débil y fuerte son equivalentes, a continuación se expondrá la definición de este nuevo concepto:

Definición 4.2.5. ***(Convergencia fuerte y débil* en sucesiones de funcionales):*** *(Kreyszig, 1991, Definición 4.9-4, p. 266) Sea* (f_n) *una sucesión de funcionales lineales acotados sobre un espacio normado* X*. Entonces:*

a) *Convergencia fuerte significa que existe* $f \in X'$ *tal que* $\|f_n - f\| \to 0$*. Esto se escribe como:*

$$f_n \to f$$

b) *Convergencia débil* de* (f_n) *significa que existe* $f \in X'$ *tal que* $f_n(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in X$*. Esto se escribe como:*

$$f_n \overset{w^*}{\to} f$$

- **Conclusión:**

En conclusión, la sesión dedicada al estudio de la convergencia de sucesiones, sucesiones de operadores y funcionales proporcionó una visión detallada y exhaustiva de estos conceptos fundamentales. La exposición liderada por el estudiante Herson Suárez destacó los resultados más relevantes, explorando minuciosamente las diversas manifestaciones de la convergencia y su aplicación en el análisis funcional. A través del análisis de la convergencia débil y fuerte, se profundizó en la comprensión de estos conceptos, demostrando su utilidad tanto en contextos teóricos como prácticos. Además, se discutió la relevancia de las secuencias de operadores y funcionales lineales acotados en la resolución de problemas concretos, como en el cálculo de variaciones y la teoría general de ecuaciones diferenciales. La presentación también introdujo el concepto de convergencia débil* en sucesiones de funcionales, ampliando así el espectro de herramientas disponibles para el análisis funcional. En resumen, la exposición proporcionó una visión integral de estos temas, subrayando su importancia en la investigación matemática y su aplicabilidad en una variedad de contextos.

4.3. Apéndice C. Protocolo de las sesiónes 5, 6 y 7

Seminario de Trabajo de Grado

Relator: Santiago José Delgado Benítez

Correlator: Herson Stiven Suárez Chávez

Documento: Bases de Schauder

Fecha: 02 Febrero 2024 - 05 Febrero 2024 - 14 Febrero 2024

Actividades a desarrollar:

- Exposición del documento
- Análisis del tema
- Conclusiones

Durante estas sesiones, se estudió el tema Bases de Schauder del libro *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*. La estudiante Yeny Moreno, quien estuvo a cargo de la exposición, presentó de manera detallada las generalidades relacionadas con las bases de Schauder. Durante su presentación, se destacaron los resultados más importantes sobre este tema, los cuales posteriormente fueron analizados minuciosamente.

- **Exposición del documento:**
  En el estudio de los espacios vectoriales es muy importante el concepto de base de Hamel; sin embargo, este concepto está ligado únicamente a la estructura vectorial del espacio y en el caso de los espacios de Banach tenemos una estructura más rica. Es importante notar, que, a diferencia de las bases de Hamel, no es cierto que todo espacio de Banach tenga una base de Schauder, dichas bases son definidas sobre los espacios de Banach y cuyo resultado expuesto anteriormente será uno de los principales que motivan la charla.

- **Análisis del tema:**

Como se ha expuesto, una base de Schauder es una generalización de la noción de base algebraica en el análisis funcional. La diferencia es que en una base de Schauder se pueden considerar combinaciones lineales infinitas de elementos, mientras que en una base algebraica solo finitas, además como comentario expuesto en la charla, *si un espacio tiene una base de Schauder entonces es numerable*. Esto nos hace introducir una de las definiciones más importantes en este capítulo expuesto:

Definición 4.3.1. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 6.1, p. 218) Una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *se llama una base de Schauder de* X *si para toda* $x \in X$ *existe una sucesión única de escalares* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$*, donde* $\mathbb{K}$ *puede ser* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0$$

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* X *que es una base de Schauder de la cerradura del espacio vectorial generado por* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, se llama una sucesión básica.*

Observación 4.3.2. *Si* $\mathcal{B}$ *es una base de Hamel infinita de un espacio de Banach* $\mathcal{X}$ *de dimensión infinita, entonces la base* $\mathcal{B}$ *no es numerable.*

Note que si $\mathcal{B}$ *es una base de Hamel infinita numerable, entonces* $\mathcal{B} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, donde* $x_n \in \mathcal{X}$*, considere*

$$M_n = \textit{span}\left\{\{x_i\}_{i=1}^{n}\right\},$$

Claramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subset \mathcal{X}$*. Veamos qué* $\mathcal{X} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$*, sea* $x \in \mathcal{X}$*, como* $\mathcal{B}$ *es una base de Hamel de* $\mathcal{X}$*, se tiene que para* $F \subset \mathbb{N}$ *finito, existe* $\alpha_j \in \mathbb{K}$ *tal que* $j \in F$*, donde* $\alpha_j \neq 0$ *para todo* $j \in F$*. Donde*

$$x = \sum_{j\in F} \alpha_j x_j,$$

Sea $k = \text{máx}\{j \mid j \in F\}$*. Así, se tiene que*

$$x \in M_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

y por ende $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$*. Note que por teorema 4.39 (Nathansky & de Buen, 1994),* $\mathcal{X}$ *al ser un espacio de Banach, entonces es un espacio de Baire, además* $M_n = \overline{M}_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, esto por la Proposición 4.25 (Nathansky & de Buen, 1994). Y por proposición 4.38 (f) (Nathansky & de Buen, 1994), existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $Y = int(\overline{M}_m) \neq \emptyset$*, luego, por lema 4.40 (Nathansky & de Buen, 1994), se tiene*

$$\mathcal{X} = Y = \overline{M}_m = M_m,$$

Así,

$$\infty = dim(\mathcal{X}) = dim(M_m) < +\infty,$$

llegando así a una contradicción.

Veamos que esta definición es considerablemente más amplia, ya que permite extender el concepto de base a otros espacios. Sin embargo, a pesar de su amplitud, carece de herramientas que nos permitan determinar o adquirir una base de Schauder en un espacio dado. Por consiguiente, el resultado presentado a continuación resulta fundamental, ya que proporciona criterios para establecer la existencia de una base en dicho espacio.

Teorema 4.3.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.10, p. 225) Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Entonces* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base de Schauder de* X *si y solo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

(1) $x_n \neq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

(2) *Existe* $M \geq 1$ *tal que para toda sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$*, si* $n < m$*,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_X \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|_X$$

.

(3) *El espacio vectorial cerrado generado por* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es* X.

A partir de este teorema se derivan dos resultados importantes, que son inmediatos considerando el teorema anterior. Estos resultados hacen referencia a las subsucesiones en espacios de Banach y a las bases de bloque.

Corolario 4.3.4. *(Nathansky & de Buen, 1994, Corolario 6.11, p. 227) Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión básica en un espacio de Banach* X. *Entonces toda subsucesión* $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es también una sucesión básica.*

A partir de una sucesión básica dada se pueden construir otras sucesiones básicas llamadas bases bloque.

Corolario 4.3.5. *(Nathansky & de Buen, 1994, Corolario 6.12, p. 227) Sean* X *un espacio de Banach y* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión básica en* X *con constante de base* K. *Sean* $0 = m_1 < m_2 < ...$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ *y* $u_j \neq 0$ *dada por*

$$u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i x_i$$

Entonces la sucesión $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica llamada base bloque de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *cuya constante de base es menor o igual a* K.

De manera análoga, podemos obtener una forma equivalente de verificar si una sucesión es una base en un espacio X, empleando el ínfimo mediante distancias. Esto implica que existirá una correspondencia entre las afirmaciones.

Teorema 4.3.6. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.14, p. 228) Una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *es una base de Schauder si y solo si*

(1) $x_n \neq 0$ *para toda* n,

(2) *existe una constante* $0 < K \leq 1$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$

$$\text{ínf}\{\|x - y\| : x \in S_n, y \in X_n\} = dist\,(S_n, X_n) \geq K$$

, donde $S_n = \{x \in [x_i]_{i=1}^{\infty} : \|x\| = 1\}$ *y* $X_n = [x_i]_{i=n+1}^{\infty}$*,*

(3) $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$*.*

- **Conclusión:**

En conclusión, el estudio sobre las bases de Schauder, como fue presentado por la estudiante Yeny Moreno, ofrece una comprensión profunda de los espacios de Banach y del análisis funcional. A través de las sesiones dedicadas a este tema, se destacaron las diferencias entre las bases de Hamel y las bases de Schauder, subrayando la importancia de estas últimas en la representación de combinaciones lineales infinitas de elementos. Los teoremas y corolarios derivados durante el análisis proporcionan criterios claros para determinar la existencia y la naturaleza de estas bases en los espacios de Banach. Además, la conexión entre la existencia de una base de Schauder y el uso del ínfimo mediante distancias revela una perspectiva profunda sobre la estructura de estos espacios. En suma, el estudio de las bases de Schauder no solo amplía nuestro entendimiento teórico, sino que también ofrece herramientas esenciales para el análisis y la caracterización de los espacios de Banach en el análisis funcional.

4.4. Apéndice D. Protocolo de las sesiónes 8 y 9

Seminario de Trabajo de Grado
Relator: Herson Stiven Suárez Chávez
Correlator: Santiago José Delgado Benítez
Documento: Bases reductoras y acotadamente completas
Fecha: 19 Febrero 2024 - 4 Marzo 2024
Actividades a desarrollar:

- Exposición del documento
- Análisis del tema
- Conclusiones

Durante estas sesiones, se estudió el tema Bases reductoras y acotadamente completas junto con Bases Incondicionales del libro *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach* (Nathansky & de Buen, 1994). La charla estuvo a cargo del estudiante Edgar Eduardo Mantilla quien expuso los resultados más importantes donde posteriormente se examinó a detalle cada uno de estos y donde, se hizo una profundización de los temas ligados a los tópicos principales de la exposición.

- **Exposición del documento:**

  La existencia de una base de Schauder en un espacio de Banach por si sola no nos da mucha información acerca de la estructura del espacio; sin embargo, si la base posee ciertas propiedades adicionales, podemos conocer más a fondo el espacio, por ejemplo, podemos saber si es reflexivo o si contiene como subespacio a alguno de los espacios l^p o c_0.

- **Análisis del tema:**

Nos planteamos primero la siguiente pregunta ¿Sera cierto que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base, entonces la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio dual de los funcionales biortogonales asociados a la base es también una base? La respuesta evidentemente es no, pues para que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ fuera una base en X^*, este espacio debería ser separable y esto no siempre es cierto. Si tomamos por ejemplo el espacio l^1 con la base canónica, su dual l^{∞} no es separable como se mostró en charlas anteriores. Sin embargo, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ siempre es una sucesión básica en X^*. A partir de esto se introduce el primer resultado:

Lema 4.4.1. *(Nathansky & de Buen, 1994, Lema 6.23, p. 241) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base en un espacio de Banach X con constante de base K. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, es una sucesión básica con constante de base menor o igual a K y las proyecciones asociadas a esta sucesión son $P_n^*|_{[x_n^*]_{n=1}^{\infty}}$, $n = 1, 2, \ldots$, donde P_n^* es el operador adjunto a la proyección P_n. Además, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, es decir si $K = 1$, se tiene que para $x^* \in X^*$,*

$$\|x^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^*\| = \sup_n \|P_n^* x^*\|$$

Aun si X es un espacio con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y X^* es separable, la sucesión $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene por qué ser una base de X^*. Como veremos a continuación en un ejemplo planteado en la charla:

Ejemplo 4.4.2. *Consideremos el espacio c_0 con la base sumante $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, definida como $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} e_n$ donde e_n es la base canónica de c_0, cuyo dual de c_0 es el espacio l^1 que es separable. Es fácil ver qué $\xi_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$, donde $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a la base canónica de c_0. Como vimos en un ejemplo anterior $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de l^1. Por lo tanto, ξ_n^* es el elemento $(0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, -1, 0, ...) \in l^1$ y su norma es 2.*

Veremos qué $e_1^* \notin [\xi_n^*]_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $e_1^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^*$. Entonces $1 = e_1^*(e_1) = a_1$ y si $n > 1$

$$0 = e_1^*(e_n) = a_n - a_{n-1}$$

Donde $a_n = 1$ para $n = 1, 2, ...$; pero por el lema 6.2 (Nathansky & de Buen, 1994), la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ debería converger a 0. Hemos demostrado así que $\{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ no es base de l^1.

El teorema siguiente nos da una condición necesaria y suficiente para que la sucesión básica $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ sea una base para X^*.

Teorema 4.4.3. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.24, p. 244) Sea X un espacio de Banach con una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^* si y solo si para cada $x^* \in X^*$*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}\| = 0$$

Si una base satisface la condición anterior, se le llama base reductora.

Se puede uno plantear ahora la pregunta al revés, ¿cuándo una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a una base? Desde luego para que esto sea posible se necesita que X sea el espacio dual de algún espacio de Banach.

Teorema 4.4.4. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.25, p. 245) Si X es un espacio de Banach con una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:*

Siempre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ es tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\} < \infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ también converge, entonces X es isomorfo al dual del espacio $[x_n^*]_{n=1}^{\infty} \subset X^*$

A una base que cumple la propiedad anterior se le llama base acotadamente completa.

Ejemplo 4.4.5. *La base canónica en c_0 no es acotadamente completa, ya que por ejemplo,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m} e_i\right\|_{c_0}\right\} = 1,$$

pero esta serie no converge en c_0, pues la sucesión $(1, 1, 1, ...)$ no pertenece al espacio. Sin embargo, es fácil ver que la base canónica de l^p para $1 \leq p < \infty$ sı es acotadamente completa.

Combinando los conceptos de base acotadamente completa y reductora obtenemos finalmente la siguiente caracterización de los espacios reflexivos con base:

Teorema 4.4.6. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.27, p. 249) Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y solo si la base es a la vez reductora y acotadamente completa.*

Ejemplo 4.4.7. *Como ya sabemos que los espacios l^p con $1 < p < \infty$ son reflexivos, el teorema anterior nos dice que la base canónica y cualquier otra base en estos espacios es a la vez reductora y acotadamente completa.*

Existe otro tipo de bases que permiten conocer más a fondo a los espacios que las poseen, **las bases incondicionales**. Este concepto está muy ligado al de series incondicionalmente convergentes en un espacio de Banach, que detallaremos a continuación:

Definición 4.4.8. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 6.28, p. 250) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente, si para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge.*

Además, se tienen las siguientes equivalencias en las posteriores afirmaciones:

Proposición 4.4.9. *(Nathansky & de Buen, 1994, Proposición 6.29, p. 251) Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1). *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

(ii). *Para* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* N *tal que* $\left\| \sum_{i \in \sigma} x_i \right\| < \varepsilon$ *para todo conjunto finito* $\sigma \subset \mathbb{N}$ *con* $\min\{i \in \sigma\} > N$*.*

(iii). *La serie* $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ *converge para cualquier sucesión de naturales* $n_1 < n_2 < \cdots$*.*

(iv). *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ *converge para cualquier sucesión* $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *con* $\theta_n = \pm 1$ *para* $n = 1, 2, \ldots$*.*

A partir de lo anterior y sin más preámbulos daremos la definición de base incondicional.

Definición 4.4.10. *(Nathansky & de Buen, 1994, Definición 6.31, p. 253) Una base* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *se llama base incondicional, si para toda* $x \in X$ *su expansión* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *en términos de la base, converge incondicionalmente.*

De la proposición anterior se deducen las siguientes afirmaciones equivalente de base incondicional.

Teorema 4.4.11. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.32, p. 253) Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión básica en un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica incondicional.*

(ii). *Para todo subconjunto* σ *de* $\mathbb{N}$ *la convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *implica la convergencia de* $\sum_{i \in \sigma} a_i x_i$*.*

(iii). *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ *converge para toda sucesión* $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$*, donde* $\theta_n = \pm 1$ *para* $n = 1, 2, \ldots$*.*

(iv). *Si* $|b_n| \leq |a_n|$ *para toda* n*, la convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *implica la convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$*.*

Intuitivamente es claro que una base seminormalizada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debería ser equivalente a la base normalizada $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Aunque esto es cierto, la prueba es bastante engorrosa. Sin embargo, cuando la base es incondicional la demostración es muy sencilla como se muestra a continuación.

Lema 4.4.12. *(Nathansky & de Buen, 1994, Lema 6.35, p. 256)*

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base incondicional seminormalizada en un espacio de Banach* X*, entonces* $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base equivalente a* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

Como resultados finales se tiene que:

Teorema 4.4.13. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.36, p. 257) Sea* X *un espacio de Banach con una base incondicional* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Entonces* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es reductora si y solo si* X *no tiene ningún subespacio cerrado isomorfo a* l^1*, es decir si y solo si no existe ningún operador lineal acotado biyectivo entre un subespacio cerrado de* X *y* l^1*.*

Tenemos también el correspondiente teorema dual para bases acotadamente completas y c_0:

Teorema 4.4.14. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.37, p. 260)*

Sea X *un espacio de Banach con base incondicional* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Entonces, si* X *no contiene un subespacio cerrado isomorfo a* c_0*,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotadamente completa.*

Los dos teoremas anteriores tienen como consecuencia el siguiente resultado, debido también a James, que caracteriza a los espacios reflexivos con base incondicional.

Teorema 4.4.15. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.38, p. 261) Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y solo si no contiene ningún subespacio cerrado isomorfo a l^1 ni a c_0.*

- **Conclusión:**

En conclusión, las sesiones dedicadas al estudio de las bases reductoras y acotadamente completas, así como las bases incondicionales, han proporcionado una visión profunda y detallada de la estructura de los espacios de Banach. A través de la exposición realizada por el estudiante Edgar Eduardo Mantilla, se han destacado resultados fundamentales y se han explorado conexiones importantes entre las propiedades de las bases y las características de los espacios en los que residen.

Se ha demostrado que la existencia de una base de Schauder en un espacio de Banach no proporciona, por sí sola, información exhaustiva sobre la estructura del espacio, pero si la base posee propiedades adicionales, como ser reductora y acotadamente completa, o incondicional, podemos obtener un entendimiento más profundo de dicho espacio.A través de ejemplos y resultados teóricos, se ha explorado la relación entre las bases y los espacios duales, revelando condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de funcionales biortogonales constituya una base del dual de un espacio de Banach.

El estudio detallado de las bases reductoras y acotadamente completas ha conducido a la caracterización de los espacios reflexivos con base, proporcionando una comprensión más clara de esta importante clase de espacios.Además, se ha introducido el concepto de bases incondicionales, revelando su estrecha relación con las series incondicionalmente convergentes en espacios de Banach. A través de resultados fundamentales y teoremas importantes, se ha profundizado en la comprensión de las bases incondicionales y su impacto en la estructura de los espacios de Banach.

4.5. Apéndice E. Protocolo de las sesiónes 10 y 11

Seminario de Trabajo de Grado

Relator: Edgar Eduardo Mantilla

Correlator: Yeny Paola Moreno

Documento: Espacio de James $\mathcal{J}$ y sus principales propiedades

Fecha: 18 Marzo 2024 - 1 Abril 2024

Actividades para desarrollar:

- Exposición del documento
- Análisis del tema
- Conclusiones

Durante estas últimas dos sesiones, se estudió el tema *Espacio de James* junto con sus principales resultados del libro *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*. La charla estuvo a cargo de los estudiantes Herson Stiven Suárez Chávez y Santiago José Delgado Benítez quienes expusieron los resultados más importantes acerca del espacio de *James* donde posteriormente se examinó a detalle y con rigurosidad cada uno de estos, además, se hizo una profundización de los temas ligados a los tópicos principales de la exposición.

- **Exposición del documento:**

  El *Espacio de James* es de prioridad importancia en el estudio de los artículos sometidos en el seminario, pues representa un ejemplo de un espacio no reflexivo, el cual es isométrico a su doble dual $\mathcal{J}^{**}$. A partir de su descubrimiento en la década de *1950* se han construido espacios similares que llevan por nombre *cuasireflexivos*, además, se expone la propiedades principales de este espacio relacionados a la monotonicidad, bases reductoras, bases incondicionales vistas y demostradas rigurosamente en la charla inmediatamente anterior.

- **Análisis del tema:**

  Este espacio apareció en un trabajo de R.C. James en 1950 como un contraejemplo a una pregunta de S. Banach. Desde ese entonces para acá, el espacio de James ha probado ser una de las fuentes más ricas de contraejemplos para varios de los problemas que han ocupado a los expertos en espacios de Banach. Se hablará de la propiedad esencial de $\mathcal{J}$ sin profundizar en otros temas más complejos. Veremos que el espacio de James es isométrico a su doble dual pero no es reflexivo, debido a que tiene codimension 1 en $\mathcal{J}^{**}$.

  Definición 4.5.1. *(Albiac & Kalton, 2006, Definition 3.4.1) El espacio de James $\mathcal{J}$ es el espacio de las sucesiones reales $x = (a_1, a_2, ...)$, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y cuya norma viene dada por:*

  $$\|x\|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 + (a_{p_{n+1}} - a_{p_1})^2 \right) \right\}^{1/2} < \infty,$$

  donde el supremo se toma sobre todos los posibles valores de n y sobre todas las posibilidades de sucesiones finitas $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_{n+1}$ de números naturales.

  La definición de la norma en el espacio de James no es del todo natural; claramente, la norma es equivalente a la norma alternativa dada por la fórmula

  $$\|x\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{p_{i+1}} - a_{p_i})^2 \right)^{1/2} \right\}$$

  donde, de nuevo, el supremo se toma sobre todas las secuencias de números enteros $\{p_j\}_{j=1}^{n+1}$. De hecho se tiene que:

  $$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_0 \leq \|x\|_{\mathcal{J}} \leq \sqrt{2}\|x\|_0 \ , \qquad x \in \mathcal{J}$$

  Note que, $\|e_n\|_{\mathcal{J}} = 1$ para toda n y además $\|e_n\|_0 = \sqrt{2}$ para $n \geq 2$.

  Teorema 4.5.2. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.2, p. 63) La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios estándar es una base monótona para $\mathcal{J}$ (con ambas* *normas $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ y $\|\cdot\|_0$).*

Teorema 4.5.3. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.3, p. 63) Sea $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques normalizada con respecto a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_0)$. Entonces, para cualquier sucesión de escalares $(\lambda_k)_{k=1}^{n}$ se mantiene la siguiente desigualdad:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \right\|_0 \leq \sqrt{5} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 4.5.4. *(Albiac & Kalton, 2006, Proposición 3.4.4, p. 64) La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios estándar es una base reductora para $\mathcal{J}$ (con ambas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ y $\|\cdot\|_0$).*

El siguiente teorema constituye una pieza central, ya que proporciona la propiedad de que $\mathcal{J}$ es isométrico a su doble dual, aunque no es igual a su doble dual debido a que tiene codimensión 1 en $\mathcal{J}^{**}$. No obstante, el espacio de James fue el primero en poseer esta propiedad.

Teorema 4.5.5. *(Nathansky & de Buen, 1994, Teorema 6.64, p. 294) El espacio $\mathcal{J}$ es isométrico a $\mathcal{J}^{**}$ y es cuasirreflexivo de orden 1, es decir el espacio $j(\mathcal{J})$, donde j es la inyección canónica de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}^{**}$, tiene codimensión 1 .*

Lema 4.5.6. *(Nathansky & de Buen, 1994, Lema 6.65, p. 296) $\mathcal{J}$ no contiene ni a c_0 ni a ℓ^1 y por esto la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es incondicional. Es más, $\mathcal{J}$ no tiene ninguna base incondicional.*

- **Conclusión:**

Durante el Seminario, los estudiantes Herson Stiven Suárez Chávez y Santiago José Delgado Benítez presentaron un análisis exhaustivo sobre el *Espacio de James* y sus propiedades fundamentales. Desde su definición hasta resultados clave, como su relación con su doble dual y su propiedad de cuasirreflexividad de orden 1, se exploraron en detalle, destacando su importancia en el análisis funcional y la teoría de espacios de Banach. Además, se profundizó en aspectos como las bases monótonas y reductoras, subrayando el papel crucial del Espacio de James como fuente de contraejemplos y su influencia en el desarrollo de nuevos enfoques en matemáticas. El Seminario proporcionó una plataforma para la comprensión avanzada del Espacio de James, enriqueciendo la formación académica de los participantes y fomentando el debate intelectual en el campo del análisis funcional.