

**NUEVA PARAMETRIZACIÓN FÍSICA DE UNA SOLUCIÓN EXACTA
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN QUE GENERALIZA LA
SOLUCIÓN DE KERR**

**FABIO DUVÁN LORA CLAVIJO
CÉSAR ALONSO VALENZUELA TOLEDO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005**

**NUEVA PARAMETRIZACIÓN FÍSICA DE UNA SOLUCIÓN EXACTA
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN QUE GENERALIZA LA
SOLUCIÓN DE KERR**

**FABIO DUVÁN LORA CLAVIJO
CÉSAR ALONSO VALENZUELA TOLEDO**

Trabajo de grado para optar al título de físico

Director
Dr. JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005**

*A la memoria de mi abuelo,
José Rafael Clavijo Peralta.*

*A mi madre,
Eugenia Clavijo Torres.*

*A mi hermana,
Dunia Judith Lora Clavijo.*

*A mi novia,
Diana Maria Higuera Serrano.*

*A mis amigos de toda la vida,
German, Tavo, Erico y Herry.*

Fabio Duvan Lora Clavijo

*A la memoria de mi abuelo,
Juan Evangelista Valenzuela Castellanos.*

*A mi madre,
Hilda Toledo Martinez.*

*A mi padre,
Juan Manuel Valenzuela Ramirez.*

*A mis hermanos,
Andrea, Juan y Ferney.*

A Carito y a mi Futuro hijo.

César Alonso Valenzuela Toledo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos:

A nuestras familias.

A los profesores de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander. De manera especial:

Al Dr. José David Sanabria Gómez, director del trabajo.

Al Dr. Guillermo González, director del Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) de la Universidad Industrial de Santander.

Al Dr. Valeri Dougar Jabon.

Al Msc. Milton Florez.

A todos los integrantes del GIRG.

A nuestro grupo particular de estudio: Paolo Andrés Ospina, Carlos Eliecer Estupiñan y Fernando Andrés Quiñonéz.

TÍTULO : NUEVA PARAMETRIZACIÓN FÍSICA DE UNA SOLUCIÓN EXACTA DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN QUE GENERALIZA LA SOLUCIÓN DE KERR *.

AUTORES : LORA CLAVIJO, Fabio Duvan y VALENZUELA TOLEDO, César Alonso **.

PALABRAS CLAVES : Potencial de Ernst, Momentos multipolares, Estrellas de neutrones, Soluciones exactas en relatividad general

DESCRIPCIÓN : Se particulariza al caso 3-solitónico de vacío, la solución exacta de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, calculada por Manko et al, en su trabajo titulado *Solución extendida N-solitónica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell*. A partir de esta particularización se obtiene una nueva parametrización física del potencial de Ernst, que generaliza la solución de Kerr.

Esta nueva solución contiene cuatro parámetros reales arbitrarios de importancia astrofísica, correspondientes a la masa, momento angular, cuadrupolo de masa y octupolo de momento angular; además tiene simetría ecuatorial y es asintóticamente plana.

Para la construcción de la solución el trabajo se ha dividido de la siguiente manera: en el primer capítulo se hace una corta revisión de los momentos multipolares y la expansión multipolar en relatividad general, además se construye una nueva parametrización física del potencial gravitacional de Ernst sobre el eje de simetría, se realiza la expansión multipolar de este potencial y se comprueba que tiene las propiedades físicas deseadas; en el segundo capítulo se ajustan numéricamente los primeros cuatro momentos multipolares de la solución analítica exterior, con los datos obtenidos por diversas soluciones numéricas interiores que representan estrellas de neutrones rápidamente rotantes; un tercer capítulo está dedicado al estudio del método de Sibgatullin y al cálculo general de la solución. Como conclusión del trabajo se presenta una solución analítica exterior ajustada numéricamente con datos de soluciones interiores, habilitada para describir el campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones rápidamente rotante.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TÍTULO : NEW PHYSICAL PARAMETRIZATION OF A EXACT SOLUTION OF THE EINSTEIN EQUATIONS THAT GENERALIZE THE KERR SOLUTION *.

AUTORES : LORA CLAVIJO, Fabio Duvan and VALENZUELA TOLEDO, César Alonso **.

KEY WORDS : Erns's potential, Multipolar moments Neutron stars, Exact solution in general relativity.

DESCRIPTION : In this work we consider the 3-solitonic case of the Manko et al, solution of the vacuum Einstein equations. With this particularization we obtain a new physical parametrization of the Ernst potential, that generalize the Kerr solution.

This new solution contains four real arbitraries parameters of astrophysical importance, corresponding to the mass, angular moment, quadrupole of mass and octupole of angular moment. the solution is asintotically flat and it has equatorial symmetry.

The work is structured as follows: in the first chapter we make a short revision of the multipolar moments and the multipolar expansion in general relativity; we also construct a new physical parametrization of the Ernst's potential on the axis of symmetry having the physical properties desired. In the second chapter we match the first four multipolar moments numerically of the analytic exterior solution with the dates obtained for different numerical interior solutions that represent rapidly rotating neutron stars. A third chapter is dedicated to the study the Sibgatullin's method in order to get the analytic solution, that represent the exterior field gravitational of a rotating body with important physical properties. As conclusion, we claim that the analytical solution matched numerically is suitable to describe the exterior field of a rapidly neutron star.

*Work of Degree.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1. POTENCIAL DE ERNST | 4 |
| 1.1. INTRODUCCIÓN | 4 |
| 1.2. MOMENTOS MULTIPOLARES Y EXPANSIÓN MULTIPOLAR EN RELATIVIDAD GENERAL | 4 |
| 1.3. NUEVA PARAMETRIZACIÓN DEL POTENCIAL GRAVITACIONAL DE ERNST SOBRE EL EJE DE SIMETRÍA | 6 |
| 1.3.1. Propiedades físicas | 7 |
| 1.3.2. Expansión multipolar del nuevo potencial $e(z)$ | 9 |
| 2. AJUSTE DEL POTENCIAL DE ERNST CON DATOS NUMÉRI- COS DE SOLUCIONES INTERIORES | 10 |
| 2.1. INTRODUCCIÓN | 10 |
| 2.2. ECUACIONES DE ESTADO Y ESTRELLAS DE NEUTRONES | 10 |
| 2.3. AJUSTE NUMÉRICO | 11 |
| 3. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN EXACTA | 19 |
| 3.1. INTRODUCCIÓN | 19 |
| 3.2. FORMALISMO DE ERNST | 19 |
| 3.3. MÉTODO DE SIBGATULLIN | 20 |
| 3.4. CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN | 21 |

| | |
|--|-----------|
| 3.4.1. Cálculo del potencial de Ernst | 22 |
| 3.4.2. Cálculo de las funciones métricas | 23 |
| CONCLUSIONES | 26 |
| REFERENCIAS | 27 |

LISTA DE TABLAS

| | | |
|------|---|----|
| 2.1. | Ecuaciones de estado realistas para estrellas de neutrones. | 11 |
| 2.2. | Características físicas de los estrellas de neutrones. | 12 |
| 2.3. | Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado A. | 14 |
| 2.4. | Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado AU. | 15 |
| 2.5. | Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado FPS. | 16 |
| 2.6. | Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado L. | 17 |
| 2.7. | Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado APRb. | 18 |

INTRODUCCIÓN

El estudio de la interacción gravitacional es de gran importancia en astronomía y astrofísica, debido a que con ella se puede determinar el comportamiento de los diferentes objetos estelares. Por ejemplo, se puede analizar el movimiento de los planetas alrededor del sol, los discos de acreción en torno a estrellas de neutrones, agujeros negros y otras fuentes de campos gravitatorios intensos; el movimiento general de las estrellas, las galaxias, etc. Un problema común en el estudio de estos objetos, corresponde a buscar modelos matemáticos que se ajusten correctamente a los datos experimentales o a los datos obtenidos mediante cálculos o simulaciones numéricas. Dentro de los objetos a estudiar se encuentran algunos en particular, como agujeros negros, estrellas de neutrones, enanas blancas, etc, que son objetos masivos y crean campos gravitacionales y electromagnéticos intensos. En estos casos, la teoría de gravitación mas utilizada por su validez experimental, y que describe satisfactoriamente las propiedades físicas de estos objetos, fue formulada por Einstein en 1915. La teoría de la relatividad general o simplemente teoría de gravitación de Einstein, brinda un tratamiento detallado de la gravitación en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acoplado de segundo orden, conocido normalmente como sistema de ecuaciones de Einstein. Resolver este sistema de ecuaciones representa una gran dificultad; por esta razón, hoy existen técnicas que permiten encontrar nuevas soluciones, las cuales, pueden describir el campo gravitacional exterior de un determinado objeto.

El descubrimiento realizado por Geroch de un grupo de simetrías internas de las ecuaciones de Einstein con un número infinito de parámetros, fue el punto inicial para el desarrollo de las técnicas modernas de generación de soluciones. Este desarrollo se realizó con la intervención de varios investigadores que utilizaron métodos diferentes para la construcción de soluciones; algunos de estos métodos son: método de teoría de grupos, técnica de dispersion inversa, transformaciones de Bäcklund y método de ecuaciones integrales . Estas técnicas dan la posibilidad de generar soluciones con un número arbitrario de parámetros y pueden ser utilizados exitosamente para obtener nuevas métricas estacionarias de vacío. Algunos resultados obtenidos por estos métodos son: La solución solitónica de vacío de Belinskii y Zakharov [3], la familia HKX (Hoenselaers-Kinnersley-Xanthopoulos) de espacios-tiempos estacionarios [10] y la solución de Kerr doble de Kramer y Neugebauer [21] . Al mismo tiempo, para el caso de electrovacío los procedimientos de generación condujeron a resultados restringidos, ya que sólo admitían la construcción de soluciones que representaban los campos de objetos super-extremos (pares de raíces complejas conjugadas).

Las ecuaciones de Einstein fueron reformuladas en 1968 por Ernst [5] en términos de

una función compleja \mathcal{E} , la cual tiene forma simple en el caso de soluciones axialmente simétricas conocidas. Este nuevo formalismo proporciona una derivación unificada de las soluciones descubiertas por Weyl y Papapetrou.

Un método que permite construir el potencial \mathcal{E} es el método de Sibgatullin [20]. Este es un método integral que utiliza el procedimiento de continuación analítica de Riemann-Hilbert para calcular el potencial $\mathcal{E}(\rho, z)$ en todo el plano complejo a partir de su comportamiento sobre el eje de simetría $\mathcal{E}(\rho = 0, z)$.

Mediante el método de Sibgatullin se han logrado obtener importantes resultados, entre los cuales se encuentran: Construcción de la solución de Kerr-Newman a partir del espacio de Minkowski; generalizaciones asintóticamente planas, estacionarias y magnetizadas de las soluciones de Schwarzschild y de Kerr [14]; solución extendida 2N-solitónica de electrovacío que permite describir N agujeros negros de Kerr-Newman alineados [15]; soluciones de electrovacío en funciones racionales con aplicaciones astrofísicas [17]; solución analítica del problema de equilibrio para la métrica doble-Kerr y teorema de no existencia del balance gravitacional de dos agujeros negros de Kerr con masas positivas [18, 16]; configuraciones de equilibrio en sistemas de tres y más cuerpos; interpretación y generación de soluciones aproximadas [19].

Una de las ventajas que posee este método radica en que es posible conocer previamente las principales características físicas del objeto a modelar, es decir, se puede de antemano ajustar ciertos parámetros para obtener una solución dada. En el presente trabajo se obtiene una nueva parametrización física de una solución exacta del sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío. Para ello se ha dividido el trabajo de la siguiente forma: en el primer capítulo se hace una corta revisión de los momentos multipolares en relatividad general y se construye una nueva parametrización física del potencial gravitacional de Ernst sobre el eje de simetría $\mathcal{E}(\rho = 0, z)$; en el segundo capítulo se ajustan numéricamente los primeros cuatro momentos multipolares de la solución, con los datos numéricos de soluciones interiores conocidas; un tercer capítulo está dedicado al cálculo general de la solución y se finaliza el trabajo analizando los resultados obtenidos.

1 POTENCIAL DE ERNST

1.1 INTRODUCCIÓN

La obtención de nuevas soluciones exactas del sistema de ecuaciones Einstein en el vacío, utilizando el método de Sibgatullin, se fundamenta inicialmente en una adecuada elección del potencial gravitacional de Ernst sobre el eje de simetría, ya que a partir de este se construye la solución y se estudian algunas de sus principales propiedades físicas. En el presente capítulo se hace una corta revisión de la expansión multipolar y los momentos multipolares en relatividad general. Además, se calcula el potencial de Ernst sobre el eje de simetría y se estudia su estructura multipolar.

1.2 MOMENTOS MULTIPOLARES Y EXPANSIÓN MULTIPOLAR EN RELATIVIDAD GENERAL

En física clásica, los campos generados por distribuciones de carga o masa, pueden ser representados como una expansión en series en términos de los armónicos esféricos, este procedimiento se conoce como expansión multipolar y los coeficientes de dicha expansión son llamados momentos multipolares. Físicamente quiere decir que el campo producido por una fuente aislada, se puede ver como la superposición de campos generados por configuraciones de fuentes mas sencillas. En relatividad general también es posible realizar este procedimiento, introducido inicialmente por Geroch [7] en 1970, quien dio una definición de momentos multipolares para campos gravitacionales estáticos. Esta definición fue generalizada por Hansen [8] en 1974 para incluir campos estacionarios, mas tarde Hoenselaers [9] en 1976 halló los momentos para el caso electrostático. Finalmente Simon [27] , en 1983 generalizó una definición para incluir soluciones estacionarias, asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell; es decir, para el caso de electrovacío. Estudiando los momentos multipolares se pueden observar algunas propiedades importantes de las soluciones de vacío, estacionarias y estáticas axialmente simétricas: un espacio tiempo estacionario es estático, si y solo si, todos los momentos angulares se anulan [26]; una métrica estática es plana, si y solo si, todos sus momentos multipolares de masa se anulan [26]; una métrica estacionaria es axialmente simétrica, si y solo si, todos sus momentos multipolares son axialmente simétricos [26]; dos métricas con los mismos momentos multipolares tienen la misma geometría a grandes distancias de la fuente [26]; una solución de vacío, estacionar-

ia, axialmente simétrica, asintóticamente plana, de las ecuaciones de Einstein, tiende a la solución de Kerr, asintóticamente [26]; una solución de vacío, estática, axialmente simétrica, asintóticamente plana, tiende a la solución de Schwarzschild, asintóticamente [26].

El cálculo de los momentos multipolares brinda información del contenido físico de las diferentes soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein, por ejemplo, la masa del objeto, el momento angular, el cuadripolo de masa y el octupolo de momento angular entre otros. Por estas razones se han planteado formas simplificadas para el cálculo de los momentos multipolares. En 1989 Fodor-Hoenselaers-Perjés [6], desarrollaron un algoritmo para calcular los momentos multipolares de Hansen y Geroch. En 1990 Hoenselaers-Perjés [11], desarrollaron un procedimiento similar para calcular los momentos multipolares de Simon.

En el presente trabajo se utiliza el método de Fodor-Hoenselaers-Perjés para el calcular los momentos multipolares, teniendo en cuenta que la solución no incluye campo electromagnético. El procedimiento para el cálculo consiste en lo siguiente. Se define

$$\mathcal{E}(z, \rho = 0) = e(z),$$

como el potencial gravitacional de Ernst sobre el eje de simetría, en las coordenadas cilíndricas de Weyl y se considera el potencial complejo $\xi(z, \rho)$, que está dado en términos del potencial de Ernsts \mathcal{E} por la expresión

$$\xi(z, \rho) = \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}}. \quad (1.1)$$

Ahora, sobre el eje de simetría $\rho = 0$ se define el “punto infinito” $\Lambda = 0$ como el límite cuando $z \rightarrow \infty$, o introduciendo una nueva variable $\hat{z} = \frac{1}{z}$ como el límite $\hat{z} \rightarrow 0$, entonces se toma un nuevo potencial transformado de la siguiente manera:

$$\hat{\xi}(\hat{z}, 0) = \frac{1}{\hat{z}} \xi(\hat{z}, 0), \quad (1.2)$$

es decir,

$$\hat{\xi}(\hat{z}, 0) = \frac{1}{\hat{z}} * \frac{1 - e(\hat{z})}{1 + e(\hat{z})}. \quad (1.3)$$

Los momentos multipolares gravitacionales de Hansen y Geroch [7, 8] de las soluciones estáticas y estacionarias de vacío, se definen de la siguiente manera:

$$P_n = m_n + d_n(m_{n-1}, \dots, m_0) \quad (1.4)$$

$$M_n = \mathbf{Re}[P_n], \quad (1.5)$$

$$J_n = \mathbf{Im}[P_n], \quad (1.6)$$

$$m_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \hat{\xi}(\hat{z}, \rho = 0)}{d\hat{z}^n} \right|_{\hat{z}=0}, \quad (1.7)$$

donde m_n representa los coeficientes de la expansión en series de Taylor del potencial $\hat{\xi}(\hat{z}, 0)$. El término adicional d_n se anula para $n < 4$. Para $n \geq 4$ d_n puede ser calculado usando la definición original [6], sin embargo, algunos valores de d_n se conocen

explícitamente:

$$\begin{aligned}
 d_0 &= d_1 = d_2 = d_3 = 0, \\
 d_4 &= \frac{1}{7} \bar{m}_0 (m_1^2 - m_2 m_0), \\
 d_5 &= \frac{1}{3} \bar{m}_0 (m_2 m_1 - m_3 m_0) + \frac{1}{21} \bar{m}_1 (m_1^2 - m_2 m_0), \\
 d_6 &= \frac{2}{7} \bar{m}_0 (4m_2^2 + 5m_3 m_1 - 9m_4 m_0) + \frac{4}{33} \bar{m}_1 (m_2 m_1 - m_3 m_0) \\
 &\quad + \frac{1}{231} (5\bar{m}_2 - 7\bar{m}_0^2) (m_1^2 - m_2 m_0),
 \end{aligned}$$

donde la barra denota conjugación compleja.

Los momentos gravitacionales M_n y J_n representan los multipolos de masa y momento angular respectivamente. Como se puede ver de las expresiones anteriores el cálculo de los momentos multipolares se reduce al cálculo de las cantidades m_n .

1.3 NUEVA PARAMETRIZACIÓN DEL POTENCIAL GRAVITACIONAL DE ERNST SOBRE EL EJE DE SIMETRÍA

El método de Sibgatullin, es un método integral que permite construir nuevas soluciones exactas del sistema de ecuaciones de Einstein a partir del conocimiento del potencial $e(z)$. Una característica importante de este método, consiste en que es posible conocer de antemano las principales características físicas de la solución que se va a construir. En este trabajo se obtiene una solución de vacío, que modela el campo gravitacional exterior de una fuente rotante y que generaliza la solución de Kerr, además tiene las siguientes características: simetría ecuatorial, planitud asintótica del campo gravitacional, cuadripolo de masa y octupolo de momento angular arbitrarios. Estas propiedades se pueden observar al realizar la expansión multipolar del potencial de Ernst sobre el eje de simetría.

Inicialmente se propone el potencial de Ernst $e(z)$ en la forma

$$e(z) = 1 + \sum_{l=1}^3 \frac{e_l}{z - \beta_l}, \tag{1.8}$$

donde los e_i y los β_i , son en general parámetros complejos que pueden ser escogidos adecuadamente, de tal forma que se obtenga una solución que pueda ser interpretada desde un punto de vista físico. Este potencial es un caso particular del propuesto por Manko et al, en su trabajo titulado “*Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations*” [15]. En este trabajo ellos construyeron la solución asumiendo el potencial sobre el eje de simetría de la siguiente manera

$$e(z) = 1 + \sum_{l=1}^n \frac{e_l}{z - \beta_l}.$$

Sin embargo, en este trabajo se construirá una particularización de esta solución, involucrando cuatro parámetros arbitrarios de interés físico. Para obtener esta solución se hace la parametrización física del potencial $e(z)$ de (1.8), tomando la forma simple

$$e(z) = \frac{mz^3 - mz^2(m + ia) - bz + ih}{mz^3 + mz^2(m - ia) - bz + ih}, \quad (1.9)$$

que se construye imponiendo condiciones de simetría y condiciones sobre la estructura multipolar del potencial. Esta parametrización física del potencial $e(z)$, generaliza la solución de Kerr, esto se puede verificar fácilmente haciendo las constantes b y h iguales a cero, con lo cual se obtiene

$$e(z) = \frac{z - m - ia}{z + m - ia},$$

que es el potencial de Ernst sobre el eje de simetría de la solución de Kerr.

Escribiendo (1.9) en la forma racional (1.8), se encuentran los valores para las constantes e_l y β_l ($l = 1, 2, 3$), en función de las constantes arbitrarias m, a, b y h :

$$\beta_1 = \frac{1}{6} \left[2(ia - m) + \frac{2^{4/3}(3b - m(a + im)^2)}{R} + \frac{2^{2/3}R}{m} \right], \quad (1.10)$$

$$\beta_2 = \frac{i}{12} \left[4(a + im) - \frac{2^{4/3}(\sqrt{3} - i)(3b - m(a + im)^2)}{R} + \frac{2^{2/3}(i + \sqrt{3})R}{m} \right], \quad (1.11)$$

$$\beta_3 = \frac{i}{12} \left[4(a + im) + \frac{2^{4/3}(\sqrt{3} + i)(3b - m(a + im)^2)}{R} - \frac{2^{2/3}(\sqrt{3} - i)R}{m} \right], \quad (1.12)$$

$$e_1 = -\frac{2m\beta_1^2}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)}, \quad (1.13)$$

$$e_2 = \frac{2m\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_3)}, \quad (1.14)$$

$$e_3 = -\frac{2m\beta_3^2}{(\beta_1 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_3)}, \quad (1.15)$$

$$R = (W + \Gamma)^{1/3},$$

$$\Gamma = \sqrt{27m^3\{18bhm(a + im) + b^2m(a + im)^2 - hm[27h + 4m(a + im)^3] - 4b^3\}},$$

$$W = m^2\left\{-27ih + (m - ia)[-9b + 2m(a + im)^2]\right\}.$$

Escribir el potencial $e(z)$ de (1.9) en forma racional es muy importante, ya que la solución final se construye a partir del potencial (1.8), como se verá en el capítulo 3.

1.3.1. Propiedades físicas

La simetría ecuatorial es una propiedad del campo gravitacional, que implica que este tiene simetría de reflexión respecto a un eje ubicado en el ecuador del objeto que

produce el campo. En física clásica la simetría de reflexión, se observa estudiando el comportamiento de una función cuando una de sus coordenadas cambia de signo, sin embargo, este procedimiento presenta una dependencia del sistema coordenado. En relatividad lo que se busca es evitar la dependencia de las coordenadas, cuando se estudian propiedades físicas de algún sistema en particular. Para comprobar si una solución de las ecuaciones de Einstein tiene simetría ecuatorial, se observa la forma de los momentos multipolares, ya que estos son independientes de las coordenadas. Así, si una solución tiene esta propiedad, implica la siguiente restricción sobre sus momentos multipolares

$$\begin{aligned} M_1 = M_3 = M_5 = M_7 = \dots &= 0, \\ J_0 = J_2 = J_4 = J_6 = J_8 = \dots &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

esto es una consecuencia directa de la siguiente imposición al potencial de Ernst sobre el eje de simetría [12]

$$e(z) = \frac{1}{\tilde{e}(-z)}, \quad (1.17)$$

por convención se emplea $\tilde{e}(z) \equiv \overline{e(\bar{z})}$, con la barra significando conjugación compleja.

Como un ejemplo de lo anterior se estudia una métrica con simetría ecuatorial: la métrica de Kerr, para la cual tenemos

$$e(z) = \frac{z - m - ia}{z + m - ia}.$$

Claramente se ve que esta forma del potencial de $e(z)$ cumple con la relación (1.17). Los momentos multipolares de la métrica de Kerr se pueden escribir de la siguiente manera

$$P_n = (ia)^n m,$$

para n par esta cantidad es real y para valores impares de n es imaginaria, por lo tanto los momentos multipolares de la métrica de Kerr satisfacen la condición (1.16).

Se puede concluir que si el potencial de Ernst $e(z)$ cumple la condición (1.17), representa una solución con simetría ecuatorial. Ahora se observa si el potencial (1.9) cumple con esta condición. Considerando

$$\tilde{e}(-z) = \frac{-mz^3 - mz^2(m - ia) + bz - ih}{-mz^3 + mz^2(m + ia) + bz - ih},$$

e invirtiendo esta expresión se comprueba que es igual a la dada en (1.9) y por lo tanto el potencial cumple con la condición de simetría ecuatorial.

Otra propiedad de las soluciones es la condición de planitud. Una métrica es asintóticamente plana, si esta tiende en el infinito, al elemento de línea de Minkowski, esto se debe a que el campo gravitacional producido por una fuente aislada se anula a grandes distancias de la fuente, por lo tanto una solución físicamente aceptable debe contener esta propiedad. Para garantizar la planitud de una solución basta con exigir que el llamado parámetro NUT sea nulo, o de otra manera, que la estructura multipolar de la solución no contenga el término correspondiente al monopolo de momento angular, es decir, $J_0 = 0$.

1.3.2. Expansión multipolar del nuevo potencial $e(z)$

Los primeros 4 momentos multipolares gravitacionales de Hansen y Geroch de la solución, según el procedimiento de Fodor-Hoenselaers-Perjés son los siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= m, \\ P_1 &= iam, \\ P_2 &= b - a^2m, \\ P_3 &= i(2ab - a^3m - h), \end{aligned}$$

donde la parte real de estas cantidades representa los momentos multipolares de masa M_n y la parte imaginaria los momentos multipolares de momento angular J_n . Es decir

$$\begin{aligned} M_0 &= m & J_0 &= 0 \\ M_1 &= 0 & J_1 &= am \\ M_2 &= b - a^2m & J_2 &= 0 \\ M_3 &= 0 & J_3 &= 2ab - a^3m - h \end{aligned} \quad (1.18)$$

La interpretación física de los momentos multipolares no nulos se describe a continuación: M_0 es la masa de la fuente, M_2 se conoce como cuadripolo de masa y da la deformación del objeto, J_1 es el momento angular total y J_3 se interpreta como el octupolo de momento angular, el cual está relacionado con la distribución del momento angular de la fuente a nivel local. La constante a en J_1 es el momento angular por unidad de masa, las constantes b y h son parámetros que permiten que el cuadripolo de masa y octupolo de momento angular sean arbitrarios.

2 AJUSTE DEL POTENCIAL DE ERNST CON DATOS NUMÉRICOS DE SOLUCIONES INTERIORES

2.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos interiores de estrellas de neutrones relativistas rotantes, han sido construidos a partir de soluciones numéricas de las ecuaciones Einstein en presencia de materia. Sin embargo, a pesar de que existe gran cantidad de soluciones numéricas interiores, no existe una solución analítica exterior que sea totalmente consistente con los datos que arrojan estas soluciones interiores. En el presente capítulo se da una breve descripción de las estrellas de neutrones y se mencionan algunas de las ecuaciones de estado involucradas en los modelos matemáticos de las mismas. Además, se ajusta numéricamente la solución analítica exterior correspondiente a un cuerpo rotante, con los datos de diversas soluciones numéricas interiores que representan estrellas de neutrones rápidamente rotantes [4].

2.2 ECUACIONES DE ESTADO Y ESTRELLAS DE NEUTRONES

Desde los trabajos pioneros de Baade-Zwicky [2] y Oppenheimer-Volkoff [23], se han hecho muchos estudios acerca de la estructura de las estrellas de neutrones y las ecuaciones de estado involucradas en los modelos matemáticos de dichos objetos. La estructura de una estrella de neutrones se determina por las propiedades locales de la materia. En una estrella de neutrones típica la densidad varía desde la superficie ($\rho \approx 10 \text{ g/cm}^3$) hasta el centro en 14 o 15 órdenes de magnitud y los principales constituyentes de estas estrellas son nucleones; los leptones tienen solo un pequeño efecto sobre su estructura, por tal razón la construcción de un modelo realista de estrellas de neutrones requiere de un conocimiento detallado de las interacciones entre partículas elementales, primordialmente las interacciones fuertes en el rango de densidades nucleares.

Las ecuaciones de estado son ecuaciones que relacionan las variables físicas del sistema, tales como: presión, densidad, etc. Estas se diferencian por el tipo de partículas que conforman el objeto a modelar y por la teoría utilizada para describir la interacción de

las partículas, por ejemplo:

Ecuación de estado A: Propuesta por Pandharipande en 1971. El rango de densidades supera los $6,97 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Esta ecuación de estado considera que las estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción es de tipo (Reid Soft core) adaptado a materia nuclear, la teoría que describe la interacción entre las partículas componentes es el principio variacional aplicado a la función de correlación.

Ecuación de estado L: Propuesta por Pandharipande y Smith en 1975. El rango de densidades supera los $4,386 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Esta ecuación de estado considera que estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción de atracción nuclear se debe al intercambio escalar, las teorías que describen la interacción entre las partículas componentes son el método variacional y la aproximación escalar para campo débil.

En la siguiente Tabla 2.1 se mencionan algunas de las ecuaciones de estado mas importantes.

| EOS | Descripción |
|------|---|
| A | Reid soft core. Pandharipande (1971a) |
| B | Reid core whit hiperons. Pandharipande (1971b) |
| C | Bethe y Jhonson (1974). Modelo I |
| D | Bethe y Jhonson (1974). Modelo V |
| E | Moszkowski (1974) |
| F | Arponen (1972) |
| G | Canuto y Chitre (1974) |
| L | Mean field. Pandharipande y Smith (1975b) |
| M | Tensor interaccion. Pandharipande y Smith (1975b) |
| N | Relativistic mean field. Serot (1979) |
| AU | AV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988) |
| UU | UV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988) |
| UT | UV14 + TNI Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988) |
| FPS | UV14 + TNI Lorenz, Ravenhall y Pethick (1933) |
| APRb | Akmal, Pandharipande y Ravenhall (1998) |

Tabla 2.1: Ecuaciones de estado realistas para estrellas de neutrones.

2.3 AJUSTE NUMÉRICO

En el ajuste numérico se reproducen las principales características físicas de diversas soluciones numéricas interiores que representan estrellas de neutrones rápidamente rotantes, mediante una solución analítica exterior de momentos multipolares (1.18). Los datos numéricas fueron calculados por Berti y Stergioulas utilizando diferentes ecuaciones de estado y resolviendo numéricamente las ecuaciones de Einstein, sus resultados se pueden encontrar en le artículo de la referencia [4]. En la solución numérica Berti y Stergioulas incluyen las siguientes ecuaciones de estado A [24], AU [29], FPS [13], L [25] y APRb [1] para las cuales calcularon los valores numéricos de los parámetros físicos

| Cantidad | Definición |
|--------------|---|
| ϵ_c | Densidad total de energía central (10^{15}g.cm^{-3}) |
| Ω | Velocidad angular de la estrella (10^3s^{-1}) |
| I | Momento de inercia (10^{45}g.cm^2) |
| M_0 | Masa gravitacional (M_\odot (masas solares)) |
| T/W | Relacion entre la energía rotacional y la de enlace |
| R_e | Radio de la estrella en el ecuador (Km) |
| h_+ | Altura desde el ecuador al R_{ome} co-rotante (Km) |
| h_- | Altura desde el ecuador al R_{ome} contra-rotante (Km) |
| M_B | Masa en reposo de la estrella |
| M_2 | Momento cuadrupolar de masa (Km^3) |
| J_1 | Momento angular total de la estrella (Km^2) |
| J_3 | Octupolo de momento angular (Km^4) |

Tabla 2.2: Características físicas de los estrellas de neutrones.

listados en la Tabla 2.2. El ajuste numérico se realiza igualando los primeros cuatro momentos multipolares de las dos soluciones, teniendo en cuenta que los momentos multipolares son propiedades globales del espacio-tiempo, es decir, son cantidades que no dependen del sistema de coordenadas. De la expansión multipolar del potencial gravitacional de Ernst $e(z)$ dado por la ecuación (1.9) se tiene:

$$\begin{aligned}
M_0 &= m \\
J_1 &= am \\
M_2 &= b - a^2m \\
J_3 &= 2ab - a^3m - h.
\end{aligned}$$

Igualando estas cantidades con las correspondientes a las dadas en la solución numérica, se calculan las constantes arbitrarias de los multipolos de la solución analítica, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
m &= M_0 \\
a &= \frac{J_1}{M_0} \\
b &= M_2 + \frac{J_1^2}{M_0} \\
h &= \frac{2J_1M_2}{M_0} + \frac{J_1^3}{M_0^2} - J_3.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Las primeras cuatro columnas de las Tablas 2.3 - 2.7, presentan los datos numéricos correspondientes a los primeros cuatro momentos multipolares calculados por Berti y Stergioulas [4], utilizando cinco ecuaciones de estado diferentes. Cada tabla contiene los cálculos para tres valores diferentes de la masa en reposo M_B , cada uno de estos corresponde a una secuencia de masa diferente:

- la secuencia correspondiente a una estrella de neutrones, teniendo masa gravitacional $M = 1,4M_\odot$ en el limite no rotante,

- la secuencia termina en el modelo de masa máxima en el límite no rotante,
- una secuencia supramasiva: una estrella supramasiva es una configuración rotante en equilibrio, con una masa en reposo que excede la masa en reposo máxima de una estrella no rotante construida de la misma ecuación de estado.

Las siguientes tres columnas corresponden a los valores numéricos de los parámetros arbitrarios que ajustan correctamente los momentos multipolares calculados por Berti y Stergioulas con los de la solución analítica, estos parámetros se calculan de las ecuaciones (2.1). Para los cálculos se utilizan unidades naturales, es decir: $c = G = 1$; con esta convención la masa se mide en kilómetros. Debido a que la solución analítica posee cuatro parámetros libres arbitrarios y el ajuste se realiza con cuatro cantidades físicas de las soluciones numéricas, los momentos multipolares de las dos soluciones quedan ajustados en su totalidad.

| $M_0[Km]$ | $J_1[Km^2]$ | $M_2[Km^3]$ | $J_3[Km^4]$ | $a[Km]$ | $b[Km^3]$ | $h[Km^4]$ |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| $M_B = 2,344[Km]$ | | | | | | |
| 2.068 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.072 | 0.812 | -1.001 | -0.727 | 0.392 | -0.683 | 0.067 |
| 2.080 | 1.327 | -2.656 | -3.158 | 0.638 | -1.809 | 0.309 |
| 2.087 | 1.704 | -4.377 | -6.694 | 0.816 | -2.986 | 0.682 |
| 2.093 | 2.022 | -6.173 | -11.230 | 0.966 | -4.220 | 1.190 |
| 2.100 | 2.037 | -8.063 | -16.770 | 0.970 | -6.087 | 3.044 |
| 2.106 | 2.540 | -9.806 | -22.500 | 1.206 | -6.743 | 2.541 |
| 2.112 | 2.729 | -11.370 | -28.100 | 1.292 | -7.844 | 3.273 |
| 2.117 | 2.884 | -12.740 | -33.350 | 1.362 | -8.811 | 3.991 |
| 2.117 | 2.925 | -13.130 | -34.880 | 1.382 | -9.089 | 4.181 |
| $M_B = 2,873[Km]$ | | | | | | |
| 2.446 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.451 | 0.986 | -0.623 | -0.376 | 0.402 | -0.227 | 0.034 |
| 2.460 | 1.573 | -1.657 | -1.637 | 0.639 | -0.651 | 0.161 |
| 2.472 | 2.147 | -3.237 | -4.459 | 0.869 | -1.372 | 0.456 |
| 2.487 | 2.717 | -5.434 | -9.667 | 1.092 | -2.466 | 1.037 |
| 2.499 | 3.143 | -7.529 | -15.720 | 1.258 | -3.576 | 1.753 |
| 2.509 | 3.501 | -9.619 | -22.640 | 1.395 | -4.734 | 2.612 |
| 2.519 | 3.746 | -11.310 | -28.760 | 1.487 | -5.739 | 3.406 |
| 2.528 | 4.051 | -13.520 | -37.530 | 1.602 | -7.028 | 4.602 |
| 2.536 | 4.247 | -15.030 | -44.000 | 1.675 | -7.918 | 5.570 |
| $M_B = 3,006[Km]$ | | | | | | |
| 2.569 | 2.598 | -3.489 | -4.943 | 1.011 | -0.862 | 0.543 |
| 2.569 | 2.614 | -3.615 | -5.221 | 1.018 | -0.955 | 0.571 |
| 2.571 | 2.653 | -3.809 | -5.654 | 1.032 | -1.071 | 0.618 |
| 2.572 | 2.714 | -4.077 | -6.266 | 1.055 | -1.213 | 0.684 |
| 2.574 | 2.796 | -4.423 | -7.082 | 1.086 | -1.386 | 0.772 |
| 2.583 | 3.076 | -5.653 | -10.240 | 1.191 | -1.990 | 1.138 |
| 2.603 | 3.697 | -8.890 | -20.130 | 1.420 | -3.639 | 2.335 |
| 2.615 | 4.064 | -11.210 | -28.430 | 1.554 | -4.894 | 3.402 |
| 2.625 | 4.361 | -13.320 | -36.780 | 1.661 | -6.075 | 4.559 |
| 2.628 | 4.462 | -14.090 | -40.030 | 1.698 | -6.514 | 5.047 |

Tabla 2.3: Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado A.

| $M_0[Km]$ | $J_1[Km^2]$ | $M_2[Km^3]$ | $J_3[Km^4]$ | $a[Km]$ | $b[Km^3]$ | $h[Km^4]$ |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| $M_B = 2,328[Km]$ | | | | | | |
| 2.068 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.072 | 0.870 | -1.416 | -1.260 | 0.420 | -1.050 | 0.244 |
| 2.078 | 1.355 | -3.364 | -4.168 | 0.652 | -2.480 | 0.357 |
| 2.087 | 1.798 | -5.818 | -9.564 | 0.862 | -4.269 | 0.874 |
| 2.092 | 2.081 | -7.703 | -14.660 | 0.995 | -5.633 | 1.394 |
| 2.097 | 2.331 | -9.581 | -20.440 | 1.112 | -6.990 | 2.020 |
| 2.103 | 2.558 | -11.460 | -26.870 | 1.216 | -8.349 | 2.776 |
| 2.108 | 2.739 | -13.080 | -32.870 | 1.299 | -9.521 | 3.504 |
| 2.111 | 2.906 | -14.680 | -39.200 | 1.377 | -10.680 | 4.290 |
| 2.112 | 2.957 | -15.190 | -41.320 | 1.400 | -11.050 | 4.582 |
| $M_B = 3,888[Km]$ | | | | | | |
| 3.151 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3.164 | 1.939 | -1.370 | -1.031 | 0.613 | -0.182 | 0.080 |
| 3.183 | 3.138 | -3.701 | -4.622 | 0.986 | -1.607 | 0.375 |
| 3.207 | 4.176 | -6.740 | -11.440 | 1.302 | -1.302 | 0.968 |
| 3.230 | 5.059 | -10.140 | -21.240 | 1.566 | -2.216 | 1.887 |
| 3.252 | 5.517 | -13.720 | -33.570 | 1.786 | -3.315 | 3.099 |
| 3.273 | 6.465 | -17.300 | -47.170 | 1.975 | -4.530 | 4.050 |
| 3.291 | 6.986 | -20.580 | -62.160 | 2.123 | -5.750 | 6.267 |
| 3.304 | 7.389 | -23.370 | -75.490 | 2.236 | -6.845 | 7.917 |
| 3.317 | 7.778 | -26.320 | -90.560 | 2.345 | -8.081 | 9.892 |
| $M_B = 4,128[Km]$ | | | | | | |
| 3.388 | 5.856 | -10.160 | -19.560 | 1.728 | -0.038 | 1.933 |
| 3.388 | 5.865 | -10.280 | -19.950 | 1.731 | -0.127 | 1.934 |
| 3.390 | 5.909 | -10.590 | -20.990 | 1.743 | -0.290 | 2.025 |
| 3.393 | 5.995 | -11.060 | -22.550 | 1.767 | -0.468 | 2.182 |
| 3.404 | 6.339 | -12.850 | -28.610 | 1.862 | -1.045 | 2.734 |
| 3.422 | 6.886 | -15.740 | -39.280 | 2.012 | -1.883 | 3.817 |
| 3.441 | 7.427 | -18.870 | -52.040 | 2.158 | -2.840 | 5.182 |
| 3.457 | 7.888 | -21.800 | -65.120 | 2.282 | -3.802 | 6.704 |
| 3.477 | 8.400 | -25.390 | -82.460 | 2.416 | -5.097 | 8.808 |
| 3.487 | 8.674 | -27.470 | -93.170 | 2.488 | -5.883 | 10.228 |

Tabla 2.4: Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado AU.

| $M_0[Km]$ | $J_1[Km^2]$ | $M_2[Km^3]$ | $J_3[Km^4]$ | $a[Km]$ | $b[Km^3]$ | $h[Km^4]$ |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| $M_B = 2,302[Km]$ | | | | | | |
| 2.068 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.071 | 0.872 | -1.512 | -1.241 | 0.421 | -1.145 | 0.122 |
| 2.077 | 1.297 | -3.312 | -4.051 | 0.624 | -2.502 | 0.420 |
| 2.083 | 1.665 | -5.417 | -8.518 | 0.799 | -4.086 | 0.922 |
| 2.087 | 1.977 | -7.598 | -14.210 | 0.947 | -5.725 | 1.589 |
| 2.093 | 2.222 | -9.573 | -20.160 | 1.062 | -7.214 | 2.338 |
| 2.097 | 2.451 | -11.640 | -27.100 | 1.169 | -8.775 | 3.238 |
| 2.102 | 2.668 | -13.790 | -35.060 | 1.269 | -10.404 | 4.352 |
| 2.106 | 2.819 | -15.400 | -41.460 | 1.339 | -11.627 | 5.283 |
| 2.109 | 2.961 | -17.020 | -48.260 | 1.404 | -12.863 | 6.305 |
| $M_B = 3,105[Km]$ | | | | | | |
| 2.658 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.664 | 1.160 | -0.830 | -0.556 | 0.435 | -0.325 | 0.053 |
| 2.674 | 1.847 | -2.200 | -2.402 | 0.691 | -0.924 | 0.244 |
| 2.686 | 2.519 | -4.303 | -6.549 | 0.938 | -1.941 | 0.694 |
| 2.701 | 3.185 | -7.222 | -14.180 | 1.179 | -3.466 | 1.576 |
| 2.714 | 3.683 | -10.010 | -23.050 | 1.357 | -5.012 | 2.665 |
| 2.727 | 4.181 | -13.370 | -35.480 | 1.533 | -6.960 | 4.311 |
| 2.736 | 4.515 | -15.970 | -46.222 | 1.650 | -8.519 | 5.807 |
| 2.744 | 4.771 | -18.160 | -55.960 | 1.739 | -9.865 | 7.233 |
| 2.749 | 4.951 | -19.800 | -63.670 | 1.801 | -10.883 | 8.409 |
| $M_B = 3,283[Km]$ | | | | | | |
| 2.823 | 3.409 | -5.570 | -9.594 | 1.208 | -1.453 | 1.113 |
| 2.823 | 3.417 | -5.733 | -10.030 | 1.210 | -1.597 | 1.158 |
| 2.825 | 3.452 | -5.991 | -10.720 | 1.222 | -1.793 | 1.233 |
| 2.826 | 3.506 | -6.328 | -11.640 | 1.241 | -1.978 | 1.335 |
| 2.829 | 3.593 | -6.802 | -12.980 | 1.270 | -2.239 | 1.498 |
| 2.839 | 3.973 | -8.917 | -19.460 | 1.399 | -3.357 | 2.283 |
| 2.856 | 4.498 | -12.240 | -31.210 | 1.575 | -5.156 | 3.813 |
| 2.870 | 5.018 | -16.130 | -47.060 | 1.748 | -7.356 | 5.996 |
| 2.882 | 5.383 | -19.180 | -60.960 | 1.868 | -9.126 | 8.091 |
| 2.884 | 5.423 | -19.760 | -63.670 | 1.880 | -9.563 | 8.532 |

Tabla 2.5: Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado FPS.

| $M_0[Km]$ | $J_1[Km^2]$ | $M_2[Km^3]$ | $J_3[Km^4]$ | $a[Km]$ | $b[Km^3]$ | $h[Km^4]$ |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| $M_B = 2,227[Km]$ | | | | | | |
| 2.068 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.071 | 0.973 | -3.671 | -3.554 | 0.470 | -3.214 | 0.320 |
| 2.075 | 1.501 | -8.464 | -12.650 | 0.723 | -7.378 | 1.190 |
| 2.080 | 1.899 | -13.200 | -24.960 | 0.913 | -11.466 | 2.440 |
| 2.083 | 2.196 | -17.290 | -37.840 | 1.054 | -14.975 | 3.825 |
| 2.087 | 2.466 | -21.420 | -52.650 | 1.182 | -18.506 | 5.473 |
| 2.090 | 2.719 | -25.600 | -69.470 | 1.301 | -22.063 | 7.463 |
| 2.095 | 2.955 | -29.800 | -88.000 | 1.411 | -25.632 | 9.813 |
| 2.096 | 3.148 | -33.460 | -105.400 | 1.502 | -28.732 | 11.993 |
| 2.097 | 3.179 | -34.060 | -108.400 | 1.516 | -29.241 | 12.438 |
| $M_B = 4,767[Km]$ | | | | | | |
| 4.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4.012 | 2.559 | -2.656 | -2.558 | 0.638 | -1.024 | 0.211 |
| 4.028 | 4.361 | -8.015 | -13.430 | 1.083 | -3.293 | 1.187 |
| 4.050 | 6.014 | -15.780 | -37.000 | 1.485 | -6.850 | 3.396 |
| 4.074 | 7.496 | -25.240 | -74.630 | 1.840 | -11.448 | 7.126 |
| 4.098 | 8.777 | -35.490 | -124.100 | 2.142 | -16.692 | 12.339 |
| 4.120 | 9.885 | -45.990 | -182.600 | 2.399 | -22.273 | 18.818 |
| 4.139 | 10.790 | -55.820 | -243.800 | 2.607 | -27.691 | 26.093 |
| 4.160 | 11.730 | -67.150 | -321.300 | 2.820 | -34.075 | 35.875 |
| 4.167 | 12.070 | -71.630 | -353.800 | 2.897 | -36.668 | 40.106 |
| $M_B = 5,118[Km]$ | | | | | | |
| 4.320 | 8.839 | -24.160 | -69.250 | 2.046 | -6.075 | 7.388 |
| 4.320 | 8.851 | -24.640 | -71.550 | 2.049 | -6.506 | 7.737 |
| 4.323 | 8.938 | -25.720 | -76.100 | 2.068 | -7.240 | 7.953 |
| 4.325 | 9.058 | -26.850 | -81.190 | 2.094 | -7.880 | 8.455 |
| 4.332 | 9.381 | -29.620 | -94.070 | 2.166 | -9.305 | 9.777 |
| 4.354 | 10.440 | -38.850 | -141.100 | 2.398 | -13.817 | 14.815 |
| 4.376 | 11.450 | -48.440 | -196.200 | 2.617 | -18.481 | 21.099 |
| 4.396 | 12.300 | -57.650 | -254.400 | 2.798 | -23.235 | 28.085 |
| 4.418 | 13.280 | -69.210 | -334.200 | 3.006 | -29.292 | 38.115 |
| 4.419 | 13.320 | -69.780 | -338.400 | 3.014 | -29.630 | 38.752 |

Tabla 2.6: Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado L.

| $M_0[Km]$ | $J_1[Km^2]$ | $M_2[Km^3]$ | $J_3[Km^4]$ | $a[Km]$ | $b[Km^3]$ | $h[Km^4]$ |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| $M_B = 2,288[Km]$ | | | | | | |
| 2.069 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2.075 | 0.935 | -1.965 | -1.750 | 0.451 | -1.544 | 0.169 |
| 2.078 | 1.203 | -3.203 | -3.673 | 0.579 | -2.507 | 0.368 |
| 2.081 | 1.428 | -4.464 | -6.064 | 0.686 | -3.484 | 0.610 |
| 2.083 | 1.624 | -5.723 | -8.852 | 0.780 | -4.457 | 0.915 |
| 2.086 | 1.802 | -7.002 | -12.030 | 0.864 | -5.445 | 1.277 |
| 2.092 | 2.121 | -9.608 | -19.500 | 1.014 | -7.458 | 2.198 |
| 2.097 | 2.411 | -12.310 | -28.490 | 1.150 | -9.538 | 3.371 |
| 2.103 | 2.681 | -15.140 | -39.170 | 1.275 | -11.722 | 4.925 |
| 2.106 | 2.814 | -16.640 | -45.320 | 1.336 | -12.880 | 5.876 |
| $M_B = 3,941[Km]$ | | | | | | |
| 3.252 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3.263 | 1.605 | -0.905 | -0.526 | 0.492 | -0.116 | 0.024 |
| 3.270 | 2.230 | -1.846 | -1.606 | 0.682 | -0.325 | 0.125 |
| 3.286 | 3.254 | -4.059 | -5.229 | 0.990 | -0.837 | 0.381 |
| 3.308 | 4.362 | -7.604 | -13.710 | 1.319 | -1.852 | 1.241 |
| 3.323 | 4.976 | -10.060 | -20.930 | 1.495 | -2.636 | 1.953 |
| 3.338 | 5.592 | -13.070 | -31.100 | 1.675 | -3.702 | 3.003 |
| 3.357 | 6.263 | -16.820 | -45.570 | 1.866 | -5.135 | 4.609 |
| 3.378 | 6.977 | -21.520 | -66.310 | 2.065 | -7.110 | 7.178 |
| 3.403 | 7.756 | -27.540 | -96.550 | 2.279 | -9.863 | 11.303 |
| $M_B = 4,130[Km]$ | | | | | | |
| 3.444 | 5.377 | -9.015 | -16.700 | 1.561 | -0.620 | 1.657 |
| 3.446 | 5.447 | -9.418 | -17.930 | 1.581 | -0.808 | 1.766 |
| 3.449 | 5.549 | -9.976 | -19.680 | 1.609 | -1.048 | 1.943 |
| 3.454 | 5.726 | -10.820 | -22.320 | 1.658 | -1.328 | 2.182 |
| 3.460 | 5.942 | -11.910 | -25.970 | 1.717 | -1.706 | 2.587 |
| 3.468 | 6.233 | -13.390 | -31.090 | 1.797 | -2.187 | 3.093 |
| 3.478 | 6.577 | -15.260 | -38.030 | 1.891 | -2.823 | 3.835 |
| 3.491 | 6.979 | -17.620 | -47.470 | 1.999 | -3.668 | 4.912 |
| 3.506 | 7.449 | -20.640 | -60.540 | 2.125 | -4.814 | 6.460 |
| 3.522 | 7.983 | -24.450 | -78.600 | 2.267 | -6.356 | 8.776 |

Tabla 2.7: Valores numéricos de los parámetros físicos del potencial $e(z)$ para la ecuación de estado APRb.

3 OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN EXACTA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se utilizará el método de Sibgatullin para construir una familia de soluciones estacionarias axialmente simétricas de la ecuaciones de Einstein en el vacío. Inicialmente se mencionan los resultados obtenidos por el formalismo de Ernst para el caso de campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos, luego se hace una corta descripción del método de Sibgatullin y se finaliza con la construcción de la solución.

3.2 FORMALISMO DE ERNST

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de ecuaciones que permiten describir el campo gravitacional en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acoplado de segundo orden, conocido normalmente como sistema de ecuaciones de Einstein. Para el caso de vacío, las ecuaciones de Einstein se escriben de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (3.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ representa el tensor de Ricci.

Este sistema de ecuaciones solo puede ser solucionado analíticamente bajo unas condiciones de simetría muy particulares. En este caso se centrará la atención en los campos gravitacionales que tienen la propiedad de ser estacionarios y axialmente simétricos.

El elemento de línea más simple que describe dichos campos es el de Papapetrou, que en coordenadas de Weyl $x^\alpha = (t, \phi, \rho, z)$ toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (3.2)$$

donde f , ω y γ son funciones que dependen de ρ y z .

Bajo estas condiciones de simetría el sistema de ecuaciones (3.1), puede ser escrito en términos de una función compleja \mathcal{E} , conocida en la literatura como potencial gravitacional de Ernst y que satisface la siguiente ecuación

$$\text{Re}(\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} \cdot \nabla\mathcal{E}. \quad (3.3)$$

El conocimiento de la función \mathcal{E} , permite construir las funciones del elemento de línea (3.2) mediante las siguientes relaciones:

$$f = \operatorname{Re}(\mathcal{E}) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \omega_{,\rho} &= -\rho f^{-2} \mathcal{E}_{,z} \\ \omega_{,z} &= \rho f^{-2} \mathcal{E}_{,\rho} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{\rho(\mathcal{E}_{,\rho} \bar{\mathcal{E}}_{,\rho} - \mathcal{E}_{,z} \bar{\mathcal{E}}_{,z})}{4[\operatorname{Re}(\mathcal{E})]^2}, \\ \gamma_{,z} &= \frac{\rho \operatorname{Re}(\mathcal{E}_{,\rho} \bar{\mathcal{E}}_{,z})}{2[\operatorname{Re}(\mathcal{E})]^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3 MÉTODO DE SIBGATULLIN

El método de Sibgatullin es un método integral que permite construir el potencial gravitacional de Ernst $\mathcal{E}(\rho, z)$ en todo el plano complejo a partir de su comportamiento sobre el eje de simetría $\mathcal{E}(\rho = 0, z)$. Los detalles del método pueden ser consultados en el artículo de Manko y Sibgatullin [20].

El potencial gravitacional de Ernst sobre el plano complejo se obtiene por medio de la formula integral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu_1(\sigma) e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (3.7)$$

con la función desconocida $\mu_1(\sigma)$ que debe satisfacer la condición integral

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)[e(\xi) + \tilde{e}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0, \quad (3.8)$$

y la condición de normalización

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = \pi, \quad (3.9)$$

donde el símbolo \oint significa integral de valor principal. En las ecuaciones anteriores $\xi = z + i\rho\sigma$, $\eta = z + i\rho\tau$, siendo ρ y z las coordenadas de Weyl-Papapetrou y $\sigma, \tau \in [-1,1]$. El potencial $e(\xi)$ es una continuación analítica local de la función $e(z)$ al plano complejo $z + i\rho$.

Calculando \mathcal{E} puede obtenerse inmediatamente la función f para la métrica de Papapetrou de la relación (3.4).

El método de Sibgatullin también proporciona la expresión necesaria para calcular la función métrica w :

$$fw = \frac{1}{2} (H_{12} + \bar{H}_{21}) - iz, \quad (3.10)$$

con H_{12} y H_{21} definidos mediante las fórmulas integrales:

$$H_{12} = \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (3.11)$$

$$H_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma. \quad (3.12)$$

En las dos últimas fórmulas se ha introducido una función desconocida $\mu_2(\sigma)$ que debe satisfacer las ecuaciones integrales:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)[e(\xi) + \tilde{e}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = -2i\pi, \quad (3.13)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0. \quad (3.14)$$

La función métrica γ se puede obtener solucionando el sistema de ecuaciones diferenciales (3.6), que en la mayoría de los casos es muy difícil de solucionar. La posibilidad de construir γ algebraicamente es todavía un problema sin resolver, sin embargo, para todas las aplicaciones concretas del método de Sibgatullin, la construcción de γ no exhibe dificultad asumiendo que esta puede ser “adivinada” con la ayuda de otra función métrica. El método para el cálculo se fundamenta en la importante propiedad de que el campo gravitacional producido por una fuente aislada es asintóticamente plano. En otras palabras, el elemento de línea de Papapetrou (3.2) debe convertirse, en el infinito, al elemento de línea de Minkowski, que en coordenadas cilíndricas de Weyl toma la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (3.15)$$

Aplicando la condición de planitud asintótica y comparando (3.2) y (3.15) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} f = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} f e^{2\gamma} = 1, \quad (3.16)$$

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} \omega = 0. \quad (3.17)$$

Como el método de Sibgatullin permite construir la función métrica f , esta se utiliza para calcular γ mediante la condición (3.16).

Esta forma de calcular γ se ha utilizado en diversas aplicaciones prácticas del método de Sibgatullin y hasta el momento no a presentado ningún tipo de contradicción o falencia.

Una importante relación entre los parámetros de la solución viene determinada por la ecuación de Sibgatullin

$$e(\xi) + \tilde{e}(\xi) = 0, \quad (3.18)$$

cuyas raíces pueden ser escogidas adecuadamente para construir soluciones con objetos sub-extremos (pares de raíces reales distintas), extremos (raíces reales de multiplicidad dos) o super extremos (pares de raíces complejas conjugadas).

3.4 CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN

Como se observó en la sección anterior, el método de Sigatullin permite construir soluciones estacionarias axialmente simétricas a partir del conocimiento del potencial

gravitacional de Ernst sobre le eje de simetría. En esta sección se particulariza la solución extendida N-solitónica de Manko et al [15] al caso 3-solitónico, con una nueva parametrización física del potencial de Ernst sobre el eje de simetría (1.9).

3.4.1. Cálculo del potencial de Ernst

El cálculo del potencial gravitacional de Ernst en todo el plano complejo $\mathcal{E}(\rho, z)$, se realiza utilizando la ecuación integral (3.7), en la cual aparece la función desconocida $\mu_1(\sigma)$ que se elige de la siguiente forma

$$\mu_1(\sigma) = A_0 + \sum_{i=1}^6 \frac{A_i}{\xi - \alpha_i}, \quad (3.19)$$

siendo α_i las raíces de la ecuación de Sibgatullin y A_0, \dots, A_6 coeficientes constantes respecto a ξ . Sustituyendo la ecuación (3.19) en las condiciones integrales (3.8) y (3.9), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que permite obtener las constantes A_n , $n = 0, \dots, 6$:

$$A_0 + \sum_{i=1}^6 \frac{A_i}{r_i} = 1, \quad (3.20a)$$

$$A_0 - \sum_{i=1}^6 \frac{A_i}{\alpha_i - \beta_l} = 0, \quad (3.20b)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\bar{e}_l}{(\alpha_i - \beta_l)r_i} A_i = 0, \quad (3.20c)$$

donde $l = 1, 2, 3$ y $r_i = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_i)^2}$.

Ahora, introduciendo las ecuaciones (1.8) y (3.19) en la ecuación (3.7) e integrando y con ayuda del sistema de ecuaciones (3.20), se obtiene la siguiente expresión para el potencial gravitacional de Ernst en todo el plano complejo

$$\mathcal{E} = 2A_0 - 1.$$

Luego de resolver el sistema de ecuaciones (3.20), se puede escribir el potencial \mathcal{E} en la forma compacta:

$$\mathcal{E} = \frac{E_+}{E_-}, \quad (3.21)$$

$$E_{\pm} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \pm 1 & & & & & & \\ \pm 1 & & & & & & \\ \pm 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix},$$

C

donde C es la matriz de 6×6

$$C = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} & \frac{r_5}{\alpha_5 - \beta_1} & \frac{r_6}{\alpha_6 - \beta_1} \\ \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} & \frac{r_5}{\alpha_5 - \beta_2} & \frac{r_6}{\alpha_6 - \beta_2} \\ \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_3} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_3} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_3} & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_3} & \frac{r_5}{\alpha_5 - \beta_3} & \frac{r_6}{\alpha_6 - \beta_3} \\ \frac{e_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{e_1}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{e_1}{\alpha_3 - \beta_1} & \frac{e_1}{\alpha_4 - \beta_1} & \frac{e_1}{\alpha_5 - \beta_1} & \frac{e_1}{\alpha_6 - \beta_1} \\ \frac{e_2}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{e_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{e_2}{\alpha_3 - \beta_2} & \frac{e_2}{\alpha_4 - \beta_2} & \frac{e_2}{\alpha_5 - \beta_2} & \frac{e_2}{\alpha_6 - \beta_2} \\ \frac{e_3}{\alpha_1 - \beta_3} & \frac{e_3}{\alpha_2 - \beta_3} & \frac{e_3}{\alpha_3 - \beta_3} & \frac{e_3}{\alpha_4 - \beta_3} & \frac{e_3}{\alpha_5 - \beta_3} & \frac{e_3}{\alpha_6 - \beta_3} \end{pmatrix}.$$

3.4.2. Cálculo de las funciones métricas

Calculado el potencial \mathcal{E} puede obtenerse inmediatamente la función métrica f para la métrica de Papapetrou (3.2) de la relación (3.4)

$$f = \text{Re}(\mathcal{E}),$$

introduciendo la expresión (3.21) en esta relación, f toma la forma:

$$f = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_-}{2E_- \bar{E}_-}. \quad (3.22)$$

El cálculo de la función métrica ω se realiza de la expresión (3.10), donde aparecen los potenciales auxiliares H_{12} y H_{21} que se obtienen de las formulas integrales (3.11) y (3.12).

La sustitución de (3.19) en (3.11) da la expresión para H_{12} en términos de A_i :

$$H_{12} = 2i \left(z + \sum_{i=1}^6 \frac{r_i + \alpha_i - z}{r_i} A_i \right). \quad (3.23)$$

H_{21} se calcula de ecuación (3.12), en la cual aparece la función desconocida μ_2 que se asume de la siguiente manera

$$\mu_2 = -i\xi + B_0 + \sum_{i=1}^6 \frac{B_i}{\xi - \alpha_i}, \quad (3.24)$$

donde B_0, \dots, B_6 , son coeficientes constantes respecto a ξ . Sustituyendo (3.24) en (3.13) y (3.14), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que permite obtener B_n , $n = 0, \dots, 6$:

$$B_0 + \sum_{i=1}^6 \frac{B_i}{r_i} = iz, \quad (3.25a)$$

$$B_0 - \sum_{i=1}^6 \frac{B_i}{\alpha_i - \beta_l} = i\beta_l, \quad (3.25b)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\bar{e}_l}{(\alpha_i - \bar{\beta}_l)r_i} B_i = i\bar{e}_l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.25c)$$

De (3.12), (3.24) y (3.25) encontramos la forma de H_{21} en términos de B_0 :

$$H_{21} = 2B_0 - i \left[2z + \sum_{l=1}^3 (e_l + \bar{e}_l) \right]. \quad (3.26)$$

Después de resolver los sistemas de ecuaciones (3.20) y (3.25), los potenciales H_{12} y H_{21} se pueden escribir de la siguiente forma:

$$H_{12} = 2iz + 2i \frac{G}{E_-}, \quad (3.27)$$

$$H_{21} = 2i \frac{H}{E_-} - i \left[2z + \sum_{l=1}^3 (e_l + \bar{e}_l) \right], \quad (3.28)$$

$$G = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \\ -1 & & & & & & \\ -1 & & & & & & \\ -1 & & & C & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix},$$

$$H = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & & & & & & \\ \beta_2 & & & & & & \\ \beta_3 & & & C & & & \\ \bar{e}_1 & & & & & & \\ \bar{e}_2 & & & & & & \\ \bar{e}_3 & & & & & & \end{vmatrix},$$

con $g_i = r_i + \alpha_i - z$, para $i = 1 \dots 6$.

Introduciendo (3.22), (3.27) y (3.28) en (3.10) se encuentra la expresión para la función métrica ω

$$\omega = \frac{2 \operatorname{Im}(E_- \bar{H} - \bar{E} G)}{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_-}. \quad (3.29)$$

El cálculo de la función métrica γ se realiza introduciendo (3.22) en (3.16), de donde se obtiene la siguiente expresión:

$$e^{2\gamma} = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_-}{2K \bar{K} \prod_{n=1}^6 r_n}, \quad (3.30)$$

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_2} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_3} \\ \frac{1}{\bar{e}_1} & \frac{1}{\bar{e}_1} & \frac{1}{\bar{e}_1} & \frac{1}{\bar{e}_1} & \frac{1}{\bar{e}_1} & \frac{1}{\bar{e}_1} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_1} \\ \frac{1}{\bar{e}_2} & \frac{1}{\bar{e}_2} & \frac{1}{\bar{e}_2} & \frac{1}{\bar{e}_2} & \frac{1}{\bar{e}_2} & \frac{1}{\bar{e}_2} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_2} \\ \frac{1}{\bar{e}_3} & \frac{1}{\bar{e}_3} & \frac{1}{\bar{e}_3} & \frac{1}{\bar{e}_3} & \frac{1}{\bar{e}_3} & \frac{1}{\bar{e}_3} \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_3 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_5 - \beta_3} & \frac{1}{\alpha_6 - \beta_3} \end{vmatrix}. \quad (3.31)$$

Después de haber calculado las funciones métricas f , ω y γ las cuales vienen dadas por las expresiones (3.22), (3.29) y (3.30), se da por concluido el cálculo de la solución. Como se puede observar la solución esta dada en términos de las constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, e_1, e_2, e_3$ y sus complejos conjugados, cuyos valores analíticos están representados por las ecuaciones (1.10 - 1.15) y en términos de las raíces de la ecuación de Sibgatullin, que se calculan introduciendo (1.8) en (3.18).

Para el caso particular de la nueva parametrización física del potencial de Ernst sobre el eje de simetría (1.9), la ecuación de Sibgatullin queda escrita en términos de las constantes arbitrarias m, a, b y f , de la siguiente forma

$$m^2 z^6 - m(2b - a^2 m + m^3) z^4 + (b^2 - 2ahm) z^2 + h^2 = 0. \quad (3.32)$$

Encontrar las raíces de esta ecuación analíticamente no se puede, debido a que es una ecuación polinomial de orden seis y por la tanto no tiene solución general. Para un caso particular, en el cual se tiene un valor numérico para los cuatro parámetros físicos arbitrarios de la solución: masa, cuadrípulo de masa, momento angular y octúpulo de momento angular

$$\begin{aligned} M_0 &= 3,164, & M_2 &= -1,370, \\ J_1 &= 1,939, & J_3 &= -1,031, \end{aligned}$$

y para los cuales también se tienen los valores de las constantes m, a, b y h , que son respectivamente 3.164, 0.613, -0.182 y 0.080, se obtienen las seis raíces de la ecuación de Sibgatullin:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3,085930, & \alpha_2 &= -3,085930, \\ \alpha_3 &= 0,082888, & \alpha_4 &= -0,082888, \\ \alpha_5 &= 0,098849i, & \alpha_6 &= -0,098849i. \end{aligned}$$

La solución 3-solitónica de vacío, viene dada por las formulas explícitas de las funciones métricas (3.22), (3.29) y (3.30), para el elemento de línea de Papapetrou (3.2).

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo pueden ser resumidos en la siguiente forma:

1. Se encontró exitosamente una nueva parametrización física del potencial gravitacional de Ernst sobre el eje de simetría, que representa una particularización de la solución obtenida por Manko et al [15] y que generaliza la solución de Kerr. Esta nueva solución contiene cuatro parámetros reales arbitrarios de importancia astrofísica, correspondientes a la masa, momento angular, cuadrupolo de masa y octupolo de momento angular; además tiene simetría ecuatorial y es asintóticamente plana.
2. Se realizó el ajuste numérico con total precisión de los datos de diversas soluciones numéricas interiores con los datos del potencial de Ernst obtenido, para los parámetros de masa, momento angular, cuadrupolo de masa y octupolo de momento angular.
3. Empleando el método de Sibgatullin se hizo la reproducción completa de la solución analítica exterior obtenida por Manko et al, titulada “*Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations*” [15]. Luego se particularizó al caso 3-solitonico de vacío, incluyendo una nueva parametrización física.
4. En este trabajo se deja habilitada una solución analítica exterior y ajustada numéricamente, para el estudio posterior de propiedades físicas en estrellas de neutrones, tales como: el cálculo de orbitas marginalmente estables, corrimiento al rojo gravitacional, discos de acreción, equilibrios en sistemas de tres cuerpos, etc.

REFERENCIAS

- [1] A. AKMAL, V. R. PANDHARIPANDE and D. G. RANVENHALL. *Equation of state of nucleon matter and neutron star structure.* *Phys. Rev. C* **58**, 1804 (1998).
- [2] W. BAADE and F. ZWICK. *Remarks on Super-Novae and cosmic rays.* *Phys. Rev.* **45**, 76 (1934).
- [3] V. A. BELINSKII and V. E. ZAKHAROV. *Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions.* *Sov. Phys. JETP* **48**, 985 (1978)
- [4] E. BERTI and N. STERGIIOULAS. *Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars.* *arXiv:gr-qc/0310061v2*, Feb. 2004.
- [5] J. F. ERNST. *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem.* *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- [6] G. FODOR, C. HOENSELAERS and Z. PERJÉS. *Multipole moments of axial-symmetric systems in relativity.* *J. Math. Phys.* **30**, 2252 (1989).
- [7] R. GEROCH. *J. Math. Phys.* **11**, 2580 I-II (1970).
- [8] R. O. HANSEN. *Multipole moments of stationary space-times.* *J. Math. Phys.* **15**, 46 (1974).
- [9] C. HOENSELAERS. *Prog. Theor. Phys.* **55**, 406 (1976).
- [10] C. HOENSELAERS, W. KINNERSLEY and B. C. XANTHOPOULOS. *Symmetries of the stationary EinsteinMaxwell field equations. VI: Transformations which generate asymptotically flat spacetimes with arbitrary multipole moments.* *Phys. Rev. Lett.* **42**, 481 (1979).
- [11] C. HOENSELAERS and Z. PERJÉS. *Multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes* *Clas. Quantum Grav.* **7**, 1819 (1990).
- [12] P. KORDAS. *Reflection-symmetric, asymptotically flat solutions of the vacuum axistationary Einstein equations* *Clas. Quantum Grav.* **12**, 2037 (1995).
- [13] C. P. LORENZ, D. G. RAVENHALL and C. J. PETHICK. *Neutron stars crusts* *Phys. Rev. Lett.* **70**, 379 (1993)

- [14] V. S. MANKO. *New generalization of the Kerr metric referring to a magnetized spinning mass.* *Class. Quantum Grav.* **10**, L239 (1993).
- [15] V. S. MANKO, J. MARTÍN and E. RUIZ. *Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations.* *Phys. Rev. D* **51**, 4192 (1995).
- [16] V. S. MANKO, J. MARTÍN and E. RUIZ. *On the simplest binary system of stationary black holes.* *Phys. Lett. A* **196**, 23 (1994).
- [17] V. S. MANKO, W. M. MIELKE and J. D. SANABRIA. *Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star.* *Phys. rev. D* **61**, 081501(R) (2000).
- [18] V. S. MANKO and E. RUIZ. *Exact solution of the double-Kerr equilibrium problem.* *Class. Quantum Grav.* **18**,L11-L15 (2000).
- [19] V. S. MANKO and E. RUIZ. *How can exact and approximate solutions of Einstein's field equations be compared ?.* *arXiv:gr-qc/0407043v1*, JUL, 2004.
- [20] V. S. MANKO and N. R. SIBGATULLIN. *Construction of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behaviour of the Ernst potentials on the symmetry axis.* *Class Quantum Grav.* **10**, 1383-1404 (1993).
- [21] G. NEUGEBAUER and D. KRAMER. *Eine methode zur konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder.* *Ann. Phys. (Leipzig)* **24**, 62 (1969).
- [22] E. T. NEWMAN, L. A. TAMBURINO and T. UNTI. *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric.* *J. Math. Phys.* **4**, 915 (1963).
- [23] J. R. OPPENHEINER and G. M. VOLKOFF. *On Massive Neutron Cores.* *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [24] V. R. PANDHARIPANDE. *Nucl. Phys. A* **178**, 123 (1971).
- [25] V. R. PANDHARIPANDE and R. A. SMITH. *Nucl. Phys. A* **175**, 225 (1975).
- [26] H. QUEVEDO. *Multipole moments in general relativity -static and stationary vacuum solutions-.* *Fortschr. Phys.* **38**, 10 (1990).
- [27] W. SIMON. *The multipole expansion of stationary Einstein-Maxwell fields.* *J. Math. Phys.* **16**, 1035 (1984).
- [28] T. P. SOTIRIOU and T. A. APOSTOLATOS. *Corrected multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes.* *arXiv:gr-qc/0407064v1*, Jul. 2004.
- [29] R. V. WIRINGA, V. FIKS and A. FABROCINI. *Equation of state for dense nucleon matter.* *Phys. Rev. C* **38**, 1010 (1988).