

ALGORITMO PARA EL DESENVOLVIMIENTO DE IMÁGENES DE FASE BASADO
EN EL MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE DIRECCIÓN ALTERNA CON
REGULARIZADOR DE REDUCCIÓN DE RUIDO INTEGRADO

JHON ANDERSON RAMIREZ CONTRERAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2023

ALGORITMO PARA EL DESENVOLVIMIENTO DE IMÁGENES DE FASE BASADO
EN EL MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE DIRECCIÓN ALTERNA CON
REGULARIZADOR DE REDUCCIÓN DE RUIDO INTEGRADO

JHON ANDERSON RAMIREZ CONTRERAS

Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero de Sistemas

Director:

Jorge Luis Bacca Quintero

Ph.D. Computer Science

Codirector:

Henry Arguello Fuentes

Ph.D. Electrical and Computer Engineering

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA

2023

DEDICATORIA

A mi hermano Pablo.

AGRADECIMIENTOS

A todos los que estuvieron involucrados en mi proceso académico y que influyeron directa o indirectamente en la realización de este trabajo.

A Dios, mi familia, panas, e integrantes del grupo de investigación HDSP, principalmente mi director de tesis Jorge Bacca que es un gran científico y persona.

A todos ellos, con los que compartí estos años de pregrado, son muy importantes para mí, mucho más que un simple cartón.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	12
1 OBJETIVOS	16
2 MARCO DE REFERENCIA	17
2.1 DESENVOLVIMIENTO DE IMÁGENES DE FASE	17
2.2 ALGORITMOS ESPACIALES DE DESENVOLVIMIENTO DE FASE	20
2.2.1 Quality-guided Phase Unwrapping Technique:	20
2.2.2 Minimum LP-Norm Methods	20
2.2.3 Simultaneous Phase Unwrapping and Denoising Algorithm for Phase Imaging (SPUD):	21
2.3 ALGORITMOS TEMPORALES DE DESENVOLVIMIENTO DE FASE	22
2.3.1 Temporal Phase Unwrapping of Digital Hologram Sequences:	23
2.3.2 Temporal Phase Unwrapping Algorithm for Automated Interferogram Analysis:	23
2.4 ADMM	24
2.4.1 PnP - ADMM	25
3 METODOLOGÍA PROPUESTA	27
3.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	27
3.2 MÉTODO PROPUESTO	29
4 SIMULACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO	33
4.1 Conjunto de datos	33
4.2 Evaluación del rendimiento	35

4.3 Resultados de las simulaciones	36
5 RESULTADOS EXPERIMENTALES	44
6 CONCLUSIONES	46
BIBLIOGRAFÍA	47

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1 Notación matricial para el desenvolvimiento de imágenes de fase, la figura de la izquierda muestra la notación utilizada para describir la fase envuelta adquirida y la de la derecha la fase desenvuelta resultante.	17
Figura 2 Caso unidimensional e ideal de desenvolvimiento de fase.	18
Figura 3 Fase unidimensional real envuelta adquirida con una relación señal a ruido de 30 dB.	18
Figura 4 Fase original bidimensional de tamaño 500×500 .	19
Figura 5 Fase envuelta adquirida con una relación señal a ruido de 10 dB.	19
Figura 6 El conjunto de datos sintéticos utilizado para evaluar el método consta de 25 posibles configuraciones de imágenes de fase que varían en densidad y relación señal/ruido de 1 a 5.	34
Figura 7 Resultados de los procesos de desenvolvimiento de fase llevados a cabo por CPULSI, GSBC, TIE, SPUD, y nuestro método bajo tres niveles de señal-ruido con una densidad de fase de 2.	38
Figura 8 Resultados de los procesos de desenvolvimiento de fase llevados a cabo por CPULSI, GSBC, TIE, SPUD, y nuestro método bajo tres niveles de señal-ruido con una densidad de fase de 4.	38
Figura 9 Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando SSIM basado en densidad.	39
Figura 10 Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando PSNR basado en densidad.	39
Figura 11 Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando el Índice de calidad basado en densidad.	40

Figura 12	Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando SSIM basado en relación señal-ruido.	41
Figura 13	Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando PSNR basado en relación señal-ruido.	41
Figura 14	Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando el Índice de calidad basado en relación señal-ruido.	42
Figura 15	Errores presentes en las reconstrucciones mostradas en la figura 7	43
Figura 16	Errores presentes en las reconstrucciones mostradas en la figura 8	43
Figura 17	Comparación del proceso de desenvolvimiento de fase realiza- do por CPULSI, GSBC, SPUD, TIE y el método propuesto utilizando el denoiser BM3D en una imagen de fase del cerebro humano.	44
Figura 18	Comparación del proceso de desenvolvimiento de fase realiza- do por CPULSI, GSBC, SPUD, TIE y el método propuesto utilizando el denoiser BM3D en una imagen de fase envuelta InSAR de un volcán.	45

LISTA DE CUADROS

	pág.
Cuadro 1 Comparación del rendimiento del marco PnP ADMM, variando el denoiser incorporado.	37

RESUMEN

TÍTULO: ALGORITMO PARA EL DESENVOLVIMIENTO DE IMÁGENES DE FASE BASADO EN EL MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE DIRECCIÓN ALTERNA CON REGULARIZADOR DE REDUCCIÓN DE RUIDO INTEGRADO *

AUTOR: JHON ANDERSON RAMIREZ CONTRERAS **

PALABRAS CLAVE: Desenvolvimiento de fase, Método de multiplicadores de dirección alterna, Optimización convexa, Imágenes de fase.

DESCRIPCIÓN:

El desenvolvimiento de imágenes de fase es un proceso esencial en una gran variedad de aplicaciones ópticas. Sin embargo, este proceso puede convertirse en un reto cuando la información de fase se degrada significativamente debido al ruido, el submuestreo y los errores de medición. Este trabajo ha desarrollado un método que utiliza el método de multiplicadores de dirección alterna en su variante con un algoritmo de eliminación de ruido incorporado (PnP ADMM, de sus siglas en inglés) para desenvolver los valores bidimensionales de fase y, al mismo tiempo, eliminar el ruido presente. Siguiendo la formulación de mínimos cuadrados basada en las diferencias locales de fase y utilizando una solución de forma cerrada mediante la transformada rápida del coseno, es posible reformular y obtener la solución de forma cerrada de uno de los subproblemas para el marco PnP ADMM, permitiendo así la reconstrucción fiable de la fase incluso en escenarios en los que los niveles de ruido son extremos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director: Jorge Luis Bacca Quintero. Codirector: Henry Arguello Fuentes.

ABSTRACT

TITLE: PLUG-AND-PLAY PHASE UNWRAPPING FOR PHASE IMAGING ^{*}

AUTHOR: JHON ANDERSON RAMIREZ CONTRERAS ^{**}

KEYWORDS: Phase unwrapping, Alternating direction multiplier method, Convex optimization, Phase images.

DESCRIPTION:

Phase Unwrapping (PU) is a crucial step in numerous optical applications. However, the PU process can become challenging when the phase information is significantly degraded due to noise, undersampling, and measurement errors. This paper presents a robust iterative method based on the Plug-and-Play (PnP) ADMM framework for the unwrapping of 2D phase values while concurrently removing noise in each iteration. By formulating the problem as a least-squares criterion based on phase differences and utilizing a closed-form solution via the fast cosine transform, it is possible to reformulate and obtain the closed-form solution of one of the subproblems for the PnP ADMM framework, thereby enabling the reliable reconstruction of the phase even in scenarios where noise levels are extreme.

^{*} Bachelor Thesis

^{**} Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Advisor: Jorge Luis Bacca Quintero. Co-advisor: Henry Arguello Fuentes

INTRODUCCIÓN

El proceso de desenvolvimiento de fase es fundamental para una variedad de aplicaciones científicas, tales como la óptica adaptativa, la reconstrucción de imágenes por resonancia magnética (MRI) ¹, la corrección de fase en radar de apertura sintética (SAR) ², la interferometría ³, la profilometría de proyección de franjas y la holografía. El objetivo de este proceso es determinar valores continuos de la fase a partir de los valores discretos adquiridos, los cuales están limitados al intervalo $(-\pi, \pi]$. Sin embargo, esta tarea puede ser desafiante cuando la fase se ve afectada por factores como un muestreo insuficiente, errores en la medición, o una calibración inadecuada del equipo, lo que ocasiona un ruido excesivo y discontinuidades inesperadas en la fase.

A la hora de abordar el reto de desenvolver la fase, se han propuesto dos categorías principales de algoritmos. La primera categoría, conocida como algoritmos de desenvolvimiento temporal de fase, utiliza información adicional, además del mapa de fase adquirido, tales como multifrecuencia (jerárquica), longitud de onda múltiple (heterodina) y desenvolvimiento numérico-temporal ⁴. La segunda categoría, conocida como algoritmos espaciales, se basa exclusivamente en la fase envuelta

¹ Sofia Chavez, Qing-San Xiang y Li An. "Understanding phase maps in MRI: a new cutline phase unwrapping method". En: *IEEE transactions on medical imaging* 21.8 (2002), págs. 966-977.

² Hanwen Yu y col. "Phase unwrapping in InSAR: A review". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 7.1 (2019), págs. 40-58.

³ Marvin A Schofield y Yimei Zhu. "Fast phase unwrapping algorithm for interferometric applications". En: *Optics letters* 28.14 (2003), págs. 1194-1196.

⁴ Chao Zuo y col. "Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review". En: *Optics and lasers in engineering* 85 (2016), págs. 84-103.

adquirida para reconstruir el mapa de fase original ⁵. Estos algoritmos no requieren múltiples fotogramas a lo largo del eje temporal para su funcionamiento, lo que ocasiona una reducción en el número de restricciones presentes durante el proceso de desenvolvimiento. Sin embargo, esto también implica que las regiones de dificultad tienden a ser más complejas de tratar.

Los métodos de seguimiento de trayectorias, tales como los analizados en los trabajos de referencia ⁶⁷⁸⁹¹⁰, y los algoritmos de minimización de Lp-norm ¹¹⁵, son ejemplos de algoritmos que pertenecen a la segunda categoría de enfoques para resolver el problema de desenvolvimiento de fase. Aunque estos algoritmos pueden recuperar la fase, a menudo es necesario un paso adicional de eliminación de ruido para mejorar la calidad de la reconstrucción.

En relación con el paso de eliminación de ruido, algunos algoritmos lo realizan como una etapa previa al proceso de desenvolvimiento, tal y como se estudia en ¹². Por

-
- ⁵ Dennis C Ghiglia y Mark D Pritt. "Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software". En: *A Wiley Interscience Publication* (1998).
- ⁶ Richard M Goldstein, Howard A Zebker y Charles L Werner. "Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping". En: *Radio science* 23.4 (1988), págs. 713-720.
- ⁷ Ming Zhao y col. "Quality-guided phase unwrapping technique: comparison of quality maps and guiding strategies". En: *Applied optics* 50.33 (2011), págs. 6214-6224.
- ⁸ Qian Kemao, Wenjing Gao y Haixia Wang. "Windowed Fourier-filtered and quality-guided phase-unwrapping algorithm". En: *Applied optics* 47.29 (2008), págs. 5420-5428.
- ⁹ Thomas J Flynn. "Consistent 2-D phase unwrapping guided by a quality map". En: *IGARSS'96. 1996 International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. Vol. 4. IEEE. 1996, págs. 2057-2059.
- ¹⁰ Junyi Xu y col. "An efficient minimum-discontinuity phase-unwrapping method". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 13.5 (2016), págs. 666-670.
- ¹¹ Dennis C Ghiglia y Louis A Romero. "Minimum Lp-norm two-dimensional phase unwrapping". En: *JOSA A* 13.10 (1996), págs. 1999-2013.
- ¹² Silvio Montresor y Pascal Picart. "Quantitative appraisal for noise reduction in digital holographic

otro lado, otros algoritmos realizan las etapas de desenvolvimiento y eliminación de ruido de forma simultánea e iterativa, como se estudia en ¹³¹⁴¹⁵, lo que puede dar como resultado tiempos de ejecución prolongados. También existen métodos no iterativos que son rápidos, como el método SPUD ¹⁶, que realiza la eliminación de ruido y el desenvolvimiento de forma simultánea. Sin embargo, estos métodos solo pueden proporcionar resultados óptimos en escenarios con niveles bajos a moderados de ruido. Independientemente de la estrategia utilizada para abordar la tarea de eliminación de ruido, en escenarios con niveles altos de ruido, la eliminación del mismo puede conllevar una pérdida de la señal original, lo que se traduce en una disminución en la calidad de la reconstrucción.

Uno de los algoritmos que permite resolver problemas de optimización y eliminación de ruido de forma simultánea es el ADMM Plug-and-Play (PnP ADMM). El PnP ADMM es una herramienta ampliamente utilizada para resolver problemas inversos debido a su diseño modular, el cual permite la integración de cualquier denoiser del estado del arte para mejorar la calidad de la reconstrucción en cada iteración. El algoritmo del método de multiplicadores de dirección alterna (ADMM) ha demostrado

phase imaging". En: *Optics Express* 24.13 (2016), págs. 14322-14343.

- ¹³ Jose L Marroquin y Mariano Rivera. "Quadratic regularization functionals for phase unwrapping". En: *JOSA A* 12.11 (1995), págs. 2393-2400.
- ¹⁴ Luciano Guerriero y col. "New regularization scheme for phase unwrapping". En: *Applied Optics* 37.14 (1998), págs. 3053-3058.
- ¹⁵ Lifan Zhou y col. "Interferometric synthetic aperture radar phase unwrapping based on sparse Markov random fields by graph cuts". En: *Journal of Applied Remote Sensing* 12.1 (2018), pág. 015006.
- ¹⁶ Jesus Pineda y col. "SPUD: simultaneous phase unwrapping and denoising algorithm for phase imaging". En: *Applied Optics* 59.13 (2020), págs. D81-D88.

tener resultados prometedores en diversas aplicaciones, como se analiza en ¹⁷¹⁸¹⁹, y se ha estudiado su rápida convergencia global en ²⁰²¹.

Demostrada la eficiencia del algoritmo PnP ADMM, es posible adaptarlo para resolver el problema de desenvolvimiento de imágenes de fase bidimensionales y a su vez eliminar el ruido presente en las mismas. Al definir los subproblemas presentes en el algoritmo para este caso específico y hallar la solución cerrada del subproblema principal mediante una versión específica de la transformada discreta del coseno, se puede recuperar la fase de manera satisfactoria, especialmente en escenarios con relaciones señal-ruido desafiantes. Para validar la calidad de las reconstrucciones de manera robusta, se evalúa el método propuesto sobre escenarios simulados y reales. Se proponen 25 configuraciones distintas de escenarios simulados y dos tipos de escenarios reales, sobre los cuales se evalúa el método, respecto a otros del estado del arte, haciendo uso de tres métricas ampliamente utilizadas en esta área.

¹⁷ Yoshinao Yazaki, Yuichi Tanaka y Stanley H Chan. "Interpolation and denoising of graph signals using plug-and-play ADMM". En: *ICASSP 2019-2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE. 2019, págs. 5431-5435.

¹⁸ Satyakam Baraha y Ajit Kumar Sahoo. "SAR image despeckling using plug-and-play ADMM". En: *IET Radar, Sonar & Navigation* 14.9 (2020), págs. 1297-1309.

¹⁹ Ruizhi Hou, Fang Li y Guixu Zhang. "Truncated Residual Based Plug-and-Play ADMM Algorithm for MRI Reconstruction". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 8 (2022), págs. 96-108.

²⁰ Stanley H Chan, Xiran Wang y Omar A Elgendy. "Plug-and-play ADMM for image restoration: Fixed-point convergence and applications". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 3.1 (2016), págs. 84-98.

²¹ Robert Nishihara y col. "A general analysis of the convergence of ADMM". En: *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2015, págs. 343-352.

1. OBJETIVOS

Objetivo general

- Diseñar, programar y validar un algoritmo de desenvolvimiento de imágenes de fase basado en el método de multiplicadores de dirección alterna en su variante con regularizador de reducción de ruido integrado.

Objetivos específicos

1. Modelar matemáticamente el problema de optimización que describe el desenvolvimiento de fase en dos dimensiones.
2. Diseñar e implementar el algoritmo de desenvolvimiento de fase basado en el método de multiplicadores de dirección alterna.
3. Simular escenarios con fases envueltas bidimensionales bajo distintos niveles de ruido y distintas complejidades de fase.
4. Evaluar el rendimiento del algoritmo de desenvolvimiento de fase en los escenarios simulados y reales en comparación con técnicas del estado del arte.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1. DESENVOLVIMIENTO DE IMÁGENES DE FASE

El proceso del desenvolvimiento de fase consiste en recuperar los valores originales de la fase $\phi_{j,k}$ sobre una grilla bidimensional a partir del mapa de fase adquirido $\psi_{j,k} = \mathcal{W}(\phi_{j,k})$, donde $-\pi \leq \psi_{j,k} \leq \pi$ y $\mathcal{W}$ es el operador de envolvimiento que suma o resta múltiplos de 2π a su argumento.

$$\psi = \begin{bmatrix} \bullet \psi_{00} & \cdots & \bullet \psi_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet \psi_{M-1,0} & \cdots & \bullet \psi_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \rightarrow \phi = \begin{bmatrix} \bullet \phi_{00} & \cdots & \bullet \phi_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet \phi_{M-1,0} & \cdots & \bullet \phi_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

Figura 1. Notación matricial para el desenvolvimiento de imagenes de fase, la figura de la izquierda muestra la notación utilizada para describir la fase envuelta adquirida y la de la derecha la fase desenvuelta resultante.

Este proceso es trivial bajo circunstancias ideales, pero la complejidad aumenta cuando el mapa de fase se encuentra degradado debido a las discontinuidades y al ruido inducido en el sistema durante el proceso de adquisición.

Un ejemplo unidimensional de este proceso se muestra en la figura 1. Los valores de la fase originales, correspondientes a la función $y = 10\sin(x)$, son adquiridos de manera envuelta (curva verde), residen en el rango $(-\pi, \pi)$ y son la única información disponible para realizar una aproximación (curva negra) de la función original (curva azul).

Dado que los sistemas reales tienen imperfecciones, una fase real envuelta tendría un aspecto similar al de la función presente en la figura 3. A diferencia del caso ideal, se observan discontinuidades y altos niveles de ruido, por lo que resulta pertinente emplear un método robusto para llevar a cabo el desenvolvimiento.

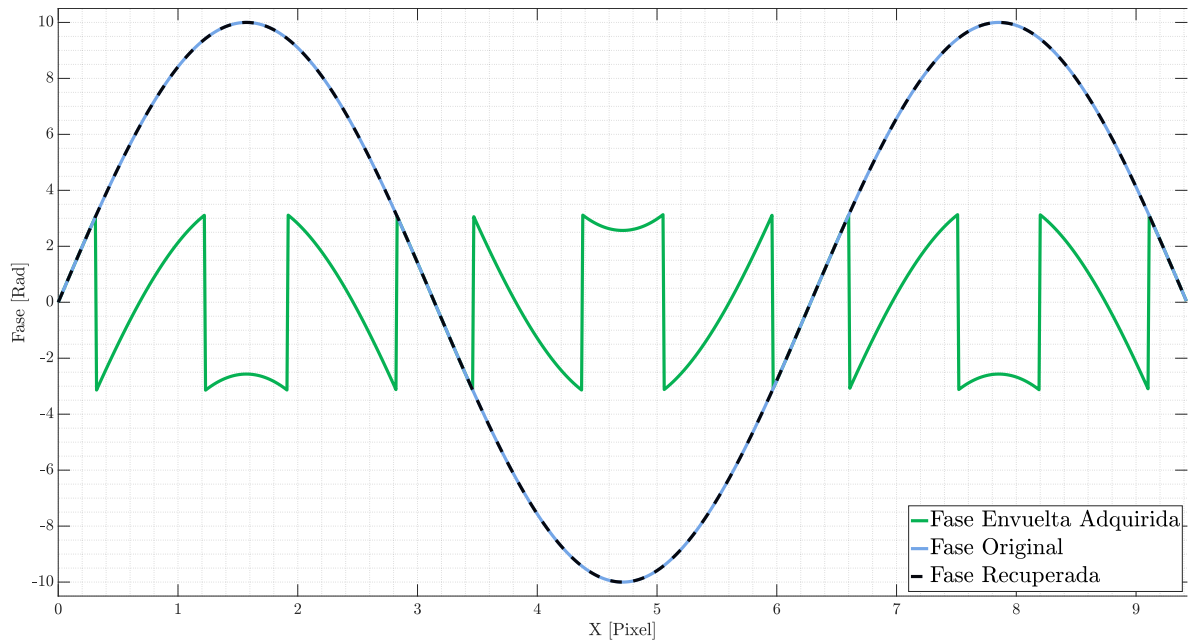


Figura 2. Caso unidimensional e ideal de desenvolvimiento de fase.

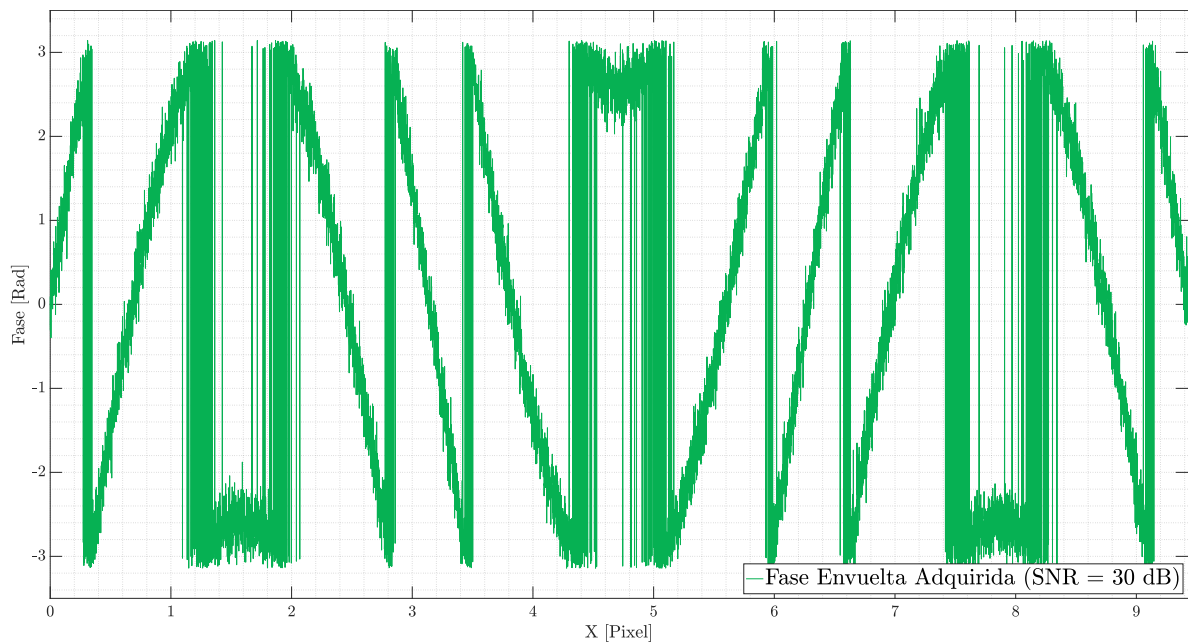


Figura 3. Fase unidimensional real envuelta adquirida con una relación señal a ruido de 30 dB.

El mismo problema, pero en dos dimensiones, el cual será objeto de estudio en este

trabajo, luce de la siguiente forma. Siguiendo la misma lógica, se deben encontrar los valores de fase originales mostrados en la figura 4 a partir de la fase envuelta y con ruido presente en 5.

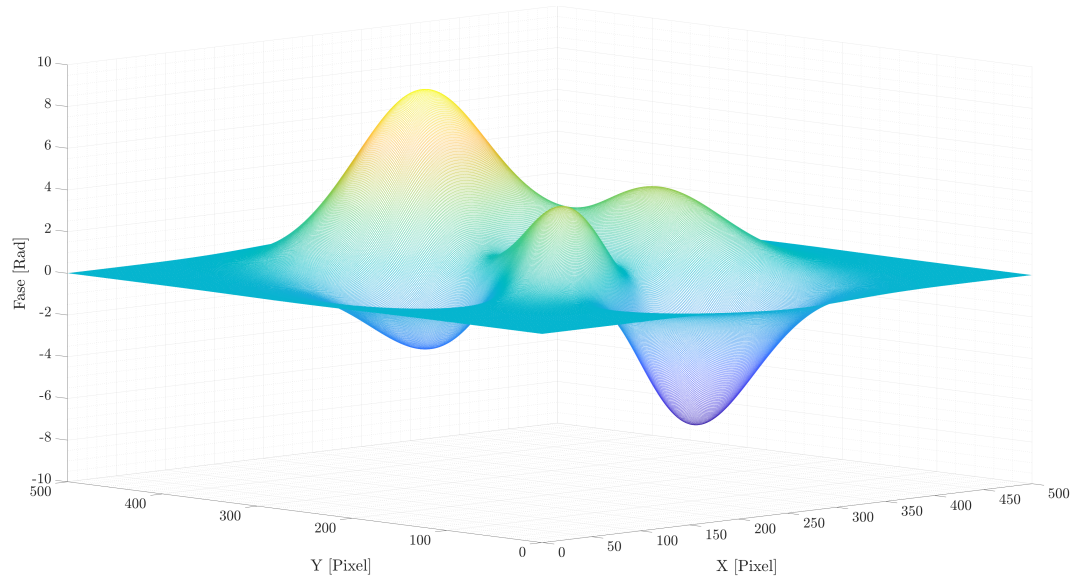


Figura 4. Fase original bidimensional de tamaño 500×500 .

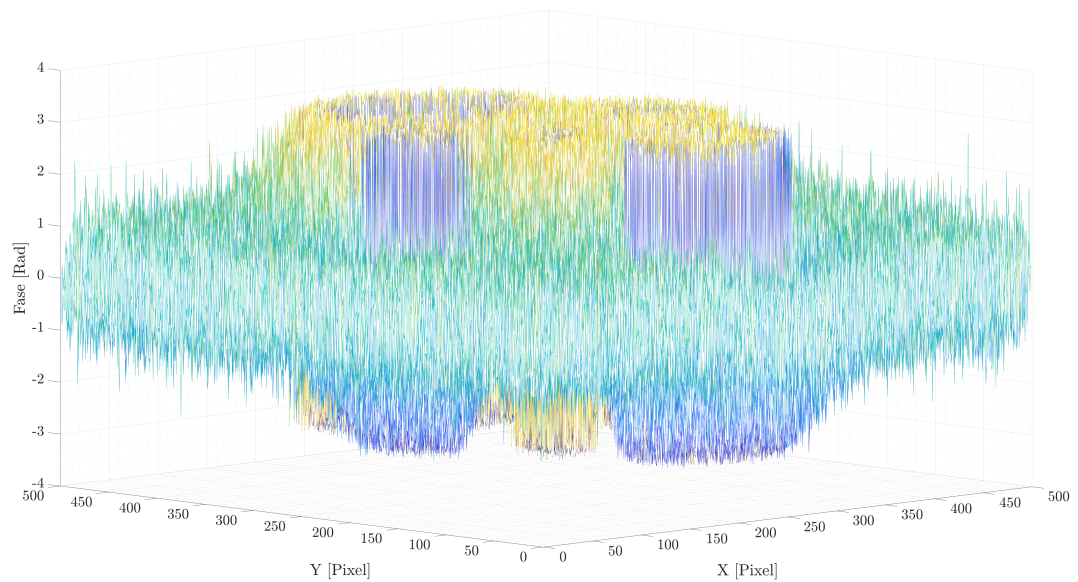


Figura 5. Fase envuelta adquirida con una relación señal a ruido de 10 dB.

Para abordar este problema se han propuesto numerosos algoritmos que se pueden clasificar en dos tipos. Los algoritmos temporales de desenvolvimiento de fase y los algoritmos espaciales para el desenvolvimiento de fase.

2.2. ALGORITMOS ESPACIALES DE DESENVOLVIMIENTO DE FASE

En este caso, para desenvolver los valores de fase, se utiliza la información de los puntos vecinos de cada pixel, asumiendo la existencia de una continuidad entre ellos. Estos son algunos de los algoritmos que destacan en esta rama.

2.2.1. Quality-guided Phase Unwrapping Technique: Existen numerosos algoritmos de desenvolvimiento de fase guiados por calidad. Dentro de esta aproximación se encuentran métodos como el propuesto por Goldstein (GSBC) ⁶, al igual que otros estudiados por Zhao et al. ⁷. Los puntos corruptos en las imágenes de fase tienden a expandirse y degradar los valores vecinos. Por este motivo, resulta conveniente desenvolver la fase partiendo por las secciones más confiables de la misma y deteniéndose justo en las zonas donde los valores desenvueltos no pueden estimarse de forma fiable.

Partiendo de un píxel semilla, previamente seleccionado de una región donde se presume no hay errores, inicia el proceso de desenvolvimiento añadiendo múltiplos de 2π al mismo. A medida que estos se desenvuelven, el proceso de aceptación de los nuevos valores desenvueltos se realiza utilizando una métrica de confianza calculada a partir de sus vecinos, generalmente regiones de tamaño $n \times n$, y teniendo en cuenta un intervalo de tolerancia preestablecido. Finalmente, mediante técnicas de interpolación lineal se estiman las regiones problemáticas.

2.2.2. Minimum LP-Norm Methods Partiendo de las diferencias de fase de la fase envuelta adquirida ψ y de la fase desenvuelta ϕ . El mapa de fase óptimo $\hat{\phi}$, se

estima minimizando la siguiente función de costo bajo una norma L^p ¹¹

$$\sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} \|\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1} - \Delta_{i,j}^x\|_p^p + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} \|\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} - \Delta_{i,j}^y\|_p^p. \quad (1)$$

El problema de optimización formulado puede resolverse de múltiples maneras, que varían en función de la norma empleada y las asunciones efectuadas sobre el sistema. Destacan dos tipos de aproximaciones, en la primera se reescribe la función de coste en forma integral, asumiendo que se trabaja con funciones continuas y en la segunda se trabaja directamente con la versión discreta. En ambos casos, surge un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, cuyo resultado proporciona la fase esperada, para el caso de la solución bajo mínimos cuadrados la ecuación corresponde a la discretización de la ecuación de Poisson y su solución permite obtener la fase desenvuelta deseada, la ecuación es la siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = \rho(x, y). \quad (2)$$

Algunos trabajos como: el propuesto por Ghilia ¹¹, Unwrapping algorithm based on least-squares, iterations, and phase calibration to unwrap phase highly corrupted by decorrelation noise, (CPULSI), propuesto por Xia et al. ²², SPUD ¹⁶ del cuál se hablará a continuación y el trabajo planteado corresponden a este tipo de algoritmos.

2.2.3. Simultaneous Phase Unwrapping and Denoising Algorithm for Phase Imaging (SPUD): SPUD ¹⁶ es un método no iterativo que permite desenvolver las imágenes bidimensionales de fase y eliminar simultáneamente el ruido presente en ellas. Se basa en la solución cerrada vía transformada discreta del coseno

²² H-T Xia y col. "Unwrapping algorithm based on least-squares, iterations, and phase calibration to unwrap phase highly corrupted by decorrelation noise". En: *Digital Holography and Three-Dimensional Imaging*. Optica Publishing Group. 2016, DW5E-8.

(DCT) de la formulación de mínimos cuadrados para el desenvolvimiento de fase. Asumiendo que la imagen se puede expresar con pocos coeficientes en el dominio del coseno, es posible deshacerse de los menos representativos y, por tanto, del ruido, con una mínima complejidad computacional.

El problema de optimización que describe este método es el siguiente:

$$\min_{\phi} \left\{ \sum_{ij} (\Delta\phi_{i,j}^x - \Delta\psi_{i,j}^x)^2 + \sum_{ij} (\Delta\phi_{i,j}^y - \Delta\psi_{i,j}^y)^2 \right\} + \|\mathcal{T}(\phi)\|_0, \quad (3)$$

En él, se busca recuperar los valores de fase que minimizan sus diferencias locales, sobre el eje horizontal y vertical respectivamente, a la vez que se truncan los coeficientes en el dominio $\mathcal{T}$ de la siguiente manera, lo que permite eliminar el ruido de manera no iterativa

$$\Theta_{\text{hard}}^{\lambda}(\hat{\phi}_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\hat{\phi}_{i,j}| \leq \lambda \\ \hat{\phi}_{i,j}, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (4)$$

2.3. ALGORITMOS TEMPORALES DE DESENVOLVIMIENTO DE FASE

A diferencia del grupo anterior, el desenvolvimiento de la fase se realiza a lo largo del eje temporal; se utilizan imágenes de fase adicionales para realizar el desenvolvimiento, lo que evita la propagación de errores que suele producirse en las regiones ruidosas, algo habitual cuando se utiliza una sola imagen de fase para realizar la recuperación. Dentro de los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial, destacan los siguientes.

2.3.1. Temporal Phase Unwrapping of Digital Hologram Sequences: En este caso concreto ²³, la información de fase se recupera utilizando cientos de hologramas de un objeto que ha sido sometido a deformaciones dinámicas, como pueden ser un conjunto de vibraciones. Como es sabido, los valores de la fase envuelta proporcionados por cada holograma se desenvuelven añadiendo un múltiplo de 2π a cada uno de sus píxeles, para su estimación se hace uso de la información temporal. El proceso de desenvolvimiento implica la detección de pasos de fase, es decir, el cambio existente entre dos imágenes de fase sucesivas. Si el cambio es mayor que π , el múltiplo se incrementa en 1 y si el valor es menor que $-\pi$ se reduce una unidad.

2.3.2. Temporal Phase Unwrapping Algorithm for Automated Interferogram Analysis: En este caso se utiliza el enfoque espacial para crear un algoritmo de desenvolvimiento de mapas de fase interferométricos ²⁴.

La idea básica del método es que la fase de cada píxel se mide en función del tiempo. Seguido a esto, el desenvolvimiento se lleva a cabo a lo largo del eje temporal para cada píxel, independientemente de los demás. De este modo, los límites y las regiones con mala relación señal-ruido no influyen negativamente en los puntos buenos.

Las principales ventajas de este método son:

- Es intrínsecamente sencillo.
- Los errores de fase se limitan a las regiones de alto ruido.

²³ Giancarlo Pedrini y col. "Temporal phase unwrapping of digital hologram sequences". En: *Applied optics* 42.29 (2003), págs. 5846-5854.

²⁴ Jonathan M Huntley y Henrik Saldner. "Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis". En: *Applied Optics* 32.17 (1993), págs. 3047-3052.

- Los mapas de fase que contienen discontinuidades globales se desenvuelven correctamente, siempre que las posiciones de las discontinuidades permanezcan fijas con el tiempo.

2.4. ADMM

El método de multiplicadores de dirección alterna (ADMM de sus siglas en inglés) es un algoritmo simple y robusto empleado en la resolución de problemas de optimización convexa. Fue desarrollado a mediados de los años 70 y está fuertemente influenciado por sus precursores, principalmente: los métodos del Lagrangiano aumentado y el método de descomposición dual ²⁵.

Se tiene un problema de la siguiente forma, donde se requiere optimizar una variable respecto a dos funciones f y g de las cuales se asume su convexidad. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}). \quad (5)$$

ADMM expresa este problema como uno con restricciones de la siguiente manera

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{v}), \text{ subject to } \mathbf{x} = \mathbf{v}. \quad (6)$$

El Lagrangiano aumentado se define como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{v}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{x} - \mathbf{v}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2. \quad (7)$$

El valor óptimo del problema viene dado por:

$$\mathbf{x}^* = \inf\{f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) | \mathbf{x} = \mathbf{v}\}. \quad (8)$$

²⁵ Stephen Boyd y col. "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers". En: *Foundations and Trends in Machine learning* 3.1 (2011), págs. 1-122.

El cual se puede obtener resolviendo una secuencia de subproblemas de la forma:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right\|^2, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \lambda g(\mathbf{v}) + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} \right\|^2, \quad (10)$$

$$\overline{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{u}}^{(k)} + \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right). \quad (11)$$

Donde se minimiza $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ y se realiza un paso de actualización dual, respectivamente.

2.4.1. PnP - ADMM La versión ‘Plug and Play’ del ADMM (PnP ADMM de sus siglas en inglés) permite la integración de un paso de eliminación de ruido en uno de los subproblemas descritos anteriormente. Además de converger a la solución óptima, al igual que en la versión original del ADMM, elimina el ruido presente en la señal que está siendo recuperada de manera simultánea ²⁰.

La secuencia de subproblemas para esta variante del ADMM quedaría de la siguiente manera.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right\|^2, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathcal{D}_\sigma \left(\tilde{\mathbf{v}}^{(k)} \right), \quad (13)$$

$$\overline{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \overline{\mathbf{u}}^{(k)} + \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right). \quad (14)$$

$\mathcal{D}_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ corresponde a un algoritmo cualquiera de eliminación de ruido (denoiser) del estado del arte.

Para este proyecto en específico se probarán cuatro algoritmos de eliminación de

ruido debido a la eficiencia y simplicidad en la implementación, Block-matching and 3D filtering (BM3D) ²⁶, Recursive Filtering (RF), Non-Local Means NLM ²⁷ y Total Variation Denoising (TV) ²⁸.

²⁶ Aram Danielyan, Vladimir Katkovnik y Karen Egiazarian. "BM3D frames and variational image deblurring". En: *IEEE Transactions on image processing* 21.4 (2011), págs. 1715-1728.

²⁷ Antoni Buades, Bartomeu Coll y J-M Morel. "A non-local algorithm for image denoising". En: *2005 IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'05)*. Vol. 2. Ieee. 2005, págs. 60-65.

²⁸ Curtis R Vogel y Mary E Oman. "Iterative methods for total variation denoising". En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 17.1 (1996), págs. 227-238.

3. METODOLOGÍA PROPUESTA

3.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El proceso de adquisición de sistemas ópticos de fase bidimensional $M \times N$ envuelta con ruido, se puede expresar matemáticamente como:

$$\psi_{i,j} = \mathcal{W}(\phi_{i,j}) + \eta_{i,j}, \quad (15)$$

Donde $\phi_{i,j}$ corresponde a los valores de fase originales, $\psi_{i,j}$ a los valores de fase envueltos, $\eta_{i,j}$ es el ruido presente en la fase envuelta y $\mathcal{W}$ es el operador de envolvimiento, que envuelve todos los valores de fase al rango $(-\pi, \pi]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &=: \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow (-\pi, \pi]^{M \times N} \\ \psi &\rightarrow \text{mod}(\phi + \pi, 2\pi) - \pi. \end{aligned} \quad (16)$$

El proceso de desenvolvimiento consiste en recuperar los valores de fase originales $\phi_{i,j}$ a partir de las fases adquiridas $\psi_{i,j}$, que se miden módulo 2π , en las mismas posiciones de la matriz.

Siguiendo la formulación matricial de Hunt ²⁹ es posible relacionar el mapa de fase con sus diferencias locales en un sentido de mínimos cuadrados con una expresión sencilla, de la forma

²⁹ BR Hunt. "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences". En: *JOSA* 69.3 (1979), págs. 393-399.

$$\min_{\phi} \left\{ \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} - \delta_{i,j}^x)^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} - \delta_{i,j}^y)^2 \right\}, \quad (17)$$

Donde

$$\delta_{i,j}^x = \mathcal{W}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) \quad \delta_{i,j}^y = \mathcal{W}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}), \quad (18)$$

representan las diferencias de fase envueltas de $\psi_{i,j}$ en las dimensiones horizontal y vertical, respectivamente. Las ecuaciones 17 y 18 pueden representarse en forma matricial con la siguiente expresión:

$$\phi = \underset{\phi \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{P}\phi - \boldsymbol{\delta} \right\|_2^2, \quad (19)$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2]$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son las matrices que generan las diferencias locales, horizontales y verticales, respectivamente, de la forma.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D \\ -I & I & \\ & \ddots & \ddots \\ & -I & I \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde D viene dada por:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2. MÉTODO PROPUESTO

La metodología propuesta emplea una función de regularización implícita, representada por $g(\phi)$, con el fin de lograr eficazmente tanto el desenvolvimiento de fase como la reducción de ruido de forma simultánea. La utilización del marco Plug-and-Play ADMM, como se describe en ²⁰, permite la transformación de este problema sin restricciones

$$\hat{\phi} = \underset{\phi}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{P}\phi - \delta \right\|_2^2 + \lambda g(\phi), \quad (21)$$

en uno con restricciones de la siguiente manera:

$$\left(\hat{\phi}, \hat{v} \right) = \underset{\phi, v}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{P}\phi - \delta \right\|_2^2 + \lambda g(v) \quad \text{s.t.} \quad \phi = v. \quad (22)$$

La utilización de esta técnica, denominada método de "variable dual-split", permite la resolución eficaz de problemas de optimización a gran escala mediante la solución alternativa de variables primarias y variables duales. Este enfoque permite una reducción de la complejidad computacional y la posibilidad de implementación en paralelo, facilitando así la solución eficiente de problemas de optimización a gran escala. Su función lagrangiana aumentada se define como

$$\mathcal{L}(\phi, v, u) = f(\phi) + \lambda g(v) + u^T(\phi - v) + \frac{\epsilon}{2} \left\| \phi - v \right\|_2^2. \quad (23)$$

Los valores óptimos que minimizan $\mathcal{L}(\phi, v, u)$, pueden encontrarse resolviendo la siguiente secuencia de subproblemas.

$$\phi^{(k+1)} = \underset{\phi \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{P}\phi - \delta \right\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2} \left\| \phi - \tilde{\phi}^{(k)} \right\|_2^2, \quad (24)$$

$$v^{(k+1)} = \mathcal{D}_{\sigma_k} \left(\phi^{(k+1)} + u^{(k)} \right), \quad (25)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \left(\phi^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right). \quad (26)$$

Con $\tilde{\phi}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k)}$. $\mathcal{D}_{\sigma_k}$ denota un algoritmo de eliminación de ruido y $\sigma_k = \sqrt{\lambda/\epsilon_k}$ representa un parámetro que regula la fuerza del mismo.

A partir de la solución de la ecuación 17, formulada por Ghiglia en ³⁰, es posible determinar también la solución de forma cerrada de la ecuación 24. Diferenciando la ecuación y haciéndola igual a cero:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{P}\phi - \delta) + \omega(\tilde{\phi} - \phi) = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{\epsilon_k}{2}}. \quad (27)$$

El proceso de expansión y selección de la componente representativa de la ecuación anterior da como resultado una expresión que se asemeja a la propuesta anteriormente por Hudgin y Fried en ³¹ y ³² respectivamente, que describe la relación entre las diferencias de la fase adquirida y los valores de la fase original mediante la aplicación del criterio de mínimos cuadrados.

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} - (4 + \omega^2)\phi_{i,j} &= \rho_{i,j}, \\ \rho_{i,j} &= \Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y + \Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x - \omega^2\tilde{\phi}_{i,j}. \end{aligned} \quad (28)$$

Esta expresión, que se asemeja a la forma discretizada de la ecuación de Poisson en una malla bidimensional con condiciones de frontera de Neumann, puede resolverse para $\phi_{i,j}$ utilizando una implementación específica de la transformada discreta del

³⁰ Dennis C Ghiglia y Louis A Romero. "Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods". En: *JOSA A* 11.1 (1994), págs. 107-117.

³¹ Richard H Hudgin. "Wave-front reconstruction for compensated imaging". En: *JOSA* 67.3 (1977), págs. 375-378.

³² David L Fried. "Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements". En: *JOSA* 67.3 (1977), págs. 370-375.

coseno (DCT). Mediante la aplicación de la misma a ambos lados de 28, se llega a:

$$\hat{\phi}_{m,n}(C_m^{i+1}C_n^j + C_m^{i-1}C_n^j + C_m^iC_n^{j+1} + C_m^iC_n^{j-1} - \alpha C_m^iC_n^j) = \hat{\rho}_{m,n}C_m^iC_n^j \quad (29)$$

Donde $\alpha = 4 + \omega^2$, $C_m^i = \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right]$ and $C_n^j = \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right]$. $\hat{\phi}_{m,n}$ y $\hat{\rho}_{m,n}$ corresponde al resultado de aplicar la transformada discreta del coseno a $\phi_{i,j}$ y $\rho_{i,j}$ respectivamente. Utilizando las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} C_m^{i+1}C_n^j + C_m^{i-1}C_n^j &= 2C_n^jC_m^iC_m^{1(i)} \\ C_m^iC_n^{j+1} + C_m^iC_n^{j-1} &= 2C_m^iC_n^jC_n^{1(j)}, \end{aligned} \quad (30)$$

y solucionando para $\hat{\phi}_{m,n}$:

$$\hat{\phi}_{m,n}(2C_n^jC_m^iC_m^{1(i)} + 2C_m^iC_n^jC_n^{1(j)} - \alpha C_m^iC_n^j) = \hat{\rho}_{m,n}C_m^iC_n^j, \quad (31)$$

$$\hat{\phi}_{m,n}(2C_m^{1(i)} + 2C_n^{1(j)} - \alpha) = \hat{\rho}_{m,n}, \quad (32)$$

$$\hat{\phi}_{m,n} = \frac{\hat{\rho}_{m,n}}{(2C_m^{1(i)} + 2C_n^{1(j)} - \alpha)}, \quad (33)$$

$$\hat{\phi}_{m,n} = \frac{\hat{\rho}_{m,n}}{2(\cos(\frac{\pi m}{M}) + \cos(\frac{\pi n}{N}) - \frac{\epsilon_k}{4} - 2)}. \quad (34)$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa al valor obtenido de $\hat{\phi}_{m,n}$, se puede determinar la fase desenvuelta $\phi_{m,n}$, en cada iteración. El procedimiento completo de desenvolvimiento de fase propuesto, se resume en el algoritmo 1. Se inicia envolviendo las diferencias locales de la fase adquirida (paso 3) para luego resolver la ecuación diferencial resultante en el dominio del coseno (pasos 4 al 6), este resultado va a ser afectado por el algoritmo de eliminación de ruido escogido en cada iteración (paso 7) mientras se logra la convergencia global del problema de desen-

volvimiento en los pasos posteriores hasta el punto de tolerancia deseado (pasos 8 al 12).

Algorithm 1 Algoritmo para el desenvolvimiento de Fase vía PnP ADMM

```

1: Input: Fase Envuelta  $\psi_{i,j}$ , Parámetros del ADMM:  $\epsilon, \lambda, \gamma$ 
2: while No convergencia do
3:    $\rho_{i,j} = \delta_{i,j-1}^y - \delta_{i,j}^y - \delta_{i-1,j}^x + \delta_{i,j}^x + \omega^2 \phi_{i,j}^k$ 
4:    $\hat{\rho}_{i,j} = \tau(\rho_{i,j})$  ▷ Forward 2D DCT
5:    $\hat{\phi}_{m,n} = \frac{\hat{\rho}_{m,n}}{2(\cos(\frac{\pi m}{M}) + \cos(\frac{\pi n}{N}) - \frac{\epsilon}{4} - 2)}$  ▷ Using (32)
6:    $\phi_{i,j}^{(k+1)} = \tau^{-1}(\hat{\phi}_{i,j})$  ▷ Inverse 2D DCT
7:    $\mathbf{v}^{(k+1)} = D_{\sigma_k}(\phi_{i,j}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}), \sigma_k = \sqrt{\lambda/\epsilon_k}$  ▷ Eliminación de ruido
8:    $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + (\phi^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)})$ 
9:   if  $\Delta_{k+1} \geq \eta \Delta_k$  then
10:      $\epsilon_{k+1} = \gamma \epsilon_k$ 
11:   end
12:    $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$ 
13: end if
14:    $k = k + 1$ 
15: end while

```

4. SIMULACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO

Para valorar la eficacia del método propuesto, se evaluó su rendimiento en escenarios reales y simulados con distintas relaciones señal/ruido. Para ello, se eligieron cuatro algoritmos del estado del arte, dentro de los cuales se encuentran algoritmos basados en minimizar una norma matricial y algoritmos guiados por calidad. El primer algoritmo es el algoritmo no iterativo "Simultaneous Phase Unwrapping and Denoising for Phase Imaging", denominado SPUD ¹⁶, el segundo método, denominado TIE, basado en la ecuación de transporte de intensidad ³³, el tercero denominado GSBC propuesto en ³⁴ y, por último, el método CPULSI ²² que al igual que el método propuesto también se basa en un enfoque de mínimos cuadrados.

4.1. Conjunto de datos

Se utilizó la función Peaks de MATLAB ³⁵ para generar escenarios simulados, mediante la creación de mapas de fase de tamaño 512×512 con cinco densidades diferentes. Seguido a esto, se modificó cada mapa introduciendo valores extremos de ruido en cinco niveles, que oscilan entre 1 y 5 de relación señal-ruido (SNR). En resumen, se crearon 25 tipos diferentes de fases envueltas, lo que permite un estudio más exhaustivo del método. Los datos sintéticos utilizados pueden visualizarse en la figura 6. Como se puede observar, densidades mayores implican picos

³³ Zixin Zhao y col. "Robust 2D phase unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation". En: *Measurement Science and Technology* 30.1 (2018), pág. 015201.

³⁴ Richard M. Goldstein, Howard A. Zebker y Charles L. Werner. "Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping". En: *Radio Science* 23.4 (1988), págs. 713-720. DOI: 10.1029/RS023i004p00713.

³⁵ MATLAB. *version 9.8.0.1380330 (R2020a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.

más altos y, por lo tanto, un proceso de desenvolvimiento más complejo. Siguiendo esta idea, el caso simulado propuesto con mayor complejidad corresponde a la fase con una densidad de 5 y un SNR = 1 dB y el caso que representa menor dificultad presenta una densidad de 1 y un SNR de 5 dB.

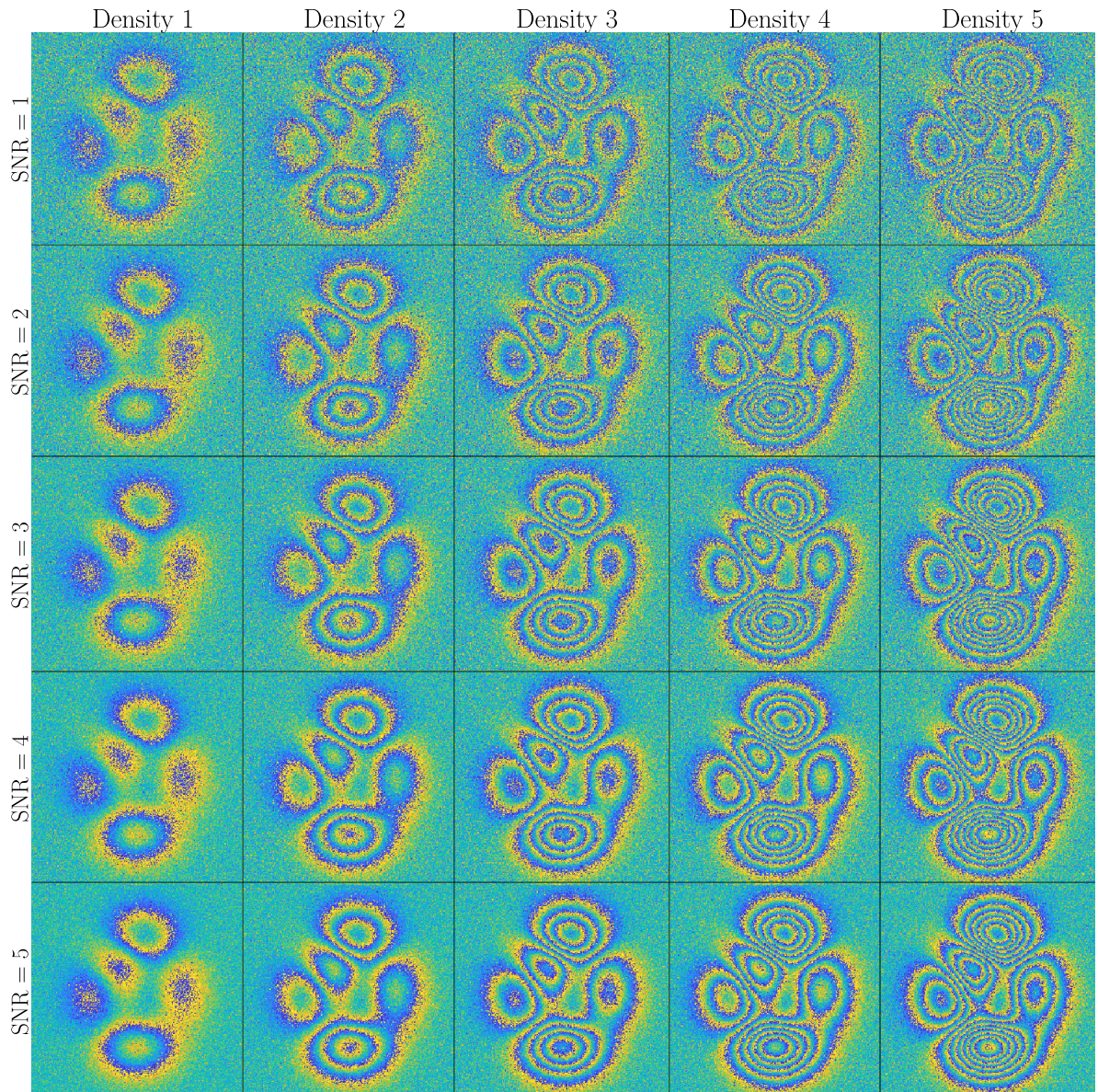


Figura 6. El conjunto de datos sintéticos utilizado para evaluar el método consta de 25 posibles configuraciones de imágenes de fase que varían en densidad y relación señal/ruido de 1 a 5.

4.2. Evaluación del rendimiento

Para evaluar de forma robusta el rendimiento del algoritmo, se emplearon tres métricas. La primera de estas métricas es el Índice de Calidad, propuesto en la referencia ³⁶. Esta métrica permite evaluar la distorsión estructural presente en las fases des-envueltas en relación con las fases originales.

El Índice de Calidad se define como:

$$Q = \frac{4\sigma_{xy}\bar{x}\bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)[(\bar{x})^2 + (\bar{y})^2]}. \quad (35)$$

Sus valores oscilan entre $[-1, 1]$, siendo 1 el resultado obtenido cuando ambas imágenes son iguales.

Reescribiendo la métrica de esta manera se ve que es el resultado de la interacción de 3 factores:

$$Q = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \cdot \frac{2\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x})^2 + (\bar{y})^2} \cdot \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (36)$$

El primer término del Índice de Calidad es un coeficiente de correlación lineal, mientras que el segundo y el tercero corresponden a medidas de similitud entre las medias y las varianzas de las señales involucradas. Esta combinación de componentes hace del índice de calidad una métrica especialmente adecuada para la evaluación del rendimiento del algoritmo en esta aplicación.

La segunda métrica empleada en la evaluación del rendimiento del algoritmo es el PSNR, que es una medida ampliamente utilizada para evaluar la calidad de la reconstrucción de imágenes tras tareas que provocan una pérdida de información

³⁶ Zhou Wang, Alan C Bovik y Ligang Lu. "Why is image quality assessment so difficult?" En: *2002 IEEE International conference on acoustics, speech, and signal processing*. Vol. 4. IEEE. 2002, págs. IV-3313.

en las mismas, como la compresión. El PSNR entre dos imágenes, denotadas como x e y , se representa matemáticamente como:

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|x\|_{\infty} MN}{\|y - x\|_2^2} \right). \quad (37)$$

Valores más altos de PSNR implican una mayor calidad de imagen, ya que a medida que el MSE se aproxima a cero, el resultado final se aproxima a infinito.

La última métrica utilizada es la medida del índice de similitud estructural (SSIM). El objetivo principal de esta métrica es medir la similitud entre 2 imágenes considerando tres factores: distorsión de contraste, distorsión de luminancia y la correlación presente entre ellas

$$\text{SSIM}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)}. \quad (38)$$

4.3. Resultados de las simulaciones

Para validar el método propuesto utilizando datos sintetizados, se realizaron numerosas pruebas utilizando los tres criterios mencionados como métricas de referencia. En primer lugar, comparamos el método propuesto variando el algoritmo de eliminación de ruido incorporado en el marco Plug-and-Play. A continuación, comparamos el método propuesto con otros métodos del estado del arte en los escenarios planteados.

Teniendo en cuenta que una de las características destacadas del marco PnP es la inclusión de cualquier algoritmo de eliminación de ruido, el cual actúa en cada iteración, es fundamental evaluar la influencia del mismo en el resultado final al variarlo. Se tuvieron en cuenta los siguientes algoritmos Block-matching y filtrado 3D (BM3D) ²⁶, medias no locales (NLM) ²⁷, filtrado recursivo (RF), y Total variation denoising (TV) ²⁸.

Cuadro 1. Comparación del rendimiento del marco PnP ADMM, variando el denoiser incorporado.

Method	Density	SNR = 1 [dB]			SNR = 2 [dB]			SNR = 3 [dB]			SNR = 4 [dB]			SNR = 5 [dB]		
		Q. Index	PSNR	SSIM	Q. Index	PSNR	SSIM	Q. Index	PSNR	SSIM	Q. Index	PSNR	SSIM	Q. Index	PSNR	SSIM
BM3D	1	0,4511	19,9704	0,9384	0,5348	22,6466	0,9702	0,6249	25,2651	0,9848	0,6411	26,2573	0,9888	0,7138	31,0422	0,996
	2	0,5417	20,7106	0,9625	0,5776	23,0599	0,9726	0,6602	26,2925	0,9859	0,6704	33,6521	0,9969	0,732	31,8083	0,9943
	3	0,5187	23,0143	0,9632	0,6272	23,0016	0,9753	0,6378	29,4644	0,9924	0,68	33,7316	0,9951	0,7855	37,3057	0,9986
	4	0,6069	23,3799	0,9715	0,6132	24,0332	0,9735	0,6968	27,3285	0,9903	0,7184	34,6618	0,9948	0,7541	38,262	0,9977
	5	0,5851	22,5151	0,977	0,6315	26,3189	0,9897	0,6751	30,6167	0,993	0,7164	37,4281	0,9984	0,7687	36,5287	0,9987
NLM	1	0,4488	18,8726	0,9315	0,5378	22,8793	0,9787	0,6272	25,2167	0,9867	0,6512	25,4773	0,99	0,6995	28,0983	0,9936
	2	0,5445	20,9154	0,9686	0,5844	23,324	0,9861	0,666	26,3128	0,9888	0,6755	26,5185	0,9919	0,6933	27,5583	0,9934
	3	0,5257	22,476	0,9733	0,631	23,1149	0,9858	0,6285	25,5588	0,9893	0,6864	27,7059	0,9935	0,7309	35,6455	0,9984
	4	0,6093	23,6287	0,9869	0,6195	24,5652	0,9872	0,6998	27,4858	0,993	0,7091	27,491	0,9935	0,7175	30,3315	0,9957
	5	0,5886	22,5729	0,9824	0,6393	25,8451	0,9896	0,6668	26,6476	0,992	0,6985	32,6238	0,9972	0,7395	37,5289	0,999
TV	1	0,4477	18,8117	0,9304	0,5363	23,0516	0,9795	0,6247	25,3012	0,9872	0,6491	25,4709	0,9901	0,6915	27,7439	0,9883
	2	0,536	20,7813	0,9672	0,5834	23,2167	0,9857	0,6621	26,254	0,9893	0,6747	26,5153	0,9915	0,7203	30,2847	0,9889
	3	0,5256	22,485	0,9734	0,6239	22,7256	0,985	0,6241	25,3567	0,9857	0,6724	27,6101	0,9911	0,7691	35,0009	0,9937
	4	0,6082	23,5926	0,9867	0,6182	24,2898	0,9866	0,6915	27,1528	0,9927	0,6968	27,3753	0,9907	0,7219	36,2683	0,9953
	5	0,5815	22,5822	0,9803	0,6251	25,3331	0,9875	0,6628	26,3715	0,9913	0,7224	33,1128	0,991	0,7411	37,1375	0,9964
RF	1	0,4485	18,8871	0,9316	0,5364	23,0397	0,9795	0,6249	25,2908	0,9872	0,6499	25,4755	0,9901	0,6807	27,2998	0,9915
	2	0,5421	20,8484	0,968	0,584	23,2246	0,9858	0,6631	26,3389	0,9889	0,6754	26,5265	0,9918	0,6823	27,1503	0,9926
	3	0,5258	22,4769	0,9733	0,6287	23,1604	0,9856	0,6324	25,5572	0,9887	0,674	26,8019	0,9922	0,6996	28,2408	0,9941
	4	0,6088	23,6122	0,9868	0,6183	24,2871	0,9866	0,698	27,417	0,9928	0,689	27,0874	0,9928	0,6785	27,7518	0,9933
	5	0,5865	22,5814	0,9822	0,6329	25,7465	0,9894	0,6638	26,3833	0,9914	0,6759	27,1663	0,9922	0,7002	27,6776	0,9936

En la tabla 1, se pueden ver los resultados generados tras los experimentos utilizando los algoritmos de eliminación de ruido antes mencionados. Aunque no hay una diferencia muy significativa en la mayoría de los casos, se puede observar que los algoritmos BM3D y NLM superaron a los demás en la mayoría de las pruebas.

A continuación, se realizaron pruebas en estos mismos escenarios, pero comparando el método propuesto con el denoiser BM3D frente a otros cuatro métodos de desenvolvimiento de fase: CPULSI, GSBC, TIE y SPUD. Las figuras 7 y 8 muestran las diferentes reconstrucciones bajo tres relaciones señal-ruido diferentes, 1, 3 y 5 dB de SNR, utilizando una densidad de fase de 2 y 4 respectivamente. Podemos apreciar algunas discontinuidades presentes en los tres primeros métodos en los escenarios más complejos y, al mismo tiempo, un suavizado presente en SPUD y nuestro método debido a que la solución de ambos utilizan metodologías de eliminación de ruido y la minimización de una norma matricial.

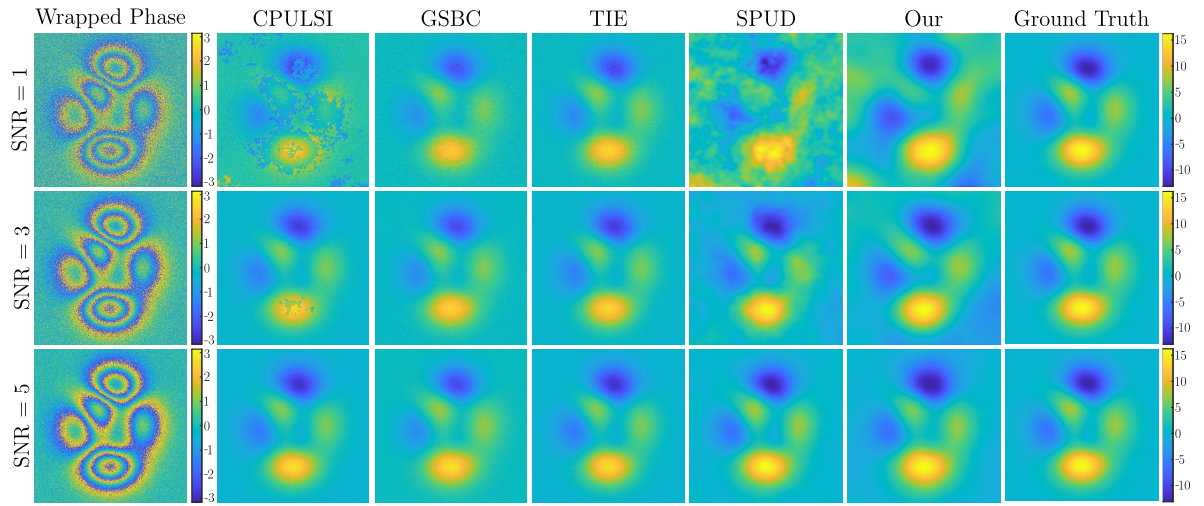


Figura 7. Resultados de los procesos de desenvolvimiento de fase llevados a cabo por CPULSI, GSBC, TIE, SPUD, y nuestro método bajo tres niveles de señal-ruído con una densidad de fase de 2.

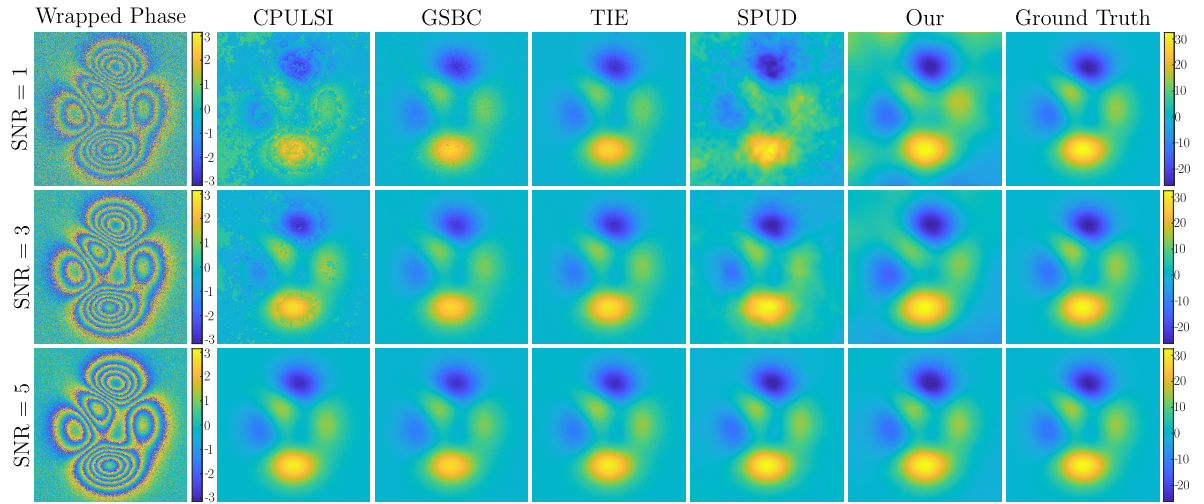


Figura 8. Resultados de los procesos de desenvolvimiento de fase llevados a cabo por CPULSI, GSBC, TIE, SPUD, y nuestro método bajo tres niveles de señal-ruído con una densidad de fase de 4.

Las figuras 9, 10 y 11, muestran cuantitativamente los resultados de los métodos en los escenarios simulados propuestos tomando como referencia las densidades. Como era de esperar, los métodos más robustos a la distorsión estructural en el

proceso de desenvolvimiento muestran niveles superiores al resto de métodos en las métricas que miden precisamente estas características, como son el SSIM y el Índice de Calidad.

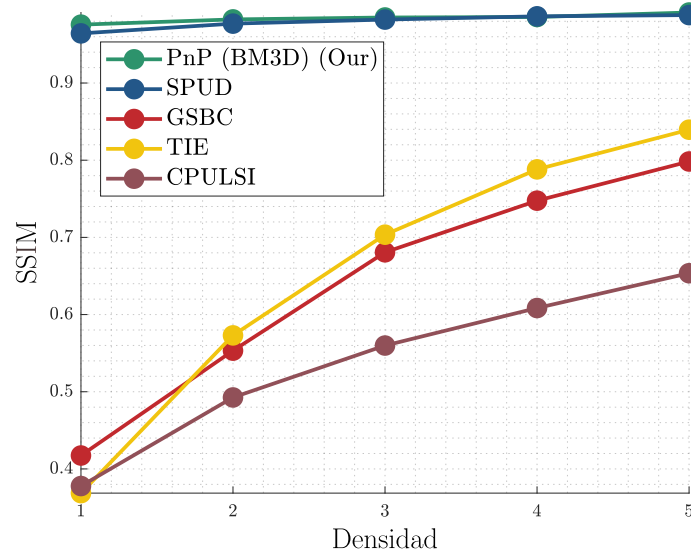


Figura 9. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando SSIM basado en densidad.

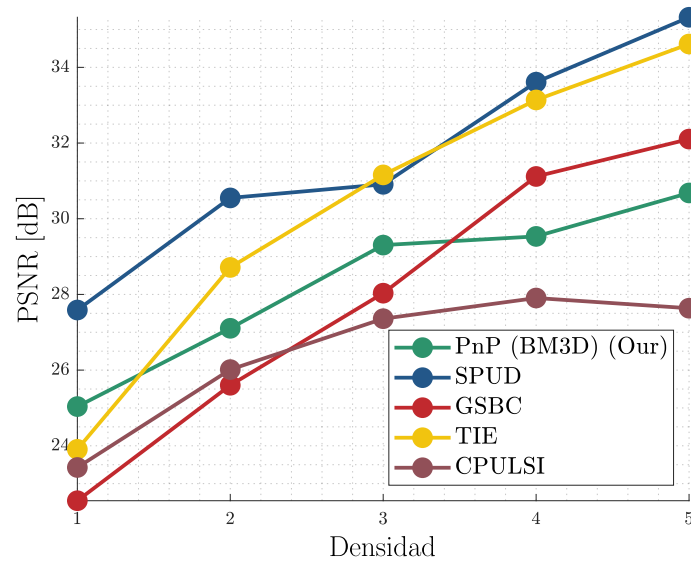


Figura 10. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando PSNR basado en densidad.

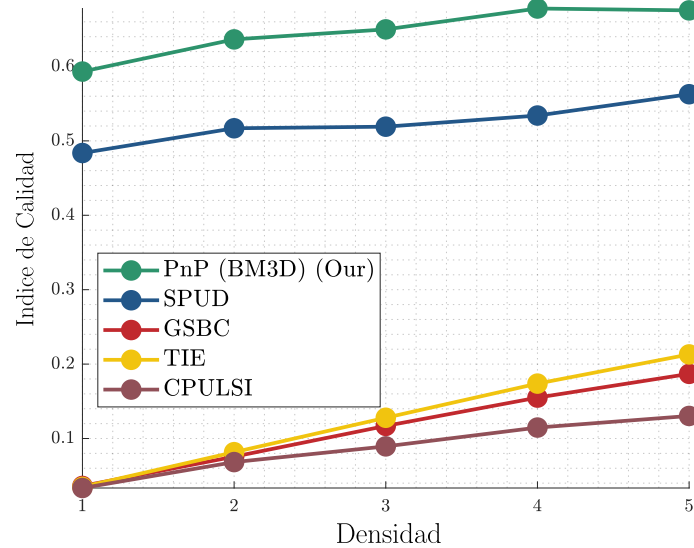


Figura 11. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando el Índice de calidad basado en densidad.

Las figuras 12, 13 y 14 muestran de manera cuantitativa los resultados de los métodos de desenvolvimiento de fase en los escenarios simulados, tomando como referencia las relaciones señal a ruido especificadas. Es claro que el método propuesto en este trabajo tiene una superioridad sobre los demás, especialmente en escenarios con altos niveles de ruido. Esto se refleja en los resultados obtenidos en las métricas como el índice de calidad y el SSIM. Adicionalmente, demuestra la importancia y la influencia del algoritmo de eliminación de ruido incorporado que actúa en cada iteración del proceso de desenvolvimiento.

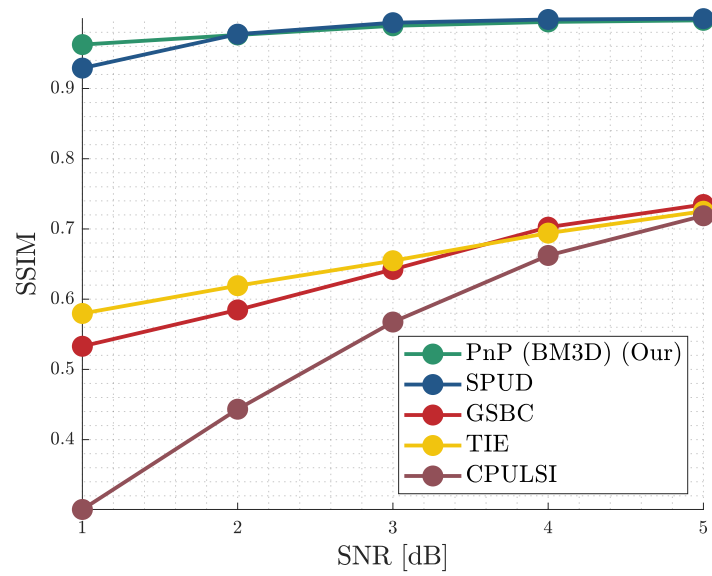


Figura 12. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando SSIM basado en relación señal-ruido.

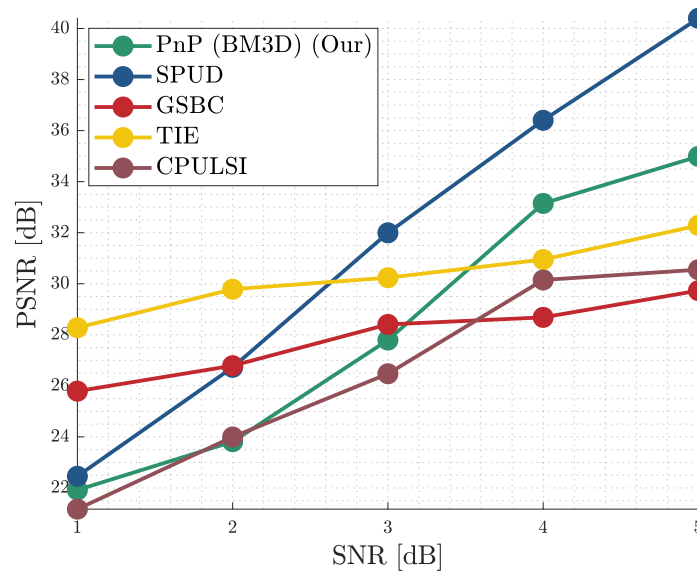


Figura 13. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando PSNR basado en relación señal-ruido.

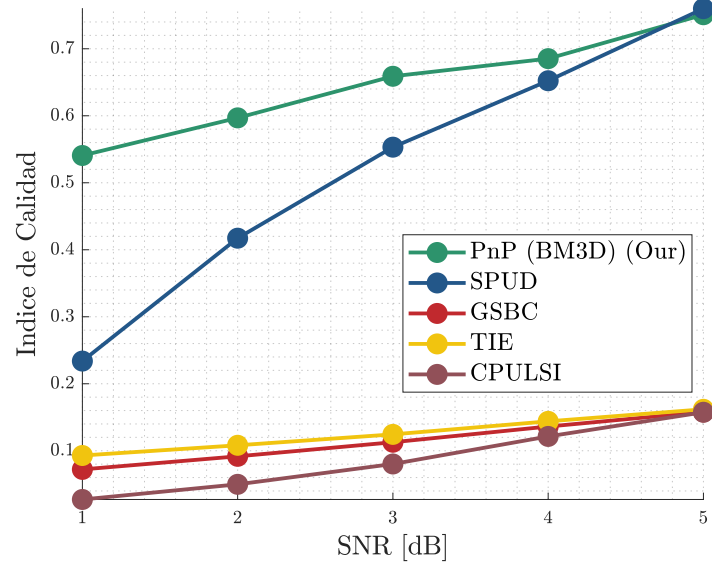


Figura 14. Rendimiento medio de SPUD, GSBC, TIE, CPULSI y el método propuesto utilizando el Índice de calidad basado en relación señal-ruido.

Las figuras 15 y 16, muestran los errores en las reconstrucciones al restar los mapas de fase reconstruidos de sus valores originales. Se puede observar una descorrelación estructural entre el error de nuestro método y las fases iniciales, demostrando la preservación de la estructura general en el momento del desenvolvimiento.

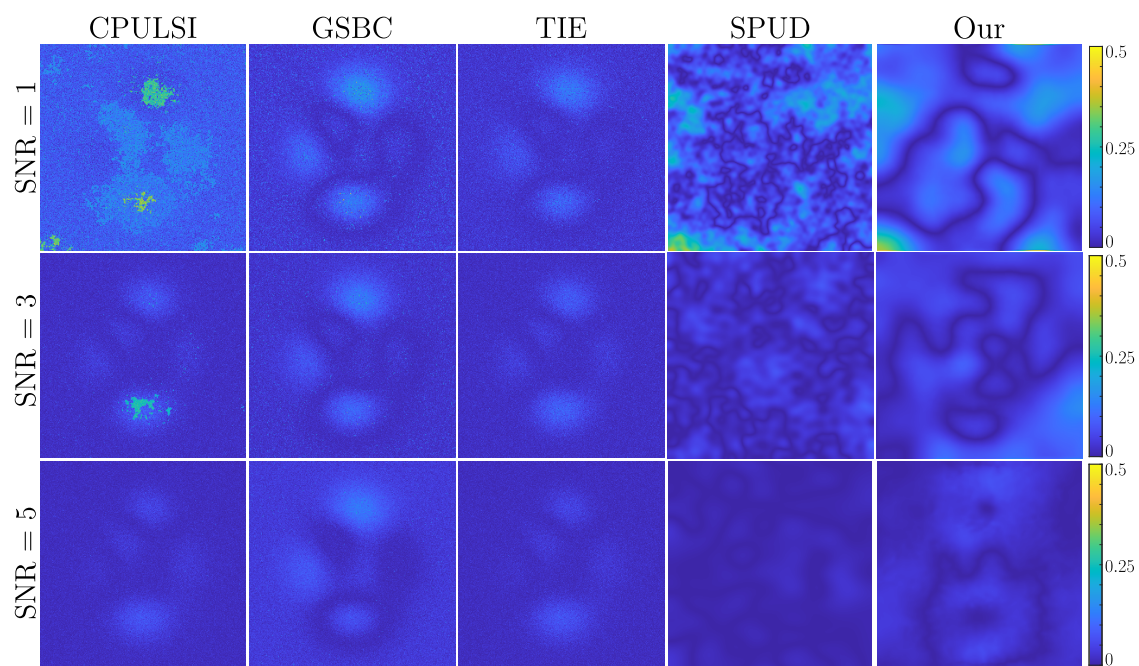


Figura 15. Errores presentes en las reconstrucciones mostradas en la figura 7

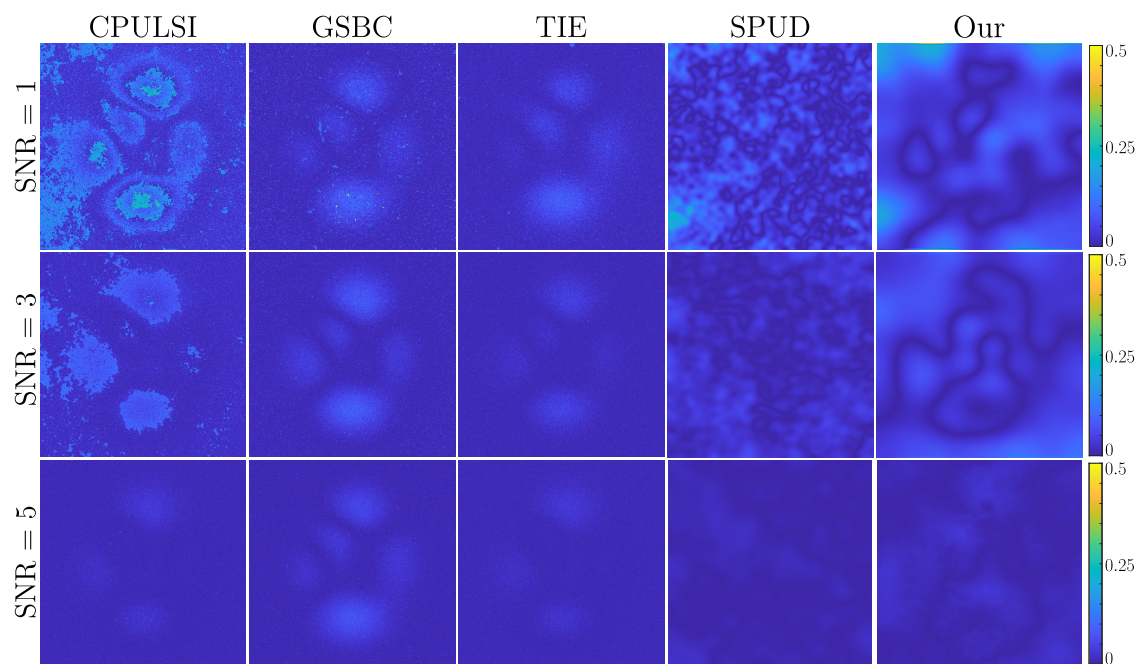


Figura 16. Errores presentes en las reconstrucciones mostradas en la figura 8

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Finalmente se evaluó el rendimiento del algoritmo propuesto en dos escenarios reales. El primero corresponde a una imagen de fase del cerebro humano utilizada en el proceso de mapeo cuantitativo de susceptibilidad, que es una técnica de contraste alternativa utilizada en Resonancia Magnética y cuyo conjunto de datos está disponible en <http://pre.weill.cornell.edu/mri/pages/qsm.html>.

En la figura 17, se pueden apreciar las fases envueltas junto a las reconstrucciones realizadas por los métodos del estado del arte en la imagen cerebral. A pesar de tratarse de una escena compleja para el proceso de desenvolvimiento, la mayoría de los métodos lograron desarrollarla exitosamente, sin embargo, es posible apreciar ciertas discontinuidades en métodos como GSBC y CPULSI al igual que un leve sobresuavizado generado por los métodos SPUD y el propuesto en algunas de las zonas más finas de la imagen.

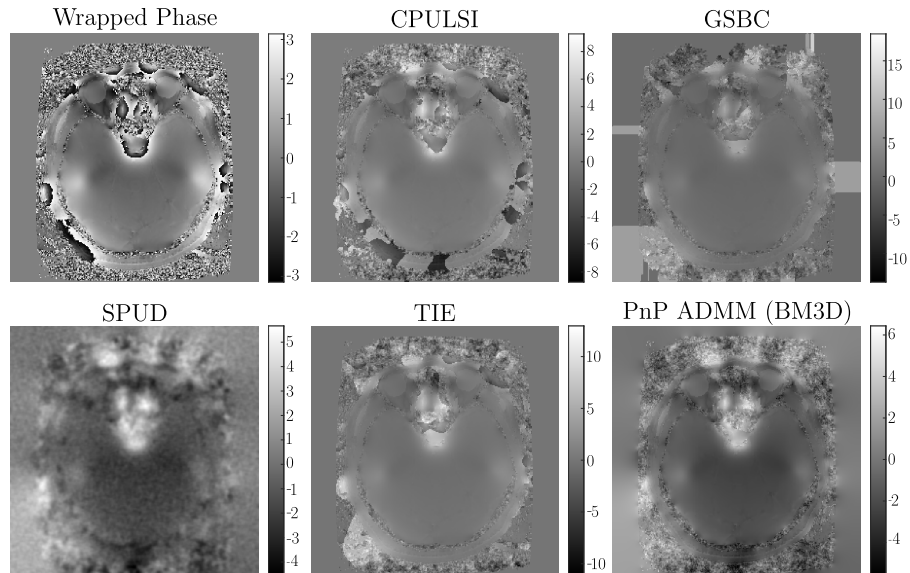


Figura 17. Comparación del proceso de desenvolvimiento de fase realizado por CPULSI, GSBC, SPUD, TIE y el método propuesto utilizando el denoiser BM3D en una imagen de fase del cerebro humano.

Una segunda imagen de fase de InSAR de tamaño 3487x1649 que se desarrolló utilizando el PnP ADMM y demás métodos de comparación corresponde a un volcán. Obsérvese en la figura 18 que el mapa de fase contiene pequeñas discontinuidades y regiones topográficas semicomplejas situadas en la sección derecha que el algoritmo desarrolló con éxito. Además, al tratarse de una imagen de fase que contiene un bajo nivel de ruido, se evidencia un comportamiento similar y destacable por parte de los demás métodos del estado del arte involucrados en el desenvolvimiento de la misma.

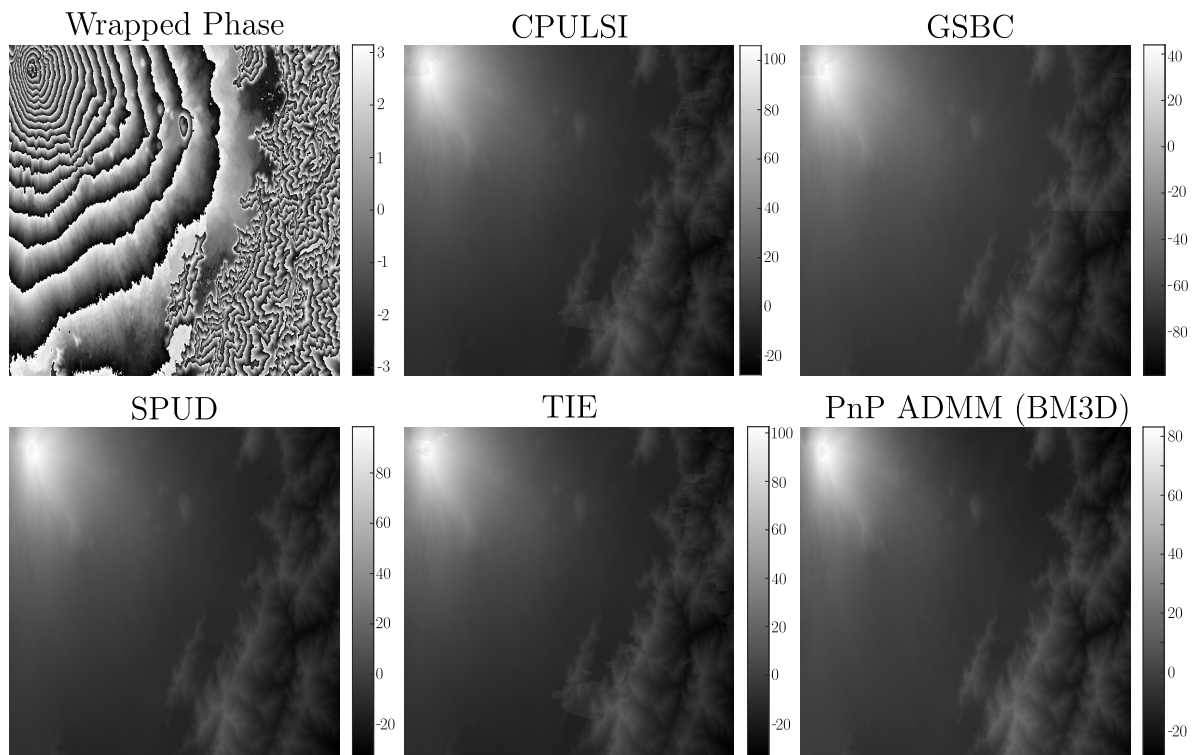


Figura 18. Comparación del proceso de desenvolvimiento de fase realizado por CPULSI, GSBC, SPUD, TIE y el método propuesto utilizando el denoiser BM3D en una imagen de fase envuelta InSAR de un volcán.

6. CONCLUSIONES

Se ha propuesto, diseñado, programado y validado con éxito un nuevo método para desenvolver imágenes de fase bidimensionales, utilizando el método de multiplicadores de dirección alterna con un regularizador integrado de reducción de ruido. El problema de optimización se ha modelado de manera satisfactoria a través de una formulación matricial basada en mínimos cuadrados y diferencias locales de fase. La implementación del algoritmo se evaluó contra otros métodos del estado del arte en 25 configuraciones simuladas bajo diferentes niveles de ruido y complejidad de la imagen, demostrando su eficacia y buen rendimiento, especialmente en escenarios con alto ruido, que se ve reflejado en la distorsión estructural mínima presente en las fases desenvueltas. Además, se comparó el método con dos casos de data real adquirida donde el desenvolvimiento de fase es crucial, como son las imágenes de resonancia magnética y las fases de InSAR utilizadas en estudios topográficos, y en ambos casos, demostró ser un método confiable para llevar a cabo esta tarea.

BIBLIOGRAFÍA

- Baraha, Satyakam y Ajit Kumar Sahoo. "SAR image despeckling using plug-and-play ADMM". En: *IET Radar, Sonar & Navigation* 14.9 (2020), págs. 1297-1309 (vid. pág. 15).
- Boyd, Stephen y col. "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers". En: *Foundations and Trends in Machine learning* 3.1 (2011), págs. 1-122 (vid. pág. 24).
- Buades, Antoni, Bartomeu Coll y J-M Morel. "A non-local algorithm for image denoising". En: *2005 IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'05)*. Vol. 2. Ieee. 2005, págs. 60-65 (vid. págs. 26, 36).
- Chan, Stanley H, Xiran Wang y Omar A Elgendy. "Plug-and-play ADMM for image restoration: Fixed-point convergence and applications". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 3.1 (2016), págs. 84-98 (vid. págs. 15, 25, 29).
- Chavez, Sofia, Qing-San Xiang y Li An. "Understanding phase maps in MRI: a new cutline phase unwrapping method". En: *IEEE transactions on medical imaging* 21.8 (2002), págs. 966-977 (vid. pág. 12).
- Danielyan, Aram, Vladimir Katkovnik y Karen Egiazarian. "BM3D frames and variational image deblurring". En: *IEEE Transactions on image processing* 21.4 (2011), págs. 1715-1728 (vid. págs. 26, 36).

- Flynn, Thomas J. "Consistent 2-D phase unwrapping guided by a quality map". En: *IGARSS'96. 1996 International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. Vol. 4. IEEE. 1996, págs. 2057-2059 (vid. pág. 13).
- Fried, David L. "Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements". En: *JOSA* 67.3 (1977), págs. 370-375 (vid. pág. 30).
- Ghiglia, Dennis C y Mark D Pritt. "Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software". En: *A Wiley Interscience Publication* (1998) (vid. pág. 13).
- Ghiglia, Dennis C y Louis A Romero. "Minimum Lp-norm two-dimensional phase unwrapping". En: *JOSA A* 13.10 (1996), págs. 1999-2013 (vid. págs. 13, 21).
- "Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods". En: *JOSA A* 11.1 (1994), págs. 107-117 (vid. pág. 30).
- Goldstein, Richard M, Howard A Zebker y Charles L Werner. "Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping". En: *Radio science* 23.4 (1988), págs. 713-720 (vid. págs. 13, 20).
- Goldstein, Richard M., Howard A. Zebker y Charles L. Werner. "Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping". En: *Radio Science* 23.4 (1988), págs. 713-720. DOI: 10.1029/RS023i004p00713 (vid. pág. 33).
- Guerriero, Luciano y col. "New regularization scheme for phase unwrapping". En: *Applied Optics* 37.14 (1998), págs. 3053-3058 (vid. pág. 14).

- Hou, Ruizhi, Fang Li y Guixu Zhang. "Truncated Residual Based Plug-and-Play ADMM Algorithm for MRI Reconstruction". En: *IEEE Transactions on Computational Imaging* 8 (2022), págs. 96-108 (vid. pág. 15).
- Hudgin, Richard H. "Wave-front reconstruction for compensated imaging". En: *JOSA* 67.3 (1977), págs. 375-378 (vid. pág. 30).
- Hunt, BR. "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences". En: *JOSA* 69.3 (1979), págs. 393-399 (vid. pág. 27).
- Huntley, Jonathan M y Henrik Saldner. "Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis". En: *Applied Optics* 32.17 (1993), págs. 3047-3052 (vid. pág. 23).
- Kemao, Qian, Wenjing Gao y Haixia Wang. "Windowed Fourier-filtered and quality-guided phase-unwrapping algorithm". En: *Applied optics* 47.29 (2008), págs. 5420-5428 (vid. pág. 13).
- Marroquin, Jose L y Mariano Rivera. "Quadratic regularization functionals for phase unwrapping". En: *JOSA A* 12.11 (1995), págs. 2393-2400 (vid. pág. 14).
- MATLAB. *version 9.8.0.1380330 (R2020a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010 (vid. pág. 33).
- Montresor, Silvio y Pascal Picart. "Quantitative appraisal for noise reduction in digital holographic phase imaging". En: *Optics Express* 24.13 (2016), págs. 14322-14343 (vid. pág. 13).

- Nishihara, Robert y col. "A general analysis of the convergence of ADMM". En: *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2015, págs. 343-352 (vid. pág. 15).
- Pedrini, Giancarlo y col. "Temporal phase unwrapping of digital hologram sequences". En: *Applied optics* 42.29 (2003), págs. 5846-5854 (vid. pág. 23).
- Pineda, Jesus y col. "SPUD: simultaneous phase unwrapping and denoising algorithm for phase imaging". En: *Applied Optics* 59.13 (2020), págs. D81-D88 (vid. págs. 14, 21, 33).
- Schofield, Marvin A y Yimei Zhu. "Fast phase unwrapping algorithm for interferometric applications". En: *Optics letters* 28.14 (2003), págs. 1194-1196 (vid. pág. 12).
- Vogel, Curtis R y Mary E Oman. "Iterative methods for total variation denoising". En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 17.1 (1996), págs. 227-238 (vid. págs. 26, 36).
- Wang, Zhou, Alan C Bovik y Ligang Lu. "Why is image quality assessment so difficult?" En: *2002 IEEE International conference on acoustics, speech, and signal processing*. Vol. 4. IEEE. 2002, págs. IV-3313 (vid. pág. 35).
- Xia, H-T y col. "Unwrapping algorithm based on least-squares, iterations, and phase calibration to unwrap phase highly corrupted by decorrelation noise". En: *Digital Holography and Three-Dimensional Imaging*. Optica Publishing Group. 2016, DW5E-8 (vid. págs. 21, 33).
- Xu, Junyi y col. "An efficient minimum-discontinuity phase-unwrapping method". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 13.5 (2016), págs. 666-670 (vid. pág. 13).

- Yazaki, Yoshinao, Yuichi Tanaka y Stanley H Chan. "Interpolation and denoising of graph signals using plug-and-play ADMM". En: *ICASSP 2019-2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE. 2019, págs. 5431-5435 (vid. pág. 15).
- Yu, Hanwen y col. "Phase unwrapping in InSAR: A review". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 7.1 (2019), págs. 40-58 (vid. pág. 12).
- Zhao, Ming y col. "Quality-guided phase unwrapping technique: comparison of quality maps and guiding strategies". En: *Applied optics* 50.33 (2011), págs. 6214-6224 (vid. págs. 13, 20).
- Zhao, Zixin y col. "Robust 2D phase unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation". En: *Measurement Science and Technology* 30.1 (2018), pág. 015201 (vid. pág. 33).
- Zhou, Lifan y col. "Interferometric synthetic aperture radar phase unwrapping based on sparse Markov random fields by graph cuts". En: *Journal of Applied Remote Sensing* 12.1 (2018), pág. 015006 (vid. pág. 14).
- Zuo, Chao y col. "Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review". En: *Optics and lasers in engineering* 85 (2016), págs. 84-103 (vid. pág. 12).