

DISTRIBUCIÓN DE CARGA EN UN ANILLO CUÁNTICO TIPO II CON UN  
EXCITÓN CAPTURADO

RAFAEL GELVEZ HERNANDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2011

DISTRIBUCIÓN DE CARGA EN UN ANILLO CUÁNTICO TIPO II CON UN  
EXCITÓN CAPTURADO

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título de físico

RAFAEL GELVEZ HERNANDEZ

DIRECTOR:

Ph. Dr. ILIA DAVIDOVICH. MIKHAILOV



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2011

Dedico este trabajo primero a Jehová,  
A mis Padres, Teresa Hernandez Gualdrón y Luis Enrique Gelvez M,  
A mis hermanos Eduardo, Claudia Yamile, Gabriel y Jorge Enrique  
A mi segunda Madre, Luz Marina Manrique de Buitrago

## AGRADECIMIENTOS

Terminar la carrera de física fue un trabajo que no dependió sólo de mí, es el aporte de muchas personas que contribuyeron en el momento indicado. Por eso quiero dar mis más sinceros agradecimientos:

Primero quiero agradecer al profesor Ilia D Mikhailov que con su conocimiento como científico me brindó la oportunidad de trabajar la tesis y con su infinita ayuda, paciencia y colaboración incondicional logré escribir la tesis. También quiero agradecer a mis padres, Teresa Hernandez Gualdrón y Luis Enrique Gelvez Meneses, y a mis hermanos, por su colaboración en todos estos años. A la familia que me ayudo más de lo que merecía: Luz Marina Manrique, Abelardo Buitrago y a mi segunda hermana Yeilly Smith Buitrago M. En el primer semestre la ayuda de Don Agustín Bretón fue muy importante para mí. A mi profesor de física del colegio Félix Parra, por darme ánimo y permitirme material para estudiar en la universidad.

Quiero también mencionar amigos de infancia que estuvieron pendiente en el transcurso de mi carrera: Willintong Villamizar, Andrés Herrera, Mary Herrera, Diego Pinilla, J Botello, E Niño, J.L. Caballero, Edwar Páez y Liliana Bayona.

A mis amigos de la Universidad, primero al grupo “chévere” quienes estaban conformados por Laura Lara, Alfredo Blanco, Áyenla Becerra, Elber Rodríguez y Luz Dary Morantes. Con el pasar de los semestres se fueron incluyendo: Martha Jerez, Carolina Mendoza, Carlos Chacón, y dos grandes personas que conocí en el laboratorio de Espectroscopia (LEAM): Nelson Acevedo y Julián Valdivieso. También a un amigo muy controversial, el viejo Fabián Ramírez. Y amigos con los que entré: John Elber León, Jerónimo Grisales, Sheryl Avendaño y Edwin Mozo.

También deseo recordar amigos que hice en estos años: Julián Bretón, Dubán Silva, Luisito, Yesica Silva, Fabián Mantilla, el viejo Boris, Mafe Angarita, Diana Mantilla, Patrick Sarmiento y su abuelita Marina.

Con la ayuda de cada uno terminé un paso como físico. Por eso doy gracias por cada ayuda y apoyo.

## **CONTENIDO**

---

<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>(8)</b>
<b>Resumen.....</b>	<b>(10)</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>(11)</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>(12)</b>
<b>1. Teoría.....</b>	<b>(15)</b>
<b>1.1 Hamiltoniano y Aproximación Adiabática.....</b>	<b>(15)</b>
<b>1.2 Separación de variables radial y angular.....</b>	<b>(18)</b>
<b>1.3 Método de Fourier.....</b>	<b>(19)</b>
<b>1.4 Movimiento del hueco, Método de Barrido Trigonométrico.....</b>	<b>(22)</b>
<b>2. Resultados y Discusión.....</b>	<b>(25)</b>
<b>3. Conclusiones.....</b>	<b>(30)</b>
<b>4. Bibliografía.....</b>	<b>(31)</b>
<b>Lista de Anexos.....</b>	<b>(33)</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

**Figura 1.** Modelo de un excitón en QR tipo II.....(16)

**Figura 2.** Energía rotacional del electrón en función del campo magnético para diferentes posiciones del hueco dentro un QR con los parámetros geométricos  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $R_c = 5.0a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$  .....(21)

**Figura 3.** Potencial efectivo del hueco en la dirección radial  $\tilde{V}_{eff}(r_h)$  como función de la distancia desde el centro de anillo con parámetros geométricos señalados en el gráfico, para dos niveles más bajos del electrón..... (24)

**Figura 4.** Las curvas de potencial adiabático para el movimiento lento del hueco y niveles más bajos de la energía del excitón en QR, con parámetros  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $R_c = 5.0a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$  .....(26)

**Figura 5.** Las curvas de potencial adiabático para el movimiento lento del hueco y niveles más bajos de la energía del excitón en QR, con parámetros  $h_w = 0.5a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.5a_0^*$ ,  $R_c = 10.0a_0^*$ ,  $w_c = 1.0a_0^*$  Las líneas sombreadas muestran la distribución de carga positiva alrededor del anillo relacionada con el hueco.....(27)

**Figura 6.** Las energías del excitón en función del radio del anillo con los parámetros geométricos  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$  ..... (28)

**Figura 7.** Las energías del excitón en presencia de campo magnético  $\gamma = 2$  en función del radio del anillo con los parámetros geométricos  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$  .....(29)

## ANEXOS

- A1.** Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo homogéneo.....(33)
- A2.** Anillo 1D con un solo electrón..... (33)
- A3.** Uso del coeficiente  $\eta = \frac{m_e^*}{m_h^*}$  ..... (34)
- A4.** Calculo del valor medio cuadrado para el espesor del anillo..... (34)

## Resumen

**TÍTULO:** Distribución de Carga en un Anillo Cuántico Tipo II con un Excitón Capturado\*.

**AUTOR:** Rafael Gelvez Hernandez\*\*.

**Palabras Claves:** Anillo Cuántico, Excitón tipo II.

## Descripción

Se propone un método simple para calcular las energías y la función de onda que corresponden a los estados bajos del excitón capturado por el anillo cuántico tipo II de InP/GaInP, donde el electrón se confina en el anillo de InP y el hueco está en la matriz de GaInP. Se demostró que la ecuación de Schrödinger para dos partículas es completamente separable en el límite adiabático, cuando la anchura del anillo es mucho más pequeña que el radio de la línea central del anillo y la masa efectiva del hueco es mucho más grande del electrón. En este límite el análisis de los niveles más bajos se reduce a la solución de un par de ecuaciones diferenciales uní-dimensionales, la primera ecuación describe el movimiento rotacional del electrón y la segunda describe el movimiento de traslación del hueco en la dirección radial. Ambas ecuaciones se resuelven numéricamente, la primera por medio de la técnica de expansión de series de Fourier, y la segunda, usando el método del barrido trigonométrico. Se presentan resultados de cálculo para los niveles de energía bajos en función de la anchura del anillo, del radio de la línea central, y el campo magnético externo aplicado a lo largo del eje de simetría axial.

\*Proyecto de Grado.

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Iliá Davidovich Mikhailov.

## Abstract

**TITLE:** Charge Distribution in Quantum Ring of Type II with Captured Exciton\*.

**AUTHOR:** Rafael Gelvez Hernandez\*\*.

**Key Words:** Ring-like, Exciton, Quantum Ring type II

## Description

We propose a simple method to calculate the energies and the wave function corresponding to the lower states of the exciton captured by the InP/GaN quantum ring of type II, where the electron is confined in InP ring and the hole is in the GaN matrix. We show that the Schrödinger equation for two particles is completely separable in the adiabatic limit when the width of the ring is smaller than the centerline radius of ring and the effective mass of the hole is larger than the effective mass of the electron. In this limit, the first solution of the lowest levels are reduced to the solution of two one-dimensional differential equations, the first equation describing the rotational motion of the electron and the other, the translational motion of the hole in the radial direction. Both equations are solved numerically, first through the technique of Fourier series expansion, and the second, using the trigonometric sweep method. We present results of calculation for low energy levels as functions of the width of the ring, the radius of the center line, and the external magnetic field applied along the axis of axial symmetry.

\* Proyecto de Grado

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Iliá Davidovich Mikhailov.

## ***INTRODUCCIÓN***

---

El hombre siempre ha estado tras la búsqueda de entender mejor su medio que lo rodea, por eso año tras año se tiene un entendimiento más profundo sobre lo que llama ciencia. Y esta termina en subdividirse en otras ramas, una de ellas es la Nanofísica, que ha surgido a finales del siglo XX al estudiar propiedades cuánticas que emergen en la frontera entre la física atómica y la física macroscópica. Estas se observan en materiales heterogéneos cuyas características físicas varían bruscamente en las juntas separadas una a otra a escala nanométrico. [1].

En los años 70 se han elaborado inicialmente las primeras estructuras de superredes, que consisten en una estructura periódica de pozos cuánticos con espesores de tamaño nanométrico separados por las barreras cuyos espesores son del mismo orden. Paralelamente fue desarrollándose el estudio de pozos cuánticos (QW), los cuales consisten en una lámina de un semiconductor embebida en un semiconductor diferente. Con esto se logra confinar el movimiento de un electrón en una región plana muy estrecha, de modo que su movimiento se hace uni-bidimensional. Actualmente, estas estructuras se utilizan para la fabricación de diodos láseres, detectores cuánticos de radiación infrarroja, etc. [2-4].

Los anillos cuánticos poseen simetría axial y presentan una cavidad semiconductor en la región comprendida entre su radio interno y su radio externo. Existe el caso donde la formación se da en anillo, se presenta evidencia de anillos cuánticos (QR) en [5], donde hay anillos cuánticos tipo I, IIA y IIB, en (QR) tipo I el electrón y el hueco se encuentran confinados juntos, para los (QR) tipo II-A el electrón está confinado dentro del anillo y el hueco está en la barrera de potencial, y en el (QR) tipo II-B, el hueco está confinado en el anillo y el electrón está en la barrera de potencial.[6].

Debido a que los anillos cuánticos semiconductores tienen una topología específica diferente de otras estructuras, ellos en presencia de campo magnético externo poseen unas propiedades muy interesantes, tales, por

ejemplo, la posibilidad de observar las corrientes persistentes, oscilaciones de la energía del estado base llamado efecto de Aharonov-Bohm (AB), etc. [7].

Cuando una estructura tipo de anillo cuántico captura un excitón (un par electrón-hueco) existen dos posibilidades, el caso cuando el electrón y el hueco estén confinados en diferentes partes, uno dentro del anillo y el otro fuera (estructura del tipo II), y el caso cuando ambos se encuentran dentro del anillo (estructura del tipo I). Hay diferentes técnicas numéricas para resolver ecuación de Schrödinger que describe las propiedades espectrales de un excitón capturado por un anillo cuántico. La mayoría de ellos son muy complicados y sugieren un cálculo muy pesado y tedioso. En los últimos años en el Grupo FICOMACO ha utilizado una técnica llamada de Dimensión Fractal, que permite analizar en una forma relativamente simple el espectro de un sistema de pocas partículas confinadas en las heterojunturas semiconductoras. Recientemente, este método se aplicó para analizar los excitones en anillos cuánticos bidimensionales de tipo I [8].

En las últimas décadas han sido fabricados e investigados una gran variedad de puntos cuánticos (QDs) donde el confinamiento cuántico restringe el movimiento de las partículas en las tres direcciones. Este hecho produjo aparición de una gran cantidad de trabajos teóricos, particularmente con el estudio de un excitón confinado en un (QDs) tipo II [9]. Fue demostrado que hay cambios considerables en las propiedades de excitones con la variación no solo de la magnitud del potencial y del volumen de confinamiento, sino también de la geometría del mismo [10]. El cálculo para los anillos puede ser simplificado esencialmente si su ancho es mucho más pequeño que el radio de la línea central, o cuando la masa del hueco es mucho mayor de la masa del electrón, ya que en estos dos casos se puede utilizar la Aproximación Adiabática (AA). En este límite adiabático para el excitón tipo II las propiedades típicas para los anillos 1D (efecto AB, corrientes persistentes, etc.) siguen manifestándose. Sin embargo, estas propiedades específicas pueden sucesivamente desaparecer a medida que el ancho del anillo se incrementa, o

el anillo posea algunos defectos estructurales o la diferencia de las masas de electrón y del hueco se disminuye, etc.

Una de las líneas de investigación realizada, está relacionada con el análisis de los defectos estructurales. En la referencia [11] se analiza teóricamente, el espectro de energía y la magnetización de un excitón tipo I en un anillo cuántico asimétrico auto-ensamblado (SAQR) de  $In_xGa_{1-x}As/GaAs$ . Se demostró que aunque la forma del SAQR difiere fuertemente de una estructura del anillo circularmente simétrica idealizada, las oscilaciones de Aharonov-Bohm se mantienen. También se han presentado trabajos donde se calculan los espectros de los SAQRs de InAs/GaAs, con uno y dos electrones capturados y los resultados se comparan con los datos experimentales. [12] usando parámetros geométricos obtenidos en la fabricación de anillos por A. Lorke. [13].

En la referencia [14] se analizó el efecto de la excentricidad sobre las oscilaciones de Aharonov-Bohm en un anillo cuántico de forma elíptica. Se encontró que la excentricidad causa una disminución en las energías características para pequeños valores del flujo magnético y, el periodo de las oscilaciones AB disminuye al aumentar el radio del QR [14].

El rompimiento de la simetría axial y apagamiento de las oscilaciones de AB también se observa en la presencia de las impurezas. El análisis del efecto de tamaño en presencia de la impureza y campo magnético externo fue realizado por Hui Pan, Jia Lin Zhu, y R Rodríguez en las referencias [15,16]. Se demostró que las impurezas afectan los niveles de energía y el espectro de absorción. Estos estudios permitieron establecer que las oscilaciones AB inducidas por la impureza afectan esencialmente el espectro infrarrojo lejano, debido a la destrucción de la invariancia rotacional y la mezcla de los estados energéticos con diferentes momentos angulares [15, 16].

Una situación similar debe observarse en los anillos cuánticos con un excitón capturado ya que las propiedades de un par electrón-hueco acoplado se hace muy similar de las impurezas cuando la masa del hueco es mucho mayor del

electrón. El análisis del espectro de un excitón capturado en un nano-anillo de (In, Ga) As/As, que presenta una estructura tipo I usando el modelo 3D fue realizado en las referencias [17,18]. En estas estructuras, el electrón y el hueco están confinados dentro del mismo anillo.

La situación es diferente en las estructuras de tipo II, por ejemplo en los anillos de InP/GaP, donde solamente el electrón está confinado dentro de anillo, mientras que el hueco está ubicado fuera del anillo, manteniéndose atraído por la interacción electrón-hueco. Los estudios sobre los excitones en anillos cuánticos tipo II son recientes. Por ejemplo en las referencias [19,20] se analiza el efecto de la variación de la anchura del QR y de la forma de la sección transversal sobre la energía del estado base de excitón y algunos estados bajos en función de campo magnético.

El estudio de excitones tipo-II de puntos cuánticos (QDs) auto-ensamblados ha llamado la atención de los investigadores en los últimos años. La localización separada de los portadores de carga en tipo-II en QD's puede llevar a efectos interesantes, tales como las corrientes persistentes, las oscilaciones del excitón establecen el estado de energía, y los niveles de energía cruzados, típico para las estructuras con geometría de forma de anillo. Un análisis similar para estados excitados de excitones capturados en QR's de tipo II hasta ahora no se han realizado. Por esta razón en este trabajo proponemos un modelo simplificado el cual se concuerda con las características reales de QR's fabricados hasta el momento.

## ***1. TEORÍA***

---

Se presenta una descripción de los diferentes parámetros geométricos y físicos que se usó para el modelo matemático a resolver en este trabajo. El modelo matemático es la ecuación de Schrödinger correspondiente al movimiento plano de un electrón y un hueco para un Hamiltoniano de cuatro variables, 2 coordenadas del electrón y 2 coordenadas del hueco. La solución de la

ecuación de Schrödinger no se puede dar de forma exacta y por eso se utiliza algunas simplificaciones para encontrar soluciones aproximadas.

### 1.1 HAMILTONIANO Y APROXIMACIÓN ADIABÁTICA

En este trabajo se considera el QR con un grosor  $w$  mucho más pequeño que el radio de la línea central  $R_c$  ( $w \ll R_c$ ), donde el electrón se encuentra dentro de un anillo plano, mientras que el hueco está en el mismo plano fuera del anillo como lo muestra la Fig.1.

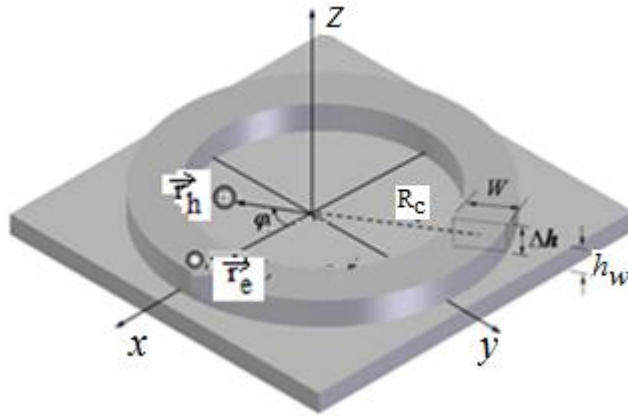


Fig.1 Modelo de un excitón en QR tipo II.

Un QR de forma circular representa una capa muy delgada en que la dependencia del grosor de la distancia  $\rho$  desde el eje se da por la siguiente relación:

$$h(\rho) = h_w + \Delta h \cdot \mathcal{G}(R_c + w/2 - \rho) \mathcal{G}(\rho - R_c + w/2) \quad (1)$$

Donde  $h_w$  es el grosor de capa húmeda sobre la cual se coloca el anillo y  $\Delta h$  es altura del anillo sobre la capa húmeda y la función-paso de Heaviside, igual a cero para  $x < 0$ , y uno para  $x > 0$ .

Las partículas están confinadas dentro de la capa. Menor es grosor de la capa, más alta es la energía de la partícula debido al confinamiento lateral. Por esta razón en la frontera entre anillo y la capa húmeda aparecen los saltos del

potencial para un movimiento a lo largo de la capa. Se puede demostrar utilizando un modelo de pozo cuántico que los saltos de potencial en las fronteras para el electrón y el hueco son iguales a:

$$\tilde{V}_e \approx 2\Delta h \pi^2 / h_w (h_w + \Delta h)^2; \quad \tilde{V}_h \approx 2\eta \Delta h \pi^2 / h_w (h_w + \Delta h)^2 \quad (2a)$$

Más adelante se utilizan las notaciones  $\vec{r}_e$  para el vector 2D de la posición del electrón y  $\vec{r}_h$  para el vector 2D de la posición del hueco,  $m_e^*, m_h^*$  para masas efectivas del electrón y del hueco.

Los potenciales de confinamiento para el movimiento plano del electrón y del hueco se tomarán en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_h(r_h) &= -\tilde{V}_h \mathcal{G}(r - R_c + w/2) \mathcal{G}(r - R_c - w/2); \\ V_e(r_h) &= \tilde{V}_e \mathcal{G}(r - R_c - w/2) + \tilde{V}_e \mathcal{G}(R_c - w/2 - r); \end{aligned} \quad (2b)$$

El campo magnético externo se supone homogéneo y es aplicado a lo largo del eje z. En este trabajo se considera solamente el caso cuando la masa del electrón es mucho más pequeña que la masa del hueco  $m_e \ll m_h$ . Esto nos permite representar los movimientos del electrón, del hueco y de un excitón en forma adimensional, (ver anexo A.1; A.2), en la aproximación de la masa efectiva en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_e(\vec{r}_e, \vec{r}_h) &= -\Delta_e + V_e(\vec{r}_e) - 2/|\vec{r}_e - \vec{r}_h| \\ H_h(\vec{r}_h) &= -\Delta_h + V_h(\vec{r}_h) \\ H_X(\vec{r}_e, \vec{r}_h) &= H_e(\vec{r}_e, \vec{r}_h) + H_h(\vec{r}_h) \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí  $H_e(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$  representa el Hamiltoniano del electrón con un hueco congelado temporalmente en una posición dada por el vector  $\vec{r}_h$ , y  $H_h(\vec{r}_h)$  es el Hamiltoniano del hueco. Para encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger correspondiente a este Hamiltoniano, se utiliza la aproximación adiabática (AA), la cual inicialmente se encuentran las energías del electrón  $E_e(r_h)$  para diferentes distancias del hueco desde el centro de simetría  $r_h$  como los valores propios del siguiente problema:

$$H_e(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \psi_e(\vec{r}_e, r_h) = E_e(r_h) \psi_e(\vec{r}_e, r_h) \quad (4)$$

Una vez resuelto el problema (4), se encuentran los valores  $E_e(r_h)$  en 100 puntos diferentes y se define la función  $E_e(r_h)$  en cualquier punto utilizando la interpolación con Splines cúbicos.

El segundo paso de la AA consiste en “descongelar” el movimiento del hueco y encontrar la energía del excitón,  $E_X$

$$[H_h(\vec{r}_h) + E_e(r_h)]\psi_h(r_h) = E_X\psi(\vec{r}_h) \quad (5)$$

## 1.2 SEPARACIÓN DE LAS VARIABLES RADIAL Y ANGULAR

---

El Hamiltoniano (3) en coordenadas polares y adimensionales se puede representar como:

$$\begin{aligned} H_e(\vec{r}_e, \vec{r}_h) &= -\Delta_e + i\gamma \partial/\partial\varphi_e + \gamma^2 r_e^2/4 + V_e(r_e) - 2/\sqrt{r_e^2 + r_h^2 - 2r_e r_h \cos\varphi_e} \\ H_h(\vec{r}_h) &= -\eta(\Delta_h - i\gamma \partial/\partial\varphi_h - \gamma^2 r_h^2/4) + V_h(r_h); \quad \eta = m_e^*/m_h^* \end{aligned} \quad (6)$$

(Ver anexo A.3)

Para los anillos muy delgados el término del Laplaciano para el electrón confinado fuertemente puede ser simplificado ya que se puede despreciar la parte correspondiente al movimiento radial. Por esta razón el Hamiltoniano electrónico y la ecuación de Schrödinger se hace 1D y se puede reescribir como:

$$H_e(\varphi_e, r_h) \approx -\frac{1}{R_c^2} \frac{d^2}{d\varphi_e^2} - i\gamma \frac{d}{d\varphi_e} + \frac{\gamma^2 R_c^2}{4} - \frac{2}{\sqrt{R_c^2 + r_h^2 - 2R_c r_h \cos\varphi_e + w^2/12}} \quad (7)$$

$$H_e(\varphi_e, r_h)\psi_{m_e}(\varphi_e) = E_e(r_h)\psi_{m_e}(\varphi_e)$$

(Ver el anexo A.4)

Entonces para realizar el primer paso de la AA tenemos que resolver la ecuación de Schrödinger 1D correspondiente al Hamiltoniano (7). Con este fin utilizaremos el método de Fourier que se describe en la siguiente sección.

Por otro lado para realizar el segundo paso de la AA tenemos que resolver la ecuación (5) la cual en las coordenadas polares tiene la forma:

$$\left[ -\eta \left( \frac{1}{r_h} \frac{\partial}{\partial r_h} r_h \frac{\partial}{\partial r_h} + \frac{1}{r_h^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_h^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi_h} + \gamma^2 r_h^2 / 4 \right) + V_h(r_h) + E_e(r_h) \right] \psi_{m_h}(\vec{r}_h, \varphi_h) = E_X \psi_{m_h}(\vec{r}_h, \varphi_h) \quad (8)$$

La ecuación (8) es un problema de campo central 2D y por eso es separable ya que al utilizar la sustitución  $\psi_h(r_h, \varphi_h) = \psi_{m_h}(r_h) e^{im_h \varphi_h}$  se reduce a una ecuación 1D:

$$\left[ -\eta \frac{1}{r_h} \frac{d}{dr_h} r_h \frac{d}{dr_h} + V_{eff}(r_h) \right] \psi_{m_h}(r_h) = E_X \psi_{m_h}(r_h); \quad (8a)$$

$$V_{eff}(r_h) = \eta \frac{m_h^2}{r_h^2} + \eta \gamma m_h + \eta \gamma^2 r_h^2 / 4 + V_h(r_h) + E_e(r_h)$$

La ecuación (8a) es 1D y puede resolverse por el método de barrido trigonométrico (ver la sección (1.4)).

La función de onda del exciton finalmente se escribe:

$$\psi_X(\varphi_e, r_h, \varphi_h) = \psi_{m_e}(\varphi_e, r_h) \psi_{n_h, m_h}(r_h) e^{im_h \varphi_h} \quad (9)$$

donde  $m_e$  es número cuántico magnético del electrón y  $n_h, m_h$  son números cuánticos radial y magnético, respectivamente del hueco.

### 1.3 MÉTODO DE FOURIER

---

Para resolver la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano (7) que describe la rotación del electrón aplicaremos el método de expansión de la función de onda correspondiente en la serie de Fourier.

$$\psi_{m_e}(\varphi) = \sum_{m_e=-\infty}^{\infty} C_{m_e} e^{im_e \varphi}, \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_{m_e}(\varphi)}{d\varphi} = \sum_{m_e=-\infty}^{\infty} im_e C_{m_e} e^{im_e \varphi}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{m_e}(\varphi)}{\partial \varphi^2} = - \sum_{m_e=-\infty}^{\infty} m_e^2 C_{m_e} e^{im_e \varphi} \quad (12)$$

Sustituyendo estas expansiones en la ecuación de Schrödinger correspondiente se obtiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m [m^2 e^{im\varphi} + i\gamma R_c^2 m e^{im\varphi} + V^{eff}(\varphi) e^{im\varphi} - R_c^2 E_e(x) e^{im\varphi}] = 0 \quad (13)$$

Aquí en adelante se omite subíndice para el número magnético del electrón

Para simplificar esta última ecuación multiplicaremos ambas partes de la igualdad por  $e^{-im'\varphi}$  e integramos respecto del ángulo desde 0 hasta  $2\pi$ .

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left[ (m^2 - \gamma R_c^2 m + \frac{\gamma^2 R_c^4}{4} - R_c^2 E_e(x)) \delta_{m,m'} - \int_0^{2\pi} \frac{2R_c e^{i(m-m')\varphi} d\varphi}{\sqrt{1+x^2 - 2x \cos \varphi + w^2/12}} \right] = 0 \quad (14)$$

Aquí  $x = r_h/R_c$  es la posición relativa del hueco, y  $E_e(x)$  la energía rotacional del electrón en función de la posición del hueco. Esta última ecuación es un problema de valores y vectores propios de una matriz. En realidad, si utilizaremos las siguientes notaciones

$$U_{m,m'}(x) = m^2 - \gamma m R_c^2 + \gamma^2 R_c^4 / 4 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2R_c \cos(m-m')\varphi}{\sqrt{1+x^2 - 2x \cos \varphi + w^2/12}} d\varphi \quad (15)$$

$$R_c^2 E_e(x) = \lambda(x) \quad (16)$$

la ecuación (14) se reduce a la siguiente :

$$\sum_{m=1, m_p} [U_{m,m'}(x) - \lambda(x) \delta_{m,m'}] C_m = 0; \quad (17)$$

En nuestros cálculos, primero calculamos los elementos matriciales (15) para cada posición del hueco, utilizando el método de Filon para la estimación de las integrales de Fourier. Una vez encontrada la matriz se calculado sus valores propios  $\lambda_m(x)$  usando el programa EIGEN del paquete EISPACK. Finalmente las energías electrónicas correspondientes  $E_m(x)$  las calculamos usando la relación (16).

En Fig.2 se presentan los gráficos de las energías electrónicas correspondientes a varios de los niveles más bajos, en función del campo magnético  $\gamma$  para cuatro diferentes posiciones del hueco. Se puede observar en el primer cuadro (cuando el hueco se ubica en el centro de simetría y el potencial electrónico tiene la simetría axial) las intersecciones de las curvas

energéticas con el aumento de campo magnético, cuando el valor de flujo magnético  $\gamma R^2$  se hace igual a un número entero e impar (“números mágicos”). Como cada línea superior al inicio en estos gráficos tiene el número magnético mayor, en los puntos de intersección los momentos magnéticos no solo del estado base sino también de los excitados sufran un incremento a saltos. La energía del estado base además como se puede ver mientras tanto esta oscilando (oscilaciones AB). Por otra parte, cuando el flujo magnético  $\gamma R^2$  se hace entero e igual a un número par la energía del estado base periódicamente vuelve a ser mínima mientras que el momento magnético sigue aumentándose. Ya que a los momentos magnéticos diferentes a cero les corresponden las corrientes circulares y además la energía necesaria para estos estados es mínima, estas corrientes son persistentes.

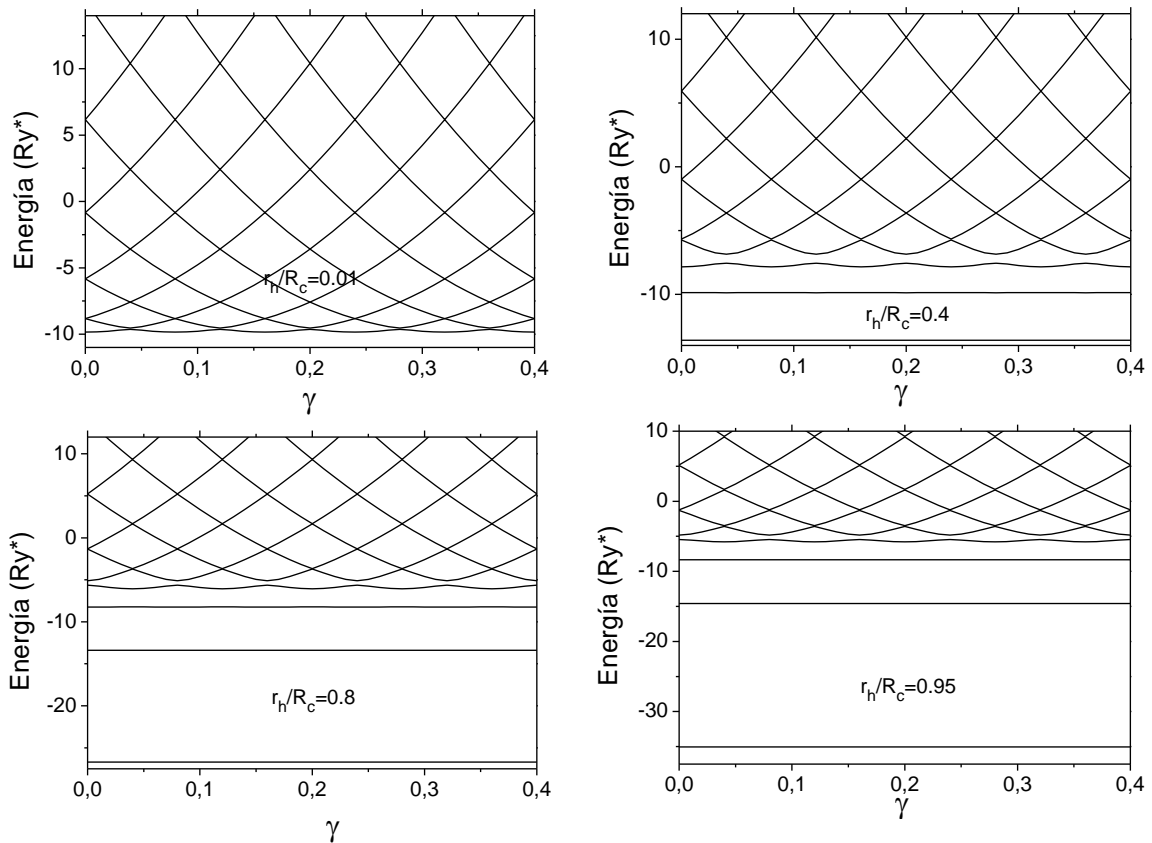


Fig.2. Energía rotacional del electrón en función del campo magnético para diferentes posiciones del hueco dentro un QR con los parámetros geométricos

$$h_w = 0.2a_0^*, \Delta h = 0.2a_0^*, R_c = 5.0a_0^*, w_c = 0.5a_0^*$$

En otros tres gráficos se puede ver que a medida que el hueco se desplaza desde el centro hacia el anillo más y más niveles más bajos se hacen insensibles al campo magnético externo y se desacoplan del grupo de niveles restantes hacia abajo. Esto se debe al hecho de que la atracción entre el electrón y el hueco se incrementa cuando el hueco se acerca al anillo. El movimiento del electrón correspondiente a las energías más bajas se transforma desde rotatorio a oscilatorio el cual no produce la corriente eléctrica y por eso no está afectado por el campo magnético, observa que el electrón tiene más niveles básicos sin ser afectado por el campo magnético. Mientras tanto los niveles más altos que poseen energía mayor siguen teniendo la forma rotatoria acompañada por una corriente.

#### **1.4 MOVIMIENTO DEL HUECO, MÉTODO DE BARRIDO TRIGONOMÉTRICO**

---

Para analizar el movimiento del hueco y de esta manera hallar la energía  $E_X$  hay que resolver la ecuación diferencial (8a). En nuestro cálculo hemos utilizado con este fin el método de Barrido Trigonométrico (BT) [4]. Al aplicarlo hay que primero eliminar la singularidad en el punto  $r_h = 0$  en la ecuación (8).

Con este fin utilizaremos la sustitución  $\psi_{m_h}(r_h) = r^{m_h}u(r)$  y la siguiente notación

$$\varepsilon_x = \frac{E_X}{\eta} - \gamma m_h \quad \text{y} \quad \tilde{V}_{eff}(r_h) = \frac{E_e(r_h) + V_h(r_h)}{\eta} .$$

Haciendo unas transformaciones

algebraicas logramos reducir la ecuación (8a) a la siguiente forma:

$$u''(r) + \frac{(2m+1)}{r}u'(r) + w(r)u(r) = 0, \quad w(r) = \varepsilon_x - \tilde{V}_{eff}(r), \quad 0 < r < \infty \quad (18)$$

Además la función  $u(r)$  debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$u'(0) = 0, \quad u(\infty) = 0 \quad (19)$$

La ecuación (18) todavía tiene el mismo punto singular (pero del orden menor) y todavía no es posible arrancar los disparos en el método de BT desde este punto singular. Comúnmente, para evitar este tipo de dificultades se aplica el

método de Series de Taylor, en el cual la función incógnita dentro un intervalo muy pequeño cerca de la singularidad ( $0 < r < r_0 \ll 1$ ) se presenta como:

$$u(r) = A + Br^2; \quad u'(r) = 2Br; \quad u''(r) = 2B. \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en (18) y haciendo un poco de algebra se obtiene:

$$u(r) = 1 + \left[ \frac{E_e(0) - \varepsilon_x}{4(m+1)} \right] r^2, \quad 0 < r < r_0, \quad u(\varepsilon_0) = 1 + \left[ \frac{E_e(0) - \varepsilon_x}{4(m+1)} \right] r_0^2. \quad (21)$$

De esta manera el método de BT se debe aplicar a la ecuación (18) solamente dentro del intervalo  $r_0 < r < \infty$ , arrancando en el punto  $r = r_0$  con la condición inicial (21). En el método de BT se utiliza el cambio de variables:

$$u(r) = A(r) \cos \theta(r); \quad u'(r) = A(r) \operatorname{sen} \theta(r) \quad (22)$$

Se puede demostrar [4] que la función  $\theta(r)$  satisface a la ecuación diferencial de primera orden

$$\theta'(r) = - \left[ \operatorname{sen}^2 \theta(r) + \frac{2m+1}{r} \operatorname{sen} \theta(r) \cos \theta(r) + w(r) \cos^2 \theta(r) \right], \quad r_0 < r < \infty \quad (23)$$

y la siguiente condición inicial

$$\theta(r_0) = a \tan \left[ \frac{u'(r_0)}{u(r_0)} \right] = a \tan \left[ \frac{E_e(0) - \varepsilon}{2(m+1)} \right] r_0 \quad (24)$$

Las relaciones (23) y (24) definen un problema de Cauchy, el cual en nuestro cálculo hemos resuelto usando el método de Runge-Kutta para cada valor de la energía del excitón  $E_X$ . Por eso la solución de la ecuación (23) depende de esta energía como parámetro, es decir  $\theta = \theta(r, E_X)$ . Como la función de onda debe anularse en el infinito, debe cumplirse además la siguiente condición de frontera adicional:

$$\theta(r \rightarrow \infty, E_X) = -\frac{\pi}{2} - \pi n_h; \quad n_h = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Aquí  $n_h$  es un número cuántico radial del hueco. La relación (25) en realidad es una ecuación trascendente algebraica respecto de la energía del excitón  $E_X$ . En nuestro procedimiento numérico hemos resuelto esta ecuación mediante el método de bisecciones.

En la Fig. 3 presentamos los gráficos del potencial efectivo  $\tilde{V}_{eff}(r_h)$  del hueco correspondiente a su movimiento en la dirección radial para los dos niveles

más bajos del electrón  $m_e = 0$  y  $m_e = 1$ . El anillo analizado tiene las siguientes dimensiones: el radio de la línea central es de  $20a_0^*$ , el ancho del anillo es  $w = 1a_0^*$ , el grosor de la capa húmeda y la altura del anillo son de  $0.2a_0^*$ . Se ve que el potencial del hueco disminuye a medida que este se acerca al anillo debido al aumento de la energía de atracción electrón-hueco. Después en la frontera del anillo el potencial sufre un salto brusco hacia arriba debido a la repulsión relacionado con el confinamiento. El conjunto de dos potenciales, una de atracción y otro de repulsión conlleva a la formación de un potencial

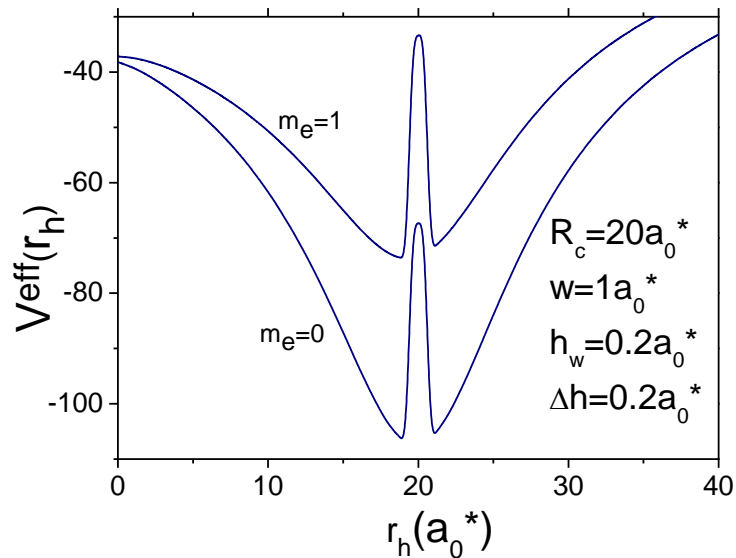


Fig.3. Potencial efectivo del hueco en la dirección radial  $\tilde{V}_{eff}(r_h)$  como función de la distancia desde el centro de anillo con parámetros geométricos señalados en el gráfico, para dos niveles más bajos del electrón.

efectivo de forma de un pozo doble en el cual pueden existir dos tipos de estados discretos uno simétrico y otro asimétrico con un desacoplamiento muy débil. Es decir el espectro energético debe tener un sistema de niveles en pares con unas brechas pequeñas dentro las pares otras brechas grandes entre las pares. Esta afirmación se confirma a continuación con nuestros resultados presentados en la siguiente sección.

## **2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Como fue demostrado en la sección anterior la energía del potencial efectivo correspondiente a los niveles bajos en nuestro modelo depende de tres números cuánticos, números cuánticos magnéticos,  $m_e$  y  $m_h$  del electrón y del hueco respectivamente y el número cuántico radial del hueco  $n_h$ . Pero a continuación presentamos las energías solamente para diferentes números cuánticos magnéticos  $m_e$  y  $m_h$  considerando el número cuántico radial,  $n_h$  siempre igual a cero, teniendo en cuenta que en nuestro caso el incremento del número cuántico radial sube la energía mucho más que el incremento de números cuánticos magnéticos.

En los primeros gráficos presentamos un esquema de niveles energéticos más bajos para dos anillos uno más pequeño con los parámetros  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $R_c = 5.0a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$  en la Fig. 4, y otro más grande con los parámetros  $h_w = 0.5a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.5a_0^*$ ,  $R_c = 10.0a_0^*$ ,  $w_c = 1.0a_0^*$  en la Fig. 5. Además en estas figuras se muestran las curvas de los potenciales adiabáticos para el movimiento lento de los huecos correspondiente a dos diferentes estados electrónicos correspondientes a  $m_e = 0$  y  $m_e = -1$ . Se puede ver que, en general el esquema de los niveles es muy similar para anillos con dimensiones diferentes solo se varia la escala de las energía.

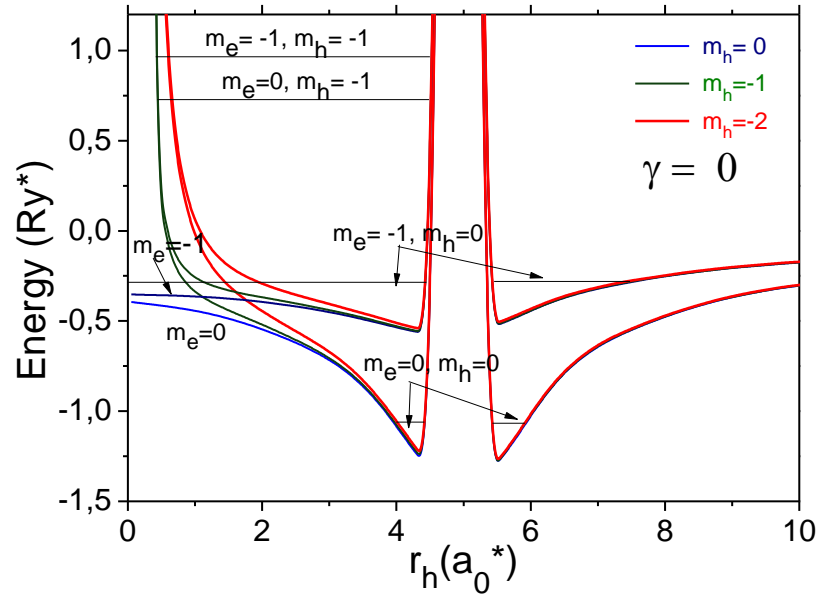


Fig.4. Las curvas de potencial adiabático para el movimiento lento del hueco y niveles más bajos de la energía del excitón en QR, con parámetros

$$h_w = 0.2a_0^*, \Delta h = 0.2a_0^*, R_c = 5.0a_0^*, w_c = 0.5a_0^*$$

En ambos casos el estado base corresponde a los números cuánticos  $m_e = 0, m_h = 0$ , el primer excitado, separado del estado base notablemente, a  $m_e = -1, m_h = 0$  y los dos siguientes estados excitados, muy cercanos entre sí a los  $m_e = 0, m_h = -1$  y  $m_e = -1, m_h = -1$ . Se ve que el cambio de momento magnético del hueco varía la energía del excitón más que el cambio similar del momento magnético del electrón. Esto se debe al hecho que el aporte a la energía total del excitón de la parte rotacional es proporcional al cuadrado del momento angular e inversamente proporcional al radio de la rotación  $\Delta E_{rot} \propto m^2/R^2$ . Por esta razón el aporte de la energía rotacional del hueco es mayor que la del electrón, teniendo en cuenta que el hueco se ubica con la mayor probabilidad más cerca al centro de rotación. De esta manera el incremento del valor  $m_h$  sube la energía del excitón más significativamente que el incremento de  $m_e$ . En consecuencia, es preferible analizar los niveles energéticos agrupados en un conjunto de subniveles con diferentes valores de  $m_h$

En la Fig. 5 se presentan tres grupos de subniveles correspondientes a tres diferentes valores de momento angular del hueco  $m_h = 0, 1, 2$ . Dentro de cada uno de estos grupos hemos presentado solamente dos niveles (para no contaminar demasiado el gráfico) con  $m_e = 0, -1$ . Adicionalmente en estos gráficos se muestran los cuadrados de las funciones de onda del hueco que corresponden a la densidad de la distribución de la carga positiva. Es interesante anotar, que en dos primeros subniveles correspondientes a  $m_h = 0$ , el hueco puede permanecer tanto interior como exterior del anillo, es decir hay posibilidad para el efecto túnel. Al contrario, todos los subniveles correspondientes a los momentos angulares del hueco superiores  $m_h = 1, 2, \dots$ , tienen la densidad de la distribución de carga diferente de cero solamente dentro del anillo.

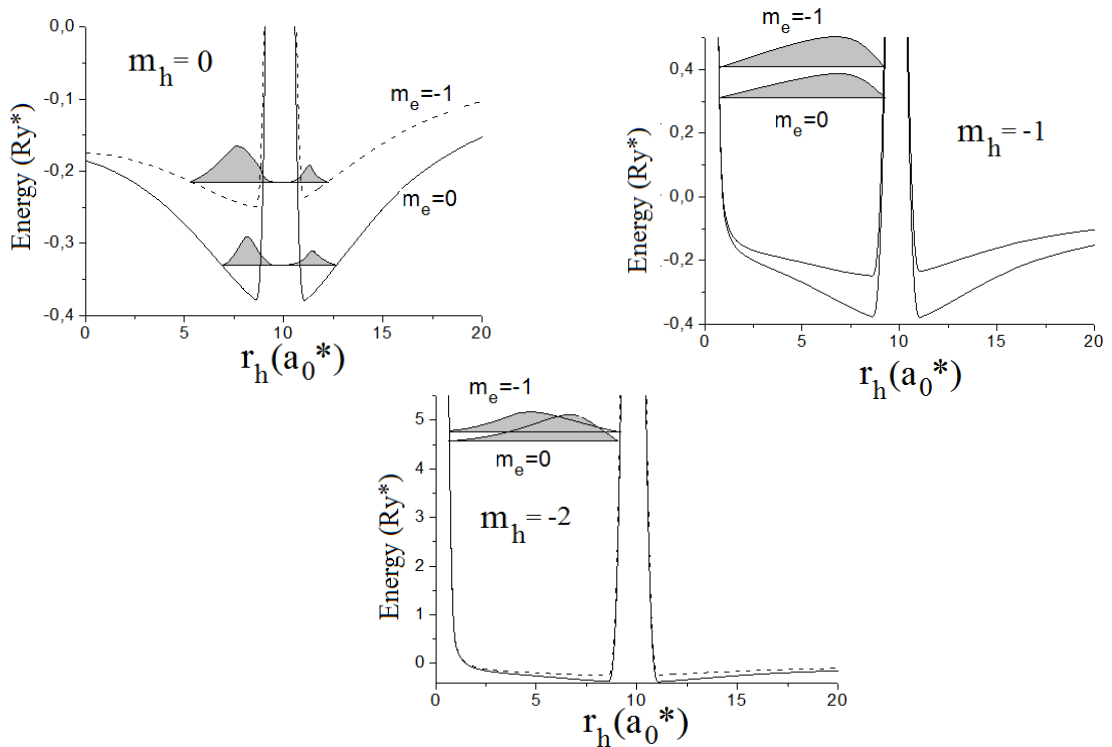


Fig. 5. Las curvas de potencial adiabático para el movimiento lento del hueco y niveles más bajos de la energía del excitón en QR, con parámetros  $h_w = 0.5a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.5a_0^*$ ,

$R_c = 10.0a_0^*$ ,  $w_c = 1.0a_0^*$ . Las líneas sombreadas muestran la distribución de carga positiva alrededor del anillo relacionada con el hueco.

A continuación presentamos los resultados del cálculo de las energías de diferentes niveles en función del radio del anillo bajo para diferentes valores de campo magnético externo  $\gamma = 0, 1, 2$  y  $3$ . En todos los gráficos los parámetros de las dimensiones de estructura son los siguientes:  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$ . En la Fig.6 esta dependencia se presenta en ausencia de campo magnético ( $\gamma = 0$ ). Se ve la diferencia en el comportamiento entre el grupo de los subniveles más bajos y grupos de subniveles superiores: si en el primer grupo la energía del excitón es negativa y sube a medida que el radio del anillo se incrementa, en otros grupos, al revés, la energía del excitón disminuye. Esto se debe al hecho que en el primer grupo el aporte a la energía rotacional es prácticamente cero y el mayor aporte se debe a la atracción entre electrón y el hueco y es negativo. Por otra parte, cuando el radio del anillo crece la separación promedio electrón-hueco se incrementa y el valor absoluto de la energía de atracción se disminuye y la energía del excitón tiende a cero. Para los subniveles energéticos de otros grupos el aporte principal a la energía del excitón, al contrario se debe a la energía rotacional que tiende al infinito cuando el radio se anula y al revés se disminuye cuando el radio crece.

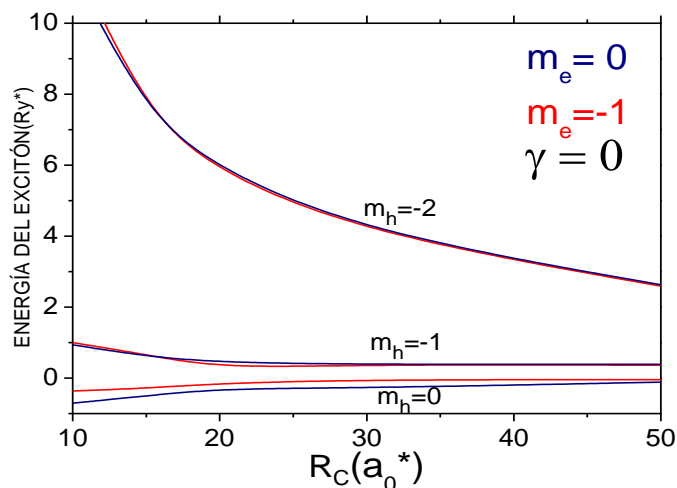


Fig. 6. Las energías del excitón en función del radio del anillo con los parámetros geométricos  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$

A continuación analizaremos como se modifican las dependencias presentadas en la Fig. 6 en presencia de campo magnético.

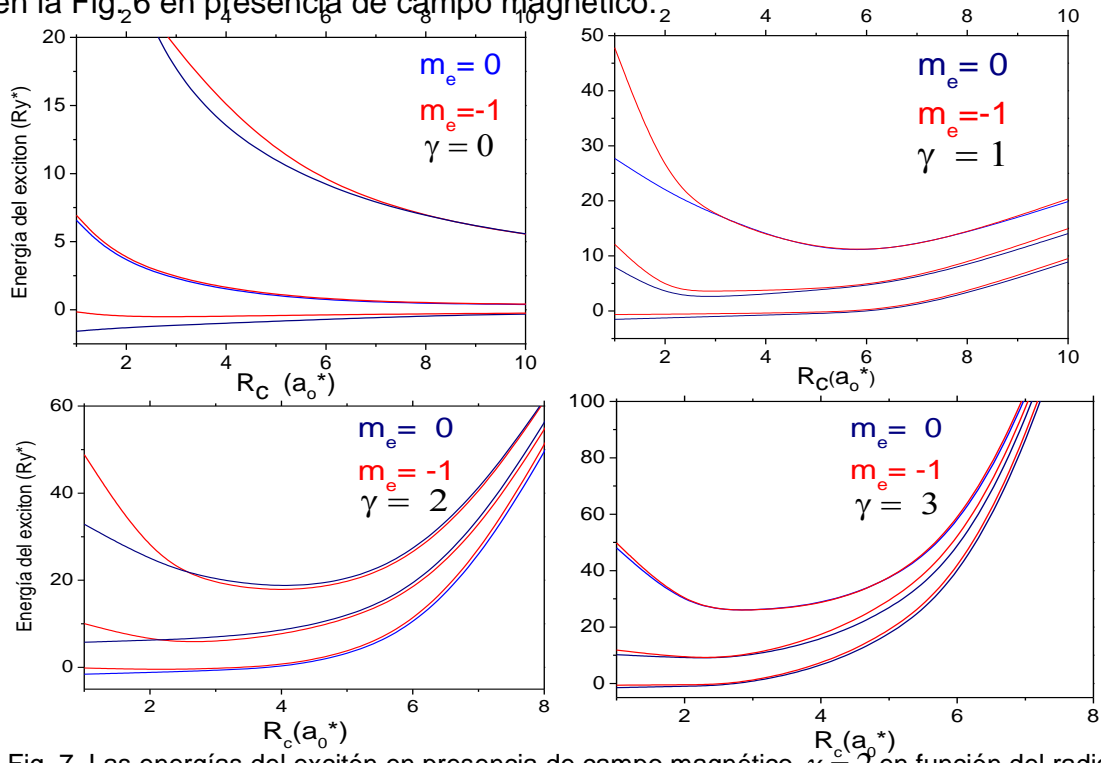


Fig. 7. Las energías del excitón en presencia de campo magnético  $\gamma = 2$  en función del radio del anillo con los parámetros geométricos  $h_w = 0.2a_0^*$ ,  $\Delta h = 0.2a_0^*$ ,  $w_c = 0.5a_0^*$

En la Fig. 7 se presentan las energías de 6 niveles más bajos en función del radio del anillo para 4 diferentes valores de campo magnético desde  $\gamma = 0$  hasta  $\gamma = 3$ . Se puede observar que a medida que la intensidad de campo magnético  $\gamma$  se incrementa el comportamiento de las curvas para grandes radios del anillo se transforman de unas curvas decrecientes a otras crecientes ajustándose a una forma parabólica según el término diamagnético  $\gamma^2 R_c^2 / 4$  en el Hamiltoniano el cual se hace predominante para los radios grandes. Otra particularidad que caracteriza estas nuevas curvas es la inversión de los niveles energéticos dentro de cada doblete cuando al incrementar el radio en presencia de campo magnético el estado base  $m_e = 0$  se convierte en el estado base  $m_e = -1$ . Esta inversión de los niveles se debe al efecto de Aharonov-Bohm, según el cual la inversión entre los niveles  $m_e = 0$  y  $m_e = -1$  debe ocurrir aproximadamente para el radio  $R_c \approx \sqrt{12/\gamma}$ . Nuestros resultados presentados en la Fig. 7 están en buena concordancia con esta relación y se puede

observar como los cruces de las líneas se desplazan hacia la izquierda a medida que el campo magnético crece.

### **3. CONCLUSIONES**

Se consideró el modelo 3D para un excitón confinado en un anillo cuántico de tipo II, donde el electrón está confinado dentro del anillo, mientras que el hueco se mantiene fuera de este mediante la atracción electrostática entre el electrón y hueco. La ecuación de onda para este modelo inicialmente contiene 6 variables.

Se demostró que el modelo 3D se puede reducir al modelo equivalente 2D usando la aproximación adiabática y teniendo en cuenta que el grosor vertical de los anillos fabricados es mucho menor que otros parámetros geométricos, como ancho y altura del anillo, radio de la línea central del anillo. En esta aproximación la ecuación de onda ya tiene 4 variables cuyos parámetros efectivos tiene información sobre la morfología 3D del anillo.

Se consideró el caso particular cuando la masa del hueco es mucho mayor que la del electrón y se demostró que en este caso usando otra vez la aproximación adiabática se pueden separar todas variables y reducir el problema inicial a solamente dos ecuaciones 1D, una de las cuales describe la rotación del electrón a lo largo del anillo y otra el movimiento en la dirección radial del hueco en un campo central producido conjuntamente por la atracción electrostática entre las partículas y el confinamiento estructural.

La primera de estas dos ecuaciones está en un anillo uniforme no se puede resolver en forma analítica y en la tesis se fue aplicado un método numérico en la base del método de las series de Fourier. Mientras que la segunda ecuación fue resuelta en la tesis usando la técnica del barrido trigonométrico.

Usando el método de cálculo desarrollado se calcularon los niveles energéticos de los niveles del excitón más bajos en la función de campo magnético externo y se encontraron los efectos típicos para estructuras de este tipo relacionados con las intersecciones de las curvas energéticas, oscilaciones del estado base, etc., llamados el efecto de Aharonov-Bohm.

También se presentan algunos nuevos resultados que permiten clasificar los niveles energéticos más bajos de los excitones y sus modificaciones relacionados con las variaciones de los parámetros geométricos de los anillos.

## ***BIBLIOGRAFÍA***

---

- [1]. Jairo E Márquez D, “Nanotecnología y Nanomedicina. Tecnologías emergentes para mejorar la calidad de vida”. Revista de la Facultad de Medicina”. Vol.9 No. 1, JUNIO DE 2004
- [2]. Máximo López López, Miguel. A, Meléndez Lira, “Pozos, hilos y puntos cuánticos; estructura semiconductor de baja dimensión”. Avance y Perspectiva vol.16. Julio-Agosto de 1997
- [3]. I.D. Mikhailov, F.J. Betancur, and J.H. Marín, “ $D^-$  Ground state Binding Energy in Graded GaAs-(Ga, Al) As Quantum well”. Phys stat. Sol. (b) **220**, 171 (2000)
- [4]. Willian Gutiérrez Niño, “Espectro energético de  $D^0$  y  $D^-$  en sistemas casi-unidimensionales” Tesis de magister en física, UIS 2007.
- [5]. Ralf Blossey and Axel Lorke. “Wetting droplet instability and quantum ring formation” Physical Review E, vol.65, (2002) 021603
- [6]. M.Grochol, F. Grosse, and R. Zimmermann, “Optical exciton Aharonov-Bohm effect, persistent current, and magnetization in semiconductor nanorings of type I and II” Physical Review B **74**, 115416 (2006)
- [7]. James Hamilton, “Aharonov-Bohm and other Cyclic Phenomena”. Springer Tracts in Modern Physics Vol.139 (1997)
- [8]. J. Sierra-Ortega, R.A. Escorcía, and ID Mikhailov, “Exciton in type-II quantum dot”. Journal of Physics: Conference Series **167** (2009) 012034
- [9]. A Iglesias-García, J. Sierra-Ortega, R.R. Rey-Gonzales, “Excitones confinados en puntos cuánticos tipo II”. Revista Colombiana de Física. Vol.39, No.1, 2007
- [10]. Hanz Ramírez, Ángela Camacho, Lok Lew Yan Voon, “Acoplamiento en superredes de puntos cuánticos”. Revista Colombiana de Física, Vol.39, No.1, 2007

- [11]. V.M. Fomin, V.N. Gladilin, S.N. Klimin, and J.T. Devreese “Theory of electron energy spectrum and Aharonov-Bohm effect in self-assembled  $In_xGa_{1-x}As/GaAs$  quantum rings in GaAs”. *Physical Review B* **76**, 235320\_2007.
- [12]. I. Filikhin, V.M. Suslov, B. Vlahovic, “Electron spectral properties of the InAs/GaAs quantum ring”. *Physica E* **33** (2006) 349–354
- [13]. A. Lorke, et al (*Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 2223).
- [14]. William A. Muñoz, Juan C. Granada E, “Efecto de la Excentricidad Sobre las Oscilaciones de Aharonov-Bohm en un Anillo Cuántico Semiconductor”. *Revista Colombiana de Física*, Vol.**41**, No.3, 2009
- [15]. Hui Pan and Jia-Lin Zhu, “Impurity effects on energy levels and far-infrared spectra of nanorings” *J. Phys: Condens. Matter* **15** (2003) 7287–7295
- [16]. R. Rodríguez Mijangos, “Energías de Formación de Excitones Localizados en Impurezas de  $Sn^{2+}$  en Halogenuros Alcalinos”. *Revista Mexicana de Física* **32** No. 3 (1986) 401-411
- [17]. M. Tadic, V Arsoški, N. Cukaric and F.M. Peeters, “The Optical Excitonic Aharonov-Bohm Effect in a Few Nanometer Wide Type-I Nanorings” *Acta Physica Polonica A*. Vol.**117** No 6(2010)
- [18]. Francisco Javier Culchac y Juan Carlos Granada, “Excitones en Anillos Cuánticos Semiconductores de Doble Barrera para Electrones y Huecos Localizados en Pozos Idénticos”. *Revista Colombiana de Física*, Vol.**37**, No 1 .2005
- [19]. T. Raz, D. Ritter and G. Bahir, “Formation of InAs Self-Assembled Quantum Rings on InP” Department of Electrical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology, Technion City, Haifa 32000, Israel (2002)
- [20]. W. Gutiérrez, L.F. Garcia, and ID Mikhailov, “Impurity effect on spectrum of nanoring”. *Journal of Physics: Conference Series* **167** (2009) 012067

## ANEXOS

---

### A.1. EI HAMILTONIANO DE UN ELECTRÓN EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO HOMOGÉNEO

A continuación se escribe el Hamiltoniano en forma adimensional en presencia de un campo magnético externo homogéneo:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^*} - \frac{e}{m^*} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2 A^2}{2m^*} + V(\vec{r}) \quad (\text{A1.1})$$

Usando los operadores del momento, vector campo magnético, el momento angular en la dirección con el eje z  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$  y  $\rho = r \sin \theta$ ; da como resultado.

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m^*} \Delta + \frac{ie\hbar B}{2m^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m^*} - \frac{e^2}{\epsilon \tilde{r}} + V(\vec{r}) \quad (\text{A1.2})$$

Para convertir el Hamiltoniano en forma adimensional se tiene en cuenta

$$R_y^* = \frac{\hbar^2}{2m^* a_0^{*2}} = \frac{e^2}{\epsilon a_0^*}, \quad \gamma = \frac{e\hbar B}{2m^* R_y^*} \quad (\text{A1.3})$$

$$H \rightarrow \tilde{H} R_y^*; \quad \Delta \rightarrow \tilde{\Delta} / a_0^{*2}; \quad V \rightarrow \tilde{V} R_y^*; \quad r \rightarrow \tilde{r} a_0^*$$

$$\tilde{H} = -\tilde{\Delta} + V(\tilde{r}) + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2}{4} \tilde{\rho}^2 - \frac{2}{\tilde{r}} \quad (\text{A1.4})$$

La ecuación (A1.4) es el Hamiltoniano adimensional.

### A.2. ANILLO 1D CON UN SOLO ELECTRÓN

Un caso particular donde el electrón está orbitando en forma circular. Se usa la ecuación (A1.4), como no tiene potencial  $V(r)$  ni potencial eléctrico, queda:

$$\tilde{H} = -\tilde{\Delta} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2}{4} \tilde{\rho}^2 \quad (\text{A2.1})$$

Se tiene las condiciones:

$dz \rightarrow 0$ ;  $d\rho \rightarrow 0$ ;  $\rho \rightarrow R$ ;  $V(r) \rightarrow 0$ . El Hamiltoniano y la ecuación de Schrödinger para una dimensión son:

$$H_{1D} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 R^2}{4}; \quad H_{1D} \psi_{1D}(\varphi) = E \psi_{1D}(\varphi); \quad \psi_{1D}(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (\text{A2.2})$$

Al reemplazar la función de onda en la ecuación de Schrödinger, la energía es:

$$E_m = \frac{m^2}{R^2} - \gamma m + \frac{\gamma^2 R^2}{4}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad E_0 = \frac{\gamma^2 R^2}{4}, \quad E_1 = \frac{1}{R^2} - \gamma + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \quad (\text{A2.3})$$

### A.3. USO DEL COEFICIENTE $\eta = \frac{m_e^*}{m_h^*}$

Con el Hamiltoniano adimensional se relaciona  $\eta$ , que es la masa efectiva del electrón sobre la masa efectiva del hueco. El Hamiltoniano del Excitón es:

$$H_X(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = \frac{-\hbar^2}{2m_h^*} \frac{m_e^*}{m_e^*} \Delta + \frac{ie\hbar B}{2m_h^*} \frac{m_e^*}{m_e^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m_h^*} \frac{m_e^*}{m_e^*} - \frac{e^2}{\epsilon \vec{r}} + V_h(r_h) + H_e(\vec{r}_e), \quad (\text{A3.1})$$

$$H_X(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = -\eta \left( \frac{\hbar^2}{2m_e^*} \Delta - \frac{ie\hbar B}{2m_e^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m_e^*} \right) + V(r_h) + H_e(\vec{r}_e); \quad (\text{A3.2})$$

Y con las condiciones de la ecuación (A1.3) el excitón es:

$$H_X(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = -\eta \left( \Delta - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} \right) + V_h(r_h) + H_e(\vec{r}_e); \quad (\text{A3.3})$$

### A.4. CALCULO DE VALOR MEDIO CUADRADO PARA EL ESPESOR DEL ANILLO

Como el ancho del anillo tiende a cero, el radio de  $r_{eh}$  de la ecuación (7) tiene las siguientes condiciones:

$$r_e = R_c + y; \quad -\frac{w}{2} < y < \frac{w}{2}; \quad x = \frac{r_h}{R_c} \quad (\text{A4.1})$$

$$r_{eh} = \sqrt{r_e^2 + R_c^2 + y^2 + 2R_c y - 2(R_c + y)r_e \cos \varphi}$$

El valor medio cuadrado de la distancia para el ancho del anillo es:

$$y \rightarrow \bar{y}, \quad y^2 \rightarrow \bar{y}^2;$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{w} & ; -\frac{w}{2} < y < \frac{w}{2} \\ 0 & ; |y| > \frac{w}{2} \end{cases}, \quad \bar{y} = \int_{-w/2}^{w/2} y f(y) dy = 0; \quad (\text{A4.2})$$

El valor medio es igual a cero, pero el valor medio cuadrático es:

$$\bar{y}^2 = \int_{-w/2}^{w/2} y^2 f(y) dy = \int_{-w/2}^{w/2} y^2 \frac{1}{w} dy = \frac{w^2}{12}, \quad (\text{A4.3})$$

Y la aproximación para el radio es:

$$r_{eh} = R_c \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \varphi + \frac{1}{12} \left( \frac{\bar{w}}{R_c} \right)^2} \quad (\text{A4.4})$$