Prácticas Profesionales tempranas en la formación inicial de profesores de Matemáticas

Sully Lineth Moreno Gómez

Trabajo de grado para obtener el título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico
Doctora en Ciencias de la Especialidad Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias Básicas y Humanas
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2017

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios porque es el creador y dueño de mi vida, quién direccionó mis sueños, mis proyectos y permitió que cada uno de mis anhelos se hicieran realidad.

A mis padres Fabio y Janeth, gracias por creer en mí, por enseñarme que puedo llegar cada día más lejos de lo que imagino. A mis hermanos por su compañía y su respaldo en las circunstancias que necesité.

A mi querido amigo Joel, muchas gracias por tu apoyo, por enseñarme a ser paciente y a confiar en que todo lo que Dios permite que pase en nuestras vidas obra para bien.

A mis amigas Liliana, Linda, Marilyn y Clara, gracias por creer en mí, por tenerme en tal alta estima y enseñarme a confiar en todas mis habilidades.

Gracias a mis compañeros de maestría, Jonathan, Ana, Edwin, Cristian y Giovanny, con ustedes aprendí a disfrutar mucho más cada experiencia en la maestría, nuestra unión y fuerza nos ayudó a alcanzar muchas metas, el apoyo mutuo y la experiencia de querernos como una familia me enseñó lo afortunada que fui al tenerlos como compañeros y amigos.

A mis profesores de la maestría Jorge Fiallo, Gabriel Yáñez y Sandra Parada, ustedes hicieron que este proceso se convirtiera en un espacio de muchísimo aprendizaje y compañerismo, gracias por exigirnos y creer en nosotros.

Nuevamente gracias profesora Sandra Evely por ser mi directora de proyecto, aprendí a exigirme cada vez más, a creer en mis capacidades y a admirarla tanto por ser una mujer tan emprendedora y luchadora, gracias por ser un ejemplo a seguir en mi vida.

Gracias a Claudita por su paciencia y su ayuda cada vez que necesitaba realizar un papeleo o requerimientos de la maestría, gracias a Rosalbita por su amabilidad y alegría todos los días.

Al programa ASAE, al SEA y la Vicerrectoría Académica por permitirme realizar mi trabajo de investigación dentro de este proyecto, a los tutores que me permitieron estar en sus sesiones, por supuesto, a mi gran amigo y profesor de Precálculo quién me permitió hacerlo parte de esta investigación y ser mi caso de estudio.

Gracias a la Universidad Industrial de Santander por abrirme nuevamente sus puertas para participar de este proceso educativo, siempre será mi casa, en lugar dónde me formé para dar lo mejor de mí a la sociedad, gracias por permitirme estar becada dentro del programa, fue un gran apoyo para poder realizar esta formación.

Gracias a Edumat-UIS, a mis compañeros del Semillero Matemático quienes con su alegría cada sábado me apoyaron a seguir adelante y continuar con este proceso tan enriquecedor, a Marcela Jaimes y Claudia quienes con sus consejos me impulsaban a creer en las capacidades que había adquirido en mi proceso de preparación.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios, porque todo se lo debo a Él, a mis padres Fabio y Janeth porque he visto durante toda mi vida el sacrifico que han hecho para ayudarme a ser la persona que soy ahora. A mi directora de trabajo Sandra Evely Parada, una gran mujer, guerrera, luchadora y apasionada por la formación de profesores, quién me enseñó a amar lo que hago y me ayudó con paciencia a ser disciplinada y ser cada día mejor.

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Resumen

Prácticas Profesionales tempranas en la formación inicial de profesores de matemáticas[1]

Autor: sully Lineth Moreno Gómez[2]

Palabras claves: prácticas profesionales tempranas, formación inicial de profesores, cálculo diferencial, tutorías académicas.

Descripción:

El siguiente trabajo tuvo como objetivo identificar y explicar significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) por educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas en un programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes de Cálculo Diferencial.

El estudio se sustentó teórica y metodológicamente en el Modelo R-y-A (Parada 2011) que permite orientar y analizar los procesos de reflexión de los profesores. Ayudados por el Modelo R-y-A se caracterizaron los significados negociados por Alfonso, un caso de estudio seleccionado de la comunidad que ha transitado por todos los roles de participación que se presentarán en este documento, en las tres componentes del pensamiento reflexivo: Pensamiento matemática, Pensamiento didáctico y Pensamiento Orquestal. En este estudio, se recopilaron datos desde el año 2012 hasta el 2016 para evidenciar la influencia de la realización de prácticas tempranas en las prácticas profesionales de profesores de matemáticas, lo cual hace de esta investigación ser de corte longitudinal, a su vez, se ubica en la línea de formación de profesores. En esta investigación se logró identificar cambios de concepción del caso de estudio llamado Alfonso con respecto al objeto función y la forma de enseñarlo. Alfonso mostró mejorar en el dominio de contenidos matemáticos, manejo de clase e incorporación de nuevas tecnologías en su metodología de enseñanza.

[1] Trabajo de grado

[2] Facultad de Ciencias Básicas y Humanas. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico, Doctora en Ciencias de Especialidad en Matemáticas.

Abstract

Title: Early Professsional Practices in the initial training of mathematics teachers[3]

Author: Sully Lineth Moreno Gómez[4]

Key words: early professional practices, initial teacher training, differential calculus, academic tutorials.

Description:

The following work aimed to identify and explain negotiated meanings (to specify possible learning) by mathematical educators who have done early practices in a follow-up program and support to students of Differential Calculus.

The study was supported theoretically and methodologically in the Model R-y-A (Parada 2011) that allows orienting and analyzing teachers' reflection processes. Helped by the RyA Model, the meanings negotiated by Alfonso were characterized, a case study selected from the community that has gone through all the participation roles that will be presented in this document, in the three components of reflective thinking: Mathematical thinking, Didactic thinking and Orchestral Thought. In this study, data were collected from 2012 until 2016 to show the influence of the performance of early practices in the professional practices of mathematics teachers, which makes this research be longitudinal, in turn, it is located in the line of teacher training. In this investigation it was possible to identify changes in the conception of the case study called Alfonso with respect to the object function and the way to teach it. Alfonso showed improvement in the domain of mathematical contents, class management and incorporation of new technologies in his teaching methodology.

[3] Trabajo de grado

[4] Facultad de Ciencias Básicas y Humanas. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico, Doctora en Ciencias de Especialidad en Matemáticas.

Introducción

Durante décadas la línea de formación de profesores ha tenido un gran apogeo en el campo de la educación matemática. Esto ha llevado a algunos investigadores a buscar estrategias para disminuir la brecha entre la teoría (recibida durante la formación inicial) y la práctica (realizada en el desarrollo profesional), la cual puede deberse a las pocas experiencias prácticas, que permiten a los profesores en formación inicial acercarse a la práctica real. Al respecto, en Colombia, la Ley 115 de 1994, artículo 109, resalta el desarrollo de la teoría y la práctica pedagógica como parte fundamental del saber de un educador. De manera complementaria, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) concibe la práctica en la formación inicial como un proceso de autorreflexión (MEN, 2014). La práctica se convierte en un espacio de conceptualización, investigación y experimentación didáctica, donde el estudiante articula todos los saberes obtenidos en su formación y enriquece la comprensión del proceso educativo.

En la Universidad Industrial de Santander (UIS) hace 43 años existe el programa de Licenciatura en Matemáticas, en donde poco a poco se han creado espacios de prácticas para los profesores en formación inicial. Espacios posibilitados por el Grupo de Investigación en Educación Matemática, (Edumat-UIS) al cual acceden voluntariamente los estudiantes de los programas de licenciatura en Matemáticas y de Matemáticas.

También, desde el 2012 en la Escuela de Matemáticas se ha generado otro espacio de formación más próximo a las matemáticas universitarias, el cual posibilita tutorías entre pares, esto mediante el programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes dentro del Sistema de Excelencia Académica SEA (ASAE-SEA) con el cual busca atender a la problemática de deserción en la universidad relacionada con Cálculo Diferencial.

Los espacios favorecidos por el programa ASAE-SEA se han constituido en un Aula Experimental (Botello, 2013) que busca favorecer tanto a estudiantes beneficiarios (estudiantes de primer ingreso a la universidad y que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial para ser tutorados) como a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, quienes logran articular las teorías vistas en el curso de didáctica con la práctica temprana vivenciada como tutores.

Dicho programa ha favorecido el contexto de la investigación que aquí se reporta; con la cual se busca determinar y explicar los significados negociados por profesores de matemáticas que han realizado prácticas tempranas mediante tutorías académicas. Para ello se usó el Modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) planteado por Parada (2011) para analizar los *pensamientos matemático, didáctico* y *orquestal* (los cuales conjugan el Pensamiento Reflexivo, según la autora) del profesor de matemáticas.

Para alcanzar el objetivo se seleccionó como estudio de caso a un licenciado en Matemáticas, quien transitó por el programa ASAE-SEA y es investigador en formación al momento de documentar este estudio, la elección se realizó después de la organización de la base de datos del programa, de cual se realizó un filtro, con las participaciones de cada uno de los profesores en formación y que habían culminado sus estudios de pregrado. Observando el recorrido realizado y contrastando con la información del programa que pudiera brindar evidencias para la investigación, se seleccionó a Alfonso (nombre dado al caso de estudio en esta investigación) pues estuvo en el proceso desde el inicio del programa, además se contaba con toda la información de sus informes semestrales que nos brindaban información del proceso. Se contaba con tres candidatos más para ser caso de estudio de esta investigación, pero no se contaba con toda la información necesaria que sirviera como evidencia para este trabajo.

Al final de este documento, se evidencia la negociación de significados realizada por el docente, y se pone en manifiesto las razones por las cuales este proceso favorece su práctica profesional.

Este documento se constituye en reporte final de investigación y consta de seis capítulos, así:

En el **Capítulo 1** se exponen algunos resultados de trabajos de investigación asociados a la formación de profesores de matemáticas, las prácticas profesionales, y, en especial, a la formación inicial que considera las prácticas tempranas desde las tutorías académicas.

El contexto se describe en el **Capítulo 2,** en el cual emergen la pregunta y el objetivo de esta investigación. Aquí se describen las diferentes actividades de participación que posibilitan el programa ASAE-SEA (contexto de la investigación): tutorías entre pares, práctica docente y proceso de formación investigativa. Dichas actividades fueron realizadas por el caso de estudio tomado en esta investigación.

Los aspectos teóricos que sustentan la investigación se explican en el **Capítulo 3**, específicamente se describe el Modelo R-y-A (Parada, 2011) con el cual se determinaron los significados negociados por el caso de estudio dentro de una comunidad de práctica (CoP). Los significados negociados son evidenciados a partir de los componentes del *Pensamiento Reflexivo*: el *Pensamiento Matemático,* que concierne al Cálculo Diferencial; el *Pensamiento Didáctico,* puesto en marcha y evolucionado en el marco de las tutorías entre pares y un curso de Precálculo; y el *Pensamiento Orquestal,* relacionado con el uso de herramientas tecnológicas (GeoGebra).

En el **Capítulo 4** se presenta la metodología empleada para la obtención de los datos y su tratamiento con los fundamentos teóricos, así como los instrumentos usados para obtener información del programa. Reporta el estudio inicial realizado para seleccionar el caso de estudio.

El estudio de caso (llamado Alfonso, para efectos de esta relatoría) se presenta en el **Capítulo 5,** allí se muestran evidencias de su participación en el programa ASAE-SEA desde el año 2012 hasta el 2016. A partir de los datos obtenidos se evidencian, en cada etapa de formación, los significados negociados en el Pensamiento Reflexivo de Alfonso y la transformación de concepciones hasta su etapa de investigador en formación.

Las reflexiones finales de la investigación se presentan en el **Capítulo 6,** el cual se divide en tres apartados, en los cuales se explican los aprendizajes de cada componente del Pensamiento Reflexivo, en cada uno de los roles de participación que tuvo Alfonso dentro de la comunidad de práctica (CoP).

1. Una mirada alrededor de la formación de profesores

Hace medio siglo el interés de la Didáctica de las Matemáticas se enfocaba en las estrategias que debía usar el profesor para enseñar matemáticas a los estudiantes (Brousseau, 1986). Bruno D'Amore, en su libro *Didáctica de la matemática* (2006), menciona el cambio que ha surgido dentro de esta disciplina, en particular en el cómo se ha ido refinando y ampliando el panorama en cuanto al interés de estudio. A su vez, el autor expone como va tomando forma la didáctica de la matemática, la educación matemática y la investigación en esta área.

A finales de los 70, una revolución en el campo de la educación matemática ayudó a clarificar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Se comprendió que el aprender no depende solo de la disciplina matemática y de la metodología de la enseñanza, sino también de fenómenos ligados a problemas de comunicación (Kilpatrick, 1998). En esta parte, empieza el profesor a jugar un papel protagónico en los procesos de enseñanza y aprendizaje, hasta el momento el papel principal lo tenía el estudiante (McCombs y Whisler, 1997). Es así como, en diferentes congresos nacionales e internacionales realizados en los años 80, de los cuales se encuentran memorias, se puede observar una influencia muy fuerte de los psicólogos de la escuela de Piaget, por consiguiente, una gran difusión de sus teorías constructivistas (D'Amore 2006).

De la que se conoce el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas como escuela francesa, sobresale la "Teoría de las Situaciones Didácticas", que está sustentada en una concepción constructivista –en el sentido piagetiano– del aprendizaje. Brousseau consolidó la perspectiva de diseñar situaciones que permitieran al estudiante construir el conocimiento, lo cual llamó la atención sobre la necesidad de dar un papel central –dentro de la estructura de la enseñanza– a la existencia de momentos de aprendizaje en los cuales el estudiante se enfrentara a la resolución de un problema, sin que el profesor interviniera en cuestiones relativas al saber en juego (Sadovky, 2005).

En Norteamérica el estudio sobre los conocimientos y las creencias del profesor en relación a las matemáticas y a como estas deben ser enseñadas ha sido muy popular en los últimos años. Investigadores como Shulman y Ball se han interesado por el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas y su caracterización, además de su conocimiento como enseñante de un contenido.

Shulman (1986) busca resaltar la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza y diferenciarlo del conocimiento del contenido que tienen otros profesionales. El autor considera que al profesor no le basta con dominar el conocimiento de la materia, por lo que propuso una serie de componentes que complementan el conocimiento del profesor para la enseñanza, en los cuales se encuentran los conocimientos didácticos del contenido, pedagógico general, curricular, de la materia, sobre los estudiantes, entre otros; los cuales han servido de apoyo a otros investigadores para presentar modelos similares y concreciones a esta propuesta.

Ball, Thames y Phelps (2008) proponen una concreción al modelo de Shulman en relación con el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, destacando en cada uno de ellos tres subdominios:

1. El conocimiento del contenido: a) *conocimiento común del contenido,* que es descrito como "el conocimiento matemático y las habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza" (ibid., p. 399); b) *conocimiento especializado del contenido,* que se refiere al "conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza" (ibid., pp. 400-401); c) *conocimiento del horizonte matemático,* que es definido como "el conocimiento que tiene el profesor de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo" (ibid., p. 403).

2. El conocimiento didáctico del contenido: a) *conocimiento del contenido y de los estudiantes,* que es definido como conocimiento de contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular (Rojas, Flores y Carrillo, 2015), se refiere al conocimiento que se utiliza en tareas de enseñanza, que implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los estudiantes; b) *conocimiento del contenido y la enseñanza,* que se define como "conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático" (ibid., p. 401), se refiere al saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias usadas por ellos para corregir errores y malas concepciones; c) *conocimiento del currículo,* que se refiere al conocimiento de los objetivos, contenidos, orientaciones curriculares, etc.

Se coincide así con Rojas y Flores (2011) al afirmar que los trabajos desarrollados por Ball y sus colaboradores son de gran importancia en la educación matemática, ya que buscan caracterizar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza. Esto evidencia una línea de investigación abierta donde uno de sus principales objetivos es buscar procedimientos para identificar los conocimientos con precisión, aún más cuando se refiere a identificar el conocimiento en la práctica.

Al tener en cuenta el conocimiento y las creencias del profesor sobre la enseñanza, se hace reconocimiento del importante papel del profesor en el aprendizaje de los estudiantes. Es así como se explica parcialmente el desarrollo que ha tenido durante estos últimos años la investigación sobre profesores de matemáticas (Sfard, Hashimoto, Knijnik, Robert y Skovsmose, 2004).

En el área de formación de profesores de matemáticas se encuentra diversidad de contextos y problemáticas, a las cuales se pueden enfrentar los investigadores (Gómez, 2005). Con respecto a esto, Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005) abordaron las siguientes preguntas:

¿Qué es lo más significativo de la investigación en formación de profesores de matemáticas durante los últimos cinco años?

¿Qué investigación se está produciendo que pueda contribuir al aprendizaje y desarrollo de los profesores?

A partir de esto, el interés de la investigación en formación de profesores se focaliza en cuatro cuestiones centrales (Gómez, 2007):

¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?

¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?

¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?

¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

En estos interrogantes, se podría interpretar, subyace la premisa de que son los profesores los responsables de la instrucción que reciben los estudiantes en la escuela; ellos con sus conocimientos, creencias, dentro de contextos culturales, políticos e institucionales, deciden qué experiencias matemáticas viven sus estudiantes en el aula (Kilpatrick, Swafford y Findell 2001). Es por ello que, aunque este estudio no se centra en responder de forma específica cada una de las preguntas anteriores, sí busca contribuir al aprendizaje y al desarrollo de los profesores, por medio de lo que se plantea en el desarrollo del mismo, pues la formación de los profesores juega un papel importante en el proceso de aprendizaje.

Una tarea importante de la educación matemática es impulsar procesos formativos que potencien el desarrollo profesional que se ve influenciado por las experiencias prácticas, que además influyen en el desarrollo personal, lo cual modifica las concepciones y percepciones acerca de la labor del profesor de matemáticas (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001).

La formación profesional del profesor de matemáticas debe ir enfocada hacia la participación en procesos prácticos que le permitan diseñar actividades para la clase e implementarlas, para que con estas se vayan desarrollando destrezas para la enseñanza (Llinares, 2011). Es decir, el profesor de matemáticas debe estar capacitado para tomar decisiones en cuanto al currículo escolar, organizar los contenidos de manera conveniente al desarrollo de la clase y el contexto en el cual se desarrolla, para lograr el desarrollo de habilidades de enseñanza que pueda poner en juego en su práctica profesional. Esto señala que la docencia es

> Una profesión con demandas y actividades particulares, las cuales requieren de una formación sólida y especializada, que permita desarrollar en el profesorado una capacidad reflexiva sobre los procesos que llevará a cabo a lo largo de su desarrollo profesional y sobre los conocimientos que requiere para su labor (Escudero, 2015, p. 3).

Ese conocimiento (teórico y práctico) adquirido durante la formación, posibilita en el profesor un mejor desempeño en las prácticas docentes que debe realizar para ganar experiencia, ya que el conocimiento profesional es el conjunto de saberes y experiencias que posee y del cual hace uso en el desarrollo de su labor docente (Estepa, 2000).

En este estudio se considera que la formación de profesores debe incluir la reflexión a partir de las prácticas realizadas en su formación profesional inicial, porque en ellas el profesor va comprendiendo su papel dentro de la educación y va generando ideas que le permitan mejorar su experiencia profesional. Por ello se hace necesario profundizar en las "prácticas profesionales" (o práctica, sencillamente) pues es "el lugar para la génesis de ideas, inquietudes y problemas y donde estas ideas se prueban, refinan y algunas veces se abandonan" (Muñoz y Carrillo, 2012, p. 180).

1.1. Desarrollo profesional (Prácticas Profesionales) y formación inicial de profesores

El objetivo de cualquier profesional docente, debe ser combinar el conocimiento con la acción, ya que esto, permite mejorar las prácticas profesionales, que se fortalecen mediante el conocimiento y la experiencia (Zabala, 1995). Incluso, el análisis de la práctica de otros funciona a veces como espejo (Climent y Carrillo, 2007), en tanto que el profesor se siente más cómodo pues puede valorar lo que observa y compararlo con lo que él hace o piensa que haría.

Desde este punto de vista, para Climent y Carrillo (2007), el análisis de cualquier situación real de enseñanza puede ser formativo, desde planteamientos como discusiones profundas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, interacciones con lecturas y reflexiones teóricas, participación en grupos de profesionales y la práctica individual. Una buena práctica implica la actuación dentro de un grupo de profesores, la cual consideran un buen hacer, teniendo en cuenta el contexto de las situaciones en el aula.

Las situaciones en el aula deben ser comprendidas por el profesor de matemáticas, ya que un aspecto fundamental es la mejora de la comprensión de la práctica (Krainer, 1998), dado que la actuación en la práctica y su comprensión se potencian mutuamente:

> Una mejor comprensión de las propias creencias, conocimiento, acciones y reflexiones permite una mejora de la práctica, que a su vez se torna en una mejor comprensión, así como en la visión de nuevos retos que son el punto de partida de nuevos intereses para comprender mejor (ibid., p. 26).

Al comprender los aspectos mencionados, se esperaría que el profesor realice un proceso de resolución de los problemas profesionales que se presentan en todo momento, pues asume el reto de guiar a los estudiantes a una construcción del conocimiento en el marco de sus acciones e interacciones con los estudiantes (Barrera y Santos, 2001). Por lo anterior, la práctica es comprendida como referente del desarrollo profesional, en el cual el profesor realiza un aprendizaje continuo como profesional reflexivo y crítico de su propia práctica (Climent y Carrillo, 2002).

El profesor que reflexiona sobre sus propias prácticas puede ser consciente de cómo enseña en matemáticas, qué enseña y por qué lo enseña. Esto permite describir el desarrollo profesional del profesor en términos de añadir variables o establecer nuevas relaciones entre variables para interpretar el proceso de aprendizaje de la matemática; el aumento de conciencia sobre qué contenidos matemáticos enseña, para qué y cómo; el cuestionamiento de su actuación y establecimiento de relaciones con constructos teóricos.

Las prácticas profesionales conducen regularmente a acciones y operaciones que configuran la mejora de la experiencia, a través de los significados dados por los participantes a las intenciones que motivan el progreso del discurso y la evaluación (Ponte, 2012). Krainer (1998) tiene en cuenta cuatro aspectos para describir la práctica profesional del profesor: acción, reflexión (sobre la acción), autonomía y comunicación con otros profesionales. Este autor afirma que la formación de profesores potencia la acción y la autonomía.

Lo planteado por Ponte y Krainer se resume en el trabajo de Parada (2011), quien tiene en cuenta los aspectos anteriores y afirma que los procesos reflexivos mejoran las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas, los cuales alcanzan nuevos conocimientos en cuanto a lo que enseñan y como lo enseñan, posibilitados al interior de comunidades de práctica (CoP).

Moreno (2015) reporta, por ejemplo, un estudio que evidencia que la interacción de los integrantes de una CoP, que propende al desarrollo curricular de un curso de Precálculo mediado por tecnologías digitales, promueve la confrontación de concepciones propias de los objetos matemáticos del cálculo diferencial, a través de una visión tridimensional de la reflexión: antes, durante y después de la práctica –o acción, como lo llama Parada (op cit.), en quien sustentó teórica y metodológicamente la investigación que aquí se reporta–.

Un aspecto valioso que emerge del estudio del autor es que para obtener *mejores* resultados que se plasmen en la práctica profesional, el profesor requiere un aprendizaje reflexivo (Schön, 1983), y para esto requiere de un contexto que lo posibilite: los mejores resultados en cualquier profesión se logran con aprendizaje explícito y con la ayuda más o menos directa de otros profesionales.

Y es en ese sentido, precisamente, en donde este trabajo pretende profundizar: si las prácticas profesionales son tan importantes para mejorar la labor docente, *¿qué sucede con los profesores en formación?, ¿de qué manera las instituciones de educación superior propician espacios para involucrar a los estudiantes de licenciatura en contextos cercanos a las prácticas profesionales para disminuir la brecha entre la teoría y la dura práctica cotidiana?* Enfrentar los desafíos de la docencia requiere que los futuros docentes sean capaces de adquirir el compromiso de la "práctica reflexiva", tal como lo señalan Brockbank y McGill (2002, p.46).

En la formación inicial, el estudiante tiene que ejercitarse en identificar y resolver situaciones conflictivas, poniendo en juego estrategias racionales para afrontar la práctica docente, en la que la mayoría de las veces hay que actuar con prudencia (Flores, 2004).

Adicionalmente, Ponte (1992) afirma que en la formación inicial es importante la explicación y cambio de concepciones de los estudiantes que serán profesores de matemáticas, por lo que resulta importante comenzar con la identificación de sus concepciones sobre las matemáticas y sobre su enseñanza-aprendizaje. Es a partir de ellas que se construye el conocimiento didáctico del contenido matemático (Mellado, Blanco y Ruiz, 1995).

La participación de los futuros profesores en ambientes de clase similares a los que se enfrentarán profesionalmente les permitirá experimentar aquello en lo cual se desempeñarán, con lo cual se favorecerá su desarrollo profesional (campo en el cual los profesores en servicio buscan actualizar sus conocimientos), además de que podrán reconocer, y quizás, superar sus concepciones. No es factible esperar que los graduados salgan de los programas de formación como expertos. Por esta razón es necesario "profesionalizar" a los estudiantes para que se preparen a aprender durante toda su vida profesional (Llinares, 2007).

1.2. Prácticas Tempranas

En Colombia, los programas de licenciatura son ofrecidos por instituciones de educación superior, generalmente bajo el liderazgo de las facultades de educación, con una duración entre 8 y 10 semestres. Dichos programas habilitan al egresado para el ejercicio de la docencia en los diferentes niveles educativos, áreas o poblaciones, según el énfasis de la formación.

> La necesidad de una formación profesional para el ejercicio de la docencia se ratifica con la Ley 30 de 1992 y la Ley 115 de 1994. La primera establece en su artículo 25 el título de Licenciado para los graduados de las carreras profesionales de educación, dando así relevancia a esta formación de educación superior; y la segunda, en su artículo 112, sostiene la responsabilidad de la formación inicial de docentes a nivel de la educación superior, es decir, a través de los programas de licenciatura (MEN, s.f.).

La Oficina Regional de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC) afirma que:

> En la actualidad hay consenso acerca de que la formación inicial y permanente de docentes es un componente de calidad de primer orden del sistema educativo. No es posible hablar de mejora de la educación sin atender el desarrollo profesional de los maestros. Las reformas educativas impulsadas por la casi totalidad de los países de la región, como muestra de su importancia, han colocado como uno de sus focos el tema de

> la formación inicial y permanente de los docentes, aun cuando lo hayan hecho con diferentes énfasis y orientaciones (ibid., 2006, p.29)

En consonancia con lo anterior, recientemente en Colombia se ha considerado la formación de los educadores del país como sistema (*Sistema Colombiano de Formación de Educadores*), iniciativa que constituye una decisión de significativa importancia para la consolidación de un proceso fortalecido y constante, que contribuye con la permanente cualificación de los educadores (MEN, 2013).

> El sistema de formación de educadores se define como un sistema complejo, constituido por unidades igualmente complejas denominadas subsistemas: formación inicial, formación en servicio y formación avanzada. En cada subsistema se identifican unidades constitutivas que corresponden al sentido de la formación, los sujetos en formación, las instituciones formadoras, los sujetos formadores y los programas y escenarios de formación en cada subsistema (ibid., pág. 47).

> El subsistema de formación inicial incluye los procesos y momentos de la formación de los sujetos interesados en ser educadores en los distintos niveles […]. Contempla los distintos puntos de partida en los que se inicia la formación del educador y los tránsitos entre niveles de la Educación Superior (ibid., pág. 60).

El MEN identifica tres ejes articuladores del sistema: *la pedagogía, la investigación y la evaluación*, que son transversales a la formación inicial (su presencia en los tres subsistemas es diferencial, determinando las acciones de planeación y gestión del sistema de formación (MEN, 2014, p. 63). De forma particular, se le da importancia a la necesidad de involucrar la comprensión reflexiva de la práctica pedagógica, con el fin de realizar una contribución al afianzamiento y la conformación del saber y el conocimiento pedagógico y didáctico, que son de suma importancia en la labor docente.

También, a nivel nacional, se han aunado esfuerzos para definir el perfil del profesor y las competencias básicas que se deben desarrollar en su formación inicial (esto a través de los *Lineamientos de calidad para las licenciaturas en educación;* MEN, 2014), lo cual se da a partir de un estudio crítico de las investigaciones internacionales y nacionales alrededor del tema, y las realizadas por las facultades de educación sobre las cualidades del licenciado.

> Estos lineamientos buscan fortalecer las competencias básicas de todo maestro: enseñar, formar y evaluar, las cuales se orientan de manera prioritaria al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, en tanto se asumen los ambientes de aprendizaje como el lugar donde todo maestro ejerce su práctica profesional (ibid., p. 4).

El MEN (ibid.) considera que los ambientes de aprendizaje son aquellos espacios en los cuales los estudiantes interactúan, acompañados y orientados por un docente, donde se desarrollan experiencias de aprendizaje significativo y con sentido (bajo condiciones físicas, sociales y culturales relevantes y adecuadas).

> Se asume entonces que los ambientes de aprendizaje son el lugar donde el licenciado ejerce su práctica profesional y que es en ellos donde se concretan los aprendizajes de los maestros en formación (ibid., pp. 13-14).

De manera que el MEN, al resaltar la relevancia de la formación inicial de los profesores en el marco de la calidad educativa, ha considerado como condición básica la práctica como eje central de la formación: las prácticas deben incorporarse a los programas desde el tercer semestre, con actividades de observación, e incrementarse exponencialmente hasta ocupar el centro de ella. Dichas prácticas deben ser supervisadas y acompañadas por profesores específicamente designados para tal efecto.

Ante este lineamiento nacional, que recientemente se ha actualizado para considerar las prácticas como eje central de la formación de los profesores, y no como un requisito que suplir al final del programa académico, esta investigación se centra en los espacios que posibilitan las prácticas tempranas. Es allí donde los profesores adquieren competencias básicas para el ejercicio docente, de acuerdo a las situaciones contextuales diversas y complejas propias del entorno escolar en que se insertan, y de manera más particular, es donde el profesor se desarrolla profesionalmente a partir de la reflexión sobre sus propias acciones.

En la investigación sobre desarrollo y conocimiento profesional de profesores de matemáticas, los objetos de atención son los profesores o su práctica docente (Flores, 2004). Las prácticas profesionales, tal como lo menciona Andreozzi (2011), configuran experiencias de formación para el trabajo, las cuales brindan lógicas de acción propias del mundo de la formación académica y a su vez abren caminos al mundo del trabajo profesional. Cuanto más sean las experiencias durante la formación profesional, más interés se podrá generar en los futuros maestros para incursionar en los ámbitos laborales e incluso en procesos de investigación.

Pero, ¿cómo podrían entonces desarrollarse estas prácticas profesionales desde la formación inicial de profesores? Una posible respuesta es mediante las prácticas tempranas.

Desde el concepto de prácticas profesionales descrito por Ponte (2012) y de formación inicial de profesores, descrito por Llinares (2007); se consideran las prácticas tempranas profesionales como *experiencias docentes preservicio que conectan la teoría y la práctica, con las cuales se puede adquirir experiencia y conocimiento para una posterior toma de decisiones en las futuras prácticas del aula*.

El mayor reto está en preparar a los futuros profesores para que puedan aprender *en* la enseñanza. Las tutorías que se ofrecen a nivel universitario resultan ser un ambiente de aprendizaje en donde el licenciado ejerce su práctica profesional. Al realizarse el intercambio de experiencias y de conocimientos entre pares académicos, se brinda seguridad y confianza tanto en el tutor, para enseñar, como en el estudiante beneficiario, para indagar. Este proceso posibilita un aprendizaje conjunto: los estudiantes-tutores ayudan a los estudiantes-beneficiarios a mejorar conocimientos conceptuales a través de la resolución de problemas, y estos, a su vez, posibilitan un proceso de formación docente (Botello, 2013).

Valencia (2014) expone que la participación en tutorías hace que los profesores en formación adquieran estrategias didácticas, pedagógicas y metodológicas para la enseñanza, y a la vez genera en los tutores un nivel de compromiso y disposición para el trabajo. Asimismo, Padilla et. al (2014) dicen que el tutor orienta, asesora y acompaña al estudiante durante su proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la perspectiva de conducirlo hacia su formación integral, lo que significa estimular en él la capacidad de hacerse responsable de su aprendizaje y de su formación.

Lo anterior arroja que en las instituciones de educación superior con programas de formación de profesores existen ambientes de aprendizaje para que el licenciado adelante sus prácticas tempranas. Dichos ambientes constituyen un rico contexto para la línea de investigación en formación de profesores, en aras de profundizar en los procesos de transformación que se dan en los futuros profesores.

2.- Contexto y planteamiento de la investigación

Este capítulo se desarrolla en tres apartados: el primero hace referencia a las prácticas docentes en el marco de un programa de formación de profesores de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Posteriormente, se describe un programa de la Vicerrectoría Académica, en el cual se han consolidado nuevos espacios para las prácticas profesionales de los futuros profesores de matemáticas, mismos que son usados como contexto del estudio que aquí se reporta. Finalmente, se presenta de manera explícita el planteamiento de la investigación (pregunta y objetivo de investigación).

2.1. Práctica docente en el programa de formación de profesores

El programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) tiene una duración de cuatro años y las prácticas se encuentran en los dos últimos semestres del plan de estudios (Práctica Docente I y Práctica Docente II). Se pretende con este programa que los estudiantes pueden familiarizarse con lo que es la labor de docencia e investigación mediante su participación en seminarios, prácticas docentes y la ejecución de trabajos de grado en el área de matemáticas, matemáticas aplicadas o educación matemática. En el ciclo de componente pedagógico, la principal estrategia de enseñanza es la práctica asociada a la teoría, por esta razón todas sus materias son teórico prácticas.

En el Comité Académico de las Licenciaturas, (CAL), órgano creado por el Consejo Académico de la Universidad, se trazan y verifican el cumplimento de las políticas concernientes al ciclo común de las pedagogías, a las prácticas docentes y las situaciones de estudiantes y profesores asociados a las mismas. Dichas prácticas son realizadas en instituciones de educación media de la ciudad. No obstante, existen espacios institucionales en los cuales los estudiantes realizan prácticas fuera del marco de esas dos asignaturas. Un ejemplo es el Grupo de Educación Matemática (Edumat-UIS) el cual posibilita experiencias docentes tempranas mediante la participación voluntaria en los diferentes subgrupos que lo conforman (el *Semillero Matemático, el Club Matemático Euler, las Olimpiadas Regionales de Matemáticas* o las actividades del subgrupo de *Matemática Recreativa).*

2.2. Programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes: el contexto de la investigación. ASAE-SEA

En el año 2012 nace el Programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes (ASAE), el cual emerge de un proyecto llamado "Una estructura curricular para atender la problemática de Cálculo I en la UIS" y se desarrolla dentro de los proyectos de la Vicerrectoría Académica en el Sistema de Excelencia Académica (SEA). El objetivo de dicho programa es definir intenciones, acciones, componentes y fases de una labor educativa con la que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial en la Universidad; y con este contribuir en la atención de las problemáticas que estos procesos generan por su epistemología, su didáctica y su uso (Parada, 2016).

Esta estructura comprende tres ejes (ver Figura 1):

- ✓ Diseño y desarrollo de alternativas curriculares
- ✓ Formación de profesores

✓ Acompañamiento a estudiantes

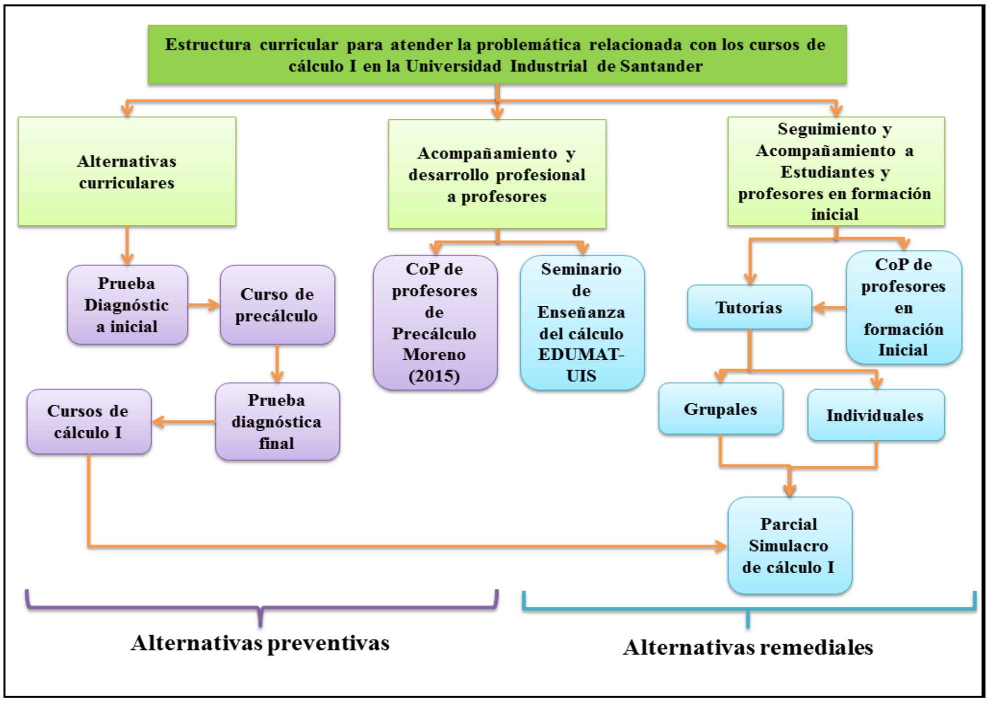


Figura 1. Estructura curricular actual para atender la problemática relacionada con los cursos de Cálculo

Dentro de esta estructura, se encuentran alternativas preventivas que buscan potenciar el desempeño del estudiante en Cálculo diferencial, ellas son, la prueba diagnóstico inicial y el *Curso de Inducción Matemática (*o curso de Precálculo*)*, ofrecido a los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería y ciencias básicas con puntajes bajos en la prueba SABER 11.

El trabajo en este curso se posibilita mediante la resolución de problemas que envuelve el razonamiento, la comunicación, la representación, la elaboración, comparación y ejecución de procedimientos. Todo lo anterior con ayuda de la tecnología que se ha convertido en una herramienta clave para la producción de aprendizajes significativos alrededor del cambio y la variación (Fiallo y Parada, 2014).

En cuanto al acompañamiento docente, Parada (2016) considera que las creencias juegan un papel importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional. La implementación de una estructura curricular requiere: detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son esas concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial. En este caso, se crean espacios dónde los profesores discuten sobre la problemática de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, dentro de estos espacios se comienza la conformación de comunidades de práctica (CoP) grupo de trabajo colaborativo, en donde la participación y la acción de los profesores es fundamental, para lograr aprendizajes que buscan aportar al desarrollo profesional del profesor y a la actividad matemática realizada por el estudiante.

En cuanto a la creación de una comunidad de práctica, Moreno (2015) desarrolló una investigación dónde se propuso caracterizar los significados negociados en la comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de Precálculo para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. Los resultados de este trabajo se observaron al reconstruir los significados negociados por la comunidad de práctica en tres versiones del curso, se observó que los profesores mejoraron su comprensión respecto a la variación y como el cambio está implícito en ella.

Por otro lado, Botello (2013) realizó una investigación con tutorías entre pares enfocada a describir los aprendizajes obtenidos por profesores de matemáticas en formación inicial, que participan como tutores de Cálculo Diferencial. Esta investigación se desarrolló en el programa de *atención, seguimiento y acompañamiento a estudiantes* dentro del *Sistema de Excelencia*

Académica (ASAE-SEA), la característica especial de este programa es la participación de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (profesores en formación inicial) como tutores de los estudiantes beneficiaros del programa.

El programa ASAE-SEA tiene tutorías personalizadas o grupales entre pares (estudiante tutor-estudiante beneficiario) dentro de sus alternativas remediales. Las actividades realizadas permiten atender la problemática de deserción, potenciar el Pensamiento Variacional de los estudiantes, y a su vez, tal como lo plantea Botello (2013), las tutorías pueden ser aprovechadas como práctica profesional de los futuros profesores.

El programa se ha expandido significativamente, tanto que ahora ofrece tutorías grupales (grupos completos de un curso de Cálculo) de Cálculo Integral, Cálculo Multivariable y Ecuaciones Diferenciales, con el fin de atender a los estudiantes que han cursado la asignatura cuatro veces. ASAE-SEA también ofrece tutorías grupales para Álgebra Lineal I, a solicitud de los estudiantes.

Las tutorías de cálculo están a cargo de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de quinto nivel que cursan la asignatura de Didáctica del Cálculo. Así esta está articulada con ASAE-SEA para ofrecer a los estudiantes del programa un ambiente de aprendizaje, a la vez que apoyan a sus pares académicos en la superación de dificultades, acompañados de dos profesores de planta del programa.

Por lo anterior, para esta investigación llama la atención el trabajo realizado por los profesores en formación que apoyan el desarrollo del proyecto curricular propuesto por Parada (2012), pues, a partir de Botello (2013), se identifican algunos aspectos importantes que permiten que estos profesores:

Reflexionen acerca de sus prácticas tempranas profesionales, a través de estrategias o acciones que les permitan identificar factores que llevan (o no) al desarrollo eficaz de una actividad matemática propuesta.

Desarrollen el *Pensamiento Matemático*, con lo cual entiendan primero las ideas que se van a enseñar, para luego compartirlas con los estudiantes tutorados, y entiendan lo que enseñan y lo hagan de diferentes maneras.

Desarrollen el *Pensamiento Didáctico*, para que así el tutor cree diferentes estrategias y representaciones de un mismo objeto matemático para ser enseñado a los estudiantes.

Desarrollen el *Pensamiento Orquestal* y usen diferentes recursos para presentar los objetos matemáticos, como materiales didácticos que lleven a los estudiantes a entender el concepto a aprender.

Las anteriores son las razones por las cuales el programa ASAE-SEA resulta ser un contexto rico para profundizar en las prácticas tempranas de los profesores de matemáticas en formación, pues este cuenta con el valor agregado. En las diferentes actividades que componen la estructura curricular los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas tienen la posibilidad desempeñar diferentes roles que les permiten realizar prácticas profesionales tempranas (este término lo explicaremos ampliamente en el inciso tal del capítulo 3, pero con este hacemos referencia específicamente a las prácticas de pre servicio realizadas por los estudiantes de licenciatura en matemáticas). A continuación, describiremos los roles de participación de los estudiantes de la licenciatura que participan en el programa, seguido de los roles de participación de aquellos que continúan como profesores en ejercicio.

2.2.1. Roles en la formación inicial de los profesores en ASAE-SEA

En el contexto de ASAE-SEA, los estudiantes participan en diferentes roles, los cuales integran un escalafón de prácticas tempranas para los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UIS, como se describe a continuación:

a) Tutor – practicante. El primer acercamiento al programa que hacen los profesores en formación inicial de la Licenciatura en Matemática de la UIS es a través de esta modalidad. En el programa, el plan de estudios tiene la siguiente organización para la línea de Cálculo (ver Figura 2):

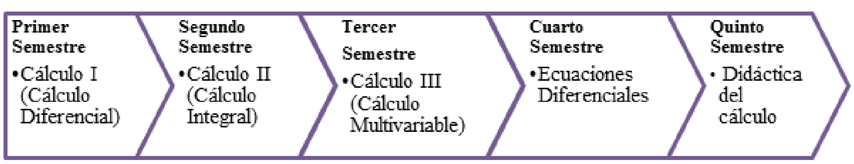


Figura 2.Línea de cálculo en el plan de estudios de la Licenciatura en matemáticas de la UIS

En Didáctica del Cálculo se estudian aspectos importantes referentes al Pensamiento Matemático, a partir de los *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas* (MEN, 2006) y los *Lineamientos de Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998). De igual modo se tienen en cuenta el estudio y la discusión de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, planteados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003). De manera complementaria, el profesor del curso propone el estudio de la epistemología de conceptos como función, límites y derivadas, a partir de las ideas de variación, cambio, interdependencia, tendencia y aproximación. La participación en ASAE-SEA equivale al 30 % de la nota final del curso de Didáctica del Cálculo.

Los aprendizajes obtenidos en el curso se ponen en práctica durante las tutorías. El tutor-practicante realiza (en sesiones semanales de dos horas) un acompañamiento presencial a los estudiantes (tres estudiantes por semestre), de las cuales registra un seguimiento en una plataforma diseñada para tal fin. Por su parte, el coordinador del programa se encarga de hacer el seguimiento al tutor-practicante en cuanto a: cumplimiento de tutoría directa, registro de seguimiento en la plataforma y preparación de las sesiones de tutoría.

b) Tutor – auxiliar. Este rol es posterior al de tutor-practicante. El estudiante es invitado por la coordinación de ASAE-SEA según el desempeño evidenciado como tutor-practicante, y se formaliza a través de un contrato remunerado. Un tutor de tiempo completo cumple con 120 horas de actividad al semestre (8 horas semanales durante 15 semanas), y algunas de sus responsabilidades son dar la tutoría y preparar el material didáctico correspondiente.

c) Auxiliar – docente. En este rol participan los estudiantes que evidenciaron buen desempeño en las dos modalidades anteriores. La función del auxiliar-docente consiste en apoyar al profesor en el curso de Precálculo. El auxiliar es otro profesor en el salón, quien apoya a los estudiantes en las dudas teóricas y referidas al uso del programa GeoGebra (*software* empleado en la mediación del proceso de enseñanza y aprendizaje de las 15 sesiones del curso), y participa en las socializaciones que hace el profesor durante la clase. El curso de Precálculo tiene una duración de 60 horas, las cuales son remuneradas al auxiliar – docente por la universidad.

Este escalafón de prácticas docentes del programa ASAE-SEA resulta muy interesante para esta investigación, pues, como señalan Muñoz y Carrillo (2012), el análisis de la práctica profesional permite comprender mejor el trabajo que los profesores hacen y el rol que el conocimiento del contenido matemático cumple en ella. La práctica es un lugar para la génesis de ideas, inquietudes y problemas, y es también donde estas ideas se prueban, refinan y algunas veces se abandonan.

2.2.2. Roles profesionales en el programa

Parada (2016) considera que la formación continua y la participación en las comunidades de práctica contribuyen al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, por lo que la participación de los investigadores en formación aporta no solo a la comunidad a la cual pertenece, sino también a la Educación Matemática. A continuación, se precisan los dos roles profesionales a los que hacemos referencia.

a) Profesor de Precálculo. Es un profesional invitado a participar en el curso, ya sea porque es estudiante de Maestría en Educación Matemática de la UIS, porque hace parte del subgrupo de Tecnologías de Edumat-UIS o porque participó durante su formación inicial como tutor en los diferentes roles mencionados en los anteriores apartados. Su función es desarrollar el curso de Precálculo, cuyo objetivo específico es favorecer un nivel matemático pertinente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial en los estudiantes de primer ingreso a la universidad.

El profesor comparte experiencias en la comunidad de práctica, y allí negocia aprendizajes alrededor del Cálculo Diferencial, del Pensamiento Didáctico y del Pensamiento Orquestal, a la vez que potencia su práctica profesional y la de quienes participan en la comunidad (Moreno, 2015).

b) Profesor-investigador en formación. El investigador en formación participa de forma activa en la Comunidad de práctica, ya sea como profesor del curso de Precálculo o como integrante del Seminario de Enseñanza del Cálculo. Este, identifica un campo de investigación dentro del programa, que aporta en su mayoría a la línea de Didáctica del Cálculo. Algunas investigaciones ya realizadas (Botello, 2013; López, 2014; Barajas, 2015; Moreno, 2016; Rueda, 2017) se han enfocado en el estudiante beneficiario del programa, otras en el profesor en formación inicial (Esta investigación) o en el profesor en ejercicio (Moreno, 2015), entre otros objetos de estudio.

2.2.3. Rol del investigador dentro del programa

De manera particular, se menciona que la autora de este estudio ha pasado por todos los roles mencionados, razón por la cual emerge de su experiencia la siguiente hipótesis: la participación en programas como ASAE-SEA, en los cuales se propician prácticas tempranas, favorece las competencias profesionales y labores de los profesores de matemáticas en formación. La investigadora, a partir de su experiencia, expresa que el programa de ASAE-SEA representa un contexto idóneo para aportar a dos problemáticas que allí coinciden: las dificultades alrededor del aprendizaje de las matemáticas (en especial en Cálculo Diferencial) y la necesidad de ambientes de aprendizaje para los profesores en formación.

Con la investigación de Botello (2013) se logran observar los aprendizajes obtenidos por tutores practicantes en el Pensamiento Matemático y Didáctico, pero al ver el crecimiento del programa ASAE-SEA, surgen preguntas con respecto al aporte que dan las tutorías a una formación más completa, que tenga también en cuenta el diseño de actividades y la incorporación de las tecnologías. Los tutores que iniciaron sus prácticas en la época en que Botello realizaba su investigación continuaron su formación dentro del programa ASAE-SEA participando como profesores de Precálculo e investigadores en formación. Luego para ese momento existía un proceso más completo que había aportado más aprendizajes, por lo cual se considera pertinente documentarlo por medio de esta investigación. Después de realizar una revisión de antecedentes y observar el contexto en el cual se desarrolla una formación inicial de profesores, surgen la pregunta y el objetivo que permiten la realización de esta investigación.

2.3. Planteamiento de la investigación

Al realizar un acercamiento al programa y comprender el objetivo de la estructura curricular, surgieron preguntas como:

¿Qué se está haciendo dentro de la licenciatura para disminuir la brecha entre la teoría y la práctica?

¿Qué aprendizajes afianzan los profesores en formación inicial al momento de realizar tutorías?

¿De qué manera aportan las tutorías a la formación profesional de los profesores de matemáticas?

¿Qué destrezas de enseñanza están desarrollando dentro de ASAE-SEA los profesores en formación?

Preguntas como las anteriores fueron dando origen a este trabajo y se resumen en la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué significados logran negociar (en términos de aprendizajes) educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas en un programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes de Cálculo Diferencial? Para responder a la pregunta anterior se planteó como objetivo:

Identificar y explicar significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) por educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas en un programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes de Cálculo Diferencial.

Para responder a la pregunta se considera como referente el Modelo Reflexión y Acción (Parada, 2011) que se explica en el siguiente apartado junto con los referentes teóricos que sustentan esta investigación.

3.- Bases teóricas y conceptuales

Disminuir la brecha entre la teoría y la práctica es un interés de los investigadores en la línea de formación de profesores, quienes buscan estrategias para hacer frente a las dificultades que se presentan en la enseñanza de las matemáticas. Greeno (1991) propone la creación de entornos de aprendizaje que posibiliten la exploración de problemas profesionales por parte del futuro profesor. Parada y Fiallo (2014) afirman que la formación de profesores va más allá de aportar un cúmulo de conocimientos teóricos y estrategias de enseñanza. Esta formación debe aprovechar los conocimientos de los profesores a través de su experiencia docente, y posibilitar un acompañamiento y seguimiento permanente en los que se promuevan procesos continuos de reflexión.

Esta investigación pretende determinar significados negociados (Wenger, 1998) de profesores en formación que participan en entornos de aprendizaje, cuyo interés es afrontar la problemática de deserción y repitencia de estudiantes, presentes en asignaturas como Cálculo Diferencial.

En la *Figura 3* se presenta un esquema (leer de izquierda a derecha) que recoge las bases teóricas y conceptuales que fundamentan la metodología de esta investigación, y que, posteriormente, ayudará en el análisis de resultados. La flecha que atraviesa la gráfica quiere mostrar el tránsito que hacen los participantes de la Comunidad de práctica de educadores matemáticos, a través de los diferentes roles que desempeñan, de un proceso de formación inicial (prácticas tempranas) a su desarrollo profesional (prácticas profesionales). En el centro aparece el esquema del modelo R-y-A, de Parada (2011), el cual permitió el diseño metodológico de la investigación y el análisis de los resultados.

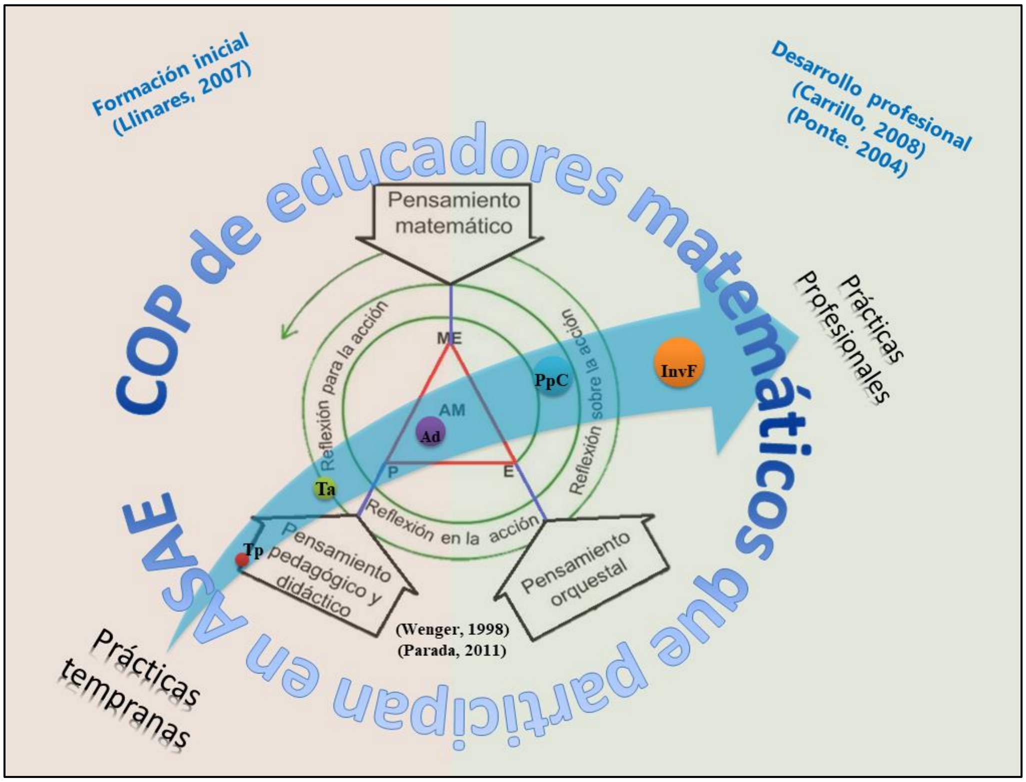


Figura 3. Esquema que explica los elementos de la investigación

Antes de pasar a describir los aspectos que componen el Modelo de Reflexión y Acción es importante describir lo que entenderemos en esta investigación por prácticas tempranas y por prácticas profesionales.

3.1. Formación inicial y prácticas tempranas

Fomentar el aprendizaje a lo largo de la vida es un aspecto que se debe generar desde la formación inicial de profesores, tal como lo menciona Llinares (2007), quien propone la creación de entornos de aprendizaje y describe un modelo de aprendizaje que apoya la formación inicial y el desarrollo profesional. Este autor considera que el desafío para los programas de formación inicial y permanente procede del carácter integrado del conocimiento (conocimiento matemático y conocimiento didáctico), de cómo el profesor define su participación en la práctica y de cómo el profesor en formación inicial genera su propia aproximación a la práctica.

Para Wenger la práctica no es solo hacer algo por sí mismo y en sí mismo, sino hacer algo en un contexto histórico y social. Esta práctica incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos, las imágenes, los símbolos, los roles definidos, las regulaciones y procedimientos que diversas prácticas determinan para un propósito.

Esta práctica que se quiere documentar, desde la formación inicial de profesores, está fundamentada en las ideas de Llinares (2008), quien plantea que la práctica de enseñar matemáticas debe ser entendida como:

realizar unas tareas (sistema de actividades) para lograr un fin,

hacer uso de unos instrumentos, y

justificar su uso

Para este autor, la práctica es el uso del conocimiento matemático en la resolución de situaciones problemáticas generadas en la actividad profesional. En esta práctica de enseñar se seleccionan y diseñan tareas adecuadas, se interpreta y analiza el Pensamiento Matemático de los estudiantes, y se inicia y guía el discurso matemático por medio de la gestión de las interacciones matemáticas en el aula.

A partir de la revisión bibliográfica realizada y la experiencia en esta investigación, se considera las prácticas tempranas como *experiencias docentes preservicio, que conectan la teoría y la práctica, con las cuales se pueden adquirir experiencia y conocimiento para una*

En esta investigación se analiza el Pensamiento Reflexivo del profesor en formación, a partir de las prácticas tempranas que realiza en el programa ASAE-SEA dentro de una comunidad de práctica (CoP). En este caso, dicha comunidad está conformada por profesores en formación, profesores en servicio, investigadores en formación y educadores matemáticos. En el capítulo 4, como parte de la metodología, se caracteriza al grupo de trabajo educativo, antes mencionado como una CoP. En este capítulo, como parte de los elementos teóricos, se explican los aspectos fundamentales de una CoP.

3.2. Desarrollo profesional y prácticas profesionales

En la formación de profesores se habla de dos subsistemas: uno de formación inicial y otro de formación en servicio. En el segundo se define la formación de profesores en servicio, como todas las acciones formativas realizadas por el educador desde que comienza su ejercicio profesional y que constituyen la base de su desarrollo profesional (MEN, 2013, p. 88). Estas acciones realizadas se convierten en experiencias orientadas al perfeccionamiento de la labor educativa, ya que cubren la formación humana integral y una sólida preparación en el área específica, en este caso, las matemáticas.

Otras acciones importantes en el desarrollo profesional son el seguimiento y apoyo en la práctica docente y la coherencia entre su formación inicial y formación en servicio. Al tener en cuenta lo anterior, se apunta al mejoramiento de los aprendizajes por parte de los estudiantes y al fortalecimiento de las instituciones educativas.

Es en el contexto del desarrollo profesional donde el profesor debe tomar la decisión de fomentar la construcción de conocimiento y formación integral de sus estudiantes. A su vez, al educador le es posible proponer y elegir estrategias de reflexión en una formación continua, para así favorecer la calidad educativa que requiere el sistema de educación en el país.

El concepto de la práctica pedagógica se utiliza ampliamente en la literatura sobre educación matemática, con diferentes significados, sin tener un consenso. La caracterización hecha por Ponte y Chapman (2006) desde un enfoque sociocultural subraya el significado que los actores atribuyen a lo que hacen. Para estos autores, las prácticas docentes pueden verse como las actividades que se conducen regularmente, teniendo en cuenta el contexto de trabajo y sus significados e intenciones. Los elementos estructurales de las prácticas, a partir de Ponte et. al (2012), son las tareas propuestas y el tipo de discurso que se produce en el aula.

Tareas: Ponte (2005) propone dos dimensiones fundamentales en el análisis de tareas, la estructura (abierto / cerrado) y el grado de complejidad, y argumenta que los diferentes tipos de tareas que resultan (ejercicio, problema, exploración, investigación) tienen un papel propio que desempeñar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este autor cree que la insistencia en un solo tipo de tarea, el ejercicio y la suficiente atención a los trabajos de exploración son razones que contribuyen significativamente a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Discursivo: el discurso que se desarrolla en el aula es otro elemento estructural de las prácticas profesionales de los maestros**.** Uno de los aspectos claves del discurso es la pregunta del maestro.

Para esta investigación, las tareas y el discurso hacen parte de lo que sucede en las tutorías y en el curso de Precálculo. Al proponer tareas el profesor reflexiona acerca de los contenidos del currículo, que son los que juegan un papel importante en su clase, y en el discurso se observa la facilidad de comunicar a los estudiantes problemas y situaciones que los inviten a construir su conocimiento matemático. Lo anterior permite que los estudiantes beneficiarios de las tutorías y los estudiantes del curso de Precálculo participen de forma activa en la comunicación de sus ideas. En la práctica profesional, el profesor debe dar gran valor a los conocimientos (científicos y técnicos) de la realidad concreta y de las actividades cotidianas.

Seleccionar, usar y diseñar recursos

Para que un material didáctico resulte eficaz en el logro de unos aprendizajes, no basta con que se trate de un "buen material", ni tampoco es necesario que sea un material de última tecnología. Cuando seleccionamos recursos educativos para utilizar durante la labor docente, además de su calidad objetiva, hemos de considerar en qué medida sus características específicas (contenidos, actividades, tutorización) están en consonancia con determinados aspectos curriculares del contexto educativo.

Comunicarse en el aula

La comunicación es un aspecto determinante de la práctica profesional del docente, pues es su responsabilidad ser mediador entre el contenido y el estudiante, lo cual le exige calidad en su discurso (Parada, 2011, p. 42). En la comunicación en el aula el profesor negocia significados con sus estudiantes, y los estudiantes, a su vez, participan de forma activa y crean espacios de discusión, en los cuales su Pensamiento Variacional (MEN 2006) se fortalece y se ejercita. Carrillo, Climent, Gorgorió, Rojas y Prat (2008) hablan acerca de la comunicación promovida, que es una de las dimensiones que define el modo en que el profesor gestiona la participación de sus estudiantes en los procesos de aprendizaje relacionados con el contenido matemático. Esta comunicación promovida sugiere la apertura de espacios por parte del profesor para que los estudiantes contribuyan al discurso común y compartan los significados. Dichos espacios se dan dentro de la CoP en el curso de Precálculo y las tutorías de Cálculo Diferencial, y daremos evidencia de ello en los análisis que se presentan.

Profesionalizarse

Parada (2011) plantea que actividades de profesionalización docente como programas propuestos, cursos, etc. logran reunir maestros de matemáticas. Se considera que la participación en programas de acompañamiento desde la formación inicial permite interacción con otros colegas en formación, con los cuales se comparten experiencias de prácticas tempranas, que, al ser socializadas, enriquecen sus actividades. A su vez, la interacción con profesores con experiencia (coordinadores e investigadores), que participan de diferentes maneras en una CoP, afianza conocimientos y permite despejar dudas con respecto a temas teóricos o didácticos.

3.3. Modelo R y A en la formación inicial de profesores de matemáticas

En la Figura 3 se muestra el bosquejo del modelo teórico de Reflexión y Acción de Parada (2011), en el centro de la espiral se encuentra el triángulo pedagógico (descrito por Saint-Onge, 1997), citado por Ibáñez, (2007)) profesor (P) – estudiante (E) – matemática escolar (ME). Para esta investigación el profesor (P) puede desempeñar el rol como tutor-practicante, tutor-auxiliar y profesor de Precálculo, el estudiante (E) es un estudiante beneficiario del programa ASAE-SEA que cursa la asignatura de Cálculo Diferencial y la matemática escolar (ME) es el Cálculo Diferencial. El foco del modelo está en coadyuvar a los profesores sobre la Actividad matemática que promueven antes, durante y después de la clase. Por ello, dentro del triángulo pedagógico aparece la actividad matemática (AM), sobre la cual se centran los esfuerzos del desarrollo profesional.

3.3.1. Actividad Matemática

Freudenthal (1971) concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana. Para el autor las matemáticas no eran un cuerpo de conocimientos matemáticos sino una actividad de resolver problemas, buscar problemas y la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma a lo que llamó matematización (Freudenthal, 1968). Según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo (ibid., 1968, 1971, 1973) y la matematización es la meta central de la educación matemática.

> Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p.7)

Parada y Pluvinage (2014) caracterizan la actividad matemática y dicen que hacer matemáticas es un trabajo del pensamiento que construye conceptos para resolver problemas. Exponen que hay tres tipos de actividades que pueden considerarse matemáticas:

Utilizar matemáticas conocidas: el primer gran tipo de actividad matemática consiste en resolver problemas a partir de las herramientas matemáticas que ya se conocen y se saben utilizar. En el curso de Precálculo se busca que el estudiante resuelva problemas que lo lleven a tener nociones referentes al Cálculo Diferencial, a partir de los conocimientos matemáticos que ya tiene.

Aprender y enseñar matemáticas frente a un problema que no se sabe resolver, lo que significa que el estudiante aprende nuevos conceptos para enfrentarse a nuevos problemas. En las tutorías, los estudiantes refuerzan conceptos que aprenden en clase de cálculo, resuelven dudas e inclusive aprenden nuevos conceptos que no han sido vistos en clase y que les permite resolver problemas planteados por el tutor.

Crear matemáticas nuevas: en principio, se podría decir que solo los matemáticos producen matemáticas nuevas, pero en realidad se puede afirmar que todo aquel que aprende matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador. Al resolver problemas, tanto en el curso de Precálculo, como en tutorías de Cálculo, el estudiante con ayuda del profesor produce nueva matemática, conjetura y afirma verdades que observa con ayuda de las tecnologías y las representaciones que el profesor presenta

El modelo se encuentra enmarcado en la teoría social de Wenger (1998) en el cual los procesos de participación posibilitan el desarrollo del pensamiento reflexivo de los educadores matemáticos. Las tres flechas verdes que están alrededor de la espiral representan las componentes del Pensamiento Reflexivo, las se describirán ampliamente en apartados posteriores.

3.3.2. Comunidades de práctica

Para Wenger (1998) el término comunidad de práctica se debe ver como una unidad, en la que un conjunto de personas que realizan ciertas prácticas y metas comunes realizan una construcción colaborativa del conocimiento, que favorece a todos los miembros. Para Juárez (2004) es importante considerar algunas características esenciales de la CoP, como el dominio de un interés compartido, la práctica a partir de experiencias, historias, herramientas, etc., que permiten la interacción de los integrantes y un aprendizaje en conjunto.

Imbernon y Bozu (2009) dicen que la finalidad de una CoP es hacer explícita la trasferencia informal de conocimiento, con lo cual se ofrece una estructura formal que permite adquirir conocimientos, a través de las experiencias compartidas dentro del grupo. Experiencias que, para Llinares (2007), generan en los estudiantes una propia aproximación a la enseñanza de las matemáticas.

Esto lleva a ver una CoP como un contexto para transformar el conocimiento (Wenger 1998) y como un lugar privilegiado para su adquisición. Así se ofrece a los participantes el desarrollo de una competencia (MEN 2014) y se provoca una experiencia personal de compromiso, por lo que se incorpora esa competencia a una identidad de participación. Wenger resalta que una CoP se caracteriza por el compromiso mutuo, por ser una empresa conjunta y por tener un repertorio compartido, características que explicaremos a continuación.

Compromiso mutuo

Según Wenger (1998) el compromiso mutuo es una característica muy importante de una CoP, pues es la coherencia encaminada al objetivo que se tracen o tengan en común. La práctica reside en una comunidad de personas y en esas relaciones de participación mutua que realizan en sus acciones. El compromiso entre los participantes posibilita una cohesión entre ellos, sin exigir homogeneidad; por el contrario, permite la diversidad de pensamiento. De esta manera, el compromiso mutuo no supone solo el conocimiento individual, sino también el de los demás. Se basa en tener claridad en lo que se hace y tener la capacidad de relacionarse significativamente con lo que no se hace, al aprender de los demás.

Empresa conjunta

Una empresa conjunta es la segunda característica que permite la coherencia de una comunidad. Wenger (1998) considera la empresa conjunta como el resultado de un proceso colectivo de negociación que refleja el compromiso mutuo. No es solo una meta establecida, es una relación de responsabilidad mutua que se convierte en una parte integral de la práctica.

Repertorio compartido

Wenger (1998) propone como tercera característica el repertorio compartido, y considera que actuar conjuntamente encamina a alcanzar una empresa, que crea recursos para negociar significados, como se refería en el ítem anterior. Los recursos del repertorio pueden ser diversos: estos no obtienen su coherencia por sí mismos, como actividades, símbolos o artefactos concretos, sino por pertenecer a la práctica de una comunidad que tiene una empresa conjunta.

Negociación de significados

Wenger (1998) afirma que la práctica se refiere al significado como experiencia de la vida cotidiana, que no surge de la nada, pero que tampoco es una ejecución mecánica de una rutina o un procedimiento. La CoP ofrece un contexto privilegiado para la negociación de significados y esto se da en la práctica y la relación con los demás participantes, permitiendo tener un común acuerdo en significados, hacer aportes para mejorar las propias prácticas y las de los participantes de la comunidad, ampliar los conocimientos y prever posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes a partir de la experiencia de otros.

La negociación de significados tiene lugar en el proceso de interacción de las personas con el mundo y se relaciona con la forma en que estas participan en las comunidades de práctica. En ese sentido, se entiende que, en los procesos de negociación de significado, los profesores en formación inicial interactúan y se aproximan a otros a partir de sus saberes, y es en esa aproximación donde reconocen el saber del otro (profesores en formación, coordinadores, profesores de Precálculo e investigadores en formación). En el proceso de negociación existe un intercambio de significados, a partir del cual los interlocutores se entienden, a pesar de que sus referencias y experiencias sean diferentes.

En este caso, se considera que la interacción de los profesores en formación con profesores en ejercicio en la realización de una práctica (tutoría o curso de Precálculo) permite la negociación de significados que son históricos, dinámicos, contextuales y únicos. Parada (2011) concluye que para negociar un significado se requiere de un ambiente donde se pueda discutir y comunicar, para así construir interpretaciones propias que puedan plasmarse en prácticas reales en el aula. A su vez, la negociación de significados modifica las acciones de los docentes, a lo cual Wenger determina *cosificación*.

Para el presente estudio, la *negociación de significados* se da en ese tránsito por las modalidades en las cuales puede participar un profesor en formación durante su paso por el programa, al comunicar y al construir interpretaciones propias a partir de su papel como tutor de Cálculo Diferencial, profesor de Precálculo e investigador en formación.

El programa ASAE-SEA es un espacio de prácticas profesionales tempranas en el cual los estudiantes a futuros profesores participan de forma activa compartiendo con profesores en ejercicio e investigadores. A este espacio se le llama Comunidad de Práctica, pues sigue los criterios establecidos por Wenger (1998), su compromiso es ayudar a los estudiantes beneficiarios a superar las dificultades que presentan en Cálculo Diferencial. Todo lo que sea necesario para hacer posible el compromiso mutuo será un componente esencial de cualquier práctica.

Como fuente de coherencia de una comunidad es la negociación de una empresa conjunta, es el resultado del proceso colectivo, el cual trabaja por un objetivo, que para esta CoP es ayudar a los estudiantes beneficiarios a comprender los conceptos de la asignatura de Cálculo Diferencial y aprender a estudiar cálculo; por otro lado, el trabajo conjunto de ampliar los propios conocimientos como futuros profesores de matemáticas. El repertorio de una comunidad incluye rutinas, palabras, instrumentos, maneras de hacer, gestos, símbolos, acciones o conceptos que la comunidad ha producido o adoptado (Wenger, 1998). Esta comunidad adoptó un repertorio asociado a los objetos de estudio de la: **aproximación, tendencia, cambio, variación,** que se relacionan con el Pensamiento Variacional, del cual también se consolidó una conceptualización propia. Un instrumento adoptado por la comunidad es el software interactivo GeoGebra, que hace parte del curso de Precálculo y de las actividades realizadas por la comunidad, los talleres y la metodología son producto del trabajo en las reflexiones realizadas antes, durante y después de la práctica temprana y profesional.

3.3.3. Procesos de reflexión

Los procesos de reflexión sobre la actividad matemática, generados en clase por el profesor, son la base del modelo. Para conceptualizar dichos procesos, Parada (2011) recoge algunas ideas de Dewey (1989), quién afirma que los profesores experimentan inseguridades que los llevan a analizar su experiencia durante la acción o después de ella. Para Dewey (1989), la reflexión no implica tan solo una secuencia de ideas, sino una con-secuencia, esto es, una ordenación consecuencial en la que cada una de ellas determina la siguiente como su resultado, mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedieron. El Pensamiento Reflexivo debe apuntar a una conclusión. Hay una meta que debe conseguirse, la cual impone una tarea que controle la secuencia de ideas. Estos procesos se desarrollan antes (para-la-acción), durante (en-la-acción) y después (sobre-la-acción) de la clase, con el fin de que el profesor analice y gestione la actividad matemática que promueve en clase, a partir de las decisiones y acciones que realiza con sus estudiantes. Los procesos de reflexión se conceptualizan como sigue:

3.3.3.1. Reflexión para la acción

Para la autora del modelo, la reflexión para la acción se da cuando el profesor planea la clase que va a desarrollar, y selecciona los recursos que usará en su clase para acercar al estudiante al contenido matemático. En esta reflexión el profesor anticipa las posibles dificultades de aprendizaje que puede presentar el estudiante y establece posibles alternativas para superarlas. La negociación de significados en este proceso de reflexión se da cuando el profesor planea la clase, realiza esquemas de la actividad matemática que quiere lograr, diseña hojas de trabajo y otros recursos, como actividades en un *software* interactivo de matemáticas como GeoGebra, etc.

En este caso, se refiere al *antes* de la sesión tutorial, la cual impulsa a la acción. En esta primera reflexión el tutor hace una preparación previa de la clase, diseña un taller, identifica los temas que están viendo los estudiantes en su curso de Cálculo, y a partir de esto prepara su sesión. Aquí se tienen en cuenta los significados con los que cuenta el profesor a partir de sus experiencias, como incorpora los conocimientos obtenidos dentro de la CoP y como crea nuevas situaciones aplicables en el aula de clase.

3.3.3.2. Reflexión en la acción

La reflexión en la acción tiene el propósito de descubrir como el conocimiento en la acción puede haber generado un resultado inesperado. Aquí se pone en marcha la intuición y la creatividad del profesor, y se activan otros elementos como la selección y el análisis de la información, las cuales modifican la intervención del profesor durante la práctica. Esta reflexión se da en la clase y en la interacción con los estudiantes. Cuando el tutor se enfrenta a la práctica temprana en la sesión tutorial, cuando se da la interacción presencial con el estudiante, se dispone a resolver los problemas y a usar estrategias para llevar al estudiante a superar sus dificultades y a apropiarse de los objetos del Cálculo Diferencial.

Las reflexiones del profesor se evidencian en la forma como actúa o reacciona a situaciones que no esperaba que sucedieran durante la clase, en las cuales debe poner a prueba sus conocimientos y en la que orquesta todos los recursos que seleccionó para la sesión. En esta reflexión se pone en escena el Pensamiento Orquestal, que se explicará más adelante, donde el profesor usa los recursos que preparó para acercar a sus estudiantes al conocimiento matemático. La negociación de significados se da de forma individual, y es aquí donde emergen las prácticas propias del profesor para resolver problemas en la sesión de clase.

3.3.3.3. Reflexión sobre la acción

Este proceso de reflexión se realiza sobre un hecho ya ocurrido. El objetivo es ser crítico al momento de evaluar la clase finalizada, de manera que se comprendan las situaciones presentadas y se reestructuren las estrategias de acción. Esta reflexión se realiza para luego realizar una reflexión para la acción, donde el profesor toma conciencia de sus conocimientos y reconoce sus fortalezas y debilidades. Asimismo, se analiza si los objetivos planteados fueron logrados y de qué manera se lograron, además de que se evalúan las interacciones realizadas con los estudiantes, las cuales les permitieron llegar a promover la actividad matemática en clase.

Terminada la sesión tutorial se da la reflexión sobre la acción. El tutor, a partir de su experiencia, analiza sus prácticas y si los objetivos planteados fueron alcanzados, reflexiona, reestructura, modifica y plantea nuevas estrategias de acción para una próxima sesión (vuelve a la reflexión para la acción).

La negociación de significados se da a partir de la observación de su propia practica y de compartir su experiencia con los demás integrantes de la CoP. La socialización de talleres y actividades con los demás participantes permite al profesor identificar las dificultades que emergieron en su clase y aun en las de sus compañeros.

3.3.4. Pensamiento Reflexivo del profesor

El pensamiento, según Vega (1984), es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre cuando alguien se enfrenta a una tarea o problema, con un objetivo y con incertidumbre sobre la forma de realizarla. El Modelo de Reflexión y Acción determina que el pensamiento matemático del profesor resulta cuando éste necesita hacer uso de sus conocimientos sobre el contenido matemático escolar para desarrollar la práctica profesional (proponer tareas, seleccionar, usar y diseñar recursos, comunicarse en el aula, hacer adaptaciones curriculares, evaluar y profesionalizarse).

Según Peña y Flores (2005), los profesores de las asignaturas de pregrado pueden suministrar respuestas a las dudas que surgen en los estudiantes, a partir de las experiencias propias del docente y su conocimiento teórico práctico; pero son las experiencias propias de los estudiantes las que les ayudan a activar procesos reflexivos en los cuales seleccionan sus respuestas y establecen qué conocimientos son significativos. Parada (2011) expone que la reflexión de los profesores comienza en la experiencia, esta reflexión es un proceso de resolución de conflictos y dudas que permiten revisar su actuación.

Como se había mencionado anteriormente, se determinarán los significados negociados en los profesores en formación, y para esto se tendrán en cuenta los tres procesos de reflexión en cada uno de los componentes del Pensamiento Reflexivo, el cual se descompone en Pensamiento Matemático, Pensamiento Didáctico y Pensamiento Orquestal en el modelo R-y-A. A continuación, se describen a partir de Parada y Pluvinage (2014).

3.3.4.1. Pensamiento Matemático

El dominio de los contenidos matemáticos propios del Cálculo Diferencial es parte fundamental para los profesores en formación que hacen parte de esta investigación. En Hill, Ball, y Schilling (2008), se define el conocimiento matemático para enseñar como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el estudiante. (p. 374).

Parada (2011) expone que el Pensamiento Matemático escolar del profesor resulta cuando este necesita hacer uso de sus conocimientos del contenido matemático escolar, del que es responsable para desarrollar sus prácticas profesionales: a) proponer tareas; b) seleccionar, usar y diseñar recursos; c) comunicarse en el aula; d) hacer adaptaciones curriculares; e) evaluar; f) colaborar; y g) profesionalizarse.

Parte de este conocimiento está en identificar los lineamientos dados por el MEN y los estándares básicos de matemáticas para potenciar el Pensamiento Matemático de los estudiantes. Parada (2015) expone que para enseñar hay que comprender, entender y dominar los contenidos del Cálculo Diferencial primero. En este sentido, el profesor de Cálculo necesita discernir que el Pensamiento Variacional[5] abarca el estudio de la variación y el cambio en contextos matemáticos y no matemáticos, el cual implica adquirir habilidades para razonar, comunicarse, representar y dominar algoritmos (usando o no tecnologías digitales) que permitan modelar fenómenos y resolver situaciones de estas nociones. Para Parada, Conde y Fiallo (2016), comprender la variación implica explicar cómo se relacionan las magnitudes variables en un problema particular, así como medir y analizar cómo cambian estas magnitudes. El Pensamiento Matemático se refiere al dominio y comprensión de los contenidos matemáticos propios del Cálculo Diferencial, para el caso de esta investigación, y a la resolución de problemas matemáticos en cualquier contexto, donde el profesor propone y adapta contenidos para interactuar con el estudiante.

3.3.4.2. Pensamiento Didáctico

La participación en espacios de aprendizaje (Llinares, 2007) permite que los profesores en formación inicial y en ejercicio construyan conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y desarrollen, a su vez, formas de generarlo. El profesor debe estar

[5] Pensamiento Variacional: este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2003, p. 66).

comprometido con lo que enseña, con su disciplina, y debe saber para qué se va a enseñar. El modelo R-y-A expone que el Pensamiento Didáctico se da cuando el profesor cuestiona las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, se refiere a las diversas maneras que tiene el profesor para representar un objeto matemático mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones que permitan hace más comprensible a los alumnos., el uso de diferentes representaciones de un objeto como “función” para hacer que el estudiante tutorado llegue al conocimiento (gráfica, expresión analítica, tabla de valores y texto), el uso de ejemplos, esquemas, demostraciones, etc. A través de la participación en una comunidad de práctica y compartir sus experiencias de aula, el profesor adquiere habilidades que posibilitan la comprensión al estudiante de los objetos, en nuestro caso del Cálculo Diferencial. Para esto el profesor necesita tener claridad en su pensamiento matemático escolar con el objetivo de guiar a los estudiantes a la matemática escolar deseada.

Este pensamiento se da durante los tres procesos de reflexión y ocurre durante las prácticas tempranas y profesionales del profesor de matemáticas:

Para la acción: cuando materializa las adaptaciones curriculares en la planeación de la clase

En la acción: durante la realización de la clase y el proceso de orientar a los estudiantes hacía la actividad matemática

Sobre la acción: cuando evalúa los aprendizajes de los estudiantes y hace adaptaciones en las actividades siguientes.

Shulman expone en sus artículos *Those who understand: knowledge growth in teaching* de 1986 y, posteriormente en *Knowledge and teaching: foundations of new reform* de 1987 su propuesta teórica el conocimiento didáctico del contenido. En éstos plantea una corriente de investigación que él denominó "conocimiento base para la enseñanza", cuya finalidad básica es el análisis del conocimiento profesional del profesor. Esta perspectiva teórica de Shulman y colaboradores (Shulman y Sykes, 1986, y Wilson, Shulman y Richert, 1987) destaca el papel central que ocupa en la enseñanza la comprensión de los contenidos curriculares por parte del docente y los alumnos. López (1999) sintetiza en tres sus características esenciales de dicha corriente:

a) Refleja una naturaleza más bien didáctica (y no psicológica).

b) El saber profesional de los profesores debería integrar las proposiciones teóricas y los procedimientos técnicos que los dirigen y que pueden optimizar la actuación en el aula.

c) Tanto el conocimiento de la disciplina como el conocimiento de los fundamentos psicopedagógicos tienen mucho que aportar a la mejora de la práctica de la enseñanza de una materia escolar concreta.

Shulman (1987) plantea que la base de conocimientos para la enseñanza está en la capacidad de un docente para que después de comprender el contenido de la materia consiga transformarlo para que sus estudiantes puedan acercarse a él a través de: la planeación de clase, la adaptación de los contenidos matemáticos a las características del grupo, la elección de la metodología de trabajo en clase y de los procesos de evaluación, entre otros aspectos.

3.3.4.3. Pensamiento Orquestal

Los recursos juegan un papel importante al momento de mostrar diferentes representaciones de un objeto al estudiante tutorado. Se resalta la importancia del uso de instrumentos, ya que las personas pensamos y actuamos ayudados por los mismos. Al respecto, Llinares (2008) dice que estos permiten comprender aquello que es intangible y abstracto, características de las matemáticas.

El Pensamiento Orquestal se refiere a la habilidad de los profesores en formación para integrar los instrumentos que tienen a la mano en su sesión tutorial, los cuales permiten una mejor representación de los objetos matemáticos. Es así como se da cuenta de la conexión que existe entre los pensamientos que han sido mencionados, ya que las representaciones en el Pensamiento Orquestal necesitan de instrumentos que el profesor selecciona e incorpora según su necesidad. Los tutores incorporan instrumentos, como un *software* interactivo con el cual resuelven problemas y realizan las representaciones de los objetos matemáticos que hacen parte de la sesión, el uso del tablero, guías de trabajo y exposiciones que realizan el profesor y el estudiante. El profesor actúa como el director de una orquesta cuando organiza sus instrumentos y los pone en juego dentro de su clase, para hacer que todos tengan participación y la clase se realice de manera armónica.

En esta investigación se determinan los significados negociados por parte del profesor de matemáticas en formación, los conocimientos que ha adquirido durante su formación inicial, como los utiliza en la práctica temprana y como los va perfeccionando a medida que va avanzando en su formación. Es claro que la participación dentro de una CoP permite que el profesor negocie los conocimientos adquiridos y reflexione acerca de sus prácticas. Es así como este modelo permite ver los aspectos mencionados anteriormente y muestra como un modelo de formación inicial a partir de prácticas tempranas favorece aspectos referentes al dominio de contenidos matemáticos, sus representaciones en el aula y el manejo del aula en sí, incluyendo instrumentos que permitan generar actividad matemática, a la vez que favorece la formación del profesor, que transitivamente favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Los pensamientos que componen el pensamiento reflexivo se usarán como categorías de análisis de los aprendizajes logrados por los profesores participantes de la comunidad de educadores matemáticos que participan en el programa ASAE-SEA.

En el siguiente capítulo se explica la metodología que permitió recolectar y sistematizar la información de la investigación que aquí se reporta.

4.- Metodología

En el presente capitulo se describen las diferentes fases de la investigación, así como los aspectos metodológicos que permiten responder al objetivo de ésta. El estudio realizado es de tipo cualitativo y se ubica en la línea de formación de profesores, específicamente en la formación inicial, y pretende aportar al diseño curricular del programa de la Licenciatura en Matemáticas.

El estudio que aquí se reporta es de corte longitudinal, pues se usaron datos de ocho semestres (2012-I y 2016-I), debido a que se quería mostrar el recorrido de formación de los estudiantes-docentes, desde su participación como tutores hasta su preparación como matemático educativo. Del proceso de estudio se seleccionó un único caso de estudio, el cual hizo el recorrido completo del proceso (pues cumple cada uno de los roles de participación en el programa).

El modelo R-y-A tiene sus bases en la orientación de los procesos de reflexión de los profesores, por lo que la metodología de investigación se encuentra permeada por el mismo. Las fases del proceso se describen a continuación y se muestran en el siguiente esquema (Figura 4).

4.1. Fase I: Recopilación y sistematización de los datos

Para iniciar el estudio sobre los significados negociados en la comunidad de práctica de profesores que participan en el programa ASAE-SEA, se realizó una búsqueda y recopilación de datos de las actividades del programa durante los semestres 2012-I a 2016-I. A continuación, se describe en qué consistió dicho proceso.

- De las tutorías: se encontraron las bases de datos de cada semestre desde el 2012-I al 2016-I, los formatos de seguimiento a estudiantes realizados por los tutores, los informes finales de cada semestre diligenciados por los tutores dónde evalúan su desempeño y el de sus estudiantes.

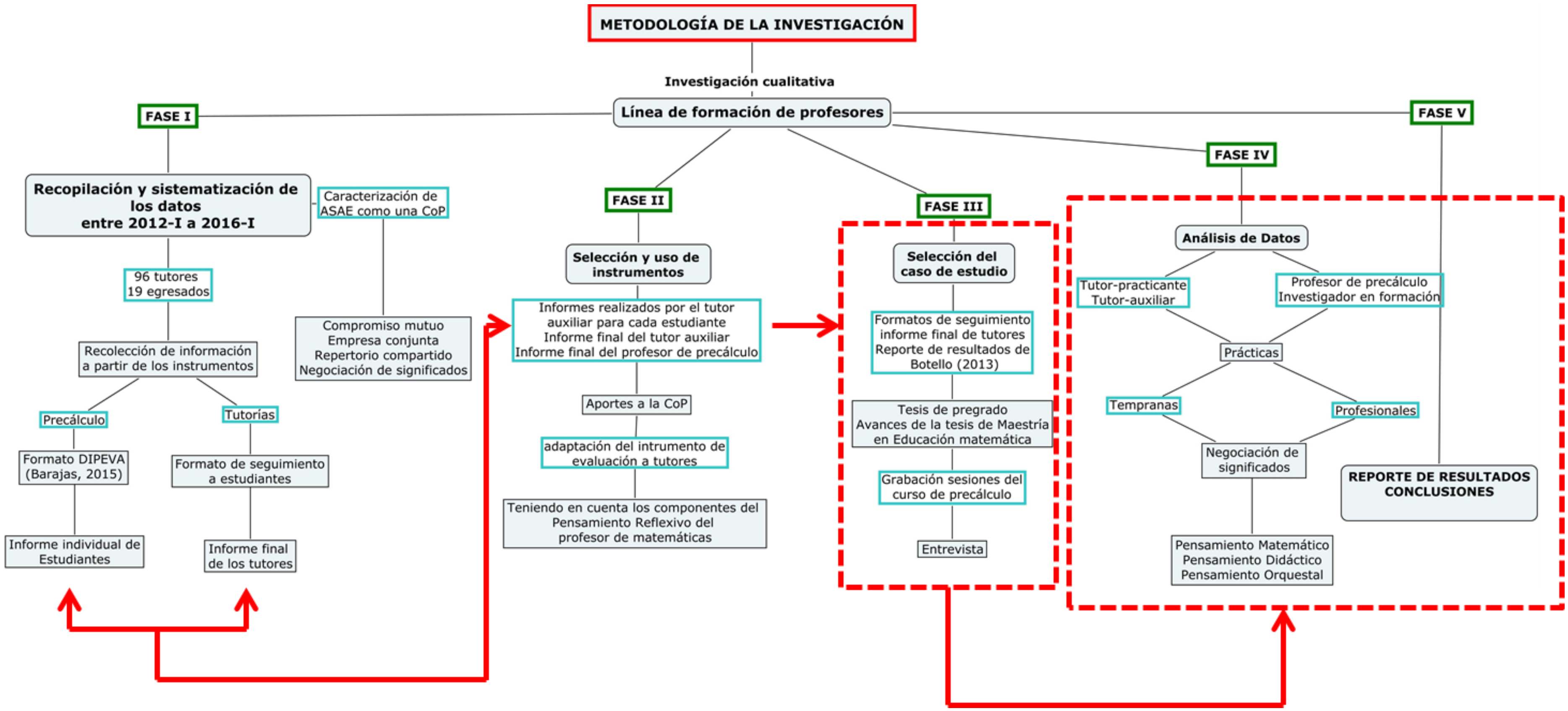


Figura 4. Metodología de la investigación

- De Precálculo: Se recopilaron los informes diligenciados por los profesores del curso sobre el desempeño de los estudiantes y el desarrollo de los procesos (razonamiento, ejercitación de procedimientos, resolución de problemas

A partir de la búsqueda y la organización de los datos, se realizó un resumen de las actividades realizadas por los participantes de la comunidad en los diferentes roles descritos en el apartado 2.2. Del capítulo 2.- (desde el 2012-I al 2016-I), el cual se muestra en la **Tabla 1**.

ROL DE PARTICIPACIÓN	2012-I	2012-II	2013-I	2013-II	2014-I	2014-II	2015-I	2015-II	2016-I
Tutor practicante	15	12	8	19	13	10	8	8	8
Tutor Auxiliar			14	7	23	21	24	12	21
Auxiliar docente				10	10	10	10	10	10
Profesor de Precálculo						3	3	3	3

Tabla 1. Participantes en el programa ASAE-SEA

Durante los periodos del 2014-I al 2016-I, tres licenciados que habían comenzado como tutores – practicantes (pasando por todas las modalidades) participaron como profesores de Precálculo. Esta información ayudó a determinar el caso de estudio del cual se hablará más adelante, además de que favoreció a observar el recorrido realizado por cada uno de los participantes desde su formación inicial.

Además de identificar las participaciones de cada uno de los tutores que han pasado por el programa ASAE-SEA, se consideró conveniente revisar los instrumentos de sistematización de datos del programa hasta el momento en que se inició la investigación (2015-I). Al revisar las actividades de ASAE-SEA, se encuentra que el programa contaba con una serie de registros de seguimiento y evaluación de las tutorías y de los procesos logrados por los tutores y los estudiantes beneficiarios. A continuación, se describen dichos instrumentos y las maneras como se usarán para como datos de la investigación.

4.1.1. Seguimiento de procesos de los estudiantes beneficiarios

Los tutores desde el inicio del programa realizan un registro de las tutorías en un formato como el que se presenta en la Tabla 2. En este formato se deben describir las dificultades evidenciadas en las actividades que se desarrollan en cada sesión de tutoría, las fortalezas y las observaciones realizadas por el tutor sobre los procesos de estudiantes beneficiarios. Los tutores además registran allí las calificaciones (de parciales, quices, trabajos, etc.) de sus tutorados para ir llevando su seguimiento y saber en qué aspectos debe reforzar con mayor énfasis.

SEGUIMIENTO DE ESTUDIANTES-TUTORADOS
PROGRAMA DE ATENCIÓN, SEGUIMIENTO Y ACOMPAÑAMIENTO
EN CÁLCULO I

ASAE

TUTOR:
ALUMNO-TUTORADO: MICHAEL STEVEN SANTOS DELGADO **PROGRAMA: CALCULO I**
NOMBRE DEL PROFESOR: Luis Antonio Ortiz
GRUPO: P6

Sesión No.1	El mostró mucho interés por iniciar el programa	Fecha	18 de Junio del 2014
Tema	Límites		

Dificultades por atender	Actividades realizadas	Observaciones del proceso diario del estudiante
Presentaba dificultades para hallar los limites mostrando problemas de algebra, entre ellos factorización de términos comunes, simplificar términos en una fracción, desarrollar un binomio cuadrado perfecto, y otros casos de factorización necesarios para quitar la indeterminación.	Se desarrolló algunos puntos de un parcial de cálculo I del tema correspondiente.	Durante la tutoría el estudiante mostro mucho interés. El estudiante estuvo atento a las correcciones que se le hacían notar.

Trabajo complementario definido(tarea)	Se dejó como trabajo complementario terminar algunos puntos propuestos del parcial presentado en la tutoría.

Notas estipuladas por los profesores:

CÓDIGO	NOMBRE ESTUDIANTE	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	QUICES			OTROS			Previo. Escuela.	DEF
		%	%	%	%	Q1	Q2	Q3				40%	

Tabla 2. Formato de seguimiento a estudiantes

En 2015 se realizaron algunas modificaciones al instrumento, a éste se le anexó una malla de indicadores de logros, de los procesos matemáticos esperados en Cálculo Diferencial (asignatura en la cual estaba enfocado el programa) para identificar las dificultades y así poder diseñar un plan de apoyo particular para cada beneficiario. El formato en general consta de las siguientes partes: i) Datos personales del estudiante (nombre, código, correo electrónico, teléfono, horario de clase y de tutorías, nombre del profesor); ii) Reporte de la prueba diagnóstica inicial que realiza la universidad dentro del programa ASAE-SEA a los estudiantes de primer ingreso. Los tutores deben registrar con los resultados de la prueba si el estudiante tuvo o no dificultad en los indicadores planteados a partir de los problemas de la prueba;

PROCESO	Fte.	Cód.	INDICADORES (TIENE DIFICULTAD PARA)	FRECUENCIA (escribir UNO (1) cuando haya dificultad)						
				0	1	2	3	4	5	
REPRESENTACIÓN										
	Fiallo-Parada	R_1	Construir representaciones de los objetos matemáticos							0
	Fiallo-Parada	R_2	Dara significado a las diferentes representaciones del objeto matemático							0
	Fiallo-Parada	R_3	Reconocer los variantes e invariantes del objeto matemático							0
	Fiallo-Parada	R_4	Relacionar y conectar las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático							0
	Garcia	R_5	Validar características de un modelo (aseveraciones que validan o refutan las descripciones de las características o interpretación del modelo).							0
	Fiallo-Parada	R_6	Describir o modelar fenomenos de variación del mundo real usando funciones y relaciones							0
										0
R Y ARGUMENTAR	Fiallo-Parada	RyA_1	Plantear hipotesis producto de la exploración, analisis y generalización de relaciones, propiedades y regularidades del objeto matemático							0
	Fiallo-Parada	RyA_2	Plantear argumentos para explicar, verificar, justificar o validar la veracidad de una afirmación planteada							
	Polya		Verificar las soluciones para determinar si es correcta							
	Estand	RyA_3	Evaluar argumentos y demostraciones matemáticas							0
	NCTM	RyA_4	Percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos.							0
	NCTM	RyA_5	Comprender y elaborar demostraciones matemáticas							0

Tabla 3. Formato DIPEVA para el seguimiento de los estudiantes

iii) Malla de indicadores (la cual el programa ha llamado formato DIPEVA) propuesto por Barajas (2015), del cual se tomaron algunos indicadores de los cinco procesos propuestos por los lineamientos matemáticos del MEN (2006) la cual se muestra en la Tabla 3.

4.1.2. Informe final de tutorías

En este instrumento (ver Figura 5), realizado para la investigación de Botello (2013), se evalúan aspectos importantes para poder observar la relevancia que han tenido las tutorías en el proceso de formación del tutor. Este instrumento ayudó a determinar características de los profesores en formación que se desempeñaban en ese momento como tutores, entre ellas los conocimientos adquiridos durante las tutorías, la importancia de las tutorías y los aspectos que debe tener en cuenta un tutor para generar un impacto positivo en un estudiante.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO: ALTERNATIVA DE SEGUIMIENTO Y ACOMPAÑAMIENTO A ESTUDIANTES DE CÁLCULO I

Datos del tutor

Nombre: ____
Edad: __________
Nivel: __________
Año en que vio cálculo I: _____, Nota con que aprobó la materia:

Si fue repitente indique:

Cuántas veces matriculó la materia:	
Notas en cada uno de los semestres:	
Nota con que aprobó la materia:	

Relevancia de la tutoría para su formación profesional

Después de haber tenido la experiencia de ser tutor en este semestre, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué conocimientos ha adquirido a lo largo de las tutorías?
- ¿Qué papel puede desempeñar las tutorías en la formación docente de un estudiante de Licenciatura en Matemáticas?
- ¿Qué aspectos se deben tener en cuenta para que el tutor genere un impacto positivo en el rendimiento académico de un estudiante?

Figura 5. Informe final del programa ASAE-SEA hasta el 2015-I

4.1.3. Informe curso de Precálculo

Los profesores del curso de Precálculo deben documentar los procesos logrados por los estudiantes a lo largo de éste. Este informe recoge los resultados de la prueba diagnóstica inicial (que corresponde a la prueba realizada a todos los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad), los avances del estudiante a lo largo del curso (registrados con la malla DIPEVA) y los resultados de la prueba diagnóstica final. Este instrumento deja ver los procesos logrados por el estudiante y el proceso de seguimiento y evaluación que realiza el profesor. El formato está conformado por tres columnas diferenciadoras:

De acuerdo con los formatos mencionados y los datos obtenidos, organizamos la información del programa ASAE-SEA que utilizaremos para una parte de esta investigación, de la siguiente manera:

- Del proceso tutorial: Formato de seguimiento a estudiantes: Formato de evaluación a tutores
- De curso de Precálculo: Informe final escrito de estudiantes

4.2. Fase II: revisión de instrumentos y categorización de datos

Para los fines de esta investigación y teniendo en cuenta que los datos recopilados están desde 2012, más que adaptaciones a los instrumentos, se seleccionaron aquellos que podrían brindar información del trabajo realizado por los participantes de la CoP, como los informes de los estudiantes (redactados por los tutores), los informes finales y los informes del curso de Precálculo (redactados por profesores del curso). Estos instrumentos permiten identificar los procesos de reflexión realizados por los profesores, pues es ahí donde ellos relatan, explican y describen su actividad y trabajo dentro de la práctica.

Los instrumentos no estaban diseñados para evaluar puntualmente los aprendizajes en cuanto al pensamiento reflexivo del profesor, es por esta razón que se hicieron ajustes para las nuevas generaciones con el fin de realizar un seguimiento de los aprendizajes negociados por los actuales profesores en formación que pueden retomarse en futuras investigaciones.

Para efectos de esta investigación se realizó una categorización de la información con cada uno de los instrumentos antes descritos en las tres dimensiones del pensamiento reflexivo explicado en el modelo Reflexión y Acción.

4.3. Fase III: Selección del caso de estudio

Como se mostró en la Tabla 1, se recopilaron los datos de 93 estudiantes de la licenciatura en matemáticas que participaron como tutores practicantes y de estos, 38 se desempeñaron como tutores auxiliares durante los semestres de 2013-I a 2016-I. De los anteriores, 33 tutores han sido auxiliares docentes en el curso de Precálculo. Tres de los auxiliares culminaron sus estudios y se titularon como licenciados en Matemáticas (título que otorga la UIS), los cuales fueron invitados a participar como profesores del curso de Precálculo, y de ellos, dos son investigadores en formación (ver Figura **6**).

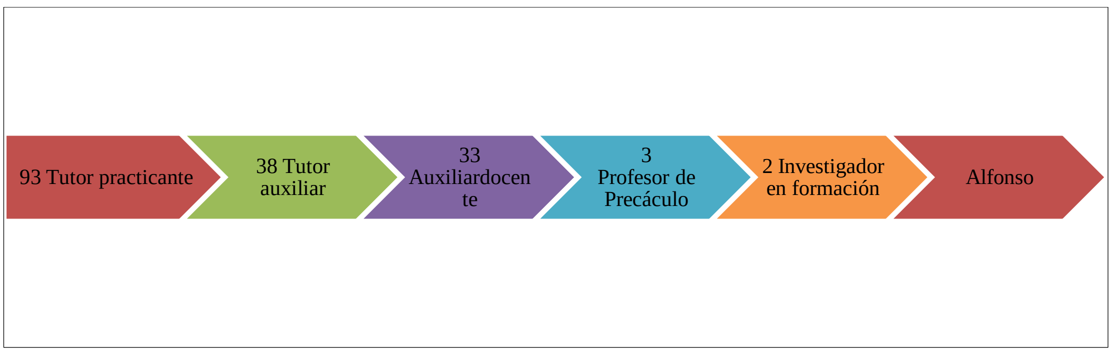


Figura 6. Selección del caso de estudio

Así, se identifican tres posibles casos de estudio que transitaron por todos los roles descritos, en los cuales un profesor en formación puede participar dentro del programa. Sin embargo, solo se tienen los datos completos de uno de ellos, es decir que solo uno de los posibles candidatos cuenta con toda la evidencia de su participación desde su rol como tutor practicante hasta su rol como investigador. Los datos que se tienen de Alfonso son los siguientes:

- Tesis de Botello (2013) en el que Alfonso también fue el caso de estudio. Allí se describen los aprendizajes de Alfonso como tutor auxiliar (los resultados de esta investigación muestran significados negociados de Alfonso únicamente como tutor practicante, esta investigación pretende identificar los significados negociados en todos los roles de participación, y por supuesto, en sus prácticas profesionales).
- Informes y seguimientos realizados por Alfonso en su participación como tutor auxiliar (la realización de un seguimiento a los estudiantes tutorados es un requisito importante de la culminación del trabajo por parte del tutor auxiliar cada semestre).
- Informes realizados como Alfonso como profesor de Precálculo (Al final del curso de Precálculo, cada profesor entrega un informe final de cada uno de los estudiantes que participaron).
- Tesis de pregrado, en la que Alfonso se inicia como investigador (El trabajo de Alfonso tiene como contexto el curso de Precálculo).
- Proyecto de tesis de maestría y avances de su investigación (Alfonso continua su trabajo sobre el análisis del proceso de demostración en los estudiantes del curso de Precálculo).
- Videograbaciones y entrevistas de Alfonso, en las que se hace el proceso de reflexión guiado sobre su rol como profesor de Precálculo y como investigador en formación (Se realizan preguntas para contrastar la información obtenida en los roles de participación de Alfonso y su punto de vista sobre sus prácticas profesionales tempranas y sus aprendizajes negociados).

4.4. Fase IV: Análisis de datos

Para el análisis de los datos se usó el modelo R-y-A planteado por Parada (2011), el cual se consideró para la adaptación de los instrumentos y el análisis de los datos obtenidos del caso de estudio seleccionado. Se consideran tres categorías de análisis: Pensamiento Matemático, Pensamiento Didáctico y Pensamiento Orquestal. Cabe resaltar que en algunas instancias se hace más énfasis en un pensamiento que en otro, ya que se considera que, en cada uno de los roles del caso de estudio, uno de estos pensamientos predomina sobre los demás.

Para este análisis se usaron los siguientes instrumentos:

- Investigación realizada por Botello (2013) e informes presentados por el profesor caso de estudio durante su participación como tutor-practicante.
- Informes diligenciados por el profesor caso de estudio durante su participación como tutor-auxiliar, los cuales corresponden a los formatos de los estudiantes a los cuales él brindaba tutorías durante esta participación.
- Informes finales del curso de Precálculo, videograbaciones de su trabajo como profesor del curso de Precálculo y entrevistas realizadas a algunos estudiantes que tomaron el curso con el profesor caso de estudio.
- Tesis de pregrado del profesor caso de estudio y entrevista realizada al profesor, en donde se formulan algunas preguntas relacionadas con los roles en los cuales había participado.

De cada uno de los instrumentos mencionados se seleccionaron aspectos que dan cuenta de cada uno de los pensamientos. En situaciones se presenta que se da cuenta de los tres pensamientos, o de dos, pero se seleccionó aquel que predomina sobre los otros, para hacer una clasificación de situaciones y experiencias donde se evidencien cada uno de los pensamientos.

4.5. Fase V: Reporte de la investigación

Al reportar los resultados obtenidos se quieren evidenciar los significados negociados por parte de los profesores en formación, a partir de la realización de prácticas profesionales tempranas. Espacios como el programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes permiten que los futuros profesores se enfrenten a situaciones reales con respecto a su vida profesional. Se considera que la participación en las CoP crea el interés por aprender y conocer nuevas metodologías de enseñanza, crear y diseñar estrategias que permitan mejorar las prácticas profesionales y así mejorar la enseñanza de las matemáticas.

5.- Aprendizajes emergentes de experiencias Profesionales Tempranas: el caso de Alfonso

En este capítulo se expone el estudio de caso de Alfonso, actualmente estudiante de Maestría en Educación Matemática, quien durante su formación inicial participó en los diferentes roles del programa de atención, seguimiento y acompañamiento a estudiantes, como se describe a continuación.

En la Figura 7, se presenta en una línea del tiempo las participaciones de Alfonso en cada uno de los roles dentro del programa, además de sus procesos de investigación.

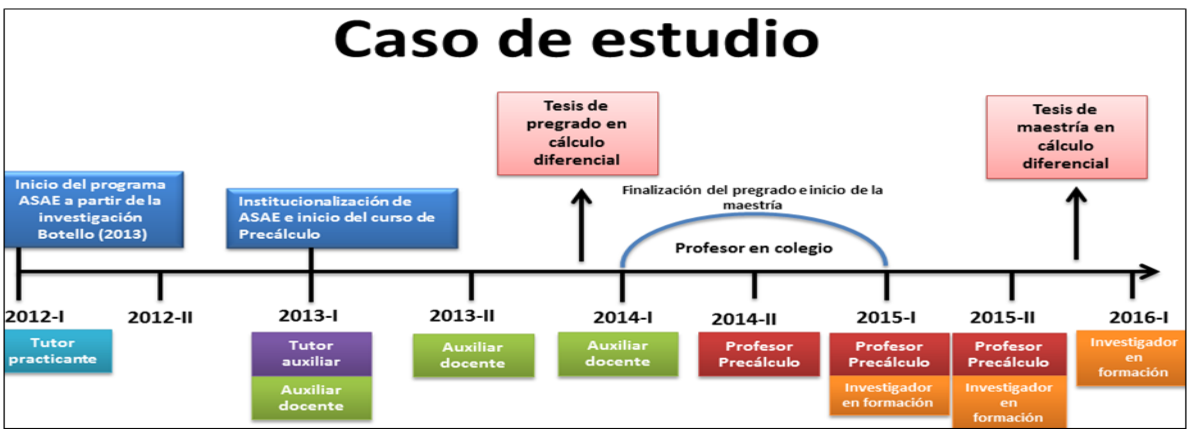


Figura 7. Roles desempeñados por Alfonso

Alfonso inició su recorrido en el semestre 2012-I, en el cual iniciaba la investigación con la que se creó este programa de tutorías como un espacio de prácticas para profesores en formación. En ese momento Alfonso era estudiante del curso de Didáctica del Cálculo y participó como tutor durante ese semestre, y así fue uno de los casos de estudio reportados por

Botello (2013). En este proceso se evidencia como la participación en este programa le permitió a Alfonso reforzar algunos conocimientos matemáticos que había olvidado, reconocer las falencias que tenía en Cálculo Diferencial y ver la importancia de crear espacios como estos para la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Durante el semestre 2012-II no se reportó ninguna participación de Alfonso, debido a que el programa ASAE-SEA (contexto de este estudio) se seguía haciendo como una prueba piloto con un segundo grupo de Didáctica del Cálculo. Cabe resaltar que en este semestre se tuvo en cuenta opiniones y sugerencias de los tutores del periodo anterior, como por ejemplo que las sesiones no fueran de solo una hora, sino que se extendieran a dos horas semanales para cada estudiante.

En el semestre 2013-I, el programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes es institucionalizado dentro del Sistema de Excelencia Académica (SEA), y comienzan las tutorías con diferentes roles. Entre ellos, estaba el de tutor auxiliar, cuyo perfil exigía haber participado en algunos de los dos semestres anteriores como tutor practicante, lo que implicaba haber cursado la asignatura de Didáctica del Cálculo y toda la línea de Cálculo.

Alfonso quiso participar como tutor auxiliar para reforzar sus conocimientos tanto matemáticos como didácticos, y a la vez participó como auxiliar docente en el curso de Precálculo, que también iniciaba ese semestre. Es importante resaltar que Alfonso participaba del Seminario de Enseñanza del Cálculo, en el cual se discutían cuestiones referentes a los trabajos de grado que en ese momento realizaban los estudiantes participantes, tanto de pregrado como de la maestría.

En los semestres 2013-II y 2014- I, el tutor no participó en ASAE-SEA como tutor auxiliar, sino como auxiliar docente, ya que Alfonso se encontraba trabajando en su tesis de pregrado justamente en Cálculo Diferencial. En su tesis, Alfonso presentó algunas estrategias que analizó a través del modelo CKC de Balacheff (2005), en donde evidenció concepciones de los estudiantes al plantear sus estrategias en el proceso de resolución de problemas en los talleres del curso de Precálculo.

El trabajo realizado por Alfonso dentro del curso de Precálculo lo llevó a concluir que es importante la validez, coherencia y eficacia de la concepción de un objeto matemático, a la vez que resalta el papel del profesor, al afirmar que, gracias a la interacción entre pares, auxiliar – docente y profesor – investigador en formación, fue posible identificar las estrategias de los estudiantes (López, 2014).

En el semestre 2014-II Alfonso obtiene su título como licenciado en Matemáticas, y debido al buen desempeño como auxiliar docente y sus aportes al Seminario de Enseñanza del Cálculo, es invitado a participar como profesor del curso de Precálculo. En este rol, Alfonso evidencia dominio de contenidos de la asignatura, conocimiento didáctico y Pensamiento Orquestal, ya que participa activamente en la CoP de profesores de Precálculo descrita por Moreno (2015). Alfonso se desempeñó como profesor de este curso en los semestres 2014-II, 2015-I y 2016-I.

Es en 2015 cuando Alfonso inicia la maestría en investigación, en la cual, retoma su tesis de pregrado e intenta seguir en la línea de didáctica del cálculo, enfocado en el proceso de demostración. Actualmente, se encuentra recolectando datos y realizando análisis para su tesis de Maestría en Educación Matemática, cuyo objetivo es identificar las dificultades de los estudiantes en el proceso de demostración, en un curso de Precálculo mediado por un *software* matemático interactivo.

La mayor participación de Alfonso se da en el curso de Precálculo, en el cual desarrolla actualmente su investigación. Esto evidencia la afinidad de Alfonso con la enseñanza del cálculo a partir de las tecnologías, su interés por la argumentación de los estudiantes y las dificultades que presentan en el proceso de demostración al llegar a la universidad.

En este capítulo se reportan los significados negociados por Alfonso durante su formación inicial y su formación profesional, en cada uno de los roles de participación; a partir de los datos reportados en la investigación de Botello (2013), en donde Alfonso era tutor practicante, los informes que entregó como tutor auxiliar, los informes finales, las videograbaciones y las entrevistas realizadas para esta investigación.

5.1. Tutor Practicante

En la investigación de Botello (2013) se da evidencia del Pensamiento Reflexivo del tutor en el periodo en el que realizó sus prácticas tempranas como tutor-practicante. Se toman algunas evidencias de Botello y se complementan con análisis que se refinó de las mismas.

5.1.1. Pensamiento Matemático

Para Llinares, Valls y Roig (2008), el profesor de matemáticas necesita un amplio conocimiento de las matemáticas, debe poseer destrezas para gestionar esta enseñanza y creencias epistemológicas compatibles con la visión de la enseñanza que se quiere desarrollar, en este caso, dentro del proyecto ASAE-SEA. Se retoma el Pensamiento Matemático desde el Modelo R-y-A, que resulta cuando el profesor hace uso del contenido matemático del que es responsable para desarrollar sus prácticas profesionales: propone tareas, selecciona, usa y diseña recursos. Es así como se tienen en cuenta los procesos de reflexión para, en y sobre la acción, los cuales se detallan en los análisis desarrollados.

En esas primeras prácticas tempranas, los estudiantes para profesores ya han cursado toda la línea de cálculo. Sin embargo, ellos manifiestan que no tienen completa claridad en conceptos del Cálculo Diferencial como función, límite o derivada. Al respecto, Alfonso, según Botello (2013), manifestó:

> Todos los temas fueron refinados gracias a las tutorías y todo gracias a que me tocó volverlos a estudiar y así poder despejar las dudas de los estudiantes...Estudié los temas por mi cuenta y realizaba los ejercicios del libro guía[6] antes de enseñarlos a los estudiantes. (p. 144).

Aquí, Alfonso, como **tutor practicante,** se hace consciente de su rol como profesor, pues va entendiendo el compromiso que adquirió al hacer parte de la CoP, lo cual lo llevó a

---

[6] Libro de cálculo *Trascendentes tempranas*, de James Stewart. 6° Edición.

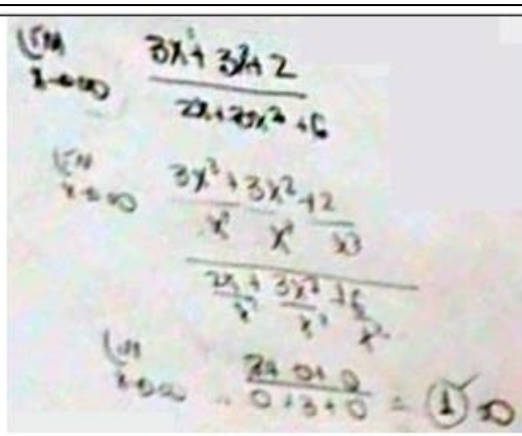
retomar el estudio de Cálculo I. Botello (2013) dice que Alfonso tuvo la oportunidad de reaprender temas que había olvidado, de aclarar otros que en aquel tiempo eran confusos y de aprender aquellos que no vio.

En el semestre 2012-I, la duración de la sesión era de una hora semanal, tiempo en el cual el tutor debía atender tres estudiantes y ayudarlos a superar las dificultades de aprendizaje en la asignatura. Este tiempo debía ser aprovechado al máximo, tanto por el estudiante como por el tutor, pues era el tiempo en el cual el estudiante resolvía sus dudas y el tutor ponía en práctica lo aprendido durante su carrera. Era en la acción donde el tutor recopilaba situaciones para realizar alguna reflexión.

Parada (2011) comenta que la reflexión en la acción se da en el momento en que el estudiante manifiesta sus inquietudes y el profesor pone en escena sus saberes para afrontar dichas inquietudes. Desde este contexto de investigación, este se da cuando el tutor necesita resolver las dificultades expresadas por sus pares académicos. Alfonso en esa etapa manifestó facilidad para dominar los temas durante la sesión, ya que se interesaba por ayudar a los estudiantes y por servir como un apoyo en su proceso de aprendizaje, lo que significa que se apropió de su rol como profesor. Botello (2013) documenta como esta participación incentivó a Alfonso a afinar sus conocimientos y a tener un mejor dominio y manejo de los temas:

> "Este hecho lo llevó a apropiarse del contenido matemático que durante su formación inicial no pudo lograr y por ello no se evidencia dentro del proceso alguna falencia en sus dominios conceptuales." Pág. 144.

Esto llevó al tutor a realizar reflexiones a partir de las acciones realizadas en la práctica. Parada (2011) define la reflexión sobre la acción como el espacio en el cual el profesor valora la actividad matemática lograda por sus estudiantes, en relación con los propósitos que se deseaban alcanzar en clase. En esta etapa, se evidencia en los informes de Alfonso, que él reconoce sus falencias en torno a sus dominios conceptuales. Específicamente, Botello (2013) menciona que él había olvidado los procedimientos para resolver límites al infinito. La autora recupera un episodio de Alfonso con una alumna, quien le había mostrado un proceso que ella había realizado para operar un límite al infinito ($\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3x^2+2}{2x+3x^2+6}$). Ante este ejercicio, ella multiplica el límite por $x=\frac{x^3}{x^2}$, en vez de hacerlo por $x=\frac{x^3}{x^3}$. El procedimiento de la alumna para resolver el límite se muestra en la Figura 8.



$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3x^2+2}{2x+3x^2+6}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+0+0}{0+3+0}=1$$

Figura 8. Procedimiento de la alumna de Alfonso en las tutorías

Alfonso, confundido y sin lograr ver el error, acude a la coordinadora de ASAE-SEA, quien le ayuda a resolver sus dudas y a ver el error que cometía su alumna.

La Coordinación de ASAE-SEA resalta la importancia de que sus participantes sean profesores de matemáticas en formación y profesionales, de manera que el trabajo se haga de forma conjunta. Lo anterior presenta evidencia de como el poco dominio de conceptos matemáticos no permite identificar las dificultades de los estudiantes al momento de realizar las actividades. Este aspecto juega un papel muy importante en la reflexión sobre la acción, pues identificar dificultades permite rediseñar actividades acordes a las necesidades de los estudiantes y alcanzar los objetivos planteados en la CoP.

En el informe final entregado ese semestre, Alfonso responde a la siguiente pregunta así:

> Si usted hubiera tenido la opción de realizar o no la experiencia de ser tutor de Cálculo I en el primer semestre de 2012, sin que esta fuera tenida en cuenta para la evaluación del curso de Didáctica del Cálculo, ¿la hubiera realizado?
>
> Sí, ya que nos estamos formando como docentes. En algún momento debemos comenzar a ejercer esta labor y qué mejor que espacios como este que nos ofrece la escuela para poder dar tutorías a estudiantes de primer nivel. (Informe final de Alfonso, 2012-I).

Alfonso considera el programa ASAE-SEA como una oportunidad de formación docente, se apropia de su papel como profesor y se compromete con su labor futura en el ámbito profesional. Esta experiencia lo lleva a tomar conciencia sobre la importancia del desarrollo del Pensamiento Matemático, como lo expresa a continuación:

> "Al tener la oportunidad de dar las tutorías me di cuenta que tengo muchas falencias con los conceptos fundamentales del cálculo y haber tenido esta experiencia me hizo

> repasar y comprender el contenido de esta materia, por esta razón me gustó dar tutorías." (Informe final de Alfonso, 2012-I).

A pesar de las dificultades manifestadas por Alfonso, fue elegido como caso de estudio por demostrar dominio en los contenidos matemáticos en Botello (2013).

5.1.2. Pensamiento Didáctico

Gómez (2007) define el conocimiento didáctico como conocimientos y destrezas necesarias para el análisis didáctico de un tema matemático, un procedimiento que idealmente debería realizar el profesor cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa guías y actividades que tiene en cuenta para su actividad matemática. Este conocimiento se desarrolla en el Pensamiento Didáctico, que se da en los tres momentos de reflexión. Para Parada (2011), este se da cuando el tutor representa el conocimiento matemático a partir de ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, que permiten hacer las matemáticas algo más comprensibles.

Alfonso presentaba dificultades en este pensamiento, las cuales son reportadas por Botello (2013) y retomadas en este apartado. Las metodologías usadas por Alfonso fueron variando durante el semestre: al inicio basaba sus sesiones en resolver las preguntas de los estudiantes, pero al presentar conflictos con las preguntas planteadas, decidió repensar su metodología y buscar apoyo en la coordinadora del programa, el profesor de Didáctica del Cálculo y demás participantes de la CoP. Se destacan el ánimo y la constancia de Alfonso como tutor practicante con sus estudiantes beneficiarios, que según sus reportes no avanzaban como él deseaba:

> Desafortunadamente no vi progreso con casi todos los estudiantes, creo que la razón de esto es que siempre llegaban sin estudiar a las tutorías y sin haber superado temas anteriores preguntaban acerca de los temas que estaban programados para ese día. Con una estudiante en particular, pensé que estaba dando resultado la tutoría, pero con el paso del tiempo me di cuenta que ella solo miraba ejercicios difíciles y los llevaba para que yo se los solucionara. Cuando yo lo explicaba y le preguntaba si entendía me decía que sí y cuando le preguntaba algo sobre lo que le acababa de explicar no me respondía acertadamente y me di cuenta que ni siquiera sabía las cosas fundamentales de los temas y que solo estaba asistiendo por asistir a las tutorías y no por despejar dudas que en verdad tuviera (Informe Final de Alfonso, 2012-I).

Los espacios de discusión juegan un papel central en la CoP. Alfonso resalta que estos espacios favorecen las prácticas tempranas realizadas, pues considera que el papel del profesor de Didáctica del Cálculo es muy importante y las actividades realizadas allí se conectan con la práctica en el aula experimental (Botello 2013). Se considera que de esta manera se rompe una brecha entre la teoría y la práctica temprana:

> ¿Dentro del curso de Didáctica del Cálculo se abren espacios para discutir los problemas, dificultades y errores que muestran los estudiantes de Cálculo I desde un enfoque didáctico?
>
> Estos espacios se abren en cada una de las clases ya que con cada exposición de los compañeros aparecen cosas que nos hacen reflexionar del porqué algunos estudiantes no comprenden o no conciben ciertos conceptos fundamentales del Cálculo, como el de límite, razón de cambio y algunos otros, llegando a la conclusión, que todo se genera por la mala educación que recibimos en los colegios y no haber visto con la importancia que se merece áreas como geometría y estadística, las cuales desarrollan este pensamiento geométrico y variacional (Informe final de Alfonso, 2012-I).

A medida que el tutor va identificando las dificultades de los estudiantes, es consciente de las suyas y de cómo debe tomar cartas en el asunto para superarlas. Botello (2013) afirma lo siguiente:

> "Se puede observar c0mo Eduardo va cambiando su procedimiento en la tutoría con las inquietudes que manifiesta Cristina, al mismo tiempo, el esfuerzo que él realiza por evitar que ella presente errores que se transformarán posteriormente en obstáculos para su aprendizaje." Pág. 149.

En la investigación mencionada se hacía referencia a Alfonso como Eduardo. Es interesante observar que Alfonso realiza adaptaciones de la metodología en la misma sesión, cuando se enfrenta a las dificultades de los estudiantes, que él previene, pero pueden estar sujetas a cambios y a posibles nuevas dificultades. Es en la sesión donde ocurre la actividad matemática, donde el tutor desempeña su papel de profesor de cálculo y tiene como objetivo resolver las dudas y lograr que el estudiante comprenda los temas estudiados.

En un episodio de Botello (2013) se presenta a Alfonso identificando las dificultades de los estudiantes al graficar funciones. El ejercicio consiste en determinar el dominio y el recorrido de f y f^{-1}, si $f(x) = 2\sqrt{(1-x)} + 2$, y la alumna le indica que no sabe cómo resolver el ejercicio ya que no sabe cómo encontrar la función inversa de una raíz. Este es el procedimiento de la alumna (ver Figura 13):

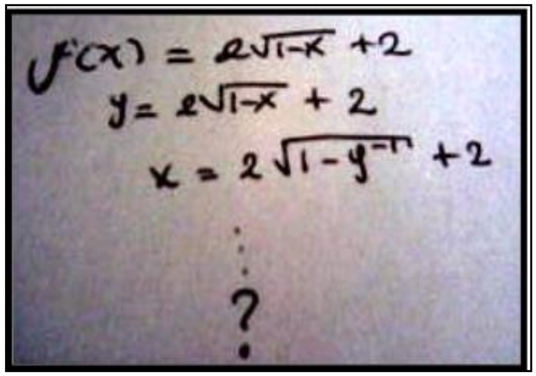


Figura 9. Procedimiento realizado por la alumna de Alfonso, Fuente: Botello (2013)

Se puede observar que el método de la estudiante es cambiar la x por la y, pero no sabe cómo despejar la raíz. Alfonso, por su parte, le propone despejar la x de la función y luego cambiar la x por y^{-1} de la siguiente manera (ver **Figura 10**):

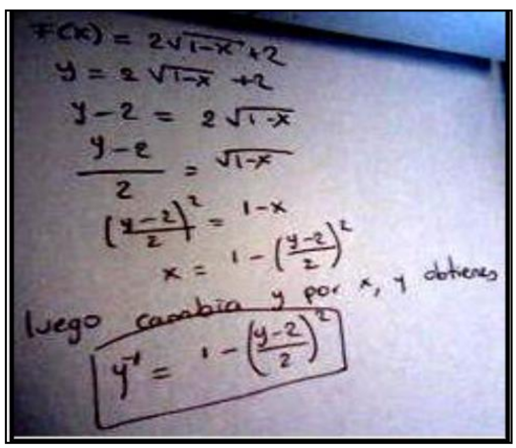


Figura 10. Procedimiento realizado por Alfonso para explicarles a sus estudiantes, fuente Botello 2013

Después de realizar este procedimiento, Alfonso les pide a sus estudiantes que determinen los conjuntos del dominio y el recorrido mientras él toma un portátil y realiza la gráfica en el *software* GeoGebra. Las diferentes representaciones usadas por el tutor practicante dan evidencia del dominio de los contenidos matemáticos y, a su vez, del desarrollo del Pensamiento Didáctico al buscar diferentes estrategias de aprendizaje para sus estudiantes.

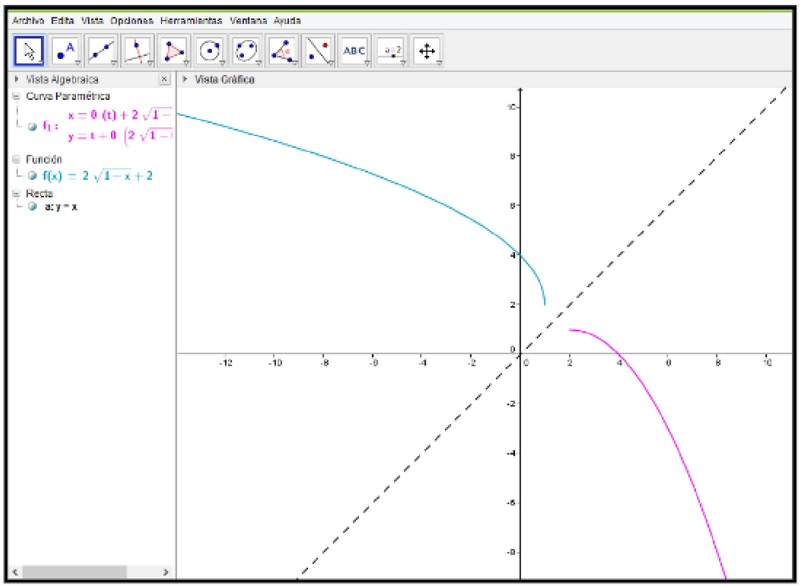


Figura 11. Gráfica realizada por Alfonso en GeoGebra, Fuente: Botello (2013)

Alfonso les pide a los estudiantes que observen cuidadosamente las gráficas y la relación que hay entre la función azul y la rosada (ver **Figura 11**). Uno de los estudiantes le pregunta que si la línea punteada es $y = x$, a lo que Alfonso responde que sí. Es ahí cuando una de las estudiantes recuerda que en alguna clase su profesora le explica que la inversa de una función se refleja con respecto a la recta $y = x$. La estudiante la relaciona con un espejo que debe reflejar la función inicial para encontrar su inversa.

Botello (2013) resalta las estrategias usadas por Alfonso para superar las dificultades de sus estudiantes. Se compromete con el objetivo de que sus estudiantes comprendan los enunciados de las situaciones presentadas en la sesión. Además, evidencia dificultades para la enseñanza de la continuidad en una función donde una estudiante le presenta la siguiente función y le comenta que no sabe cómo su profesora la resuelve en clase:

$f(x) = x^2 + \sqrt{(x-7)}$ Determine la continuidad en $x = 4$

Alfonso enuncia las condiciones para que una función sea continua:

$y = f(x)$ es continua en $x = a$ si:

- $f(a)$ existe
- $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A partir de esto afirma que, para el caso de esta función, no existen problemas en ningún punto para su continuidad ya que la función es polinómica. Inmediatamente reflexiona al respecto y corrige lo que dice al analizar la continuidad en $x = 8$, pues ve que la función es una composición entre una polinómica de grado 2 y una función raíz. Su fortaleza con el Pensamiento Matemático le permite analizar sus afirmaciones y reflexionar al respecto para explicarles de la mejor forma a sus estudiantes.

5.1.3. Pensamiento Orquestal

El uso de instrumentos tecnológicos para el desarrollo de la clase ayuda al profesor a acercar de diferentes maneras al estudiante a los objetos propios del cálculo. Es por esto que para Parada (2011) la orquestación se refiere a la selección de recursos que el tutor va a incorporar en clase, ya que aquel necesita ser como un director de orquesta para poner de la mejor manera los objetos en escena. Vale la pena recordar que el pensamiento orquestal se refiere a las maneras en cómo se usan estos recursos seleccionados como problemas, preguntas, talleres, material didáctico, tecnologías digitales, etc.

En el apartado anterior se observa como Alfonso incorpora muy poco el uso de las tecnologías a su sesión tutorial. En esta ocasión el *software* matemático interactivo GeoGebra se incorpora como un instrumento "propio" de la CoP, ya que hace parte del repertorio compartido que se adquiere. El profesor de Didáctica del Cálculo les recomienda a sus estudiantes el uso del *software* para las actividades planteadas en las tutorías. Además de apropiarse de este instrumento e incorporarlo en su actividad, el tutor-practicante recomienda que lo usen para estudiar, ya que por medio de este pueden realizar representaciones gráficas de las funciones y visualizar características no tan evidentes en las expresiones matemáticas.

Se observa que una de las dificultades que presenta Alfonso es que no realiza talleres para aplicar en la sesión. Su preparación se basa en estudiar los temas con anterioridad, pero deja de lado la incorporación de talleres, que hacen parte de los elementos propios y de la metodología del programa. Se observa, sin embargo, fortalezas en su dominio con GeoGebra y su interés por resolver dudas usando esta herramienta.

5.1.4. Generalidades de los significados negociados por Alfonso como tutor-practicante

De acuerdo con Botello (2013), se determina que en esta etapa las fortalezas de Alfonso se encuentran en el Pensamiento Matemático y las debilidades en el Pensamiento Didáctico y Orquestal. Como tutor-practicante Alfonso demuestra que:

> Esta experiencia es buena ya que podemos darnos cuenta de las falencias que tenemos de los temas de cálculo y poder estudiar para corregirlas. (Informe Final de Alfonso 2012-I)

Además, la práctica le permite desarrollar destrezas para resolver las dudas presentadas por los estudiantes, así como ser una guía y apropiarse más de su rol como profesor, visualizándose a futuro y trabajando por mejorar en todos los aspectos necesarios para cumplir con su labor. A pesar de manifestar no estar del todo conforme, pues sus estudiantes no obtienen las notas que él espera, reconoce que el tiempo no es suficiente para la sesión y recomienda que la sesión se extienda a dos horas semanales. Se resalta que el uso de las tecnologías es fundamental para Alfonso:

> La importancia del uso de la tecnología para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos, como por ejemplo el uso de GeoGebra. (Informe Final de Alfonso 2012-I)

Reconoce en GeoGebra una herramienta importante al momento de la realización de la práctica. Se considera que el Pensamiento Reflexivo del profesor se potencia en situaciones en las cuales el tutor se enfrenta a dificultades, ya que busca estrategias para resolverlas por medio del coordinador o el profesor de Didáctica del cálculo. Además, el acompañamiento de estos asesores da seguridad al tutor en su primera participación. Los tutores en esta modalidad manifiestan cierto temor por enfrentase por primera vez a una práctica temprana con la asignatura de Cálculo I, y ven la participación en la CoP como algo serio y cercano a lo que se considera la práctica profesional.

En la Tabla 4 se hace un resumen de los significados negociados por Alfonso como tutor practicante. En ella se recopilan aspectos generales que fueron mostrados anteriormente.

Pensamiento matemático	**Pensamiento didáctico**	**Pensamiento orquestal**
• Domina los contenidos de la asignatura de Cálculo Diferencial, se siente seguro y reflexiona acerca de su práctica, afirmando que comprende mejor los conceptos de función, límite y derivada. • Supera dificultades respecto a la realización de límites al infinito.	• No planea las actividades con anticipación, sus sesiones se basan en resolver dudas de los estudiantes. No valora el papel de la planeación de clase. • Usa representaciones gráficas para la enseñanza de la inversa de una función. • Dificultades para la enseñanza de Continuidad.	• Evidencia poco este pensamiento en este rol como tutor practicante. • Existen pocos momentos en los cuales el tutor utiliza el *software* interactivo GeoGebra para sus sesiones, y cuando lo hace es de forma estática, únicamente para observar las gráficas de las funciones.

Tabla 4 . Significados negociados por Alfonso en su rol de tutor-practicante

La experiencia de Alfonso como tutor-practicante le permite identificar fortalezas y debilidades a partir de sus propias prácticas. De esta manera comienza un camino por el cual va perfeccionando sus dominios tanto en aspectos matemáticos como didácticos. Cabe resaltar que el desarrollo del Pensamiento Matemático se evidencia más que el desarrollo del Pensamiento Didáctico y Orquestal.

5.2. Tutor auxiliar

El rol de tutor auxiliar es fungido por Alfonso en el periodo 2013-I. En este periodo hay cambios en el programa ASAE-SEA. Ya no son únicamente los tutores practicantes quienes se encargan del acompañamiento a los estudiantes, sino que también lo hacen nuevos integrantes de la comunidad que participan como tutores auxiliares. Como ya se menciona en el capítulo 2, el requisito para desempeñarse en este rol es haber cursado la asignatura de Didáctica del Cálculo y haber sido tutor-practicante. En este apartado se analizará el pensamiento reflexivo de Alfonso en su rol de tutor auxiliar, sus prácticas tempranas y sus significados negociados a partir de los informes entregados durante este semestre, en el cual realiza acompañamiento a nueve estudiantes de primer ingreso a la UIS (de programas como Licenciatura en Matemáticas, Física e Ingeniería Metalúrgica), de los cuales se retiran durante el proceso dos estudiantes.

Para esta parte del análisis se tendrá en cuenta los seguimientos realizados por Alfonso a cada uno de los estudiantes durante todo el semestre y el informe final que comprende una recopilación de los seguimientos de todos los estudiantes, y en el cual Alfonso realiza una breve descripción del estudiante y su proceso durante las sesiones. Se realizó una clasificación de sus escritos identificando las características que dieran evidencia sobre el desarrollo del Pensamiento Reflexivo del profesor. La clasificación se realizó en Pensamiento Matemático, Pensamiento Didáctico y Orquestal.

5.2.1. Pensamiento Matemático

Alfonso manifiesta que en esta nueva experiencia se pudo dar cuenta que ha olvidado ciertos temas del Cálculo Diferencial y que las tutorías le sirven como un espacio para repasar. En este apartado se usan como evidencias algunos apartes de los seguimientos que Alfonso realizó de sus pares beneficiarios. Estos apartes se citan así (Seguimiento de nombre del alumno beneficiario, fecha de registro en el seguimiento).

En una de las primeras sesiones Alfonso plantea situaciones a los estudiantes para que hallen dominio y recorrido de una función. Él se enfrenta a la tarea de ayudar al estudiante-beneficiario a entender el concepto de función teniendo en cuenta todas sus representaciones. Al respecto, Alfonso expone en su informe final lo siguiente:

> El estudiante tiene problemas en decir qué es una función y confunde eso con la forma de representarlas como gráficas, tablas, diagramas de flechas, etc. Ya que dice, por ejemplo, que una función es "eso" y señala o dibuja una gráfica o hace una tabla y dice que eso es una función, pero en realidad no comprende la dependencia y la relación entre los elementos que se encuentran en cada una de las diferentes representaciones. (Seguimiento de Brayan, 7 junio 2013[7])

---

[7] En este apartado se citarán fragmentos del informe final que presenta Alfonso, el cual está compuesto por los seguimientos de sus estudiantes. En cada cita se mencionará el nombre del estudiante beneficiario y la fecha de registro.

En este párrafo se puede detectar que, Alfonso quiere explicar el concepto de función partiendo de su definición formal. Tall y Vinner (1981) afirman que la definición de un concepto no garantiza la comprensión del mismo. Para Alfonso, no es suficiente con representar la función, él ve la necesidad de que sus estudiantes expliquen ese concepto y traten de definirlo. No tiene en cuenta que el estudiante, a partir de las representaciones, puede llegar a comprender el concepto. De ahí que al trabajar con otra estudiante suceda algo similar:

> Para Daniela una función es una gráfica, una tabla, un diagrama de flechas y no tiene presente que una función es una ley que relaciona dos magnitudes numéricas de forma unívoca, es decir, que a cada valor de la primera magnitud le hace corresponder un valor y sólo uno de la segunda magnitud. (Seguimiento de Daniela, Tutoría 1, 7 junio 2013)

Stewart (2008) presenta la definición de función como una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto B. Es así como se ve que la concepción de función en Alfonso, puede estar influenciada por la definición que se presenta en este libro. Se identifica precisamente, que su libro guía de estudio es el mismo que sigue el programa de Cálculo Diferencial en este semestre para proponer temas y actividades al profesor, que es justamente el libro de cálculo de Stewart.

Matemáticos como Euler, Cauchy y Leibniz aportan a la construcción de esta definición. Imaz y Armella (2009) reconocen las dificultades que existen cuando la enseñanza se inicia de forma rigurosa. Afirman que el rigor se da como resultado final de una construcción realizada con el tiempo. Esta es una de las problemáticas que afectan la educación. Desde la formación inicial se observa el interés por los profesores con respecto al rigor en las demostraciones, definiciones, etc., y tal rigurosidad es influida por la enseñanza tradicional del cálculo. Se recuerda un punto de vista del célebre René Thom:

> El verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos... si hay que elegir entre el rigor y el significado, sin duda elijo el significado. (Howson, 1973, p. 202)

Es así como uno de los problemas de la enseñanza es olvidar las raíces del cálculo y sustituirlas por el análisis matemático derivado del cálculo, e iniciar directamente con el formalismo.

Se puede identificar el interés del tutor en que estudiantes expliquen y procuren dar una definición del concepto de función. Para Flores (1996), una de las dificultades de la formación inicial de profesores es que los estudiantes no se enfrentan a dilemas prácticos que puedan poner en cuestión sus creencias y concepciones. Parece lógico pensar que la confrontación será más fácil de provocar cuando los estudiantes se enfrenten a la docencia, aunque sea en el breve período de las prácticas de enseñanza. Se resalta el interés por identificar en los estudiantes qué tanto se comprende este concepto.

En el siguiente párrafo Alfonso hace una aclaración en la cual se puede identificar que para él el concepto de función implica el reconocimiento de las representaciones que pueda realizar el estudiante. Alfonso ve la oportunidad para contextualizar el objeto matemático y pedirle al estudiante que le dé ejemplos de la vida cotidiana:

> La primera actividad consistió en la revisión del concepto de función que posee el estudiante o que ha aprendido en el curso de cálculo. Para esto le pedí que me explicara qué es, como se puede representar una función y me dijera alguna aplicación de ésta en la vida cotidiana. (Seguimiento de Daniela, 14 junio 2013)

Por supuesto continúa con la aplicación de actividades realizadas a partir de ejercicios en los cuales el estudiante debe hallar el dominio y el recorrido de una función:

> Los ejercicios de hallar el dominio y el recorrido de la función del punto 2 fueron contestados por Brayan de forma correcta y no tuvo ningún inconveniente para solucionarlo, este tema es de las pocas cosas que recuerda de las clases. (Seguimiento de Brayan, 14 junio 2013)

Aunque, como afirma el tutor, el estudiante realiza ejercicios sin ningún inconveniente, aún no tiene muy claro el resultado de trabajar con funciones. Puede ser que aún no comprenda realmente todo aquello que se refiere a una función y, además, su proceso de argumentación es muy pobre:

> Cuando resolvió el punto de falso y verdadero cometió varios errores como decir que, Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$ Esta expresión es falsa pero el estudiante dijo que era verdadera, aunque no dio ninguna explicación." (Seguimiento de Brayan, 14 junio 2013)

El tutor intenta pedir argumentación a su estudiante y este, por su parte, no sabe cómo explicarle por qué razón da esa respuesta. El tutor le explica la razón por la cual no son iguales. Basta solo con mostrar un ejemplo para esto. Alfonso presenta su ejemplo con la función $f(x) = x^2$, con esto, es fácil ver que esta igualdad no se cumple:

Si $f(x) = x^2$ entonces $(3x)^2 = 3x^2$, pero $(3x)^2 = 9x^2$ y $9x^2 \neq 3x^2$. Luego es falso lo anterior. Con este ejemplo se ve que el tutor tiene un reto grande en cuanto al dominio de los contenidos y en como los presenta al estudiante. Se resalta la iniciativa del tutor de activar en los estudiantes el proceso de argumentación en las actividades desarrolladas en la sesión.

La elaboración de preguntas permite identificar no sólo las habilidades o dificultades del estudiante, sino que permite identificar estos aspectos en el tutor. Unos de los temas del Cálculo Diferencial que se abordan en las sesiones es el límite de una función. En el trabajo del tutor se observa el interés por ayudar a los estudiantes a comprender este concepto. Algunas de las actividades para la enseñanza del límite usadas por Alfonso se presentan en el apartado dedicado al Pensamiento Orquestal. Aquí se mostrará como Alfonso identifica qué tanto sabe un estudiante al respecto:

> Al preguntarle esto a Emiliano quise saber si comprende lo que es un límite y como logra explicármelo.
>
> La respuesta que dio fue:
>
> "Esta expresión me quiere decir que la función cuando la evaluó en números cerca de 2, tanto por derecha como por izquierda de dos, se acerca a cinco o toma valores muy cerca de cinco."
>
> Emiliano tiene clara idea de límites como un proceso dinámico que se da cuando una función se evalúa en distintos valores o elementos del dominio y tiende a un número que puede o no estar en el conjunto de llegada de la función. (Seguimiento de Emiliano, 26 julio 2013)

En esta cita se ve como el tutor identifica el límite como un proceso dinámico en el cual el acercamiento por derecha o izquierda de la función y los valores del dominio tienden a un valor. Además, ya habla de tendencia cuando se refiere al concepto. Medina (2001) considera que la noción de límite se desarrolla por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones del cálculo: variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número,

número real y continuo numérico. De estas nociones se observa en la cita que se evidencian algunas como número o función. Podríamos asemejar la cercanía con los infinitamente pequeño y variable (al hablar de dominio). En esta etapa se ve el interés por aprender de parte del tutor para poder aportar a los estudiantes, así como por tener un mejor dominio de los contenidos matemáticos.

5.2.2. Pensamiento Didáctico

Cuando Alfonso es tutor-practicante tiene dificultades para el desarrollo de la sesión, ya que no está acostumbrado a planear las actividades con anterioridad. Luego él reconoce que sus sesiones se basan únicamente en resolver dudas de los estudiantes, lo cual se convierte a veces en un arma de doble filo, pues su dominio de los contenidos no es óptimo y llegan momentos en que los estudiantes hacen preguntas que Alfonso no puede responder aún. Ya en la etapa de tutor auxiliar reflexiona sobre la importancia de la planeación de la sesión y la realización de talleres pertinentes para aportar al aprendizaje de los estudiantes. Estos talleres los realiza de acuerdo al plan de estudios que lleva cada estudiante siguiendo los temas estudiados con el profesor de curso. Los talleres de Alfonso se dividían en tres partes:

- ✓ Ejercicios
- ✓ Problemas
- ✓ Demonstración

Alfonso dedica gran parte del taller a la realización de ejercicios con los cuales él considera que los estudiantes pueden practicar lo visto en clase. Para él, es importante que el estudiante comprenda lo que está haciendo, y esto se evidencia en sus informes:

> Está realizando los ejercicios de forma mecánica y no comprende la esencia de lo que hace, por ejemplo, en la transformación de funciones si hace cambios en la variable o la expresión no se da cuenta que la gráfica tiene esos comportamientos porque le altero el dominio o el rango de la función respectivamente. (Seguimiento de Brayan, 14 junio 2013)

La comprensión de los procesos es importante para este profesor en formación, lo cual evidencia su intención por hacer que el estudiante argumente sus procedimientos y logre conectar los elementos matemáticos para realizar justificaciones válidas y coherentes que no carezcan de herramientas matemáticas. Se ve que su metodología apunta a la argumentación y demostración. Por otro lado, la resolución de problemas que hace parte del repertorio compartido en la CoP a la que Alfonso pertenece juega un papel secundario en las actividades desarrolladas por Alfonso. Al revisar sus talleres se observa que cuenta con pocas actividades de resolución de problemas en comparación con las otras dos mencionadas.

En ocasiones Alfonso vuelve a la metodología usada en su rol como tutor-practicante, y les enfatiza a sus estudiantes que estudien en casa antes de llegar a la sesión con el fin de avanzar en cuanto al estudio de contenidos:

> Yo le recomendé que para la próxima tutoría estudiara los temas antes de vernos y así podíamos avanzar más y enfocarnos en las preguntas que le surgieran para así utilizar el taller como refuerzo a su estudio en casa. (Seguimiento de Brayan, 14 junio 2013)

La influencia del calendario y la realización de parciales durante el semestre[8] "presiona" al tutor de alguna manera para querer avanzar en las actividades realizadas durante la sesión. Él se siente comprometido con sus estudiantes y se esfuerza por ayudarlos al máximo. Aquí se resaltan dos características de la CoP: el compromiso mutuo y la empresa conjunta cuyo objetivo es ayudar a los estudiantes de primer semestre de Cálculo I a comprender los conceptos vistos en esta asignatura.

Otro aspecto que se resalta del tutor es que al realizar la reflexión para la acción se traza objetivos por sesión:

> El taller para hoy es de funciones (taller1) y tiene como objetivo que el estudiante trabaje con funciones planteándolas a partir de situaciones, las grafique y halle dominio y recorrido. (Seguimiento de Brayan, 7 junio 2013)

Esto facilita el desarrollo de las actividades, pues al trazar un camino el tutor se enfoca en los elementos pertinentes para lograr el objetivo y trabajar de forma óptima el tiempo de la sesión. A su vez, para cada punto del taller traza un objetivo de acuerdo con las características del estudiante:

> Se plantearon ejercicios para que el estudiante trabaje con concepto de dependencia y vea la necesidad de una representación o un modelo para estudiar mejor una situación determinada (ejercicios 4,5 y 6), además se le pide graficar. (Seguimiento de Brayan, 7 junio 2013)

[8] El curso de Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander, se desarrolla durante un semestre en el cual se ven temas relacionados con: Funciones, Límites, Derivadas y Aplicaciones de la Derivada. Durante este tiempo se realizan cuatro parciales.

En su informe describe aspectos como el de esta cita, donde explica las razones por las cuales plantea las actividades. Tiene claridad en la selección de los recursos pertinentes para trabajar y describe las razones por las cuales selecciona problemas, ejercicios y sentencias para que el estudiante demuestre. Aquí se sigue evidenciando una reflexión para la acción que es afectada por una reflexión sobre la acción, pues tiene en cuenta sus reflexiones como profesor en la sesión anterior y logra identificar características del estudiante que le aportan elementos para la realización del siguiente taller. Algunas de las dificultades que identifica en uno de sus estudiantes son las siguientes:

- Dificultad en la comprensión lectora.
- No estudia con anterioridad los temas de la materia y por esta razón no tiene preguntas para hacerme en la tutoría y solo está atenta a lo que yo le pueda explicar de nuevo.
- Mala comprensión lectora, lo que hace que no entienda bien algunas definiciones que lee del libro guía.

Al inicio sus extracciones con respecto a las dificultades observadas en los estudiantes son muy superficiales pues se basa sólo en decir que no saben leer, no comprenden las explicaciones, no estudian en casa, etc. Luego con el desarrollo de las sesiones se pueden observar pequeños avances en sus extracciones y observaciones como profesor:

- Trató de aprenderse de memoria varios procedimientos para resolver límites y no está comprendiendo bien las respuestas que obtenía.
- Le falta generalizar los métodos como el de aproximación ya que si le cambio el tipo de ejercicio no es capaz de resolverlo como quedó en evidencia por no ser capaz de resolver el ejercicio 6.

- No comprendía que el límite de una función no necesariamente está determinado en el recorrido de la función y que este límite no necesariamente es el valor de la función evaluada en el valor al que tiende x.

En esta cita ya muestra de forma más detallada las dificultades que posee el estudiante con respecto a objetos específicos del Cálculo Diferencial, y supone posibles razones que influyen en estas dificultades. Esto le permite realizar un análisis más profundo y detallado de cada estudiante.

Conociendo las dificultades extraídas en la reflexión en la acción, se hace una idea de las posibles soluciones que puede plantear en la futura sesión. Se observa que la reflexión realizada por el tutor puede ser comparada con la reflexión en forma de espiral que presenta el modelo que se toma como base para el análisis, pues las reflexiones del tutor están en constante movimiento, lo cual le permite mejorar su pensamiento reflexivo. Por supuesto, en cuanto al Pensamiento Didáctico podemos afirmar que el tutor busca estrategias de acción que le permitan al estudiante mejorar sus conocimientos matemáticos y, a su vez, estas estrategias le permiten al tutor explicar con mayor facilidad a los estudiantes.

El uso de ejemplos como representaciones de un elemento es puesto en juego por el tutor al resolver el primer punto de un taller de funciones:

1. Si $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x - 3$ y $h \neq 0$, evaluar y resolver $g(x) = \frac{f(h^3+5)-7h}{h^2}$

Se ve que el tema que quiere tratar el tutor es composición de funciones. En el siguiente enunciado muestra como ayuda a su estudiante a superar la dificultad que tiene al enfrentarse a este tipo de ejercicios:

> Daniela tuvo inconvenientes para resolver el primer punto de este taller ya que no comprendía el enunciado y no encontraba la forma de hallar $g(x)$ como se lo estaban pidiendo, aunque después de un ejemplo que le mostré:
>
> Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = f(2) + 3x$, para encontrar $g(x)$ solo debía reemplazar 2 en $f(x)$ y reemplazarlo en la expresión de g(x).
>
> Donde $g(x) = 4 + 3x$
>
> Con esta explicación bastó para que Daniela lograra hacer el ejercicio. (Seguimiento de Daniela, 7 junio 2013)

El uso del ejemplo ayuda a la estudiante a ver en más elementos un mismo objeto matemático y, a su vez, muestra que el profesor realmente comprende lo que enseña pues se le facilita plantear diferentes representaciones de una misma situación para ayudar a sus estudiantes a comprender de forma más clara y precisa. De esta manera, el profesor evidencia un desarrollo del Pensamiento Didáctico en comparación con el semestre en el cual es tutor-practicante.

Le Boterf (2001) señala que un profesional sabe gestionar una situación profesional compleja, actúa y reacciona con pertinencia, combina los recursos y los moviliza en un contexto, sabe transferir y utilizar sus conocimientos para modelar e interpretar los indicadores en contexto, y además sabe comprometerse y aprender a aprender. Esto se observa en Alfonso, quien se siente comprometido con sus estudiantes, busca estrategias para que el estudiante llegue a un punto en el cual sea independiente y pueda tomar hábitos de estudio que le permitan continuar en su proceso de formación matemática:

> El taller para hoy es de transformación de funciones (taller2). La intención es que Daniela desarrolle lo que pueda y me pregunte cuando definitivamente no sea capaz de proceder sola. (Seguimiento de Daniela, 21 de junio 2013)

Claramente el tutor quiere generar en los estudiantes independencia en los procesos matemáticos. Les permite estudiar por sí solos de manera que construyan su conocimiento y se vuelva significativo para ellos. A su vez, advierte su rol de profesor como un guía y no como un personaje encargado de transmitir conocimiento de forma tradicional. Este es uno de los aspectos que se quieren lograr en el programa: cambiar la mentalidad del profesor para que pueda cambiar la mentalidad de sus estudiantes.

Además de proponerles estudiar por su cuenta, se interesa por evaluar a sus estudiantes e identificar qué tanto saben de un tema:

> Para saber cómo está Martha con el tema de límites, le di el taller y le pedí que los resolviera para así ver las dificultades que tiene y poder reforzarle estas falencias.
>
> Este ejercicio está diseñado para ver si la estudiante tiene presente las leyes de los límites que le ayudaran a resolver límites de forma más fácil. Martha las sabe y las utiliza sin ningún problema:
>
> Dado que
>
> $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$
>
> Encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.
>
> $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$”
>
> (Seguimiento de Martha, 31 junio 2013)

Después de observar el proceso realizado por su estudiante, Se observa en los informes que Alfonso identifica en Martha las siguientes dificultades:

- Se le dificulta graficar o esbozar funciones cuando se le dan ciertas condiciones que involucran límites.
- Hay temas que ya vio, pero como no los ha estudiado no puede resolver algunos ejercicios propuestos.
- Con algunos ejercicios que intentó hacer de límites al infinito descubrí que Martha tiene dificultades al factorizar las expresiones de las funciones dadas. (Seguimiento de Martha, 31 junio 2013)

De esta manera se ve que el profesor en formación reconoce la evaluación como un aspecto importante en las prácticas profesionales, ya que le permite identificar falencias en sus estudiantes.

5.2.3. Pensamiento Orquestal

La tutoría se desarrolla entre las interacciones que realiza el profesor en formación y el estudiante beneficiario en el aula experimental (Botello, 2013). Dentro de ello, juega un rol preponderante la negociación de significados y nuevos conocimientos a partir del traslado efectivo de las propuestas curriculares oficiales a la práctica.

La interacción con el *software* GeoGebra mientras se desempeña como auxiliar docente en el curso de Precálculo, donde realiza un acompañamiento al profesor titular, le permitiría ver a Alfonso el Cálculo Diferencial de forma dinámica y, a su vez, ver la construcción de las funciones, analizar y observar a x como algo en movimiento, justamente como una variable y no como un valor estático, para luego tener un mayor dominio y control de instrumentos que permitirían orquestar sus sesiones como tutor auxiliar. Claramente se evidencia un cambio en comparación de su rol anterior y se analizará de qué manera Alfonso negocia significados referentes a este pensamiento.

Alfonso en este momento usa GeoGebra como una herramienta de visualización de funciones, y de esta manera muestra de forma dinámica el comportamiento de algunas trasformaciones que se le realizan a una función:

> Al comienzo del taller, Brayan no comprendía por qué la gráfica de una función tiene esos comportamientos. Por ejemplo, si sumamos o restamos un valor a la función f(x), porque la función se mueve sobre el eje "y", o si lo que sumamos o restamos es a la variable se mueve por el eje x. (Seguimiento de Brayan, 21 junio 2013)

Al ver que el estudiante no logra comprender la razón por la cual al realizar la trasformación $f(x) + c$ la función se traslada de forma vertical y $f(x + c)$ realiza una traslación de forma horizontal, Alfonso recurre a lo siguiente:

> Le mostré con la ayuda de GeoGebra una función y sus diferentes transformaciones y le pedí que analizara cada movimiento realizado por la función y lo comparara con los cambios que le hacíamos a la expresión que la definía, hasta que logré que se diera cuenta que dependiendo de si es a la expresión completa o a la variable a la que le hago los cambios la gráfica se mueve en el eje Y o el eje X respectivamente. (Seguimiento de Brayan, 21 junio 2013)

De esta manera Alfonso logra que el estudiante comprenda que el efecto realizado por la constante depende de la ubicación de esta, pues al sumar por fuera de la función $f(x) + c$ el efecto ocurre al valor de y, lo cual hace que la traslación sea vertical, contrario a lo que sucede cuando se suma por dentro de la función $f(x + c)$, cuyo efecto es a la variable x, razón por la cual el desplazamiento se considera de forma horizontal.

Alfonso, en su rol como tutor auxiliar, incorpora cada vez más las tecnologías a su metodología de trabajo, haciendo de GeoGebra una herramienta importante para el desarrollo de la actividad matemática. Esta herramienta es cada vez más inherente a su trabajo pues no sólo la utiliza para hacer representaciones gráficas, si no que ve en ella una herramienta útil de enseñanza, inclusive para realizar talleres que tuvieran en cuenta la interacción del estudiante con el *software*:

> Como la idea de hoy adelantar el tema de límites, le mostré unas animaciones en GeoGebra para que se hiciera una idea intuitiva de límite (Aquiles y la Tortuga) y le pedí que interactuara con la animación y me contara con sus palabras lo que representa un límite. (Seguimiento de Daniela, 23 junio 2013)

Uno de los conceptos del cálculo más difíciles para los estudiantes es el de límites, tal como lo reportan Sierpinska (1985), Schwarzenberger y Tall (1978) y Hitt y Páez (2001), entre otros, pues la comprensión de la definición formal de límite resulta un poco confusa para los estudiantes, quienes no reconocen elementos del análisis matemático.

Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos con relación al concepto de límite:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobre generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.

- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

A su vez, Hitt y Paez (2004) reportan que probablemente los obstáculos que tienen algunos matemáticos para entender y formalizar este concepto aparecerán en el aula de matemáticas. Por estas razones se resalta la labor de Alfonso al proponerse en su sesión realizar un acercamiento de los estudiantes al concepto de límite por medio de una simulación de la paradoja de Aquiles y la tortuga (ver **Figura 12**):

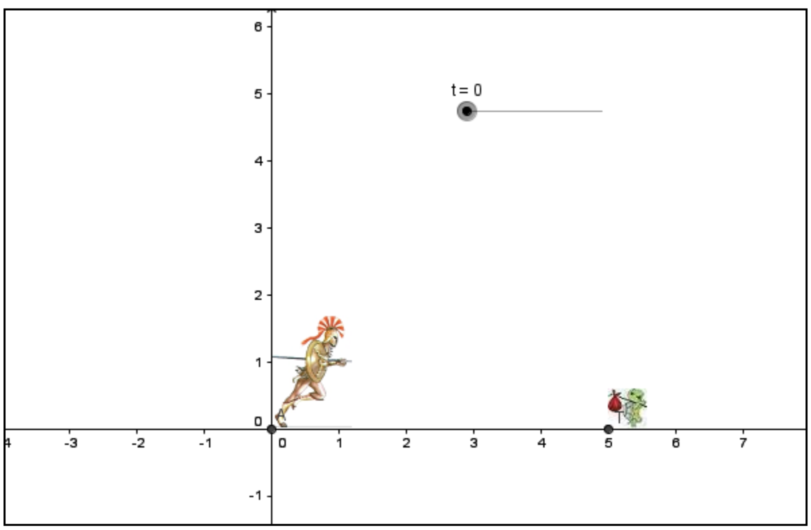


Figura 12 . Construcción en GeoGebra de Aquiles y la tortuga usada por Alfonso

> La actividad en GeoGebra es solo para que la estudiante se haga una idea de lo que es el límite de una función y que se basa en un proceso continuo que hace que nos acerquemos a un valor sin necesidad de llegar a él. (Seguimiento de Daniela,23 junio 2013)

Aunque no profundiza en este aspecto se ve que la noción de infinito que aquí trabaja el tutor es de infinito potencial, pues habla de acercarse a un valor sin llegar a él.

Se ve que el tutor realiza constantemente un cambio de espacio de trabajo, entre el *software* y el trabajo a lápiz y papel. Después de trabajar con la paradoja de Zenón, Alfonso les pide a sus estudiantes que hallen límites de forma numérica, por aproximación, utilizando tablas de valores:

> Realizamos algunos ejercicios del libro sobre la forma de hallar límites mediante el método de aproximación utilizando tablas de valores y hallar límites por gráficas. Como el tema era nuevo para ella le pedí que leyera las definiciones y las utilizara para resolver los ejercicios propuestos y mi trabajo iba a ser explicarle lo que no entendiera de las definiciones. (Seguimiento Daniela, 23 junio 2013)

Y, por supuesto, retoma el trabajo individual que debe realizar el estudiante en casa. Para él, es muy importante que el estudiante estudie las definiciones por su cuenta y trate de entenderlas para luego llegar a la sesión y resolver dudas. Alfonso considera que la sesión no debe ser para llenar a los estudiantes de contenidos sino para resolver inquietudes que quedan después de la clase de Cálculo I.

Por último, usa otro método para hallar límites: de forma gráfica. Para él, la interpretación de gráficas juega un papel esencial en la enseñanza. Aquí se observa como logra organizar todos los instrumentos que tiene y dirigir la actividad como un director de orquesta pasando de una actividad a otra, de una forma de ver un límite a otra:

> Otra parte de la actividad fue hallar límites analizando las gráficas de las funciones como, por ejemplo:

Para la función f cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si existe. Si no la hay, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$

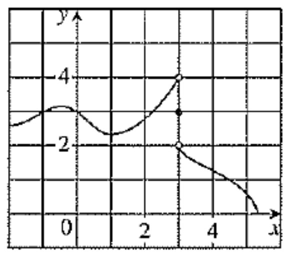


Figura 13. Parte del taller aplicado por Alfonso

En su rol como tutor auxiliar se observan (ver **Figura 13**) avances más significativos en comparación con su rol como tutor-practicante. Se puede ver un mayor avance en el desarrollo de los pensamientos mencionados, y una interacción más fluida dentro de la CoP.

5.2.4. Generalidades de los significados negociados por Alfonso como tutor auxiliar - tutor auxiliar docente

A partir de los informes realizados por Alfonso en calidad de tutor auxiliar, se encuentran procesos que favorecen en su formación inicial, los cuales permiten el desarrollo del pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas. No obstante, algunas dificultades son evidenciadas en esta etapa. Dificultades que pueden presentarse en la formación inicial de los profesores de matemáticas, y que son discutidas en la etapa de investigador en formación, pues se considera importante la perspectiva del mismo Alfonso en un nivel más avanzado de formación; por ejemplo, en esta etapa el tutor ya hace una descripción de sus estudiantes, teniendo en cuenta la observación y el acompañamiento realizado durante todo el semestre:

> Brayan es un estudiante juicioso, está desde el comienzo en las tutorías, es dedicado a sus estudios, siempre prepara el tema de las tutorías y pregunta cuando no entiende algún concepto. Desafortunadamente al final de las tutorías no estaba estudiando.
>
> Daniela está desde el comienzo en las tutorías, es juiciosa, pero a veces no hace las tareas propuestas, pregunta las cosas que no entiende y participa bastante en la tutoría, a veces quiere terminar los talleres rápido y comete errores en el desarrollo de los ejercicios. (Seguimiento de Brayan, 2013-I)

Sobresale su interés por incentivarlos a ser ellos quienes tomen la iniciativa de estudiar, proponiendo talleres y actividades para realizar en casa:

> Como está adelantando los temas quedamos en que va a estudiar límites al infinito, límites en el infinito, asíntotas verticales y asíntotas horizontales y yo le traía un taller sobre esos temas. (Seguimiento de Brayan, 2 agosto 2013)

Después de analizar los informes realizados por Alfonso se determina que los cambios en comparación con su rol de tutor-practicante son notorios, pues evidencia un mayor dominio en los contenidos matemáticos, lo cual potencia su Pensamiento Matemático. Los cambios en su metodología y la realización de actividades le permiten un mejor desarrollo de sus sesiones tutoriales, pues se plantea objetivos que trabaja por alcanzar. Por supuesto, la incorporación de nuevos instrumentos como GeoGebra favorece su práctica temprana llevándolo a proponer actividades que evidencian su comprensión de los conceptos del cálculo y le permiten ejemplificarlos mejor para acercarlos a sus estudiantes. A su vez, le da un papel importante a la evaluación dentro de sus actividades. Para finalizar esta etapa de Alfonso se presenta una tabla con sus aprendizajes negociados como tutor auxiliar.

Pensamiento Matemático	Pensamiento Didáctico	Pensamiento Orquestal
• Describe la función con una ley de correspondencia, dando prioridad a esta explicación, sobre las representaciones que realizan los estudiantes. • Desarrolla actividades que involucran trabajos de límites a partir de aproximaciones. • Percibe el límite como una interdependencia con la noción de tendencia, función número, variable.	• Realiza actividades y talleres para aplicar en las sesiones tutoriales, es decir, prepara con anticipación la sesión tutorial. • Plantea objetivos con cada una de las actividades. • Utiliza diferentes representaciones de un mismo objeto para enseñar el Cálculo Diferencial.	• Incorporación de talleres para realizar en la sesión y en casa como trabajo complementario. • Incorpora de nuevas tecnologías computacionales usando el *software* interactivo GeoGebra. • Propone la evaluación en sus actividades. • Interactúa con las herramientas de trabajo como talleres, visualización en GeoGebra.

Tabla 5. Significados negociados por Alfonso como tutor auxiliar

En la Tabla 5 se evidencian los significados negociados por Alfonso como tutor–practicante. En este rol se evidencia que los pensamientos Didáctico y Orquestal empiezan a tomar fuerza en sus acciones realizadas antes, durante y después de cada sesión. Es aquí donde culminan sus prácticas tempranas, deja de estar en un contexto de formación inicial para ahora pasar al contexto del desarrollo profesional como profesor de Precálculo, curso en el que ya ha participado como auxiliar docente.

5.3. Profesor de Precálculo

En el segundo semestre del año 2014 Alfonso presenta una tesis de pregrado en la línea de Didáctica del cálculo, que se enfoca en identificar las estrategias usadas por los estudiantes al momento de enfrentarse a la resolución de un problema matemático. El análisis de estas estrategias se realiza a partir del modelo CKC (Balacheff, 1986) y su contexto de investigación es el curso de Inducción Matemática (Precálculo) que hace parte de la estructura curricular en la cual se enmarca ASAE-SEA.

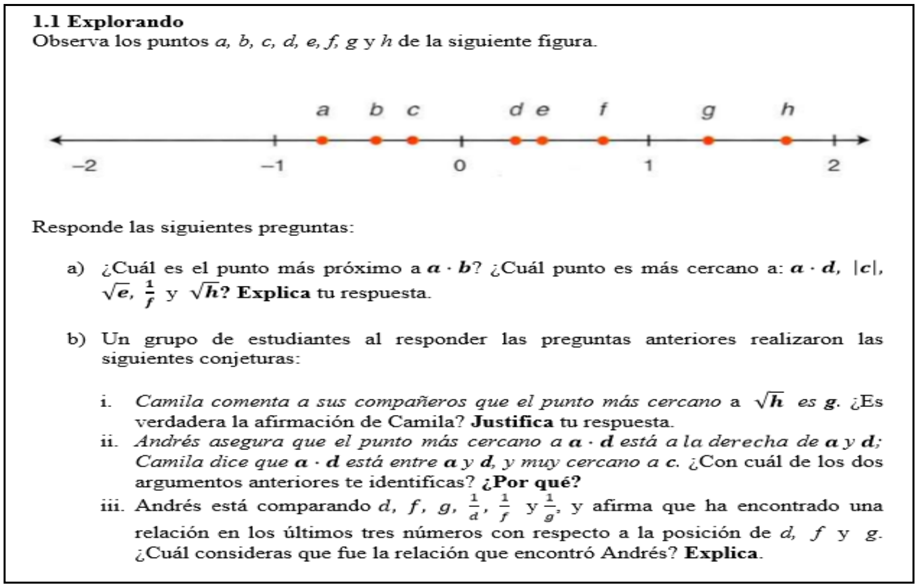
Al culminar sus estudios de pregrado, Alfonso continúa su participación en la CoP, pero esta vez como profesional, pues es invitado a ser profesor del curso de Precálculo en el periodo 2015-I. En este mismo tiempo inicia su Maestría en Educación Matemática con la iniciativa de continuar el trabajo realizado en pregrado con respecto a la demostración y la argumentación. A su vez, esto le permite participar activamente en la CoP, en la cual se discuten las actividades y la metodología desarrollada en el curso. Alfonso se ha venido desempeñando como profesor del curso desde entonces (a la fecha de escritura de este documento -2017-II- han sido seis oportunidades).

Para efectos de esta investigación se recopilaron los informes que él realizo de sus estudiantes en el periodo 2016-II, (29 de agosto del 2016 al 15 septiembre) así como las grabaciones en video. Se cuenta con la grabación de 12 sesiones de las cuales se rescatan aspectos relacionados con los conceptos de función, límites y derivada.

5.3.1. Pensamiento Matemático

En lo que respecta al Pensamiento Matemático, se reconoce la labor del profesor en este curso en cuanto al interés por construir nociones de los objetos del Cálculo Diferencial en los estudiantes. Se recuerda que estos estudiantes son de primer ingreso a la universidad, y este curso es ofrecido antes de ver Cálculo I, intentando aportar una solución a una problemática muy común en las universidades: la baja preparación de los estudiantes para comprender los contenidos de Cálculo Diferencial. Rojas, Suarez y Parada (2014) reportan que los estudiantes no llegan con buenas bases conceptuales a la universidad para enfrentarse al Cálculo Diferencial. Estos autores realizan un análisis en el cual evidencian que los estudiantes tienen escasa interpretación de los enunciados, y con esto perciben en ellos falencias comunicativas.

Como se había mencionado, se retoman episodios de las actividades en las cuales se evidencia el Pensamiento Matemático de profesor de Precálculo. En el primer capítulo se habla de las operaciones de radicación y multiplicación, analizando su comportamiento en el intervalo (0,1). En la primera parte Alfonso permite que los estudiantes trabajen de forma individual. Para él, es importante pasar por los puestos únicamente cuestionando a los estudiantes. De esta manera, identifica los procesos que ellos elaboran para resolver las preguntas planteadas en el taller (ver **Figura 14**):



1.1 Explorando
Observa los puntos a, b, c, d, e, f, g y h de la siguiente figura.

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto más próximo a $\boldsymbol{a \cdot b}$? ¿Cuál punto es más cercano a: $\boldsymbol{a \cdot d}$, $|\boldsymbol{c}|$, $\sqrt{\boldsymbol{e}}$, $\frac{1}{f}$ y $\sqrt{\boldsymbol{h}}$? **Explica** tu respuesta.

b) Un grupo de estudiantes al responder las preguntas anteriores realizaron las siguientes conjeturas:

i. *Camila comenta a sus compañeros que el punto más cercano a* $\sqrt{\boldsymbol{h}}$ *es* $\boldsymbol{g}$. ¿Es verdadera la afirmación de Camila? **Justifica** tu respuesta.
ii. *Andrés asegura que el punto más cercano a* $\boldsymbol{a \cdot d}$ *está a la derecha de* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{d}$*; Camila dice que* $\boldsymbol{a \cdot d}$ *está entre* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{d}$*, y muy cercano a* $\boldsymbol{c}$. ¿Con cuál de los dos argumentos anteriores te identificas? **¿Por qué?**
iii. Andrés está comparando d, f, g, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$, y afirma que ha encontrado una relación en los últimos tres números con respecto a la posición de d, f y g. ¿Cuál consideras que fue la relación que encontró Andrés? **Explica**.

Figura 14 . Primera parte del taller números y operaciones

Alfonso pasa por los puestos observando el trabajo que realizan sus estudiantes, se acerca a ellos y les pregunta lo siguiente: ¿cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$? La mayoría de los estudiantes responden que e o d y explican sus razones, como lo hizo Erika (ver **Figura 15**) en la siguiente conversación con Alfonso:

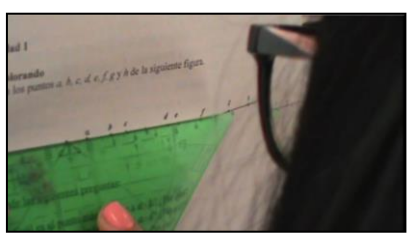


Figura 15. Erika midiendo con su regla las distancias.

[9]**Alfonso**: ¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$?

Erika: obviamente es e, porque a es negativo y b es negativo y el producto de dos números negativos es positivo.

Alfonso: ¿por qué el producto de dos números negativos es positivo?

Erika: porque un negativo por negativo es positivo, así pasa en la multiplicación.

Alfonso: ¿cuál es el más cercano?

Erika: pues puede ser uno de estos tres (señalando a d, e y f)

Alfonso: ok, escoge uno entre esos tres

Erika: pues yo escojo e…. ¿Y uno lo podría hacer por aproximación?

Alfonso: claro que sí. ¿Cómo sería eso que tú dices?

La estudiante da valores a los puntos (ver **Figura 16**) y se puede observar como Alfonso no es quien determina los procesos que ella debe realizar. Al contrario, permite que ella busque estrategias que lo lleven a resolver el problema de la mejor manera. Alfonso tiene muy claro que el propósito principal del curso es desarrollar el Pensamiento Variacional relacionado con el tratamiento matemático del cambio y la variación, tal como lo mencionan Parada y Fiallo (2014). Alfonso conoce los talleres pues ha participado del curso como auxiliar durante tres semestres y como profesor durante cuatro semestres consecutivos, interactuando con la CoP de profesores de Precálculo caracterizada por Moreno (2015).

[9] En las transcripciones presentaremos apartes que se constituyen e evidencias del proceso y citaremos el nombre del profesor Alfonso con otras voces, las cuales corresponden a los estudiantes participantes.

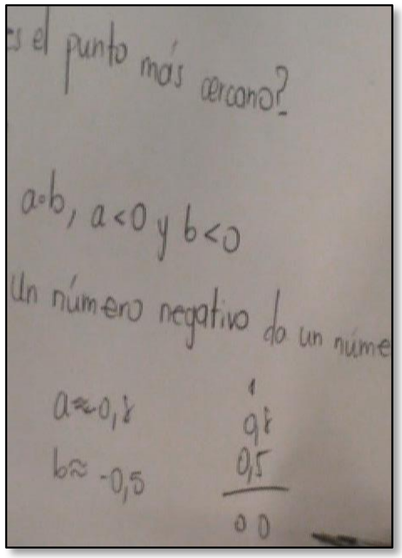


Figura 16. Análisis realizado por la estudiante Erika

Al llegar a la socialización, uno de los estudiantes muestra cómo llegó a que la raíz de un número entre 0 y 1 es mayor al mismo número. Erika muestra varios ejemplos con los cuales justifica su afirmación. Uno de ellos es el siguiente:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ Entonces } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Alfonso valida lo realizado por el estudiante y acepta las justificaciones dadas por los demás al momento de responder a las preguntas, pues tiene en cuenta que en el nivel en que están los estudiantes apenas basan sus demostraciones en ejemplos. Recio (2001) reporta que en una investigación desarrollada en el curso 1994-95 sobre 429 estudiantes de universidad, de primer curso, con alguna asignatura de matemáticas en el currículo, se encuentra que sólo el 32,9 % de dichos estudiantes son capaces de desarrollar, de modo formal, las dos demostraciones extremadamente simples que se les reclaman. Esto les permite encontrar dificultades en los estudiantes universitarios para generar, de forma espontánea, sencillas demostraciones formales.

Alfonso permite que los estudiantes justifiquen sus procesos con las herramientas que conocen hasta el momento. A medida que el curso transcurre, él exige a los estudiantes que sus argumentaciones fueran mejor justificadas. Para Alfonso el uso de definiciones, teoremas, etc. debe estar bien argumentado. Además, reconoce que tener un buen dominio de los contenidos que se necesitan para trabajar en el curso, además con ello puede identificar cuando uno de sus estudiantes no comprende las definiciones que usa y por medio de preguntas intenta ayudar al estudiante a estructurar mejor sus argumentos, comunicarlos de forma clara y comprenderlos de manera correcta.

Al finalizar este taller Alfonso concluye con su grupo lo siguiente:

- Los ejemplos no son suficientes para demostrar que una afirmación se cumple
- Dar valores aproximados es válido para resolver las preguntas presentadas en la figura 6.
- Que la raíz de un x que esté en el intervalo (0,1) siempre será mayor que x
- Al multiplicar dos números entre (0,1) el resultado estará en medio de los dos números
- Cuando se resuelve $\frac{1}{x}$, x no puede tomar el valor de cero

- Cuando x toma valores muy grandes, al infinito, $\frac{1}{x}$ se aproxima a ser 0
- Cuando x toma valores muy cercanos a cero por derecha, $\frac{1}{x}$ tiende a ∞
- Cuando x toma valores muy cercanos a cero por izquierda $\frac{1}{x}$ tiende a -∞

Las palabras *tendencia*, *aproximación* y muy *cercano* son muy usadas por Alfonso y por sus estudiantes. Algunos de ellos hablan de la operación $\frac{1}{x}$ como una función. Aun así, Alfonso aún no habla de funciones con sus estudiantes. Se observa como Alfonso usa lenguaje matemático propio de la CoP (Moreno, 2015) y hace que sus estudiantes se apropien de este lenguaje al momento de socializar las actividades.

Al realizar el taller de interdependencia de variables se retoman las operaciones anteriores $\left(\sqrt{x} \;\; y \;\; \frac{1}{x}\right)$ ya como funciones. Se observa el interés del profesor por ayudar a los estudiantes más que a memorizar contenidos, a comprenderlos sin necesidad de definirlos formalmente.

> A diferencia de un curso tradicional de Precálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y su objetivo principal apunta al repaso de los preconceptos necesarios para el curso de Cálculo Diferencial, o de los conceptos vistos en la secundaria. En este curso se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del Pensamiento Variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del *software*. (Parada y Fiallo, 2014, p. 5)

En este quinto taller, se intenta encontrar la relación de interdependencia entre variables, aún sin definir la función de manera formal, ya que este no es el objetivo del taller. El objetivo es que tengan una noción del concepto de función. Los siguientes episodios son tomados de la quinta sesión del curso. El taller se titula Interdependencia entre variables y la primera parte dirige al estudiante a comprender la relación que existe entre x y y. El estudiante debe hallar en GeoGebra el rastro y el lugar geométrico (ver Figura 17):

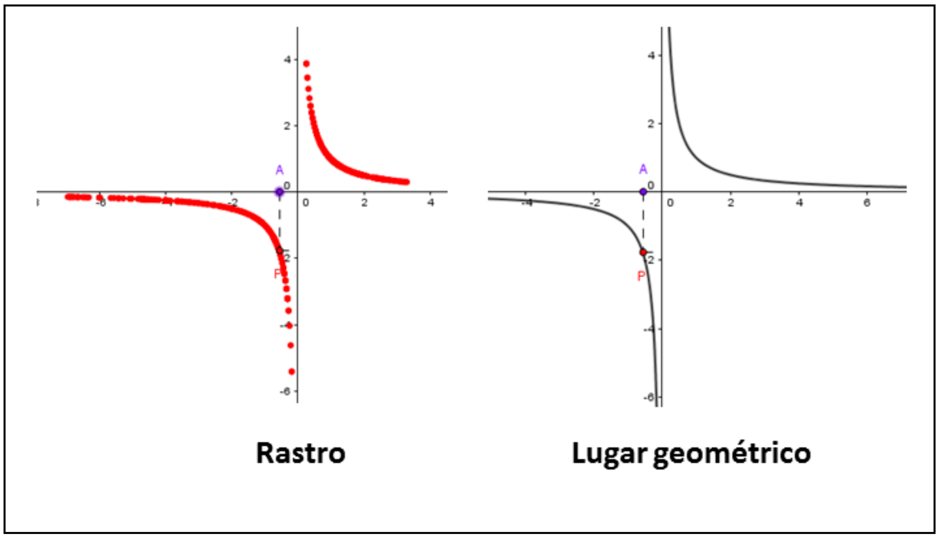


Figura 17. Rastro y lugar geométrico de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

- **Rastro:** señal o huella que deja un objeto al pasar por un lugar.
- **Lugar geométrico:** conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas.

Alfonso dedica parte de la actividad a preguntar a sus estudiantes sobre el rastro y el lugar geométrico. Esta es una conversación entre Alfonso y una estudiante llamada Cindy:

Alfonso: ¿qué diferencia hay entre el rastro y el lugar geométrico?

> **Cindy:** el rastro son los puntos consecutivos en donde se va a ubicar la coordenada… la función y el lugar geométrico es la función en sí, en donde se unen todos los puntos
>
> **Alfonso:** usted me habla de función, pero ¿qué es eso?
>
> **Cindy:** es una relación
>
> **Alfonso:** y si eso es una relación, ¿qué se está relacionando ahí?
>
> **Cindy:** el eje de las ordenadas con el eje de las abscisas, una función es como… no sé cómo decirlo….
>
> **Alfonso:** ¿y usted dice que esa gráfica es una función? (señalando la pantalla en la función $\frac{1}{x}$)

Cindy: sí, es una función.

Esta estudiante tiene nociones respecto al concepto de función, habla de relación entre variables, pero no tiene una definición concreta del concepto. Aunque Alfonso no valida lo dicho por Cindy y le pide que siga trabajando más adelante en la socialización, habla nuevamente de una relación entre x y y, en donde intenta aclarar que es la abscisa y la ordenada:

> **Alfonso:** ¿qué relación hay entre la ordenada y la abscisa? ¿Qué es la ordenada?
>
> **Camilo:** la ordenada es la distancia que hay, en un plano, entre un punto y un eje horizontal, medida en la dirección de un eje vertical.
>
> **Alfonso:** ¿y usted cómo sabe eso?
>
> **Camilo:** porque lo encontré en internet

El estudiante reconoce que investiga en internet para intentar dar una respuesta a la pregunta planteada en el taller. El profesor Alfonso permite que sus estudiantes utilicen internet para buscar herramientas que les ayuden a resolver los problemas. A partir de esto, él les resalta la importancia de comprender todas las definiciones que encuentran y procura preguntarles: ¿por qué? ¿Qué significa lo que usted dice?, etc. Alfonso no duda en preguntarle a Camilo sobre su búsqueda en internet:

> **Alfonso:** ¿qué significa eso que usted está diciendo?
>
> **Camilo:** básicamente es el eje y, porque es la distancia que hay entre x y y (mueve los brazos para indicar los ejes del plano cartesiano)
>
> **Alfonso:** ¿y ustedes le entienden a su compañero? ¿Qué es la abscisa?
>
> **Esteban:** el eje x y la ordenada el eje y
>
> **Camilo:** la ordenada no es el eje y, es un punto en y, es el rastro
>
> **Alfonso:** bueno, en el plano cartesiano los puntos tienen la coordenada en x y la coordenada en y, pues esos dos tienen un nombre en particular, la coordenada en y se llama ordenada y la coordenada en x se llama abcisa, no es el eje y ni el eje x, es el valor que tiene en ese momento en x y y.

En la conversación anterior se ve como Alfonso permite que los estudiantes sean quienes aclaren sus propias dudas y al final hace una pequeña intervención para puntualizar en las respuestas dadas por los estudiantes. La reflexión en la acción realizada por Alfonso se enfoca a un cuestionamiento constante a sus estudiantes para permitir que sean ellos quienes construyan sus propias respuestas. Aunque Alfonso no define la función en este momento, lleva a los estudiantes a tener nociones para que en su curso de Cálculo comprendan mejor el concepto. Más adelante en la socialización uno de los estudiantes expone que la función es una relación entre x y y en el que cuando x toma un valor, y toma un valor inverso:

> **Alfonso:** ¿qué relación existe entre la ordenada y la abscisa?
>
> **Laura:** mientras x se va acercando en cero, y va llegando a infinito, a medida que x disminuye, y aumenta
>
> **Alfonso:** ¿por qué sucede esto?... ¿recuerda lo que hemos hecho con las razones? (refiriéndose a un taller anterior de razones trigonométricas)
>
> **Laura:** sí debe haber una igualdad o algo
>
> **Alfonso:** ¿Juan Diego que opina?
>
> **Juan Diego:** no, pues yo no sé, porque yo veo que cuando x es 0.5, y es 2, y cuando y es 0.5, x es 2
>
> **Laura:** o sea intercambian la coordenada

> **Alfonso:** miren que como hacíamos ayer, plateábamos el procedimiento.

Alfonso no se apresura a decirles que la función es $\frac{1}{x}$, él permite que sean los estudiantes quienes descubran las respuestas en las socializaciones. Al final, en la socialización, los estudiantes descubren a qué función se refieren y vuelven a hablar sobre la tendencia de la función cuando x toma valores muy grandes y cuando se aproxima a cero por derecha y por izquierda. Es así como logran observar que las tendencias son diferentes.

En la última socialización Alfonso pregunta a los estudiantes acerca de la relación de interdependencia:

> **Alfonso:** ¿Cómo se llama a esa relación de interdependencia?
>
> **Zareth:** Función
>
> **Alfonso:** una función es una relación entre variables, es una tabla de valores, es una interdependencia entre variables, es una relación entre la ordenada y la abscisa.

Durante su formación inicial y su participación en la CoP, Alfonso está en constante negociación de la definición del concepto de función. Se observa que siempre hay claridad en cuanto a la relación entre variables. Aunque aquí la palabra ley no sobresale como en su rol como tutor auxiliar, tiene claridad en esa interdependencia que hay en las variables que representan un objeto específico. Se observa que Alfonso usa palabras como ordenada, abscisa e interdependencia. Las dos primeras ya se habían socializado para comprender a qué se referían y ahora trata de negociar con sus estudiantes el significado de la interdependencia:

> **Alfonso:** ¿por qué interdependencia?
>
> **Zareth:** porque depende una de la otra
>
> **Alfonso:** porque x es una variable y cambia, y es una variable y cambia.

Se resalta nuevamente que el *cambio* y la *variación* son propios del lenguaje matemático usado por Alfonso y sus estudiantes. Es así como la participación en la CoP hace que Alfonso se apropie de discurso usado. Al finalizar el taller, luego de ver las representaciones de la función y definirla, él les pregunta a sus estudiantes al respecto para observar si hay claridad en la actividad realizada por parte de los estudiantes:

> **Alfonso:** ¿qué relación hay entre la gráfica, la tabla y la expresión matemática?
> **Omar:** Todo representa una función

A partir de las observaciones de la actividad se puede considerar que Alfonso logra cumplir con el objetivo de dejar en sus estudiantes una noción del concepto de función. Él logra definir la función usando los elementos trabajados durante la sesión y procura que sus estudiantes tengan claridad en cada concepto nuevo para ellos o que no había quedado claro durante su paso por el colegio. Aunque el curso trabaja nociones y no conceptos, Alfonso aprovecha los conocimientos de los estudiantes para lograr resultados aún más avanzados. Se puede ver como el tratamiento de la función desde la gráfica a la representación algebraica le permite a este profesor afianzar mejor los conocimientos de los estudiantes.

5.3.2. Pensamiento Didáctico

El primer día de clase, los estudiantes y el profesor tienen su primer acercamiento, Alfonso expone la metodología del curso. Les explica a los estudiantes que ellos están resolviendo problemas durante todas las sesiones y resalta la importancia de justificar las respuestas.

Enfatiza a los estudiantes que es importante escribir los procesos y argumentar con herramientas matemáticas.

> **Alfonso:** Este curso tiene una metodología diferente, no vamos a ser nosotros (refiriéndose a su auxiliar y a él) quienes demos la clase, sino por el contrario, van a ser ustedes con su participación y las soluciones que den a los problemas que les presentemos quienes van a exponer y la idea de nosotros va a ser orientar la discusión para que todos los días se lleven algo y aprendan algo nuevo.

Los siguientes minutos se dedican a concientizar a los estudiantes a ser responsables, comportándose con responsabilidad ante el nuevo reto que aceptan como estudiantes de la universidad, y además les da más información sobre el contenido del curso:

> Alfonso: son 15 sesiones, son talleres que apuntan a las temáticas del curso de Cálculo, no estamos interesados en enseñarles contenidos, sino aquí hay que hablar de todo y comenzar toda esa matemática que ustedes han acumulado durante todos los años.

Aquí él les habla de cómo ellos deben ser conscientes de las dificultades que tienen con trigonometría, operaciones básicas que deberían estar claras hasta el momento.

En esta parte se ve como la planeación de clase y el uso de una metodología para realizar las actividades es un elemento importante. Si recapitulamos al rol de tutor auxiliar, cuando Alfonso realiza sus prácticas tempranas tiene dificultades para realizar una planeación de clase. En este rol de profesor de Precálculo, realizando prácticas profesionales, el profesor Alfonso es ordenado y consciente de su labor como profesor, respeta la metodología del curso y la tiene en cuenta durante todas sus sesiones.

> **Alfonso:** es importante que escriban, justifiquen, demuestren…

Alfonso tiene claridad en cuanto al proceso en el cual se va a centrar: la demostración, uno de los procesos planteados por el MEN (2006). Se continuará analizando la actividad de interdependencia entre variables, observando el pensamiento reflexivo del profesor alrededor del concepto de función. Al momento de hablar de la función $1/x$, uno de los estudiantes dice que x y y son inversamente proporcionales:

> **Sebastián:** Son inversamente proporcionales: cuando una aumenta la otra disminuye.

Godino y Batanero (2002) definen la proporcionalidad inversa de la siguiente manera: se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales (p. 13). Godino y Batanero afirman que el desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química. Por supuesto, Alfonso es consciente de estas dificultades presentadas por sus estudiantes, de modo que continúa con la discusión y les pregunta a los demás estudiantes si están de acuerdo con lo que Omar dice:

> **Cindy**: sí es igual, sólo que dije que cuando una tiende al infinito la otra tiende a cero y eso es lo que hace que sean inversamente proporcionales
>
> **Omar:** pues inversamente proporcionales no podríamos decirlo
>
> **Alfonso:** ¿por qué no pueden ser proporcionales?
>
> **Omar:** Serían proporcionales mientras las dos aumentan de la misma forma… no sé…

Diego: No, porque las dos no pueden ser iguales, cuando x, es una división no pueden ser iguales por eso son inversamente proporcionales, no aumentan las dos.

Alfonso: ustedes todos los días hablan de proporcionalidad, que son directa o inversamente proporcionales, pero yo quiero saber a qué se refieren con eso.

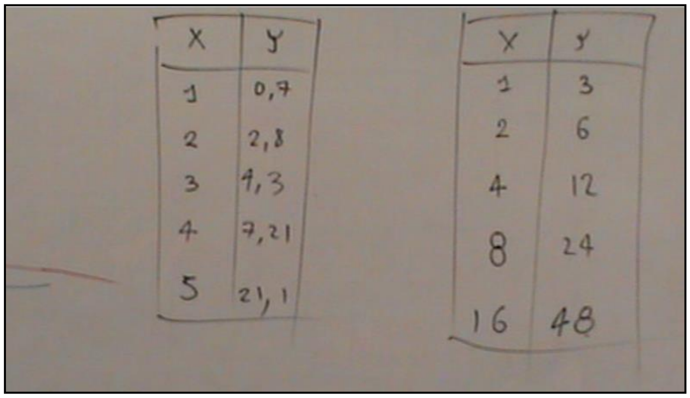


Figura 18. Ejemplo del profesor Alfonso para explicar la proporcionalidad

Alfonso: Acá por ejemplo (refiriéndose a lo que escribe en el tablero, ver Figura 18 y se muestra en la Figura 17) ¿Qué relación hay?

Juan Diego: las dos aumentan

Alfonso: ¿Cómo son estas relaciones?

Jhon Fredy: la primera sólo es directa, la segunda es directamente proporcional

Alfonso: ustedes hablan que la ordenada y la abscisa son inversamente proporcionales, ustedes dicen que es inversa, eso es cierto, pero ¿creen que es proporcional?

Juan Diego: yo diría que no es proporcional porque es una división y la x está en el denominador

Para Alfonso el concepto de proporcionalidad está errado en sus estudiantes. Las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres (Ramírez y Block, 2009). Alfonso intenta aclarar este concepto porque ha escuchado en varias ocasiones hablar de proporcionalidad sin saber de qué se trata. La claridad de proporcionalidad por parte de

Alfonso le permite encontrar una representación, y esto permite comprender a sus estudiantes que están equivocados en el uso de la palabra *proporcional*. A su vez, él evidencia que Juan Diego no comprende lo que dice, pues su definición de ‘inversamente proporcional’ está incompleta. Para Mochón (2012), el papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. En cuanto al Pensamiento Didáctico, la fortaleza del Pensamiento Matemático le permite a Alfonso mejorar en su discurso, en las representaciones que realiza y en su interacción con sus estudiantes.

Parada y Fiallo (2014) afirman que la dificultad respecto al concepto de función obedece a que, generalmente, se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en su comprensión. En las clases de Alfonso se ve como él no se limita a ver la función únicamente desde su representación algebraica. Él tiene en cuenta las diferentes representaciones partiendo desde la gráfica, luego la tabular, y así hasta llegar a la expresión algebraica (ver Figura 19):

Figura 19. Representaciones del concepto Función

De esta manera, el profesor estudia el concepto de función con sus estudiantes, transitando por las diferentes representaciones, mostrando claridad en sus saberes matemáticos y evidenciando que su Pensamiento Didáctico se está potenciando cada vez más. Lo anterior es una evidencia la negociación de significados por parte de Alfonso como profesor de Precálculo en cuanto al Pensamiento Didáctico, pues su interacción con el grupo es dinámica. Aquí, Alfonso manifiesta su capacidad para permitir que sus estudiantes participen activamente en el curso. No se limita a explicar y validar las respuestas de sus estudiantes, sino que permite que sean ellos mismos quienes evalúen sus argumentos y validen con herramientas matemáticas.

El docente debe conocer y usar el contenido matemático a enseñar de manera suficientemente amplia, de modo que le permita realizar su función docente con seguridad y adaptarse, de resultar necesario, a nuevos cambios curriculares (Larios, Font, Spindola, Sosa, Gimenez, 2012) La revisión de la tarea es un aspecto importante para Alfonso como profesor. En la sexta sesión, él inicia revisando la tarea pasando a sus estudiantes al tablero para que ellos muestren de qué manera la han realizado. La tarea consistía en resolver la actividad 5 del taller de interdependencia que constaba de lo siguiente (ver Figura 20):

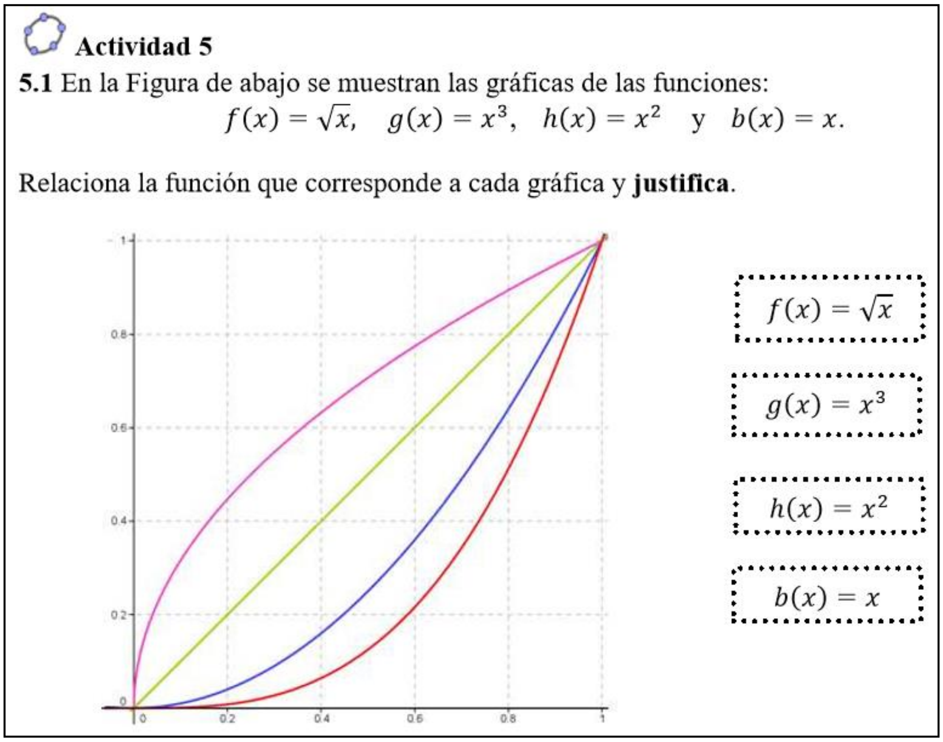


Figura 20. Actividad 5 del taller de interdependencia entre variables

La intención de esta última parte del taller es que los estudiantes refuercen los aprendizajes de la actividad realizada, además de que retomen conocimientos adquiridos en actividades anteriores que pueden ser usados para justificar las respuestas dadas en este numeral 5.

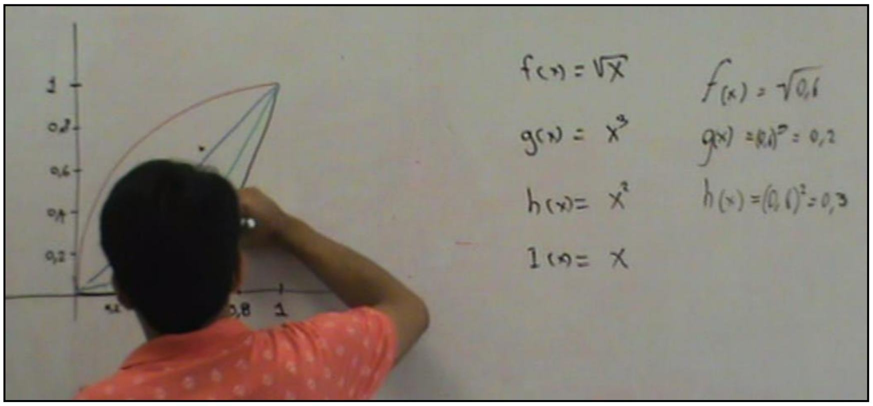


Figura 21. Revisión de la tarea en la sexta sesión del curso

El estudiante pasa al tablero a exponer su tarea (ver Figura 21) y muestra como ha realizado un procedimiento de darle valores a x para ubicarlos en las gráficas ya existentes. Al dar valores específicos, puede relacionar la expresión matemática con la gráfica correspondiente a cada función.

Otra estudiante usa algunas de las propiedades que ya sabe y otras que ha aprendido en el taller no.1 de números y operaciones. Cindy pasa al tablero y explica lo siguiente:

> **Cindy:** Yo ya sabía que esta era x (señalando la gráfica de $f(x) = x$ porque a cada valor le va a corresponder el mismo valor, si está elevada al cuadrado significa que va a aumentar lentamente (señalando $f(x) = x^2$) y x^3 , yo sabía que iba a aumentar más lentamente, y ya como sobraba $\sqrt{x}$ entonces escogí la que quedaba.

Alfonso socializa con los demás estudiantes y les pregunta si están de acuerdo con lo que acaba de decir Cindy, a lo que Zareth responde lo siguiente:

> **Zareth:** sí estoy de acuerdo porque cuando multiplico un número que está en el intervalo (0,1) por sí mismo, el resultado será menor y si lo multiplico por sí mismo tres veces, es decir lo elevo al cubo, el resultado será aún más pequeño.

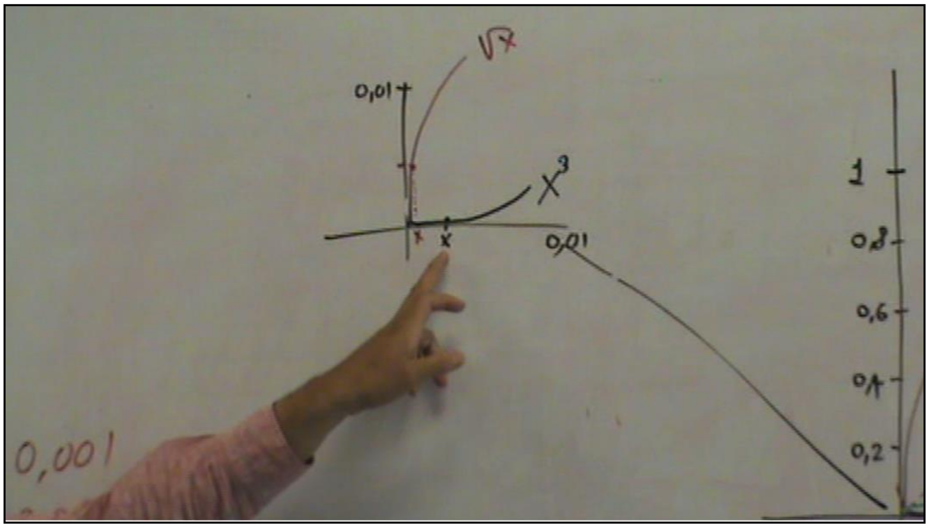


Figura 22. Zoom en el intervalo $(\mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{01})$ en el plano cartesinano

El profesor intenta mostrar (ver Figura 22) en el tablero un *zoom* similar al que se puede realizar en GeoGebra, para mostrarles a sus estudiantes como $f(x) = x^3$ crece mucho más despacio que $g(x) = \sqrt{x}$. El profesor pone en juego la evaluación, pues en este momento determina qué conocimientos han adquirido sus estudiantes en sesiones anteriores. Además, las representaciones que usa permiten ver que se ha apropiado de un instrumento que poco usa en el pasado, en su rol como tutor-practicante. El trabajo continuo con GeoGebra le permite aclarar ideas y poder comunicarlas a sus estudiantes.

En la siguiente sesión, luego de hablar del concepto de función, en el programa del curso se considera el tema de transformación de funciones. Es aquí donde los estudiantes se empiezan a familiarizar con algunas trasformaciones de funciones e identifican de qué manera suceden. Algo que se resalta del curso y del papel del profesor es la insistencia en el razonamiento por parte de los estudiantes. Preguntar ¿por qué? lleva a los estudiantes a pensar un poco más y comenzar a organizar ideas que les ayuden a desarrollar el proceso de la argumentación. Los estudiantes trabajan en esta sesión observando las transformaciones, identificándolas y explicando por qué el resultado es el observado.

En la parte inicial de esta nueva sesión, Alfonso, como profesor, permite que sus estudiantes trabajen de forma libre, es decir, sin ninguna indicación. No permite el uso del computador, o sea, ni GeoGebra, ni internet. Los estudiantes deben graficar la función: $f(x) = \frac{1}{2}(x\ + 3)^2\ - 4$ y explicar su procedimiento (ver Figura 23):

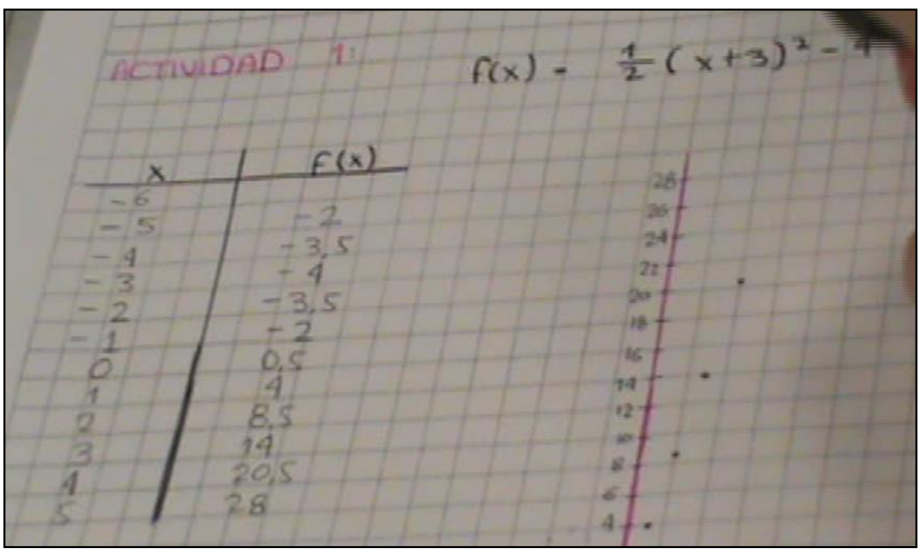


Figura 23. Procedimiento de estudiante para graficar una función

La mayoría de sus estudiantes usan la tabla de valores para graficar la función. Alfonso permite que sus estudiantes trabajen libremente y pasa por sus puestos realizando preguntas.

Al momento de socializar la gráfica resultante de la función dada la expresión matemática, los estudiantes determinan que la función es una parábola. Algunos de ellos hablan de las características de una parábola e inclusive de como se muestra en la figura 19. Una estudiante muestra la expresión general de una parábola intentando relacionarla con la expresión que tenían inicialmente (ver Figura 24).

En este momento Alfonso hace preguntas alrededor de la parábola. Les pregunta a los estudiantes acerca del vértice, el foco y puntos de corte. De esta manera, hace que sus estudiantes recuerden el tema y lo investiguen si no tienen claridad en cuanto a los elementos mencionados. Estos observan que la parábola es simétrica con respecto a un eje y que este eje debe pasar por el vértice.

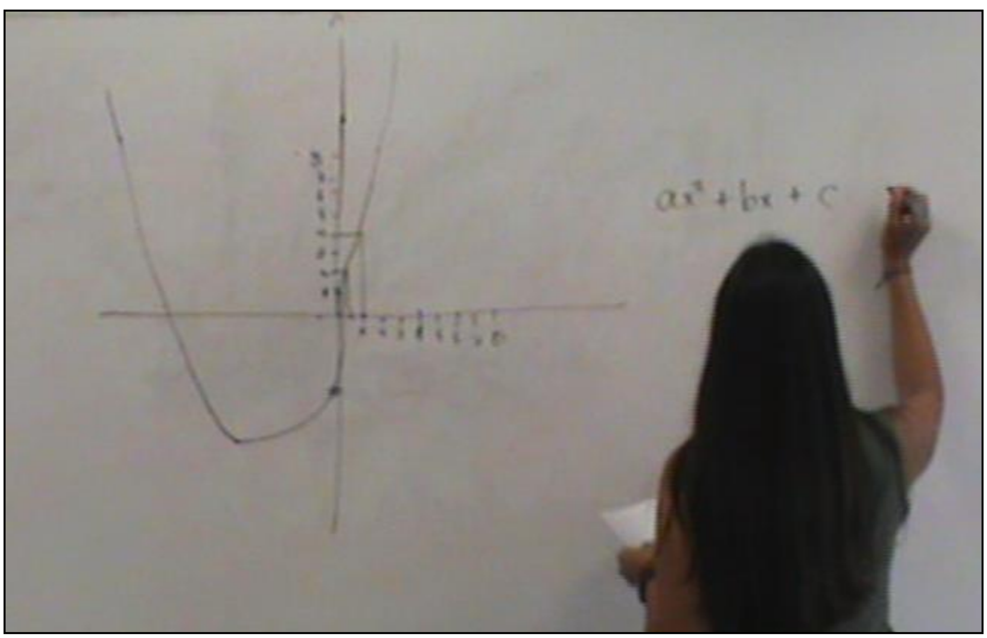


Figura 24. Estudiante explicando que la gráfica es una parábola

Resaltamos aquí la labor del auxiliar docente, quien tiene un papel igual de importante al profesor al momento de pasar por los puestos observando el trabajo de los estudiantes. Alfonso procura conversar de manera constante con su auxiliar, le da indicaciones de no dar información de más a los estudiantes, sino que sean ellos mismos quienes traten de construir y negociar sus propios significados. Antes que su auxiliar pase revisando el trabajo de los estudiantes, Alfonso procura explicarle el objetivo en cada parte de la clase, procura darle indicaciones de qué tipo de preguntas debe hacerles a los estudiantes y qué tipo de información no debe darles.

Alfonso instruye a su auxiliar, con el propósito de que ellos se proyecten a ser futuros profesores del curso de Precálculo y que tal vez realicen el mismo recorrido que él. De esta manera, el apoyo en la CoP muestra un interés de los profesores en ejercicio por contribuir a la formación inicial de los tutores que realizan prácticas tempranas, en este caso como auxiliares docentes.

Las prácticas tempranas realizadas por Alfonso, así como su participación activa en la CoP de profesores de Precálculo durante su formación inicial, ha permitido que sus prácticas profesionales se realicen con fluidez, trabajando en el desarrollo conjunto del pensamiento reflexivo. La forma en que Alfonso evalúa, desarrolla la clase, la planea, discute con otros profesores al respecto, identifica fallas en los estudiantes y predice dificultades que pueden presentar al momento de la realización de las actividades son significados negociados durante toda su formación. La metodología que usa y la forma en que realiza sus preguntas son negociados dentro de la comunidad de práctica a la que pertenece.

5.3.3. Pensamiento Orquestal

Tradicionalmente, en la enseñanza del Cálculo Diferencial se ha puesto énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica. Debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos, no se daba oportunidad para que el estudiante reflexione sobre estos procesos (Gamboa, 2007). La introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, esta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

Para Naguel y Montenegro (2012), el desafío de hacer matemática en el aula implica para los docentes no sólo superar algunas tradiciones que devienen de sus propios recorridos formativos, sino también el replantearnos el rol de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje: puede considerarse como una herramienta útil que proporciona precisión, rapidez y motivación o permite elaborar estrategias que admitan un equilibrio entre el valor epistémico y el pragmático que ésta posee.

GeoGebra en este momento se convierte en una herramienta fundamental para la realización del curso, ya que el estudiante está en constante interacción con el programa.

GeoGebra permite ver la variación de la coordenada x y la dependencia que existe de la coordenada y. Alfonso ha integrado este *software* a sus actividades no sólo porque la metodología lo dice, sino también porque ve la necesidad de que sus estudiantes aclaren ideas y vean GeoGebra como una herramienta útil de aprendizaje, como se puede observar en la siguiente conversación que se realiza observando el archivo de GeoGebra con el cual se desarrolla la actividad (ver Figura 25):

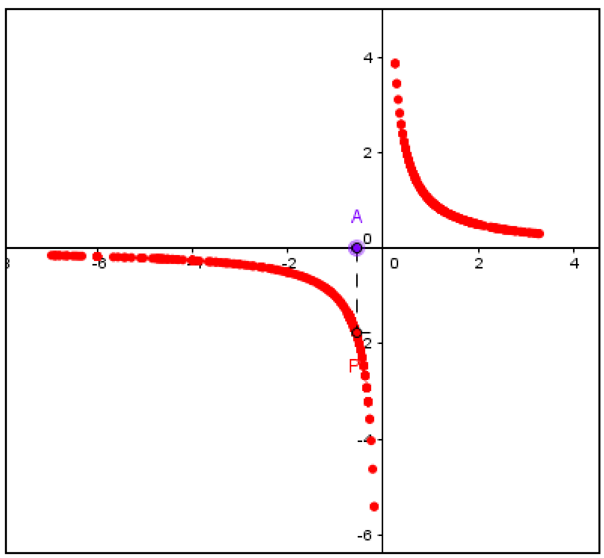


Figura 25. Gráfica de la función

Alfonso: ¿qué representa el punto P?

Zareth: la coordenada en y

Erika: Estoy de acuerdo porque a medida que va cambiando A, va tomando un valor en y, es decir representa la coordenada y

Leidy: yo no estoy de acuerdo, porque no sólo la coordenada y, es la coordenada x y la coordenada y, varía tanto en el punto A como en el punto P.

Erika: o sea ¿no lo separamos de A? ¿Lo se ve como uno solo?

> **Alfonso:** Es que si solo varía y se mueve solo en el eje y y aquí se observa que se mueven ambas coordenadas

La interacción con el *software* permite al estudiante ver la dependencia de las variables, así como una unidad a la que se llama función. Se resalta la constante interacción del curso con el programa. Alfonso se encarga de volver GeoGebra un instrumento clave para el curso, pues en la socialización realiza una orquestación entre la exposición en el tablero, la discusión de los estudiantes, su intervención y la visualización e interacción con GeoGebra, lo cual permite que el estudiante observe diferentes representaciones del objeto matemático. Así que se hace necesario que el profesor utilice la tecnología digital en los ámbitos personal y profesional como una herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente (Larios, Font, Spindola, Sosa, Gimenez, 2012).

En el Pensamiento Orquestal se resalta el trabajo con diferentes instrumentos y la orquestación entre ellos, Alfonso comprende que es necesario trabajar con todos los instrumentos que tiene a la mano, en el caso del curso el trabajo realizado por el estudiante a lápiz y papel es importante para que los estudiantes plasmen sus justificaciones sobre las soluciones de los problemas trabajados.

En una siguiente actividad, los estudiantes realizan sus procedimientos a lápiz y papel, a esto se le llama una fase de orientación libre en la cual los estudiantes ponen en juego sus conocimientos hasta el momento sin interactuar con el profesor. Luego se pide a los estudiantes graficar la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$. Como se menciona en el Pensamiento

Didáctico, los estudiantes recurren a usar la tabla de valores para graficar la función, y de ellos sólo Cindy recurre a realizar transformaciones:

> **Cindy:** Entonces voy a copiar acá (ver figura 21), esta es la fórmula, así como me la dieron, yo me acordé de 10° y de las traslaciones, a uno en la vida siempre le enseñaron esta función, siempre le recalcaron $y = x^2$.
>
> **Alfonso:** o sea que es un arco, así como nos dijo Sneider
>
> **Cindy:** sí, es una parábola, yo no sabía que se hacía con ese $+3$, en las traslaciones hay uno que dice que cuando se suma se mueve hacia la izquierda y hay otro que cuando se le resta baja y cuando se le suma sube.

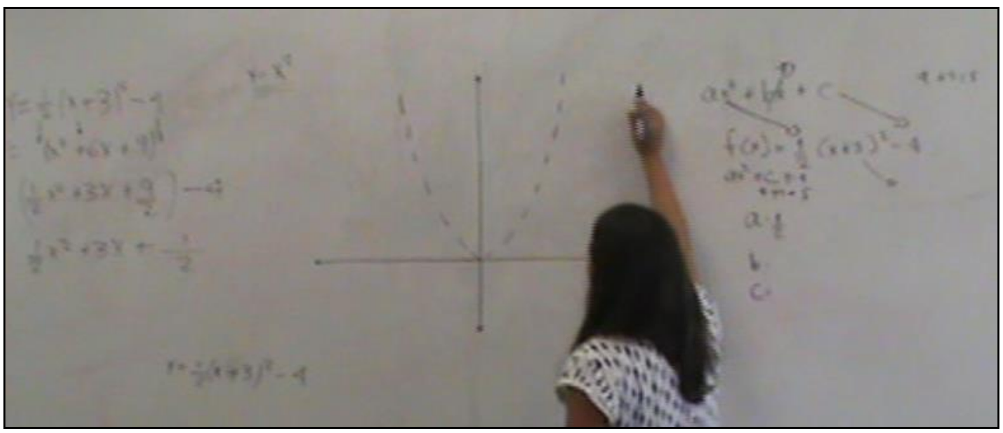


Figura 26. Primer punto del taller de transformaciones

Cindy tiene ciertas nociones acerca de las transformaciones, pero aún no tiene claridad de por qué suceden de esa manera y eso le hace dudar cuando grafica la función (ver Figura 26). Ella recuerda que le enseñaron que la función inicial era $y = x^2$ y a partir de esta construye las siguientes trasformaciones. Como se ve a continuación, el profesor permite que su estudiante explique primero lo que ha hecho a lápiz y papel. Para él, el trabajo con el tablero es muy importante pues ahí percibe las dificultades y las habilidades de sus estudiantes. Las intervenciones de Alfonso se limitan a preguntas. En este momento él no realiza ninguna validación pues permite que ellos sean quienes validen sus afirmaciones al momento de explorar GeoGebra.

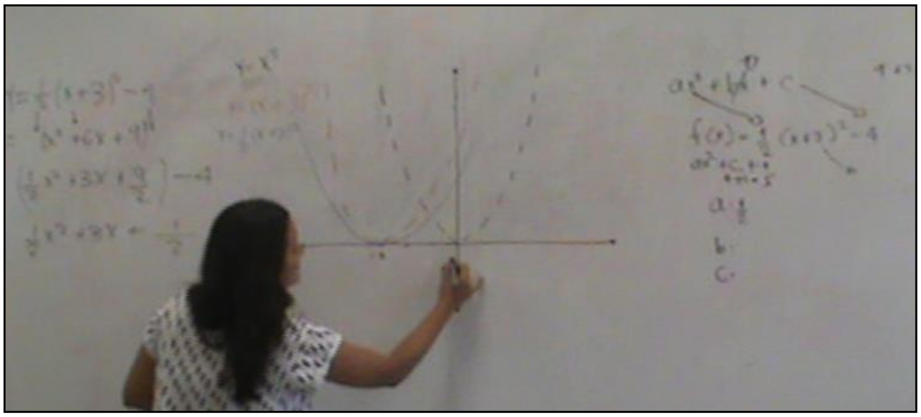


Figura 27. Solución del primer punto del taller de transformaciones

Osnaider: ¿Esa trasformación que usted dice es en x o en y?

Cindy: Sí, cuando se le suma o se le resta acá (refiriéndose al -4) va hacia arriba o hacia abajo con respecto al signo (ver Figura 27**)**, cuando se le suma o se le resta acá (refiriéndose al +3) va en sentido opuesto y él me dio un truquito (refiriéndose al auxiliar), yo no me acordaba para dónde se corría, él me dijo: dele valores a x, entonces empecé a dar valores a x y me di cuenta que se corría a la izquierda, luego si se multiplica por $\frac{1}{2}$. Como es menor que 1 y mayor que cero se alargaba y luego bajé 4 unidades. ¿Dónde era que se cortaba?

Osnaider: Cuando x vale 0, $y = 0{,}5$

Cindy: y listo la función queda así (ver Figura 28):

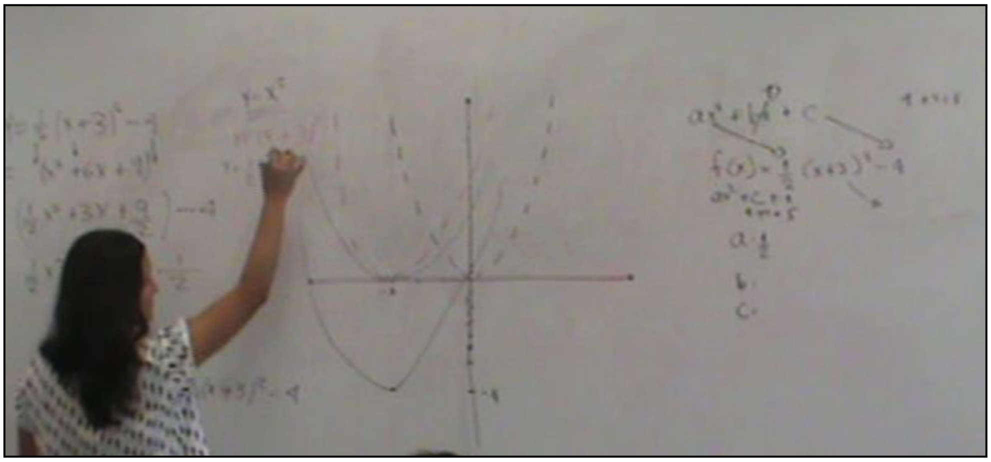


Figura 28. Explicación de la transformación $\boldsymbol{f(x)+k}$

Con ayuda de sus compañeros, Cindy realiza la gráfica de la función. Se observa que nuevamente la intervención del profesor Alfonso es mínima. Él permite que sean los mismos estudiantes quienes discutan acerca de sus procedimientos, y de esta manera identifica procesos de comunicación, ejercitación y elaboración de procedimientos y argumentación.

Al terminar Cindy con su explicación, Alfonso pregunta a sus estudiantes si han entendido los procesos realizados en el tablero, y Osnaider responde que tiene ahora más claridad con lo realizado por su compañera. Alfonso sólo pregunta sobre lo realizado por Cindy y aún no les pregunta el porqué de esas trasformaciones. Ahora permite que sean los estudiantes quienes interactúen con GeoGebra para validar lo socializado.

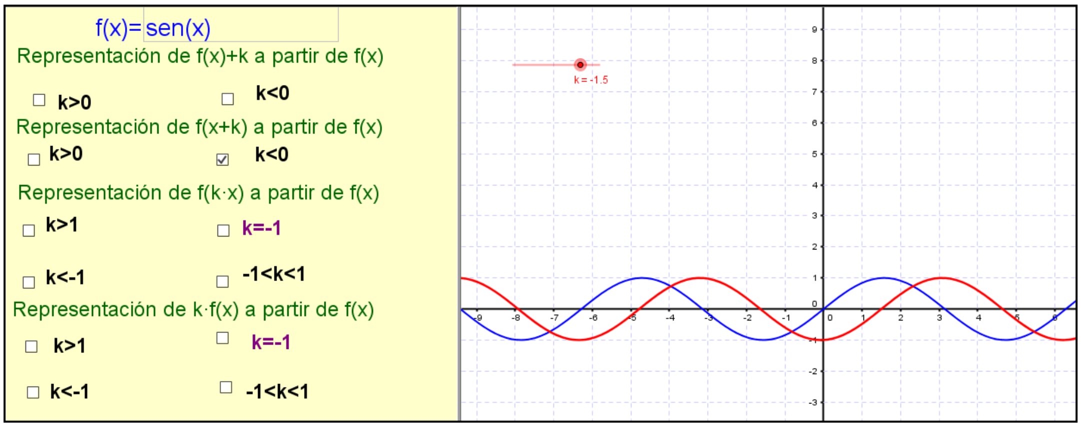


Figura 29**.** Transformaciones de funciones en GeoGebra

En la Figura 29 se muestra el archivo en el cual trabajan los estudiantes para analizar las transformaciones observando el comportamiento inicial de la función $sen(x)$, y luego prueban con otras funciones. Alfonso permite que sus estudiantes observen diferentes funciones y escriban lo que ellos creen que ocurre en cada trasformación, así como que comparen con lo realizado por Cindy e identifiquen con respecto a quién (sea x o y) se realizan las trasformaciones observadas en el archivo.

Alfonso: ¿se dieron cuenta que lo que hicieron en GeoGebra está relacionado con lo que decía Cindy? … bueno, Leidy, responda la primera pregunta: ¿qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador?

Leidy: la gráfica incrementa en y

Alfonso: ¿Eso quiere decir que incrementa en y?

Leidy: sí, que sube.

Alfonso: ¿la gráfica es diferente a la función?

Leidy: no, porque yo grafico la función

Alfonso: ¿por qué sube?

Omar: sube porque tendríamos un valor k que afecta el valor que toma la función con respecto al eje y. Este valor k está afectando directamente a y, aumentaría el valor de y.

Por medio de preguntas Alfonso quiere identificar a qué se refiere Leidy con 'incrementar'. Se ve que para ella 'incremento con desplazamiento' se refiere a lo mismo, además que Alfonso, por medio de preguntas, quiere aclarar esta situación. El uso del *software* GeoGebra para la transformación de funciones permite tanto para los estudiantes como para Alfonso tener elementos para argumentar, pues la función en movimiento les permite identificar más elementos que permiten explicar por qué suceden las transformaciones de esa manera.

Alfonso realiza correcciones a los estudiantes a medida que van socializando en el tablero, como por ejemplo la notación que usan, cuando se refiere a $y = senx$ y luego a $y = senx + k$. Para él, comunicar los resultados con orden y claridad es muy importante y le sugiere al estudiante que llame $y = senx$ y $y_1 = senx + k$. Alfonso socializa esta transformación y aclara a los estudiantes que cuando se suma k, sube la función, y cuando se resta, baja la función. Él les pide conjeturar:

Johan: cada vez que se le suma o resta a y va a variar

Alfonso: si sumo o resto, sube o baja porque se está afectando es y. Ahora miremos $f(x + k)$. ¿qué pasa con la función cuando le sumo k de esta manera?

Cindy: si es positivo se dirige hacia la izquierda y si es negativo a la derecha.

Alfonso: ¿por qué?

Laura: aquí la y mantiene un valor constante y x es variable pero no sé cómo explicarlo

Alfonso: usted está diciendo que aquí varía "y" y "x" es constante (señalando $f(x) + k$) en cambio aquí (señalando $f(x + k)$) x varìa y "y" permanece constante. ¿Por qué pasa esto?

> **Laura:** es que no sé cómo explicar, yo me acuerdo que uno hacía $x+5=y$, cuando $y=0$, entonces $x=-5$. Queda con signo contrario, es por eso que se mueve hacia la izquierda k unidades.

Otra estudiante quiere explicar a sus compañeros y le pide al profesor que habilite los computadores:

> **Cindy:** Yo empecé a darle el valor contrario para que en $y=0$ fuera $x=-3$ pero no logro explicarlo.

Alfonso le sugiere que intente escribir en el tablero. Ella sigue con su idea inicial y comienza a dar valores a x para comprobar que se mueve hacia la izquierda. Los estudiantes comprenden con respecto a quién se realiza la transformación, pero no logran comprender por qué se mueve hacia la izquierda cuando se suma.

Alfonso corrige al estudiante que pasa al tablero y afirma que al evaluar $f(0+2)$ es igual a $y=2$. Entonces Alfonso le dice que primero debe conocer la función para poder hacer su afirmación. Alfonso propone el ejemplo de $f(x)=x^2$ entonces $f(0+2)=2^2=4$ en el caso de $f(x)=senx$, $f(x+k)=sen(x+k)\ k>0$ implica que se mueva hacia la izquierda.

> **Alfonso:** Cuando yo le sumo a mi función un valor k, ¿Cuál es el nuevo valor que toma y?

En mi nueva función el punto nuevo va a tomar k unidades hacia la izquierda, lo que tenía inicialmente k unidades a la derecha, es decir, va a tomar el valor de y, k unidades adelante, porque para cada valor de x; $x+k$ va a tomar el valor del que está k puestos adelante. Lo va a traer para acá (señalando la Figura 30.) y será el nuevo valor de y.

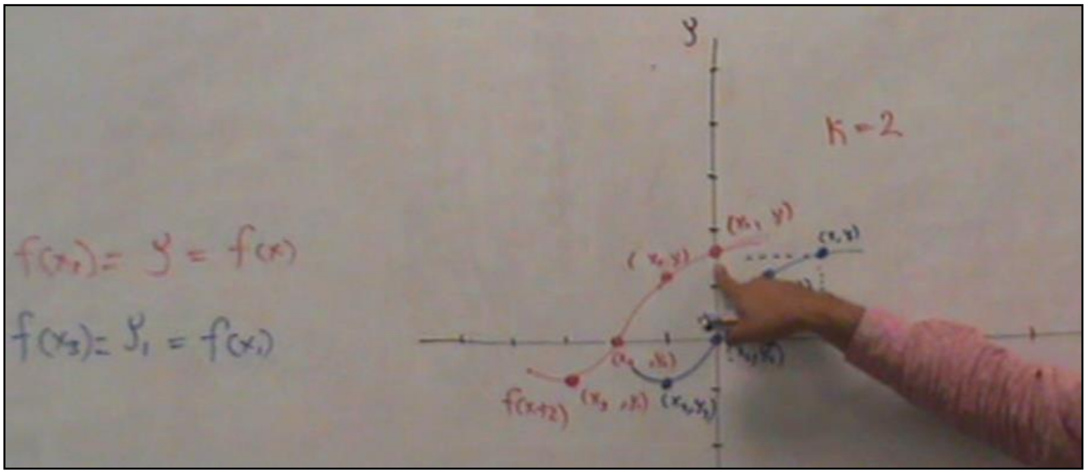


Figura 30. Gráfica realizada por Alfonso para explicar una transformación

Alfonso primero explica en el tablero (ver Figura 30), realizando el mismo proceso que pide a sus estudiantes (primero el trabajo a lápiz y papel). Las actividades de “lápiz y papel” se han enriquecido con los ambientes computacionales. A través de la modelación de fenómenos, por ejemplo, en el estudio de procesos de variación (Camacho & Santos, 2004). Luego pasa a realizar la explicación en el programa, cuando socializa las transformaciones con el archivo de la Figura 31 en la cual se unifican los nombres de las transformaciones antes estudiadas. Los estudiantes observan las transformaciones y analizan las que son horizontales (respecto al eje x).

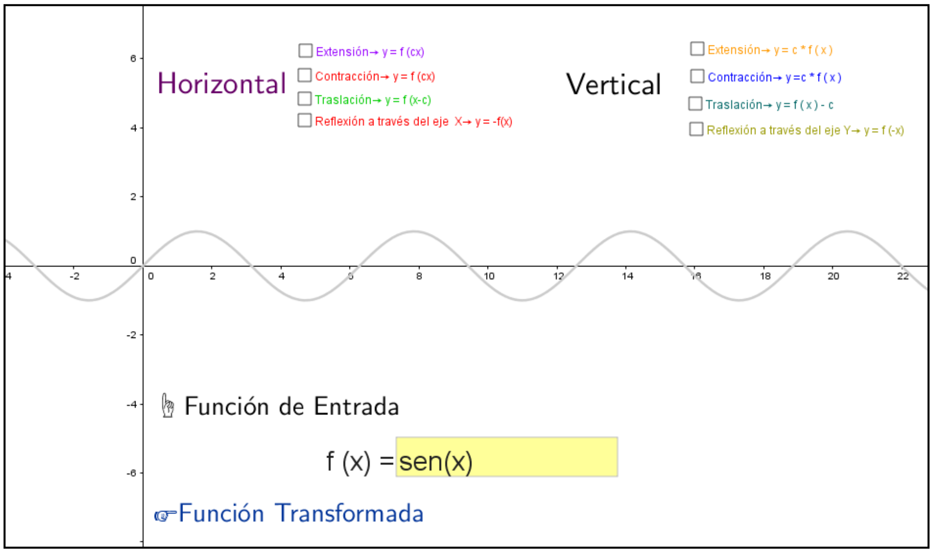


Figura 31. Gráfica de transformaciones en GeoGebra

Alfonso cierra la socialización revisando esta actividad en la cual se observan las transformaciones iniciales, pero ahora definidas con un nombre. Esta es una de las actividades más retadoras para Alfonso como profesor, pues los estudiantes no encuentran una manera de justificar algunas transformaciones y Alfonso tiene el reto didáctico de buscar estrategias para representar las transformaciones de diversas maneras.

Se observa, que Alfonso socializa las actividades durante todas las sesiones y hace de GeoGebra un instrumento importante dentro la actividad matemática que se desarrolla en el aula. El uso de este instrumento por parte de Alfonso, propicia un cambio en la metodología de trabajo con los estudiantes y, por ende, en sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la figura se muestra el análisis de regresión realizado para el problema de hallar una función que se ajuste a los datos dados de consumo de gasolina por kilómetros recorridos de un carro. Para esta sesión, Alfonso permite que los estudiantes trabajen inicialmente a lápiz y papel para luego enseñarles a usar la herramienta "Análisis de regresión", que tiene GeoGebra. En esta oportunidad Alfonso pide a los estudiantes inicialmente una expresión algebraica obtenida a lápiz y papel para luego ser enfrentada con la que encuentran en el *software* con el mejor ajuste (ver Figura 32).

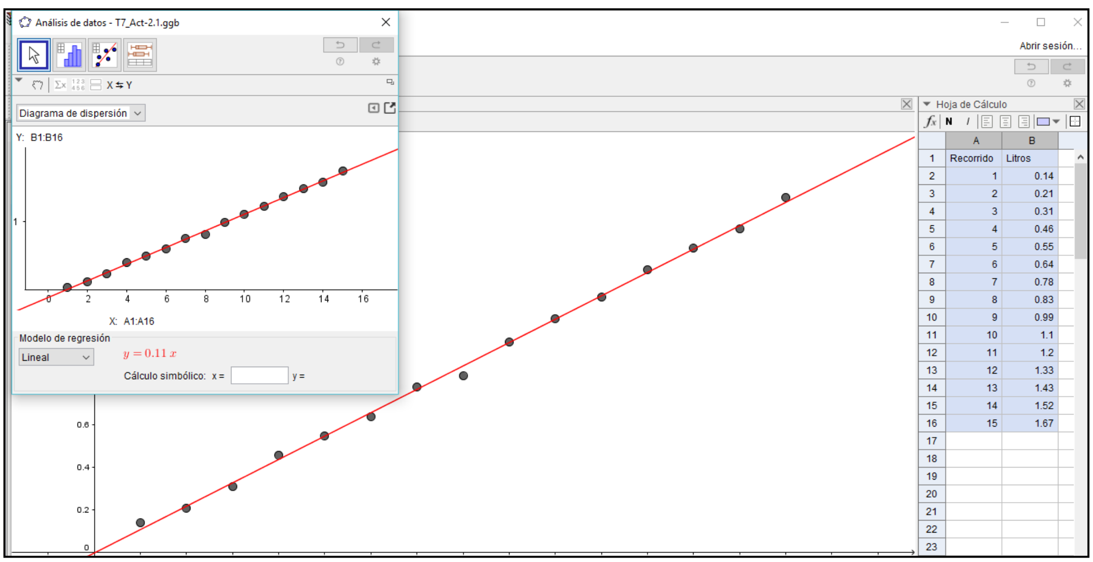


Figura 32. Análisis de regresión del consumo de gasolina vs kilómetros recorridos

En esta ocasión Alfonso indaga sobre cuál podría ser la función que se ajuste mejor a los puntos. Él enfatiza sobre la necesidad de encontrar no sólo el mejor ajuste a los puntos sino también a la situación problema que se presenta. Algunos estudiantes piensan que el mejor ajuste es una función cuadrática, pero al ver que en un momento comienza a aumentar muy rápido descartan la función.

El trabajo de Alfonso en este momento se basa en interactuar con la tecnología para ver qué tan probable sería el modelo elegido. Finalmente, los estudiantes, con su ayuda, comprenden que para este problema el mejor ajuste sería una expresión lineal. De esta manera, descartan la idea de una expresión polinómica o senoidal.

Ruiz, Seoane y Di Blasi (2008) consideran que las actividades construidas con GeoGebra bajo una concepción constructivista y cooperativa del aprendizaje son útiles para promover entornos educativos que favorezcan en los estudiantes la adquisición de competencias para realizar conjeturas, validar resultados y elaborar conclusiones, así como ser capaces de explicar los pasos a seguir para resolver las situaciones planteadas.

Alfonso permite que estos espacios mencionados anteriormente se activen en el aula de clase. Hace de sus estudiantes participantes activos para que la actividad matemática sea enriquecedora para los estudiantes.

5.3.4. Generalidades de los significados negociados por Alfonso como profesor de Precálculo

Se desea resaltar que el profesor ha desarrollado a través de este proceso habilidades para transitar por las distintas representaciones de un mismo objeto matemático para hacer que sus estudiantes comprendan de la mejor manera sus explicaciones. Se observa un continuo dominio de los saberes matemáticos mostrado desde su primer rol como tutor-practicante y, por supuesto, como ha mejorado en los aspectos didácticos y las metodologías usadas como profesor.

Pero es importante recordar que estos dos dominios en el trabajo del docente de matemáticas no pueden considerarse por separado ni en su formación, ni en su práctica, ni en el análisis de su proceder. Como menciona Llinares (2005, pág. 163):

> Considerar la relación entre lo matemático y lo didáctico en las situaciones en las que se aprenden 'instrumentos de la práctica de enseñar' se explicita cuando las 'situaciones matemáticas' (problemas, actividades, ejercicios) llegan a verse por los estudiantes para profesor no sólo como situaciones matemáticas sino también como instrumentos para el aprendizaje del contenido matemático.

Se resalta la creatividad del profesor para usar diferentes representaciones al explicar un mismo elemento, como en el caso de la transformación $f(x+k)$. El profesor inicia explicando por medio de una gráfica. Al ver que no todos sus estudiantes comprenden el porqué de la transformación, busca la manera de volver a explicarla por medio de una tabla de valores en la cual muestra como al sumar un valor k la función se mueve k unidades hacia la izquierda.

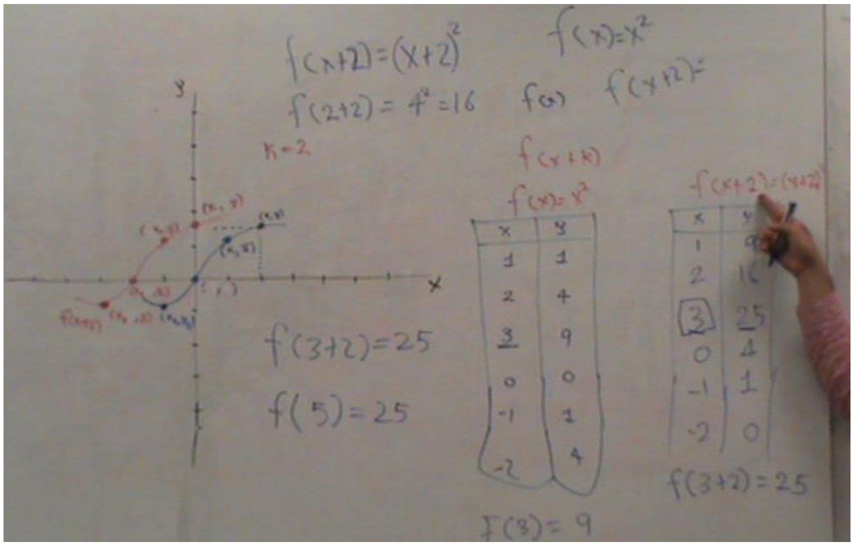


Figura 33. Representación gráfica y explicación de relación proporcional

Al mostrar la explicación de esta manera (ver Figura 33) el profesor retoma la actividad en GeoGebra, buscando que los estudiantes nuevamente transiten por las diferentes representaciones. Alfonso demuestra un dominio del *software* interactivo y un buen manejo de los instrumentos que tiene a la mano para el trabajo en el curso. Demuestra que tiene claridad en los contenidos matemáticos y, por supuesto, en la metodología del curso. Comprende los objetivos y el compromiso adquirido en la CoP:

> -El curso de Precálculo intenta trabajar con problemas que desarrollen el Pensamiento Variacional y permitan crear nociones acerca de estos objetos: Función, límites y derivada. (Informe final realizado por Alfonso, Curso de Precálculo 2016-I)

Alfonso comprende que las preguntas bien elaboradas permiten un buen desarrollo de las actividades en el curso. Durante su trabajo como profesor procura siempre hacer que los estudiantes justifiquen sus respuestas. En el informe final que entrega de cada uno de sus estudiantes, presenta algunas fortalezas y debilidades de los estudiantes que han realizado el curso, e identifica aspectos importantes de argumentación y comunicación de los elementos planteados, tal y como se ve a continuación, con Johan, un estudiante que interactúa mucho con el grupo:

> Jhoan llegó al curso con muchas dificultades y falencias en los temas tratados, por lo que hacía muchas preguntas que fueron foco de discusión. Además de la deficiente interpretación de los enunciados planteados, que le impedían ver los datos relevantes y abordar respuestas acertadas y justificadas. Algo de destacar es que siempre estaba dispuesto a participar y pasar al tablero a exponer sus ideas, siendo el estudiante más activo en clase. Aunque en un comienzo utilizó solo representaciones numéricas en sus procedimientos, fue evolucionando hasta utilizar diferentes estrategias gráficas y algebraicas. Además, mejoró en la interpretación de los problemas, reconociendo en las situaciones la variación y cambio; y las magnitudes involucradas en cada pregunta realizada. Le costó un poco comprender lo referente a la razón de cambio de las variables, identificar cuándo era positiva, negativa y su relación con la pendiente de la recta tangente y la derivada de la función en un punto de interés. Pero logró limar asperezas realizando preguntas puntuales que le ayudaban a entender mejor las ideas que se no comprendía en los momentos de socialización. A está estudiante se le recomiendan tutorías de cálculo de ASAE-SEA.

Alfonso intenta explicar de forma global y resumida el trabajo de cada uno de los estudiantes en el curso, así como las estrategias que ellos usan para resolver los problemas y cómo van cambiando sus percepciones respecto al Cálculo Diferencial, el reconocimiento de situaciones de variación y cambio que se presentan al resolver los problemas.

Otra estudiante que sobresale por su participación en clase es Cindy, de la cual, Alfonso realiza el siguiente informe:

> Cindy fue una estudiante que destacó por sus ganas de participar, aunque desde el comienzo se evidenciaron falencias con temas básicos de matemáticas, mostró una gran capacidad de aprovechar las socializaciones, el trabajo con los demás estudiantes y con el profesor, para avanzar y plantear alguna respuesta con su

> respectiva justificación. Mostró interés en todos los temas tratados y más aún por lo metodología que implementamos basada en la resolución de problemas entre otras cosas, que en sus palabras es mejor que escuchar hablar solo al profesor todo el tiempo. No le gustaba mucho el trabajo con GeoGebra por lo que casi nunca lo utilizaba si no era porque el taller lo pedía. Al comienzo preguntaba mucho ya que no entendía muchas cosas, pero al pasar de los días mostró una mejoría y ya no preguntaba solamente, sino que además participaba con sus ideas y complementaba o contradecía las ideas de los demás. En los últimos talleres lograba identificar las variables que le pedíamos relacionar y utilizar diferentes representaciones en sus respuestas, además comprendía la relación entre razón de cambio, pendiente de la recta tangente y la derivada. Para Cindy no es necesario tutorías, pero si las solicita no está de más para ella.

En esta estudiante Alfonso identifica muchas fortalezas que le ayudarán a comprender mejor los objetos del Cálculo Diferencial. Al respecto, en el informe el profesor sugiere que la estudiante participe en las tutorías brindadas por ASAE-SEA, pues allí pueden atender sus dificultades particulares.

En general, Alfonso reconoce la importancia del trabajo individual por parte de los estudiantes. Como profesor de Precálculo él no impone conocimientos, sino que permite que los estudiantes lleguen a ellos con sus propias herramientas. Alfonso incita a la participación de los estudiantes mediante el planteamiento de preguntas que permiten una discusión colectiva para que sean ellos mismos quienes consoliden sus aprendizajes. Los significados negociados por Alfonso en su rol como profesor de Precálculo, giraron alrededor del desarrollo del Pensamiento Variacional, en el cual él ve la resolución de problemas como una herramienta clave de aprendizaje: las nociones del cálculo, desde variación, tendencia, aproximación, variable y cambio. A continuación, se presentará un cuadro con los significados negociados por Alfonso en su rol de Profesor de Precálculo:

Pensamiento Matemático	**Pensamiento Didáctico**	**Pensamiento Orquestal**
• Define el concepto de función a partir de las nociones de interdependencia y variabilidad • Usa lenguaje matemático que permite a los estudiantes desarrollar habilidades del Pensamiento Variacional • Tiene Claridad en el concepto de proporcionalidad	• Tiene claridad en conceptos como proporcionalidad por medio de ejemplos que permiten a los estudiantes ver sus dificultades • Usa diferentes representaciones del concepto de función para comprender la definición • Organiza la metodología y los objetivos de las actividades que se realizan en el aula de clase • Genera la Participación por parte de los estudiantes al momento de la socialización.	• Orquesta instrumentos que le permiten buscar diferentes representaciones de los objetos matemáticos de manera que los estudiantes comprendan mejor lo anterior. • Incorpora el *software* GeoGebra a sus actividades y socializaciones

Tabla 6. Significados negociados por Alfonso en su rol de profesor de Precálculo

Alfonso evidencia fortalezas en el Pensamiento Reflexivo. En especial en el Pensamiento Didáctico, se observa cómo ha crecido y cómo a partir de la experiencia desarrolla estrategias de enseñanza, estrategias que le permiten predecir los posibles errores de los estudiantes del curso y enfrentarlos durante el trabajo en clase. Otro aspecto que potencia el trabajo realizado por Alfonso en el curso de Precálculo se da por el trabajo conjunto entre su formación investigativa y la elaboración de su tesis de maestría que tiene como contexto el curso de Precálculo. En el siguiente apartado y último rol que se presenta, se explicará, precisamente, como ha sido la formación investigativa de Alfonso y como esta formación aporta a sus prácticas profesionales y permite un desarrollo del Pensamiento Reflexivo.

5.4. Investigador en formación

Para caracterizar a Alfonso en el rol de investigador en formación se analizó su tesis de pregrado (de la cual se extraen resultados de su investigación concernientes a diálogos con estudiantes e interpretaciones basadas en el marco teórico usado por él en su investigación) y entrevista reflexiva. La entrevista fue guiada por la investigadora quien rescató algunas evidencias de las experiencias vividas en los roles anteriores (episodios de videos e informes) para formular preguntas que permitieran evidenciar significados negociados en todo el proceso de formación.

La tesis de pregrado de Alfonso tiene como objetivo: "identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio en los estudiantes que realizan el curso de Precálculo de la UIS" (López, 2014, p.17). El trabajo presenta algunas estrategias analizadas a través del modelo CKC de Balacheff en dónde se evidenciaron las concepciones que utilizan los estudiantes al plantear sus estrategias en el proceso de resolución de problemas de dos talleres del curso de Precálculo. Para recolectar los datos él realizó acompañamiento en cada una de las quince sesiones de trabajo correspondientes al curso de Precálculo de las cuales se tomaron dos sesiones para ser analizadas: "Análisis de Información" y "La Derivada como razón de cambio".

Alfonso realizó vídeos de las sesiones, recolectó apuntes de algunos estudiantes (soluciones de los talleres) y además tomó nota sobre aspectos importantes que observó durante el desarrollo de las actividades. Para Alfonso, los resultados de su investigación podrían aportarles a los profesores de Precálculo el reconocimiento de los presaberes con los cuales llegan los estudiantes para enfrentar la resolución de problemas. Desde aquí se percibe su pensamiento reflexivo desde su formación inicial.

5.4.1. Pensamiento Matemático

Para caracterizar el pensamiento matemático de Alfonso en su formación como investigador, se recuperaron algunos resultados de la tesis de pregrado en los cuales se reflejan su pensamiento matemático. En la Figura 34, se plantea la situación del taller de "Análisis de información" del curso de Precálculo escogido para el análisis, Alfonso presentó seis estrategias sin el uso de GeoGebra que usaron los estudiantes para dar solución al problema:

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

Figura 34. Taller de análisis de información

En esta situación Alfonso como investigador, identifica que la mayoría de los estudiantes usan como estrategia para calcular el consumo de gasolina por kilómetros recorridos, una regla de tres, con una noción de crecimiento proporcional:

> Se tiene entonces que la concepción es la regla de tres, lo cual lleva a que la estrategia sea usar la regla de tres simple. Esta estrategia fue muy común en los estudiantes de la clase ya que para ellos es adecuado tomar tres datos de la tabla y hallar un dato nuevo, siendo este proceso el operador (R_1) utilizado para hallar el consumo correspondiente a $17km$ y $20km$. (López, 2014, pp. 43-44)

El razonamiento proporcional juega un papel primordial en el desarrollo de las ideas matemáticas del estudiante. De acuerdo con Inhelder y Piaget (1958), este razonamiento revela un progreso al nivel de las operaciones formales del individuo. Existen cuantiosos estudios sobre el razonamiento proporcional. Karplus et al. (1983) concluyeron que los estudiantes deciden o no utilizar el razonamiento proporcional de acuerdo con la facilidad o dificultad que encuentran en relacionar los números involucrados.

Para Mochón (2012) El papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional, como el nombre del tema lo indica, es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. Alfonso demuestra tener claridad al momento de trabajar con situaciones que involucran la proporcionalidad, esto permite poder guiar a sus estudiantes a realizar razonamientos que les permitan resolver problemas con el de la situación del consumo de gasolina.

Otra estrategia identificada por Alfonso fue la de hallar las diferencias entre los valores a par de la tabla, que consistió en verificar si el aumento entre los consumos de combustible es constante para tomar el último dato de la tabla, correspondiente al consumo para 15 km, y sumarle este valor hasta encontrar el consumo correspondiente para $17km$ y $20km$.

> El estudiante percibe que la diferencia entre los kilómetros recorridos es constante $(\Delta x = 1)$, y espera que la diferencia entre el consumo de combustible (Δy) también lo sea (R_2), por esto haya varios Δy (R_1) para así poder verificar su conjetura $\sum 1$. Vemos, entonces, como el estudiante hace uso de su razonamiento covariacional al analizar la variación a través de las diferencias. El sistema de representación es un esquema numérico en el que resalta el consumo de combustible de un kilómetro a otro. Este esquema le sirve para ejercer el control a su concepción y como no obtiene los resultados esperados abandona la estrategia. (López, 2014, p. 46)

Aquí se observa que Alfonso como investigador va construyendo su concepción acerca de la función, pues habla de cambios, diferencias constantes, habla acerca de variación y sistemas de representación.

En una tercera situación (ver *Tabla 7*) se presenta una estrategia que consiste en buscar una relación (algún patrón) en los datos, para predecir los valores del consumo de combustible que le piden. En esta estrategia se evidencia como Alfonso identifica una de las habilidades necesarias en el pensamiento variacional en el estudiante, quién hace un análisis de los datos de la tabla en la búsqueda de un patrón. Alfonso concluye que esta estrategia no es útil en la resolución del problema propuesto, aun así, reconoce habilidades del estudiante que buscar de lo particular hacer una generalización.

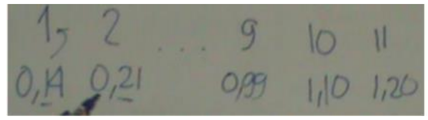
[1] Prof: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? [2] Est: Como hay una secuencia lo podemos hacer por ahí, podemos ver que estos coinciden, 1-1, 2-2, 3-3... del 1 al 9 hay esta secuencia... *[El estudiante encuentra esta relación observando los números en la tabla]* [3] Prof: Del km 1 al km 9 hay una secuencia, ¿eso es lo que quiere decir? Y ¿del 10 en adelante qué pasa? [4] Est: Sí, y del 10 en adelante aumenta en 1. [5] Prof: ¿Qué secuencia? ¿Podría pasar al tablero a explicarnos? [6] Est: Sí, por ejemplo en el 1 la secuencia es 0,14, el en 2 da 0,21 y el nueve es 0,99. Pero en el 10 ya cambia, es 1,10...y en el 11 es 1,20... y en 13 es 4. ¿Si lo nota? *[Apoyándose de los que acaba de hacer en el tablero (Ilustración 10)]* [7] Prof: ¿Cuál es la secuencia que hay? [8] Est: Acá va aumentando este número en 1 y concordando con este *[explica que del km 1 al km 2, el primer decimal del número que me representa el consumo de gasolina respectivamente, también pasa de ser 1 a ser 2, (Ilustración 10)]*, pero en el 11 cambia *[en el décimo dato, el segundo decimal deja de ser igual al kilómetro respectivo]*	 [9] Est1: Pero después del 1 ya la secuencia no... si ves que es 0,14 o sea el 4 ya no sigue la secuencia y el del 1... después del 1, ¿si me entiende? Hay secuencia en los dos primeros números pero ya en el tercero la secuencia no sirve. *[Este estudiante intenta decirle que este patrón no se cumple para el segundo decimal]* [10] Est: Eso es lo que digo yo, aquí hay secuencia pero en estos no... se pierde. [11] Prof: ¿Entonces no pudo obtener respuesta por eso? [12] Est: Pues si se saca según la secuencia se puede encontrar que en el número 17 el decimal sería 8 y entonces el consumo del combustible sería 1.8 algo..., si no estoy mal, pero no sé encontrar el segundo decimal. [13] Prof: Bien, ¿si descubrimos cuál es la correspondencia entre los números damos respuesta a la pregunta? [14] Est: Sí y no... sí pero no sé cómo hallar la secuencia o no sé si exista para que incluya el otro decimal, aunque con lo que acabo de explicar se puede tener un valor aproximado pero solo para un decimal.

Tabla 7. Diálogo entre profesor y estudiante (Tomado de López 2014, p. 52)

A partir de lo anterior (ver Tabla 7) Alfonso realiza conclusiones dónde la variación es esencial en los razonamientos de los estudiantes:

> Queda explícito, a través de las concepciones, que en las primeras cuatro estrategias identificadas el razonamiento orientador fue el de considerar que la variación en el consumo de combustible era constante, lo cual, fue evidenciado por los estudiantes a través de las diferentes representaciones: Algebraica, numérica, gráfica y esquemática. (López, 2014, p. 53)

Como investigador, Alfonso reflexiona acerca de los conocimientos que deben desarrollar los estudiantes. Él evidencia como el tránsito por las diferentes representaciones (gráfica, verbal, tabular, algebraica) facilita el aprendizaje del concepto de función, tal como lo afirma anteriormente en su tesis. Se observa también, como Alfonso en su lenguaje utiliza palabras cómo variación, aproximación y tendencia, que hacen parte del repertorio compartido de la

CoP en la cual él interactúa. Él concibe la función a partir de patrones de variación entre variables, al hablar de este objeto utiliza las palabras cambio, variación y relación:

> Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian apareciendo patrones de variación entre variables, abriendo la posibilidad de predecir y controlar el cambio. (López, 2014, p. 5).

Alfonso logró identificar las razones por las cuales los estudiantes empleaban ciertas estrategias de resolución de problemas a partir de la aplicación del marco teórico usado en su investigación:

> A través del análisis de esta investigación se corroboró que las estrategias que los estudiantes emplean en la resolución de problemas están influenciadas por la veracidad de las concepciones que poseen. En las estrategias halladas se observó que hubo algunas que permitieron la solución acertada del problema y otras que no, esto nos lleva a concluir que es importante la validez, la coherencia y eficacia de la concepción. Si los estudiantes tienen concepciones erradas y no son conocimientos matemáticos, no son capaces de resolver el problema. (López, 2014, p. 89)

Parada (2011) expone que la reflexión puede facilitarse a través del uso de algunas estrategias o acciones que permitan identificar factores que llevan, o no, al desarrollo efectivo de una actividad matemática propuesta. Con lo anterior, se resalta la labor de Alfonso de identificar las estrategias de los estudiantes, para resolver problemas que pueden ayudar a un profesor de Precálculo a realizar una reflexión para la acción, prediciendo las posibles soluciones que darán los estudiantes.

Por otro lado, para continuar con la identificación de los aprendizajes negociados por Alfonso, se toman como datos las respuestas a la entrevista, con la cual se buscó identificar con él fortalezas y debilidades en sus dominios conceptuales referentes al Cálculo Diferencial.

Para ello se confrontó al profesor con los conflictos vividos en los roles anteriores (tutor y profesor de Precálculo). Una de las preguntas realizadas en la entrevista es la siguiente:

> **Investigadora:** ¿Considera que los conocimientos matemáticos con los que usted inició su carrera como profesional eran suficientes para el desarrollo del programa?
>
> **Alfonso:** Escogí la carrera (Licenciatura en Matemáticas) porque me gustaban las matemáticas cuando estaba en el colegio. Cuando llegué a la universidad a estudiar me di cuenta de que yo no sabía matemáticas; mi nivel comparado con algunos estudiantes era inferior. La gente que estaba en mi nivel, era de pueblo, así como yo. Mis bases matemáticas eran muy malas.

Al llegar a la universidad, Alfonso observa que tiene dificultades que no había detectado antes e intenta dar de su parte para superarlas:

> **Alfonso:** La primera vez que vi Cálculo I la pasé raspando, se debía a muchas falencias matemáticas, temas que no recordaba, que nunca había visto, fueron cosas que me tocó empezar a estudiar sólo, para poder rendir en estas materias.

Es así como comienza a estudiar por su cuenta y a fortalecer su Pensamiento Matemático. Investigaciones han mostrado que una gran cantidad de conocimiento del contenido no siempre se corresponde con una mejor destreza, competencia o capacidad para enseñarlo (Askew, Brown, Rhodes, Johnson y William, 1997; Begle, 1979; Eisenberg, 1977), aunque sí parece relacionarse con una mejor disposición para alcanzar esa competencia (Hill, Rowan y Ball, 2005). Aunque en la situación presentada el pensamiento de Alfonso es el de un estudiante de universidad, se va apropiando de su papel como profesor de matemáticas y transita en la búsqueda de la superación de sus dificultades para alcanzar sus propias metas de aprobar las asignaturas de su carrera, se resalta que el Alfonso manifiesta que la asignatura en la cual tuvo mayor dificultad es Cálculo Diferencial:

> **Alfonso:** El cálculo que más se me dificultó fue Cálculo I (Cálculo Diferencial), en temas como desigualdades, me parecía un tema muy difícil, llené por mi cuenta muchos vacíos conceptuales que me ayudaron a mejorar en Cálculo Integral y Cálculo Multivariable.

Cuando se le pregunta a Alfonso cómo había sido su experiencia como tutor, responde lo siguiente:

> Esa experiencia fue muy interesante, me di cuenta de que muchas cosas no las sabía enseñar aun sabiendo el concepto. Fue muy interesante darse cuenta de que a pesar de haber visto cuatro (4) cálculos no tenía claros los conceptos. Fue pensar que los chicos no saben operaciones con fraccionarios, no recuerdan nada de trigonometría, de algebra, que son cosas básicas que uno debe saber y manejar para ver cálculo y entender. Me identifiqué un poco con ellos, de paso uno estudiaba y aprendía y a partir de como superé esas dificultades pude ayudarles a ellos. Yo también tuve ese error no solo en la parte conceptual sino también no saber estudiar, los estudiantes no entendían en qué consistía a la resolución de problemas y en algunos momentos querían sólo hacer álgebra sin comprender lo que hacían.

Alfonso se identifica con los estudiantes y a partir de su experiencia reconoce la necesidad de ayudar a aprender matemáticas a sus estudiantes de una forma diferente a como él había aprendido. El profesor resalta que algunos problemas aparecen porque los estudiantes aprenden matemática como una forma mecánica y dejan de lado la resolución de problemas matemáticos, Brissiaud y sus colaboradores (citado en Ponte y Chapman, 2006), estudiaron la relación existente entre las percepciones de profesores y alumnos sobre lo que entienden por problema. Sus conclusiones pusieron de manifiesto que las percepciones de los alumnos se ven influenciadas por las de sus profesores.

Alfonso intenta construir una solución para la resolución de problemas, tal como determinaron Escudero et. al (2015) al observar en los profesores una secuencia que va construyéndose a medida que avanza en resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos. Cabe resaltar que esta entrevista se realiza con el fin de llevar a Alfonso a reflexionar sobre sus significados negociados durante toda su formación, hasta este momento donde se desarrolla como investigador en formación, en una parte de la entrevista realizada a Alfonso se recuerdan algunas apartes de sus informes como tutor auxiliar.

> El estudiante tiene problemas en decir qué es una función y confunde eso con la forma de representarlas como gráficas, tablas, diagramas de flechas, etc. Ya que dice, por ejemplo, que una función es "eso" y señala o dibuja una gráfica o hace una tabla y dice que eso es una función, pero en realidad no comprende la dependencia y la relación entre los elementos que se encuentran en cada una de las diferentes representaciones. (Informe de Brayan, 7 junio 2013).

Una reacción de él cuando se le cuestiona sobre el punto de vista mostrado anteriormente fue:

> **Investigadora:** ¿Usted quería que el estudiante definiera la función?
>
> **Alfonso:** es probable que yo esperara la expresión algebraica aun cuando ya había reflexionado que la función se podía representar de diferentes maneras, no lo había interiorizado para mí, como un afán de llevar al estudiante a la expresión algebraica.

Estudios realizados (por ejemplo, el de Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D., 1992 y el de Ruiz, 1998) han demostrado como estudiantes de alto desempeño en matemáticas poseen una débil comprensión del concepto de función, manifestando una concepción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo, que lleva incluso a confundirlo con su representación algebraica. Algunos estudiantes e inclusive profesores ven la función como una ecuación, lo cual hace ver a x como un valor estático y se deja a un lado la idea de variable y dependencia que sobresale en este concepto. Continuando con la entrevista a Alfonso, se encuentra lo siguiente:

> **Investigadora:** ¿Qué dificultades encuentra en los estudiantes para comprender una función?
>
> **Alfonso:** El problema con estudiantes así es que si usted les pregunta qué es una función ellos le pueden señalar la gráfica, pero es probable que no lo vean como la representación de una función. Ellos no comprenden ¿qué hay detrás de todo eso?, ¿qué implica que se le llame función?, ¿qué hace que una variable dependa de otra?, ¿cuál es la relación entre las variables? Ellos no saben por qué la columna A tiene ciertos números, no saben por qué la columna B tiene ciertos números, de pronto es eso lo que quería ver en ese momento.

Alfonso quiere en aquel momento que sus estudiantes comprendan la función más allá de la expresión algebraica, que comprendan la relación entre conjuntos (habla de columna A y columna B). Luego se le presenta la definición de función que da cuando es tutor auxiliar, tal como se menciona en el apartado 5.2.1: "una función es una ley que relaciona dos magnitudes numéricas de forma unívoca, es decir, que a cada valor de la primera magnitud le hace corresponder un valor y sólo uno de la segunda magnitud".

> Alfonso observa la definición que expuso en ese momento y se da esta pequeña intervención:
>
> **Investigadora:** Observando esa definición me di cuenta que está muy influenciada por el libro de texto guía de ese momento que era el Stewart
>
> **Alfonso:** sí, eso estaba pensando, yo tal vez la tomé de ahí literal, porque en el momento no tenía el dominio de lo que era una función, y lo más fácil era sacarla del libro.

Se confronta, a su vez, a Alfonso con su definición de función dada en su rol como profesor de Precálculo, en la cual se refleja como la negociación de significados le ayuda a cambiar su concepción de lo que es una función, presentada ya en el apartado 5.3.1.:

> **Alfonso:** Es evidente que ya no estaba interesado en lo que decía un libro, sino, en algo más natural. No estaba interesado en decir: la definición del libro es esta y veámosla parte por parte. Quería tratar que en el camino haya una idea que le ayude a comprender la definición del libro. El estudiante puede ver cómo se involucran las variables y puede relacionar esto como lo que ve allá.

Alfonso comprende que es necesario partir de nociones para llegar a la definición del concepto, para Ugalde (2014) el concepto de función desde su origen –cualquiera que este sea–, está ligado al desarrollo del concepto de cantidad, y más generalmente, al concepto de número. Como es usual en matemática, muchas ideas surgen primero como ideas intuitivas, y luego se van cristalizando al ir refinando el concepto.

El profesor considera que no se puede llegar a una primera clase del tema a dar la definición. En este caso, es mejor partir del conocimiento del estudiante ayudándolo a construir el concepto aun cuando no tenga buenas bases matemáticas, pues esto le permitirá reforzar y reflexionar sobre qué tanto sabe y qué tanto debe saber.

Se resalta que el recorrido realizado dentro del programa ASAE-SEA genera en Alfonso un Pensamiento Reflexivo a partir de sus prácticas profesionales desde sus prácticas tempranas, y esto le permitirá entender que su labor como profesor de matemáticas requiere de un constante aprendizaje en todos los aspectos y un profesionalismo al tratar el conocimiento matemático conociendo la epistemología de las matemáticas que enseña y, por otra parte, teniendo claridad en los contenidos que adopta en su currículo como profesional docente; además, se resalta que Alfonso tiene un fuerte desarrollo del Pensamiento Matemático que posibilita un mejor progreso en estos aspectos mencionados.

El profesor, desde su formación inicial, da importancia al dominio de los contenidos matemáticos y las diferentes maneras de representarlos a los estudiantes. Las nociones de variación, tendencia, aproximación e interdependencia aportan al conocimiento de Alfonso con referencia a los objetos del cálculo. Además, permite una mayor comprensión y apropiación de la función y la derivada.

5.4.2. Pensamiento Didáctico

Para su tesis de pregrado, Alfonso en su revisión bibliográfica tiene en cuenta aspectos importantes en cuanto a la realización de las clases, menciona autores como Dolores (1998), Ímaz y Moreno (2010), entre otros que se enfocan en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Alfonso, en su marco conceptual, menciona el Pensamiento Variacional (MEN 2006), la resolución de problemas (Pólya, 1965) y el uso de tecnologías. Estos son los fundamentos del curso de Precálculo, y a ellos adiciona el modelo CKC (Balacheff, 1988) para analizar las concepciones de los estudiantes del curso. Como investigador, Alfonso muestra preocupación en cuanto a aspectos curriculares para la enseñanza del cálculo y fundamenta su marco conceptual en documentos del MEN e investigadores en educación matemática.

En las conclusiones, Alfonso hacen mención de un aspecto importante como lo es el tránsito por las diferentes representaciones del concepto de función partiendo del análisis de patrones y regularidades:

> Se desprenden del estudio de las estrategias dificultades alrededor de los procesos algebraicos, más exactamente en las actividades matemáticas que implican analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de las funciones. (López, 2014, p. 90)

Para Treffers (1987) la actividad matemática implica organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras. El proceso individual de reflexión de los profesores según Parada (2011) se ve enriquecido a través de la comunicación y socialización de experiencias, se puede afirmar que las reflexiones realizadas por Alfonso en su trabajo de grado surgieron a partir de su experiencia como investigador.

En la entrevista realizada, Alfonso manifiesta varios aspectos importantes en cuanto al Pensamiento Didáctico. Uno es la importancia y el reconocimiento que da a las asignaturas de didáctica que ofrece la licenciatura, pues considera que en estas asignaturas se configuran situaciones que permiten ver errores de enseñanza que se pueden ir superando desde la formación inicial para no caer en la enseñanza tradicional:

> **Alfonso:** Uno llega a ver Didáctica del Cálculo y sigue viendo que tiene vacíos conceptuales, observa que hay cosas que realmente no comprende y se aprenden por el momento y ya. Viendo Didáctica me fue bien, comencé a darme cuenta que tenía muchas falencias…siendo tutor me di cuenta de que no sabía muchas cosas y debía ponerme a estudiar, debía estar atento a lo que los estudiantes iban a preguntar. Tenía errores conceptuales que debía superar y en la forma de enseñar, a veces uno piensa que con el conocimiento matemático es suficiente y resulta que no, a veces usted puede decir lo que dice el libro, y es ahí donde uno empieza a jugar con los elementos, ver como transformo yo esos conocimientos para que sean más fáciles de comprender.

Menciona que por medio de las *prácticas* realizadas en ASAE-SEA puede observar sus dificultades como profesor al momento de enseñar, dificultades que va superando al ver la necesidad que existe y el compromiso adquirido en la CoP de acompañar durante todo el semestre a estudiantes de primer ingreso para disminuir la deserción universitaria.

Otro aspecto que resalta es el concepto de *planeación* de la tutoría. Para Parada (2011) la planeación es una estrategia que permite identificar factores que llevan, o no, al desarrollo efectivo de una actividad matemática propuesta. Para Alfonso, la tutoría es un espacio en el cual los estudiantes van a resolver dudas, dando prioridad a este aspecto y dejando en un segundo plano el trabajo por medio de talleres. Él percibía la realización de un taller como una obligación, pero observó que planear un buen taller puede facilitar el trabajo y el acercamiento de los estudiantes al Cálculo diferencial:

> Alfonso: Aunque para mí era una obligación, esto facilitaba la sesión, era más fácil para que el estudiante haga algo y ya, en este momento planearía un taller con el objetivo que comprenda, que ejercite e interactúe con los conceptos del cálculo, que aprenda a solucionar problemas, etc.

En apartados anteriores también se observa la importancia que da Alfonso al planteamiento de *objetivos* para las clases. El modelo Reflexión y Acción propone una de la clase planeada y la otra de la clase desarrollada, con el fin de que pueda hacerse un estudio comparativo entre los objetivos propuestos y los objetivos alcanzados. Al respecto, como investigador, él opina lo siguiente:

> Siempre es bueno plantearse objetivos, tener claro que cualquier cosa debe pasar, entonces yo trataba de estudiar el tema, el anterior y el que seguía.

Acerca del dominio de los talleres, actividades y la metodología del curso de Precálculo, le preguntamos a Alfonso si tiene dificultades de enseñanza durante este curso, a lo cual él responde:

> **Alfonso:** Sí, pues en algunas cositas, uno está en clase, ya uno conoce los talleres, los prepara, los lee, pero siempre salen cositas, a veces los estudiantes no comprenden, y uno comienza a jugar con ciertas cositas para explicarles, a veces al improvisar se confunde uno un poco, y a veces ellos no entienden entonces toca buscar otras representaciones, algunos entienden con una representación, otros con otra, entonces uno comienza a jugar con ellas.

Se observa que Alfonso busca estrategias para que todos sus estudiantes comprendan los procesos que deben realizar para resolver los problemas, Es importante señalar que la resolución de problemas es una actividad reconocida como de suma importancia dentro de los sistemas educativos (Castro y Ruíz, 2015). La concepción que se tenga de ellas es preponderante para la forma en que se pueda desarrollar en los distintos ámbitos en los que se ha abierto espacio. Se preocupa por buscar diferentes maneras de explicar a sus estudiantes cuando ellos no saben. No se limita a una sola representación, al contrario, busca todas las maneras posibles para que se dé la actividad matemática dentro del aula de clase, haciendo que sean los estudiantes quienes hablen, compartan y deduzcan a partir de sus propias afirmaciones.

5.4.3. Pensamiento Orquestal

El uso de herramientas que posibiliten la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes es clave en el Pensamiento Reflexivo del profesor. En la tesis de pregrado de Alfonso se logra identificar el valor de importancia que da al uso de las tecnologías en la resolución de problemas matemáticos:

> Cabe resaltar la importancia de pasar de una representación a otra como control para lo que se está haciendo. Así como GeoGebra permite al estudiante movilizarse de una representación a otra, por lo tanto, los estudiantes que aprovecharon esta cualidad del programa, lograban mejores resultados ya sea con el uso del software o no, llegaba a "callejones sin salida" por lo que abandonaban la estrategia o buscaban formas de concluir sus ideas abandonado el razonamiento inicial. (López, 2014, p.90)

El uso de GeoGebra se vuelve parte de su actividad como investigador en formación, pues reconoce la facilidad que da al pasar de una representación a otra y permite hacer control de las soluciones presentadas. Para Murcia (2012) GeoGebra es un software que favorece el proceso de aprendizaje de conocimientos matemáticos abstractos, ya que por medio de la construcción de applets y en unión con el diseño de talleres, estimulan y exigen al estudiante ser siempre activo en la construcción de su propio conocimiento junto a un aprendizaje más significativo.

El profesor necesita evaluar los saberes previos de sus estudiantes, las herramientas cognitivas con las que cuenta y su experiencia en el manejo de los recursos que desea incorporar en la clase (como es el caso de las calculadoras, software, etc.) para así poder planear sus clases y hacer las adaptaciones curriculares acordes a las características de su grupo (Parada 2011). Al entrevistar a Alfonso y realizarle preguntas sobre estas cuestiones, él comparte lo siguiente:

> **Alfonso:** Algunas veces utilicé GeoGebra, no sé si lo usé de forma didáctica o de forma correcta. Cuando vi Didáctica del Cálculo el profesor realizaba a actividades

> en este *software* y comencé a interesarme, entonces cada vez que el estudiante tenía dudas de las funciones o de los límites, sobre las derivadas, incluso yo, cuando algo se me olvidaba, tenía dificultades en ver alguna derivada usaba el *software*. Cuando el estudiante tenía alguna dificultad yo graficaba en el *software* para mostrarle lo que pasaba, usaba diferentes representaciones, pasaba de la algebraica a la gráfica.

Alfonso evidencia como poco a poco va incorporando en sus prácticas de enseñanza la tecnología, tal como ya se había mencionado en sus roles anteriores, pero ahora reflexiona al respecto siendo consciente de que no en todas las ocasiones usa este *software* de la manera más apropiada. Sobresale en su respuesta la necesidad de representar de diferentes maneras un objeto para acercarlo a los estudiantes. Se presenta a Alfonso una de las actividades que realiza en su rol de tutor auxiliar y expusimos en el apartado 5.2.3., la cual presenta la paradoja de Aquiles y la Tortuga. Alfonso comparte cuál es el interés de presentar a los estudiantes esta actividad:

> **Alfonso:** La intención era… la tutoría no era que el estudiante hiciera 5 o 10 límites y nos vamos los dos contentos porque usted los hizo y yo se los enseñé, sino que entendiera qué es un límite, la parte algebraica se podría hacer sin saber qué es un límite, la idea era mostrarle al estudiante qué hay detrás de todo eso. Cuando le llevé esto era para mostrarle al estudiante cuando usted pone límite antes de la expresión, eso quiere decir que detrás de todo eso hay variación, el comportamiento de ellas hace que se vayan a un valor, que tiendan a un valor, que se acerque tanto a él, bajo la notación de límite uno toca el valor, y debe tener presente que bajo esa idea se va acercando y acercando cada vez más, y por eso la idea de lo infinitamente pequeño.
>
> **Investigadora:** ¿Le hubiera agregado algo más a esta actividad?
>
> **Alfonso:** No, creo que eso era suficiente. Creo que lo que hice era preguntarle: ¿Aquiles alcanza la tortuga? Y el estudiante decía que sí entonces yo le hacía zoom y se separaban y el estudiante observaba que eso sucedía, la idea era mostrarle lo infinitamente pequeño.

Aquí se observa como Alfonso usa herramientas del *software* para mostrar características y propiedades de un concepto matemático. El trabajo con lo infinitamente pequeño, el usar palabras como *variación, tiende* y *acerque* permite al estudiante comprender el concepto de límite. Cottrill et. al. (1996) afirman que utilizar *software* de matemáticas ayuda en la visualización de la definición formal de límite. Este es un gran reto, la idea de representar de diferentes maneras un límite para que el estudiante pueda comprender qué hay detrás de todos esos símbolos que lo representan.

> **Investigadora:** ¿Considera que GeoGebra es una herramienta importante para la enseñanza del cálculo?
>
> **Alfonso:** Sí, GeoGebra y muchos otros programas, es muy importante porque es mostrarle al estudiante representaciones de los conceptos que está aprendiendo, y es una herramienta para ayudarse a enseñar, que ayude al estudiante a reflexionar, a ver que comete errores y a fortalecer sus ideas. Una actividad bien planeada, con talleres organizados se vuelve una herramienta poderosa.

Se coincide con Alfonso al ver a GeoGebra como una herramienta poderosa de enseñanza que permite transitar por diferentes representaciones de un objeto, Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas, pero también les permitiría transformar aquellas construcciones en "tiempo real", lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento).

5.4.4. Generalidades de los significados negociados por Alfonso como investigador en formación

Como generalidades se observa cambios en la concepción que tiene antes Alfonso de la enseñanza del cálculo y lo que visualiza en estos momentos:

> **Investigador:** ¿Le sigue dando la misma importancia al formalismo que le daba antes?

> **Alfonso:** No, porque, aunque es importante, yo lo hago, pero no es lo único. Mi interés era entender más lo que hablábamos, yo pensaba que él debía saber de memoria las definiciones y ahora veo que más que eso es comprender las definiciones y entenderlas.

La idea de reforzar el proceso de *resolución de problemas* en los estudiantes es una característica de este profesor investigador. Se ve como la participación activa en la CoP permite la negociación de ideas diferentes de enseñanza donde lo formal es importante pero no es la prioridad, donde el tradicionalismo y lo memorístico se quedan a un lado y se comienza a dar protagonismo al estudiante, todo lo cual forma personas críticas, responsables, argumentativas y comunicativas.

Parte del trabajo como profesor es la interacción con el auxiliar de Precálculo, pues esta favorece tanto la formación del profesor como la del auxiliar, pues es un profesor de Precálculo en potencia. Es por eso que se considera pertinente hacer preguntas al respecto:

> **Investigadora:** ¿Cómo fue el trabajo con el auxiliar?
>
> **Alfonso:** El estudiante tiene ansiedad de demostrar lo que sabe y no intenta aplicar lo que aprende en el aula, entonces uno comienza a interactuar con él, el auxiliar a veces daba más información de la necesaria y no dejaba que el estudiante pensara.

Moreno (2015) habla de cómo dentro de la comunidad la interacción entre los profesores expertos con los profesores “novatos” (que no tienen mucha experiencia en el curso), jalona el proceso de aprendizaje para los novatos y aporta a las prácticas de ambos. Es por lo anterior que se considera el papel del auxiliar muy importante pues es un apoyo para el profesor y un colega en formación que también puede realizar aportes importantes a las actividades realizadas.

Finalizando la entrevista se habla un poco de la visión de enseñanza de Alfonso. Cómo esa formación le ha permitido mirar desde otra perspectiva la enseñanza de las matemáticas, alejándose del tradicionalismo e innovando para permitir la participación del estudiante.

> **Investigadora:** ¿Cómo ha cambiado su visión de enseñanza?
>
> **Alfonso:** Mi visión de enseñar era: "yo debo saber matemáticas para enseñar matemáticas". Si yo sé matemáticas yo enseño. Siendo estudiante de colegio yo era bueno e intentaba explicar como la profesora me explicaba. Yo pensaba que era suficiente saber matemáticas. En algún momento yo pensaba que saber matemática era suficiente. Ahora veo que la matemática es muy importante, pero en el mismo nivel está el cómo se enseña, y lo que usted hace en el aula de clase para que el estudiante aprenda, ese proceso hay que hacerlo con respeto, hay que darle valor al estudiante, dejarlo que el resuelva problemas, que reflexione, que se dé cuenta que realmente está aprendiendo matemática. Cuando trabajé en un colegio intenté aplicar la misma metodología del curso de Precálculo dejando que sean ellos quienes opinen, compartan sus ideas.

Alfonso evidenció, que su idea de enseñar matemáticas inicialmente se basaba solamente en aprender matemáticas. Dejando de lado el conocimiento didáctico que tiene igual importancia en esta ciencia. En el siguiente párrafo se observa que Alfonso desarrolla un Pensamiento Reflexivo y, a su vez, se interesa por sus estudiantes y reconoce que la planeación de la clase no es algo insignificante, al contrario, es vital para la reflexión en la acción.

> **Alfonso:** Siento que tengo una visión reflexiva en cuanto a la educación, me tomo en serio la preparación de las clases, hacer buenas preguntas, saber que uno le tiene que dar la importancia al estudiante. Entiendo que soy un orientador que da la oportunidad de que el estudiante aprenda por sus medios, por su capacidad, y darle la oportunidad que su capacidad intelectual crezca. Comenzando a ser tutor de Cálculo I uno piensa que con lo que sabe está bien, pero se da uno cuenta que enseñando aprende uno como profesor.

Por supuesto, este Pensamiento Reflexivo se acciona dentro de la CoP y es por esta razón que se pregunta a Alfonso sobre los aportes que ha recibido dentro de la CoP:

> **Alfonso:** Ha habido muchos aportes, porque es la oportunidad de interactuar con docentes que ya han trabajado en colegio y tienen experiencia en las universidades, y darse cuenta que ellos pasaron por los problemas que yo pasé, de esta manera aprender a reflexionar y ver que uno va aprendiendo con el tiempo a trabajar con los estudiantes.

La experiencia en la práctica de la enseñanza favorece a los integrantes de la CoP, pues como lo menciona Alfonso, la participación dentro de la CoP y el tránsito por los diferentes roles permiten crear experiencias de cada rol que aportan a los futuros profesores de matemáticas participantes, así como les permite enfrentar de manera más fácil los problemas de enseñanza a los que se enfrentan en la formación inicial.

Para finalizar, se retoman preguntas respecto al trabajo de investigación que está realizando Alfonso como investigador en educación matemática, el cual se enfoca en evidenciar los tipos de demostración que realizan los estudiantes dentro del curso de Precálculo. Él responde lo siguiente:

> **Investigadora:** ¿Por qué desarrollar el proceso de argumentación en los estudiantes?
>
> **Alfonso:** Enseñarlo a argumentar es enseñarlo a usar lo que él tiene para que pueda justificar las cosas adecuadamente. Desarrollar el proceso de argumentación es mostrarle al estudiante que debe aprender a justificar con herramientas matemáticas y no sólo con sus nociones. Al preguntar el por qué, hacemos que los estudiantes hablen, cuenten lo que hizo, que se expresen bien, justifiquen, escriban bien, esto hace que el estudiante participe y se interese por lo que está haciendo, y ese trabajo entre pares les ayuda a mejorar en la comunicación de sus ideas.

Alfonso evidencia un interés por incentivar a los estudiantes a escribir bien y argumentar con coherencia y herramientas matemáticas los objetos y temas que se presentan en clase. Facilita a los estudiantes la comunicación de ideas que emergen de las actividades realizadas dentro del curso de Precálculo.

Lo anterior se ve reflejado en la enseñanza de Alfonso en el curso de Precálculo y en los comentarios que hacen los estudiantes al final del curso, pues la investigadora escoge tres estudiantes al azar que cuentan su experiencia en el curso de Precálculo y una de ellas manifiesta lo siguiente:

> **Investigadora:** ¿qué expectativas tenías del curso de Precálculo?
>
> **Estudiante:** pues yo en realidad venía era a recordar porque yo ya había visto Cálculo, pero yo llevaba un semestre sin estudiar, y no recordaba nada. Yo venía a una clase cátedra donde uno se sienta y el profesor le dice a uno todo y ya, era prestarle atención y tomar apuntes. A mí la verdad me gusta más esta metodología del curso, porque esas clases (como la describía anteriormente) son demasiado aburridas, uno se desconcentra y al final no aprende nada. En cambio, así uno tiene que pensar, hacer procesos mentales que lo llevan a uno a tener el conocimiento fresquito, a entender bien las cosas y no aprenderlas de memoria sino a analizar.

En esta entrevista la estudiante manifiesta que el trabajo con problemas similares a la "cotidianidad" le ayudan a comprender mejor algunos temas de cálculo que ella no entendía y sólo había "aprendido" de memoria y, por esa razón, ya había olvidado. Además, manifiesta que la relación con el profesor es agradable, lo que hace de las clases más "divertidas" y "atractivas" para ella.

Los otros dos estudiantes entrevistados manifiestan también que algunos temas que ven en el curso los habían visto ya en su colegio, pero nunca los habían entendido. Además, resaltan la labor del profesor como un moderador que les permite participar de forma activa en el curso, les ayuda a comunicar mejor sus ideas y a usar el lenguaje matemático respectivo. A continuación, se presentan los significados negociados por Alfonso en su proceso de Investigador en formación:

Pensamiento Matemático	**Pensamiento Didáctico**	**Pensamiento Orquestal**
• Reconoce que la función no sólo debe ver vista desde la expresión algebraica, reconoce la importancia de enseñarla usando sus diferentes representaciones. • Identifica la demostración como un proceso vital en la generación de la actividad matemática dentro del aula.	• Concibe el equilibrio entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico que debe poseer un profesor para la enseñanza. • Se interesa porque los estudiantes escriban bien, argumenten y se genere la demostración en el aula de clase • Usa modelos teóricos para el análisis de la demostración en el aula de clase y determinar los tipos de demostración	• Considera el *software* interactivo como herramientas potenciales para la enseñanza de las matemáticas. • Crea y diseña de actividades en el *software* GeoGebra para enseñar a los estudiantes a partir de nociones los objetos matemáticos del Cálculo Diferencial. • Usa GeoGebra para su trabajo de campo y recolección de datos en su tesis de maestría (contexto de su investigación el curso de Precálculo)

Tabla 8. Significados negociados por Alfonso como Investigador en Formación

En la Tabla 8 se observa los significados negociados de Alfonso como investigador en formación. El papel de Alfonso como investigador le ayuda a participar de una forma diferente en la CoP, pues a partir de su formación aporta investigaciones que permiten hacer crecer el programa ASAE-SEA y documentar esas experiencias que se trabajan dentro de él.

Su investigación arroja resultados interesantes sobre el trabajo que realiza ASAE-SEA al proporcionar herramientas cognitivas que coadyuven a los estudiantes a la superación de dificultades y el mejoramiento de su desempeño académico en las asignaturas de matemáticas.

Ya para finalizar el reporte de resultados de esta investigación, en el siguiente capítulo se presentarán reflexiones finales acerca de las experiencias de práctica que tiene Alfonso durante su formación y reflexiones generales con respecto a la negociación de significados en las prácticas tempranas y la formación inicial de profesores.

5.5. Reflexiones finales del caso de estudio

En este capítulo se presentan unas reflexiones del caso de estudio y su tránsito por los diferentes roles de participación en la CoP. Se resalta la disposición del profesor para compartir con nosotros sus experiencias y la información acerca de su formación. Su desempeño como tutor, profesor e investigador aporta a su desarrollo profesional y a seguir avanzando en el campo de la educación matemática. Hoy en día Alfonso está por culminar sus estudios de maestría y planea más adelante seguir con sus estudios de doctorado, continuando su investigación en la demostración.

Se recopilan los aprendizajes negociados por Alfonso en las tres componentes del Pensamiento Reflexivo del profesor. En cada una de ellas conectamos las tablas de los apartados anteriores para hacer un resumen de los significados negociados en cada rol de participación.

5.5.1. Alfonso y su Pensamiento Matemático

Se evidencia que Alfonso tiene un dominio de los contenidos y el Pensamiento Matemático que se considera bueno desde su formación inicial. De esta manera su concepción hacia algunos objetos matemáticos como función, límite y derivada cambia al interactuar con los demás participantes de la CoP.

Su interés por el trabajo con los procesos matemáticos lo lleva a inclinarse a generar el interés en sus estudiantes por el proceso de *argumentación y demostración.* Se observa que, inicialmente como tutor, el objetivo de Alfonso consiste en que sus estudiantes aprendan teoremas y definiciones, los estudien por su cuenta y los usen durante las sesiones tutoriales. Lo anterior va cambiando a medida que realiza investigación en el campo de la demostración. Ahora comprende la necesidad de acercar a los estudiantes a los objetos matemáticos a partir de sus nociones y la aplicación de estas en la resolución de problemas en un ambiente de interacción constante entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante.

En este trabajo de investigación Alfonso expresa que al enseñar se le presentan situaciones en las cuales no sabe cómo explicar ciertos temas. Admite que hay momentos donde no sabe responder a las preguntas de los estudiantes, pero, a partir de esto, reflexiona e investiga para fortalecer sus propios conocimientos y enseñarlos de forma adecuada.

Lo más importante es como se genera en Alfonso un Pensamiento Reflexivo a partir de sus prácticas profesionales desde sus prácticas tempranas.

Las prácticas tempranas permiten un cambio de pensamiento y direccionamiento por parte de Alfonso en su papel de profesor. Comprende que no es un transmisor de información y, por el contrario, es un guía para que los estudiantes construyan su propio conocimiento matemático.

5.5.2. Alfonso y su Pensamiento Didáctico

El *planteamiento de objetivos* y las *adaptaciones curriculares* realizadas por Alfonso son producto de la experiencia realizada desde su formación inicial. El trabajo realizado como tutor le permite reflexionar y mejorar en los aspectos de enseñanza, cada vez sus preguntas son más refinadas y concretas para rescatar la información que deseaba de los estudiantes.

Como investigador utilizan modelos como el cK¢ (Balacheff, 1995) para analizar las concepciones de los estudiantes y el modelo de Tulmin (Toulmin, 1958) para estudiar la estructura de los procesos de planteamiento de una conjetura y la construcción de su respectiva demostración, con miras a aportar al campo de la educación matemática.

Reportando en su trabajo inicial algunas dificultades en las demostraciones que presentan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, dando un aporte para que los profesores de Precálculo tengan previstas unas posibles dificultades que se pueden presentar en el aula de clase. En su trabajo de maestría intenta describir los tipos de demostración que usan los estudiantes en un curso de Precálculo, en el cual juega un papel importante el uso de un *software* interactivo.

Se considera que la participación dentro de la CoP le permite a Alfonso mejorar sus maneras de representar diferentes elementos matemáticos, tener una interacción fluida y coordinada con los estudiantes, y a su vez, permite que el profesional comprenda su papel como profesor y procure desarrollar los procesos matemáticos estipulados por el MEN. Además, le aporta herramientas para un mejor uso del lenguaje dentro del aula de clase acercando con mayor claridad a los estudiantes a los objetos matemáticos, específicamente a partir de nociones de variación, aproximación, tendencia, dependencia e interdependencia.

5.5.3. Alfonso y su Pensamiento Orquestal

La creación de actividades en el *software* GeoGebra para la enseñanza de la noción de límite, permite a Alfonso usar su dominio matemático y plasmarlo en el *software*. Se recuerda como presenta la situación de la paradoja de Aquiles y la tortuga para un taller que realiza (se observa en la **Figura 12**).

De manera que el *software* interactivo se convierte en un instrumento para generar la actividad matemática en las tutorías y, por supuesto, en el curso de Precálculo. Aunque hay actividades que detalla y guían al estudiante a usar el *software*, Alfonso procura mostrar más herramientas del mismo que son de ayuda para mostrar más ejemplos a los estudiantes.

Alfonso como investigador también le da importancia al uso de GeoGebra, ya que este lo ve como en una herramienta clave para que el estudiante puede ver características de un objeto matemático y comience a justificar, argumentar y demostrar las propiedades, teoremas y demás elementos que surjan en la actividad matemática del aula. Esto con el fin de desarrollar en los estudiantes el Pensamiento Variacional desde la resolución de problemas y la demostración.

6.- Conclusiones

Para el MEN, dentro de la formación de profesores se debe tener en cuenta el fortalecimiento en el campo de la investigación:

> Formar un educador de la más alta calidad científica y ética, desarrollar la teoría y la práctica pedagógica como parte fundamental del saber del educador; fortalecer la investigación en el campo pedagógico y el saber especifico; y preparar educadores a nivel de pregrado y postgrado para los diferentes niveles y formas de prestación del servicio educativo (Ley 115 de 1994, art. 109).

Se recuerda que para dar respuesta a la pregunta ¿qué significados logran negociar (en términos de aprendizajes) educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas mediante tutorías académicas en un programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes de Cálculo Diferencial? Y cumplir con el objetivo de determinar y explicar significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) desarrollados por educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas mediante tutorías académicas, se considera la CoP de educadores matemáticos en formación inicial de ASAE-SEA y el curso de Precálculo (dentro del mismo programa) durante los años 2012 a 2016.

Ahora bien, las reflexiones finales de esta investigación se presentarán en tres secciones representadas por los tres aspectos del Pensamiento Reflexivo del profesor de matemáticas en formación. Paralelamente, se procederá a dar cuenta de algunas cuestiones que quedan abiertas en la investigación, las cuales ofrecen, por otro lado, posibles líneas de profundización.

Alfonso logró identificar algunas dificultades al reflexionar en las actividades realizadas en sus prácticas tempranas y profesionales durante su paso por ASAE-SEA. Dicho proceso se dió gracias a que él contaba con participantes de la CoP que tenían un papel de moderadores en cada rol. En su participación como tutor practicante contó con la intervención del profesor de Didáctica del Cálculo y el coordinador de ASAE-SEA, durante su trabajo como tutor auxiliar seguía contando con la moderación del coordinador del programa y en su rol de profesor e investigador se encontraba interactuando con los integrantes de la comunidad, pares académicos que reflexionan sobre la enseñanza del Cálculo Diferencial.

La participación en el programa de tutorías y en la CoP posibilita la reflexión de los profesores en formación y en ejercicio para lograr identificar no solo dificultades en sus estudiantes si no también en ellos mismos, con el objetivo de superarlas y mejorar sus prácticas tempranas aportando a su desarrollo profesional.

A continuación, se presentan algunos significados negociados desde cada una de las componentes del pensamiento reflexivo (mostrando el progreso que se observa, en especial, en el dominio de algunos conceptos matemáticos y cambios en la forma de enseñar del caso de estudio).

En cada apartado se evidencian los significados negociados de cada componente durante toda la formación. Cabe aclarar que en la mayoría de las situaciones los componentes del pensamiento reflexivo se ven mezclados, pues ellos están conectados entre sí. Sin embargo, para clasificarlos se ubicarán seleccionando el que más sobresale de los tres.

Significados negociados en el Pensamiento Matemático

En cuanto a los significados negociados en el Pensamiento Matemático, se observa un desarrollo en el recorrido realizado por Alfonso, desde su paso por el programa ASAE-SEA como tutor-practicante hasta su rol de investigador en formación. Dicha negociación se evidencia específicamente en:

Un cambio de concepciones en cuanto al concepto de función. Él como **tutor auxiliar** entiende la función como una ley de correspondencia (influenciado por el libro de Stewart (2008)) y como **profesor de Precálculo e investigador en formación** la concibe como interdependencia de variables (apoyado en el Pensamiento Variacional y participación en la CoP).

A partir del análisis, se identifica que, en la negociación de significados desde las prácticas tempranas, en espacios como los generados por el programa ASAE-SEA en la UIS los profesores de matemáticas en formación pueden lograr:

Reconocer la función como un concepto importante del Cálculo Diferencial y comprenden las diferentes maneras de representarlas.

Visualizar la función como una relación de interdependencia entre variables y usan sus representaciones según el contexto en el cual se trabaje.

Estudiar el concepto de límite a partir de la tendencia y la aproximación.

Interpretar la derivada como una razón de cambio, una función, un límite y, en algunas ocasiones, como un máximo relativo, a partir de problemas y situaciones que históricamente dan origen al Cálculo Diferencial.

Fortalecer el uso del *lenguaje matemático*, el cual va cobrando fuerza a medida que va avanzando en su carrera profesional. El dominio del lenguaje fue progresivo y le permite identificar debilidades y fortalezas en sus estudiantes al momento de comunicar ideas, ya que como profesor de Precálculo, puede identificar errores de los estudiantes en la socialización, en cuanto al lenguaje que usan (ver apartado 5.3.1.), y los va llevando a usar un lenguaje más apropiado dentro de las actividades para poder realizar demostraciones cuando es necesario.

A partir de lo anterior, se concluye que un profesor en formación inicial, que participe como tutor dentro del programa ASAE-SEA, puede lograr seguridad en el dominio de los contenidos matemáticos propios del Cálculo Diferencial. De igual manera que Botello (2013), se considera que las tutorías permiten a los profesores en formación inicial recordar contenidos del Cálculo Diferencial, reaprender contenidos de este curso que no han quedado claros o están mal aprendidos y aprender contenidos que no alcanzan a ver en su formación matemática.

El manejo de los contenidos se puede evidencia en el cambio de mentalidad de los profesores en formación, al pensar el Cálculo a partir de la resolución de problemas y dejando a un lado una metodología tradicional, basada sólo en memorizar definiciones y teoremas (Alsina, 2001). Las prácticas tempranas afirman en un profesor sus conocimientos matemáticos y permiten que refinen sus ideas acerca del Cálculo Diferencial. Además, un profesor en formación a través de la práctica y la interacción con la CoP logra interrelacionar conceptos como función, límites y derivada, con nociones como interdependencia, variación, cambio, tendencia y aproximación (como se muestra en el apartado 5.3.1.).

Se considera que el trabajo en conjunto del programa ASAE-SEA y el profesor de Didáctica del Cálculo posibilita el desarrollo del Pensamiento Matemático de los profesores en formación inicial, y permite un estudio desde lo epistemológico de los conceptos mencionados anteriormente.

La CoP ha sido un espacio en el cual los profesores en formación inicial y los profesores en ejercicio han compartido sus experiencias. Sumado a esto, todos ellos consideran que tanto los expertos como los que apenas están iniciando pueden aportar al desarrollo del conocimiento matemático. Grossman, Wilson y Shulman (1989) encuentran que el conocimiento de la materia por los profesores afecta a la vez el contenido y el proceso de la instrucción, lo cual influye a la vez en lo que los profesores enseñan y en cómo lo enseñan. La interacción dentro de la CoP permite que los profesores compartan su conocimiento de la materia y este se enriquezca dentro de esta interacción.

Significados negociados en el Pensamiento Didáctico

La enseñanza de las matemáticas y en especial del Cálculo Diferencial se vuelve un reto para las universidades que se interesan por disminuir la deserción de los estudiantes. Como reflexión final se evidencia que las prácticas tempranas en la UIS, en el programa ASAE-SEA, posibilitan que el profesor reflexione sobre las situaciones que se presentan en su actividad docente, para mejorar y tener más experticia en su labor de enseñanza y, a su vez, se posibilita un cambio de visión en cuanto a cómo debe ser la interacción entre el profesor y el estudiante.

La planeación de clase y actividades va tomando fuerza durante la formación de Alfonso. Al inicio, el caso de estudio considera que la preparación de conocimientos matemáticos es únicamente a lo que se debe dedicar, cuestión que se debe a su creencia de que para ser profesor de matemáticas basta con saber y tener dominio de las matemáticas (5.4.2.) No obstante, durante su proceso de formación se va potenciando su visión de incluir en igual grado de importancia los aspectos didácticos en la enseñanza, así como la preparación de las clases no sólo valorando saberes matemáticos, sino también valorando las distintas maneras de representar estos saberes, para acercarlos a los estudiantes de manera que comprendan y se posibilite un aprendizaje y no una memorización de contenidos para usarlos de forma mecánica. Para Shulman (1986), en el conocimiento de contenido pedagógico se incluyen los temas que se enseñan habitualmente en un área de contenidos, las formas más corrientes de representar estas ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones y las formas de representar y formular el contenido para hacerlo comprensible a los estudiantes. Para ello, el profesor tiene que tener a mano un arsenal de formas de representación, algunas derivadas de la investigación mientras que otras derivadas de la práctica.

Parada (2011) afirma que el profesor necesita concebir la planeación de tareas como una práctica profesional prioritaria. La planeación dentro de la CoP es un aspecto importante del proceso de reflexión para la acción, ya que el tutor debe desarrollar y diseñar actividades para la enseñanza del cálculo. El profesor de Precálculo, por su parte, no diseña las actividades (ya están diseñadas), pero junto a la comunidad realiza adaptaciones a partir de experiencias posteriores con el fin de mejorar la aplicación y el desarrollo de las actividades del curso.

La participación dentro de la CoP permite que un profesor en formación inicial desarrolle una habilidad de representar diferentes elementos matemáticos, de manera que, al realizar la actividad matemática, se gestione una interacción fluida y coordinada con los estudiantes.

La participación en la CoP permite que el profesional comprenda su papel como profesor y gestione dentro del aula de clase, los procesos planteados por el MEN (2006) (resolución de problemas, argumentación, elaboración y ejercitación de procedimientos, comunicación y modelación). Además, el profesor perfecciona el uso del lenguaje dentro del aula de clase para que el estudiante se acerque a los objetos matemáticos a partir de nociones de variación, aproximación, tendencia, dependencia e interdependencia.

A partir del estudio realizado, los profesores negocian significados en el Pensamiento Didáctico a partir de las prácticas tempranas en ASAE-SEA de las siguientes maneras:

Consideran los cinco procesos generales de la actividad matemática planteados por el MEN en los estándares básicos de competencias matemáticas y los desarrollan dentro de sus sesiones de estudio con los estudiantes beneficiarios y estudiante de Precálculo.

Relacionan diferentes representaciones de un concepto matemático para que el estudiante realice conexiones y llegue a interpretar y comprender mejor los conceptos y sus definiciones.

Planean sus clases diseñando actividades con un enfoque de resolución de problemas, entre las actividades diseñadas están las guías, evaluaciones y actividades usando GeoGebra.

Determinan objetivos de clase y desarrollan actividades en la reflexión en la acción para alcanzarlos.

Interactúan de forma constante con los estudiantes realizando preguntas que posibilitan el proceso de argumentación en los estudiantes beneficiarios

Convierten las clases en espacios de interacción y permiten que los estudiantes opinen, demuestren, conjeturen y argumenten sus respuestas usando elementos propios del Cálculo Diferencial.

Dirigen a los estudiantes a usar un lenguaje matemático adecuado a la situación problema que desarrollan.

Como investigador se interesa por el campo de la educación e intenta resolver problemas que percibe como tutor y profesor dentro de la CoP, aportando trabajos que posibiliten el aprendizaje y la enseñanza del cálculo de una manera más eficaz.

La metodología del curso de Precálculo influye en el cambio de mentalidad del profesor, pues su estructura permite que el profesor deje a un lado la clase tradicional donde sólo él participa, y abre la oportunidad para que sus estudiantes comuniquen sus ideas e interactúen con los demás compañeros (reportado en los apartados 5.1.2. 5.2.2. 5.3.2.).

Significados negociados en el Pensamiento Orquestal

El uso de herramientas tecnológicas permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes, pues las representaciones realizadas en *software* hacen que el aprendizaje sea significativo para ellos (Barrera y Santos, 2001). Lo anterior porque los estudiantes interactúan con el programa, determinando las variables, identificando patrones y formulando sus propias preguntas o problemas. En cuanto a este pensamiento se puede observar un

Alfonso que inicialmente hace uso del *software* GeoGebra para mostrar gráficas de funciones o corroborar si su gráfica está bien hecha. Con el tiempo, como tutor auxiliar, lo comienza a implementar para realizar sus sesiones tutoriales (ver apartados 5.1.3. 5.2.3. 5.3.3.). La participación en la CoP de profesores de Precálculo, caracterizada por Moreno (2015), permite que Alfonso pase de ser un profesor novato a un profesor experimentado en el uso de las tecnologías y en el dominio del programa, y de esta manera puede usar diferentes elementos del *software* para la enseñanza de las nociones del cálculo.

Luego de dominar herramientas del *software* GeoGebra, Alfonso, como investigador, lo incorpora a su trabajo en el cual intenta determinar los tipos de demostración usados por los estudiantes en un curso de Precálculo. Para Alfonso, GeoGebra se convierte en una herramienta clave para que el estudiante identifique características de un objeto matemático y comience a justificar, argumentar y demostrar lo que hace. El MEN (2004) describe que a través de situaciones presentadas con herramientas tecnológicas como el *software* que se mencionan, se pretende que los estudiantes hagan una descripción de la variación, formulen conjeturas, hagan predicciones y las verifiquen. Además, el profesor, interpreta propiedades, teoremas y demás elementos que usa para generar la actividad matemática, esto con el fin de activar en los estudiantes el Pensamiento Variacional desde la resolución de problemas y la demostración.

A partir del estudio realizado, los profesores negocian significados en el Pensamiento Orquestal a partir de las prácticas tempranas de las siguientes maneras:

Incorporan herramientas tecnológicas como el *software* GeoGebra en las actividades tanto de tutorías como en las clases de Precálculo.

Planean las clases comprendiendo la necesidad de incorporar diferentes instrumentos que posibiliten el aprendizaje.

Organizan las actividades de manera que el estudiante realice un trabajo a lápiz y papel, demuestre, explique y exponga sus ideas para resolver las situaciones problema.

Incluyen elementos que identifiquen el problema de manera que el aprendizaje se haga de forma dinámica y las variaciones que se presenten se hagan más reales para los estudiantes.

Selecciona los recursos necesarios dependiendo del trabajo y el problema que vaya a resolver con sus estudiantes.

Como investigadores en formación, realizan estudios de situaciones en las cuales se incluye GeoGebra identificando las dificultades que pueden ser superadas con el uso de este programa.

Se considera que GeoGebra se convierte en un recurso que hace parte del repertorio compartido en la CoP, dado que los profesores han incorporado este recurso a sus actividades de clase, además, han desarrollado estrategias de enseñanza y han diseñado actividades para atender las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Otras reflexiones

Con lo anterior se evidencia el impacto que genera la participación en un programa de prácticas tempranas (Formación inicial) en las prácticas profesionales (Desarrollo profesional) de los profesores en formación. Espacios como los posibilitados en la UIS, permiten un aprendizaje por parte de los profesores y permiten romper la brecha entre la teoría y la práctica. Se considera que la relación de estudiante –beneficiario favorece el aprendizaje de ambos pues el hecho de ser una relación "entre pares" hace que haya más confianza para realizar preguntas y comunicar ideas.

La participación en la CoP impulsa a los profesores en formación inicial y en ejercicio profesional a considerar estudios más avanzados como maestrías y doctorados. Los profesores participantes ven la necesidad de realizar una capacitación continua en su trabajo con las matemáticas, de manera que no se conforman con los saberes que tienen hasta el momento, sino que consideran que su desarrollo profesional debe ser constante.

Se considera que el área afectiva del profesor sobresale durante su formación y juega un papel importante, pues tienen un compromiso más allá de lo profesional por mejorar la enseñanza de las matemáticas, sintiendo una responsabilidad de alguna manera "paternal" por sus estudiantes, quienes motivan al profesor a seguir buscando estrategias de enseñanza.

Quedan cuestiones abiertas como la enseñanza del cálculo en instituciones educativas de educación secundaria: ¿cómo afrontan los profesores las actividades presentadas en grados superiores de la educación media, para desarrollar el Pensamiento Variacional de los estudiantes que ingresan a la universidad y cursan asignaturas de matemáticas? ¿Qué aprendizajes significativos lograrían profesores de básica primaria si participaran de una CoP?

Se considera que el objetivo de impactar a los profesores desde este programa de prácticas tempranas no se limita a alcanzar la matemática de nivel superior. Es necesario que el papel del profesor permita generar actividad matemática en todos los niveles educativos y, de igual modo, se formen profesores capaces de innovar en cualquier nivel escolar.

Referencias bibliográficas

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L. y Novotná, J. (2005). Reflection on an emerging field: Researching mathematics teacher education. Educational Studies in Mathematics, 60(3), 359-381.

Alsina, Á. (2001). La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético, Tesis doctoral editada en http://www.tdcat.cesca.es/TDCat-0613101-113720, Bellaterra, Servei de Publicacions U.A.B.

Andreozzi, M. (2011). Las prácticas profesionales de formación como experiencias de pasaje y tránsito identitario. Memoria Académica. Archivos de Ciencias de la Educación 4a. época. 2011, Año 5, No. 5, p. 99-115

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5: 25-15. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Balacheff, N.(1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège, Tesis doctoral, Grenoble, Francia. [Traducción al español: Balacheff N., Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Bogotá, Colombia: una empresa docente, 2000.].

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995 (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59 (5); 389-407.

Barajas, C. (2015). Elaboración, Comparación y ejercitación de Procedimientos: Una mirada desde la Resolución de Problemas que implican Fenómenos de Variación. Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Barrera, F. y Santos, M. (2001). Students' use and understanding of different mathematicalrepresentations oftasksin problemsolving instruction. Proceedings of the

Twenty Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1, pp. 459-466. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Bishop, A., Clements, M., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (1996). (eds) International handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer.

Blanco, L. (1998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas.Cultura y Educación, 9, 77-96.

Blanco, L., Mellado, V. Y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y Formación de Profesores. Revista de Educación, 307, 427 – 446.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23, 247-285.

Botello, C. (2013). Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de Cálculo Diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas. Tesis de maestría en educación matemática. Bucaramanga, Colombia.

Brousseau G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, no. 19 (versión castellana 1993).

Brockbank, A. y McGill I. (2002). Aprendizaje reflexivo en la Educación Superior. Madrid, España: Ediciones Morata.

Camacho M., Hernández, J. y Socas, M. (1995). Concepciones y actitudes de Futuros profesores de secundaria hacia la matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En Blanco, L. y Mellado, V. (1995). La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal. Badajoz. Imprenta de la Excma. Diputación de Badajoz. 81 – 97.

Cardeñoso, J., Flores, P., y Azcárate, C. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.

Carrillo, J. (1998). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones. Huelva. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Carrillo, J. (2000). La formación del profesorado para el aprendizaje de las Matemáticas. UNO, 24,79-91.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Rojas, F. y Prat, M. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. Enseñanza de las Ciencias, 26(1), 67-76

Castro, E. y Ruíz, J. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (pp. 89-108). Madrid, España: Pirámide.

Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Developing and Researching profesional Knowledge with Primary Teachers. En J. Novotná (ed*) European Research in Mathematics Education II,* 1, 269-280. Praga: Charles University.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. Investigación en la Escuela, (61), 23-36. Recuperado de: http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/61/R61_2.pdf

Contreras, L. (1999b). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. These de 3eme cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nochols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. Journal of Mathematical Behavior, 15, 167-192.

D’Amore, B, (2006). Didáctica de la matemática. Colombia: Editorial Magisterio.

Dewey, J (1989). Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemáticas Educativas II (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R, (1998). Graphiques et Equations: L' Articulation de deux registres. Annales Didactique et Sciencies Cognitives 1 (pág. 235-253)

Escudero, D., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA, 10(1), 53-77.

Escudero, D, (2015). Una caracterización al conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de Ciencias Sociales. En Pagés, J.; Estepa, J. y Travé, G. (Eds.) Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del Pensamiento Variacional. Revista Científica. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. ISSN 0124-2253

Flores, P. (1998). Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Granada. Comares.

Flores P. (2004). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. En Castor E., De la Torre E. (Eds.) Investigación en Educación Matemática. VIII Simposio de la SEIEM. A Coruña: Universidad de da Coruña. http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Font. Et. Al. (2012). Una perspectiva competencial sobre la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas https://core.ac.uk/display/20482743/tab/similar-list

Freudenthal, H.(1968). Why to teach mathematics so as to be useful?, Educational Studies in Mathematics 1, 3–8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea, Educational Studies in Mathematics 3, 413–435.

Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an Educational Task, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 2, Número 3, pp. 11-44.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Gómez, P. (2005). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. Revista EMA, 10(1), pp. 242-29.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Grossman, P., Wilson, S., y Shulman, L. (1989). “Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching.” Knowledge base for the beginning teacher. Ed. M.C. Reynolds. New York: Pergamon Pres.

Guacaneme, E. Obando, G. Garzón, D. y Villa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12220/11491

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008) Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, Reston VA, v. 39, n. 4, p. 372 - 400, July 2008.

Hitt, F. y Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. Proceedings PME-NA XXIII, Utah, USA, 2001, 1, pp. 169-176.

Howson, G. (ed), (1973). Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge U. Press: Cambridge.

Ibáñez, C. (2007) Un análisis crítico del triángulo pedagógico. Una propuesta alternativa. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2(32), 435-456.

Ímaz J. y Moreno A. (2009). Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. El Cálculo y su Enseñanza, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Imbernon F. y Bozu, Z. (2009). Creando comunidades de práctica y conocimiento en la Universidad: una experiencia de trabajo entre las universidades de lengua catalana.

RUSC. Universities and Knowledge Society Journal, marzo. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=78011179004

Inhelder, B., y Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures. New York: Basic Books. doi:10.1037/10034-000

IESALC, UNESCO, y UPN. (2007). La formación de los docentes en Colombia - Estudio Diagnóstico. Coordinación: Gloria Calvo (pág. 29). Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina, UNESCO y Universidad Pedagógica Nacional.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. British Journal of In-service Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. British Journal of In-service Education, 19, 37-42. Education, 19, 37-42.

Juárez, M. (2004). Reseña de "una revisión de las comunidades de práctica y sus recursos informáticos en internet" de Ettiene Wenger. Revista Mexicana de Investigación Educativa, enero-marzo, 235-244. ISSN 1450-6666. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14002015

Karplus, P., Pulos S., y Stage E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Leah and M. Lardau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Krainer, K. (1998). Some considerations on problems and perspectives of in-service mathematics teacher education. En C. Alsina et al (eds) 8th International Congress on Mathematics Education: Selected lectures. Sevilla: SAEM Thales, 303-321.

Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. Educación Matemática. In: J. Kilpatrick, L. Rico and P. Gómez, ed., Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia, 1st ed. Bogotá: Una empresa docente, pp.2, 13.

Kilpatrick, J. (2000). Research in mathematics education across two centuries. In M. A. Clements, H. H. Tairab, & W. K. Yoong (Eds.), Science, mathematics and technical education in the 20th and 21st centuries (pp. 79–93). Gadong: Universiti Brunei Darussalam.

Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics. Washington: National Academy Press.

Larios,M; Font,V; Spindola, P.; Sosa,C. y Gimenez, J. (2012). El perfil del docente de matemáticas. En Eureka, 27, 17-36. ResearchGate. Retrieved 10 May 2016, from https://www.researchgate.net/publication/276271889_LariosM_FontV_Spindola_P_SosaC_GimenezJ_2012_El_perfil_del_docente_de_matematicas_En_Eureka_27_17-36

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. Conferencia en el III encuentro de programas de formación inicial de profesores de matemáticas, universidad pedagógica nacional, santa fe de Bogotá, Colombia.

Llinares, S., J. Valls y A. Roig. (2008), "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas", Educación Matemática, 20, núm. 3, pp. 31-54.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas, Números, 78, pp. 5-16.

López, R. J. (1999), Conocimiento docente y práctica educativa. El cambio hacia una enseñanza centrada en el aprendizaje, Málaga, Ediciones Aljibe.

López, E. (2014). Estrategias que emergen de la resolución de problemas de variación de estudiantes de Precálculo. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, no publicada. Bucaramanga, Colombia.

McCombs, B. y Whisler, J. (1997). Learner-centered classroom and school, San Francisco, Jossey-Bass Publishers.

Mellado, V. Ruiz, C. y Blanco, L. J. (1997). Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros. Bordon, 49 (3), 275-288.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Colombia.

MEN. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Autor

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Colombia. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN. (2013). Sistema Colombiano de formación de educadores y lineamientos de política. Colombia. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-345822_ANEXO_19.pdf

MEN. (2014). Lineamientos de Calidad para las licenciaturas en educación. Colombia. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357233_recurso_1.pdf

MEN (2015). Estrategias para la Permanencia en Educación Superior: Experiencias Significativas. Bogotá: Autor.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24* (1), 133-157.

Moreno, D. (2015) Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de Precálculo. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Bucaramanga, Colombia.

Muñoz, M., y Carrillo, J. (2012). Buenas prácticas en la Universidad de Huelva: El conocimiento profesional en la acción del profesor de “Matemáticas y su Didáctica”. REDU. Revista de Docencia Universitaria, 10(1), 177-198. http://hdl.handle.net/10272/6014

Murcia, M. (2012). Tutorial de Geogebra: “Geogebra Apoyo tecnológico para la enseñanza del cálculo”. Universidad Pedagógica Nacional

Nagel, M y Montenegro, F. (2012). GeoGebra en la escuela secundaria. Relato de experiencia de formación a distancia con profesores del nivel. Revista Premisa, 14, 55, nov. 2012, Sociedad Argentina de Educación Matemática, pp. 32-45.

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

OREALC / UNESCO. (2006). Modelos Innovadores en la Formación Inicial Docente: Estudio de casos de modelos innovadores en la formación docente en América Latina y Europa. Santiago de Chile.

Planas, N. y Alsina, A. (2009). Educación matemática y buenas prácticas. Barcelona: Editorial Graó. ISBN: 9788478276950

Parada, S. (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. (Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. y Fiallo, J. (2014). Perspectivas para formar profesores de matemáticas: disminuyendo la brecha entre la teoría y la práctica. Revista Científica. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. ISSN 0124-2253

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su Pensamiento Didáctico. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME). 17 (1): 1- 31. México. ISSN 1665-2436.

Parada, S. (2015). Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial: problema y contexto de investigación. En G. Obando (ed). 16º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá. CO: Asociación Colombiana de Matemática Educativa. 1-10.

Parada, S. (2016). Una estructura curricular para Cálculo Diferencial: alternativa y objeto de estudio. Revista enseñanza del Cálculo. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F. ISSN: 2007-4107. http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=7&index_web=13&index_mgzne

Parada, S., Conde, A. y Fiallo, J. (2016). Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación. Bolema- Mathematics Education Bulletin V: 30, No. 56, pp.1031-1051. ISSN 1980-4415. http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2016000301031&script=sci_abstract&tlng=es

Pólya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. Princeton University Press, Princeton. Hay traducción: Cómo plantear y resolver problemas (1965). Trillas, México.

Ponte, J.P. (1992). Concepções dos Profesores de Matemática e Processos de Formação. En Brow, M.; Fernandes, D.; Matos J, y Ponte, J.: Educação Matemática. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa.185-239.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: APM.

Ponte, J. da y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Pas, present and future (pp. 461-494). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Ponte, J & Quaresma, M (2012). Prácticas profissionais dos profesores de Matemática. AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemáticas-2012, 1, 65-86. ISSN-e 2254-4313.

Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. Tomado de http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html

Ribeiro, C., Monteiro, R., & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. Educación matemática, 22(2), 123-138. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000200006&lng=es&tlng=es.

Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 17-28). Granada, España: Departamento. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rojas, N. Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29(51), 143-166. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Rueda, N. (2016). Habilidades Cognitivas Asociadas al Proceso de Representación de Fenómenos de Variación. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Jaén, España.: Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya.

Ruiz, G., Seoane, A. y Di Blasi, M. (2008). “Uso de recursos informáticos para potenciar las diferentes representaciones del concepto teorema fundamental del cálculo”. II REPEM – Memorias. Santa Rosa, La Pampa, Argentina. Agosto 2008. Consultado por Internet el 06 de agosto del 2012. Dirección de internet: http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/repem/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Propuestas/C25.pdf

Sadovky, P. (2005). La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Humberto Alagia, Ana Bressan y Patricia Sadovsky (2005), Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Santamaría, A. (2016). Habilidades procedimentales desarrolladas por estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento en matemáticas. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Santamaría, A. y Parada, S. (2016). Habilidades procedimentales en Cálculo Diferencial desarrolladas por la interacción entre pares académicos. Revista Electrónica de Matemáticas. SAHUARUS. 1(2): ISSN 2448-5365.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Sfard, A., Hashimoto, Y., Knijnik, G., Robert, A. y Skovsmose, O. (2004). The relation between research and practice in mathematics education. Trabajo presentado en 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen

Schwarzenberger, R. y Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching, 82,44–49.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). "Knowledge and teaching: Foundations of new reform", Harvard Educational Review, 57, núm. 1, pp. 1-22.

Shulman, L.S. y G. Sykes (1986). "A national board for teaching? In search of bold standard", Paper commissioned for the task force on teaching as a profession, Carnegie Forum on Education and the Economy, marzo.

Sierpinska, A. (1985). «Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite», Recherches en Didactique des Mathématiques, 6, 1, pp. 5-67.

Schön, D. A. (1983). The reflective practitioner. Londres: Temple Smith.

Stewart, J. (2008) Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. Sexta edición. ISBN-13: 978-607-481-317-3 ISBN10: 607-481-317-5.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, No 12, pp, 151-169.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En Grouws, D.A. (ed.). Handbook of research on Mathematics teaching and learning., Nueva York. MacMillan, 127-146.

Treffers, A. (1987). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Toulmin, S. (1958). The use of argument, Cambridge University Press.

UIS. (2012). Informe de autoevaluación con fines de acreditación. Programa Licenciatura en Matemáticas. Bucaramanga, Colombia. Recuperado de: http://matematicas.uis.edu.co/sites/default/files/paginas/archivos/Informe %20final %20de %20Acreditaci %C3 %B3n %20Licenciatura %20en %20Matematicas.pdf.

Ugalde, W. (2014). Funciones: Desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza y aprendizaje. Revista digital Matemática, Educación e internet. 14, Núm. 1. ISSN 1659-0643

Valencia, W. (2014). Acompañamiento, asesoría pedagógica y apoyo tutorial a estudiantes. Cuarta conferencia latinoamericana sobre el abandono en la educación superior. Colombia. http://clabes2014-alfaguia.org.pa/

Vega, M. (1990). Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1987). "150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching", J. Calderhead (ed.), Exploring Teacher Thinking, Londres, Casell, pp. 104-124.

Zabala, A. (1995). La práctica educativa. Cómo enseñar. Barcelona: Grao.

Zapata, M., Blanco, L. y Contreras, L. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. REIFOP, 12 (4), 109-122. (Enlace web: http://www.aufop.com/).

CARTA DE AUTORIZACIÓN

Adjuntamos la carta de autorización del profesor caso de estudio, quien tuvo toda la disposición de colaborar con esta investigación.

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, 15 Febrero 2016

Carta de Autorización

Yo Edwin López Velandia identificado con cédula de ciudadanía n° 1101048472 de Valle de San José, autorizo a Sully Lineth Moreno Gómez, estudiante de Maestría en Educación Matemática a usar mi información dentro del programa de tutorías ASAE, realizar grabaciones en las clases que realizo en el curso de precálculo en la UIS y realizarme una entrevista. Todo lo anterior para la realización de su proyecto de grado titulado: Prácticas profesionales tempranas en la formación inicial de profesores de matemáticas: una experiencia docente en cálculo diferencial, cuyo objetivo es Determinar y explicar significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) desarrollados por educadores matemáticos que han realizado prácticas tempranas mediante tutorías académicas.

Firma:

Edwin López Velandia

1101048472
valle de san José

Figura 35. Carta de Autorización del Caso de Estudio