

PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS
EN MEDIOS POROSOS, SATURADOS POR
FLUIDOS, BASADOS EN LA TEORÍA DE BIOT

INGRID PAOLA TELLO GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2010

PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS
EN MEDIOS POROSOS, SATURADOS POR
FLUIDOS, BASADOS EN LA TEORÍA DE BIOT

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICA

INGRID PAOLA TELLO GUERRERO

DIRECTOR: RAFAEL TORRES AMARIS, PH.D.
CODIRECTOR: HERLING GONZALEZ ALVAREZ, M.SC.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2010

*A mi nonita Teresa,
con todo mi amor.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por mi vida y por todos los privilegios que me ha brindado día a día.
A mi amada familia por ser mi mayor motivación y brindarme su apoyo incondicional.
A mis directores Herling y Rafael por su paciencia, esmero y cariño.
A Andrés Calle por ser un excelente director de grupo de investigación.
A Sofia y Sebas por ser mi gran alegría.
A Jose por ser mi complemento.
A Silvia, Sofia y Pilar por estar siempre en mi corazón.
A Cathe y Jose por ser mis amigos incondicionales.
A Vivi y Ani por ser mis grandiosas amigas UIS.
A Tati por estar presente en tantos momentos.
A Martin, Omar, Migue, Oswaldo, Edgar, David y Juanca por gratos momentos compartidos.
A Beto, Wilson, Leydy, Lore, Cristian, Elkyn, Diego, Camilo y Gabi, por ser el mejor final en este camino.
A todos los integrantes del grupo Petrosísmica y al Instituto Colombiano del Petróleo.
A la Escuela de Física y la Universidad Industrial de Santander.

A todos los que no menciono pero han enriquecido y apoyado esta etapa de mi vida, muchas gracias.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	12
ABSTRACT	13
INTRODUCCIÓN	14
1. GENERALIDADES	17
1.1. Propagación de ondas en medios elásticos	17
1.2. Sísmica de Reflexión	18
1.3. Ondas sísmicas	18
2. TEORÍA DE BIOT PARA MEDIOS POROSOS	19
2.1. Densidad de Energía	19
2.2. Coeficientes Elásticos	21
2.3. Esfuerzos Efectivos	23
2.4. Potencial de Disipación	26
2.5. Ecuaciones de Movimiento	26
2.6. Energía cinética	27

ÍNDICE GENERAL	8
2.7. Operador Viscodinámico	28
3. ANÁLISIS DE ONDAS COMPRESIONALES	30
3.1. Solución de onda plana	31
4. ANÁLISIS DE ONDAS TRANSVERSALES	33
4.1. Solución de onda plana	34
5. ANÁLISIS DE VELOCIDADES	35
5.1. Factores que afectan las velocidades sísmicas	35
5.2. Velocidades ondas compresionales V_p	36
5.3. Velocidades ondas transversales V_s	39
6. MODELADO	43
6.1. Modelo de Capas	43
6.2. Solución numérica	44
6.2.1. Método de Diferencias Finitas Dominio Temporales	44
6.2.2. Modelo matemático	47
6.2.3. Construcción del modelo discreto	49
7. RESULTADOS	51
7.1. Simulación	51
7.2. Trazas Sísmicas	53

ÍNDICE GENERAL	9
8. CONCLUSIONES	56
APÉNDICES	58
A.1. Tensor Elástico	58
A.2. Notación	59
REFERENCIAS	61

ÍNDICE DE FIGURAS

5.1. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> saturadas por agua, gas y petróleo.	40
5.2. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> y <i>Shales</i> saturadas por agua.	40
5.3. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> y <i>Shales</i> saturadas por petróleo.	41
5.4. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> y <i>Shales</i> saturadas por gas.	41
5.5. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> con porosidades de 0.40, 0.30 y 0.20 saturadas por agua.	42
5.6. Velocidad onda S contra frecuencia para <i>Sandstone</i> con permeabilidades de 1 D y 0.5 D saturadas por agua.	42
6.1. Modelo de reservorio donde las capas de <i>shale</i> se consideran rocas sellantes, la roca <i>sandstone</i> son las rocas almacenadoras y es saturado por combinaciones de fluidos.	44
6.2. Modelo de operadores de Diferencias Finitas usando malla intercalada.	49
7.1. Captura de pantalla. <i>Sandstone</i> saturadas por agua-petróleo, no se observan variaciones de velocidad.	51

7.2. Captura de pantalla. <i>Sandstone</i> saturadas por petróleo-gas, se observa un aumento en la velocidad para la zona que contiene petróleo.	52
7.3. Captura de pantalla. <i>Shales</i> (izquierda), <i>Sandstone</i> (derecha) se observa un aumento significativo en las <i>Sandstone</i>	52
7.4. Captura de pantalla. Variaciones de porosidad en rocas <i>Sandstone</i> saturadas por agua se observa un leve aumento en la velocidad para porosidad de 0.30 en comparación con porosidad de 0.40	53
7.5. Traza sísmica modelo de capas saturadas por agua (izquierda) y petróleo (derecha), no se evidencian variaciones.	53
7.6. Traza sísmica modelo de capas saturadas por petróleo (izquierda) y gas (derecha), no se evidencian variaciones.	54
7.7. Traza sísmica modelo de capas <i>Sandstone</i> (derecha), <i>Shales</i> (izquierda), se evidencian variaciones significativas, lo anterior concuerda con resultados obtenidos en análisis de velocidades	54
7.8. Traza sísmica modelo de capas variando porosidad, no se evidencian variaciones significativas, lo anterior concuerda con resultados obtenidos en análisis de velocidades	55

RESUMEN

TÍTULO: PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS POROSOS, SATURADOS POR FLUIDOS, BASADOS EN LA TEORÍA DE BIOT ¹

AUTOR: TELLO GUERRERO, Ingrid Paola.²

PALABRAS CLAVES: Diferencias Finitas dominio temporales, parámetros poroelásticos, sandstone, Shale.

RESUMEN:

Maurice Biot desarrolló una teoría que permite estudiar el fenómeno de propagación de ondas en medios porosos saturados por diferentes fluidos. A partir de las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas de la formulación de Biot se plantea una solución usando el esquema de diferencias finitas dominio temporales 2D, la precisión y la estabilidad del método son mantenidas por la discretización de malla intercalada. Los resultados obtenidos para el modelo de propagación elástica muestran que la variación de los parámetros del medio poroso genera cambios significativos en las velocidades sísmicas debido a los efectos de absorción de energía de las ondas dentro de dicho medio. Las velocidades de las ondas P y S son estudiadas desacoplando el sistema de ecuaciones de movimiento, esto permite analizar que parámetros afectan las velocidades sísmicas. Los materiales de estudio son rocas *sandstone* y *shale* y los fluidos de interés son agua, gas y petróleo. Buscando estudiar la relación entre velocidades y parámetros del medio se consideran tres pruebas. Primero, las rocas *sandstone* son saturadas por agua, gas y petróleo. En el segundo experimento, las rocas *sandstone* y *shale* son comparadas cuando están saturadas por un fluido. En el tercer experimento, parámetros específicos de las rocas son cambiados, como porosidad y permeabilidad.

¹Trabajo de Grado.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Rafael Torres Amaris, Ph.D. Codirector: Herling Gonzalez Alvarez, M.Sc.

ABSTRACT

TITLE: SEISMIC WAVE PROPAGATION IN POROUS MEDIA, SATURATED BY FLUIDS, BASED ON THE BIOT'S THEORY.¹

AUTHOR: TELLO GUERRERO, Ingrid Paola.²

KEY WORDS: Finite-difference time domain , poro-elastic parameters , sandstone, Shale.

ABSTRACT:

Maurice Biot developed a theory in 1950 to study the wave propagation phenomenon in porous media saturated by different fluids. From equations of motion and constitutive relations obtained by Biot's formulation is raised a solution using the scheme of 2D finite-difference time domain, the precision and the stability of the method are kept by the staggered-grid formulation. The results for the elastic propagation model show that variation the parameters of the porous media generates significant changes in seismic velocities due to the effects of energy absorption of waves passing through the media. P-S velocities are studied uncoupling the motion equations system. This allows us to analyze which parameters affect the seismic velocities. The research materials are sandstone and shale rocks; and the fluids analyzed are water, gas, and oil. In order to study the relation between seismic velocities and porous media parameters we consider three experiments. In the first experiment, the sandstone rocks are saturated by water, gas, and oil. In the second experiment, the sandstone and shale rocks are compared when they are saturated by a especific fluid, as water, gas, and oil. In the third experiment, specific parameters of rocks as porosity and permeability are changed.

¹Degree work.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Rafael Torres Amaris, Ph.D. Codirector: Herling Gonzalez Alvarez, M.Sc.

INTRODUCCIÓN

La teoría de Biot [1] fue desarrollada por Maurice Biot en la década de los 50 y es base de múltiples investigaciones dentro del campo de la propagación de ondas acústicas en materiales porosos [6].

El primer registro que se encuentra es el desarrollo de una teoría rigurosa denominada teoría de consolidación del suelo formulada por Maurice Anthony Biot en 1946. En 1955 el mismo Maurice Biot amplía la teoría anterior al estudiar sólidos porosos saturados de fluidos, dando lugar a lo que se conoce como Teoría de Biot.

Buscando verificar la teoría en 1970 Stoll y Sirvan demostraron su aplicación a sedimentos naturales marinos. En 1980, Plona [11] realizó estudios experimentales en materiales sintéticos.

En 1992, Camarasa [4] demostró que la teoría generalizada de Biot es válida para cualquier fondo sedimentario saturado de una mezcla de fluidos. En 1996 el Físico Jose Carcione [6] mediante modelado numérico aplicó a problemas de geofísica la teoría de propagación de ondas. Buscando aportes para la industria de la Geofísica, Pride, realizó un estudio del método para la obtención de velocidades de ondas sísmicas y atenuación conociendo porosidad, saturación y permeabilidad.

La teoría de Biot describe la dinámica de la deformación de un sólido elástico poroso saturado con un fluido viscoso y los efectos de la propagación de las ondas elásticas en estos medios.

El aporte de la teoría de Biot es predecir la dependencia de la velocidad con la frecuencia en rocas saturadas, en términos de las propiedades de la roca sin fluido.

Esta teoría considera la atenuación debido al movimiento relativo entre el fluido viscoso en los poros y la matriz sólida. Sus ecuaciones de onda conllevan a la existencia de dos tipos de ondas compresionales (P-rápida y P-lenta) así como también una onda de cizallamiento.

La onda compresional rápida es una onda convencional en la matriz o medio poroso, que corresponde al movimiento en fase entre el sólido y el fluido. La segunda onda compresional, onda lenta, corresponde al desplazamiento relativo entre el sólido y el fluido fuera de fase. En las ecuaciones de movimiento existe un efecto de atenuación y dispersión debido a que la función de disipación que incluye la viscosidad del fluido es proporcional al movimiento relativo entre el sólido y fluido [5].

El modelo desarrollado por Biot asume que [5]:

1. La matriz sólida es elástica y estadísticamente isotrópica. Considerar anisotropía implicaría un alineamiento de la porosidad en una dirección preferencial.
2. La fase de fluido es continua, es decir no se consideran cambios de estado para un fluido.
3. El medio poroso está completamente saturado y sus poros están interconectados, los poros que no se encuentran interconectados, no contribuyen en la medida de la porosidad.
4. Los desplazamientos, las deformaciones y las velocidades de las partículas son pequeños garantizando la relación lineal entre esfuerzo y deformación, en consecuencia el fenómeno permite ser estudiado bajo la ley de Hooke.
5. La fuerza de gravedad y los factores termodinámicos son despreciados.
6. Se consideran bajas frecuencias donde la longitud de onda que perturba el medio es mayor que la dimensión de los poros.
7. Las frecuencias de propagación involucradas son suficientemente bajas para que el flujo del fluido pueda ser descrito por la ley de Darcy, es decir, flujo laminar. Para estudiar el límite de validez de la ley de Darcy se debe tener en cuenta el número de Reynolds R . Este coeficiente se creó para canales abiertos o tuberías, y en general valores altos indican régimen turbulento y valores bajos indican régimen laminar. Se deja de cumplir la Ley de Darcy cuando $R > 10$.

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas al definir las relaciones constitutivas, la energía cinética y el potencial de disipación. Usando la ecuaciones de movimiento es posible describir las relaciones de dispersión de las velocidades, al desacoplar el sistema.

Conocer las relaciones entre la velocidad y los diferentes parámetros del medio para los tres tipos de onda permite realizar un análisis de los parámetros que afectan principalmente las velocidades sísmicas.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

La sismica de reflexión utilizada por los geofísicos usa un principio elemental: las ondas son reflejadas del subsuelo y registradas para obtener información que es utilizada para identificar características del medio en que se propagan las ondas y conocer características inherentes al objeto mismo como posición y velocidad.

1.1 Propagación de ondas en medios elásticos

La ecuación de la onda describe los sistemas físicos vibratorios y oscilantes. Esta puede ser obtenida de la combinación entre la relación entre esfuerzo y deformación para un medio continuo, homogéneo e isótropo y la ecuación de movimiento de Cauchy, en la cual se ignoran las fuerzas volumétricas dadas por f_i ya que en sismica solo se consideran fuerzas de contacto y pequeños desplazamientos [13], ignorando los efectos gravitatorios de la corteza. Usando coordenadas cartesianas la ley de Hooke, que relaciona esfuerzo y deformación, puede ser escrita como muestra,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad i, j \in 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

donde C_{ijkl} es el tensor de elasticidad, ϵ_{kl} son las deformaciones del medio que se relacionan con el vector desplazamiento u , como se muestra a continuación,

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

la ecuación de Cauchy del movimiento está dada por

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i \in 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

donde u_i son las componentes del vector desplazamiento, ρ es la densidad y f_i son las componentes de las fuerzas de cuerpo.

Al introducir la relación (1.2) en (1.1) y reemplazando en (1.3) se obtiene la ecuación de onda para medios elásticos,

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad i \in 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

En la ecuación (1.4) los parámetros relacionados con el medio son la densidad ρ y el tensor de coeficientes elásticos C_{ijkl} , pero no se menciona ninguna relación con la porosidad y tampoco menciona el tipo de fluido que puede estar almacenado en las rocas. Lo anterior permite destacar la teoría de Biot ya que en sus ecuaciones se consideran estas variables.

1.2 Sísmica de Reflexión

En la sísmica de reflexión básicamente se utiliza una fuente explosiva para perturbar el subsuelo. La señal generada se propaga y genera reflexiones hacia arriba en cada interfaz que encuentra durante el viaje. Estas reflexiones llegan a la superficie y son captadas por arreglos de detectores llamados geófonos que son localizados adecuadamente alrededor del sitio de explosión.

El procesamiento y posterior análisis de estas señales suele producir una imagen muy parecida a la distribución real de capas que hay en el subsuelo en ese lugar [3]. Esto permite el estudio de la zona de interés.

1.3 Ondas sísmicas

Existen diversas clasificaciones para las ondas. En una de ellas hablamos de ondas longitudinales y ondas transversales.

En las ondas longitudinales la perturbación es paralela a la dirección de propagación, tal es el caso de las ondas tipo P en un medio elástico. En las ondas transversales la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación, como las ondas electromagnéticas y las ondas S en un medio elástico.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE BIOT PARA MEDIOS POROSOS

A continuación se muestra el planteamiento de las ecuaciones de movimiento basados en la teoría Biot, para ello, se debe definir la densidad de energía del sistema que permite determinar los esfuerzos que actúan sobre el sólido y el fluido, los coeficientes elásticos que permiten describir el medio y sus relaciones con los esfuerzos.

Finalmente se plantea la ecuación de Lagrange usando las relaciones obtenidas.

2.1 Densidad de Energía

En coordenadas cartesianas, la densidad de energía se expresa en términos del tensor elástico de cuarto orden C_{ijkl} , así:

$$2V = C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

donde V corresponde a la densidad de energía y ϵ son las componentes de la deformación.

Este tensor elástico tiene 81 componentes que bajo notación de Voight se reducen a una matriz de 36 elementos.

De los 36 elementos que tiene la matriz elasticidad, el número de elementos diferentes de cero y linealmente independientes depende del grado de anisotropía [6]. Si la estructura del suelo define algún tipo de simetría elástica, muchos elementos se anulan y los otros son combinación lineal de los existentes. Debe considerarse que las rocas

son imperfectamente elásticas pero para pequeñas deformaciones el comportamiento es aproximadamente elástico.

En el caso isótropo solo se necesitan dos constantes que son los parámetros de Lamé λ y μ .

La anisotropía más general es conocida como modelo triclinico pero en las pruebas de campos no podríamos medirlos todos, entonces es necesario estudiar el caso de isotropía, siendo esta la simetría más usada para entender la propagación de ondas aunque no para describir todos los efectos que se ven en los datos de registro [6].

Para el caso isótropo todo plano cartesiano es un plano de simetría, y todo eje (x, z) es un eje de simetría, en consecuencia algunos coeficientes desaparecen y se obtiene

$$2V = C_{11} (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2(C_{11} - 2C_{66}) (e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}) \quad (2.2)$$

$$+ C_{66} (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2),$$

donde $C_{11} = \lambda + 2\mu$ y $C_{66} = \mu$.

Experimentalmente un medio isótropo homogéneo soporta dos modos puros de deformación, dilatacional ϑ^2 y de cizalladura descrito a través de d^2 .

Introduciendo el término $\vartheta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ la expresión para la densidad de energía se transforma en

$$2V = C_{11}\vartheta^2 - 4C_{66}\varpi, \quad (2.3)$$

con

$$\varpi = (e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}) - \frac{1}{4} (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2). \quad (2.4)$$

El modo de deformación de cizalla d^2 depende de las componentes de las deformaciones,

$$d^2 = d_{ij}d_{ij}, \quad (2.5)$$

siendo $d_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}$ y $e_{ij} = 2\epsilon_{ij}$.

En detalle:

$$d^2 = e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \frac{1}{2} [e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2] - \frac{\vartheta^2}{3}. \quad (2.6)$$

Reemplazando este valor en la energía de deformación se tiene

$$2V = C_{11}\vartheta^2 - \frac{4}{3}C_{66}\vartheta^2 + 2C_{66}d^2. \quad (2.7)$$

Es posible describir el medio isótropo y poroso usando el subíndice (m) para la matriz sólida y (f) para el fluido, así

$$V = A\vartheta_m^2 + Bd_m^2 + C\vartheta_m\vartheta_f + D\vartheta_f^2, \quad (2.8)$$

donde el fluido solo soporta dilatación y se introduce un término que relaciona la dilatación de la matriz sólida con dilatación del fluido. Las constantes A, B, C, D son coeficientes elásticos determinados por las propiedades de la matriz sólida y el fluido. Finalmente las componentes del esfuerzo, σ , para la matriz sólida y el fluido quedan determinadas como

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\partial V}{\partial e_{ij}^m} = 2A\vartheta_m + C\vartheta_f - 2Bd_m, \quad (2.9)$$

$$\sigma^{(f)} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta_f} = C\vartheta_m + 2D\vartheta_f. \quad (2.10)$$

2.2 Coeficientes Elásticos

Para obtener los coeficientes elásticos en términos de propiedades conocidas, se consideran tres experimentos ideales bajo condiciones estáticas [6]:

1. Prueba de Cizalla:

Se somete el material a cizalla pura, los modos de deformación dilatacional no se tiene en cuenta, $\vartheta_m = \vartheta_f = 0$. Al reemplazar en las expresiones (2.9) y (2.10) se obtiene que B es el módulo de cizalla de la roca, ya que el fluido no contribuye en fuerzas cortantes, así

$$B = \mu_m, \quad (2.11)$$

siendo μ_m el Módulo de cizalla de la roca sin fluido

2. Jacketed Compressibility Test:

Se envuelve la roca en un material delgado, impermeable y flexible y es sometido a una presión hidroestática externa. La presión del fluido dentro de la envoltura se mantiene constante usando un tubo que lo une con el exterior; al no aplicar esfuerzos de cizalla el coeficiente $B = 0$.

Los esfuerzos son fuerzas actuando en el fluido por unidad de area del material

poroso, las componentes del esfuerzo en el fluido son $\sigma_{ij}^{(f)} = -\phi p_f \delta_{ij}$, donde ϕ es la porosidad y p_f es la presión de poro; como la presión de poro permanece constante $\sigma_{ij}^{(f)} = 0$ obteniendo

$$2A\vartheta_m + C\vartheta_f = -p, \quad (2.12)$$

$$C\vartheta_m + 2D\vartheta_f = 0. \quad (2.13)$$

La presión es transmitida a la roca, por lo tanto el fluido no se ve afectado y $\vartheta_f = 0$, por lo anterior

$$A = \frac{-p}{2\vartheta_m} = K_m; \quad (2.14)$$

se define K_m como Módulo de drenaje (*Drained modulus*) o también conocido como Módulo de compresibilidad de la roca sin fluido.

Relacionando A, C, D y K_m se tiene,

$$2A - \frac{C^2}{2D} = K_m. \quad (2.15)$$

3. *Unjacketed Compresibility Test:*

La muestra es saturada por un fluido y se aplica una presión p_f , la presión actúa sobre la roca $(1 - \phi)$ y sobre la región con fluido determinada por la porosidad ϕ . Nuevamente $B = 0$ porque no hay esfuerzos de cizalla. Luego

$$-(1 - \phi)p_f = 2A\vartheta_m + C\vartheta_f, \quad (2.16)$$

$$-\phi p_f = C\vartheta_m + 2D\vartheta_f. \quad (2.17)$$

Usando el Módulo de compresibilidad que relaciona la presión con dilatación se tiene

$$K_s = \frac{-p_f}{\vartheta_m}, \quad (2.18)$$

donde K_s es conocido como Módulo de la roca.

$$K_f = \frac{-p_f}{\vartheta_f}, \quad (2.19)$$

siendo K_f el Módulo de bulk del fluido.

Reemplazando las anteriores expresiones e introduciendo la notación de Biot P, N, Q y R para ser relacionados con los parámetros los parámetros A, B, C y D obtenemos

$$K = 2A = \frac{(1 - \phi)(1 - \phi - K_m/K_s) + \phi K_m K_s / K_f}{1 - \phi - K_m/K_s + \phi K_s / K_f}, \quad (2.20)$$

$$C = \frac{(1 - \phi - K_m/K_s)\phi K_s}{1 - \phi - K_m/K_s + \phi K_s / K_f}, \quad (2.21)$$

$$2D = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - K_m/K_s + \phi K_s / K_f} = R. \quad (2.22)$$

Logrando las relaciones esfuerzo-deformación entre la matriz sólida y el fluido con parámetros conocidos, como

$$\sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu_m d_{ij}^{(m)} + (K\vartheta_m + C\vartheta_f)\delta_{ij}, \quad (2.23)$$

$$\sigma^{(f)} = C\vartheta_m + R\vartheta_f. \quad (2.24)$$

2.3 Esfuerzos Efectivos

En la física de rocas se usa la presión efectiva y el esfuerzo efectivo. Se usa por el hecho que la presión de poro p_f y la presión de confinamiento p_c tienden a tener efectos en la acústica y las propiedades de las roca. Las propiedades se caracterizan solo por la presión efectiva p_e .

En 1936 Terzagui propuso $p_e = p_c - \phi p_f$, pero para experimentos sobre fallas geológicas, se encontró que la presión efectiva se puede calcular como $p_e = p_c - p_f$ [6].

Usando las ecuaciones constitutivas de Biot se puede obtener el esfuerzo efectivo, considerando que el esfuerzo total se descompone en:

1. Esfuerzo efectivo que actúa sobre la roca.
2. Esfuerzo hidrostático que actúa sobre el fluido.

Así

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma^{(f)}\delta_{ij}. \quad (2.25)$$

La anterior relación puede ser interpretada como una relación entre campos incrementando, donde el esfuerzo y la deformación son incrementados respecto a una deformación

y un esfuerzo de referencia.

Buscando obtener una expresión que describe los esfuerzos, se deben relacionar todos los parámetros conocidos e introducir nuevas variables, así

$$K = K_m + M(\alpha - \phi)^2, \quad (2.26)$$

donde

$$M = \frac{K_s}{\alpha - \phi + \phi \frac{K_s}{K_f}} \quad (2.27)$$

y

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}. \quad (2.28)$$

La constante del material α es llamada Coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot. Esta constante es proporcional a la presión del fluido la cual podría producir la misma deformación que el esfuerzo total.

Sustituyendo el valor K en (2.23) y usando la expresión que define el modo de deformación tipo cizalla de la roca, $d_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}$ se obtiene

$$\sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu_m d_{ij}^{(m)} + K_m \vartheta_m \delta_{ij} + (M(\alpha - \phi)^2 \vartheta_m + C \vartheta_f) \delta_{ij}. \quad (2.29)$$

Introduciendo el tensor elástico de la roca está dado por

$$C_{ijkl}^{(m)} = (K_m - \frac{2}{3}\mu_m) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_m (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.30)$$

los esfuerzos en el fluido pueden ser expresados como $\sigma_{ij}^{(f)} = -\phi p_f \delta_{ij}$ y así el esfuerzo total queda expresado como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(f)}, \quad (2.31)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(m)} \epsilon_{kl}^{(m)} + (M(\alpha - \phi)^2 \vartheta_m + C \vartheta_f) \delta_{ij} - \phi p_f \delta_{ij}. \quad (2.32)$$

Finalmente para encontrar la presión de poro se debe usar la ecuación (2.24) y comparar con la ecuación $\sigma_{ij}^{(f)} = -\phi p_f \delta_{ij}$, donde p_f es la presión fluido, C parámetro de Carcione, P parámetro de Biot, ϑ_m y ϑ_f dilatación en matriz y en fluido respectivamente. Para tener todo en función de un solo parámetro, cambiamos C y R por su relación con M , de esta forma

$$C = \phi M(\alpha - \phi), \quad (2.33)$$

$$R = \phi^2 M, \quad (2.34)$$

obteniendo

$$p_f = \phi M \vartheta_m - \alpha M \vartheta_m - \phi M \vartheta_f. \quad (2.35)$$

En la expresión anterior encontramos parámetros que se relacionan mediante una nueva variable ζ , conocida como variación en el contenido de fluido, dada por

$$\zeta = -div[\phi(u^{(f)} - u^{(m)})] = -\phi(\vartheta^{(f)} - \vartheta^{(m)}), \quad (2.36)$$

siendo u el vector desplazamiento y ϑ la dilatación.

La expresión de presión de fluido o presión de poro p_f , ecuación (2.35), muestra la dependencia de la presión de poro de M , siendo este un parámetro poroelástico que a su vez depende de

K_m Módulo de compresibilidad de roca sin fluido,
 K_s Módulo de compresibilidad de la matriz de roca,
 K_f Módulo de compresibilidad de fluido,
y ϕ Porosidad.

Reescribiendo la presión de poro,

$$p_f = M[-\phi(\vartheta_f - \vartheta_m)] - \alpha M \vartheta_m = M[\zeta - \alpha M \vartheta_m], \quad (2.37)$$

reemplazando (2.37) en la expresión (2.32), se tiene

$$\sigma_{ij} = 2\mu_m d_{ij}^{(m)} + K_m \vartheta_m \delta_{ij} + [M(\alpha - \phi)^2 \vartheta_m + \phi M(\alpha - \phi) \vartheta_f] \delta_{ij} - M\phi[\zeta - \alpha M \vartheta_m], \quad (2.38)$$

obtenemos:

$$\sigma_{ij} = 2\mu_m d_{ij}^{(m)} + [K_m + M\alpha^2] \vartheta_m \delta_{ij} - M\alpha \zeta \delta_{ij}. \quad (2.39)$$

Se puede introducir una nueva variable K_G conocida como Módulo de saturación, que describe la ecuación de Gassmann [6] como

$$K_G = K_m + M\alpha^2. \quad (2.40)$$

Introduciendo la nueva variable K_G se tiene

$$\sigma_{ij} = 2\mu_m d_{ij}^{(m)} + K_G \vartheta_m \delta_{ij} - M\alpha \zeta \delta_{ij}. \quad (2.41)$$

Este módulo es usado en la propagación de ondas planas y es el módulo de compresibilidad para bajas frecuencias y puede ser escrito en función de las propiedades constitutivas de la roca como se muestra a continuación

$$K_G = \frac{K_s - K_m + \phi K_m [K_s/K_f - 1]}{1 - \phi - K_m/K_s + \phi K_s/K_f}. \quad (2.42)$$

Relacionando el módulo K_G con el módulo K_m se tiene

$$K_m = \frac{(\phi K_s / K_f + 1 - \phi) K_G - K_s}{\phi K_s / K_f + K_G / K_s - 1 - \phi}. \quad (2.43)$$

El concepto de esfuerzo efectivo significa que la respuesta de un medio poroso saturado es descrito por la respuesta del medio poroso sin fluido con la aplicación del esfuerzo reemplazado por el esfuerzo efectivo.

El anterior procedimiento permitió relacionar el producto $C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ con los parámetros del medio así:

$$C_{ijkl}\epsilon_{kl} = \sigma_{ij} + \alpha p_f \delta_{ij}. \quad (2.44)$$

2.4 Potencial de Disipación

El potencial de disipación está descrito como:

$$\Theta_D = \frac{1}{2} b (v_i^{(m)} - v_i^{(f)}) (v_i^{(m)} - v_i^{(f)}), \quad (2.45)$$

siendo b el coeficiente de fricción dado por

$$b = \frac{\phi^2 \eta}{\kappa}. \quad (2.46)$$

Este potencial es válido bajo la condición de equilibrio termodinámico y el fluido tipo *Poiseuille* [6]. La diferencia entre flujo laminar y turbulento es que en el flujo turbulento la fuerza es $F \propto \rho v^2$ y no aparece la viscosidad pero sí la densidad, porque el roce se debe a la inercia del fluido y no a los efectos viscosos.

Solo las bajas frecuencias sísmicas producen el tipo de flujo laminar. Considerando el potencial de disipación, la fuerza de disipación está dada por

$$F_i = - \frac{\partial \Theta_D}{\partial v_i^{(f)}}. \quad (2.47)$$

2.5 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de Lagrange usando coordenadas generalizadas, dadas por los desplazamientos u_i y velocidades v_i son

$$\partial_t \left[\frac{\partial L}{\partial v_i^{(p)}} \right] + \partial_j \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_j u_i^{(p)})} \right] - \frac{\partial L}{\partial u_i^{(p)}} + \frac{\partial \Theta_D}{\partial v_i^{(p)}} = 0, \quad (2.48)$$

dichas ecuaciones son equivalentes a la aproximación clásica de Biot [6], así

$$\partial_t \left[\frac{\partial T}{\partial v_i^{(p)}} \right] + \frac{\partial \Theta_D}{\partial v_i^{(p)}} = q_i^{(p)}, \quad (2.49)$$

el superíndice (p) es reemplazado por m o f según corresponda, ya sea matriz de roca o fluido, donde $q_i^{(p)}$ son las fuerzas generalizadas elásticas dadas por:

$$q_i^{(p)} = -\partial_j \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_j u_i^{(p)})} \right] = \partial_j \left[\frac{\partial V}{\partial (\partial_j u_i^{(p)})} \right] = \partial_j \sigma_{ij}^{(m)}. \quad (2.50)$$

Ya que la energía cinética T no depende explícitamente de los desplazamientos u_i sino de las velocidades v_i esto implica que

$$\frac{\partial T}{\partial u_i^{(p)}} = 0. \quad (2.51)$$

Usando la relación entre las deformaciones y los desplazamientos

$$e_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j; \quad i \neq j, \quad (2.52)$$

$$e_{ij} = \partial_i u_i; \quad i = j. \quad (2.53)$$

Reemplazando la anterior igualdad en (2.50) se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial (\partial_j u_i^{(m)})} = \frac{\partial V}{\partial e_{ij}^{(m)}}. \quad (2.54)$$

En conclusión de la aproximación clásica de Biot (2.50) se tiene

$$\partial_j \sigma_{ij}^{(m)} = q_i^{(p)}. \quad (2.55)$$

2.6 Energía cinética

La energía cinética puede ser definida como:

$$T = \frac{1}{2} \left(\rho_{11} v_i^{(m)} v_i^{(m)} + 2\rho_{12} v_i^{(m)} v_i^{(f)} + \rho_{22} v_i^{(f)} v_i^{(f)} \right). \quad (2.56)$$

Como se mencionó al inicio, este tratamiento asume isotropía, para el caso de anisotropía los términos de la forma $v_i^{(p)} v_i^{(p')}$ contribuyen a la energía cinética.

Buscando reescribir la ecuación de Lagrange calculamos

$$\frac{\partial T}{\partial v_i^{(m)}} = \rho_{11} v_i^{(m)} + \rho_{12} v_i^{(f)} = \pi_i^{(m)}, \quad (2.57)$$

siendo $\pi_i^{(m)}$ el momento lineal por unidad de volumen. Para los fluidos se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial v_i^{(f)}} = \rho_{12} v_i^{(m)} + \rho_{22} v_i^{(f)} \quad (2.58)$$

permitiendo reescribir la ecuación de Lagrange como

$$\partial_t \pi_i^{(p)} + F_i^{(p)} = \partial_j \sigma^{(p)}. \quad (2.59)$$

Escribiendo de manera explícita los resultados obtenidos para la matriz sólida y los fluidos, encontramos la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos, incluyendo densidad, porosidad y coeficiente de fricción

$$\partial_j \sigma_{ij}^{(m)} = \rho_{11} \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_{12} \partial_{tt}^2 u_i^{(f)} + b(v_i^{(m)} - v_i^{(f)}), \quad (2.60)$$

$$-\phi \partial_i p_f = \rho_{12} \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_{22} \partial_{tt}^2 u_i^{(f)} - b(v_i^{(m)} - v_i^{(f)}), \quad (2.61)$$

donde el signo de los términos de la fricción son escogidos para asegurar la atenuación al propagarse la onda.

2.7 Operador Viscodinámico

Buscando obtener las ecuaciones de movimiento en términos de variables calculables se suman las ecuaciones (2.60) y (2.61), resultando:

$$\partial_j (\sigma_{ij}^{(m)} - \phi p_f) = (\rho_{11} + \rho_{12}) \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + (\rho_{12} + \rho_{22}) \partial_{tt}^2 u_i^{(f)}, \quad (2.62)$$

tal que

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \phi) \rho_s, \quad \rho_{12} + \rho_{22} = \phi \rho_f, \quad (2.63)$$

siendo ρ_s y ρ_f densidad del material sólido y del fluido respectivamente.

Se usa nuevamente la variable variación en el contenido de fluido ζ y la relación (2.25) con $\sigma_{ij}^{(f)} = -\phi p_f \delta_{ij}$.

Lo anterior permite escribir la relación (2.62), como

$$\partial_j \sigma_{ij} = (1 - \phi) \rho_s \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \phi \rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(f)} + b(v_i^{(m)} - v_i^{(f)}). \quad (2.64)$$

Buscando reescribir la ecuación de Lagrange se deben introducir dos nuevas variables,

densidad promedio ρ , que relaciona la porosidad con la densidad del fluido y el espacio rocoso con la densidad de la matriz de roca y la variable w llamada desplazamiento relativo entre el fluido y la matriz de sólido. Se define

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f, \quad (2.65)$$

y

$$w = \phi(u^{(f)} - u^{(m)}). \quad (2.66)$$

La expresión (2.60) se logra reescribir como

$$\partial_j \sigma_{ij} = \rho \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_f \partial_{tt}^2 w_i. \quad (2.67)$$

Para la expresión (2.61) es necesario introducir la variable m llamada densidad efectiva

$$m = \rho_{22}/\phi^2, \quad (2.68)$$

este parámetro puede ser escrito en función de la tortuosidad, así $m = \rho_f \tau / \phi$ logrando escribir (2.61) como

$$-\partial_i p_f = \rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + m \partial_{tt}^2 w_i - \frac{\eta}{\kappa} \partial_t w_i. \quad (2.69)$$

Finalmente se plantea la ecuación de Lagrange como

$$-\partial_i p_f = \rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + (Y * \partial_t w_i)(t), \quad (2.70)$$

donde $Y(t)$ es el operador viscodinámico de bajas frecuencias, el primer término representa la inercia y el segundo la viscosidad y la fricción

$$Y(t) = m \partial_t \delta(t) + \frac{\eta}{\kappa} \delta(t). \quad (2.71)$$

Así, finalmente tenemos que las ecuaciones (2.67) y (2.70) son las ecuaciones de movimiento para un sistema isótropo y homogéneo, basado en la teoría de Biot

$$\partial_j \sigma_{ij} = \rho \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_f \partial_{tt}^2 w_i, \quad (2.72)$$

$$-\partial_i p_f = \rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + (Y * \partial_t w_i)(t). \quad (2.73)$$

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE ONDAS COMPRESIONALES

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento de forma general, aplicamos el operador divergencia sobre (2.72) para desacoplar el sistema, con esto

$$\partial_i \partial_j \sigma_{ij} = \partial_i [\rho \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_f \partial_{tt}^2 w_i], \quad (3.1)$$

$$\partial_i \partial_j \sigma_{ij} = \rho \partial_{tt}^2 \partial_i u_i^{(m)} + \phi \rho_f \partial_{tt}^2 \partial_i (u_i^{(f)} - u_i^{(m)}), \quad (3.2)$$

usando $\partial_j u_i^{(m)} = \vartheta_m$, se tiene

$$\partial_i \partial_j \sigma_{ij} = \rho \partial_{tt}^2 \vartheta_m + \phi \rho_f \partial_{tt}^2 (\vartheta_f - \vartheta_m). \quad (3.3)$$

Usando las relaciones entre coeficientes poroelásticos, definidas en la ecuación (2.38), con $d_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij}$, se reemplaza en (3.3) y se obtiene

$$\partial_i \partial_j \sigma_{ij} = 2\mu_m \partial_i \partial_j \epsilon_{ij} + \left[K_G - \frac{2}{3} \mu_m \right] \partial_i \partial_i \vartheta_m + \phi M \alpha \partial_i \partial_i \vartheta_f - \alpha \phi M \phi \partial_i \partial_i \vartheta_m, \quad (3.4)$$

reemplazando en el primer término $e_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j = 2\epsilon_{ij}$ se reescribe como:

$$\partial_i \partial_j \epsilon_{ij} = \partial_i \partial_j (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \partial_j \partial_j \vartheta_m + \partial_i \partial_i \vartheta_m = 2\partial_i \partial_i \vartheta_m, \quad (3.5)$$

para obtener:

$$\partial_i \partial_j \sigma_{ij} = 2\mu_m \partial_i \partial_i \vartheta_m + \left[K_G - \frac{2}{3} \mu_m \right] \partial_i \partial_i \vartheta_m + \alpha \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f - \alpha \phi M \phi \partial_i \partial_i \vartheta_m, \quad (3.6)$$

uniendo las igualdades (3.3) y (3.6) obtenemos:

$$\left[K_G + \frac{4}{3}\mu_m - \phi M\alpha \right] \partial_i \partial_i \vartheta_m + \alpha \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f = (1 - \phi) \rho_s \partial_{tt}^2 \vartheta_m + \phi \rho_f \partial_{tt}^2 \vartheta_f. \quad (3.7)$$

Ahora aplicamos el operador divergencia para la ecuación (2.73), así

$$-\partial_i (\partial_i p_f) = \partial_i (\rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + Y * \partial_t w_i). \quad (3.8)$$

Considerando la definición de presión de poro (2.35), se obtiene:

$$M(\alpha - \phi) \partial_i \partial_i \vartheta_m + \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f = \rho_f \partial_{tt}^2 \partial_i u^{(m)} + Y * \partial_t [\phi \partial_i u^{(f)} - \phi \partial_i u^{(m)}], \quad (3.9)$$

con $\partial_i u^{(m)} = \vartheta_m$ se logra llegar a:

$$M(\alpha - \phi) \partial_i \partial_i \vartheta_m + \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f = \rho_f \partial_{tt}^2 \vartheta_m + Y \phi * \partial_t \vartheta_m + Y \phi * \partial_t \vartheta_f. \quad (3.10)$$

3.1 Solución de onda plana

Ahora consideramos que se propaga una onda plana de la forma

$$\vartheta_m = \vartheta_{mo} \exp(i(\omega t - kx)). \quad (3.11)$$

$$\vartheta_f = \vartheta_{fo} \exp(i(\omega t - kx)), \quad (3.12)$$

esta aproximación es válida en sísmica ya que el objetivo se encuentra a gran distancia de la fuente.

Reescribiendo las ecuaciones que muestran la propagación compresional, (3.7) y (3.10), se tiene,

$$\left[K_G + \frac{4}{3}\mu_m - \phi M\alpha \right] \partial_i \partial_i \vartheta_m + \alpha \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f - (1 - \phi) \rho_s \partial_{tt}^2 \vartheta_m - \phi \rho_f \partial_{tt}^2 \vartheta_f = 0, \quad (3.13)$$

y

$$M(\alpha - \phi) \partial_i \partial_i \vartheta_m + \phi M \partial_i \partial_i \vartheta_f - \rho_f \partial_{tt}^2 \vartheta_m + Y \phi * \partial_t \vartheta_m + Y \phi * \partial_t \vartheta_f = 0. \quad (3.14)$$

Al introducir en este sistema una forma de propagación de onda plana descrita en (3.11) y (3.12), considerando que $\partial_{tt}^2 \vartheta_m = -\omega^2 \vartheta_{mo}$; $\partial_{tt}^2 \vartheta_f = -\omega^2 \vartheta_{fo}$; $\partial_t \vartheta_m = i\omega \vartheta_{mo}$; $\partial_t \vartheta_f = i\omega \vartheta_{fo}$, dividiendo por k^2 y asignando nuevas variables, $Y' = Y*$ y velocidad compleja V_c dada por

$$V_c = \frac{\omega}{k}, \quad (3.15)$$

se obtiene:

$$\left[K_G + \frac{4}{3}\mu_m - \phi M\alpha - V_c^2(1 - \phi)\rho_s \right] \vartheta_{mo} + \phi [\alpha M - \rho_f V_c^2] \vartheta_{fo} = 0, \quad (3.16)$$

y

$$\left[M(\alpha - \phi) - V_c^2(\rho_f + \frac{i}{\omega}\phi Y') \right] \vartheta_{mo} + \phi \left[M + V_c^2 \frac{i}{\omega} Y' \right] \vartheta_{fo} = 0. \quad (3.17)$$

Al considerar un medio con pérdidas, la relación de dispersión es obtenida tomando el determinante del anterior sistema de ecuaciones e igualarlo a cero.

$$\begin{aligned} & \left[K_G + \frac{4}{3}\mu_m - \phi M\alpha - V_c^2(1 - \phi)\rho_s \right] \phi \left[M + V_c^2 \frac{i}{\omega} Y' \right] \\ & - \phi [\alpha M - \rho_f V_c^2] \left[M(\alpha - \phi) - V_c^2(\rho_f + \frac{i}{\omega}\phi Y') \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Reorganizando los términos de la relación de dispersión se tiene:

$$\left[K_G + \frac{4}{3}\mu_m - M\alpha^2 \right] M + \left[\frac{i}{\omega} Y' (K_G + \frac{4}{3}\mu_m) + M(2\alpha\rho_f - \rho) \right] V_c^2 - \left[\rho_f^2 + \frac{i}{\omega} Y' \rho \right] V_c^4 = 0 \quad (3.19)$$

La solución de la ecuación bicuadrática de V_c^2 tiene dos raíces correspondientes a la onda compresional rápida y lenta.

Esta conclusión hace parte de los aportes de la teoría de Biot ya que considera una tercera onda para el sistema, ya no solo se propaga la onda primaria y la onda secundaria, esta teoría demuestra la existencia de una segunda onda compresional llamada onda P lenta.

Las dos raíces resultantes de la ecuación son las dos velocidades complejas para el signo positivo y negativo de la ecuación cuadrática.

La velocidad de fase V_p es igual a la frecuencia angular w dividida por la parte real del número de onda complejo,

$$V_{p\pm} = [Re(V_{c\pm}^{-1})]^{-1}. \quad (3.20)$$

Para altas frecuencias definimos la velocidad v_∞ , donde se debe tomar el límite $\frac{i}{\omega} Y' \rightarrow -m$ en la ecuación (2.71), así, la ecuación bicuadrática para V_p (3.19) queda como

$$[\rho m - \rho_f^2] V_\infty^4 + \left[M(2\alpha\rho_f - \rho) - m(K_G + \frac{4}{3}\mu_m) \right] V_\infty^2 + M(K_m + \frac{4}{3}\mu_m) = 0, \quad (3.21)$$

donde v_∞ es un valor real.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE ONDAS TRANSVERSALES

Antes de derivar las propiedades de la onda de cizalla, se debe definir el rotacional del vector U , $e_i \partial_i \times e_j U_j = \varepsilon_{ijk} \partial_i U_j e_k$, donde ε_{ijk} es el tensor Levi - Civita y los vectores e_i son vectores unitarios.

Se definen las nuevas variables $\Omega^{(m)}$ y $\Omega^{(f)}$,

$$\Omega^{(p)} = \text{rotacional } U^{(p)}, \quad (4.1)$$

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (2.72) usando la variable de desplazamiento relativo $w = \phi(u^{(f)} - u^{(m)})$ y cambiando de signo el segundo término de la derecha se obtiene

$$\varepsilon_{lik} \partial_l \partial_j \sigma_{ij} \hat{e}_k = \rho \partial_{tt}^2 \Omega^{(m)} - \phi \rho_f (\partial_{tt}^2 \Omega^{(m)} - \partial_{tt}^2 \Omega^{(f)}), \quad (4.2)$$

los términos que contienen dilataciones desaparecen (considerando la ecuación (2.41) y que el rotacional de un gradiente es cero), el único término que queda al reemplazar d_{ij} a la izquierda es

$$2\mu_m \varepsilon_{lik} \partial_l \partial_j \epsilon_{ij}^{(m)} \hat{e}_k. \quad (4.3)$$

Finalmente se obtiene

$$\mu_m \partial_i \partial_i \Omega^{(m)} = (1 - \phi) \rho_s \partial_{tt}^2 \Omega^{(m)} - \phi \rho_f \partial_{tt}^2 \Omega^{(f)}. \quad (4.4)$$

Al aplicar el rotacional a la ecuación (2.73) reemplazando las variables correspondientes se obtiene:

$$\rho_f \partial_{tt}^2 \Omega^{(m)} - \phi Y * \partial_t \Omega^m + \phi Y * \partial_t \Omega^f = 0. \quad (4.5)$$

4.1 Solución de onda plana

Bajo la consideración de una onda plana viajando en la dirección x y polarizada en la dirección y , esto es $\Omega^p = (0, 0, \partial_i U_2^f)$ donde (p) puede ser modificado por (m) o (f) representando matriz o fluido, luego

$$\Omega^{(p)} = \partial_i U_2^{(p)}. \quad (4.6)$$

Considerando propagación de ondas planas sobre las ecuaciones (2.72) y (2.73),

$$\Omega_m = \Omega_{mo} \exp(i(\omega t - kx)), \quad (4.7)$$

$$\Omega_f = \Omega_{fo} \exp(i(\omega t - kx)), \quad (4.8)$$

donde k es el número de onda se obtiene

$$\mu_m \Omega_{mo} - (1 - \phi) \rho_s V_c^2 \Omega_{mo} - \phi \rho_f V_c^2 \Omega_{fo} = 0, \quad (4.9)$$

$$-\left(\rho_f + \frac{i}{\omega} Y' \phi\right) \Omega_{mo} + \left(\frac{i}{\omega} Y' \phi\right) \Omega_{fo} = 0, \quad (4.10)$$

siendo V_c la velocidad compleja

$$V_c = \frac{\omega}{k}. \quad (4.11)$$

Despejando de la primera ecuación V_c y reemplazando el valor Ω_{fo} para dejar todo en términos de Ω_{mo} , se obtiene

$$V_c = \frac{\mu_m}{\rho - i\omega \rho_f^2 Y'^{-1}}. \quad (4.12)$$

La velocidad de fase V_p es igual a la frecuencia angular ω dividida por la parte real del número de onda complejo k , esto es

$$V_{p\pm} = [Re(V_{c\pm}^{-1})]^{-1}, \quad (4.13)$$

Introduciendo el valor del operador viscoelásticos, $Y' = i\omega m + \frac{\eta}{\kappa}$, se obtiene para la onda secundaria

$$V_s^2 = \left[\frac{\mu_m \eta + i\omega m \kappa \mu_m}{\eta \rho + i\omega k (m\rho - \rho_f^2)} \right]. \quad (4.14)$$

Tomando la parte real de la ecuación (4.14) que describe el valor de la velocidad de la onda S en función de la frecuencia se tiene

$$V_s^2 = \mu_m \left[\frac{\eta^2 \rho + \omega^2 \kappa^2 m (m\rho - \rho_f^2)}{(\eta \rho)^2 + (\omega k)^2 (m\rho - \rho_f^2)^2} \right]. \quad (4.15)$$

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE VELOCIDADES

El análisis de velocidades consiste en usar las expresiones (3.21) y (4.15) y variar los parámetros para reconocer cuales de estos son dominantes sobre las velocidades sísmicas. Para la velocidad de onda S es posible graficar V_s en función de la frecuencia en el rango de 0 a 500,000 Hz que se especifica más adelante. Se plantean tres tipos de pruebas para estudiar los parámetros de las rocas y los fluidos y se analizan que tanta variación generan sobre las velocidades.

Durante las pruebas se usan dos tipos de roca sedimentarias, *sandstone* y *shale*, y tres fluidos, agua, gas y petróleo. Sus propiedades están descritas en la tabla 6.1.

5.1 Factores que afectan las velocidades sísmicas

Las velocidades sísmicas de las rocas son afectadas de forma variada por muchos factores, algunos de ellos son la forma de poro, porosidad, el fluido contenido en los poros.

- Tortuosidad:

Durante este trabajo el parámetro que menciona la forma de poro es la tortuosidad. Este parámetro es adimensional dependiente de la geometría de poro de las rocas, para poros de tubos paralelos $T = 1$ y para la mayoría de las rocas $T = 2, 3$ [10].

- Porosidad:

La relación entre porosidad y velocidad es complicada por el tipo de geometría del poro y el contenido mineral. La influencia de la porosidad del medio en ondas sobre la respuesta sísmica es actualmente investigada para dar información de saturación y condiciones termodinámicas [2].

Se espera que al fijar todos los parámetros la velocidad de onda P disminuya al incrementar la porosidad. En estudios realizados se concluye que es determinante pero no constituye el único factor que controla la velocidad [10].

- Mineralogía:

Las rocas estudiadas en el modelo presentan los siguientes minerales: *Sandstone*: Es una roca sedimentaria compuesta principalmente de cuarzo y feldespatos.

Shale: Es una roca sedimentaria de grano fino, compuesta de lodo y una mezcla de minerales de arcilla y pequeños fragmentos de otros minerales, como cuarzo y calcita.

El cuarzo tiene bajas velocidades de onda P y altas de onda S [10].

Durante este trabajo la mineralogía es incluida en el cálculo de la densidad de la matriz de roca.

- Fluidos:

Los fluidos de interés son agua, gas y petróleo. Las propiedades de los fluidos varían sustancialmente con la temperatura y presión [2]. Entre los fluidos estudiados la mayor densidad la presenta el agua, basados en la relación clásica de velocidad y densidad se espera que el fluido que genere una disminución en la velocidad sea el agua ya que este presenta una mayor densidad. A su vez se espera que los resultados para agua y petróleo sean cercanos, ya que sus densidades lo son.

5.2 Velocidades ondas compresionales V_p

El análisis de ondas compresionales desarrollado en el capítulo 3, mostró a través de la solución de la ecuación bicuadrática de V_c^2 de la ecuación (3.21) dos raíces correspondientes a la onda compresional rápida y onda compresional lenta.

A partir de la relación (3.21) se calcularon los diferentes valores de velocidad para diferentes pruebas.

1. Variación de la saturación de fluido respecto distintos parámetros de las rocas, los parámetros variados son: K_f , η y ρ_f .

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.1

<i>Sandstone</i>	Agua	Petróleo	Gas
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	2216.79	2094.1	1792.86
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	665.136	672.832	329.519

Tabla 5.1: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para *Sandstone* saturadas por agua, gas y petróleo.

El fluido que presenta mayor velocidad de onda P es el agua, seguido por el petróleo y el gas. Sus valores tienen una diferencia notoria por lo que es posible afirmar que la onda P se ve afectada por el tipo de fluido saturante.

2. Variaciones de los parámetros de la roca, el fluido que satura los poros se mantiene constante. Los parámetros a variar son: K_s , ρ_s , ϕ , κ y T .

Agua	<i>Sandstone</i>	<i>Shales</i>
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	2216.79	2062.46
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	665.136	348.974

Tabla 5.2: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para rocas *Sandstone* y *Shales* saturadas por agua.

Petróleo	<i>Sandstone</i>	<i>Shales</i>
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	2094.1	1999.84
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	672.832	363.236

Tabla 5.3: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para rocas *Sandstone* y *Shales* saturadas por petróleo.

Gas	<i>Sandstone</i>	<i>Shales</i>
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	1792.86	1301.17
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	329.519	264.311

Tabla 5.4: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para rocas *Sandstone* y *Shales* saturadas por gas.

En todos los casos la roca *Sandstone* presentó mayor velocidad para la onda P rápida. La onda P lenta se ve afectada por el tipo de roca, señalando que las rocas *Sandstone* tienen una mayor velocidad, independiente del tipo de saturación.

3. Variaciones en propiedades específicas de la roca.

Los parámetros variados son: ϕ y κ .

Porosidad	0.4	0.3	0.2
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	2145.12	2216.79	2373.4
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	745.316	665.136	564.382

Tabla 5.5: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para rocas *Sandstone* saturadas por agua, con variaciones de porosidad de 0.4, 0.3 y 0.2

Esta información es la esperada ya que confirma resultados obtenidos en otros estudios [10], para la onda P rápida se obtuvo que a mayor porosidad menor velocidad. En la onda P lenta la relación entre porosidad y velocidad es directa, a mayor porosidad mayor velocidad de onda P lenta.

Permeabilidad	1 [D]	0.5 [D]
$V_{p_{rapida}}[m/s]$	2216.79	2216.79
$V_{p_{lenta}}[m/s]$	665.136	665.136

Tabla 5.6: Valores de velocidad onda P rápida y P lenta, para rocas *Sandstone* saturadas por agua, con variaciones de permeabilidad de 1 D y 0.5 D.

La permeabilidad no generó ninguna alteración sobre la velocidad de las ondas P. Por lo tanto es posible afirmar que las variaciones de permeabilidad no afectan las velocidades de las ondas P.

Para la onda P se realizaron pruebas para observar que factores inciden principalmente en la velocidad sísmica, al variar el fluido saturante se encontraron cambios significativos, siendo el agua el fluido que presenta mayor valor de velocidad para la onda P rápida, seguido del petróleo y el gas. Para la onda P lenta el comportamiento varía, dominado por el fluido con mayor viscosidad, así, el petróleo tiene mayor velocidad, seguido por el agua y el gas.

Las variaciones en el tipo de roca afectaron las velocidades de las ondas P, siendo la roca *sandstone* la roca con mayor velocidad para la onda P lenta y P rápida para cualquier tipo de saturación.

Se encontró que la porosidad es un factor dominante sobre las velocidades sísmicas y que no tiene el mismo efecto sobre las ondas compresionales. La permeabilidad no significó ningún cambio sobre la velocidad sísmica.

5.3 Velocidades ondas transversales V_s

En el capítulo 4 fue posible obtener la relación de dispersión para la onda S, ecuación (4.15), para graficar la dependencia de la velocidad con la frecuencia se elige el rango de frecuencias mostradas en la tabla 5.7. Siendo *VSP* los registros de sísmica de pozo, *Cross – well* y *Logging* los registros de pozo donde se realizan pruebas que buscan medir porosidad, saturación de fluido, permeabilidad, densidad, entre otros.

	Frecuencia [Hz]
<i>Seismic/VSP</i>	10 - 100
<i>Cross-well</i>	100 - 2000
<i>Logging</i>	500 - 20.000
<i>Laboratory</i>	20.000 - 500.000

Tabla 5.7: Rango de frecuencias.

Para analizar la influencia de los parámetros se plantean tres pruebas:

1. Variación de la saturación de fluido respecto distintos parámetros de las rocas, los parámetros variados son: K_f , η y ρ_f .

Se observa en la figura (5.1) que la velocidad de onda S se ve afectada débilmente por el fluido saturante, así, el agua y el petróleo presentan valores cercanos, mientras el gas aumenta dentro de un rango que experimentalmente no representa mayor diferencia. Su relación de dispersión es lineal hasta el rango de frecuencia para pruebas de laboratorio, donde se observa que el fluido con mayor viscosidad (petróleo) se mantendrá casi-constante, un comportamiento similar (casi-constante) lo sigue el gas mientras el agua presenta variaciones leves al ser estudiado en escala de laboratorio.

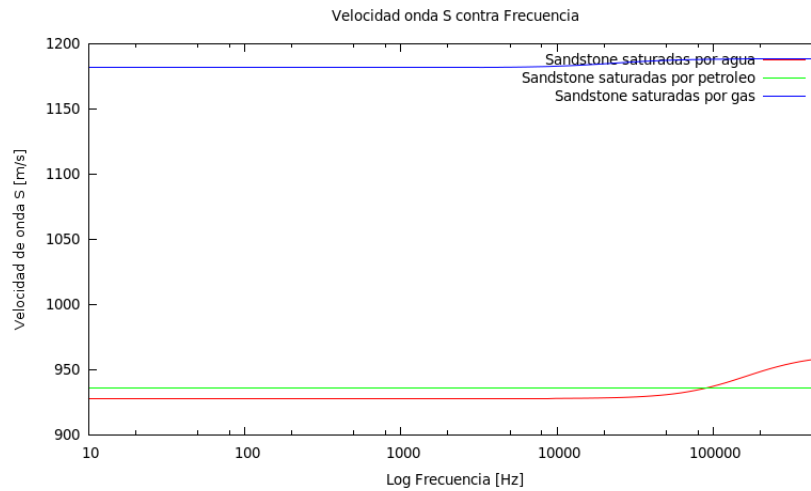


Figura 5.1: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* saturadas por agua, gas y petróleo.

2. Variaciones de los parámetros de la roca, el fluido saturante se mantiene constante. Los parámetros a variar son: K_s , ρ_s , ϕ , κ y T .

En la figuras (5.2), (5.3) y (5.4), se muestra que al variar los parámetros de la roca se encontró que la roca *Sandstone* presenta un aumento de velocidad para onda S. Se esperaba que la onda S no se viera influenciada por el fluido saturante pero si por el tipo de roca.

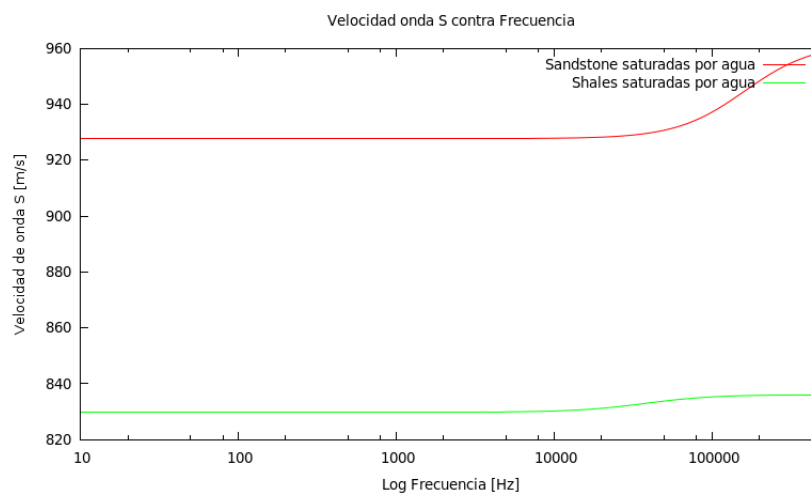


Figura 5.2: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* y *Shales* saturadas por agua.

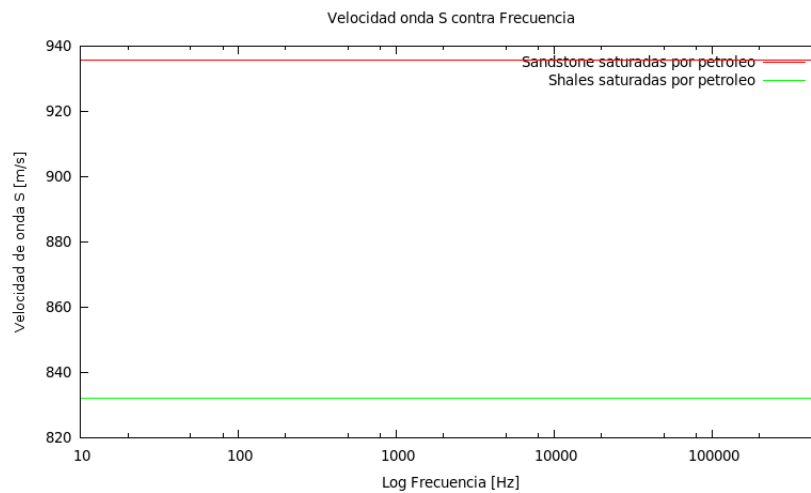


Figura 5.3: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* y *Shales* saturadas por petróleo.

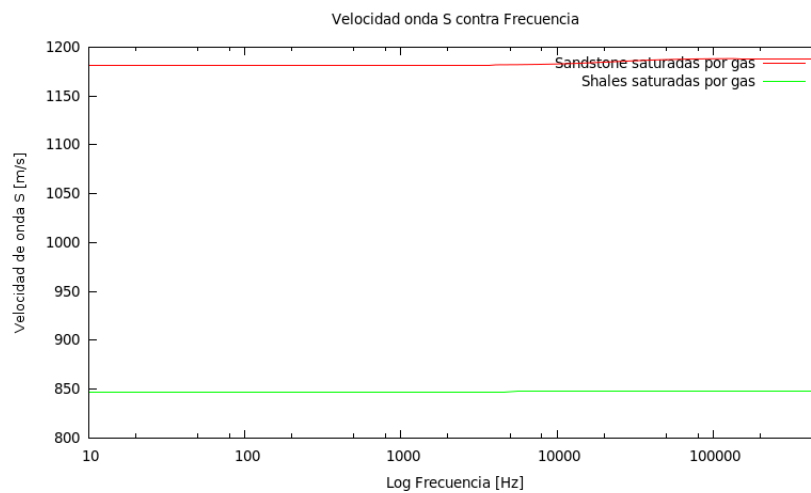


Figura 5.4: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* y *Shales* saturadas por gas.

3. Variaciones en propiedades específicas de la roca. Los parámetros variados son: ϕ y κ .

Al variar la porosidad se evidencian cambios para todas las escalas de interés, desde la sísmica a la escala de estudio de laboratorio (Figura 5.5), caso contrario a la permeabilidad que no permite ver diferencias en la escala sísmica y se presentan leves variaciones en la escala de análisis de laboratorio (Figura 5.6). Las rocas *shales* presentan menor velocidad de onda S en todos los escenarios, indicando que la litología es determinante en la onda S, pero los fluidos no afectan la velocidad

de onda S.

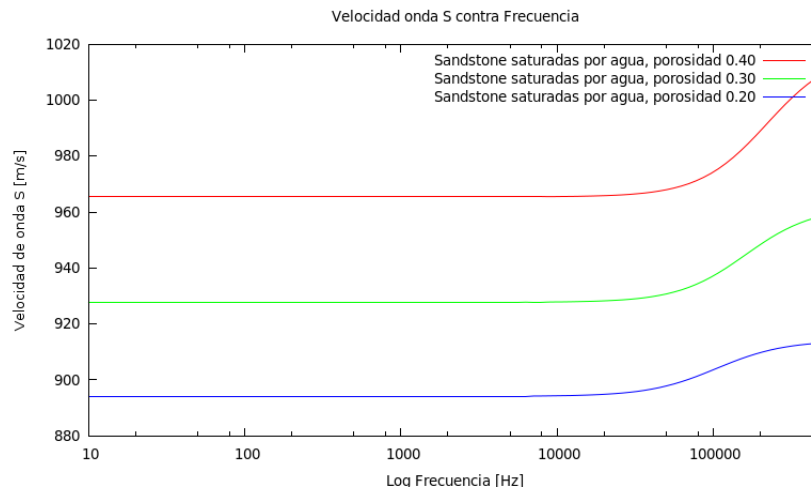


Figura 5.5: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* con porosidades de 0.40, 0.30 y 0.20 saturadas por agua.

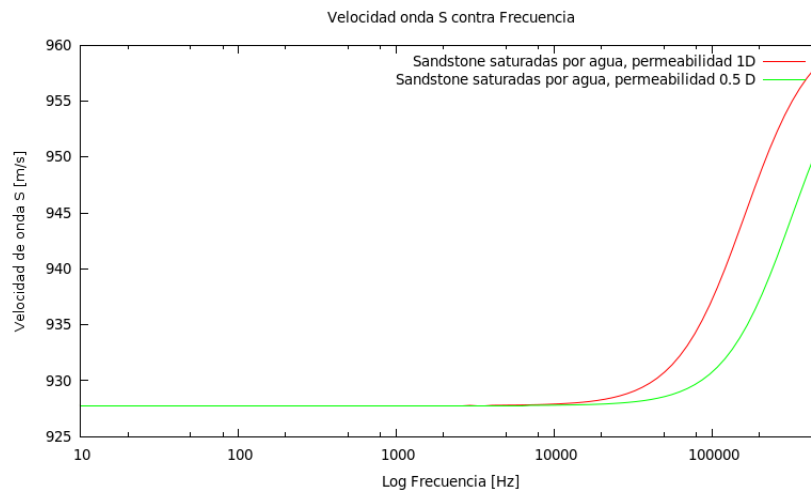


Figura 5.6: Velocidad onda S contra frecuencia para *Sandstone* con permeabilidades de 1 D y 0.5 D saturadas por agua.

CAPÍTULO 6

MODELADO

El modelado sísmico es una técnica de simulación de propagación de ondas en la tierra. El objetivo es predecir el sismograma que un conjunto de sensores podría grabar, asumiendo una estructura y una composición del subsuelo. Existen muchas aproximaciones para el modelado sísmico. Estas se clasifican en tres categorías principalmente: directos, métodos integrales y método de trazado de rayos [7].

En este trabajo se usa un método directo el cual permite resolver las ecuaciones dinámicas de un medios porosos, así el modelo es discretizado en un número finito de puntos. Los métodos directos son llamados métodos de malla y métodos de ecuación de onda completa. Estos no tienen restricciones en las variaciones del material, y su precisión está determinada por que mallado usado.

6.1 Modelo de Capas

Buscando simular un reservorio de hidrocarburos se generó un modelo de tres capas. La primera capa es una roca *shale*, esta roca puede comportarse como sello en un sistema petrolífero impidiendo que el hidrocarburo migre a otras zonas gracias a su baja permeabilidad, la segunda capa es una roca *sandstone* esta roca presentan una porosidad adecuada para ser almacenadora de hidrocarburos, la tercera capa es nuevamente roca *shale*.

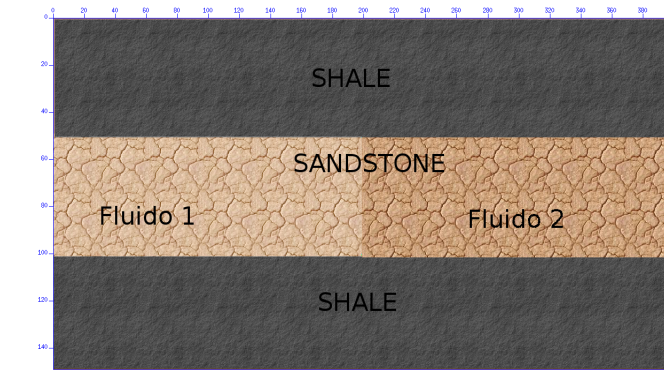


Figura 6.1: Modelo de reservorio donde las capas de *shale* se consideran rocas sellantes, la roca *sandstone* son las rocas almacenadoras y es saturado por combinaciones de fluidos.

Los valores que caracterizan los medios son descritos en la Tabla 6.1.

	<i>Sandstone</i>	<i>Shale</i>	Agua	Petróleo	Gas
μ [GPa]	1.855	1.70	-	-	-
K_m [GPa]	1.70	1.60	-	-	-
K_s [GPa]	35.0	11.2	-	-	-
K_f [GPa]	-	-	2.4	1.855	0.022
ρ_m [kg/m ³]	2650	2650	-	-	-
ρ_f [kg/m ³]	-	-	1000	880	100
κ [m ²]	10×10^{-12}	10×10^{-12}	-	-	-
η [Pa.s]	-	-	1×10^{-3}	0.18	1.5×10^{-5}
ϕ	0.30	0.11	-	-	-
T	2.0	3.0	-	-	-

Tabla 6.1: Propiedades Físicas de las capas del modelo tomados de [14]

6.2 Solución numérica

6.2.1. Método de Diferencias Finitas Dominio Temporales

Las diferencias finitas (FD) es un método directo, al igual que el método pseudoespectral (PS), el método de elementos finitos (FE), elementos de frontera y de volumen. Estos métodos requieren discretización de las variables del espacio y el tiempo.

Debido a esto es posible variar los parámetros del medio espacialmente y esto representa

una ventaja frente a las soluciones analíticas.

Para encontrar solución a un problema usando diferencias finitas es necesario conocer el modelo matemático que gobierna el proceso.

El algoritmo usado para resolver el sistema de ecuaciones que describe la propagación de ondas en medios porosos es un esquema de diferencias finitas que opera en una malla espacial de cuarto orden y temporal de segundo orden.

La malla usada se describe en la Figura (6.2), esta es una malla intercalada que permite calcular las variables de forma intercalada como se indica en [9]. Este esquema ocupa una menor cantidad de memoria, ya que no calcula todos los valores en los mismos nodos de la malla.

Cuando se tiene un conjunto discreto hay tres análisis que se debe realizar:

1. Orden de aproximación
2. Estabilidad
3. Consistencia y Convergencia

Adicional a esto se debe considerar el tipo de fuente que se simulará y el tiempo de integración.

Orden de aproximación

Utilizando diferencias finitas se pueden aproximar las derivadas parciales de primer orden y de segundo orden. Para la aproximación de derivadas de primer orden se tiene una función dada $f(x)$ suficientemente suave; con valor conocido para un punto x_0 es posible conocer el valor que toma en un punto cercano $x_0 + \delta_x$ mediante un desarrollo en series de Taylor

$$f(x_0 + \delta_x) = f(x_0) + \sum \frac{(\delta_x)^k}{k!} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^k}. \quad (6.1)$$

Para un punto $f(x_0 \pm \delta_x)$ tenemos

$$f(x_0 \pm \delta_x) = f(x_0) \pm (\delta_x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\delta_x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \pm \frac{(\delta_x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}. \quad (6.2)$$

A partir de la ecuación (6.1) podemos obtener la expresión en diferencias finitas para la primera derivada

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \delta_x)}{\delta_x} + O(\delta_x), \quad (6.3)$$

siendo $O(\delta_x)$ el orden de precisión, para otro punto de la malla se tiene

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \delta_x) - f(x)}{\delta_x} + O(\delta_x). \quad (6.4)$$

Al restar $f(x + \delta_x)$ y $f(x - \delta_x)$ se obtiene la fórmula de segundo orden para la primera derivada que es conocida como diferencias centradas

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \delta_x) - f(x - \delta_x)}{2\delta_x} - O(\delta_x)^2, \quad (6.5)$$

en estas aproximaciones se utilizan valores enteros en la expansión de Taylor para construir una malla simple. Cuando se incluyen valores fraccionarios en la serie de Taylor se habla de una malla intercalada.

Estabilidad

La estabilidad de un esquema en diferencias finitas habla del crecimiento o no de los errores que se propagan en la malla. Mide si los errores convergen a un valor y no crecen indefinidamente mientras hay iteraciones.

Convergencia y Consistencia

La convergencia es un concepto asociado con el error de truncación y define la forma en que la solución aproximada se acerca a la solución exacta. Se dice que el esquema es convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u, \quad (6.6)$$

siendo u_h la solución aproximada y u la solución exacta.

La consistencia del esquema está relacionada con la precisión con la que el operador diferencial discretizado aproxima al operador diferencial que define la ecuación diferencial.

Fuente

El pulso de Ricker es la *Wavelet* sísmica causado por el pasaje de un pulso sísmico a través de un medio ideal viscoso, donde la atenuación es proporcional al cuadrado de la frecuencia, su expresión matemática es,

$$t = (it - 1)dt - t_o, \quad (6.7)$$

donde el valor t_o en la onda de Ricker, está dado por

$$t_o = \frac{1,0}{Freq} \quad (6.8)$$

el valor de frecuencia es de 35 Hz.

6.2.2. Modelo matemático

Usando las ecuaciones de movimiento (2.72) y (2.73)

$$\partial_j \sigma_{ij} = \rho \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + \rho_f \partial_{tt}^2 w_i, \quad (6.9)$$

$$-\partial_i p_f = \rho_f \partial_{tt}^2 u_i^{(m)} + Y * \partial_t w_i, \quad (6.10)$$

donde las relaciones constitutivas están descritas por

$$\sigma_{ij} = 2\mu_m d_{ij} + K_G \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} + M\alpha \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \delta_{ij}, \quad (6.11)$$

y

$$p_f = -M \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \alpha M^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (6.12)$$

Estas ecuaciones de movimiento y constitutivas pueden ser expresadas como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Así, bajo una formulación esfuerzo-velocidad en el caso 2D se tiene:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial W_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad (6.13)$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial W_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \quad (6.14)$$

$$\rho_f \frac{\partial V_x}{\partial t} + m \frac{\partial W_x}{\partial t} + \frac{\eta}{\kappa} W_x = -\frac{\partial p_f}{\partial x}, \quad (6.15)$$

$$\rho_f \frac{\partial V_z}{\partial t} + m \frac{\partial W_z}{\partial t} + \frac{\eta}{\kappa} W_z = -\frac{\partial p_f}{\partial z}, \quad (6.16)$$

donde:

$$\partial u_i / \partial t = V_i \text{ y } \partial w_i / \partial t = W_i.$$

Aplicando los mismo cambios en las relaciones constitutivas (6.11) y (6.12) se obtiene

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -M \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) - \alpha M^2 \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = [2\mu_m + K_G] \frac{\partial V_x}{\partial x} + K_G \frac{\partial V_z}{\partial z} + M\alpha \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right), \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = [2\mu_m + K_G] \frac{\partial V_z}{\partial z} + K_G \frac{\partial V_x}{\partial x} + M\alpha \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right), \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu_m \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right). \quad (6.20)$$

Relacionando las ecuaciones (6.13) con (6.15) y (6.14) con (6.16) se tiene

$$(m\rho - \rho_f^2) \frac{\partial V_x}{\partial t} = \rho_f \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f b W_x + m \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + m \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad (6.21)$$

$$(m\rho - \rho_f^2) \frac{\partial V_z}{\partial t} = \rho_f \frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f b W_z + m \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + m \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}, \quad (6.22)$$

$$(\rho_f^2 - m\rho) \frac{\partial W_x}{\partial t} = \rho \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho b W_x + \rho_f \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_f \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad (6.23)$$

$$(\rho_f^2 - m\rho) \frac{\partial W_z}{\partial t} = \rho \frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho b W_z + \rho_f \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_f \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}, \quad (6.24)$$

el conjunto de ecuaciones (6.17) a (6.24) son las ecuaciones que deben ser discretizadas.

Presión de Poro

$$\frac{p_f^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - p_f^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta t} = -\alpha M^2 \left[\frac{V_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - V_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{V_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - V_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right] - M \left[\frac{W_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - W_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{W_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - W_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right]$$

Esfuerzos xx

$$\frac{\sigma_{xx}^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \sigma_{xx}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta t} = (2\mu + K_G) \frac{V_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - V_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + K_G \frac{V_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - V_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} + \alpha M \left[\frac{W_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - W_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{W_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - W_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right]$$

Esfuerzos zz

$$\frac{\sigma_{zz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \sigma_{zz}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta t} = (2\mu + K_G) \frac{V_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - V_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} + K_G \frac{V_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - V_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \alpha M \left[\frac{W_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - W_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{W_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - W_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right]$$

Esfuerzos xz

$$\frac{\sigma_{xz}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \sigma_{xz}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\delta t} = \mu \left[\frac{V_z^n(i + 1, j + \frac{1}{2}) - V_z^n(i, j + \frac{1}{2})}{\delta x} \right] + \mu \left[\frac{V_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - V_x^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\delta z} \right]$$

CAPÍTULO 7

RESULTADOS

7.1 Simulación

La propagación de ondas sobre el modelo de tres capas es mostrada en la siguientes capturas que permiten evidenciar la existencia de una segunda onda P-lenta. Los frentes de onda mostrados corresponden a las ondas compresionales.

El arreglo de fuentes se ubica en $(x, z) = (200m, 2m)$, se usó un tamaño de celda de 0,98 m, una frecuencia de 35 Hz y un delta de tiempo de $1,00 \times 10^{-4}s$.

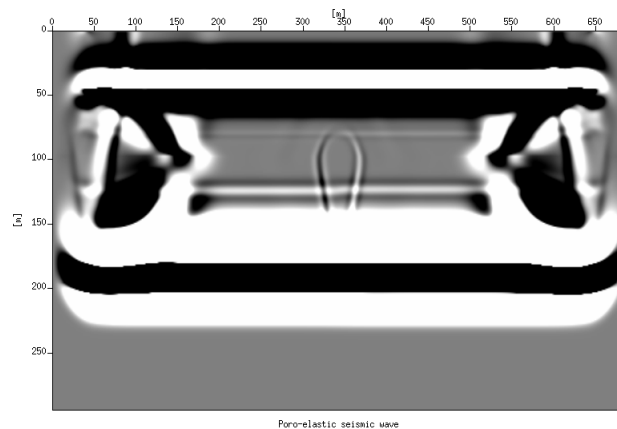


Figura 7.1: Captura de pantalla. *Sandstone* saturadas por agua-petróleo, no se observan variaciones de velocidad.

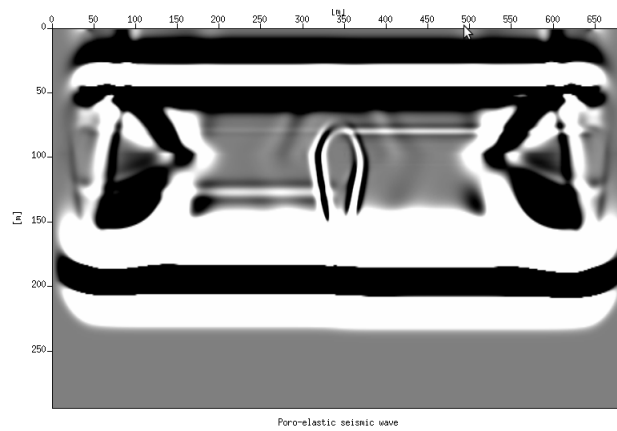


Figura 7.2: Captura de pantalla. *Sandstone* saturadas por petróleo-gas, se observa un aumento en la velocidad para la zona que contiene petróleo.

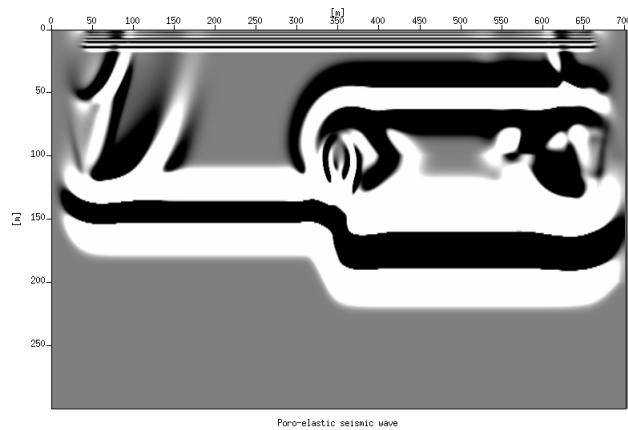


Figura 7.3: Captura de pantalla. *Shales* (izquierda), *Sandstone* (derecha) se observa un aumento significativo en las *Sandstone*.

Las figuras mostradas son llamadas capturas de pantalla o *snapshots* y evidencia la existencia de las ondas P rápida y P lenta. Las pruebas mostraron concordancia con los análisis de velocidad. Sobre el modelado numérico se varía porosidad, permeabilidad y saturación de fluido, los aumentos de velocidad son apenas apreciables en la simulación. Disminuir la porosidad incrementa los tiempos de arribo de la onda rápida y aumenta la velocidad de propagación a través del medio, la velocidad de onda lenta se incrementa. Sin embargo en la simulación los cambios son apenas apreciables.

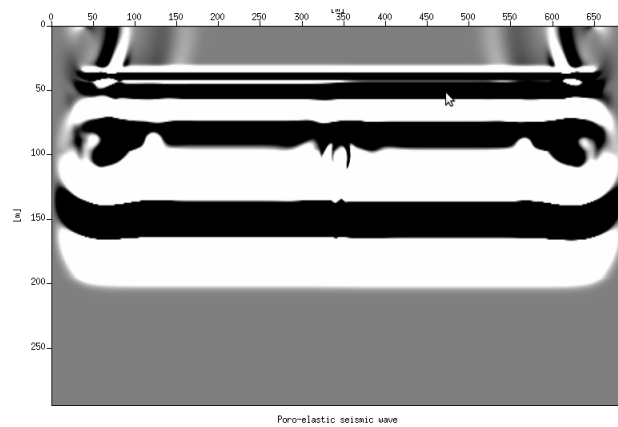


Figura 7.4: Captura de pantalla. Variaciones de porosidad en rocas *Sandstone* saturadas por agua se observa un leve aumento en la velocidad para porosidad de 0.30 en comparación con porosidad de 0.40

7.2 Trazas Sísmicas

Mediante trazas sísmicas es posible demostrar que las propiedades de los fluidos como viscosidad, módulo de compresibilidad del fluido y densidad de fluido generan variaciones en la respuesta de la energía reflejada, las trazas indican que el gas es el fluido que presenta mayores variaciones sobre la velocidad, mientras que el agua y el petróleo no evidencian mayor diferencia entre ellos como se muestra a continuación,

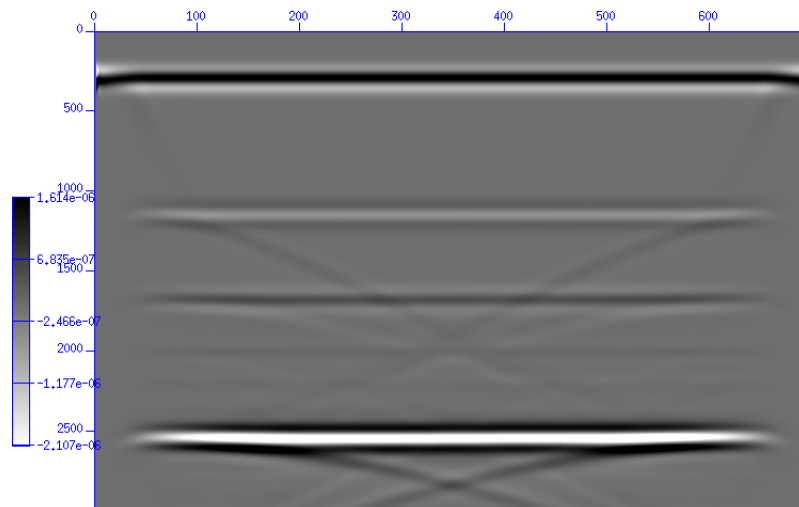


Figura 7.5: Traza sísmica modelo de capas saturadas por agua (izquierda) y petróleo (derecha), no se evidencian variaciones.

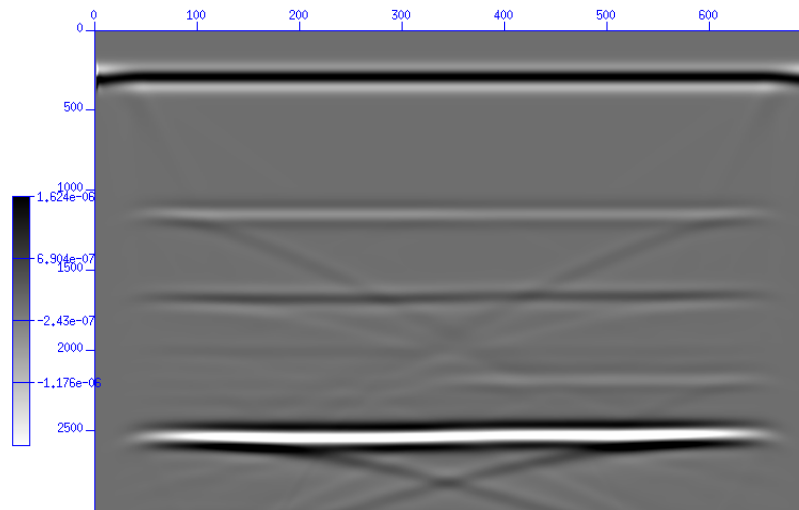


Figura 7.6: Traza sísmica modelo de capas saturadas por petróleo (izquierda) y gas (derecha), no se evidencian variaciones.

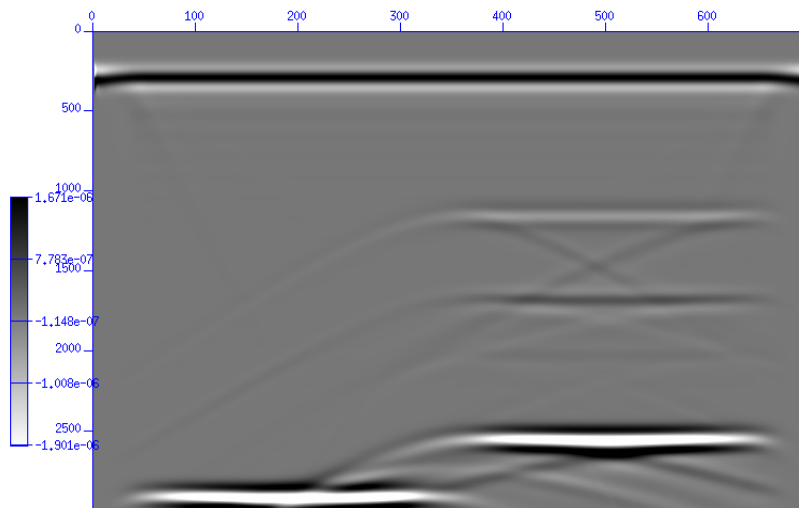


Figura 7.7: Traza sísmica modelo de capas *Sandstone* (derecha), *Shales* (izquierda), se evidencian variaciones significativas, lo anterior concuerda con resultados obtenidos en análisis de velocidades

En la simulación se demostró que solo es posible evidenciar los cambios en la velocidad para las variaciones del tipo de roca, en los otros casos son apenas identificables los aumentos de velocidad de propagación. Basados en lo anterior, la respuesta en trazas sísmicas (figura 7.5 y figura 7.6) pueden no contener suficiente información. Así, las

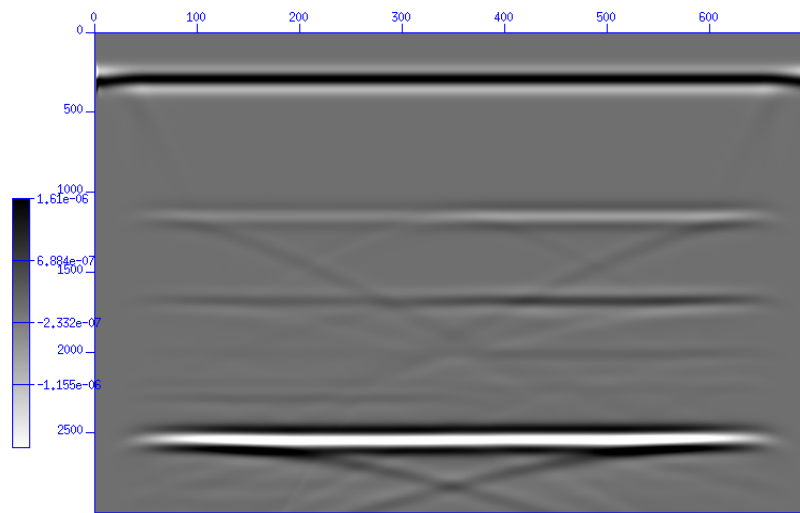


Figura 7.8: Trazas sísmicas modelo de capas variando porosidad, no se evidencian variaciones significativas, lo anterior concuerda con resultados obtenidos en análisis de velocidades

trazas donde se varia el fluido y donde se varian porosidad (figura 7.8) y permeabilidad son similares, y solo se obtiene una respuesta diferente para el caso que compara los dos tipos de roca estudiados (figura 7.7).

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

Se estudió la teoría poroelástica desarrollada por Maurice Biot sobre un modelo compuesto por dos tipos de rocas (*sandstones* y *shales*) y tres tipos de fluidos (agua, gas y petróleo).

Se mostró partiendo de la teoría la existencia de dos ondas compresionales, ya que el sistema de ecuaciones de movimiento al ser desacoplado y usar una solución de onda plana mostró una ecuación cuadrática para la velocidad, donde las raíces corresponden a la onda compresional rápida y onda compresional lenta. Debido a que la caracterización de formaciones saturadas por fluidos requiere usar experimentos numéricos de propagación de ondas que estudien los efectos de la porosidad, permeabilidad y viscosidad en el medio e identificar como afecta la imagen sísmica, se plantearon dos formas de estudiar la incidencia de los parámetros en las velocidades sísmicas, una a partir de las relaciones entre velocidades, parámetros y frecuencia, y otra mediante una simulación de la propagación de ondas.

Para el análisis de las expresiones se generaron curvas de dispersión en el caso de la onda S y tablas de valores en el caso de las ondas P. En la simulación los resultados se registraron como capturas de pantalla y trazas sísmicas. Las pruebas planteadas fueron: variación de fluido saturante, variación del tipo de roca y variación parámetros específicos de las rocas.

Los resultados mostrarán que la onda P rápida es sensible al contenido de fluido almacenado siendo el agua el fluido que genera mayores valores de velocidad de onda P con

respecto a al petróleo y el gas, las ondas P rápidas son fuertemente afectadas por la presencia de gas. La roca *sandstone* es la roca que presenta mayor velocidad de onda P. La relación entre porosidad y velocidad de onda P rápida es decreciente.

Para la onda P lenta se encontraron valores de velocidades que no superaron 745.316 m/s, indicando que es la tercera onda entre las las ondas P rápida y onda S. Su comportamiento es validado por los resultados obtenido por [5]. Tiene mayor velocidad al propagarse sobre un fluido con alta viscosidad y su relación con la porosidad es directa, a mayor porosidad, mayor velocidad de onda P lenta.

Las ondas S no se ven afectadas por la saturación de fluido, en este caso las rocas *sandstone* presenta valores de velocidad de onda S superiores a los valores de onda s en *shales*. La porosidad aumenta en el rango de laboratorio, la permeabilidad no representa para ningún tipo de onda, variaciones.

Los estudios numéricos realizados evidencian la existencia de una onda P lenta. Mediante trazas sísmicas se demostró que las propiedades de los fluidos como viscosidad, módulo de compresibilidad del fluido y densidad de fluido generan variaciones apenas apreciables en la velocidad sísmica, sin embargo las variaciones de los parámetros de las rocas como módulo de compresibilidad de la matriz, densidad del sólido, porosidad y tortuosidad si generaron cambios significativos. Los resultados mostraron que el gas es el fluido que presenta mayor absorción de energía, mientras que el agua y el petróleo no evidencian mayor diferencia entre ellos.

Los resultados de los experimentos numéricos indican que la porosidad y permeabilidad no reflejan mayores alteraciones sobre la velocidad entre la escala de 0 a 100000 Hz. Para pruebas de laboratorio es posible encontrar variaciones significativas en la permeabilidad. Es por esto que los experimentos de laboratorio y trabajo de campo son necesarios para estudiar la influencia de los diferentes parámetros sobre la velocidad.

APÉNDICES

A.1 Tensor Elástico

La ecuación constitutiva (2.1) es proporcional a un tensor de cuarto orden C_{ijkl} , siendo este el tensor elástico de 81 componentes, que describe las propiedades y características del medio.

Mediante notación de Voight es posible reducir el tensor de 81 componentes a una matriz de 6 x 6, ya que cada par de índices independientes al ser mapeado resulta como un solo índice, como se muestra en la siguiente tabla.

(i,j)	α
11	1
22	2
33	3
23 – 32	4
31 – 13	5
21 – 12	6

Tabla A.1: Notación de Voight.

De los 36 elementos de la matriz elasticidad, el número de elementos distintos de cero y linealmente independientes depende del grado de anisotropía del suelo.

Si la estructura del suelo define algún tipo de simetría elástica, muchos elementos se anulan y los otros son combinación lineal de los existentes.

En el caso isótropo solo se necesitan dos constantes que son los parámetros de Lamé.

A.2 Notación

Para facilitar la comprensión de las relaciones mencionadas en todo el documento, se presenta la notación empleada:

DENSIDAD DE ENERGÍA

C_{ijkl} Tensor elástico de cuarto orden

V Densidad de energía

ϵ_{ij} Componentes de la deformación (strain) $e_{ij} = 2\epsilon_{ij}$

λ Coeficiente de Lamé

μ Coeficiente de Lamé (Módulo de cizalla)

ϑ^2 Modo de deformación Dilatacional $\vartheta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$

d_{ij} Modo de deformación de cizalladura $d_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}$

A, B, C y D Coeficientes elásticos

COEFICIENTES ELÁSTICOS

μ_m Módulo de cizalla de la roca sin fluido

σ_{ij} Esfuerzos

ϕ Porosidad

p_f Presión de poro o presión fluido

K_m Módulo de drenaje (Drained modulus), Módulo de compresibilidad de la roca sin fluido.

K_s Módulo de la roca

K_f Módulo del fluido

P, N, Q y R Parámetros elásticos en notación de Biot

ESFUERZOS EFECTIVOS

p_c Presión de confinamiento

p_e Presión efectiva

M Constante dada por $M = \frac{K_s}{\alpha - \phi + \phi \frac{K_s}{K_f}}$

α Coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot $\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}$

δ_{ij} Delta de Kronecker

ϑ_m y ϑ_f Dilatación en matriz y en fluido respectivamente

ζ Variación en el contenido de fluido $\zeta = -\text{div}[\phi(u^f - u^m)] = -\phi(\vartheta^f - \vartheta^m)$

K_G Módulo de saturación $K_G = K_m + M\alpha^2$

u Vector desplazamiento $e_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j$ para $i \neq j$ y $e_{ij} = \partial_i u_i$ para $i = j$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

T Energía cinética

D Energía Disipativa

W Energia Potencial

Θ_D Potencial de disipación

b Coeficiente de fricción $b = \frac{\phi^2 \eta}{\kappa}$

v_i Velocidad

R_e Número de Reynolds $R_e \propto \frac{\rho}{\eta}$

F_i Fuerza Disipativa

$q_i^{(p)}$ Fuerzas generalizadas elásticas

$\pi_i^{(m)}$ Momento lineal por unidad de volumen

ρ_s Densidad del material sólido

ρ_f Densidad del fluido

$w = \phi(u^{(f)} - u^{(m)})$ Desplazamiento relativo entre el fluido y la matriz sólida

$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$ Densidad promedio

η Viscosidad

κ Permeabilidad

$Y(t)$ Operador viscodinámico de bajas frecuencias

REFERENCIAS

- [1] Biot M., "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media", *Journal of applied physics*, **33**, 1482-1498, (1962).
- [2] F.K.Boadu, "Wave propagation in fluid saturated media: waveform and spectral analysis", *Geophysics*, **141**, 227-240 (2000).
- [3] Caicedo Mario., Mora P., "Temas de Propagación de Ondas.", *Univ. Simon Bolivar*. (2004).
- [4] Camarasa M., "Contribución a la teoría de Biot sobre propagación de ondas acústicas en sedimentos saturados en una mezcla de fluidos: Teoría generalizada de Biot", *Tesis de Doctorado*, (1992).
- [5] Cabrera-Zambrano F. "Análise dos mecanismos de atenuacao e dispersao de ondas em meios porosos saturados e insaturados", *Tesis de Doctorado*, (2009).
- [6] Carcione J. "Wield Fields in Real Media:Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media", *PERGAMON*, volumen 3I (2001).
- [7] Carcione J., Morency C., Santos J., "Computational Poroelasticity", *Submitted to Geophysics*, (2009).
- [8] Johnson, D. L., Koplik, J., Dashen, R. "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *Fluid Mechanics*, **176**, 379-402, (1987).
- [9] Ozdenvar T., McMechan A., "Algorithms for staggered-grid computations for poroelastics,elastic, acoustic, and scalar wave equations.", *Geophysical Prospecting*. **45**, 403 - 42 (1997).
- [10] Palaz I., Kurt J. "Carbonate Seismology", *Geophysical Developments*, 6, (1997).
- [11] Plona T. "Observation of a second bulk compresional wave in a porous medium at frequencies", *Apply Phys*, **36**, 259-261, (1980).

-
- [12] Pride S.R, "Governing equations for the coupled electromagnetic and acoustics of porous media ", *Physical Review*, **50**, 15678-15696, (1994).
- [13] Slawinski, M.A., "Seismic waves and rays in elastic media.", *Univ. of Newfoundland*. (2003).
- [14] Virieux J., "P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method." *Geophysics* **51**, 889-901 (1986).
- [15] Wenzlau F., Muller T., "Finite-difference modeling of wave propagation and diffusion in poroelastico media analysis ", *Geophysics*,**141**, 227-240, (2000).
- [16] Zhang J., "Quadrangle-grid velocity-stress finite difference method for poroelastic wave equations ", *Geophysics*, **139**,171-182, (1999).