



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER



GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE
SEÑALES

HOLOGRAFÍA NUMÉRICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONAL

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES
BUCARAMANGA
2004



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER



GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE
SEÑALES

HOLOGRAFÍA NUMÉRICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONAL

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARIS

Tesis para optar al título de
Magister en Física

Codirección
Dr. Pierre Pellat-Finet
Dr. Yezid Torres Moreno

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES
BUCARAMANGA
2004

Agradecimientos

El trabajo descrito en este documento fue efectuado durante una pasantía en la *Université de Bretagne Sud (France)*, en el contexto del contrato Indeed, financiado por *France Télécom*.

Agradezco a la *Université de Bretagne Sud*, por haberme recibido para esta pasantía.

Efectué una larga estadía en el departamento de óptica de la *École nationale supérieure des télécommunications de Bretagne (France)*, donde pude familiarizarme con las técnicas numéricas utilizadas en hologramas. Agradezco al señor Conde Jean-Louis de Bougrenet por haberme recibido en su laboratorio, a Raymond Chevallier quien me facilitó la bibliografía especializada en los dominios de la holografía numérica y Kevin Heggarty y Sylvie Grégoire quienes estuvieron dispuestos a la fabricación de los hologramas que calculé.

Agradezco a la Universidad Industrial de Santander por toda mi formación a lo largo de mi maestría acompañada de una beca que me ha permitido dedicar el mayor tiempo posible a mi trabajo.

Agradezco especialmente a mis directores Pierre Pellat-Finet y Yezid Torres, quienes directa o indirectamente han tomado parte en mi formación y que han creído en mi durante todo este tiempo.

Índice general

Introducción	6
1. Marco de referencia	7
1.1. Marco histórico	7
1.2. Marco Teórico	8
1.2.1. Transformación de Fourier fraccional	8
1.2.2. Transformación de Fourier fraccional y la difracción	10
2. Desarrollos Teóricos	11
2.1. Convolución fraccional	11
2.1.1. Definición	11
2.1.2. Seudo-generalización	11
2.2. Compensación de un desplazamiento por modulación de fase	12
2.3. Teorema del muestreo en dominios fraccionales	13
2.3.1. Interpolación	14
2.3.2. Transformada discreta de Fourier fraccional	16
3. Holografía numérica por TFf	20
3.1. Algoritmo estándar de cálculo de un holograma	20
3.1.1. Generalidades	20
3.1.2. Algoritmo de cálculo de los hologramas	21
3.2. Cálculo por transformación de Fourier fraccional	22
3.2.1. Cálculo de un holograma con una sola imagen	22
3.2.2. Cálculo de un holograma con doble imagen	24
3.3. Ejemplos y resultados experimentales	26
4. Corrimiento por convolución fraccional	30

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	6
4.1. Corrimiento del plano de observación	30
4.1.1. Aspectos físicos	30
4.1.2. Interpretación en términos de convolución fraccional	31
4.1.3. Generalización	31
4.2. Ilustración	32
5. Propiedades de las figuras de difracción	35
5.1. Nuevas aplicaciones	35
5.2. Ordenes de difracción	35
5.3. Convolución fraccional	36
5.4. Reducción del speckle	36
5.5. Resolución	38
Conclusiones	39
A. Difracción de Fresnel y TFf	41
B. Corrimiento por convolución fraccional	43
C. Transformación discreta de Fourier fraccional	45
Bibliografía	47

Título: HOLOGRAFÍA NUMÉRICA POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONAL ¹

Rafael Angel Torres Amaris.²

Palabras Claves

1. Transformación de Fourier Fraccional. 2. CGH. 3. Muestreo. 4. Convolución.

Resumen

Este trabajo consiste del cálculo y fabricación de hologramas generados por computador, pero mas precisamente de aquellos que son capaces de generar diferentes figuras de difracción dependiendo de la distancia entre el holograma y el plano de observación, es decir: hologramas calculados para difractar al dominio de Fresnel, los cuales son calculados utilizando Transformaciones de Fourier fraccional. Entonces como un primer trabajo se abordó el problema de entender mejor éste operador, tratado en el capítulo uno y dos, el primero ya conocido por la literatura y el segundo capítulo es resultado de éste trabajo de investigación.

En el capítulo Tres se desarrollan los métodos y algoritmos para el cálculo de los hologramas y se hacen simulaciones. Los algoritmos fundamentados en la transformada de Fourier fraccional conducen a cálculos de hologramas numéricos cuyas figuras de difracción deseadas no se hallan necesariamente en el plano de Fourier, sino en general en algún plano de Fresnel preseleccionado.

Un cuarto capítulo es un método fundamentado en la noción de convolución fraccional para el cálculo de hologramas. Todos los métodos desarrollados son ilustrados por simulaciones numéricas y por resultados experimentales, y por último se propone un método original de reducción de speckle para las figuras de difracción de un holograma numérico “fraccional”.

¹Trabajo de Investigación.

²Facultad de Ciencias. Maestría en Física. TORRES MORENO, Yezid.

Title: NUMERICAL HOLOGRAPHY BY FRACTIONAL FOURIER TRANSFORMATION³

Rafael Angel Torres Amaris.⁴

Key words

1. Fractional Fourier Transformation. 2. CGH. 3. Sampling. 4. Convolution.

Abstract

This work consists of the calculation and manufacture of computer generated holograms, but principally that holograms capable to generate different figures of diffraction depending on the distance between hologram and the plane of observation, i.e: calculated hologram for diffracting to the Fresnel's domain, which are calculated using Fractional Fourier Transformations. Then as a first work approached the problem to understand better this operator, treaty in chapter one and two, first already known by Literature and the second chapter it is been from this work of investigation.

In chapter Three the methods are developed and algorithms for the calculation of the holograms and simulations are done. The algorithms based on the fractional Fourier transformation lead to calculations of numerical holograms whose wished figures of diffraction are not necessarily in the Fourier plane, but in general in some Fresnel's plane preselected.

A fourth chapter is a method based on the notion of fractional convolución for the calculation of holograms. All the developed methods are illustrated by numerical simulations and experimental results, and finally an original method of reduction of speckle for the figures of diffraction of a "fractional" numerical hologram.

³Research Work

⁴Facultad de Ciencias. Maestría en Física. TORRES MORENO, Yezid.

Introducción

Las telecomunicaciones ópticas hacen uso de múltiples partes de la óptica, entre las cuales se halla la holografía. Esta se revela notablemente útil para las conexiones en el espacio libre. La holografía numérica permite la concepción y la realización de componentes holográficos que cumplen funciones bastante variadas.

En el contexto de un contrato llamado Indeed,⁵ centrado sobre las telecomunicaciones de interior a alta velocidad en el espacio libre para la longitud de onda del infrarrojo, se propone el problema de disponer de un *diffusor* que permita ampliar la imagen casi puntual[1] que se tiene de una lente, para una fuente alejada (diodo laser), y obtener como imagen una repartición homogénea de intensidad en un rectángulo, pero que ésta se mantenga igual para una profundidad recomendada es decir un cubo de algunos milímetros de lado, tal que un detector ubicado dentro de esa zona pueda apartarse de la focalización del sistema sin penalizar la detección. Esto nos conduce a la concepción de un *diffusor* holográfico que lleve a cabo esta tarea descrita anteriormente, calculándolo de modo que en dos planos de difracción no muy alejados entre si, se obtenga la misma figura de difracción rectangular, y en estas condiciones es de esperar que tal condición se mantenga a lo largo del volumen.

El problema planteado no ha sido abordado hasta el momento o, en su defecto, no ha sido reportado en la literatura correspondiente al tema. Además de lo anteriormente expuesto, en este trabajo el problema se ha resuelto de manera general, es decir se extendió al caso en el cual las dos figuras de difracción se escogen a priori diferentes.

Clásicamente los hologramas numéricos se calculan para que difracten al “plano de Fourier”, pero a partir del momento en que se ponen en juego dos planos de observación, se hace necesario apartarse del plano de Fourier. Dicho de otro modo, se hace necesario pasar de un régimen de difracción de Fraunhofer a un régimen de difracción de Fresnel. Esta necesidad nos conduce a reemplazar en los algoritmos de cálculo de hologramas numéricos la transformación de Fourier por una transformación de Fourier fraccional, puesto que se sabe que esta última transformación traduce simplemente la difracción de Fresnel.

Así, el primer capítulo de esta monografía describe los algoritmos de cálculo de los hologramas numéricos basados en la transformación de Fourier fraccional. Se dan ejemplos de simulaciones numéricas y se mencionan resultados experimentales. El segundo capítulo expone un método teórico alternativo, basado en la noción de convolución fraccional y al final trata algunos aspectos técnicos de mejoramiento de los hologramas numéricos calculados, además de ciertos resultados teóricos en materia de tratamiento de señales.

⁵Contrato financiado por *France Télécom*.

Capítulo 1

Marco de referencia

1.1. Marco histórico

En la historia de la holografía el primer aporte se le otorga a Bragg (*Nature*, 1936). En este experimento se obtiene un difractograma de un cristal, que es en esencia la transformada de Fourier de la estructura cristalina usando como fuente de iluminación un emisor de rayos X, en donde se registraba la información correspondiente tanto de la amplitud como de la fase. Un segundo aporte vino de parte de Gabor (*Nature*, 1948). Él trabajó en un método para registrar y reconstruir micrografías electrónicas. En este proceso nació lo que nosotros ahora llamamos *on axis interferometric hologram* (OAH). Luego de esto surge un experimento hecho por Rogers (*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1949-52). Rogers razonó que para objetos simples, el patrón de interferencia para un OAH se podría calcular analíticamente y el holograma sintético dibujarse. Un cuarto evento fue cuando Leith y Upatnieks (*Journal of the Optical Society of America*, 1961) inventaron el *off-axis hologram* que con, la llegada del láser, permitió obtener hologramas de muy alta calidad, que capturaron la atención de científicos y no científicos. Fue cuando Lohmann y Brown (*Applied Optics*, 1966) inventaron el *Computer Generated Hologram* (CGH), aquí el incrementado poder de los computadores y el recientemente inventado algoritmo de la transformada de Fourier rápida *fast Fourier transform* (FFT), fueron combinados para crear un holograma binario[2]. El término holograma ha crecido para incluir el gran número de aplicaciones en un ancho rango de longitudes de onda tanto electromagnéticas como acústicas, así como también se ha extendido el significado de la palabra holograma ya que estos hoy en día pueden generarse por computador. Tales hologramas pueden ser elementos ópticos. Los trabajos acerca del mejoramiento de la técnicas holográficas han persistido durante cuarenta años y la razón es la necesidad de un mejor desarrollo para las nuevas aplicaciones, y este interés se ha incrementado con la introducción de los CGHs.

1.2. Marco Teórico

1.2.1. Transformación de Fourier fraccional

La Transformación de Fourier fraccional (TFf) fue definida en 1980 por Victor Namias como una herramienta para solucionar ecuaciones diferenciales aplicadas al oscilador armónico mecánico cuántico[3], obteniendo un operador que es una generalización del operador transformación de Fourier estándar

$$\mathcal{F}^\alpha[f](x') = \frac{e^{i\pi/4} e^{i\alpha/2}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}} f(x) dx. \quad (1.1)$$

Este operador, para el valor de $\alpha = \pi/2$, se reduce al caso estándar de la transformación de Fourier.

Propiedades

Los principales teoremas conocidos para la transformación de Fourier estándar, fueron generalizados para la TFf. Además, al igual que el caso estándar, éste operador TFf, es también unitario.

§ Linealidad:

$$\mathcal{F}^\alpha[af(x) + bg(x)](x') = a\mathcal{F}^\alpha[f(x)](x') + b\mathcal{F}^\alpha[g(x)](x'). \quad (1.2)$$

§ Teorema de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x')g_\alpha^*(x')dx'. \quad (1.3)$$

§ Teorema del corrimiento:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x - \zeta)](x') = f_\alpha(x' - \zeta \cos \alpha) e^{i\pi \sin \alpha (\zeta^2 \cos \alpha - 2x'\zeta)}. \quad (1.4)$$

§ Teorema de la modulación:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)e^{i2\pi\nu x}](x') = f_\alpha(x' - \nu \sin \alpha) e^{-i\pi \cos \alpha (\nu^2 \sin \alpha - 2x'\nu)}. \quad (1.5)$$

§ Teorema del escalamiento:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(cx)](x') = \sqrt{\cos \beta / \cos \alpha} e^{\frac{1}{2}i(\alpha-\beta)} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha (1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha})} f_\beta(x' \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha}), \quad (1.6)$$

donde $\tan \beta = c^2 \tan \alpha$.

Pares de transformadas

Estas son cuatro funciones de mucho interés, cuyas transformadas fraccionales están interrelacionadas, y tiene cierto nivel de importancia su estudio a lo que la óptica se refiere.

Se puede apreciar que todas tienen como transformada una función Chirp (conociéndose como Chirp una función cuya frecuencia aumenta en forma cuadrática).

§ Función Constante:

$$\mathcal{F}^\alpha[1](x') = \frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha}}{\sqrt{\cos \alpha}} e^{-i\pi x'^2 \tan \alpha}. \quad (1.7)$$

§ Distribución de Dirac:

$$\mathcal{F}^\alpha[\delta(x - \zeta)](x') = \frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha}}{\sqrt{i \sin \alpha}} e^{i\pi \frac{(\zeta^2 + x'^2) \cos \alpha - 2\zeta x'}{\sin \alpha}}. \quad (1.8)$$

§ Función armónica:

$$\mathcal{F}^\alpha[e^{i2\pi x\nu}](x') = \frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha}}{\sqrt{\cos \alpha}} e^{-i\pi \frac{(\nu^2 + x'^2) \sin \alpha - 2\nu x'}{\cos \alpha}}. \quad (1.9)$$

§ Función Chirp:

$$\mathcal{F}^\alpha[e^{ic\pi x^2}](x') = \frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha}}{\sqrt{\cos \alpha + c \sin \alpha}} e^{i\pi \frac{c - \tan \alpha}{1 + c \tan \alpha} x'^2}. \quad (1.10)$$

Convolución fraccional

Una de las operaciones más importantes en el análisis de Fourier es la convolución, ya que de esta operación y el llamado teorema de la convolución se deduce el teorema de Shannon-Whitaker (ver referencia [8, 9]), que permite la discretización de las señales con la menor pérdida de información posible. Esta operación se define de manera que para ordenes fraccionales iguales a uno se reduzca al caso estándar:

$$C_\alpha^{\beta, \gamma}(x, x') = [f \star_\alpha^{\beta, \gamma} g](x, x') = \mathcal{F}^{-\alpha}[\mathcal{F}^\beta[f] \times \mathcal{F}^\gamma[g]](x, x') \quad (1.11)$$

Más adelante se verá que este orden α no es cualquiera, si lo que se pretende es que esta nueva operación mantenga algunas propiedades análogas al caso estándar, entre estas el caso de la convolución por una distribución de Dirac. A diferencia del caso estándar, la convolución fraccional es una representación espacio directo-frecuencia. Esto es de esperarse, ya que una convolución de una función por una distribución de Dirac que se encuentra corrida a una posición x_0 , pero que además es una distribución en algún dominio fraccional. Esta operación hace un corrimiento de la función tanto en la posición x , como en el eje óptico z , dando como resultado que la función inicial se desplaza a un dominio espacio directo-frecuencia (ver figura 4.1). Además, se verá en el capítulo 4 que esta definición de la ecuación 1.11 se reduce siempre a un caso tal que $\alpha = \beta = \gamma$, resultando $C^\alpha(x, x') = [f \star^\alpha g](x, x')$, siendo esta última la verdadera definición de convolución fraccional.

1.2.2. Transformación de Fourier fraccional y la difracción

De este nuevo operador surgieron muchos interrogantes, entre estos estaba el si era posible realizarlo ópticamente, como lo es con la transformada de Fourier estándar. Esto se logro por primera vez en un experimento llevado a cabo por Ozaktas y Mendlovic en un medio Grin[4, 5]; posteriormente, Lohman muestra dos arquitecturas ópticas en las cuales, por medio de un arreglo de lentes, se obtiene una transformada de Fourier fraccional en el espacio libre[6].

Hasta este punto todo lo que se había hecho era encontrar sistemas ópticos en los cuales se lograba demostrar que la función de distribución del campo a la salida correspondía a una transformada de Fourier fraccional de la función de distribución del campo a la entrada. Pero el paso más importante a lo que la óptica fraccional se refiere, se da cuando Pellat-Finet y Bonnet[7] muestran que la difracción de Fresnel se puede expresar como una transformada de Fourier fraccional(ver apéndice A), con lo cual se hace evidente que sistemas ópticos llevan a cabo una transformación de Fourier fraccional (TFf); a la luz de la óptica metaxial

$$\mathcal{V}_{D_\varepsilon}(\sigma) = e^{i\alpha}(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)\mathcal{F}^\alpha[\mathcal{V}_A](\sigma). \quad (1.12)$$

En esta ultima ecuación se tiene que la amplitud del campo $\mathcal{V}_{D_\varepsilon}$ sobre un receptor esférico D_ε esta relacionada con la amplitud del campo \mathcal{V}_A sobre un emisor esférico A por una TFf .

Con base en estos resultados, podemos hacer uso del operador TFf como si se tratase de la difracción de Fresnel, salvo un factor constante y un escalamiento.

Capítulo 2

Desarrollos Teóricos

Para lograr entender e interpretar mejor, tanto este operador como los resultados que de él se derivan, es abordada la tarea de definir algunas de sus operaciones y teoremas fundamentales ya conocidas para la transformación de Fourier estándar, lo cual llevo a la realización de algunos desarrollos teóricos.

2.1. Convolución fraccional

2.1.1. Definición

Para dos funciones f y g , se define la convolución fraccional de orden α por

$$f *_{\alpha}^{\alpha} g = \mathcal{F}^{-\alpha} [\mathcal{F}^{\alpha}[f] \mathcal{F}^{\alpha}[g]] . \quad (2.1)$$

Para $\alpha = 0$, Se halla el producto simple de funciones y para $\alpha = \pi/2$ el producto de convolución habitual o estándar.

2.1.2. Seudo-generalización

Se encuentran en la literatura algunas definiciones de la convolución fraccional presentadas como el caso general. Se encuentra, por ejemplo, una definición compuesta de tres parámetros

$$f *_{\alpha}^{\beta, \gamma} g = \mathcal{F}^{-\alpha} [\mathcal{F}^{\beta}[f] \mathcal{F}^{\gamma}[g]] . \quad (2.2)$$

A continuación utilizaremos la misma notación. Pero es pertinente resaltar que no se trata realmente de una extensión de la noción de convolución fraccional ya que esta última se puede llevar a la forma que se ha definido en (2.1). Así,

$$\begin{aligned} f *_{\alpha}^{\beta, \beta} g &= \mathcal{F}^{-\alpha} [\mathcal{F}^{\beta}[f] \mathcal{F}^{\beta}[g]] , \\ &= \mathcal{F}^{-\alpha+\beta} \{ \mathcal{F}^{-\beta} [\mathcal{F}^{\beta}[f] \mathcal{F}^{\beta}[g]] \} , \\ &= \mathcal{F}^{-\alpha+\beta} [f *_{\alpha}^{\beta} g] . \end{aligned} \quad (2.3)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
f *_{\alpha}^{\alpha, \beta} g &= \mathcal{F}^{-\alpha} [\mathcal{F}^{\alpha}[f] \mathcal{F}^{\beta}[g]] , \\
&= \mathcal{F}^{-\alpha} \{ \mathcal{F}^{\alpha}[f] \mathcal{F}^{\alpha} [\mathcal{F}^{\beta-\alpha}[g]] \} , \\
&= f *_{\alpha}^{\alpha} \mathcal{F}^{\beta-\alpha}[g] .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Así se llega, a la definición (2.1) compuesta con una transformación de Fourier fraccional. En general todos los casos se pueden llevar a esta forma, por lo que parece lógico tomar esta definición como el caso general de convolución fraccional.

2.2. Compensación de un desplazamiento por modulación de fase

Como se puede apreciar en las propiedades de la sección 1.2.1 tenemos que la transformada de Fourier fraccional de una función desplazada, produce un corrimiento en su transformada dependiente del orden fraccional (ver ecuación 1.4), pero a su vez una modulación de fase corresponde también a un corrimiento de la transformada de Fourier fraccional (ver ecuación 1.5). Esto conduce a que un corrimiento puede ser compensado con un factor de fase adecuado. Si se tiene un corrimiento ξ , y una modulación de fase $e^{-i2\pi(\nu x - \varphi)}$, entonces :

$$\mathcal{F}^{\alpha}[f(x - \xi)e^{-i2\pi(\nu x - \varphi)}](x') = e^{i2\pi\varphi} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} f(x - \xi) e^{-i2\pi\nu x} e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{\frac{-i2\pi x x'}{\sin \alpha}} dx . \tag{2.5}$$

Con el cambio de variables siguientes $x - \xi = z$ y $dx = dz$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha}[f(z)e^{-i2\pi(\nu(z+\xi) - \varphi)}] &= e^{i\pi\zeta^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi\xi(\nu + \frac{x'}{\sin \alpha})} e^{i2\pi\varphi} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \\
&\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{i\pi z^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi z \frac{x' + \nu \sin \alpha - \xi \cos \alpha}{\sin \alpha}} dz .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Para $\nu = \xi \cot \alpha$ y definiendo $\varphi = \nu\zeta/2$, se obtiene

$$\mathcal{F}^{\alpha}[f(x - \zeta)e^{-i2\pi\xi(x - \frac{\xi}{2}) \cot \alpha}](x') = e^{\frac{-i2\pi\xi x'}{\sin \alpha}} e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{i\pi z^2 \cot \alpha} e^{\frac{-i2\pi z x'}{\sin \alpha}} dz . \tag{2.7}$$

o, de forma compacta,

$$\mathcal{F}^{\alpha}[f(x - \xi)e^{-i2\pi\xi(x - \frac{\xi}{2}) \cot \alpha}](x') = f_{\alpha}(x') e^{-i \frac{2\pi}{\sin \alpha} \xi x'} . \tag{2.8}$$

2.3. Teorema del muestreo en dominios fraccionales

Un resultado inmediato de la sección anterior, es el referente al teorema del muestreo en dominios fraccionales, el cual esta relacionado con la compensación de traslación por modulación de fase, la cual es escrita de convenientemente

$$\mathcal{F}^{-\alpha}[f_\alpha(x' - \zeta)e^{i2\pi(\nu x' - \varphi)}](x) = f(x)e^{i\frac{2\pi}{\sin \alpha}\zeta x}, \quad (2.9)$$

donde $\nu = \zeta \cot \alpha$ y $\varphi = \frac{\zeta^2 \cot \alpha}{2}$, y $f_\alpha(x')$ es la transformada de Fourier fraccional de orden α de $f(x)$.

Replicando la función f_α , y a cada replica se le compensa su desplazamiento con un factor de fase adecuado tal que

$$g_\alpha(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_\alpha(x' - n\zeta)e^{i2\pi(\nu_n x' - \varphi_n)}, \quad (2.10)$$

donde $\nu_n = n\zeta \cot \alpha$ y $\varphi_n = \frac{n^2 \zeta^2 \cot \alpha}{2}$. Además, las replicas son hechas de modo que ζ es a su vez el soporte de $f_\alpha(x')$.

La transformada de Fourier fraccional de orden $-\alpha$ de esta función es :

$$\mathcal{F}^{-\alpha}[g_\alpha(x')](x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{nx}{(\sin \alpha)/\zeta}}. \quad (2.11)$$

La sumatoria que multiplica a esta función corresponde a una peinilla de Dirac de la forma

$$P(x) = \frac{\sin \alpha}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) \quad (2.12)$$

donde el paso de la peinilla esta dado por $(\sin \alpha)/\zeta$, y así:

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x) \frac{\sin \alpha}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta})](x') = g_\alpha(x'). \quad (2.13)$$

(para un estudio mas detallado de la teoría de distribuciones ver la referencia [10]).

Teorema 2.3.1 (Muestreo) *Sea $f(x)$ una función tal que su transformada de Fourier fraccional de orden α , $f_\alpha(x')$ tiene soporte finito ζ , esta señal $f(x)$ puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una rata $\Delta_x \leq \sin \alpha/\zeta$.*

Las dos figuras 2.1 y 2.2, muestran de manera gráfica como una función muestreada a una rata adecuada conlleva a una colección de “espectros” en el dominio fraccional α y la fase que compensa cada desplazamiento se ilustra en la figura 2.3. En esta se ilustra la n -ésima función de fase que compensa el n -ésimo desplazamiento. No sobra decir que las líneas rectas que determinan la función de fase que compensa cada desplazamiento son tangente a la parábola $y' = \frac{\cot \alpha}{2} x'^2$ de la misma figura.

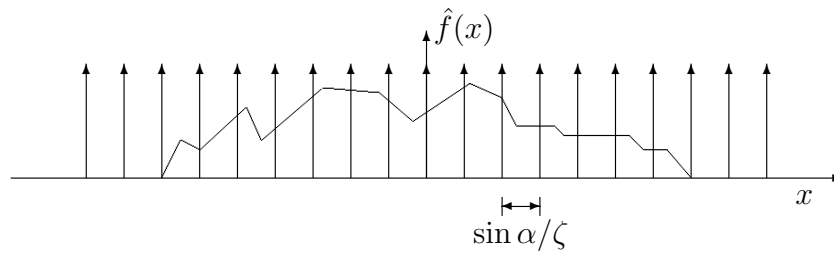


Figura 2.1: Función muestreada

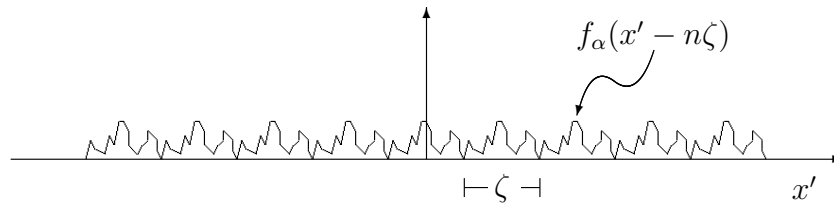


Figura 2.2: Colección de “espectros fraccionales” para el caso $\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\zeta}$

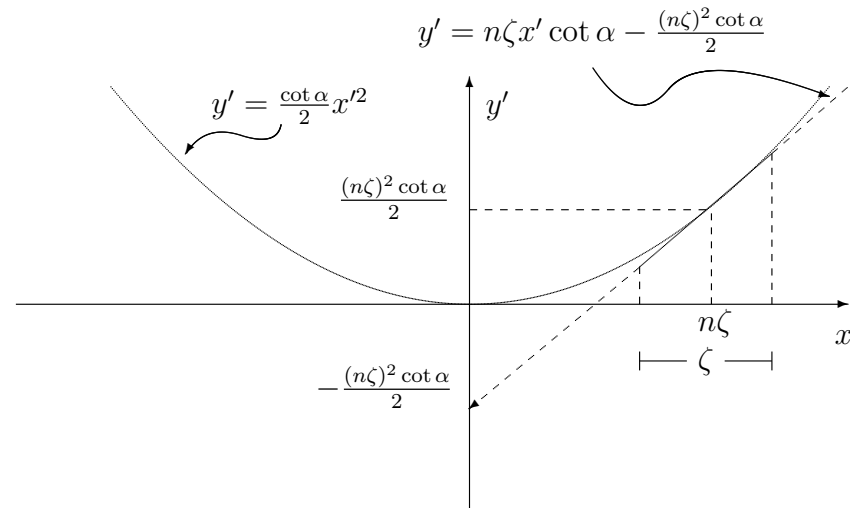


Figura 2.3: Esta es la función de fase que compensa los desplazamientos

Nota 2.3.1 *Ciertas funciones que no son de banda limitada, pero que en algún dominio fraccional su soporte es finito, pueden ser muestreadas y reconstruidas con exactitud según los criterios antes mencionados.*

2.3.1. Interpolación

Un detalle importante a discutir es la función adecuada para interpolar las muestras que representan la función \hat{f} ; en otras palabras, como debe ser el filtro a usar en el dominio fraccional. Analizando la figura 2.2, se puede pensar en una solución rectangular para el filtro como el caso particular mas simple.

Se puede ver a la función $g_\alpha(x')$ como una suma de funciones Chirp, las cuales al orden fraccional $-\alpha$ son un conjunto de distribuciones de Dirac correspondientes a la función $\hat{f}(x)$:

$$\hat{f}(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) \delta(x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) \quad (2.14)$$

tal que $g_\alpha(x')$ está dada por

$$g_\alpha(x') = \mathcal{F}^\alpha[\hat{f}](x'). \quad (2.15)$$

Ésta última ecuación es consistente con el resultado del apéndice C

$$g_\alpha(x') = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}}. \quad (2.16)$$

Al final se llega a lo esperado ya que $g_\alpha(x')$ es una suma de funciones Chirp ponderadas apropiadamente, las cuales convergen cada una a las distribución de Dirac que conforman la función $\hat{f}(x)$:

$$\text{Chirp}_\alpha(x', n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) = \mathcal{F}^\alpha[\delta(x - n \frac{\sin \alpha}{\zeta})] = e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}}, \quad (2.17)$$

$$g_\alpha(x') = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) \text{Chirp}_\alpha(x', n \frac{\sin \alpha}{\zeta}). \quad (2.18)$$

Ahora, con base en lo visto en la figura 4.2 y mostrado en el apéndice B, se puede afirmar que en cada “foco” de cada función Chirp se tendrá una distribución del campo correspondiente a la transformada de Fourier estándar escalada de la función rectángulo empleada como filtro:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-\alpha}[g_\alpha(x') R(\frac{x' - m\zeta}{\zeta})](x) &= \\ \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} [e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha} \int R(\frac{x' - m\zeta}{\zeta}) e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}} e^{i2\pi \frac{xx'}{\sin \alpha}} dx'] &. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En general este filtro se puede usar para separar cualquiera de las replicas que conforman la función $g_\alpha(x')$, para lo cual se utiliza una función rectángulo desplazado a la posición $m\zeta$, siendo m un entero y ζ el ancho de banda fraccional.

$$f'(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \int R(\frac{x' - m\zeta}{\zeta}) e^{i2\pi \frac{x'}{\zeta} [\frac{-\zeta}{\sin \alpha} (x - n\Delta_x)]} dx', \quad (2.20)$$

$$f'(x) = e^{i2\pi \frac{m\zeta x}{\sin \alpha}} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi mn} \operatorname{sinc}\left[\pi \frac{\zeta}{\sin \alpha} (x - n\Delta_x)\right], \quad (2.21)$$

el factor $e^{-i2\pi mn} = 1$ ya que tanto m como n son enteros. Entonces se puede apreciar como es consistente todo el desarrollo, al comparar la siguiente ecuación con la ecuación 2.9,

$$f(x) e^{i2\pi \frac{m\zeta x}{\sin \alpha}} = e^{i2\pi \frac{m\zeta x}{\sin \alpha}} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} \operatorname{sinc}\left[\pi \frac{\zeta}{\sin \alpha} (x - n\Delta_x)\right]. \quad (2.22)$$

El efecto que produce la fase cuadrática que multiplica a cada función *sinc* de interpolación, es una curvatura del plano en que se encuentra la función $f(x)$, la cual es finalmente compensada por el factor de fase cuadrático $e^{-i\pi x^2 \cot \alpha}$, obteniéndose la función final sobre un plano:

$$f(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n\Delta_x) \operatorname{sinc}\left(\pi \zeta \frac{x - n\Delta_x}{\sin \alpha}\right). \quad (2.23)$$

La función de interpolación para funciones de “espectros fraccionales limitados” está dada por $\operatorname{sinc}\left(\pi \zeta \frac{x - n\Delta_x}{\sin \alpha}\right)$, la función seno cardinal escalada adecuadamente y ubicada en las posiciones correspondientes a las distribuciones deltas de Dirac que conforman la función \hat{f} , donde $\Delta_x = \frac{\sin \alpha}{\zeta}$ es la rata de muestreo acorde al teorema del muestreo en dominio fraccional.

2.3.2. Transformada discreta de Fourier fraccional

Un resultado inmediato del teorema anterior es la definición de la transformada discreta de Fourier fraccional sin pérdida de información. Si en la ecuación 2.13 se periodiza la función $\mathcal{F}^{-\alpha}[g_\alpha(x')](x) = \hat{f}(x)$, de manera análoga como se hizo con la función $f_\alpha(x')$, siendo \hat{f} la versión discreta de f , se tiene que:

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(x - k\xi) e^{-i2\pi(v_k x - \phi_k)}, \quad (2.24)$$

para la condición que $v_k = k\xi \cot \alpha$, y $\phi_k = \frac{k^2 \xi^2 \cot \alpha}{2}$, siendo ξ el soporte de la función f , de manera que la transformada de Fourier fraccional de orden α de h es

$$\hat{g}_\alpha(x') = \mathcal{F}^\alpha[h(x)](x') = g_\alpha(x') \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\xi} \delta\left(x' - k \frac{\sin \alpha}{\xi}\right). \quad (2.25)$$

Al final se tiene en la ecuación 2.25 que se puede asociar de manera exacta la transformada de Fourier fraccional de una función muestreada y periodizada con una versión discreta de su

espectro fraccional replicado. Entonces es posible asociar N muestras en uno de los dominios con N muestras en el otro, sin que esto signifique que la transformada de Fourier de orden fraccional de N muestras en un dominio sea N muestras en el otro,

$$N = \frac{\zeta\xi}{\sin\alpha}. \quad (2.26)$$

Como la cantidad N es interpretada a menudo como *el número de grados de libertad* o *dimensionalidad* de la función $f(x)$, ésta a su vez es una medida de la cantidad de información contenida en la función, la cual no se altera; es decir, no es mayor o menor bajo una transformación unitaria. Esta cantidad N permanece invariante bajo este tipo de transformaciones, ya que una de las propiedades de las transformaciones unitarias es la conservación del producto interno.

Ley 2.3.1 (Conservación del ancho de banda propio) *Sea una función $f(x)$ con soporte finito ξ , y sea $f_\alpha(x')$ su transformada de Fourier fraccional de orden α con soporte ζ . Para cualquier orden fraccional α , la cantidad $\Delta\varpi = \frac{\zeta}{\sin\alpha}$ (ancho de banda propio), se conserva.*

Lo anterior indica que la rata de muestreo de la función en el espacio directo es siempre la rata de Nyquist (ver referencia [11]), pero lo que es diferente y no menos importante es la rata de muestreo de la función al dominio fraccional.

Es fácilmente verificable que la rata de muestreo en el dominio de las x' está dado por $\Delta_{x'} = \sin\alpha/\xi$, de manera que

$$x = n\Delta_x \quad y \quad x' = k\Delta_{x'}, \quad (2.27)$$

donde las ratas de muestreo en los dominios x y x' son respectivamente

$$\Delta_x = \frac{\sin\alpha}{\zeta} \quad y \quad \Delta_{x'} = \frac{\sin\alpha}{\xi}. \quad (2.28)$$

En la definición dada por Namias para la transformación de Fourier fraccional (ecuación 1.1) se cambian las variables por las variables discretas dadas en las ecuaciones 2.27 y, despreciando el termino constante complejo,

$$\mathcal{F}^\alpha[f](k\Delta_{x'}) = e^{i\pi(k\Delta_{x'})^2 \cot\alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n\Delta_x) e^{i\pi(n\Delta_x)^2 \cot\alpha} e^{-\frac{2i\pi kn\Delta_x\Delta_{x'}}{\sin\alpha}}. \quad (2.29)$$

Luego, según el teorema del muestreo en dominios fraccionales,

$$f_\alpha\left(k\frac{\sin\alpha}{\xi}\right) = e^{i\pi\left(\frac{k}{\xi}\right)^2 \sin\alpha \cos\alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n\frac{\sin\alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2 \sin\alpha \cos\alpha} e^{-\frac{2i\pi kn \sin\alpha}{\zeta\xi}}. \quad (2.30)$$

Es importante reescribir todo en función de lo conocido de la función, como lo son el número de muestras N y el soporte de f , que es ξ ,

$$f_\alpha\left(k\frac{\sin\alpha}{\xi}\right) = e^{i\pi\left(\frac{k}{\xi}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n\frac{\xi}{N}\right) e^{i\pi\left(\frac{n\xi}{N}\right)^2 \cot\alpha} e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}. \quad (2.31)$$

Esta ultima expresión es la definición de transformación de Fourier fraccional discreta, coherente con la definición dada por Namias. Para más detalles ver apéndice C.

La diferencia de esta definición con las dadas en la literatura previa[16], es que ésta asocia N muestras en el dominio directo, con N muestras en el dominio fraccional, pero además con la condición que se cumpla la tasa de muestreo óptimo en los dos dominios, dada por el teorema del muestreo, lo cual quiere decir que no hay perdida de información bajo esta transformación discreta. Lo anterior repercute en el hecho que bajo dos transformaciones sucesivas se debe cumplir la propiedad de la aditividad de los ordenes fraccionales (ver figura 2.4).

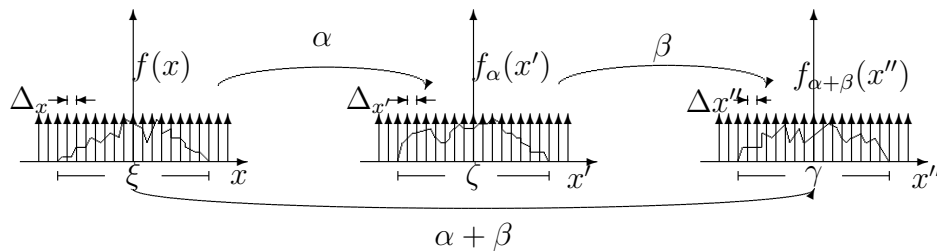


Figura 2.4: Aditividad de los ordenes fraccionales

Si la tasa de muestreo en el dominio fraccional no es la adecuada; es decir, no está dada según el criterio antes mencionado, por ejemplo para $\Delta'_{x'} < \Delta_{x'}$ tendremos N muestras en el dominio fraccional pero que corresponden sólo a una parte del espectro fraccional, (ver figura 2.5), ya que $\lambda < \zeta$, donde $\lambda = N\Delta'_{x'}$.

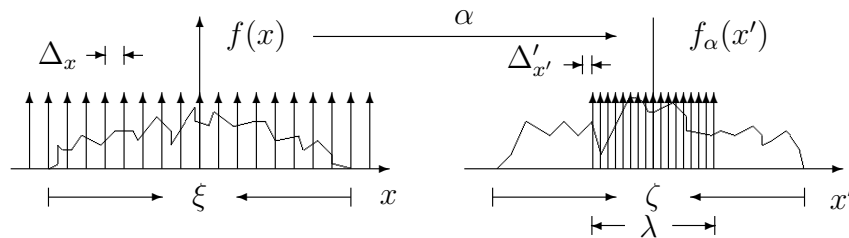


Figura 2.5: Espectro no reconstruido completamente, (muy alta tasa de muestreo).

Si luego se hace otra transformación de Fourier fraccional de orden β no se llega a una transformada de Fourier fraccional del orden $\alpha + \beta$, lo cual se traduce como una violación a la propiedad de composición que debe cumplir la transformación de Fourier fraccional discreta.

Otro caso es si la tasa de muestreo en el espectro es tal que el numero de muestras es deficiente; es decir, $\Delta'_{x'} > \Delta_{x'}$ (ver figura 2.6). Luego del cálculo se tendrán también N muestras, pero separadas entre si de manera que $\lambda > \zeta$, donde $\lambda = N\Delta'_{x'}$. Igualmente, si luego se lleva a cabo otra transformación de Fourier fraccional de orden β sobre esta última función, no se obtendrá una transformada de Fourier fraccional del orden $\alpha + \beta$.

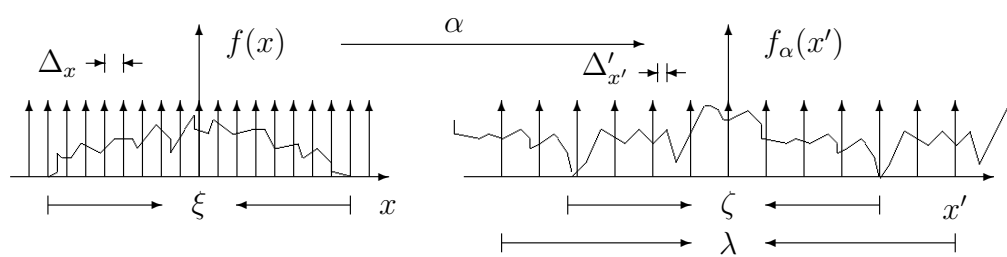


Figura 2.6: Espectro no reconstruido completamente, (rata de muestreo deficiente)

Capítulo 3

Holografía numérica por transformación de Fourier fraccional

Un gran número de métodos para el cálculo numérico de hologramas se fundamenta en la transformación de Fourier estándar[12]. Físicamente corresponde a una figura de difracción de Fraunhofer de un plano (el del holograma) a otro plano (plano de observación de una figura dada)[13]. Aquí se mostrará que es posible utilizar una transformada de Fourier fraccional, asociada a una figura de difracción de Fresnel y, que esto facilita el cálculo de un holograma que permite obtener dos planos “imagen”.

3.1. Algoritmo estándar de cálculo de un holograma

3.1.1. Generalidades

En general se desea obtener cierta repartición de intensidad en un plano dado \mathcal{P} . Sea $h(\vec{r})$ la función que representa esta intensidad, donde $\vec{r} = (x, y)$ es la variable en ese plano.

Físicamente esta distribución de intensidad se obtiene por difracción a partir de un holograma \mathcal{H} . Se trata de calcular la función de transmisión de \mathcal{H} , que llamamos f , que permite justamente obtener h en el plano \mathcal{P} .

De manera clásica la transferencia del campo desde \mathcal{H} a \mathcal{P} se expresa matemáticamente por una transformación de Fourier estándar y se modela como un fenómeno de difracción de Fraunhofer (hologramas de Fourier).

Siguiendo este proceso, se obtiene h de manera aproximada, lo que se debe esencialmente a dos razones:

1. Incluso en el marco de una teoría escalar de la difracción, la transferencia del campo de un plano a otro corresponde más a un fenómeno de difracción de Fresnel que de Fraunhofer (salvo el caso en que la distancia entre los planos es muy grande).
2. Para los cálculos numéricos, se hace necesario trabajar con versiones discretas de las

funciones (por ejemplo la función de transmisión del holograma) y esto conlleva a que los resultados sean una aproximación a la solución del problema.

3.1.2. Algoritmo de cálculo de los hologramas

Nos limitamos aquí solo al cálculo de hologramas de fase y así a encontrar una función f de la forma

$$f(\vec{s}) = e^{i\varphi(\vec{s})}, \quad (3.1)$$

donde el módulo cuadrado de la transformada de Fourier “óptica” sea precisamente $h(\vec{r})$, la cual escribimos bajo la forma

$$|\hat{f}(\vec{r})|^2 = h(\vec{r}). \quad (3.2)$$

Esta escritura supone una adaptación de las variables reducidas. La ecuación (3.2) debe ser verificada en un dominio \mathbb{W} del plano \mathcal{P} . Fuera de este dominio, se puede aceptar un cierto nivel de ruido.

Se introduce la función g definida por

$$g(\vec{r}) = \sqrt{h(\vec{r})}, \quad (3.3)$$

y que representa la amplitud del campo en \mathcal{P} . Más precisamente, toda función de la forma $g(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})}$ es aceptada como amplitud en el plano \mathcal{P} (tales funciones dan la misma distribución de intensidad).

El proceso de cálculo es esquematizado y a este le llamamos algoritmo uno:

1. Se parte de una función g_1 definida como:

$$g_1(\vec{r}) = g(\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}, \quad (3.4)$$

$$g_1(\vec{r}) = 0 \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}, \quad (3.5)$$

donde \mathbb{W} es la parte útil del plano \mathcal{P} ; es decir, la región donde se desea obtener una distribución de intensidad predeterminada.

2. Se calcula la transformada de Fourier inversa de g_1 , que llamaremos \check{g}_1 . Se utiliza para esto un algoritmo de *Fast Fourier Transform (FFT)*.
3. La función \check{g}_1 es una función de valores complejos, y de ella se guarda solo la fase; es decir, que sí

$$\check{g}_1(\vec{s}) = |\check{g}_1(\vec{s})| e^{i\varphi_1(\vec{s})}, \quad (3.6)$$

entonces se define la función f_1^\dagger cuya amplitud es uniforme:

$$f_1^\dagger(\vec{s}) = e^{i\varphi_1(\vec{s})}. \quad (3.7)$$

4. Se discretiza la función f_1^\dagger cuantificándola en Z niveles (en la mayoría de los caso para hologramas de fase $Z = 2$, los niveles siendo 0 y π) obteniendo la función f_1 .

5. Se calcula $\widehat{f}_1(\vec{r})$ (transformada de Fourier estándar de $f_1(\vec{r})$). Denotamos por ψ_1 la fase de la función $\widehat{f}_1(\vec{r})$.
6. Se define entonces la función g_2 como

$$g_2(\vec{r}) = g(\vec{r}) e^{i\psi_1(\vec{r})} \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}, \quad (3.8)$$

$$g_2(\vec{r}) = \widehat{f}_1(\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}. \quad (3.9)$$

Para algunas iteraciones, especialmente las primeras, se hace

$$g_2(\vec{r}) = 0 \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}. \quad (3.10)$$

para así aumentar la eficiencia de ese orden de difracción.

El proceso precedente en la etapa j -ésima nos proporciona dos funciones, (f_j) y (g_j) , donde $|g_j|^2$ tiende hacia la función $h(\vec{r})$ después de un cierto número de iteraciones si $\vec{r} \in \mathbb{W}$. El criterio para que el algoritmo se detenga es minimizar el error cuadrático medio $\langle |h - |g_j|^2| \rangle$. Esto solo se verifica en $\vec{r} \in \mathbb{W}$. En la práctica se fija un nivel de ruido c y las iteraciones se detienen para un valor J de j tal que

$$\int_{\mathbb{W}} |h - |g_J|^2|^2 d\vec{r} \leq c. \quad (3.11)$$

Paralelamente se ha obtenido una función f_J tal que

$$\int_{\mathbb{W}} |h - |\widehat{f}_J|^2|^2 d\vec{r} \leq c. \quad (3.12)$$

f_J es la función que se va a registrar en el holograma, que nos da la función de transmisión del holograma.

La figura 3.1 muestra un esquema del algoritmo uno.

En la figura 3.1, el operador $O[\check{g}_j]$ interviene para realizar los pasos del ítem 3 y el ítem 4, y el operador $H[\widehat{f}_j]$ interviene para realizar los pasos del ítem 6.

Nota 3.1.1 En el algoritmo precedente la cuantificación interviene para pasar de la función continua f_j^\dagger a la función f_j . Para cuantificar en Z niveles, el paso de cuantificación es $\Delta = 2\pi/Z$. Se tiene entonces

$$f_j(\vec{r}) \in \{-\pi + \Delta, -\pi + 2\Delta, \dots, \pi\}. \quad (3.13)$$

3.2. Cálculo por transformación de Fourier fraccional

3.2.1. Cálculo de un holograma con una sola imagen

La idea es reemplazar en el algoritmo del párrafo precedente la transformación de Fourier (y su inversa) por una transformación de Fourier fraccional. La estructura del algoritmo permanece

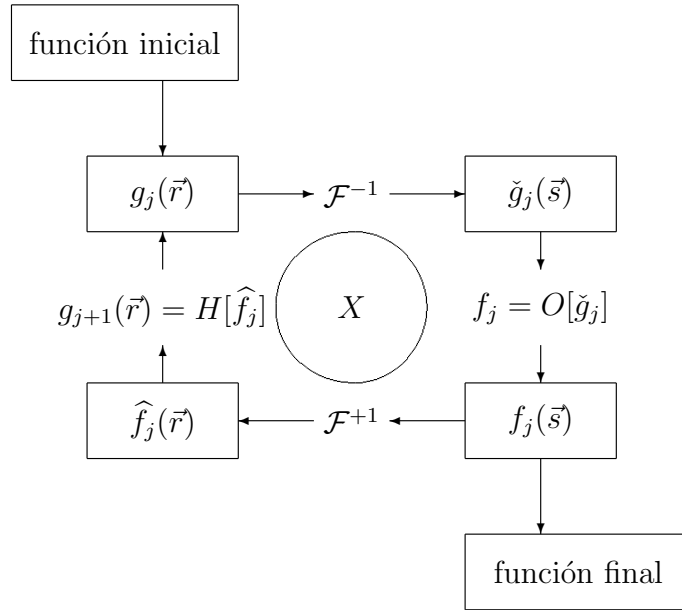


Figura 3.1: Esquema del algoritmo

igual. Se utiliza la misma notación salvo para la función g_j que se vuelve g_j^α , donde α es el orden de la transformación de Fourier fraccional considerada.

De manera más detallada se describe el algoritmo, que llamaremos algoritmo dos. Se introduce la función g^α por (ver la ecuación (3.3))

$$g^\alpha(\vec{r}) = \sqrt{h(\vec{r})}, \quad (3.14)$$

donde h representa la distribución de intensidad deseada en el plano de observación. Las etapas del algoritmo dos son las siguientes:

1. Se parte de una función g_1^α definida como

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}, \quad (3.15)$$

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = 0 \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}. \quad (3.16)$$

2. Se calcula la transformada de Fourier fraccional del orden $-\alpha$ de g_1^α , obteniendo $\mathcal{F}^{-\alpha}[g_1^\alpha]$ (la transformación de Fourier del orden $-\alpha$ es la transformación inversa de la transformación del orden α). En la práctica esta transformación de Fourier fraccional es obtenida como la transformación de Fourier (estándar) de g_1^α multiplicada por un término de fase cuadrático de la forma $\exp[i\pi r^2 \cot \alpha]$ [14]. Esto permite el cálculo por *FFT*.
3. La función $\mathcal{F}^{-\alpha}[g_1^\alpha]$ es una función de valores complejos. De esta se guarda solo la fase; es decir, que sí

$$\mathcal{F}^{-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{s}) = |\mathcal{F}^{-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{s})| e^{i\varphi_1(\vec{s})}, \quad (3.17)$$

entonces se define la función f_1^\dagger por

$$f_1^\dagger(\vec{s}) = e^{i\varphi_1(\vec{s})}. \quad (3.18)$$

4. Se desea además cuantizar la función f_1^\dagger en Z niveles para obtener la función f_1 . Pero es necesario anticipar un poco las operaciones siguientes. En efecto se desea calcular la transformada de Fourier fraccional de la función f_1 . Para esto se utiliza un algoritmo de *FFT*, lo que supone haber multiplicado de antemano la función f_1 por un término de fase cuadrático de la forma $\exp[-i\pi s^2 \cot \alpha]$. En la practica introducimos la función f_1^\ddagger definida por

$$f_1^\ddagger(\vec{s}) = f_1(\vec{s}) \exp[-i\pi s^2 \cot \alpha]. \quad (3.19)$$

La función f_1 es entonces la version cuantizada de f_1^\dagger .

5. Se calcula $\mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r})$ (transformada de Fourier fraccional de orden α de f_1). Denotamos ψ_1 la fase de la función $\mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r})$.
6. Se define entonces la función g_2^α por

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r}) e^{i\psi_1(\vec{r})} \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}, \quad (3.20)$$

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = \mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}. \quad (3.21)$$

Este algoritmo produce como resultado dos funciones (g_j^α) y (f_j). El criterio para que finalice el cálculo permanece inalterado. Existe un valor J de j tal que

$$\int_{\mathbb{W}} |h - |\mathcal{F}^\alpha[f_J]|^2| d\vec{r} \leq c, \quad (3.22)$$

donde c es el nivel de ruido aceptado.

Este nuevo algoritmo ofrece las ventajas siguientes :

1. No se está en las condiciones de una difracción de Fraunhofer, pero si en las de una difracción de Fresnel. Es así posible calcular de esta manera hologramas que funcionan para distancias de difracción más cortas.
2. Cambiar la distancia de observación de la figura de difracción del holograma es cambiar el orden α utilizado en el algoritmo[7].
3. Este algoritmo se adapta al cálculo de dos figuras de difracción situadas en dos planos diferentes, como se mostrará en el paragrafo siguiente. No es descabellado imaginar toda una serie de figuras de difracción en multiples planos paralelos.

3.2.2. Cálculo de un holograma con doble imagen

Aquí el holograma permite obtener dos figuras de difracción predeterminadas (que eventualmente podrían ser idénticas) en dos planos diferentes.

Sean \mathcal{P}^α y \mathcal{P}^β dos planos. El parámetro α es el orden de la transformación de Fourier fraccional que expresa la transferencia del campo del plano del holograma \mathcal{H} al plano de observación \mathcal{P}^α y β es el orden de la transformación de Fourier fraccional correspondiente a la transferencia de \mathcal{H} a \mathcal{P}^β (Fig. 3.2).

Se desea obtener las distribuciones de intensidad h_1 en el plano \mathcal{P}^α y h_2 en el plano \mathcal{P}^β . Para eso se adapta el algoritmo del paragrafo precedente. La modificación esencialmente consiste en pasar de una función g_j^α a una función g_j^β . Para esto se utiliza una transformación de Fourier fraccional de orden $\beta - \alpha$ que expresa la difracción de \mathcal{P}^α a \mathcal{P}^β .

Se define las funciones g^α y g^β por

$$g^\alpha(\vec{r}) = \sqrt{h_1(\vec{r})}, \quad (3.23)$$

$$g^\beta(\vec{q}) = \sqrt{h_2(\vec{q})}, \quad (3.24)$$

El algoritmo tres es el siguiente :

1. Se parte de una función g_1^α definida por:

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}_r, \quad (3.25)$$

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = 0 \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}_r. \quad (3.26)$$

2. Se calcula la transformada de Fourier de orden $\beta - \alpha$ de $g_1^\alpha(\vec{r})$. Se obtiene una función $\mathcal{F}^{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q})$. Se denota por ϕ_1 la fase de la función $\mathcal{F}^{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q})$.

3. Se define entonces la función g_1^β por

$$g_1^\beta(\vec{q}) = g^\beta(\vec{q}) e^{i\phi_1(\vec{q})} \quad \text{si } \vec{q} \in \mathbb{W}_q, \quad (3.27)$$

$$g_1^\beta(\vec{q}) = \mathcal{F}^{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q}) \quad \text{si } \vec{q} \notin \mathbb{W}_q. \quad (3.28)$$

4. Se calcula la transformada de Fourier fraccional de orden $-\beta$ de g_1^β , que se denota como $\mathcal{F}^{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})$.

5. La función $\mathcal{F}^{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})$ es una función de valores complejos, de la que se utiliza solo la fase; es decir, que sí

$$\mathcal{F}^{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s}) = |\mathcal{F}^{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})| e^{i\varphi_1(\vec{s})}, \quad (3.29)$$

entonces se define la función f_1^\dagger por

$$f_1^\dagger(\vec{s}) = e^{i\varphi_1(\vec{s})}. \quad (3.30)$$

6. Se introduce la función f_1 que es entonces la versión cuantizada de f_1^\dagger .

7. Se calcula $\mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r})$ (transformada de Fourier fraccional de orden α de f_1). Se denota por ψ_1 la fase de la función $\mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r})$.

8. Se define entonces la función g_2^α por

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r}) e^{i\psi_1(\vec{r})} \quad \text{si } \vec{r} \in \mathbb{W}_r, \quad (3.31)$$

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = \mathcal{F}^\alpha[f_1](\vec{r}) \quad \text{si } \vec{r} \notin \mathbb{W}_r. \quad (3.32)$$

Este algoritmo genera tres funciones : (g_j^α) , (g_j^β) y (f_j) . Si c_1 es el nivel de ruido aceptado en \mathcal{P}^α y c_2 el aceptado en \mathcal{P}^β , se detiene el cálculo cuando j alcanza el valor J tal que

$$\int_{\mathbb{W}_r} |h_1 - |\mathcal{F}^\alpha[f_J]|^2| d\vec{r} \leq c_1 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{W}_q} |h_2 - |\mathcal{F}^\beta[f_J]|^2| d\vec{q} \leq c_2. \quad (3.33)$$

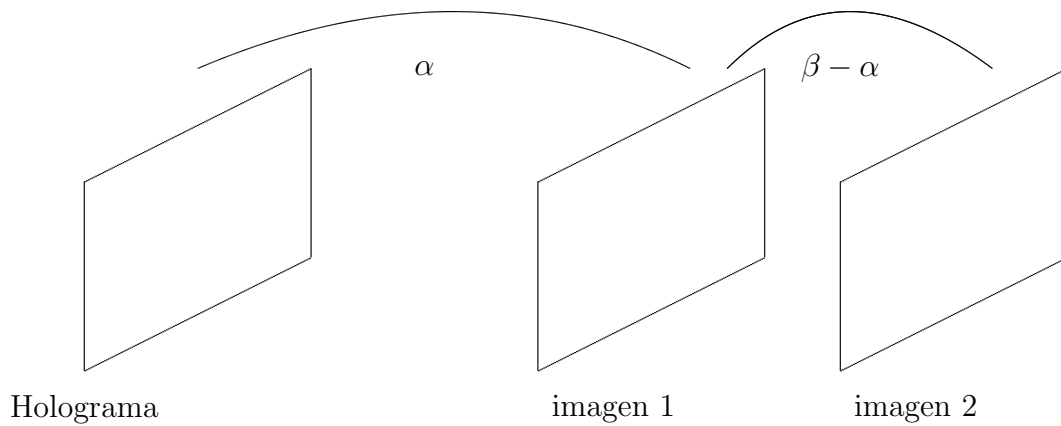


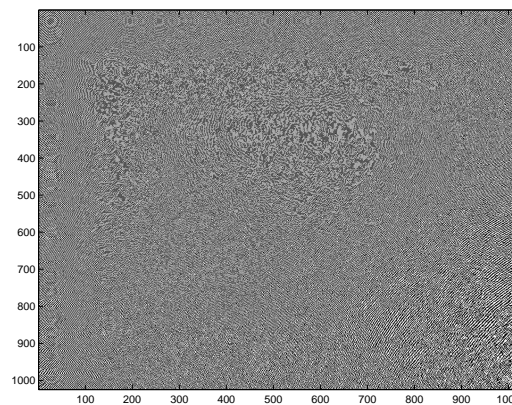
Figura 3.2: Holograma con dos imágenes

3.3. Ejemplos y resultados experimentales

Ejemplos de dos figuras de difracción

Se han calculado hologramas tomando como imágenes para h_1 y h_2 retratos de Huygens y Fresnel respectivamente. La figura 3.3 muestra la función cuantizada registrada sobre el holograma.

La figura 3.4 muestra lo que se obtiene en los dos planos diferentes (entre el holograma y el plano de Fourier). Tratándose aquí de simulaciones numéricas. Sin embargo los hologramas se realizaron en la *École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne* y se observaron resultados físicos totalmente concordantes.

Figura 3.3: Holograma binario (niveles de fase 0 y π).

La figura 3.5 muestra un holograma calculado para obtener dos imágenes simétricamente separadas del plano de Fourier. Las figuras de difracción obtenidas en estos dos planos son mostradas en la figura 3.6. Tratándose todavía de simulaciones numéricas. Pero que también los hologramas fueron realizados y se puede observar experimentalmente las figuras descritas aquí.

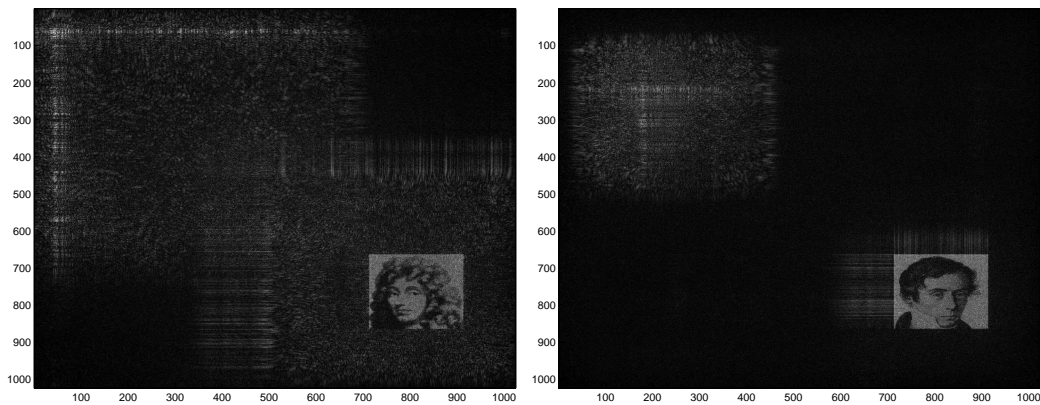


Figura 3.4: La imagen a la izquierda corresponde a $\beta = 0,6\pi/2$ y la imagen a la derecha $\beta = 0,9\pi/2$.

Las dos imágenes de la figura 3.7 son un ejemplo de los resultados experimentales registradas por una *CCD*. Para todos los casos se obtuvieron resultados similares.

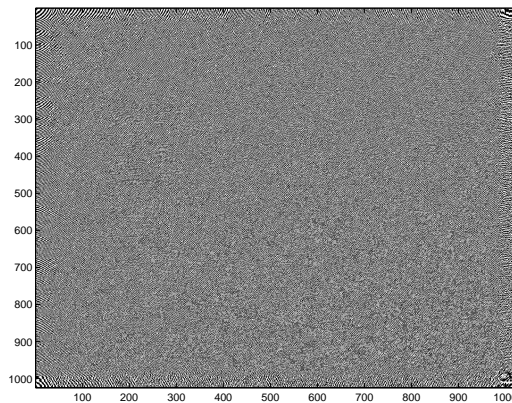


Figura 3.5: Holograma binario (niveles de fase 0 y π).

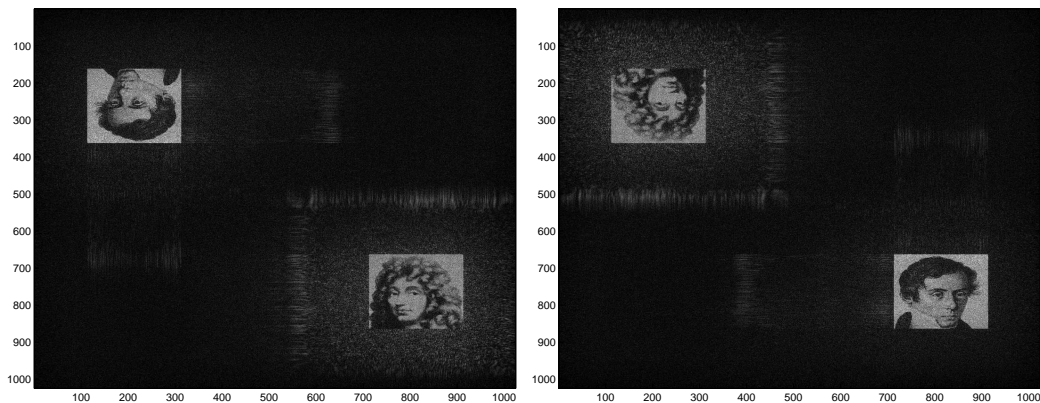


Figura 3.6: La imagen a la izquierda corresponde a $\beta = 0,9\pi/2$ y a la derecha a $\beta = 1,1\pi/2$



Figura 3.7: Resultados experimentales

El sistema óptico empleado para su registro es bosquejado en la figura 3.8, la cual muestra como mediante dos lentes se compensan las curvaturas del campo, según la óptica métaxial, para realizar una TFF óptica entre dos planos.

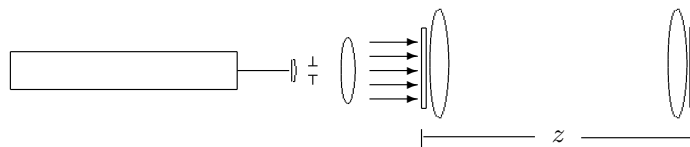
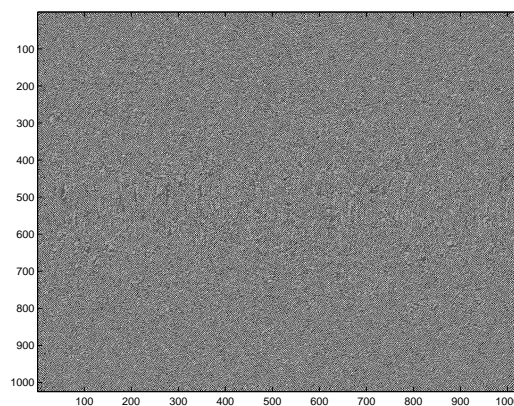


Figura 3.8: Sistema óptico para TFF.

Para la figura anterior la distancia z esta relacionada con el orden fraccional α por la ecuación A.3, del apéndice A.

Volumen constante en intensidad

Este caso, que ha sido el problema que ha provocado el presente trabajo, es decir el cálculo y la fabricación de un *diffusor* holográfico (figura 3.9) que genera un volumen constante en intensidad, es potencialmente resuelto por los métodos descritos en este capítulo. La figura 3.10 muestra tres cuadrados en tres planos sucesivos.

Figura 3.9: Holograma binario (niveles de fase 0 y π).

Este último no ha sido fabricado por razones técnicas.

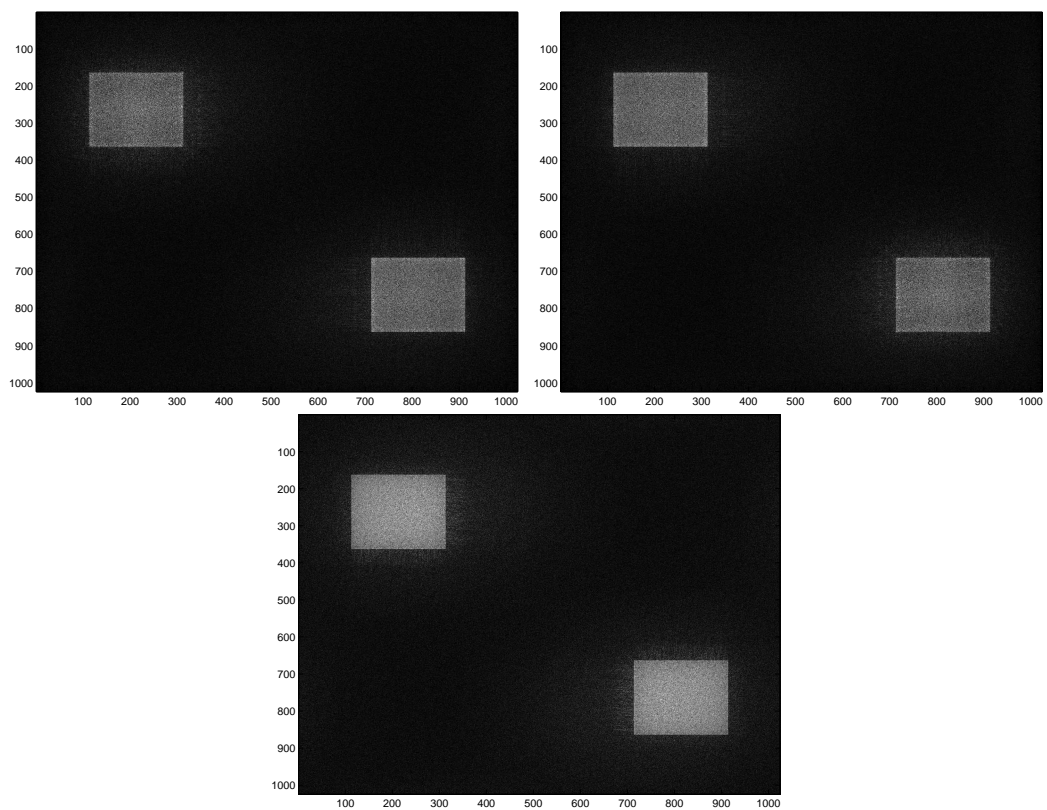


Figura 3.10: Volumen contante en intensidad. Los valores de β son $\beta = 0, 9\pi/2$ (arriba izquierda), $\beta = 1, 1\pi/2$ arriba derecha, y $\beta = \pi/2$ (abajo).

Capítulo 4

Corrimiento del plano de observación por convolución fraccional

Aquí se presenta una formulación diferente de la aproximación del capítulo precedente. Esta formulación se apoya en la noción de convolución fraccional.

4.1. Corrimiento del plano de observación

4.1.1. Aspectos físicos

Se supone haber calculado un holograma correspondiente a una figura de difracción h en el plano de Fourier del holograma. Los cálculos son hechos en el contexto de la aproximación clásica descrita al comienzo del capítulo 3. Para esto se ha obtenido una función f_J que representa la función de transmisión del holograma. La función f_J es cuantizada (en dos niveles para la aplicación deseada).

Es posible modificar el plano de observación de la figura de difracción, multiplicando la función f_J por un término de fase cuadrático.

Este método representa una adaptación del algoritmo clásico (algoritmo uno) y permite obtener los mismos resultados que por los algoritmos fraccionales dos y tres del capítulo precedente, sin recurrir de manera explícita a la noción de transformación de Fourier fraccional.

\mathcal{H} representa el plano del holograma y \mathcal{P} su “plano de Fourier” (en la práctica un plano bastante alejado), tal que la transferencia de \mathcal{H} a \mathcal{P} se expresa por una transformación de Fourier estándar, en los límites de las aproximaciones del capítulo 3. Si la función de transmisión del holograma es f_J , entonces la figura de difracción en el plano \mathcal{P} es descrita precisamente (en intensidad) por la función h .

Sea \mathcal{P}^α un plano intermedio entre \mathcal{H} y \mathcal{P} . El parámetro α es tal que si la amplitud del campo sobre \mathcal{H} es de la forma $\exp[-i\pi s^2 \cot \alpha]$ entonces el módulo cuadrado del campo en el plano \mathcal{P}^α se reduce a una distribución de Dirac.

Si ahora se multiplica la función f_J , que representa la función de transmisión del holograma,

por el termino $\exp[-i\pi s^2 \cot \alpha]$, entonces por difracción, en el plano \mathcal{P}^α se observa a partir de ahora una repartición de intensidad igual a h .

4.1.2. Interpretación en términos de convolución fraccional

Sea \mathcal{H} el plano del holograma y \mathcal{P} su plano de Fourier estándar, donde se encuentra la figura de difracción dada por la función h . Se describe la amplitud del campo en este plano por una función g tal que $|g|^2 = h$. La función de transmisión del holograma es $\tau = f_J$, calculada según un algoritmo clásico (algoritmo uno).

Sea \mathcal{P}^β un plano intermedio, tal que la transferencia del campo hacia este plano se expresa por una transformación de Fourier fraccional de orden β . Multiplicamos τ por $\exp[-i\pi s^2 \cot \beta]$ de tal forma que la nueva función de transmisión del holograma sea

$$\tau^\dagger(\vec{s}) = \check{g}(\vec{s}) \exp[-i\pi s^2 \cot \beta], \quad (4.1)$$

donde \check{g} es la transformada de Fourier estándar inversa de la función g . Se nota que $\exp[-i\pi s^2 \cot \beta]$ es la transformada de Fourier fraccional de orden $-\beta$ una distribución de Dirac en el plano \mathcal{P}^β .

La amplitud del campo en el plano \mathcal{P}^β se escribe

$$U = \mathcal{F}^\beta [\check{g} \exp[-i\pi s^2 \cot \beta]], \quad (4.2)$$

y la expresión integral explícita de la transformación de Fourier fraccional permite escribir (ver apéndice B)

$$U(\vec{r}) = g\left(\frac{\vec{r}}{\sin \beta}\right) \exp[-i\pi r^2 \cot \beta], \quad (4.3)$$

resultando que la distribución de intensidad en el plano \mathcal{P}^β está dada por la función h , además de un escalamiento que sufre la función de acuerdo el orden fraccional,

$$|U(\vec{r})|^2 = \left|g\left(\frac{\vec{r}}{\sin \beta}\right)\right|^2 = h\left(\frac{\vec{r}}{\sin \beta}\right). \quad (4.4)$$

Se nota que la relación (4.2) se escribe también

$$U = \mathcal{F}^\beta [\mathcal{F}^{-\pi/2}[g] \mathcal{F}^{-\beta}[\delta]] = g *_{-\beta}^{-\pi/2, -\beta} \delta. \quad (4.5)$$

4.1.3. Generalización

Se generalizará ligeramente lo anterior. Sea todavía \mathcal{H} el plano del holograma y \mathcal{P}^α un plano a una distancia tal que la transferencia del campo de \mathcal{H} a \mathcal{P}^α se efectúa por una transformación de Fourier fraccional de orden α . El caso de la transformación de Fourier estándar del párrafo precedente corresponde entonces a $\alpha = \pi/2$.

Sobre \mathcal{P}^α se fija de antemano una figura de difracción y así la distribución de intensidad es descrita por la función h .

Sea un plano \mathcal{P}^β intermedio entre \mathcal{H} y \mathcal{P}^α y sea el plano \mathcal{P}^γ con $\gamma = \alpha\beta$. La transferencia por difracción de \mathcal{H} a \mathcal{P}^γ se efectúa por una transformación de Fourier fraccional de orden γ (ver figura 4.1).

La función de transmisión del holograma es $\tau = \mathcal{F}^{-\alpha}[g^\alpha]$ donde g^α es una función tal que $|g^\alpha|^2 = h$.

Se multiplica τ por un término de fase cuadrático de la forma $\exp[-i\pi s^2 \cot \beta]$; es decir, por la transformada de Fourier fraccional de orden $-\beta$ de la distribución de Dirac. La función de transmisión del holograma es entonces de la forma

$$\tau^\dagger(\vec{s}) = \mathcal{F}^{-\alpha}[g^\alpha] \exp[-i\pi s^2 \cot \beta] = \mathcal{F}^{-\alpha}[g^\alpha] \mathcal{F}^{-\beta}[\delta]. \quad (4.6)$$

La amplitud del campo en el plano \mathcal{P}^γ se escribe

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{F}^\gamma[\tau^\dagger], \\ &= \mathcal{F}^\gamma[\mathcal{F}^{-\alpha}[g^\alpha] \mathcal{F}^{-\beta}[\delta]], \\ &= g^\alpha *_{-\gamma}^{-\alpha, -\beta} \delta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

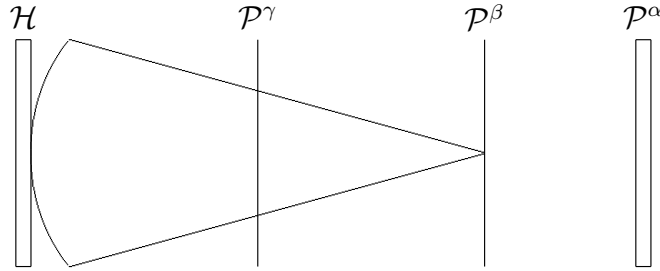


Figura 4.1: Convolución por una distribución de Dirac

Dado que $\gamma = \alpha\beta$ se tiene el resultado siguiente :

$$|U(\vec{r})|^2 = |g(\vec{r})|^2 = h(\vec{r}), \quad (4.8)$$

además de un escalamiento que sufre la función g debido al orden fraccional.

4.2. Ilustración

La figura 4.2 representa el resultado del cálculo numérico correspondiente a lo que precede. Arriba a la izquierda, se tiene un objeto descrito por la función h (es esta la que se tiene en el plano \mathcal{P}^α) ($\alpha = 0, 8\pi/2$). Arriba a la derecha se tiene tres distribuciones de Dirac de energías 50 %, 33 % y 17 % respectivamente de h (plano \mathcal{P}^β). La figura abajo a la izquierda muestra la transformada de Fourier fraccional de orden $-\beta$ ($\beta = 0, 6\pi/2$) de las tres distribuciones de Dirac (en modulo cuadrado) (plano \mathcal{H}). Por ultimo la figura abajo a la derecha representa la distribución de intensidad en el plano \mathcal{P}^γ , donde $\gamma = 0, 48\pi/2$.

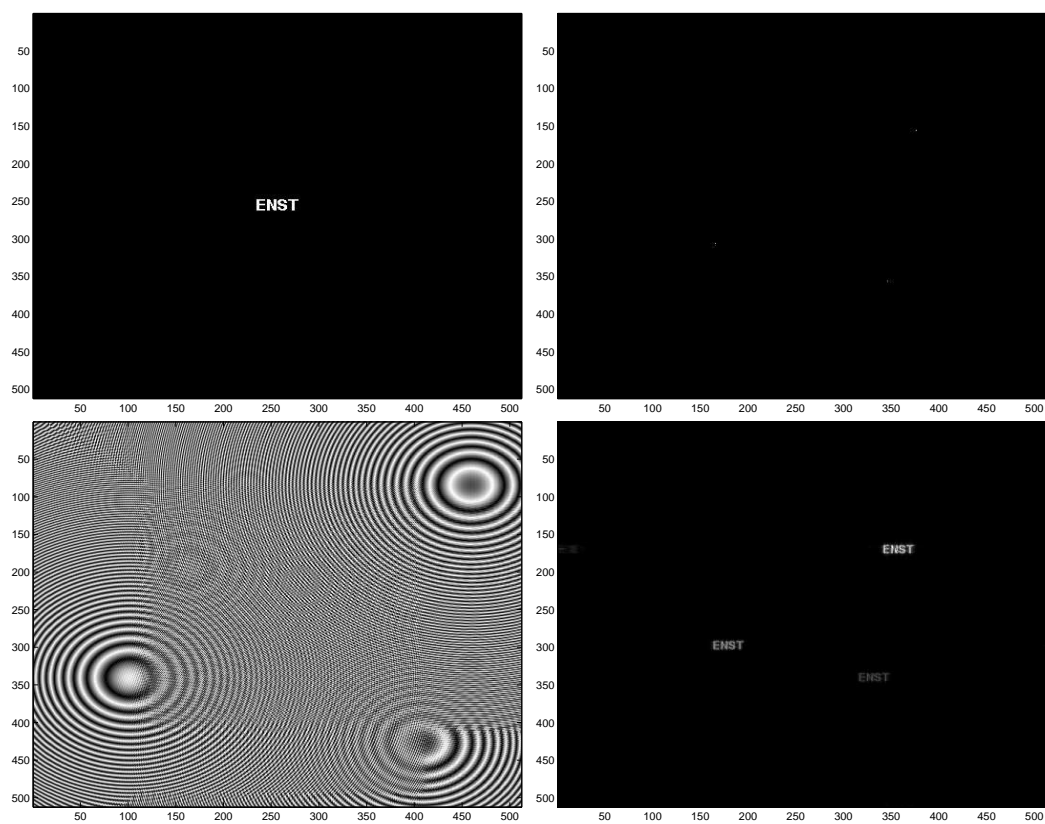


Figura 4.2: Convolución fraccional de una función con tres distribuciones de Dirac

Nota 4.2.1 El problema que ha provocado nuestro estudio, es decir la que concierne el cálculo y fabricación de un *diffusor* holográfico dando un volumen constante en intensidad para una zona de difracción dada, es potencialmente resuelto por los métodos descritos en este capítulo. No se ha abordado aún la fabricación de este tipo de componentes, por razones técnicas.

Capítulo 5

Propiedades de las figuras de difracción generadas por hologramas numéricos fraccionales

5.1. Nuevas aplicaciones

En óptica se está acostumbrado a trabajar en condiciones donde se cumple la aproximación de Fraunhofer para la difracción. Éstas condiciones permiten cierta comodidad relacionada con el hecho de que este fenómeno se traduce matemáticamente por una transformación de Fourier, la cual tiene una interpretación simple, además de ciertas propiedades que hacen posible su aplicación a múltiples problemas clásicos.

Recientemente se ha encontrado que la aproximación de Fresnel se puede traducir matemáticamente por una nueva operación llamada transformada de Fourier fraccional, de la cual la transformada de Fourier es un caso particular. Esta generalización trae consigo cambios de las propiedades y un aumento en el grado de complejidad de su interpretación, pero a su vez nuevas aplicaciones que de otro modo serían, sino imposibles, muy complicadas de abordar, como lo son los hologramas con doble “imagen” de difracción. Estas dos imágenes se pueden encontrar para distancias inferiores a la aproximación clásica de Fraunhofer. En general, el método de cálculo encuentra cual es la fase adecuada para que una figura de difracción de Fresnel se transforme en otra deseada usando como herramienta la difracción.

5.2. Ordenes de difracción

Se sabe que en holografía binaria de fase aparecen dos ordenes de difracción al dominio de Fraunhofer [15], uno el complejo conjugado del otro, y cuando se registra su modulo cuadrado, se encuentran dos “imágenes”, una derecha y la otra invertida. Éste orden de difracción complejo conjugado aparece de manera natural y automática como producto de la técnica de cálculo, en la mayoría de las veces indeseable, pero imposible de evadir.

En los hologramas binarios de fase calculados para trabajar al dominio de Fresnel este orden de difracción no aparece de manera natural, lográndose su eliminación de forma satisfactoria (figura 3.4), pero lo más interesante ocurre cuando se calculan los hologramas para tener simétricamente las dos imágenes, antes y después del plano de Fourier (figura 3.6), aparece de manera automática otro orden de difracción que podríamos llamar “complejo conjugado fraccional” pero sorpresivamente éste es en intensidad igual a la segunda “imagen” que se ve en el plano posterior de difracción, y en este último plano sucede algo análogo, aparece otro orden de difracción, pero este es en intensidad igual a la “imagen” del plano anterior.

5.3. Convolución fraccional

Se encontró que además de las lentes, las funciones chirp hacen una adaptación de las curvaturas para la óptica métaxial, permitiendo aproximar el patrón de difracción de Fraunhofer al “foco” de la función chirp, que corresponde matemáticamente al orden β para el cual la transformada de Fourier fraccional de la función chirp es una distribución de Dirac. Esto permite deducir para qué ordenes fraccionales la convolución fraccional de una función f por una distribución de Dirac coincide con el corrimiento de la función f ; es decir, la función sufre un desplazamiento con respecto al eje óptico (z) y γ (ver ecuación 4.7) nos da una medida de ese corrimiento. Esta condición hace más fácil la interpretación de la convolución fraccional, además que ya con ello se pueden visualizar aplicaciones como lo hecho aquí en holografía.

5.4. Reducción del speckle

En todo lo que se ha hecho, se ha buscado obtener una distribución de intensidad en un plano dado. Sin embargo los hologramas numéricos, una vez realizados, funcionan en óptica coherente, en el sentido de que este es el campo que es difractado. Resulta de esto un grado de libertad en el campo difractado ya que sólo nos interesa la intensidad, y la fase del campo para esta clase de aplicaciones no es importante. Más precisamente, los algoritmos utilizados (uno, dos y tres) atribuyen a la fase del campo difractado valores que vemos como aleatorios. Esto facilita el cálculo del campo pero introduce speckle en la figura de difracción.

Una manera clásica de reducir el speckle consiste en replicar el holograma; es decir, en convolucionar la función de transmisión calculada f_J , por un peine de Dirac. De eso resulta un muestreo en el plano de Fourier (para un holograma calculado según el algoritmo uno). La figura de difracción es pixelizada por naturaleza y si el muestreo precedente es bien calculado, no hay degradación en la figura de difracción pero si una reducción del speckle.

Esta solución no es aplicable a los hologramas “fraccionales”,¹ ya que la transformada de Fourier fraccional de una función trasladada no está relacionada de manera simple con la transformada de Fourier de la función. Por tal razón la técnica de reducción de speckle mencionada anteriormente no es aplicable.

¹Designamos por este termino los hologramas que se han calculado por los algoritmos dos y tres y que funcionan en el regimen de Fresnel.

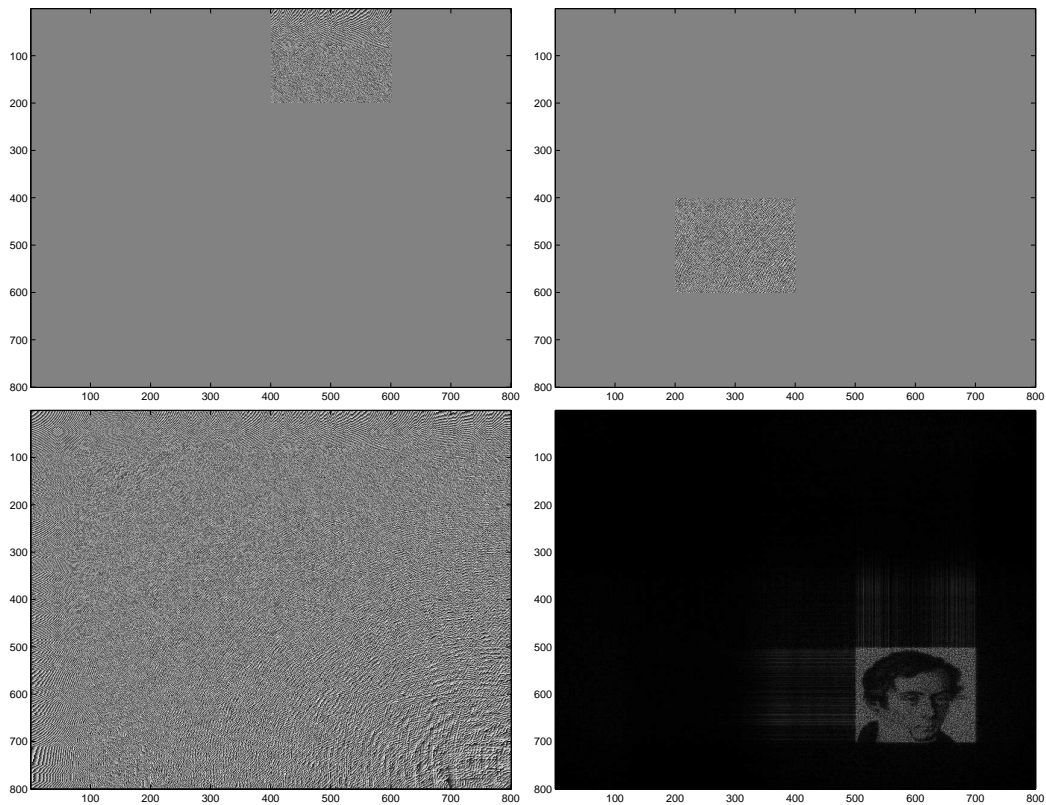


Figura 5.1: Las dos figuras de arriba muestran dos transparencias desplazadas que son dos hologramas diferentes. La figura debajo a la izquierda muestra el holograma constituido por 16 hologramas diferentes. La figura debajo a la derecha muestra el resultado de la reducción de speckle.

Para tal problema se ha encontrado una solución. Su principio reposa en el hecho de que en el cálculo de un holograma numérico por los algoritmos mencionados en el capítulo 3, la fase del campo difractado es aleatoria. Si se hacen dos cálculos sucesivos, se obtienen soluciones pero las funciones de fases son diferentes. En otros términos, se obtienen dos funciones f_J diferentes. La idea consiste entonces en calcular varias funciones de transmisión del holograma y desplazados sobre la pupila del holograma. Cada una de estas funciones genera la misma distribución de intensidad en la figura de difracción. Pero los campos difractados difieren entre ellos por las funciones de fases aleatorias que en promedio se compensan, resultando en una reducción del speckle (ver figura 5.1).

Nota 5.4.1 *Ésta técnica en realidad lo que hace es compensar la traslación del objeto (holograma en este caso) con una nueva fase a la que converge el algoritmo.*

Esta técnica de reducción de speckle fue implementada y se obtuvieron por simulaciones los resultados esperados. Solo falta realizar estos hologramas.

Algo notable es que la técnica de reducción de speckle permite una reducción del ruido de fondo (parte “no útil” de la figura de difracción).

5.5. Resolución

Se trata aquí brevemente un problema que aparece para hologramas numéricos fraccionales. Una vez más, el estar en un régimen de Fresnel conduce a abandonar las propiedades clásicas, y frecuentemente cómodas, de la transformación de Fourier estándar. Cuando la difracción es de Fraunhofer, su expresión matemática es una transformación de Fourier estándar. La discretización de la figura de difracción se interpreta simplemente en términos de un muestreo. La resolución de la imagen obtenida resulta de este muestreo. Pero no es igual si la difracción es de Fresnel, o dicho de otro modo, si se utiliza una transformación de Fourier fraccional.

En consecuencia se puede esperar una resolución diferente de las figuras de difracción calculadas, por ejemplo, por un algoritmo tipo dos. El problema de definir precisamente la resolución es un problema abierto.

Conclusiones

Se ha presentado en esta monografía los resultados que se obtuvieron en materia de holografía numérica y algunos resultados teóricos en materia de tratamiento de señales. Subrayamos los que parecen ser los puntos más originales de este trabajo :

1. Adaptación a la transformación de Fourier fraccional de los algoritmos de cálculo basados en la transformación de Fourier. Se ha desarrollado un método original para obtener un holograma que difracta en dos planos dos figuras de difracción dadas de antemano. El problema que es el origen de este trabajo es así potencialmente resuelto.
2. Condición de los ordenes fraccionales adecuados para encontrar la posición temporal y espacial de una imagen desplazada por convolución fraccional.
3. Introducción de la convolución fraccional como alternativa de modelización teórica y de cálculo práctico.
4. Reducción de speckle en las figuras de difracción por un método original para los hologramas que trabajan al dominio de fresnel.
5. Se calcularon y fabricaron elementos ópticos holográficos.
6. Se enunció el teorema del muestreo para recuperación de una señal en dominios fraccionales, dando una expresión para la tasa de muestreo óptimo.
7. Se halló una definición para la transformación discreta de Fourier fraccional, y la función de interpolación correspondiente.
8. Se formuló una ley de conservación para un parámetro que es una característica de las funciones, el cual fue llamado ancho de banda propio de la función.
9. Se encontró que señales de banda no limitada, pero que para algún dominio fraccional su soporte sea finito, pueden ser muestreadas y reconstruidas perfectamente.

Además de la puesta a punto de nuevos algoritmos, se han ilustrado los métodos por simulaciones que han mostrado la concordancia entre la teoría y los fenómenos físicos relacionados. En ciertos casos, se pudieron realizar los hologramas, gracias a la ayuda del laboratorio de óptica de la ENST-BRETAGNE, y así confirmar experimentalmente los resultados.

La holografía numérica por transformación de Fourier fraccional es un tema nuevo. Ha parecido interesante en la medida que los algoritmos desarrollados permanecen cercanos de la física

misma de los fenómenos puestos en juego. Se han tratado problemas abiertos que su solución permitirá, sin duda, nuevas aplicaciones para las telecomunicaciones ópticas entre otros campos de la óptica. Damos una aplicación posible en el dominio de las conexiones en el espacio libre. El hecho de poder controlar la distribución de intensidad en dos planos diferentes permite establecer conexiones en estos dos planos. En general se puede imaginar la formación de múltiples imágenes en una serie de planos sucesivos relativamente vecinos los unos de los otros, dando por resultado una restitución volumétrica de un objeto, plano por plano, por ejemplo en el proyecto del "Humano Visible".

Apéndice A

Difracción de Fresnel y transformación de Fourier fraccional

Sea \mathcal{C} una esfera centrada sobre un emisor \mathcal{A} de radio de curvatura R_A . La distancia entre \mathcal{A} y \mathcal{C} es $-D$. Se utiliza el parámetro μ tal que[7]

$$\mu = \frac{D}{R_A}. \quad (\text{A.1})$$

El campo sobre \mathcal{C} se deduce del campo sobre \mathcal{A} por la relación

$$U_C(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda\mu R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_A} r^2 \frac{1-\mu}{\mu}\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda\mu R_A} \vec{s} \cdot \vec{r}\right] U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (\text{A.2})$$

Para representar esta integral bajo la forma de una *TFf*, se escoge ε real (no nulo), tal que $\varepsilon R_A > 0$. Sea $\alpha \in [-\pi, \pi]$, tal que

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1-\mu}{\mu}, \quad \alpha D \geq 0. \quad (\text{A.3})$$

Se escogen las variables reducidas

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}} \vec{r}, \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \vec{s}, \quad (\text{A.5})$$

y las amplitudes reducidas

$$V_A(\vec{\rho}) = U_A\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_A} \vec{\rho}\right), \quad (\text{A.6})$$

$$V_B(\vec{\sigma}) = U_B\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_A} \frac{\vec{\sigma}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}\right). \quad (\text{A.7})$$

La ecuación A.2 se escribe

$$V_C(\vec{\sigma}) = \frac{i(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)}{\sin \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot \alpha] \exp\left[\frac{2i\pi\vec{\sigma} \cdot \vec{\rho}}{\sin \alpha}\right] V_A(\vec{\rho}) d\vec{\rho}. \quad (\text{A.8})$$

Para tener una verdadera *TFf*, falta un término de fase cuadrático. Éste término se introduce naturalmente si se observa el campo no sobre \mathcal{C} pero si sobre una esfera \mathcal{D} tangente a \mathcal{C} y de radio R_ε tal que

$$R_\varepsilon = \frac{\mu^2 + \varepsilon^2(1 - \mu)^2}{-\mu + \varepsilon^2(1 - \mu)} R_A. \quad (\text{A.9})$$

Esto permite escribir la amplitud del campo reducido sobre \mathcal{D} bajo la forma

$$V_{D_\varepsilon}(\vec{\sigma}) = e^{i\alpha}(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_A](\vec{\sigma}). \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Corrimiento del plano de observación por convolución fraccional

Sea \mathcal{H} el plano del holograma y \mathcal{P} su plano de Fourier estándar, donde se encuentra la figura de difracción dada por la función h . Se describe la amplitud del campo en este plano por una función g tal que $|g|^2 = h$. La función de transmisión del holograma es $\tau = f_J$, calculada según un algoritmo clásico (algoritmo uno).

Sea \mathcal{P}^β un plano intermedio, tal que la transferencia del campo hacia este plano se expresa por una transformación de Fourier fraccional de orden β . Multiplicamos τ por la siguiente función Chirp $\exp[-i\pi \frac{s^2 \cos \beta - 2\vec{r}_o \cdot \vec{s}}{\sin \beta}]$ de tal forma que la nueva función de transmisión del holograma sea

$$\tau^\dagger(\vec{s}) = \check{g}(\vec{s}) \exp[-i\pi \frac{s^2 \cos \beta - 2\vec{r}_o \cdot \vec{s}}{\sin \beta}], \quad (\text{B.1})$$

donde \check{g} es la transformada de Fourier estándar inversa de la función g .

La amplitud del campo en el plano \mathcal{P}^β se escribe

$$U = \mathcal{F}^\beta \left[\check{g} \exp[-i\pi \frac{s^2 \cos \beta - 2\vec{r}_o \cdot \vec{s}}{\sin \beta}] \right], \quad (\text{B.2})$$

y la expresión integral explícita de la transformación de Fourier fraccional permite escribir

$$U(\vec{r}) = \exp[i\pi r^2 \cot \beta] \int_{\mathbb{R}^2} \check{g}(\vec{s}) \exp[\frac{-i2\pi(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{s}}{\sin \beta}] d\vec{s}, \quad (\text{B.3})$$

$$U(\vec{r}) = g \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{\sin \beta} \right) \exp[i\pi r^2 \cot \beta], \quad (\text{B.4})$$

resultando que la distribución de intensidad en el plano \mathcal{P}^β está dada por la función h , además de un escalamiento que sufre la función de acuerdo el orden fraccional,

$$|U(\vec{r})|^2 = \left| g \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{\sin \beta} \right) \right|^2 = h \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{\sin \beta} \right). \quad (\text{B.5})$$

Se nota que la relación (4.2) se escribe también

$$U = \mathcal{F}^\beta [\mathcal{F}^{-\pi/2}[g] \mathcal{F}^{-\beta}[\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)]] = g(\vec{r}) *_{-\beta}^{-\pi/2, -\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_o). \quad (\text{B.6})$$

Se tiene que la función h se encuentra escalada y el corrimiento de la misma por convolución fraccional es proporcional al corrimiento de la distribución delta de Dirac.

Es de notar que bajo las anteriores condiciones la distribución de intensidad asociada al plano \mathcal{P}^β corresponde a la distribución de intensidad escalada en el plano de Fourier estándar del holograma inicial $\tau = f_J$, de allí que si se desea obtener la distribución de intensidad correspondiente sobre el plano \mathcal{P}^α , es fácil probar que sería necesario realizar una transformación de Fourier fraccional de orden $\gamma = \alpha\beta$ según la sección 4.1.3.

Con base en los resultados anteriores se puede afirmar que realizar una convolución fraccional óptica entre una función y una distribución delta de Dirac produce un corrimiento de la función tanto en las coordenadas x como en el eje óptico, de acuerdo a la posición espacial de la distribución delta de Dirac.

Apéndice C

Transformación discreta de Fourier fraccional

Para la definición de la transformación discreta de Fourier fraccional es necesario mostrar como relacionar \hat{f} con \hat{f}_α que son las versiones discretas de la función y su espectro fraccional.

La función \hat{f} esta dada por

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) \delta\left(x - n\frac{\sin \alpha}{\zeta}\right), \quad (\text{C.1})$$

bajo la hipótesis que $f(x)$ sea continua en $x = n\frac{\sin \alpha}{\zeta}$.

Retomando la ecuación 2.24:

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(x - k\xi) e^{-i2\pi(\nu_k x - \phi_k)}, \quad (\text{C.2})$$

para la condición que $\nu_k = k\xi \cot \alpha$, y $\phi_k = \frac{k^2 \xi^2 \cot \alpha}{2}$, siendo ξ el soporte de la función f .

De la ecuación C.1, se tiene

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) \delta\left(x - k\xi - n\frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{-i2\pi(\nu_k x - \phi_k)}. \quad (\text{C.3})$$

Sí a esta última función le hacemos una transformación de Fourier fraccional,

$$\mathcal{F}^\alpha[h](x') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi[\nu_k(k\xi + n\frac{\sin \alpha}{\zeta}) - \phi_k]} e^{i\pi(k\xi + n\frac{\sin \alpha}{\zeta})^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi x' \frac{(k\xi + n\frac{\sin \alpha}{\zeta})}{\sin \alpha}}. \quad (\text{C.4})$$

Luego de un poco de algebra se tiene

$$\mathcal{F}^\alpha[h](x') = e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{k\xi x'}{\sin \alpha}}. \quad (\text{C.5})$$

De esta última ecuación C.5, se llega a

$$g_\alpha(x') = e^{i\pi x'^2 \cot \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}}. \quad (\text{C.6})$$

Como la función f es solo diferente de cero en el rango desde $-N/2 \leq x \leq N/2 - 1$, y de la función g_α solo nos interesan los elementos correspondientes a un periodo, es decir, algunos elemento de la función f_α , entonces resulta

$$f_\alpha\left(k \frac{\sin \alpha}{\xi}\right) = e^{i\pi \frac{k^2 \sin 2\alpha}{2\xi^2}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n \frac{\sin \alpha}{\zeta}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\zeta^2}} e^{-i2\pi \frac{nx'}{\zeta}}. \quad (\text{C.7})$$

Ahora se escribe todo en función de lo conocido, que es el número de muestras N y el soporte ξ de la función f ,

$$f_\alpha\left(\frac{k\xi}{N}\right) = e^{i\pi \frac{k^2 \sin 2\alpha}{2\xi^2}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{n\xi}{N}\right) e^{i\pi \frac{n^2 \xi^2 \cot \alpha}{N^2}} e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}. \quad (\text{C.8})$$

Esta última ecuación es la definición de la transformación discreta de Fourier fraccional, de N muestras en el dominio directo relacionadas con N muestras en el dominio fraccional, que cumple el teorema del muestro fraccional en ambos dominios.

Bibliografía

- [1] J. C. Prunnot, A. Mihaescu, C. Boisrobert, G. Normand, P. Besnard, P. Pellat-Finet, P. Guignard, F. De Fornel, F. Bourgart, Indeed, communications infrarouges haut débit dans le contexte indoor, in *Objets communicants*, Hermès, Paris (2002).
- [2] G. Tricoles, Computer generated holograms: an historical review, *Applied Optics*, **26**, 4351–4360 (1987).
- [3] Victor Namias, The Fractional Fourier Transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths. Applics.*, **25**, 241–265, (1980).
- [4] D. Mendlovic, H. Ozaktas, Fractional Fourier transform and their optical implementation: I, *J. Opt. Soc. Am. A.*, **10**, 1875–1881 (1993).
- [5] H. Ozaktas, D. Mendlovic, Fractional Fourier transform and their optical implementation: II, *J. Opt. Soc. Am. A.*, **10** 2522–2531 (1993).
- [6] A. Lohman, Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am. A.*, **10**, 2181–2186 (1993).
- [7] P. Pellat-Finet, G. Bonnet, Fractional order Fourier transform and Fourier optics, *Opt. Comm*, **111** 141-154 (1994).
- [8] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 2e, New York, 1986.
- [9] A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [10] F. Roddier, *Distributions et Transformation de Fourier*. Ediscience, 5e, Paris, 1971.
- [11] E. Brigham, *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [12] F. Wyrowski, Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized, blazed phase structures, *J. Opt. Soc. Am. A.*, **7**, 961–969 (1990).
- [13] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* McGraw-Hill, Second édition, New York, 1996.
- [14] Ozaktas, Arikan, Kutay, and Bozdäg. Digital computation of the fractional Fourier transform. *IEEE Transaction on signal processing*, **44(9)** :2141–2150, September (1994).
- [15] K. Heggarty, Une implantation opto-electronique d'un réseau de neurones formels, Tesis presentada a Telecom-Paris, (1991).
- [16] F. Marinho, and L. Bernardo. Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm. *J. Opt. Soc. Am. A*, **15** :2111–2116, August. (1998).