

Análisis de un puente de viga cajón en fase constructiva durante la caída de una dovela prefabricada empleando el método de sistemas generalizados de un grado de libertad

Vanessa Alexandra Prada Dovale

Daniel Santiago Vega Sanchez

Trabajo de Grado para Optar el Título de Ingenieros Civiles

Director

José Miguel Benjumea Royero

Ph.D. en Ingeniería Civil y Ambiental

Codirector

Wilson Alexander Hernández Sierra

MSc. en Ingeniería Civil

Universidad Industrial de Santander
Facultad d Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A Dios, por ser mi guía y luz en cada paso del camino.

A mi padre, Teófilo Prada Plata, por ser esa fuente inagotable de amor y apoyo incondicional, y por enseñarme que con disciplina y esfuerzo no hay meta inalcanzable.

A mi madre, Gladys Dovale Alemán, por su amor infinito, por ser mi refugio en los momentos difíciles, por sus consejos sabios y oportunos, y por enseñarme a enfrentar cada reto con valentía.

A mi abuelita Dona, cuya voz sigue siendo el eco más dulce de mi memoria, su amor ocupa un lugar permanente en mi corazón, y en cada logro que alcanzo, la siento cerca, orgullosa, presente.

A quienes hicieron de la universidad mucho más que una etapa académica: mis amigos, compañeros de desvelos, frustraciones y carcajadas, con quienes construí recuerdos que siempre llevaré conmigo; en especial a Daniela, Amy, Diego y Kevin. Y a “mi grupito de intercambio”, que, desde la distancia y lo desconocido, me enseñó que el hogar también se construye en lugares y con las personas menos imaginadas.

A mis profesores y equipo de tesis, por su guía y dedicación en mi formación profesional, y por brindarme las bases necesarias para sacar este proyecto adelante.

Este logro es tanto mío como de cada uno de ustedes.

Vanessa Alexandra Prada Dovale

Primeramente, a mi madre Luz Marina Sánchez, pues ella es la principal responsable de que yo haya realizado este trabajo.

A mi padre, Jesús Vega, que con su gran ejemplo me enseñó a ser el hombre que soy hoy.

A mi hermana Jessica, por ser el ejemplo profesional que mi vida necesitaba.

A mis familiares, por el apoyo que recibí desde pequeño. A mis amigos José, Cristian y Santiago, por la gran compañía, apoyo y por todos los momentos que hicieron más llevadero este camino.

A mis compañeros de universidad, por hacer de esta etapa una de las mejores de mi vida y por todos los momentos compartidos. A mi compañera de tesis, Vanessa, por su compañía y trabajo durante este proyecto. A mis docentes, por las enseñanzas que marcaron mi formación.

Al profesor José Benjumea, por su orientación durante este proyecto.

Finalmente, agradezco a Dios por permitirme escribir estas dedicatorias.

Daniel Santiago Vega Sánchez

Agradecimientos

Primeramente, queremos agradecer a nuestros padres por el apoyo incondicional que nos brindaron durante este proceso. A nuestros familiares, por su compañía constante, y a nuestros compañeros y amigos, por la motivación y el ánimo que nos brindaron.

A nuestros docentes, por la formación profesional que nos ofrecieron a lo largo de esta etapa de nuestras vidas, dejando bases importantes para nuestro futuro.

Al Ingeniero Alex Hernández, por el tiempo que nos dedicó explicándonos MIDAS civil, por su seguimiento constante y por cada una de las reuniones en la que nos acompañó.

A la Universidad Industrial de Santander, por brindarnos los espacios, los recursos y el apoyo necesario durante nuestro pregrado.

Finalmente, se agradece de manera muy especial al profesor José Benjumea, director de este trabajo de grado. No solo por el acompañamiento constante, sus orientaciones y su disposición para ayudarnos a corregir y fortalecer este trabajo, sino también por ser un pilar fundamental en nuestra formación y por despertar en nosotros el interés por los puentes a través de la asignatura de Diseño de Puentes.

A cada uno de ustedes, nuestro más sincero agradecimiento por haber sido parte de este viaje.

Vanessa Alexandra Prada Dovale & Daniel Santiago Vega Sánchez

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	13
1. Objetivos	16
1.1 Objetivo General	16
1.2 Objetivos Específicos	16
2. Metodología	17
2.1 Descripción Del Puente	17
2.2 Modelamiento Del Puente	18
2.2.1 Construcción Del Modelo	18
2.2.2 Análisis Modal	21
2.2.3 Carga Dinámica Por Impacto	22
2.3 Análisis Simplificado Mediante El Método De Sistemas Generalizados De Un Grado De Libertad	24
2.3.1 Funciones De Forma	24
2.3.2 Parámetros Generalizados Y Frecuencia Natural	25
2.3.3 Formulación De La Ecuación De Movimiento	27
2.4 Solución Numérica En Python	29
2.5 Nivel De Exactitud	30
2.6 Factor De Amplificación Dinámico (Fad)	31
3. Resultados	31
3.1 Análisis Modal	31
3.1.1 Respuesta Modal Del Modelo Con Múltiples Grados De Libertad	31

3.1.2 Respuesta Modal Del Modelo G-Sdof.....	33
3.2 Respuesta Estructural Debido A La Caída Accidental De Una Dovela	35
3.2.1 Desplazamientos Dinámicos Máximos	35
3.2.2 Factor De Amplificación Dinámico	38
4. Conclusiones	40
5. Recomendaciones.....	42
Referencias Bibliográficas	43
Apéndices.....	46

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Diferencias en los períodos de vibración entre el análisis multimodal y el método simplificado incluyendo axial $N(x)$	34
Tabla 2. Desplazamiento dinámico máximo (δ_{dyn}) durante la caída de una dovela (en mm) para diferentes escenarios de análisis.	37

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. (a) Perfil longitudinal del puente, (b) Sección transversal de segmentos inicial y final, (c) Tendones de postensado en el puente.	17
Figura 2. Etapas constructivas analizadas	20
Figura 3. (a) Esquema de carga dinámica con superposición de los casos 1 y 2, (b) Función de rotura del cable.....	23
Figura 4. Formas modales del primer modo de vibración vertical para cada avance del voladizo: (a) 25%, (b) 50%, (c) 75%, (d) 100%.	32
Figura 5. Historia de desplazamientos del análisis multimodal (sin considerar el momento dinámico externo) y las tres funciones de forma propuesta sin considerar el efecto axial.	36

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A. Resultado por dovelas para la obtención de los parámetros $M(x)$ e $I(x)$ requeridos por el método de sistemas generalizados de un grado de libertad.	46
Apéndice B. Resultados de la función de axial de los avances estudiados.....	47
Apéndice C. Resultados de los periodos y porcentajes de masa de los avances estudiados.....	49
Apéndice D. Resultados de los periodos de ambos métodos sin considerar el efecto del postensado	55
Apéndice E. Formas modales y funciones de forma graficadas	56
Apéndice F. Resultados de las historias de desplazamientos obtenidas por ambos métodos en cada estado de avance considerado	57
Apéndice G. Diferencia obtenida para los desplazamientos dinámicos máximos.....	63
Apéndice H. Factor de amplificación dinámico para los estados de Avance considerados	63

Resumen

Título: Análisis de un puente de viga cajón en fase constructiva durante la caída de una dovela prefabricada empleando el método de sistemas generalizados de un grado de libertad*

Autor: Daniel Santiago Vega Sánchez, Vanessa Alexandra Prada Dovale**

Palabras Clave: Voladizos sucesivos, Segmento prefabricado, Sistema de izaje, Factor de amplificación dinámico, Periodo de vibración vertical.

Descripción: La construcción de puentes viga cajón de concreto postensado por voladizos sucesivos expone la estructura a escenarios accidentales cuya evaluación dinámica resulta compleja y costosa computacionalmente. Entre estos, la caída de una dovela prefabricada durante el izaje genera una carga altamente impulsiva que excede los factores de amplificación dinámica establecidos en normativas como el Eurocódigo EN 1991-1-7. El presente trabajo evalúa la respuesta dinámica de un puente viga cajón ante este evento en su fase constructiva, empleando el método de sistemas generalizados de un grado de libertad (G-SDOF). La viga se idealiza como un voladizo empotrado en la unión viga-pila, y la ecuación de movimiento generalizada se resuelve en el dominio del tiempo mediante el método de Newmark implementado en Python. Se incorpora el efecto axial del postensado mediante una rigidez geométrica generalizada, evaluando dos variantes de rigidez, tres funciones de forma y cuatro estados de avance constructivo (25%, 50%, 75% y 100%), y comparando los resultados con un modelo de elementos finitos en Midas Civil. En términos de períodos, el método subestima sistemáticamente los valores multimodales por sobreestimación de la rigidez del empotramiento perfecto, con diferencias inferiores al 11% para avances del 50% al 100%. En desplazamientos, el método reproduce adecuadamente la respuesta en etapas avanzadas con diferencias inferiores al 15%, siendo f_1 la función de mayor exactitud. El avance del 25% presenta discrepancias superiores al 30% por la divergencia entre las funciones de forma y la forma modal real. La compresión axial del postensado reduce la rigidez efectiva e incrementa los desplazamientos en etapas avanzadas, mejorando la concordancia con el modelo de elementos finitos. Los factores de amplificación dinámico de ambos métodos se ubican dentro del rango normativo de 1.5-2.0, confirmando su representabilidad para este tipo de escenario y la capacidad del método G-SDOF para estimarlos.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Jose Miguel Benjumea Royero. Ph.D. en Ingeniería Civil y Ambiental. Codirector: Wilson Alexander Hernández Sierra. MSc. en Ingeniería Civil.

Abstract

Title: Analysis of a Box Girder Bridge During Construction Stage Under the Fall of a Precast Segment Using the Generalized Single-Degree-of-Freedom Method*

Author: Vanessa Alexandra Prada Dovale, Daniel Santiago Vega Sánchez**

Key Words: Balanced cantilever construction, Precast segment, Lifting system, Dynamic amplification factor, Vertical vibration period.

Description: The construction of post-tensioned concrete box girder bridges using the balanced cantilever method exposes the structure to accidental scenarios whose dynamic evaluation is complex and computationally demanding. Among these, the fall of a precast segment during lifting generates a highly impulsive load that exceeds the dynamic amplification factors established in standards such as Eurocode EN 1991-1-7. This study evaluates the dynamic response of a box girder bridge under this event during its construction stage using the generalized single-degree-of-freedom (G-SDOF) approach. The girder is idealized as a cantilever fixed at the pier-girder connection, and the generalized equation of motion is solved in the time domain using the Newmark method implemented in Python. The axial effect of post-tensioning is incorporated through a generalized geometric stiffness, considering two stiffness variants, three shape functions, and four construction stages (25%, 50%, 75%, and 100%), and results are compared with a finite element model in Midas Civil. In terms of periods, the method systematically underestimates multimodal values due to overestimation of the perfectly fixed boundary condition, with differences below 11% for stages between 50% and 100%. Regarding displacements, the method accurately reproduces the response in advanced stages with differences below 15%, with f_1 being the most accurate shape function. The 25% stage shows discrepancies exceeding 30% due to divergence between assumed shape functions and the actual modal shape. Axial compression from post-tensioning reduces effective stiffness and increases displacements in advanced stages, improving agreement with the finite element model. Dynamic amplification factors from both methods fall within the normative range of 1.5–2.0, confirming their representativeness for this type of scenario and the capacity of the G-SDOF method to estimate them.

* Degree Work

** Physicomechanical Engineering. Civil Engineering School. Director: Jose Miguel Benjumea Royero. PhD. in Civil and Environmental Engineering. Co-advisor: Wilson Alexander Hernández Sierra. MSc. in Civil Engineering.

Reconocimiento de uso de inteligencia artificial

Durante el desarrollo de este trabajo de grado se emplearon herramientas de inteligencia artificial como apoyo en distintas etapas del proceso. En particular, se utilizó ChatGPT (OpenAI, 2026) para mejorar la redacción y la claridad de algunos apartados; Perplexity (Perplexity AI, 2026) para la búsqueda y consulta de documentos y referencias; y Claude (Anthropic, 2026) como apoyo en el desarrollo del código del aplicativo en Python.

Es importante resaltar que estas herramientas se utilizaron de manera responsable y complementaria, sin sustituir el trabajo intelectual de los autores. Todas las decisiones, análisis, interpretaciones y resultados presentados en este documento son de autoría propia.

El uso de estas herramientas tuvo como objetivo apoyar el proceso y mejorar la calidad de la presentación del trabajo, manteniendo siempre la comprensión y el dominio de los contenidos por parte de los autores.

Introducción

El método constructivo de voladizos sucesivos se ha consolidado como una de las técnicas más empleadas para la construcción de puentes de gran luz, siendo especialmente adecuado para estructuras de viga cajón de concreto postensado (Piqueras, 2025). A lo largo de las décadas, la evolución de los parámetros geométricos de diseño de las vigas y el refinamiento de los procesos constructivos han permitido alcanzar soluciones cada vez más seguras y económicas (Valle et al., 2017). Sin embargo, el diseño de este tipo de puentes exige un análisis estructural riguroso que garantice suficiente capacidad resistente de sus elementos no solo en condiciones de servicio, sino también durante cada etapa del proceso constructivo (AASHTO, 2024). En particular, la fase de construcción requiere una evaluación cuidadosa de los efectos dinámicos asociados a acciones no convencionales.

Un ejemplo de estas acciones ocurre durante eventos accidentales asociados a las operaciones de montaje, que constituyen un escenario crítico, como la caída de dovelas prefabricadas durante su izaje. Aunque algunas normativas internacionales, como la International Organization for Standardization (2024), establecen directrices de seguridad para los equipos de izaje y montaje con el fin de disminuir la probabilidad de ocurrencia de estos eventos, la revisión de antecedentes históricos, como los colapsos de los puentes West Gate en Australia y Cleddau en Gales (Caprani, 2020) demuestran que, a pesar de su baja probabilidad de ocurrencia, tanto los colapsos totales como las fallas parciales durante el montaje tienen consecuencias severas. Esto refuerza la necesidad de estudiar estos fenómenos en escenarios constructivos reales, así como de desarrollar herramientas de análisis que permitan evaluarlos en etapas tempranas del diseño.

Sin embargo, el análisis detallado de este tipo de escenarios suele requerir modelos numéricos complejos y de costo computacional moderado o alto, lo que limita su aplicación en las

fases preliminares del diseño. Esta limitación ha motivado la búsqueda de enfoques alternativos que permitan representar adecuadamente el comportamiento estructural sin incurrir en tiempos de cálculo elevados. En este sentido, diversas investigaciones han demostrado la eficacia de modelos simplificados del tipo sistema generalizado de un grado de libertad (en adelante, G-SDOF para *Generalized Single Degree of Freedom Systems*) para representar con exactitud suficiente la respuesta dinámica de estructuras con masa distribuida. Por ejemplo, Chen & Kianoush (2009) proponen un modelo G-SDOF que considera muros en voladizo con masa distribuida para el análisis sísmico de tanques rectangulares de concreto, lo que permite obtener estimaciones precisas comparables a las del método de elementos finitos. Además, Díaz & Suárez (2023) y Arias (2022) validaron su aplicabilidad en puentes viga-cajón durante la fase constructiva bajo excitaciones sísmicas verticales, obteniendo diferencias menores al 15 % respecto de análisis dinámicos lineales multimodales.

Adicionalmente, normativas como el EN 1991-1-7 (2006) contemplan factores de amplificación dinámica (FAD) para la evaluación de eventos accidentales. Sin embargo, la estimación de estos factores mediante modelos detallados, como los de elementos finitos, puede implicar una alta demanda de tiempo. Por lo tanto, resulta de interés desarrollar y validar métodos simplificados que permitan estimar de manera eficiente la respuesta dinámica global de la estructura ante este tipo de escenarios.

En este contexto, la pregunta de investigación que guía el presente trabajo es: ¿se puede estimar con precisión adecuada la respuesta dinámica global de un puente de viga cajón ante la caída de una dovela prefabricada empleando el método de sistemas generalizados de un grado de libertad? Para ello, se desarrolla una solución numérica implementada en Python, cuyos resultados se comparan con los obtenidos mediante un modelo detallado de elementos finitos en Midas Civil

(2024), considerando diferentes etapas de avance constructivo. A partir de esta comparación, se analiza la capacidad del método simplificado para reproducir la respuesta estructural, así como la influencia del postensado en la respuesta dinámica y en la estimación del FAD asociado a este tipo de evento.

1. Objetivos

1.1 Objetivo General

Evaluar la respuesta dinámica de un puente de viga cajón durante la caída de una dovela prefabricada en su fase constructiva por voladizos sucesivos, mediante un método numérico basado en un sistema generalizado de un grado de libertad.

1.2 Objetivos Específicos

Desarrollar una solución numérica implementada en Python para la obtención de respuestas estructurales globales de interés durante la caída de una dovela prefabricada en un puente viga cajón en fase constructiva por voladizos sucesivos, fundamentadas en el método G-SDOF y adaptadas al caso de estudio.

Determinar el nivel de exactitud de la solución desarrollada mediante el método G-SDOF, comparándolas con los resultados de un modelo de elementos finitos aplicado a un puente (caso de estudio), considerando tres funciones de forma y dos estados de avance del voladizo.

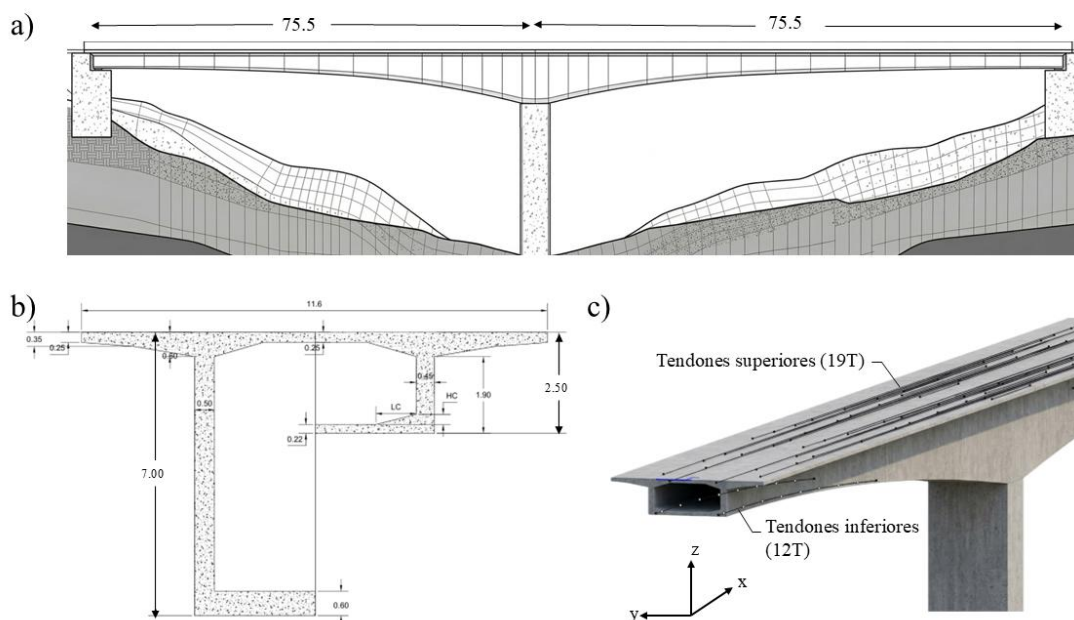
2. Metodología

2.1 Descripción del puente

Para el desarrollo de este proyecto se tomó como referencia el puente estudiado por Castro (2021), Arias (2021) y Díaz & Suárez (2023). Este es un puente viga cajón de concreto postensado, conformado por dos vanos simétricos, cada uno con una longitud (L) de 75.5 m, y construido mediante el método de voladizos sucesivos (Figura 1a). La sección transversal de la viga es unicelular, de ancho 11.6 m (Figura 1b) y de altura (h) y el espesor (t_s) de la losa variable a lo largo de la longitud del puente: en la zona sobre la pila, $h = 7.0$ m y $t_s = 0.6$ m, y disminuyen progresivamente hasta $h = 2.5$ m y $t_s = 0.22$ m en la zona de apoyo sobre los estribos. Adicionalmente, la sección presenta una cuña que se incorpora progresivamente a lo largo del elemento y que está ausente en los segmentos iniciales.

Figura 1.

(a) Perfil longitudinal del puente, (b) Sección transversal de segmentos inicial y final, (c) Tendones de postensado en el puente.



2.2 Modelamiento del puente

2.2.1 Construcción del modelo.

El puente fue modelado en el software Midas Civil (2024) mediante elementos tipo *Beam* (elementos unidimensionales definidos por dos nodos con seis grados de libertad cada uno). Las secciones transversales de cada dovela se crearon individualmente mediante la opción *Tapered*, introduciendo las dimensiones de inicio y de fin de cada segmento.

Para las condiciones de contorno, se empleó un enlace rígido (*Rigid Link*) en la conexión viga–pila. La pila se modeló con un empotramiento en su base. Para representar los apoyos elastoméricos de neopreno, se utilizaron dos nodos: un nodo superior, correspondiente a la interfaz entre el neopreno y la viga, y un nodo inferior, ubicado en la base del apoyo en contacto con el estribo. El nodo superior se conectó a la viga mediante un *rigid link*, lo que garantiza la compatibilidad de desplazamientos entre la superestructura y el apoyo. Finalmente, las propiedades de rigidez del apoyo elastomérico se definieron mediante la opción *Elastic Link* con propiedades específicas para estos apoyos ($SD_x = 850000 \text{ kN/m}$, $SD_y = 1500 \text{ kN/m}$, $SD_z = 1500 \text{ kN/m}$, $SR_y = 500 \text{ KN – m/[rad]}$, $SR_z = 500 \text{ KN – m/[rad]}$).

Los materiales considerados en el modelo estructural corresponden a un concreto con resistencia a la compresión (f'_c) de 42 MPa y módulo de elasticidad (E_c) de 30348 MPa para la viga, y con $f'_c = 35 \text{ MPa}$ y $E_c = 27704 \text{ MPa}$ para la pila. En ambos casos, se asumió un comportamiento dentro del rango lineal elástico, utilizando un coeficiente de Poisson de 0.2 y un peso específico de 24 kN/m^3 .

En el modelo se definieron tendones superiores e inferiores para el postensado (Figura 1c), utilizando acero de preesfuerzo de 5/8" de diámetro, área de 1.4 cm^2 , esfuerzo último (f_{pu}) de 1890 MPa y módulo de elasticidad de 195000 MPa. Los tendones superiores se modelaron a partir de

sus propiedades, trayectoria y elementos asociados, utilizando planos de referencia. Su recorrido se definió mediante un archivo de texto en Excel que incluía las coordenadas, el tipo de anclaje y la longitud de cada cable, el cual se incorporó al software mediante el *MCT Command Shell*, seleccionando la opción *Tendon Profile*. Los tendones inferiores se asignaron manualmente debido a la variación en la coordenada Z, definiendo igualmente sus propiedades y características.

Las cargas consideradas en el análisis por etapas constructivas fueron: el peso propio de la estructura (PP), la carga del sistema de montaje mediante viga y cabrestante (BW), la carga de izaje de cada dovela (ER) y la carga de postensado (PT).

El peso propio de la estructura (PP) se asignó en el modelo mediante la opción *Self Weight*, con dirección negativa en el eje Z. Las acciones generadas por el equipo de montaje (BW), instalado sobre cada dovela durante la construcción, se representaron mediante una carga vertical puntual de -97.427 MN aplicada en el extremo libre de cada dovela. Dicho valor, obtenido como la mediana de los pesos de las dovelas, se considera representativo del peso de un segmento típico y está en concordancia con las recomendaciones del American Segmental Bridge Institute (2019), que establece que un sistema convencional de viga y cabrestante debe diseñarse para soportar una carga aproximadamente equivalente al peso de una dovela.

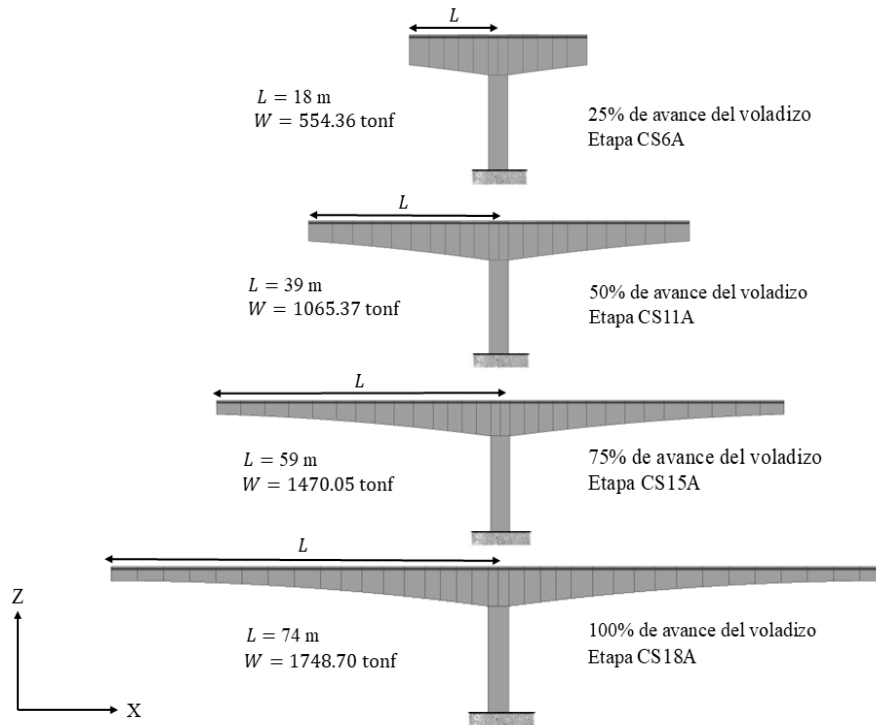
La carga de izaje de la dovela (ER) se modeló como una carga vertical aplicada en el nodo del extremo en voladizo, acompañada de un momento flector alrededor del eje Y, que tiene en cuenta la excentricidad entre el punto de aplicación de la fuerza de izaje y el eje de la dovela durante la maniobra de elevación.

Para la carga de postensado (PT), se especificaron la magnitud de la fuerza, el extremo de aplicación y el grupo de tendones correspondiente, con el objetivo de simular fielmente el proceso de postensado en cada una de las etapas constructivas contempladas en el modelo.

Para la simulación del proceso constructivo se definió un sistema de codificación que permite identificar cada etapa y su fase asociada. Dicho sistema emplea la sigla CS (Construction Stage), seguida del número de etapa y una letra final que indica la fase: la letra A corresponde al izaje y posicionamiento de la dovela en la punta del voladizo, con una duración de 0.5 días, mientras que la letra B corresponde a la aplicación de epóxi en las juntas y a la ejecución del postensado, con la misma duración.

El proceso constructivo se modeló en 20 etapas, comenzando por la construcción de la columna (COL) y del segmento ubicado sobre la columna (SEG0). La construcción de los dos primeros segmentos se simula de forma asimétrica, debido a la falta de espacio en el segmento cero (SEG0) para la instalación del sistema de montaje. A partir del segmento 2, la construcción se desarrolla de forma simétrica, dividiendo cada etapa únicamente en las fases A y B descritas anteriormente, hasta llegar a la etapa CS18B, que corresponde a la construcción de las dovelas apoyadas sobre el estribo. Sin embargo, para efectos de esta investigación, el análisis se extendió solo hasta la etapa CS18A, con el fin de mantener la estructura en condición de voladizo.

En la Figura 2 se presentan los avances del 25%, 50%, 75% y 100% del voladizo, correspondientes a las etapas constructivas CS6A, CS11A, CS15A y CS18A, respectivamente, junto con la longitud y el peso asociados al voladizo en cada una de estas etapas.

Figura 2.*Etapas constructivas analizadas*

2.2.2 Análisis modal.

Para el análisis modal de la estructura, se determinaron los períodos y las formas modales correspondientes a cada etapa constructiva evaluada. El análisis se realizó mediante la opción *Eigenvalue Analysis*, configurada con un total de 50 modos de vibración por etapa.

La masa del modelo se determinó con base en el peso propio de la viga y el de la pila del puente. Se incluyó, además, la masa correspondiente al equipo de montaje (BW), que actúa en la dirección z , la cual se incorporó al análisis dinámico mediante la opción *Loads to Masses*.

Para asegurar que los resultados correspondieran a cada etapa constructiva y no al estado final del puente, el análisis se configuró para detenerse al finalizar cada fase evaluada en la ventana de *Construction Stage Analysis Control Data*, y este procedimiento se repitió en todas las etapas del modelo.

Los resultados del análisis modal se extrajeron de la ventana *Mode Shapes* del módulo de resultados, donde es posible visualizar las formas modales obtenidas en cada etapa constructiva. Para cada modo se reportaron el período de vibración y el porcentaje de participación de masa modal, parámetros que permiten identificar los modos dominantes en cada fase.

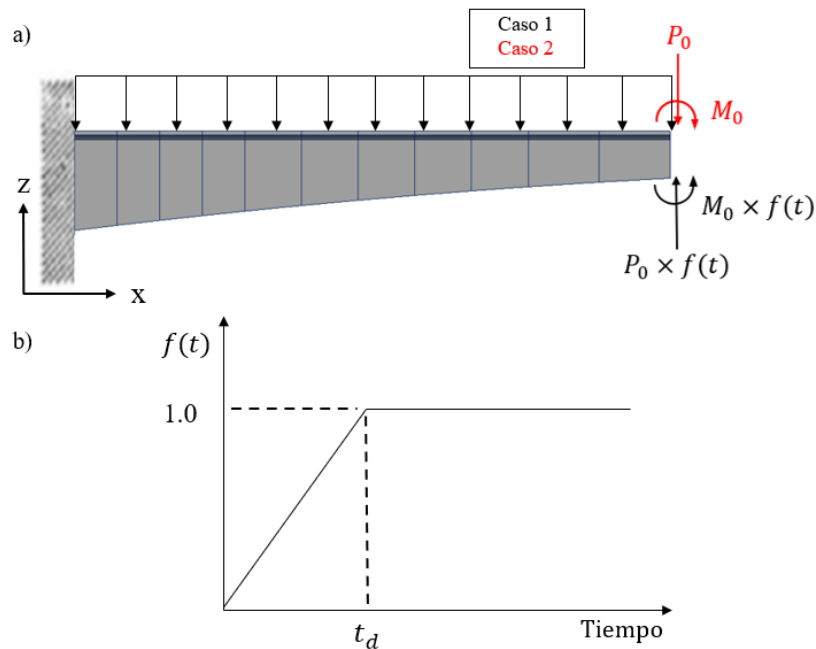
2.2.3 Carga dinámica por impacto.

Para modelar la respuesta del puente ante la caída de la dovela prefabricada se siguió el método usado en la simulación de roturas de cables en puentes atirantados (Mozos & Aparicio, 2009) y extradosados (Buelvas et al., 2021). Para ello, la respuesta se obtiene mediante la superposición de dos casos de carga (Figura 3a). El Caso 1 representa los efectos estáticos asociados a la falla del cable durante el izaje de la dovela, sustituyendo su acción por una carga estática equivalente a la carga de izaje (P_0) y un momento estático (M_0) de igual magnitud y dirección a los existentes inmediatamente antes de la rotura. En el Caso 2 se introducen los efectos dinámicos mediante una carga $P(t)$ y un momento $M(t)$ de sentido opuesto al del Caso 1, cuyas magnitudes varían con el tiempo según una función de rotura $f(t)$ (Figura 3b).

Para simular el efecto dinámico asociado a la caída de la dovela, se definió un caso de carga en la ventana *Time History Load Cases* del software Midas Civil. El análisis se configuró como lineal, de tipo transitorio (Transient), y se resolvió mediante integración directa empleando el método de Newmark, para el caso de aceleración promedio constante con parámetros $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$, que es incondicionalmente estable para sistemas lineales y evita la divergencia de los resultados (Chopra, 2014).

Figura 3.

(a) Esquema de carga dinámica con superposición de los casos 1 y 2, (b) Función de rotura del cable.



La duración total del análisis se estableció en 60 s, con un incremento de 0.001 s. Adicionalmente, se consideró una condición de carga previa correspondiente a la etapa de construcción (CS), con el fin de incorporar los efectos de las cargas acumuladas hasta el momento de ocurrencia del evento. El amortiguamiento se modeló como proporcional a la masa y a la rigidez, con un coeficiente equivalente de 2% ($\xi = 0.02$). Este valor se seleccionó con base en los resultados experimentales reportados por Hernández et al. (2020).

La función $f(t)$, que representa la naturaleza dinámica generada por la caída de la dovela, consta de dos fases. En la primera, la fuerza crece linealmente desde cero hasta su valor máximo durante el tiempo de rotura del cable (t_d); en la segunda, permanece constante (Figura 3b). Para el tiempo de rotura se adoptó $(t_d) = 0.0055$ s, valor tomado de los resultados experimentales para rotura de cables estudiados por Mozos y Aparicio (2011). Cabe señalar que en el instante en que los efectos dinámicos alcanzan su valor máximo ($t = t_d$), estos contrarrestan por completo los

efectos P_0 y M_0 , simulando la pérdida total de la dovela. Por último, la fuerza y el momento correspondientes al caso de carga dinámica se introdujeron en los nodos mediante factores de escala: uno equivalente al peso de la dovela para la fuerza y otro equivalente a la excentricidad de dicha fuerza durante la operación de izaje para el momento.

2.3 Análisis simplificado mediante el método de sistemas generalizados de un grado de libertad

Para sistemas de análisis complejo, existe la alternativa de analizarlos como sistemas de un solo grado de libertad (G-SDOF). En el caso de este proyecto, se trata de un sistema con masa y elasticidad distribuidas y de una fuerza excitadora externa. (Chopra, 2014) señala que el método G-SDOF proporciona resultados aproximados de la frecuencia natural de vibración y de las respuestas estructurales de interés mediante la restricción de las deflexiones a una función de forma $\psi(x)$ que se aproxima al modo fundamental de vibración.

Para aplicar el método, la viga del puente se idealiza como una viga en voladizo, empotrada en la unión viga-pila, en su fase constructiva (Fig. 3a). Esta consideración es coherente con la simetría del proceso de construcción mediante voladizos sucesivos a ambos lados de la pila. Bajo esta idealización, los desplazamientos en todos los puntos de la estructura se expresan en función de una coordenada generalizada $z(t)$ y de la función de forma $\psi(x)$ (Ecuación 1).

$$u(x,t) = \psi(x) \cdot z(t) \quad (1)$$

Donde x es la coordenada medida desde el empotramiento (unión viga-pila) hasta el extremo libre del voladizo, y t es el tiempo.

2.3.1 Funciones de forma

Para llevar a cabo la implementación del método G-SDOF, se emplearon tres funciones de forma denominadas f_1 , f_2 y f_3 . Las tres funciones satisfacen las condiciones de frontera de

$\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 0$, lo que permite evaluar la influencia de este parámetro en la exactitud de las respuestas dinámicas calculadas.

Las funciones f_1 (Ecuación 2) y f_2 (Ecuación 3) se eligieron por su semejanza con las formas modales del primer modo de vibración del puente. Además, Arias (2021) y Diaz & Suárez (2023) demuestran que proporcionan buenas aproximaciones del periodo fundamental y de las respuestas estructurales para vigas en voladizo de sección variable.

$$f_1 = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad (2)$$

$$f_2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2L}\right) \quad (3)$$

La función f_3 (Ecuación 4), modela la deflexión estática de una viga en voladizo de sección uniforme bajo una fuerza unitaria aplicada en el extremo libre. Aunque fue deducida para sección constante, Chopra (2014) indica que, al satisfacer las condiciones de frontera, puede utilizarse como función aproximada en vigas no uniformes

$$f_3 = \frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \quad (4)$$

Las tres funciones de forma anteriores son normalizadas de modo tal que satisfagan $\psi(L) = 1$. Esto hace que la coordenada generalizada $z(t)$ coincida con el desplazamiento en el extremo libre del voladizo, facilitando así la interpretación física de los resultados.

2.3.2 Parámetros generalizados y frecuencia natural

Una vez definida la función de forma, se calculan los parámetros generalizados del sistema. Este trabajo considera dos variantes de análisis: una que incluye el efecto axial del postensado sobre la rigidez del voladizo y otra que lo omite. Esto se consideró debido a un estudio realizado por Estruzani et al. (2025), que comprueba que el efecto axial a compresión en vigas de hormigón

disminuye la rigidez de la estructura. Ambas variantes comparten la misma masa generalizada \tilde{m} , pero difieren en la rigidez generalizada empleada.

La masa generalizada \tilde{m} está dada por la Ecuación 5:

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx \quad (5)$$

Donde $m(x)$ es la masa por unidad de longitud a lo largo del voladizo y se calcula como $m(x) = (\gamma/g) \times A(x)$, donde γ el peso específico del concreto, g es la aceleración de la gravedad y $A(x)$ el área de la sección variable de la dovela.

La rigidez generalizada flexional \tilde{k} , común a ambas variantes, está dada por la Ecuación 6:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx \quad (6)$$

Donde E es el módulo de elasticidad del concreto e $I(x)$ es el momento de inercia centroidal de la sección transversal.

En la variante que considera el efecto del axial, la fuerza axial $N(x)$ generada por el postensado del puente introduce una rigidez geométrica adicional que modifica la rigidez efectiva del sistema. En este caso, la rigidez generalizada efectiva \tilde{k}_{eff} se obtiene restando la rigidez geométrica generalizada \tilde{k}_g de la rigidez flexional \tilde{k} (Ecuación 7).

$$\tilde{k}_{eff} = \tilde{k} - \tilde{k}_g \quad (7)$$

Donde la rigidez geométrica generalizada \tilde{k}_g está dada por la Ecuación 8:

$$\tilde{k}_g = \int_0^L N(x)[\psi'(x)]^2 dx \quad (8)$$

De ahora en adelante, \tilde{k} representa la rigidez generalizada del sistema, la cual depende del caso de análisis considerado. Con la masa y rigidez generalizadas determinadas, la frecuencia y el periodo natural del sistema se obtiene mediante las ecuaciones 9 y 10:

$$\omega_n = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (9)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (10)$$

2.3.3 Formulación de la ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento del sistema generalizado de un grado de libertad, sometida a la carga dinámica producida por la caída de la dovela incluyendo el amortiguamiento, toma la forma (Chopra, 2014):

$$\tilde{m}\ddot{z}(t) + \tilde{c}\dot{z}(t) + \tilde{k}z(t) = \tilde{p}(t) \quad (11)$$

Donde \tilde{m} y \tilde{k} son la masa y la rigidez generalizadas definidas en la Sección 2.3.2; \tilde{c} es el coeficiente de amortiguamiento generalizado y $\tilde{p}(t)$ la fuerza excitadora generalizada. Los parámetros de amortiguamiento, la función de tiempo-historia de la carga $p(t)$ y el incremento del tiempo Δt se definieron en la Sección 2.2.3.

Dado que solo se quiere analizar el desplazamiento en el voladizo y que las tres funciones cumplen $\psi(L) = 1$, la coordenada generalizada $z(t)$ coincide directamente con el desplazamiento $u(t)$ en cada instante.

La fuerza excitadora generalizada $\tilde{p}(t)$ se obtiene proyectando la carga de impacto sobre la función de forma mediante:

$$\tilde{p}(t) = \int_0^L p(t)[\psi(x)]dx \quad (12)$$

Donde $p(t) = P_0 \cdot f(t)$, siendo P_0 el peso de la dovela y $f(t)$ la función de la carga en el tiempo. Ambos definidos en la Sección 2.2.3.

La ecuación de movimiento (Ecuación 14) se resuelve paso a paso en el dominio del tiempo mediante el método de Newmark, con los parámetros $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$, definidos en la Sección 2.2.3. El procedimiento tomado de Chopra (2014), se describe a continuación:

Primeramente, se calculan los coeficientes auxiliares a_1, a_2, a_3 y la rigidez modificada \hat{k} :

$$a_1 = \frac{\tilde{m}}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\gamma \cdot \tilde{c}}{\beta(\Delta t)} \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{\tilde{m}}{\beta(\Delta t)} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \tilde{c} \quad (14)$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \tilde{m} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \tilde{c} \quad (15)$$

$$\hat{k} = \tilde{k} + a_1 \quad (16)$$

Las condiciones iniciales son $u_o = 0, \dot{u}_o = 0$ y la aceleración inicial se obtiene de:

$$\ddot{u}_o = \frac{(\tilde{p}_o - \tilde{c} \cdot \dot{u}_o - \tilde{k} \cdot u_o)}{\tilde{m}} \quad (17)$$

Para cada paso de tiempo $i = 0, 1, 2, \dots$, se calcula la fuerza modificada \hat{p}_{i+1} :

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + a_1 u_i + a_2 \dot{u}_i + a_3 \ddot{u}_i \quad (18)$$

A partir de la cual se obtiene el desplazamiento generalizado en el paso siguiente:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (19)$$

En la formulación adoptada, la ecuación de movimiento se expresa en términos de una fuerza generalizada equivalente $\tilde{p}(t)$. Por ello, se desprecia el desplazamiento $u(t)$ asociado al momento dinámico generado por la caída de la dovela, considerando únicamente la contribución de la carga transversal.

No obstante, y para efectos de comparación, el análisis multimodal se evaluará para dos casos: incluyendo y sin incluir el efecto de dicha excitación. Esto permite identificar la influencia del momento dinámico en la respuesta del sistema.

2.4 Solución numérica en Python

La implementación del método G-SDOF se realizó en Python Software Foundation (2026) empleando las librerías Charles-R. et al. (2020) y Pauli et al. (2020) para el procesamiento numérico, John-D. (2007) para la visualización de resultados y Clark (2026) para el manejo de imágenes. El objetivo es convertir la geometría discreta de las dovelas en funciones continuas a lo largo del eje del voladizo y calcular los parámetros generalizados definidos en la Sección 2.3. Como las dimensiones de la sección transversal varían entre dovelas, el área A y el momento de inercia I se calculan numéricamente para cada dovela. Para esto, la sección unicelular se descompone en sub-bloques trapezoidales y rectangulares aplicando el teorema de Steiner para obtener la inercia respecto al centroide.

A partir de los valores discretos de los parámetros geométricos conocidos en los bordes de cada dovela, se construyen líneas tipo *splines* cúbicas con condición *not-a-knot* que permiten obtener funciones continuas de todos los parámetros a lo largo de x . Sobre estas *splines* se genera un arreglo de 100 puntos por dovela que permite obtener $A(x)$ e $I(x)$. Allí, las integrales de masa y de rigidez generalizadas se calculan mediante la regla de Simpson compuesta. La calidad de las funciones continuas se verifica mediante el coeficiente R^2 y la raíz del error cuadrático medio (RMSE) respecto de los valores exactos en los bordes. En el anexo A se encuentran estas regresiones polinómicas.

Para la variante con postensado, el usuario ingresa la fuerza de postensado por dovela. El programa construye la distribución $N(x)$ mediante acumulación inversa: la fuerza axial en cada

dovela es la suma de las fuerzas de los cables activos desde esa sección hasta el extremo libre. A continuación, aplica un factor de -0.87 para representar pérdidas del 13% (Benjumea-Royero et al., 2013). Posteriormente, se ajusta el polinomio de mejor coeficiente de determinación R^2 , de grado de uno a seis, para obtener la función continua $N(x)$ usada en la integral de la rigidez geométrica \tilde{k}_g (Sección 2.3.2). En el anexo B se presentan estas regresiones polinómicas para cada estado de avance.

Con los parámetros generalizados, se construye la fuerza generalizada $\tilde{p}(t)$ y se resuelve la ecuación de movimiento mediante el algoritmo de Newmark descrito en la Sección 2.3.3, obteniendo la historia de desplazamientos $u(t)$.

El programa ejecuta todos los cálculos anteriores para cualquier longitud L , correspondiente al borde derecho de cada dovela. Así, se obtienen la frecuencia natural, el periodo y la respuesta de desplazamiento de cada estado de avance. Este proceso es independiente de las tres funciones de forma y de las dos variantes de rigidez consideradas.

2.5 Nivel de exactitud

Para el cálculo del nivel de exactitud, expresado como porcentaje de diferencia (Ecuación 20), se adoptaron como valores exactos (VE) los obtenidos mediante el análisis dinámico en el software Midas Civil, mientras que los valores aproximados (VA) corresponden al análisis simplificado basado en sistemas generalizados de un solo grado de libertad. Cabe señalar que un porcentaje de diferencia positivo indica que el método aproximado sobreestima la respuesta dinámica del puente, mientras que un valor negativo evidencia una subestimación de dicha respuesta.

$$\%Diferencia = \left(\frac{VA - VE}{VE} \right) \cdot 100 \% \quad (20)$$

2.6 Factor de amplificación dinámico (FAD)

El Factor de Amplificación Dinámica (FAD) es un parámetro adimensional que cuantifica la relación entre la respuesta dinámica y la estática de un sistema. En el presente estudio, este factor se determinó exclusivamente para el desplazamiento, considerando únicamente los efectos traslacionales y empleando la Ecuación 21.

$$FAD_{\Delta} = \frac{\delta_{dyn_m\acute{a}x}}{\delta_{st}} \quad (21)$$

En dicha expresión, $\delta_{dyn_m\acute{a}x}$ representa el desplazamiento máximo asociado a la respuesta dinámica de interés, mientras que δ_{st} corresponde al desplazamiento estático.

3. Resultados

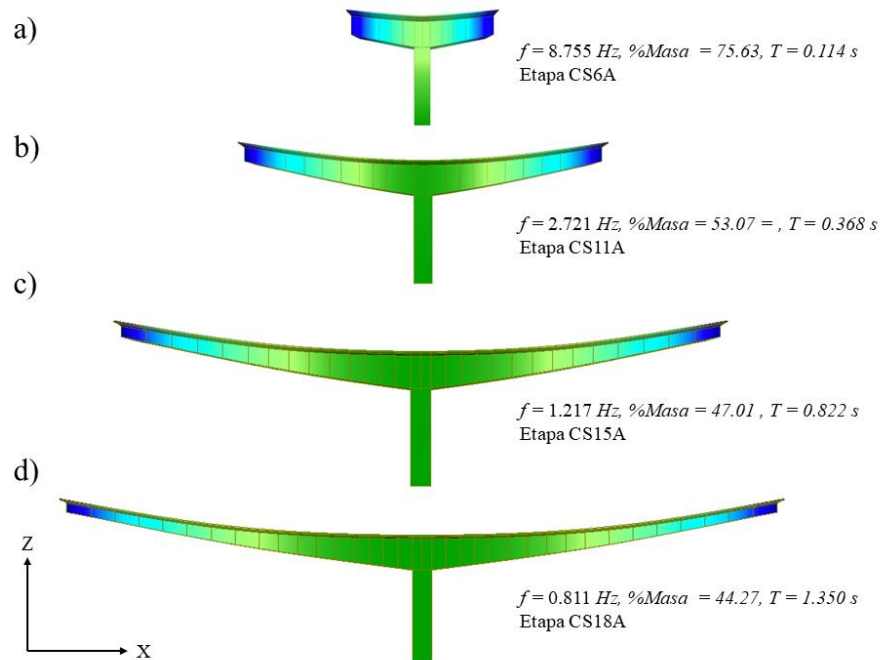
3.1 Análisis modal

3.1.1 Respuesta modal del modelo con múltiples grados de libertad

La Figura 4 muestra las formas modales típicas del primer modo de vibración vertical del puente para los cuatro avances constructivos analizados. En todos los casos, la forma modal exhibe un perfil semejante al de la deflexión estática de una viga en voladizo sometida a una carga transversal en el extremo libre, lo cual es consistente con la idealización adoptada en el análisis simplificado y respalda la pertinencia de las funciones de forma seleccionadas.

Figura 4.

Formas modales del primer modo de vibración vertical para cada avance del voladizo: (a) 25%, (b) 50%, (c) 75%, (d) 100%.



El porcentaje de participación de masa modal en el primer modo de vibración vertical supera el 75% en el avance del 25%, valor que disminuye progresivamente hasta alcanzar aproximadamente el 44% en la etapa de cierre del voladizo. Esta evolución indica que los modos superiores adquieren mayor relevancia en la respuesta dinámica conforme avanza la construcción, de modo que la respuesta en etapas tardías depende en mayor medida de la contribución combinada de múltiples modos. En contraste, el elevado porcentaje de participación en la etapa inicial sugiere que el método G-SDOF podría proporcionar estimaciones cercanas a las del análisis multimodal en ese avance, dado que la influencia de los modos superiores es comparativamente reducida. Sin embargo, como se discutirá en la siguiente sección, este argumento no se traduce necesariamente en una mayor exactitud del método simplificado, ya que la exactitud también depende de qué tan bien represente la función de forma escogida la forma modal real del puente en cada etapa.

Los períodos del primer modo de vibración vertical aumentan con el avance del voladizo, en concordancia con el aumento de la masa y la reducción de la rigidez flexional que acompañan el crecimiento de la longitud en voladizo. El período correspondiente al avance del 25% es de 0.114 s, mientras que en la etapa final alcanza 1.350 s, lo que representa un incremento de aproximadamente un orden de magnitud a lo largo del proceso constructivo.

3.1.2 Respuesta modal del modelo G-SDOF

Los períodos del primer modo de vibración vertical obtenidos con el método G-SDOF presentan el mismo comportamiento cualitativo que los del análisis multimodal (Tabla 1): valores cortos en el avance del 25% que se incrementan progresivamente hasta el cierre del voladizo. Este comportamiento se mantiene consistente para las tres funciones de forma y las dos variantes de rigidez consideradas. La principal diferencia cuantitativa radica en que los períodos del análisis simplificado son sistemáticamente inferiores a los del modelo computacional, lo que es atribuible a la mayor rigidez del modelo idealizado, que supone un empotramiento perfecto en la unión viga–pila y no considera la flexibilidad de la pila. Esta diferencia es característica del método y ha sido documentada en estudios previos sobre el mismo puente [Arias (2021) y Diaz & Suárez (2023)].

La Tabla 1 presenta los porcentajes de diferencia (Dif.) entre los períodos del primer modo de vibración vertical obtenidos mediante el análisis multimodal y el método G-SDOF incluyendo el efecto axial $N(x)$, para las tres funciones de forma y los cuatro avances constructivos, considerando en ambos casos el efecto del postensado. Se adopta como criterio de buen ajuste un valor de $|Dif. | < 15\%$. Se puede apreciar los periodos del método simplificado sin incluir axial en el Anexo D.

Tabla 1.

Diferencias en los períodos de vibración entre el análisis multimodal y el método simplificado incluyendo axial $N(x)$.

Avance	Análisis multimodal (Midas civil) T (s)	Análisis simplificado (G-SDOF)					
		f_1		f_2		f_3	
		T (s)	Dif. (%)	T (s)	Dif. (%)	T (s)	Dif. (%)
25%	0.114	0.071	-37.76%	0.078	-31.96%	0.078	-32.07%
50%	0.368	0.329	-10.55%	0.337	-8.30%	0.331	-10.07%
75%	0.822	0.792	-3.61%	0.777	-5.49%	0.749	-8.84%
100%	1.350	1.314	-2.63%	1.261	-6.57%	1.202	-10.95%

Los resultados muestran que, para los avances del 50%, 75% y 100%, las tres funciones de forma presentan diferencias dentro del rango aceptable, con valores que no superan el 11% en ningún caso. El avance del 25% constituye la excepción: las diferencias oscilan entre el 32% y el 38%, lo que evidencia que el modelo idealizado sobreestima considerablemente la rigidez del sistema en esa etapa temprana, produciendo períodos más cortos que los del modelo computacional.

En cuanto al desempeño relativo de cada función de forma, f_1 presenta las menores diferencias en los avances del 75% y del 100%, mientras que en los avances del 25% y del 50% las tres funciones exhiben comportamientos similares entre sí. Las funciones f_2 y f_3 muestran diferencias comparables, siendo f_3 la que registra las mayores discrepancias en todos los avances, excepto en el del 25%. El avance del 75% es el que, en promedio para las tres funciones, registra las mejores aproximaciones, resultado que también concuerda con lo reportado por Díaz & Suárez (2023). La función f_1 presenta los mejores resultados en los avances de mayor longitud de voladizo, lo cual puede relacionarse con su mayor cercanía a la forma modal real del puente en esas etapas.

Para realizar una comparación visual, se presentan las formas modales frente a las funciones de forma en cada estado de avance (Anexo E), y se aprecia que las diferencias obtenidas guardan una relación muy estrecha con la similitud existente entre ellas, siendo el estado del 25% (el que presentaba las peores diferencias en la Tabla 1) el que muestra las peores similitudes entre dichas curvas. Esto concuerda con lo reportado por Arias (2021) y Díaz & Suárez (2023), quienes concluyen que, para este avance, las funciones de forma adoptadas no describen correctamente la condición de frontera propuesta. Para cuantificar esto objetivamente en el Anexo E, se presenta el coeficiente R^2 donde se comprueba que el estado del 75% es el que efectivamente presenta mejores valores dicho coeficiente.

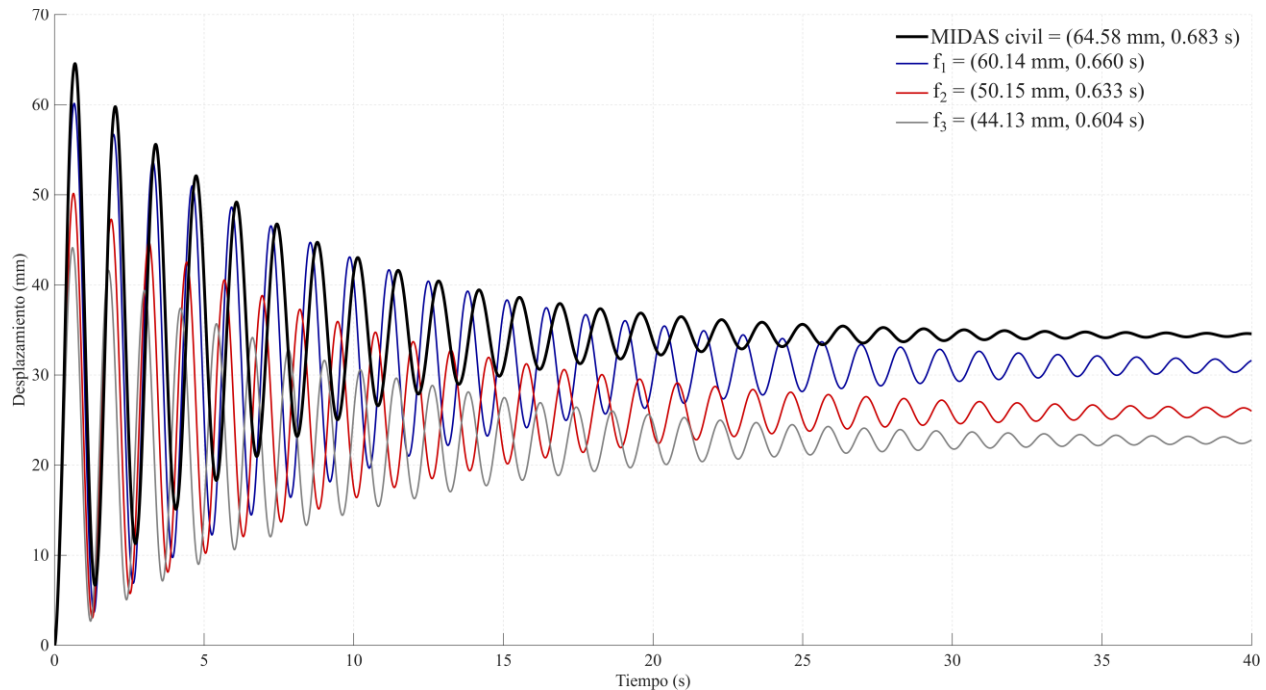
3.2 Respuesta estructural debido a la caída accidental de una dovela

3.2.1 Desplazamientos dinámicos máximos

La Figura 5 presenta las historias de desplazamientos en el avance del 100% del análisis multimodal (sin considerar el efecto del momento dinámico externo), y del análisis simplificado incluyendo el efecto del axial del postensado $N(x)$ para las tres funciones de forma propuestas, también presenta los desplazamientos máximos en cada caso y el instante en el que ocurre este. Las historias de desplazamiento completas se incluyen en el Anexo F.

Figura 5.

Historia de desplazamientos del análisis multimodal (sin considerar el momento dinámico externo) y las tres funciones de forma propuesta sin considerar el efecto axial.



Se puede apreciar que la función f_1 presenta la menor diferencia en el desplazamiento máximo, con un valor de -6.9% (Anexo G), seguida de la función f_2 y, por último, la función f_3 , lo cual es consistente con lo reportado en la Tabla 1.

Por otra parte, se identifican los instantes en los que ocurren dichos desplazamientos máximos, observándose que en esos instantes las funciones de forma siguen la misma tendencia descrita anteriormente. Finalmente, se observa el desplazamiento estático esperado una vez que la respuesta se estabiliza, el cual es distinto de 0 en todos los casos, ya que la fuerza dinámica se mantiene constante a lo largo del tiempo. Dicho desplazamiento ocurre aproximadamente después de 40 segundos.

Para observar los resultados en todos los estados de avance, la Tabla 2 presenta los desplazamientos dinámicos máximos en el extremo libre del voladizo, obtenidos ante la caída de

una dovela. Se comparan cuatro casos: el análisis multimodal con y sin el momento dinámico externo, $M(t)$, asociado a la excentricidad de izaje, y el análisis G-SDOF con y sin la inclusión del efecto axial del postensado, $N(x)$, este último evaluado para las tres funciones de forma. Las diferencias porcentuales detalladas entre métodos se presentan en el Anexo G.

Tabla 2.

Desplazamiento dinámico máximo (δ_{dyn}) durante la caída de una dovela (en mm) para diferentes escenarios de análisis.

Avance	Análisis multimodal (Midas civil)		Análisis simplificado (G-SDOF)					
	Con $M(t)$ (mm)	Sin $M(t)$ (mm)	Incluyendo efecto $N(x)$			Sin incluir efecto $N(x)$		
			f_1 (mm)	f_2 (mm)	f_3 (mm)	f_1 (mm)	f_2 (mm)	f_3 (mm)
25%	2.418	2.186	1.301	1.454	1.418	1.300	1.453	1.417
50%	23.644	21.465	19.841	19.103	17.860	19.649	18.918	17.697
75%	94.311	87.474	84.613	73.941	66.687	81.608	71.424	64.593
100%	65.863	64.577	60.143	50.154	44.134	56.156	47.061	41.658

Una primera observación de la Tabla 2 es que el momento dinámico externo, asociado a la excentricidad durante la maniobra de izaje, aporta menos del 10% al desplazamiento total obtenido mediante el análisis multimodal en todos los avances. Por este motivo, y en coherencia con el planteamiento del método G-SDOF adoptado, el momento dinámico no se incorpora al análisis simplificado, sin que ello suponga una limitación significativa para la estimación del desplazamiento.

Respecto a la tendencia del desplazamiento máximo con el avance del voladizo, los valores aumentan del 25% al 75% de avance y luego disminuyen hasta el 100% de avance, independientemente del método de análisis. Esta reducción en la etapa final se explica porque la dovela de cierre, cuya caída se simula en ese estado de avance, tiene un peso menor que el de las

dovelas interiores, lo que da lugar a una excitación dinámica de menor magnitud. Este comportamiento constituye una característica estructural del proceso constructivo que el análisis simplificado reproduce adecuadamente.

En cuanto al efecto del postensado sobre la respuesta, la variante del método simplificado que incluye el axial produce desplazamientos ligeramente superiores (0.06%-7.10%) al caso en que se omite en todos los avances y en las funciones de forma. El efecto es más pronunciado en los avances del 75% y del 100%, etapas en las que el postensado acumulado a lo largo del voladizo es mayor.

En lo que respecta a la exactitud de cada función de forma, f_1 , a pesar de su simplicidad, proporciona las menores diferencias respecto al análisis multimodal en todos los avances, excepto en el avance del 25%, alcanzando un error de apenas -3% en el avance del 75% y diferencias inferiores a -10% en los avances del 50% y del 100%. Este comportamiento es coherente con el mayor ajuste de f_1 a la forma modal del puente en esas etapas, tal como se discutió en la sección 3.1.2. La función f_2 ofrece buenas aproximaciones en los avances del 50% y del 75% frente al caso multimodal sin momento externo, con diferencias inferiores a -15%. La función f_3 presenta las mayores discrepancias de las tres en todos los avances, resultado que también es consistente con su mayor alejamiento de la forma modal real, observado en el Anexo E. El avance del 25% vuelve a registrar las diferencias más altas en las tres funciones de forma, confirmando que la divergencia entre las funciones propuestas y la forma modal real en esa etapa es el factor limitante del método.

3.2.2 Factor de amplificación dinámico

Con el fin de cuantificar la severidad de la carga dinámica producida por la caída de la dovela en relación con la carga estática equivalente, se calculó el FAD para los cuatro avances

constructivos a partir de los desplazamientos obtenidos mediante el análisis multimodal y el método simplificado para la función de forma f_1 , de acuerdo con la expresión definida en la metodología.

Los valores del FAD obtenidos para ambos métodos en todos los avances se mantienen en el rango normativo de 1.5 a 2.0 establecido por el EN 1991-1-7 (2006) para situaciones accidentales de este tipo (Anexo H). Al comparar ambos métodos se obtuvieron buenas diferencias y, al igual que con los demás resultados presentados anteriormente, las mejores diferencias se registraron en las etapas avanzadas de construcción.

4. Conclusiones

El presente trabajo evaluó la respuesta dinámica de un puente viga-cajón durante la caída accidental de una dovela prefabricada en su fase constructiva, mediante voladizos sucesivos, empleando el método de sistemas generalizados de un grado de libertad (G-SDOF) implementado en Python y comparándolo con un modelo detallado de elementos finitos desarrollado en Midas Civil. A partir de los resultados obtenidos, se concluye lo siguiente:

La exactitud del método G-SDOF depende en gran medida de la capacidad de la función de forma escogida para representar la forma modal real del puente en cada etapa constructiva. Esto se evidencia claramente en el avance del 25%, para el cual, a pesar de que el primer modo concentra el mayor porcentaje de participación de masa modal ($>75\%$), las diferencias en el período y en los desplazamientos son las más elevadas entre todos los avances analizados. La causa es que, en voladizos cortos, la forma modal real del puente difiere notablemente de las tres funciones propuestas, cuya geometría es más propia de voladizos de mayor longitud. Este resultado demuestra que un elevado porcentaje de participación modal no garantiza, por sí solo, una buena aproximación del método simplificado: la representatividad geométrica de la función de forma es el factor clave.

La discrepancia en la condición de frontera (empotramiento) combinada con la limitada capacidad de las funciones de forma adoptadas para describir adecuadamente voladizos cortos, reduce la aplicabilidad del método G-SDOF en etapas tempranas de la construcción. El modelo idealizado supone un empotramiento perfecto en la unión viga-pila, lo que implica un desplazamiento nulo en el origen. Sin embargo, para un avance del 25%, esta condición no se representa adecuadamente en comparación con las demás etapas. A medida que aumenta el avance constructivo (50%, 75% y 100%), la respuesta estructural se ajusta progresivamente a dicha

condición, lo que indica que la hipótesis de empotramiento perfecto se vuelve cada vez más representativa conforme aumenta la longitud del voladizo.

De las tres funciones de forma evaluadas, $f_1 = (x/L)^2$ demostró el mejor desempeño tanto en la aproximación del período fundamental como en los desplazamientos dinámicos, registrando el mayor coeficiente de determinación respecto a la forma modal real y las menores diferencias frente al análisis multimodal en las etapas avanzadas de construcción. Esto confirma que la selección de la función de forma condiciona directamente la exactitud del método G-SDOF, tanto en la respuesta modal como en la dinámica de desplazamientos.

El axial de compresión inducido por el postensado disminuye la rigidez efectiva del voladizo e incrementa la respuesta dinámica a desplazamientos, por lo que su incorporación en el análisis G-SDOF resulta recomendable para obtener estimaciones más representativas. Esta influencia guarda una relación directa con la fuerza de postensado acumulada a lo largo del voladizo: en etapas tempranas, con pocos tendones activos, su efecto es poco perceptible; no obstante, conforme avanza la construcción y se incorporan nuevos tendones, la reducción de la rigidez se acentúa y los desplazamientos dinámicos resultan apreciablemente más elevados que los obtenidos al ignorar este efecto. Este hallazgo, coherente con lo demostrado por Estruzani et al. (2025), pone de manifiesto que considerar el efecto axial del postensado en el método G-SDOF sí influye en la respuesta real del puente.

Se demostró la aplicabilidad del método G-SDOF para la estimación del FAD, obteniéndose una concordancia satisfactoria con el análisis multimodal que mejora progresivamente con el avance constructivo, con ambos métodos arrojando valores dentro del rango de 1.5 a 2.0 estipulado por el EN 1991-1-7 (2006), lo que confirma que dicho rango es representativo de este escenario accidental para el puente analizado.

De forma general, el método G-SDOF demostró ser una herramienta eficaz y simplificada para evaluar la respuesta dinámica del puente, con diferencias inferiores al 15% respecto al modelo de elementos finitos en las etapas avanzadas de la construcción. No obstante, el método subestima sistemáticamente la respuesta dinámica en todos los casos analizados, atribuible a la sobreestimación de la rigidez del modelo idealizado, lo cual constituye una limitación que debe tenerse en cuenta desde el punto de vista de la seguridad estructural.

5. Recomendaciones

El presente trabajo abre diversas líneas de investigación que complementan los hallazgos obtenidos. Se recomienda investigar funciones concebidas específicamente para voladizos cortos, dado que las evaluadas en este estudio no representan adecuadamente la forma modal real del puente en etapas constructivas tempranas, lo cual constituye la principal limitación del método G-SDOF. Adicionalmente, dado que los desplazamientos dinámicos determinados se limitaron a considerar efectos traslacionales en el extremo libre del voladizo, se recomienda extender el análisis a los efectos rotacionales en dicho extremo, pues el momento dinámico asociado a la excentricidad de izaje, podría manifestarse de manera más relevante en la rotación y a un posible daño o apertura en las juntas debido a la acción cíclica rotacional. Se recomienda también profundizar en el efecto axial de compresión inducido por el postensado, cuyos resultados confirmaron que reduce la rigidez efectiva e incrementa los desplazamientos dinámicos de forma apreciable en las etapas avanzadas de la construcción, por lo que su correcta modelación resulta relevante para la precisión del análisis.

Referencias Bibliográficas

- American Association of State Highway and Transportation Officials. (2024). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications* (10.^a ed.). AASHTO.
- American Segmental Bridge Institute. (2019). *Construction practices handbook for concrete segmental and cable-supported bridges* (3rd ed.).
- Anthropic. (2026). *Claude*. <https://claude.ai>
- Arias, C. E. (2021). *Aplicabilidad de los sistemas generalizados de un solo grado de libertad en el análisis de un puente durante construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales*.
- Benjumea-Royero, J., Suárez-Rodríguez, M., & Chio-Cho, G. (2013). Comportamiento estructural de puentes extradados durante construcción por voladizos sucesivos. *Revista EIA*, 10(20), 111-125.
- Buelvas, H., Benjumea, J. M., & Chio, G. (2021). Dynamic amplification factors of girder and cables of extradosed bridges during sudden cable failure. *Bridge Structures*, 17(3-4), 101-110. <https://doi.org/10.3233/BRS-210189>
- Caprani, C. (2020). Remembering the West Gate Bridge collapse 50 years on, and what we have – and haven't learnt from the tragedy [Artículo de blog]. *Monash Lens*. <https://lens.monash.edu/remembering-the-west-gate-bridge-collapse-50-years-on-and-what-we-learnt/>
- Castro, S. (2021). *Respuesta elástica de un puente viga cajón bajo la acción combinada de movimientos sísmicos verticales y horizontales durante construcción y servicio*.
- Charles-R., H., Millman, K. Jarrod, & Stéfan-J., van der W. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585, 357-362. <https://doi.org/https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>

- Chen, J. Z., & Kianoush, M. R. (2009). Generalized SDOF system for seismic analysis of concrete rectangular liquid storage tanks. *Engineering Structures*, 31(10), 2426-2435. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.05.019>
- Chopra, A. K. (2014). *Dinámica de estructuras*.
- Clark, A. (2026). *Pillow (Python Imaging Library Fork)* [Software]. <https://python-pillow.org>
- Diaz, J., & Suárez, L. (2023). *Aplicabilidad de los sistemas generalizados de un grado de libertad en el análisis de un puente viga cajón en construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales al variar la relación de alturas de las dovelas cero y final*.
- EN 1991-1-7: Eurocode 1: Actions on structures—Part 1-7: General actions—Accidental actions. (s. f.). Recuperado 5 de mayo de 2026, de <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1991.1.7.2006.pdf>
- Estruzani, A. B., Kzam, A. K. L., Villalba-Morales, J. D., & Araujo, I. D. G. (2025a). A finite element approach for modeling dynamic effects of prestressing in concrete beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 22(12). <https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8709>
- Estruzani, A. B., Kzam, A. K. L., Villalba-Morales, J. D., & Araujo, I. D. G. (2025b). A finite element approach for modeling dynamic effects of prestressing in concrete beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 22(12), e8709. <https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8709>
- Hernandez, W., Viviescas, A., & Riveros-Jerez, C. A. (2020). Verifying of the Finite Element Model of the Bridge Based on the Vibration Monitoring at Different Stages of Construction. *Archives of Civil Engineering*, 25-40. <https://doi.org/10.24425/ace.2020.131772>

- John-D., H. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90-95. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- MIDAS Information Technology Co., Ltd. (2024). *MIDAS Civil* <https://www.midasstructure.com> (Versión 2024) [Software]. MIDAS IT. <https://www.midasstructure.com>
- Mozos, C. M., & Aparicio, A. C. (2009). Static strain energy and dynamic amplification factor on multiple degree of freedom systems. *Engineering Structures*, 31(11), 2756-2765. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.07.003>
- Mozos, C. M., & Aparicio, A. C. (2011). Numerical and experimental study on the interaction cable structure during the failure of a stay in a cable stayed bridge. *Engineering Structures*, 33(8), 2330-2341. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.04.006>
- OpenAI. (2026). *ChatGPT*. <https://chat.openai.com>
- Pauli, V., Ralf, G., & Travis-E., O. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261-272. <https://doi.org/https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
- Perplexity AI. (2026). *Perplexity AI*. <https://www.perplexity.ai>
- Piqueras, V. Y. (2025, noviembre 17). Cómo se construyen los puentes por voladizos sucesivos: Ingeniería en el aire. *El blog de Víctor Yepes*. <https://victoryepes.webs.upv.es/2025/11/17/construccion-puentes-por-voladizos-sucesivos-ingenieria/>
- Python Software Foundation. (2026). *Python* (Versión 3.12) [Software]. <https://www.python.org>

Apéndices

Apéndice A. Resultado por dovelas para la obtención de los parámetros $m(x)$ e $I(x)$ requeridos por el método de sistemas generalizados de un grado de libertad.

Para resolver las ecuaciones del método G-SDOF era necesario obtener los valores del área e inercia en los puntos de cada dovela a lo largo del puente, lo más importante a destacar es que en el puente de estudio se consideraba un área constante en la primera dovela, dificultando realizar un buen ajuste polinómico para el área y la inercia, por lo tanto, lo que se hizo fue extrapolar la función de área e inercia y obtener ese valor inicial.

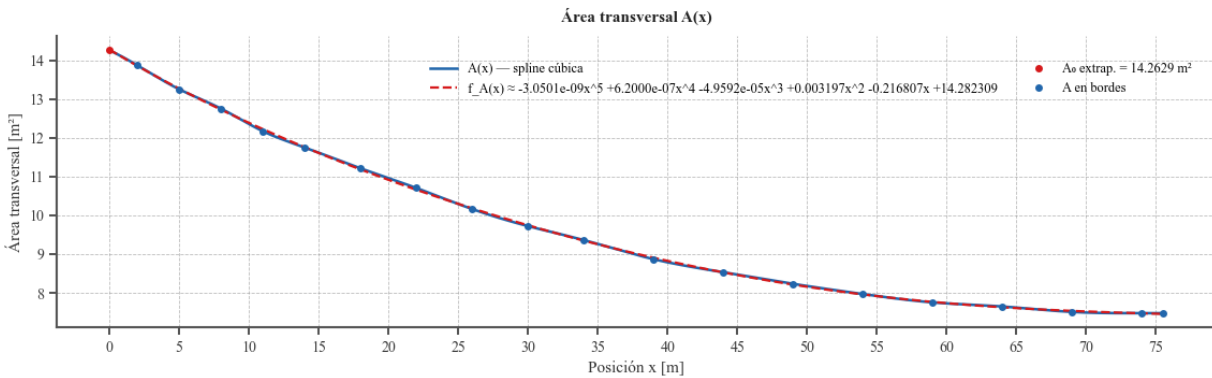
Tabla A1.

Resultados por dovelas.

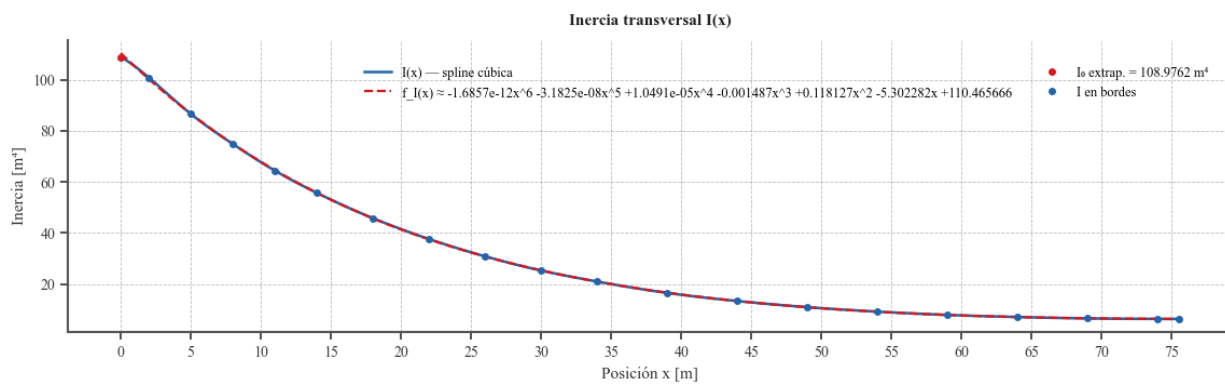
Dovela	L (m)	H centro (m)	A izq (m ²)	A der (m ²)	I izq (m ⁴)	I der (m ⁴)	Volumen (m ³)	Peso (tf)
Dovela 1	2	7	14.263	13.875	108.976	100.932	28.153	67.567
Dovela 2	3	6.64	13.875	13.257	100.932	86.633	40.674	97.618
Dovela 3	3	6.29	13.257	12.757	86.633	74.847	39.024	93.658
Dovela 4	3	5.96	12.757	12.173	74.847	64.383	37.387	89.729
Dovela 5	3	5.64	12.173	11.752	64.383	55.654	35.857	86.056
Dovela 6	4	5.24	11.752	11.214	55.654	45.751	45.932	110.236
Dovela 7	4	4.87	11.214	10.707	45.751	37.571	43.848	105.234
Dovela 8	4	4.53	10.707	10.163	37.571	30.807	41.731	100.154
Dovela 9	4	4.21	10.163	9.723	30.807	25.234	39.730	95.351
Dovela 10	4	3.92	9.723	9.362	25.234	20.916	38.173	91.614
Dovela 11	5	3.59	9.362	8.869	20.916	16.454	45.555	109.332
Dovela 12	5	3.31	8.869	8.531	16.454	13.287	43.447	104.273
Dovela 13	5	3.07	8.531	8.232	13.287	10.869	41.901	100.562
Dovela 14	5	2.87	8.232	7.968	10.869	9.122	40.487	97.168
Dovela 15	5	2.72	7.968	7.753	9.122	7.834	39.260	94.225
Dovela 16	5	2.6	7.753	7.647	7.834	7.021	38.492	92.380
Dovela 17	5	2.53	7.647	7.507	7.021	6.478	37.875	90.899
Dovela 18	5	2.5	7.507	7.475	6.478	6.284	37.412	89.789
Dovela 19	1.5	2.5	7.475	7.475	6.284	6.284	11.213	26.911

Figura A1.

Regresión polinómica de grado 5 para la ecuación de área de la viga.

**Figura A2.**

Regresión polinómica de grado 6 para la ecuación de inercia de la viga.



Apéndice B. Resultados de la función de axial de los avances estudiados.

Para tener en cuenta el efecto del postensado sobre la rigidez de la estructura se debió calcular una función de axial $N(x)$ con las fuerzas del postensado, se hizo una regresión polinómica que se ajusta con el factor R^2 para cada estado de avance

Figura B1.

Regresión polinómica de grado 5 para el avance del 25%.

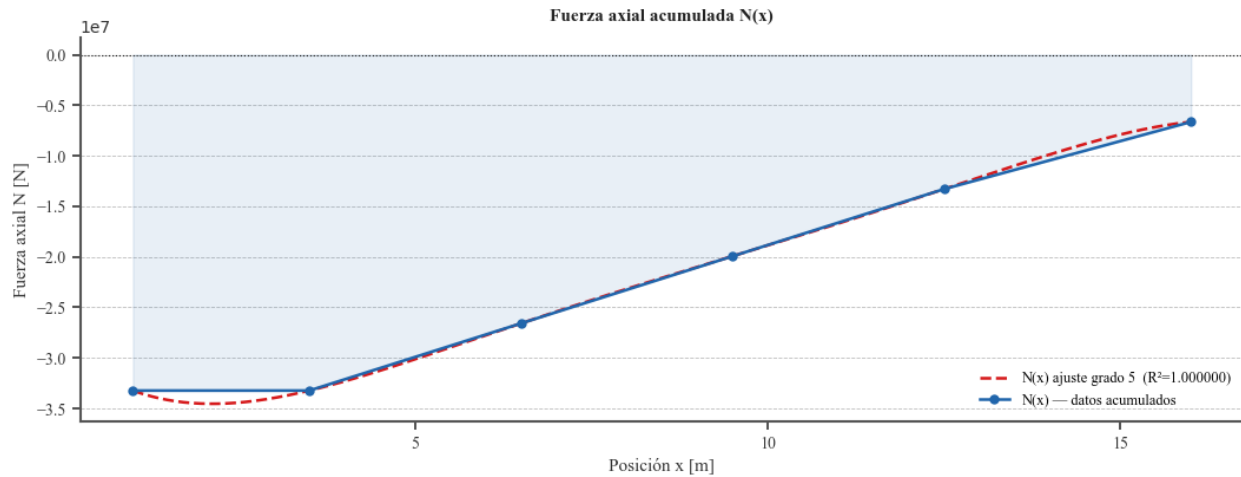


Figura B2.

Regresión polinómica de grado 6 para el avance del 50%.

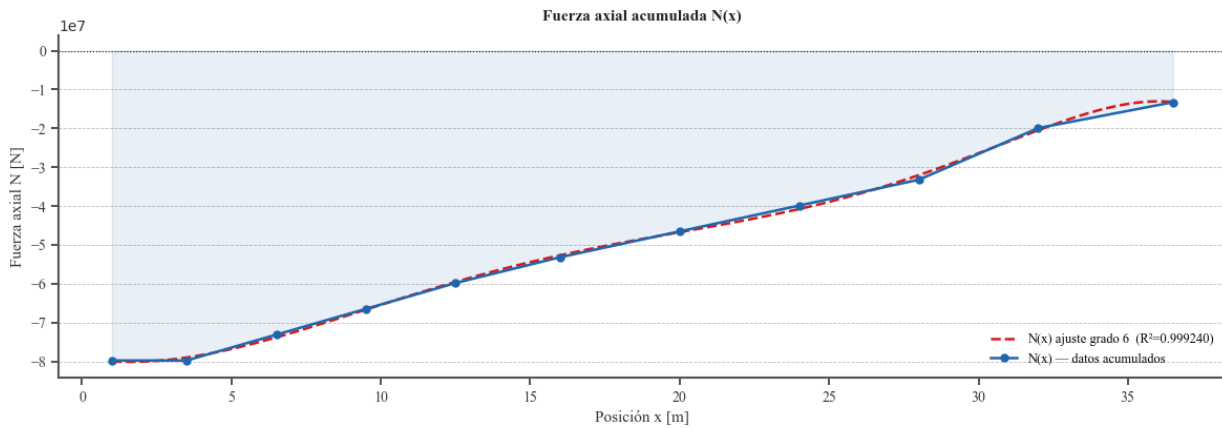


Figura B3.

Regresión polinómica de grado 6 para el avance del 75%.

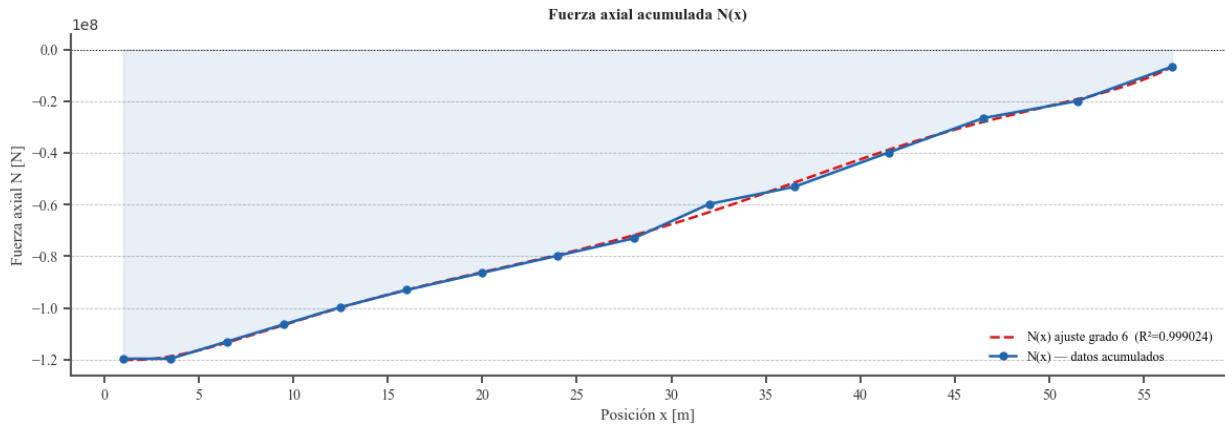
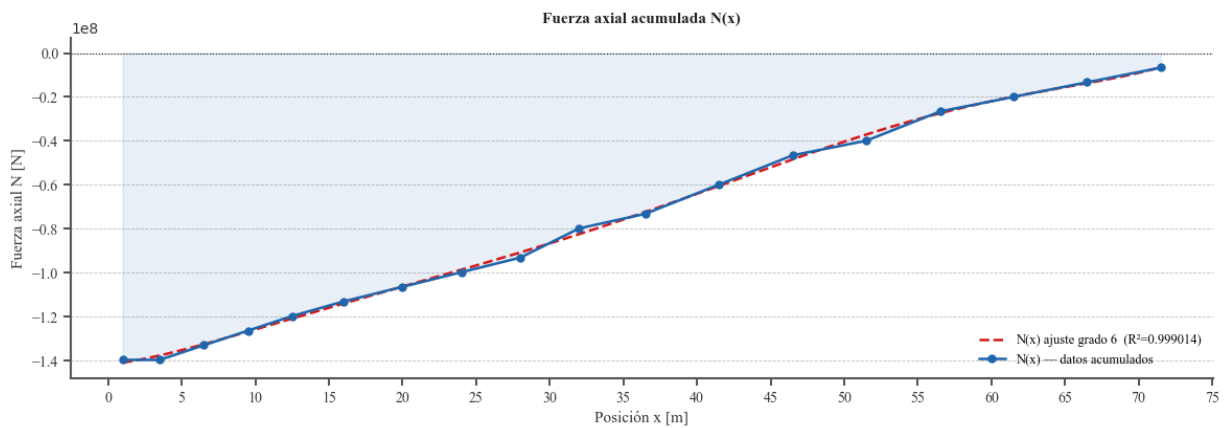


Figura B4.

Regresión polinómica de grado 6 para el avance del 100%.



Apéndice C. Resultados de los periodos y porcentajes de masa de los avances estudiados

Se presenta los resultados de obtenidos del software para los 50 primeros modos de vibración verticales, para la frecuencia, el periodo, el porcentaje de masa y la sumatoria total, pudiendo visualizar en qué modo está vibrando la estructura verticalmente.

Tabla C1.

Frecuencias, periodos y porcentajes de participación de masa en dirección vertical para el avance del 100%.

Mode No	Frequency (rad/sec)	Period (sec)	100%	
			TRAN-Z MASS(%)	SUM(%)
1	1.796	3.498	0	0
2	1.982	3.170	0	0
3	4.655	1.350	44.27	44.27
4	5.445	1.154	0	44.27
5	9.258	0.679	0	44.27
6	13.106	0.479	0	44.27
7	16.759	0.375	0	44.27
8	19.668	0.319	21.99	66.26
9	27.897	0.225	0	66.26
10	40.944	0.153	0	66.26
11	46.308	0.136	13.56	79.82
12	48.502	0.130	0	79.82
13	76.821	0.082	0	79.82
14	77.341	0.081	0	79.82
15	78.057	0.080	11.1	90.92
16	86.082	0.073	0.1	91.02
17	101.057	0.062	0	91.02
18	113.427	0.055	5.83	96.85
19	120.617	0.052	0	96.85
20	135.714	0.046	0	96.85
21	140.078	0.045	0	96.85
22	153.772	0.041	1.97	98.82
23	157.852	0.040	0	98.82
24	169.521	0.037	0	98.82
25	193.525	0.032	0	98.82
26	196.841	0.032	0	98.82
27	197.304	0.032	0.62	99.44
28	216.028	0.029	0	99.44
29	220.475	0.028	0	99.44
30	222.223	0.028	0.04	99.48
31	244.673	0.026	0.25	99.73
32	255.320	0.025	0	99.73
33	256.558	0.024	0	99.73
34	272.473	0.023	0	99.73
35	274.698	0.023	0	99.73
36	289.350	0.022	0.12	99.85

37	308.529	0.020	0	99.85
38	313.860	0.020	0	99.85
39	327.657	0.019	0	99.85
40	329.252	0.019	0.05	99.89
41	333.123	0.019	0	99.89
42	346.444	0.018	0.01	99.9
43	362.102	0.017	0	99.9
44	365.468	0.017	0	99.9
45	367.393	0.017	0.02	99.93
46	379.300	0.017	0	99.93
47	388.741	0.016	0	99.93
48	399.666	0.016	0.02	99.95
49	412.864	0.015	0	99.95
50	413.344	0.015	0	99.95

Tabla C2.

Frecuencias, periodos y porcentajes de participación de masa en dirección vertical para el avance del 75%.

Mode No	75%			
	Frequency (rad/sec)	Period (sec)	TRAN-Z MASS(%) SUM(%)	
1	2.382	2.637	0	0
2	2.711	2.317	0	0
3	6.557	0.958	0	0
4	7.644	0.822	47.01	47.01
5	11.986	0.524	0	47.01
6	18.176	0.346	0	47.01
7	25.815	0.243	0	47.01
8	31.916	0.197	24.28	71.29
9	41.903	0.150	0	71.29
10	66.778	0.094	0	71.29
11	69.811	0.090	0	71.29
12	70.391	0.089	16.62	87.91
13	103.165	0.061	2.92	90.83
14	109.188	0.058	0	90.83
15	115.012	0.055	5.89	96.72
16	121.345	0.052	0	96.72

17	138.037	0.046	0	96.72
18	163.311	0.038	2.3	99.02
19	171.196	0.037	0	99.02
20	183.445	0.034	0	99.02
21	186.627	0.034	0	99.02
22	190.625	0.033	0	99.02
23	214.406	0.029	0	99.02
24	221.152	0.028	0.59	99.61
25	245.674	0.026	0	99.61
26	257.028	0.024	0	99.61
27	269.446	0.023	0	99.61
28	278.745	0.023	0	99.61
29	283.238	0.022	0.22	99.83
30	290.259	0.022	0	99.83
31	324.090	0.019	0	99.83
32	327.131	0.019	0	99.83
33	336.907	0.019	0.07	99.9
34	343.686	0.018	0	99.9
35	359.993	0.017	0	99.9
36	385.987	0.016	0	99.9
37	387.032	0.016	0	99.9
38	390.973	0.016	0.03	99.93
39	400.727	0.016	0	99.93
40	412.545	0.015	0.01	99.94
41	421.381	0.015	0	99.94
42	430.879	0.015	0.02	99.96
43	444.834	0.014	0	99.96
44	455.379	0.014	0	99.96
45	474.149	0.013	0	99.96
46	488.311	0.013	0	99.96
47	491.383	0.013	0	99.96
48	496.584	0.013	0.02	99.98
49	496.738	0.013	0	99.98
50	534.459	0.012	0	99.98

Tabla C3.

Frecuencias, periodos y porcentajes de participación de masa en dirección vertical para el avance del 50%.

Mode No	Frequency (rad/sec)	Period (sec)	50%	
			TRAN-Z MASS(%)	SUM(%)
1	3.710	1.694	0	0
2	4.755	1.321	0	0
3	8.198	0.766	0	0
4	17.094	0.368	53.07	53.07
5	17.097	0.368	0	53.08
6	35.430	0.177	0	53.08
7	58.608	0.107	0	53.08
8	65.117	0.096	32.87	85.95
9	83.458	0.075	0	85.95
10	123.762	0.051	11.8	97.75
11	125.529	0.050	0	97.75
12	145.356	0.043	0	97.75
13	153.710	0.041	0.07	97.82
14	190.987	0.033	0	97.82
15	192.480	0.033	0	97.82
16	206.756	0.030	1.72	99.53
17	225.870	0.028	0	99.53
18	230.737	0.027	0	99.53
19	261.432	0.024	0	99.53
20	295.661	0.021	0	99.53
21	299.471	0.021	0.31	99.84
22	321.478	0.020	0	99.84
23	326.642	0.019	0	99.84
24	377.256	0.017	0.02	99.87
25	381.960	0.016	0	99.87
26	385.109	0.016	0	99.87
27	397.545	0.016	0.07	99.94
28	405.526	0.015	0	99.94
29	462.432	0.014	0	99.94
30	464.836	0.014	0	99.94
31	476.883	0.013	0	99.94
32	487.627	0.013	0	99.94
33	489.269	0.013	0.03	99.97

34	539.990	0.012	0	99.97
35	548.606	0.011	0	99.97
36	549.746	0.011	0	99.97
37	554.113	0.011	0.01	99.98
38	566.083	0.011	0.01	99.99
39	589.191	0.011	0	99.99
40	602.909	0.010	0	99.99
41	622.038	0.010	0	99.99
42	630.848	0.010	0	99.99
43	631.289	0.010	0	99.99
44	634.221	0.010	0	99.99
45	635.635	0.010	0	99.99
46	695.678	0.009	0	99.99
47	701.387	0.009	0	99.99
48	707.817	0.009	0	99.99
49	722.506	0.009	0	99.99
50	732.677	0.009	0	100

Tabla C4.

Frecuencias, periodos y porcentajes de participación de masa en dirección vertical para el avance del 25%.

Mode No	Frequency (rad/sec)	Period (sec)	25%	
			TRAN-Z MASS(%)	SUM(%)
1	6.839	0.919	0	0
2	11.213	0.560	0	0
3	13.832	0.454	0	0
4	34.590	0.182	0	0
5	55.010	0.114	75.63	75.63
6	116.417	0.054	0	75.63
7	135.775	0.046	23.21	98.84
8	195.359	0.032	0	98.84
9	197.490	0.032	0	98.84
10	241.225	0.026	0	98.84
11	300.053	0.021	0.38	99.23
12	301.322	0.021	0	99.23
13	315.416	0.020	0.67	99.89

14	317.261	0.020	0	99.89
15	432.824	0.015	0	99.89
16	458.204	0.014	0	99.89
17	466.238	0.013	0	99.89
18	516.329	0.012	0.09	99.98
19	524.360	0.012	0	99.98
20	578.565	0.011	0	99.98
21	599.650	0.010	0	99.98
22	659.952	0.010	0.01	99.98
23	673.242	0.009	0	99.98
24	698.973	0.009	0	99.98
25	718.071	0.009	0.01	99.99
26	720.309	0.009	0	99.99
27	760.302	0.008	0	99.99
28	775.484	0.008	0	99.99
29	782.124	0.008	0	99.99
30	860.089	0.007	0	99.99
31	884.900	0.007	0	100
32	953.863	0.007	0	100
33	970.930	0.006	0	100
34	1028.997	0.006	0	100
35	1040.897	0.006	0	100
36	1173.074	0.005	0	100
37	1213.889	0.005	0	100
38	1375.699	0.005	0	100
39	1411.474	0.004	0	100
40	1500.195	0.004	0	100
41	1559.292	0.004	0	100

Apéndice D. Resultados de los periodos de ambos métodos sin considerar el efecto del postensado

En la siguiente tabla se presentan los valores obtenidos del periodo para ambos métodos y sus diferencias, sin considerar el efecto del postensado. Esta tabla no se presentó en los resultados, ya que muestra peores diferencias respecto a la variante en la que sí se considera axial en ambos métodos.

Tabla D1.

Diferencias en los periodos de vibración entre el análisis multimodal y el método simplificado sin incluir axial $N(x)$.

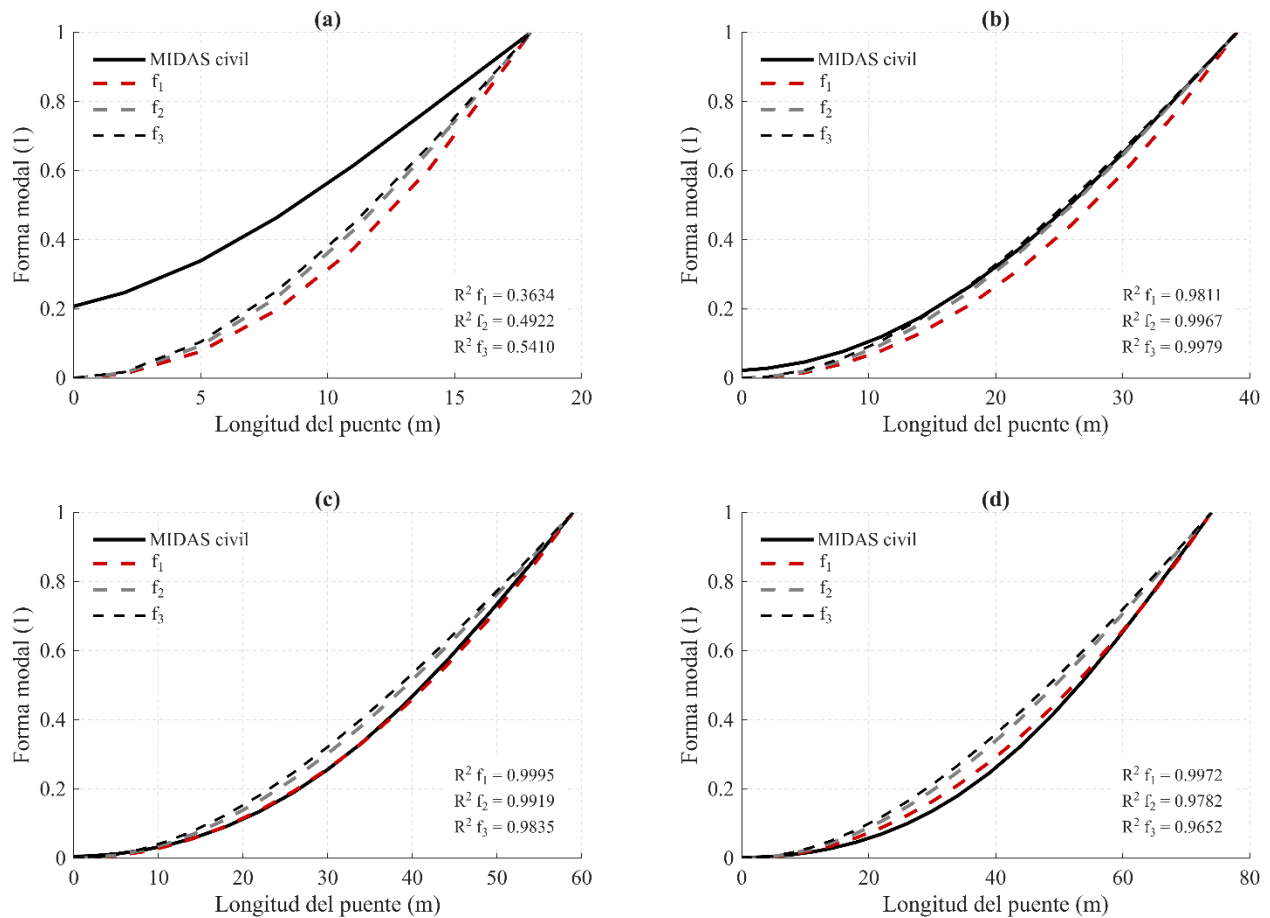
Avance	Análisis multimodal (Midas civil) T (s)	Análisis simplificado (G-SDOF)					
		f1		f2		f3	
		T (s)	Dif. (%)	T (s)	Dif. (%)	T (s)	Dif. (%)
25%	0.114	0.071	-37.78%	0.078	-31.99%	0.078	-32.09%
50%	0.368	0.327	-10.98%	0.335	-8.75%	0.329	-10.48%
75%	0.822	0.778	-5.34%	0.764	-7.11%	0.737	-10.28%
100%	1.350	1.270	-5.91%	1.222	-9.50%	1.168	-13.48%

Apéndice E. Formas modales y funciones de forma graficadas

La siguiente figura presenta una comparación visual de las formas modales normalizadas del primer modo de vibración vertical, obtenidas del modelo computacional, con las tres funciones de forma empleadas en el análisis simplificado para cada avance del voladizo

Figura E1.

Formas modales del primer modo de vibración vertical para cada avance del voladizo: (a) 25%, (b) 50%, (c) 75%, (d) 100%.



Apéndice F. Resultados de las historias de desplazamientos obtenidas por ambos métodos en cada estado de avance considerado

Se presentan gráficamente las historias de desplazamientos considerando los valores obtenidos por el software, considerando con momento y sin momento externo. También se presentan gráficamente dichas historias de los valores obtenidos mediante el método simplificado para las tres funciones de forma consideradas, teniendo o no en cuenta el efecto axial en la formulación. Se presenta una gráfica para cada estado de avance de todos los casos mencionados; aparte, se visualiza en cada gráfica el desplazamiento máximo y el instante de tiempo en que ocurre.

Figura F1.

Historia de desplazamiento obtenida mediante Midas Civil, con (derecha) y sin (izquierda) considerar el efecto del momento dinámico para un avance del 25%.

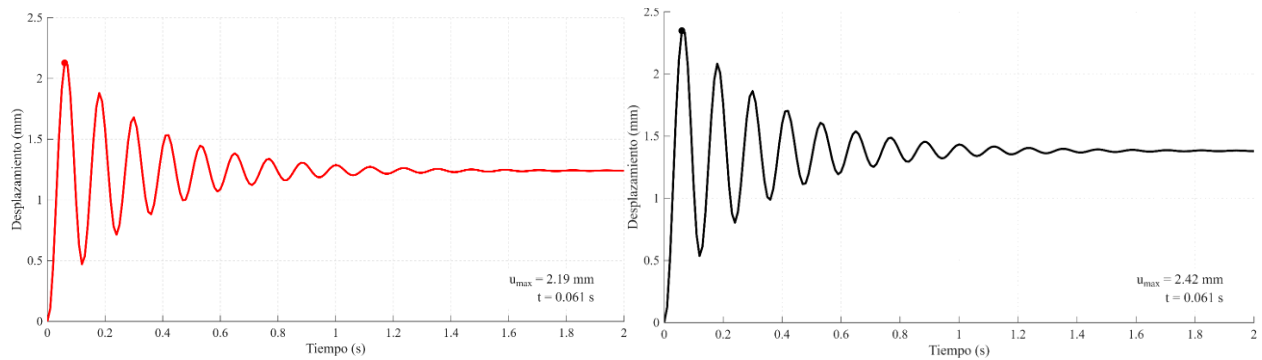


Figura F2.

Historia de desplazamiento obtenida mediante Midas Civil, con (derecha) y sin (izquierda) considerar el efecto del momento dinámico para un avance del 50%.

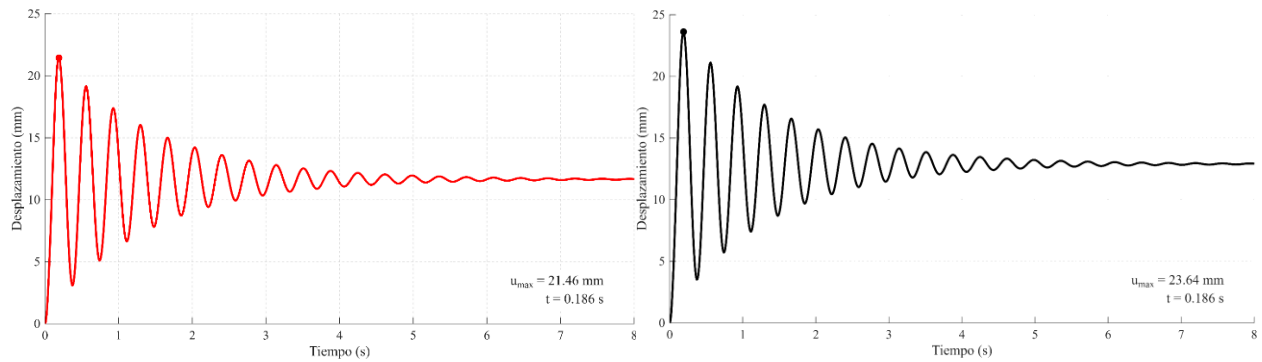


Figura F3.

Historia de desplazamiento obtenida mediante Midas Civil, con (derecha) y sin (izquierda) considerar el efecto del momento dinámico para un avance del 75%.

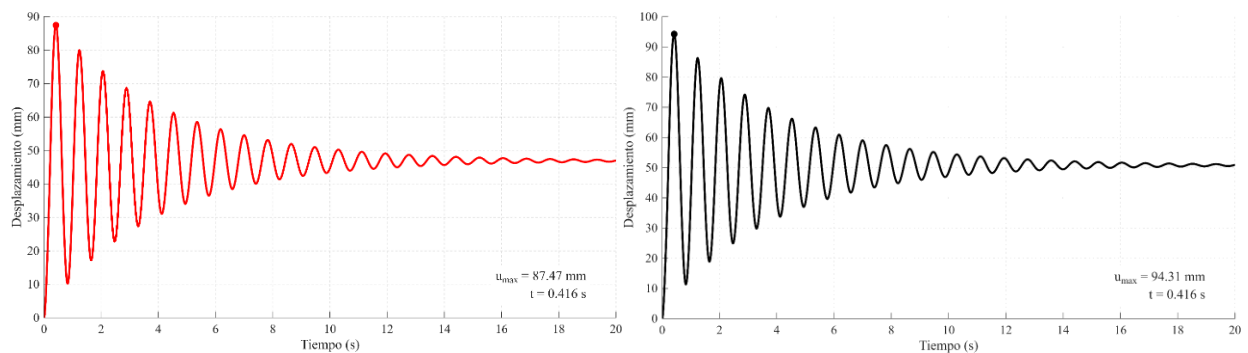
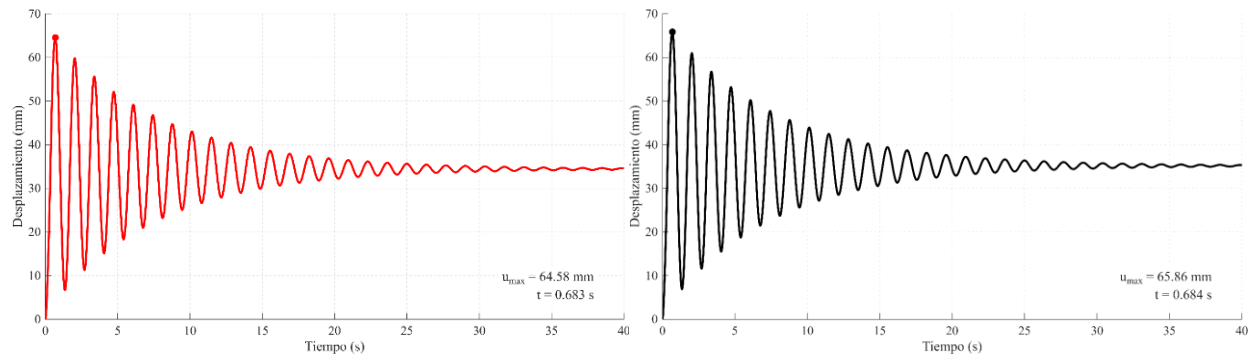
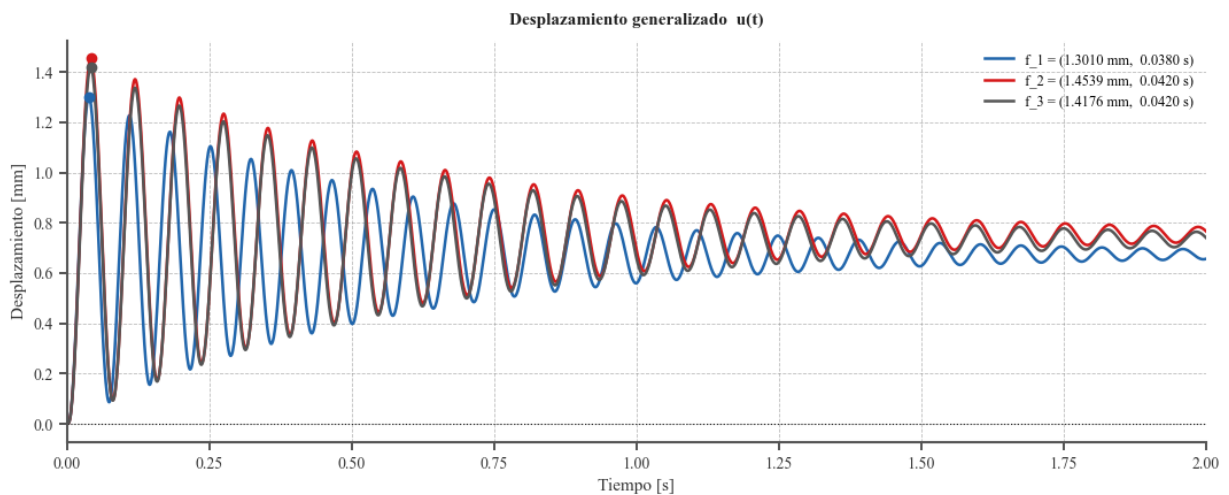


Figura F4.

Historia de desplazamiento obtenida mediante Midas Civil, con (derecha) y sin (izquierda) considerar el efecto del momento dinámico para un avance del 100%.

**Figura F5.**

Historia de desplazamiento obtenida mediante el método simplificado, con (arriba) y sin (abajo) considerar el efecto del axial para un avance del 25%.



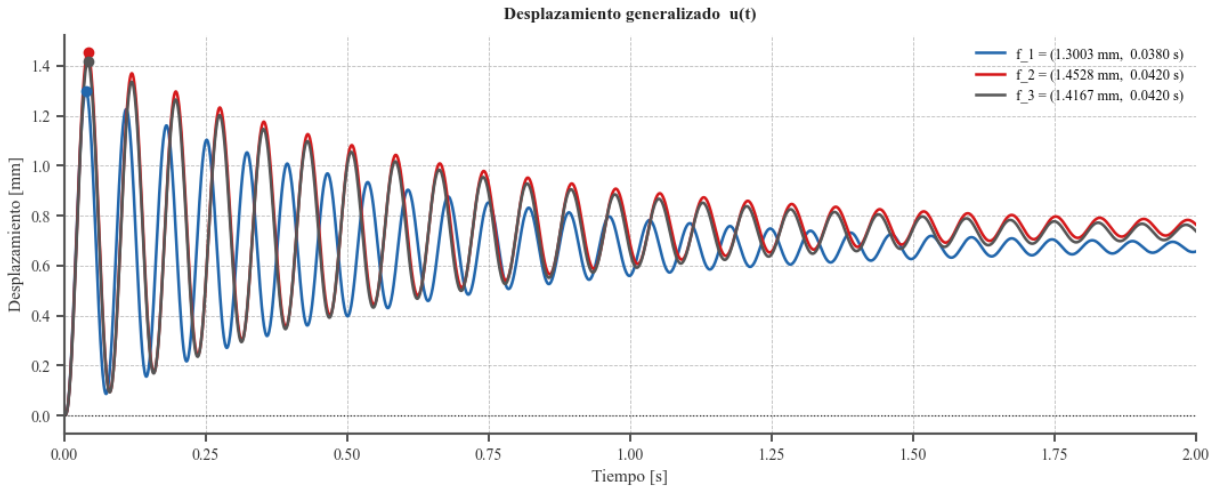
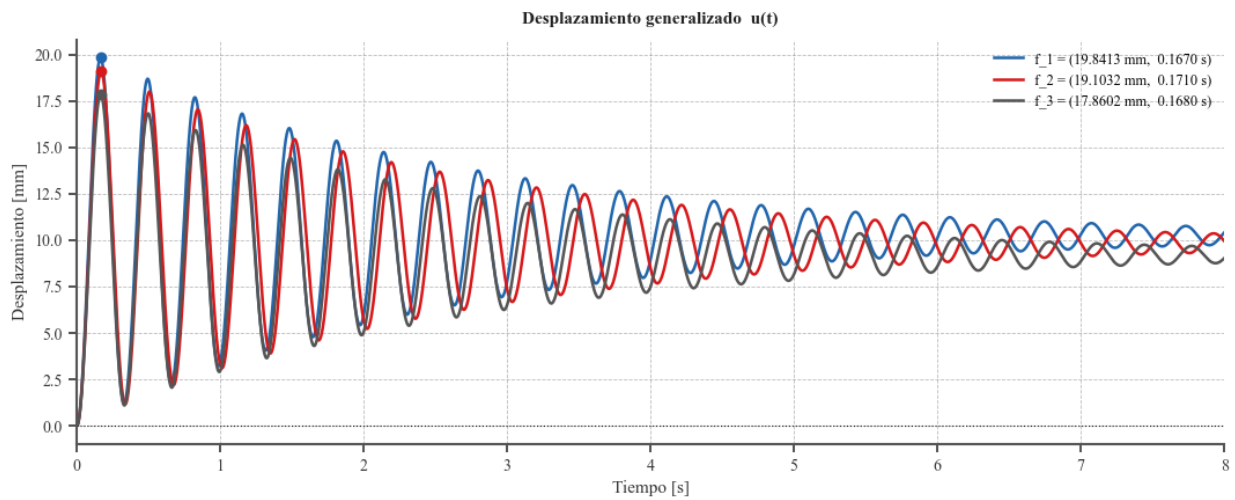


Figura F6.

Historia de desplazamiento obtenida mediante el método simplificado, con (arriba) y sin (abajo) considerar el efecto del axial para un avance del 50%.



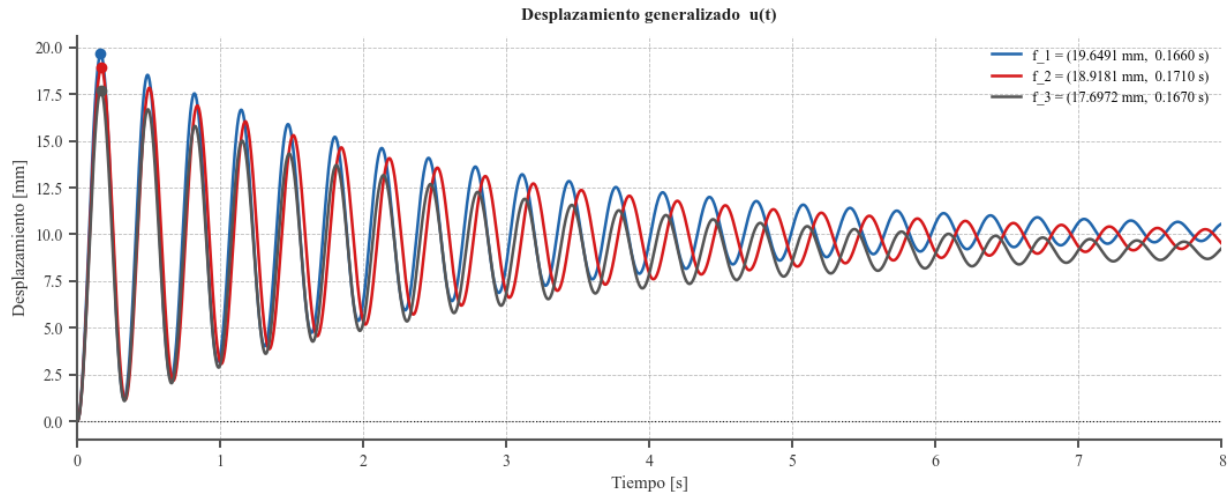
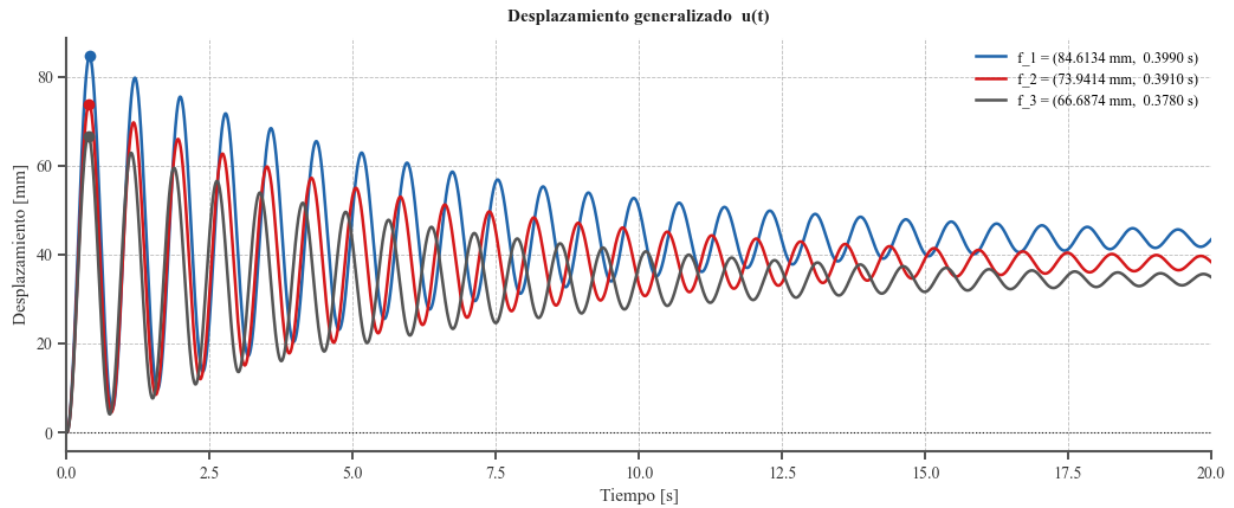


Figura F7.

Historia de desplazamiento obtenida mediante el método simplificado, con (arriba) y sin (abajo) considerar el efecto del axial para un avance del 75%.



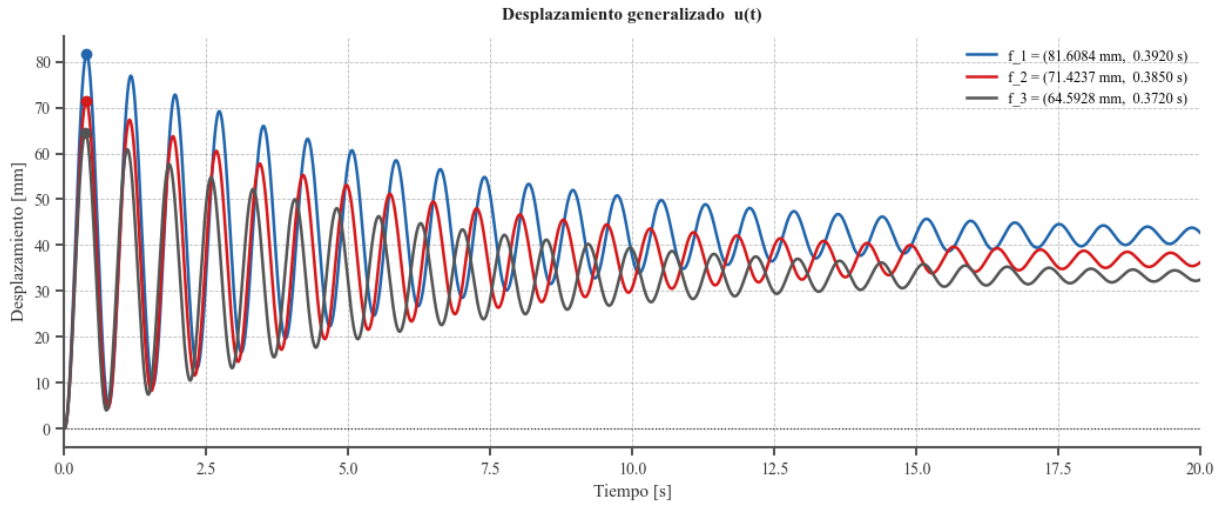
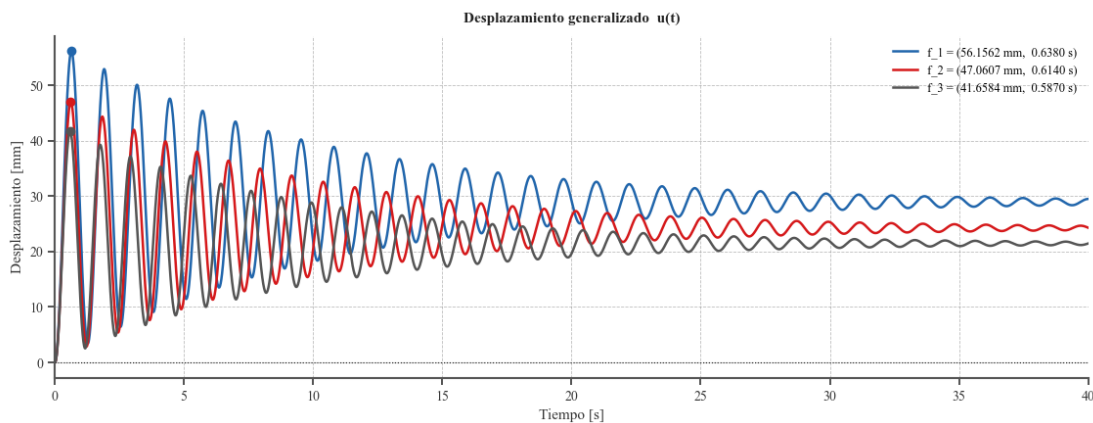
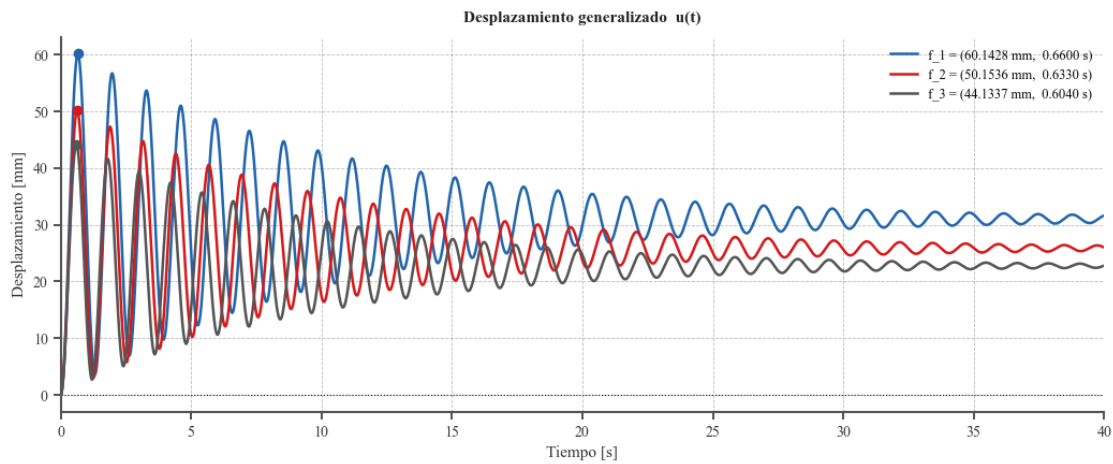


Figura F8.

Historia de desplazamiento obtenida mediante el método simplificado, con (arriba) y sin (abajo) considerar el efecto del axial para un avance del 100%.



Apéndice G. Diferencia obtenida para los desplazamientos dinámicos máximos.

Los porcentajes de diferencia de los desplazamientos dinámicos máximos obtenidos al comparar ambos métodos, en los casos del método simplificado con ambos casos de los valores obtenidos del software para todos los estados de avance considerados.

Tabla G1.

Porcentajes de diferencia del desplazamiento dinámico máximo entre el método simplificado y el análisis multimodal, sin considerar el efecto del momento externo dinámico.

% DIFERENCIA						
Avance	Simplificado con Axial			Simplificado sin Axial		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
25%	-40.5%	-33.5%	-35.2%	-40.5%	-33.6%	-35.2%
50%	-7.6%	-11.0%	-16.8%	-8.5%	-11.9%	-17.6%
75%	-3.3%	-15.5%	-23.8%	-6.7%	-18.3%	-26.2%
100%	-6.9%	-22.3%	-31.7%	-13.0%	-27.1%	-35.5%

Tabla G2.

Porcentajes de diferencia del desplazamiento dinámico máximo entre el método simplificado y el análisis multimodal, considerando el efecto del momento externo dinámico.

% DIFERENCIA						
Avance	Simplificado con Axial			Simplificado sin Axial		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
25%	-46.2%	-39.9%	-41.4%	-46.2%	-39.9%	-41.4%
50%	-16.1%	-19.2%	-24.5%	-16.9%	-20.0%	-25.2%
75%	-10.3%	-21.6%	-29.3%	-13.5%	-24.3%	-31.5%
100%	-8.7%	-23.9%	-33.0%	-14.7%	-28.5%	-36.7%

Apéndice H. Factor de amplificación dinámico para los estados de avance considerados

Por último, se presentan los desplazamientos dinámicos y estáticos (ambos sin tener en cuenta el momento dinámico externo) obtenidos del software y los del método simplificado

considerando la primera función de forma, así como el factor de amplificación dinámico resultante de ambos, para todos los estados de avance considerados.

Tabla H1.

Desplazamientos dinámicos, estáticos y factor de amplificación dinámico para cada estado de avance obtenidos del software sin tener en cuenta el momento dinámico externo.

Avance	δ Dinámico (mm)	δ Estático (mm)	FAD
25%	2.42	1.38	1.752
50%	23.64	12.9	1.833
75%	94.31	50.84	1.86
100%	65.86	35.18	1.872

Tabla H2.

Desplazamientos dinámicos, estáticos y factor de amplificación dinámico para cada estado de avance obtenidos del método simplificado f_1 sin tener en cuenta el momento dinámico externo.

Avance	δ Dinámico (mm)	δ Estático (mm)	FAD
25%	1.30	0.67	1.928
50%	19.84	10.23	1.939
75%	84.61	43.63	1.939
100%	60.14	31.00	1.940

Figura H3.

Comparación del factor de amplificación dinámico para ambos casos considerados, evaluados en cada estado de avance.

