Teoremas de Ramsey

Camilo Andrés Núñez Rubiano

Trabajo de Grado para optar al título de Matemático

Director

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

Doctor en Matematicas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

Dedicado a la memoria de mi abuelo Marco Aurelio Núñez.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

$\star$ A mis padres por apoyarme y permitirme culminar mis estudios de pregrado.

$\star$ Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su paciencia, compromiso con este y por todos su aportes en el transcurso de la carrera.

$\star$ A mi tía Martha Liliana por sus consejos y apoyo absoluto.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Resumen

Título: Teoremas de Ramsey *

Autor: Camilo Andrés Núñez Rubiano **

Palabras Clave: Conjunto monocromático, coloración, grafo.

Descripción: Se demuestran los teoremas clásicos de Ramsey y dos generalizaciones de estos conocidas como el teorema de Nash-Williams y el teorema de Galvin.

Sean S un conjunto y p, r enteros positivos. Una coloración es una función $c : [S]^p \to \{1, \ldots, r\}$, donde $[S]^p$ representa el conjunto de los subconjuntos de p elementos de S. Decimos que un conjunto $A \subseteq S$ es monocromático o homogéneo si se tiene que c es constante en $[A]^p$. Cuando S es infinito, el teorema infinito de Ramsey nos dice que para toda coloración de $[S]^p$ existe un conjunto infinito $A \subseteq S$ tal que A es monocromático. El teorema finito de Ramsey es un resultado similar para conjuntos finitos, y se prueba a partir del teorema infinito de Ramsey. Para la explicación del teorema finito de Ramsey se muestra la relación que existe entre las coloraciones de $[S]^2$ y las coloraciones de los segmentos de un grafo completo con n vértices, donde $|S| = n$.

Probaremos que los teoremas de Galvin y Nash-Williams son generalizaciones del teorema infinito de Ramsey, es decir, que se pueden probar estos teoremas a partir del teorema infinito de Ramsey. Los teoremas de Nash-Williams y Galvin son resultados acerca de los conjuntos monocromáticos de una familia arbitraria $\mathscr{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para el teorema de Galvin, la definición de conjunto monocromático se altera de manera abrupta, pues esta no va a depender de ninguna coloración de $\mathscr{F}$, solo de la familia $\mathscr{F}$. Por lo tanto en este caso tiene más sentido utilizar el término homogéneo.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas

Abstract

Title: Ramsey theorems *

Author: Camilo Andres Nunez Rubiano **

Keywords: Monochromatic set, coloring, combinatorial graph.

Description: We show the Ramsey theorems and two generalizations of these, the Nash-Williams theorem and Galvin's theorem.

Let S be a set and p, r positive integers. A coloring is a function $c : [S]^p \to \{1, \ldots, r\}$, where $[S]^p$ represents the set of subsets of S with p elements. We say that a set $A \subseteq S$ is monochromatic or homogeneous if c is constant in $[A]^p$. When S is infinite, the infinite Ramsey theorem states that for every coloring of $[S]^p$, there exists an infinite subset $A \subseteq S$ such that A is monochromatic. The finite Ramsey theorem is a similar result for finite sets, and is proven using the infinite Ramsey theorem. To illustrate the finite Ramsey theorem, we show the relationship between the colorings of $[S]^2$ and the colorings of the segments of the complete graph with n vertex, where $|S| = n$.

We will show that the Nash-Williams and Galvin's theorems are in fact generalizations of the infinite Ramsey theorem. In other words, it is possible to prove the infinite Ramsey theorem by assuming that the Nash-Williams or the Galvin's theorem is true. The Nash-Williams and Galvin's theorems are results about the monochromatic sets of a given family $\mathscr{F}$ of finite subsets of $\mathbb{N}$. For the Galvin's theorem the definition of monochromatic will change abruptly since it will no longer depend on a coloring of $\mathscr{F}$, but only on $\mathscr{F}$. Thus, in this case the term homogenous makes more sense.

---

* Bachelor Thesis

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas.

Introducción

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) fue un matemático, economista y filósofo inglés. Ramsey se caracterizó por un excelente desempeño académico durante toda su vida. En 1926 fue nombrado director de estudios en matemáticas en King's college. Su primer gran trabajo en matemáticas fue el artículo *The Foundations of Mathematics* publicado en 1925 y posteriormente publicó el artículo *Mathematical logic* en 1926. Lamentablemente sufrió un ataque de ictericia a los 26 años y murió debido a complicaciones postoperatorias [O'Connor and Robertson, 2003].

Su publicación matemática más conocida fue el artículo *On a problem of formal logic* publicado en 1930 [Ramsey, 1930]. Los teoremas que actualmente llevan su nombre y son los argumentos base de la actual teoría de Ramsey, fueron enunciados y demostrados por primera vez en este artículo. El objetivo principal de este artículo no era el de probar estos teoremas, pues ellos fueron tan solo una herramienta para probar un caso especial del *problema de la decisión (Entscheidungsproblem)*. El problema general de la decisión consistía encontrar un método mecánico, es decir, un algoritmo para decidir si una proposición matemática arbitraria puede ser probada dentro de una teoría o no. En 1936, Alonzo Church y Alan Turing probaron de manera independiente que tal algoritmo no existe dando así una respuesta negativa a este problema [O'Connor and Robertson, 2003].

El principio infinito del palomar, a pesar de tener un enunciado tan simple, es de naturaleza similar al teorema infinito de Ramsey. Este principio nos dice que si dividimos un conjunto infinito en un número finito de subconjuntos, al menos uno de los subconjuntos es infinito. ¿Qué sucedería si dividimos las parejas (sin importar el orden) de un conjunto infinito, por ejemplo $\mathbb{N}$, en un número finito de subconjuntos? El teorema infinito de Ramsey nos dice que existe un subconjunto infinito H de $\mathbb{N}$ tal que todas las parejas de elementos de H están en una sola parte de la partición. De hecho, el resultado es más general, como veremos a continuación.

Cuando tenemos una partición, podemos asociar a cada parte de la partición un color, y de esta manera pensar en una partición como una ***coloración***. En este orden de ideas, llamamos a los conjuntos que quedan en una sola parte de la coloración ***monocromáticos***, por ejemplo, en la partición de $\{\{n,m\} : n,m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$ dada por

$$S_1 = \{\{n,m\} : n+m \text{ es par}\}, S_2 = \{\{n,m\} : n+m \text{ es impar}\},$$

el conjunto de las parejas de números pares es monocromático con color 1. En este caso decimos que el conjunto de los pares es monocromático.

Lo que nos dice el teorema de Ramsey infinito es que para toda coloración del conjunto $\{s \subset \mathbb{N} : |s| = k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}^+$ fijo, siempre existe un subconjunto infinito H de $\mathbb{N}$ monocromático.

No es cierto que para toda partición del conjunto conformado por los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, que denotaremos con $[\mathbb{N}]^{<\infty}$, exista un subconjunto de $\mathbb{N}$ infinito que sea monocromático. Por ejemplo, para la coloración de $[\mathbb{N}^{<\infty}]$ dada por

$$S_1 = \{s \subset \mathbb{N} : |s| \text{ es par }\} \quad S_2 = \{s \subset \mathbb{N} : |s| \text{ es impar }\}$$

no existen subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ monocromáticos, pues todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ poseen subconjuntos de cardinalidad par e impar. Sin embargo, sí podemos generalizar el teorema de Ramsey infinito a ciertas familias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Por ejemplo, trabajaremos con $\subseteq$-anticadenas, es decir, familias de conjuntos finitos que sean dos a dos incomparables respecto a $\subseteq$. Una de esas generalizaciones es el teorema de Nash-Williams, el cual, entre otras cosas, dice que para toda coloración de una $\subseteq$-anticadena, existe un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ monocromático. Otra generalización que estudiaremos es el teorema de Galvin, el cual generaliza el teorema de Nash-Williams a toda familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, pero debilita la conclusión, pues solo garantiza la existencia de un subconjunto monocromático de un tipo especial como lo veremos en la sección 3.3.

1. Objetivos

Objetivo general

Estudiar los teoremas de Ramsey clásicos y algunas de sus generalizaciones.

Objetivos específicos

Presentar una demostración completa de los teoremas de Ramsey.

Presentar una demostración completa de los teoremas de Nash-Williams y Galvin, los cuales son una generalización del teorema de Ramsey infinito.

2. Teoremas de Ramsey

2.1. Introducción

En esta sección enunciaremos y demostraremos de manera sencilla los dos teoremas principales de la teoría de Ramsey. Dado que no suelen haber muchas oportunidades para entender mediante gráficas los problemas relacionados con la teoría de Ramsey, trataremos de hacer gráficas en los casos que sea posible. También daremos algunos ejemplos y contraejemplos con el fin de hacer más comprensibles los teoremas y definiciones.

Enunciaremos primero el teorema de Ramsey infinito y luego el finito, esto debido a que una demostración clásica del teorema de Ramsey finito utiliza la versión infinita de este teorema. Sin embargo, hay que tener presente que existen demostraciones del teorema finito de Ramsey que no requieren de la manipulación de conjuntos infinitos, ver [Katz and Reimann, 2018].

La teoría es presentada desde el comienzo, es decir, no se utilizarán resultados que no hayan sido establecidos previamente en el texto.

Denotaremos el conjunto $\{0,1,2,3,\dots\}$ por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^+$ denotará el conjunto de los enteros positivos $\{1,2,3,\dots\}$. Dado $n \in \mathbb{N}^+$, $[n]$ denotará el conjunto $\{1,\dots,n\}$.

2.2. Teorema de Ramsey infinito

Definición 2.2.1. Dado un conjunto S y $p \in \mathbb{N}^+$, $[S]^p$ denotará el conjunto de los subconjuntos de S de p elementos, también llamados p-subconjuntos de S.

Definición 2.2.2. Dados $p, r \in \mathbb{N}^+$ y un conjunto S no vacío, una ***r*-coloración** o una ***coloración**

en** r **colores de $[S]^p$ es una función $c : [S]^p \to \{1,\dots,r\}$.

Definición 2.2.3. Sean un conjunto S, $p \in \mathbb{N}^+$ y $c : [S]^p \to \{1,\dots,r\}$ una coloración de $[S]^p$. Un subconjunto $A \subseteq S$ se denomina ***monocromático*** o ***homogéneo*** si existe $i \in \{1,\dots,r\}$ tal que $c([A]^p) = \{i\}$.

Escribiremos $c : [S]^p \to r$, en lugar de $c : [S]^p \to \{1,\dots,r\}$ cuando sea conveniente.

Definición 2.2.4. Dado un conjunto no vacío S, una ***partición*** finita de S en n conjuntos o una n***-partición***, es una colección de subconjuntos de S, $S_1,...,S_n$ tal que $S_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, la unión de estos subconjuntos es S, y la intersección dos a dos de estos es vacía.

Note que una partición y una coloración son esencialmente lo mismo. Esto se debe a que toda coloración $c : S \to r$ induce la partición $c^{-1}(1),\dots,c^{-1}(r)$. Recíprocamente, toda partición $S_1,\dots,S_r$ induce una coloración dada por $c(s) = i$ tal que $s \in S_i$.

Teorema 2.2.5. (Versión infinita del principio del palomar) Sean Z un conjunto infinito y $r \in \mathbb{N}^+$. Para toda partición de Z, $Z_1 \cup \cdots \cup Z_r$, existe $i \in \{1,\dots,r\}$ tal que Z_i es infinito.

Equivalentemente, dados un conjunto infinito Z, $r \in \mathbb{N}^+$ y una coloración $c : [Z]^1 \to r$, existe $M \subseteq Z$ infinito tal que M es monocromático.

La demostración del siguiente teorema fue obtenida de [Katz and Reimann, 2018].

Teorema 2.2.6. Teorema infinito de Ramsey(1928) Sea Z un conjunto infinito. Para todo $p \geq 1$ y $r \geq 1$, toda coloración de $[Z]^p$ en r colores tiene un conjunto monocromático infinito.

Demostración. Sea $r \geq 1$. Haremos la demostración por inducción en p. Para $p = 1$, la afirmación es la versión infinita del principio del palomar.

A continuación probaremos el caso $p = 2$, sin embargo, este caso solo servirá como guía para la prueba general, pues no hace falta usarlo en la demostración del teorema. En caso de que el lector lo desee, puede proceder directamente a la prueba del teorema.

Sea $c : [Z]^2 \to r$. Para usar la hipótesis de inducción, fijamos $z_0 \in Z$ y definimos una coloración c_0 de los 1-subconjuntos de $Z \setminus \{z_0\}$ de la siguiente manera:

$$\text{Para } \{b\} \in [Z \setminus \{z_0\}]^1, \text{ defina } c_0(\{b\}) := c(\{z_0, b\}).$$

Por el principio del palomar, para la coloración c_0 existe un conjunto infinito homogéneo $Z_1 \subseteq Z \setminus \{z_0\}$, lo que significa que todos los 2-subconjuntos de Z, $\{z_0, b\}$ con $b \in Z_1$, tienen el mismo color.

Escogemos un elemento arbitrario $z_1 \in Z_1$. Ahora definimos una coloración de los 1-subconjuntos de $Z_1 \setminus \{z_1\}$ de manera análoga a la coloración de $Z \setminus \{z_0\}$:

$$\text{Para } \{b\} \in [Z_1 \setminus \{z_1\}]^1, \text{ asigne } c_1(\{b_1\}) := c(\{z_1, b\}).$$

De nuevo, la hipótesis de inducción nos dice que para c_1 existe un subconjunto homogéneo $Z_2 \subseteq Z_1 \setminus \{z_1\}$.

Podemos continuar esta construcción recursivamente y obtener una sucesión decreciente de conjuntos infinitos

$$Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots$$

y una sucesión $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de naturales tales que:

(i) $z_i \in Z_i$ es arbitrario.

(ii) Z_{i+1} es homogéneo para la coloración c_i de los 1-subconjuntos de $Z_i \setminus \{z_i\}$.

Así, todos los 2-subconjuntos de $\{z_i\} \cup Z_{i+1}$ que contienen a z_i tienen el mismo c-color.

En virtud de nuestra construcción, la sucesión $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de que para todo $i \geq 0$,

$$\{z_{i+1}, z_{i+2}, \dots\}$$

es homogéneo para c_i (por ser un subconjunto de Z_{i+1}). Denotaremos con k_i el color (en $\{1,\dots,r\}$) para el cual el conjunto Z_{i+1} es monocromático en la coloración c_i.

Ahora, usando el principio infinito del palomar, tenemos que existe un conjunto infinito A y un color k^* tal que $k_i = k^*$ para todo $i \in A$. Sea $H = \{z_i : i \in A\}$. Afirmamos que H es homogéneo para c.

En efecto, sea $\{z_{i_1}, z_{i_p}\} \subset H$ tal que $i_1 < i_2$. Como $i_1 < i_2$, $i_1 + 1 \leq i_2$. Esto implica que $\{z_{i_2}\} \subset Z_{i_1+1}$. Por definición tenemos que $c(\{z_{i_1}, z_{i_2}\}) = c_{i_1}(\{z_{i_2}\})$, y como $i_1 \in A$, Z_{i_1+1} es monocromático en c_{i_1} con color k^*. Por lo tanto, tenemos que $c_{i_1}(\{z_{i_2}\}) = k^*$ y en consecuencia $c(\{z_{i_1}, z_{i_2}\}) = k^*$. Como la elección de $\{z_{i_1}, z_{i_2}\}$ fue arbitraria en $[H]^p$, H es homogéneo para c.

Veamos ahora el caso cuando $p > 1$. Sean $p > 1$ y $c : [Z]^p \to r$. Para usar la hipótesis de inducción, fijamos $z_0 \in Z$ y definimos una coloración c_0 de los $(p-1)$-subconjuntos de $Z \setminus \{z_0\}$ de la siguiente manera:

$$\text{Para } \{b_1, \ldots, b_{p-1}\} \in [Z \setminus \{z_0\}]^{p-1}, \text{ defina } c_0(\{b_1, \ldots, b_{p-1}\}) := c(\{z_0, b_1, \ldots, b_{p-1}\}).$$

Por la hipótesis de inducción, para la coloración c_0 existe un conjunto infinito homogéneo $Z_1 \subseteq Z \setminus \{z_0\}$, lo que significa que todos los p-subconjuntos de Z, $\{z_0, b_1, \ldots, b_{p-1}\}$ con $b_1, \ldots, b_{p-1} \in Z_1$, tienen el mismo color.

Escogemos un elemento arbitrario $z_1 \in Z_1$. Ahora definimos una coloración de los $(p-1)$-subconjuntos de $Z_1 \setminus \{z_1\}$ de manera análoga a la coloración de $Z \setminus \{z_0\}$:

$$\text{Para } \{b_1, \ldots, b_{p-1}\} \in [Z_1 \setminus \{z_1\}]^{p-1}, \text{ asigne } c_1(\{b_1, \ldots, b_{p-1}\}) := c(\{z_1, b_1, \ldots, b_{p-1}\}).$$

De nuevo, la hipótesis de inducción nos dice que existe un subconjunto homogéneo para c_1, $Z_2 \subseteq Z_1 \setminus \{z_1\}$.

Podemos continuar esta construcción recursivamente y obtener una sucesión decreciente de conjuntos infinitos

$$Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots$$

y una sucesión $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de naturales tales que:

(i) $z_i \in Z_i$ es arbitrario.

(ii) Z_{i+1} es homogéneo para la coloración c_i de los $(p-1)$-subconjuntos de $Z_i \setminus \{z_i\}$.

Así, todos los p-subconjuntos de $\{z_i\} \cup Z_{i+1}$ que contienen a z_i tienen el mismo c-color.

En virtud de nuestra construcción, la sucesión $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de que para todo $i \geq 0$,

$$\{z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots\}$$

es homogéneo para c_i (por ser un subconjunto de Z_{i+1}). Denotaremos con k_i el color (en $\{1,\ldots,r\}$) para el cual el conjunto Z_{i+1} es monocromático en la coloración c_i.

Ahora, usando el principio infinito del palomar, tenemos que existe un conjunto infinito A y un color k^* tal que $k_i = k^*$ para todo $i \in A$. Sea $H = \{z_i : i \in A\}$. Afirmamos que H es homogéneo para c.

En efecto, sea $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\} \subset H$ tal que $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Como $i_1 < i_2$, $i_1 + 1 \leq i_2$. Esto implica que $\{z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\} \subset Z_{i_1+1}$. Por definición tenemos que $c(\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\}) = c_{i_1}(\{z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\})$, y como $i_1 \in A$, Z_{i_1+1} es monocromático en c_{i_1} con color k^*. Por lo tanto, tenemos que $c_{i_1}(\{z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\}) = k^*$ y en consecuencia $c(\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_p}\}) = k^*$. Como la elección de $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}\}$ fue arbitraria en $[H]^p$, H es homogéneo para c. $\square$

Ahora mostraremos un ejemplo que ilustra como se puede usar el teorema de Ramsey para probar la existencia de sucesiones convergentes.

Ejemplo 2.2.7. Toda sucesión de números reales acotada posee una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de reales. Coloreamos $\mathbb{N}^{[2]}$ de la siguiente manera. $c : \mathbb{N}^{[2]} \to \{1,2\}$, $c(\{n,m\}) = 1$ si $x_n < x_m$ y $n < m$, $c(\{n,m\}) = 2$ si $x_n \geq x_m$ y $n < m$.

Por el teorema de Ramsey infinito tenemos que existe un subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que M es monocromático. Sin importar si el color de M es 1 o 2, tenemos que $(a_i)_{i\in M}$ es una subsucesión monótona de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(a_i)_{i\in M}$ también es acotada, basta tener en cuenta que toda sucesión monótona y acotada es convergente, el cual es un resultado ampliamente conocido.

$\square$

2.3. Teorema de Ramsey finito

La notación en problemas relacionados con la teoría de Ramsey puede volverse bastante complicada ya que involucra varios cuantificadores. Con el fin de hacer la lectura más accesible, introduciremos un sistema de notación eficiente.

Como ya fue definido antes, $[n]$ denotará el conjunto $\{1,\ldots n\}$. Sin embargo, cuando hablemos del conjunto $\{T \subseteq [n] : |T| = p\}$ utilizaremos $[n]^p$ en lugar de $[[n]]^p$.

La siguiente notación fue introducida por Paul Erdös y Richard Rado. Escribimos

$$n \to (k)_r^p$$

para decir que si $|S| = n$, entonces toda r-coloración de $[S]^p$ tiene un subconjunto monocromático de tamaño k.

La siguiente proposición, conocida como el principio del palomar, nos dice que si n objetos son puestos en r cajas tal que $n > r$, entonces al menos una caja contendrá al menos 2 objetos.

Principio del palomar: Dados $n \in \mathbb{N}^+$, $r \in \mathbb{N}^+$ tal que $r < n$. Para toda partición de $[n] = N_1 \cup \cdots \cup N_r$, existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $|N_i| \geq 2$.

En notación flecha, $n \to (2)^1_r$ cuando $n > r$.

La siguiente proposición es, como lo dice su nombre, una generalización del principio del palomar y dice que si un conjunto con n elementos es particionado en r subconjuntos, entonces al menos un subconjunto contendrá al menos $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ elementos.

Recordemos que dado $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ denotará el “techo"de x, es decir,

$$\lceil x \rceil = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : x \leq n\}.$$

Teorema 2.3.1. (Principio del palomar fuerte) Dados $n, r \in \mathbb{N}^+$. Para toda partición de $[n] = N_1 \cup \cdots \cup N_r$, existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $|N_i| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$.

Demostración. Veámoslo mediante un argumento indirecto. Sean $n, r \in \mathbb{N}^+$ y $N_1, \ldots, N_r$ una partición de $[n]$. Si $|N_i| < \lceil \frac{n}{r} \rceil$ para todo $i \in [r]$, claramente $|N_i| < \frac{n}{r}$ para todo $i \in [r]$, entonces $n = |N_1| + \cdots + |N_r| < r\frac{n}{r} = n$, lo cual es absurdo. $\square$

Ahora podemos enunciar el **Teorema finito de Ramsey (1928)** que es uno de los resultados que dieron origen a la teoría de Ramsey.

Teorema 2.3.2. Para todo $p, r, k \in \mathbb{N}^+$ tal que $k \geq p$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que para toda r-coloración de $[n]^p$ existe $A \subseteq [n]$ con $|A| = k$ tal que A es monocromático, es decir, $n \to (k)^p_r$.

Antes de hacer la demostración de este teorema, presentaremos algunos ejemplos y definiciones que permitirán una mejor comprensión del mismo.

Note que cuando $p = 1$ podemos probar el teorema de Ramsey finito a partir del principio fuerte del palomar. Sean $k, r \in \mathbb{N}^+$. Tome $n = r(k-1)+1$. Es claro que $\lceil \frac{n}{r} \rceil = k$. Sea $c : [n]^1 \to r$, por el principio fuerte del palomar existe $M \subseteq [n]$ con $|M| = k$ tal que M es monocromático.

Definición 2.3.3. Dado $k > 2$, su ***número de Ramsey***, $R(k)$, es el número natural n más pequeño tal que para toda $2-$coloración de $[n]^2$, existe un subconjunto $A \subseteq [n]$ con $|A| = k$ tal que A es monocromático. Tomando $p = 2$ en el teorema finito de Ramsey se tiene que $R(k)$ existe para todo $k > 2$.

En seguida mostraremos algunos números de Ramsey. Por ejemplo, la tabla indica que $43 \leq R(5) \leq 48$ y esto es lo único que se conoce hasta la fecha sobre $R(5)$.

Tabla 1

Números de Ramsey

k	3	4	5		6		7	
$R(k)$	6	18	43	48	102	165	205	540

Nota: Números de Ramsey conocidos para $n \leq 7$. Los valores fueron tomados de [Katz and Reimann, 2018].

Como se puede observar en la tabla 1, encontrar los números de Ramsey para $k \geq 5$ es un problema abierto.

Las mejores cotas conocidas para $R(k)$ son:

$$k2^{\frac{k}{2}}[\frac{\sqrt{2}}{e}+o(1)] \leq R(k) \leq e^{-c(log(k-1))^2}\begin{pmatrix} 2k-2 \\ k-1 \end{pmatrix},$$

donde c es una constante mayor que cero, y $o(1)$ representa una función que tiende a cero cuando k tiende a infinito. Estas cotas fueron halladas por Joel Spencer [Spencer, 1977] y Ashwin Sah [Sah, 2020], respectivamente.

Cuando tomamos $p=2$, podemos ilustrar las coloraciones de conjuntos finitos mediante grafos. Para esto, requeriremos de las siguientes definiciones.

Definición 2.3.4. Un ***grafo*** es una pareja ordenada $G=(V,E)$ donde V, el conjunto de vértices, es no vacío, y E, el conjunto de aristas o segmentos, es cualquier subconjunto de $[V]^2$.

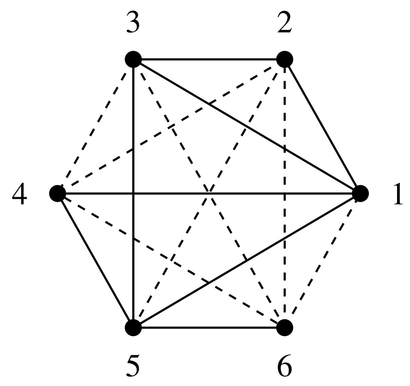
Dado $V' \subseteq V$, denotamos la ***restricción*** de G a V' con $G|V'$ y la definimos de la siguiente manera:

$$G|V' = (V',E') \text{ con } E' = [V']^2 \cap E.$$

Cuando $G=(V,[V]^2)$, diremos que G es un ***grafo completo*** o un ***n-clic***, donde $n=|V|$.

Observación 1. Sea $n \in \mathbb{N}^+$, note que tener una coloración $c:[n]^2 \to r$ es equivalente a tener una coloración de los segmentos del grafo completo $G=([n],[n]^2)$. Llamaremos a este grafo coloreado inducido $\mathbf{G_c}$. La siguiente figura ilustra una coloración sobre las aristas de un grafo.

Figura 1. *Grafo G_c, con $c : [6]^2 \to 2$*



Nota: El color 1 son los segmentos sólidos, el color 2 son los segmentos punteados.

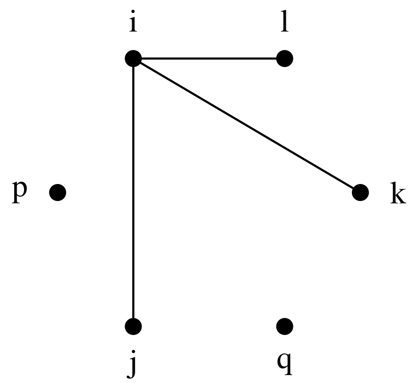
Ejemplo 2.3.5. $R(3) = 6$.

Demostración. Dada una coloración de $[6]^2$, $c : [6]^2 \to 2$, consideramos el grafo G_c.

Es claro que probar que $R(3) = 6$ es equivalente a probar que existe al menos un 3-clic monocromático (triángulo monocromático) en el grafo G_c.

Veamos que existe un 3-clic monocromático en el grafo G_c. Sea $i \in [6]$, por el principio fuerte del palomar, i se conecta al menos a 3 elementos mediante un segmento del color 1 o al menos a 3 elementos mediante un segmento del color 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que i se conecta a 3 vértices j, k, l mediante segmentos del color 1 (ver figura 2).

Figura 2. *Construcción del triangulo monocromático*



Nota: El vértice *i* está conectado a 3 vértices mediante segmentos de color 1.

Analicemos los siguientes casos:

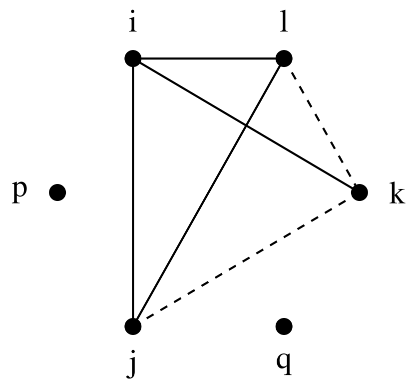
(i) Ninguno de los segmentos $\{k, j\}, \{k, l\}, \{j, l\}$ tiene el color 1.

En este caso tendríamos que los segmentos $\{k, j\}, \{k, l\}, \{j, l\}$ tienen el color 2 y por lo tanto tendríamos un triángulo monocromático.

(ii) Al menos uno de los segmentos $\{k, j\}, \{k, l\}, \{j, l\}$ tiene color 1.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{k, j\}$ tiene color 1, esto implica que el triángulo $\{i, j, k\}$ es monocromático (ver figura 3).

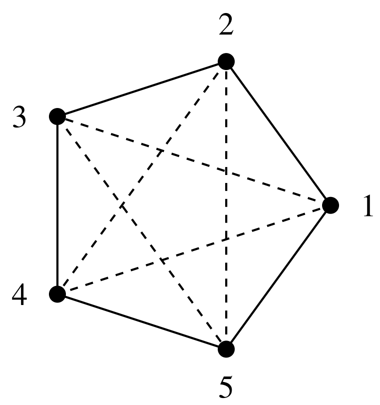
Figura 3. *Triángulo monocromático de color 1*



Nota: El color 1 se representa con segmentos sólidos y el color 2 se representa con segmentos punteados.

Finalmente, para ver que 6 es el número más pequeño con esta propiedad es suficiente mostrar una coloración de $[5]^2$ que no contenga ningún monocromático de cardinalidad 3. La figura 4 muestra la coloración deseada.

Figura 4. *Coloración de* $[5]^2$



Nota: No existe ningún subconjunto de [5] monocromático para esta coloración.

□

Note que una forma equivalente de definir a $R(k)$ es como el número natural n más pequeño tal que toda 2-coloración del grafo completo de n vértices, contenga un k-clic monocromático.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que $R(3) = 6$.

Ejemplo 2.3.6. Dado un grupo de 6 personas, existen al menos 3 personas que se conocen entre si o al menos 3 personas que son extrañas entre sí.

Demostración. Sea $A = \{p_1, \ldots, p_6\}$ el grupo de personas. Una manera de entender como se relacionan las personas de la fiesta es haciendo una 2-coloración de $[A]^2$ de la siguiente manera: si la pareja $\{p_i, p_j\}$ son conocidos entre sí, le asignamos 1, si son extraños le asignamos 2.

Definimos $c : [A]^2 \to 2$ como la coloración que relaciona las personas en A. Como $R(3) = 6$, entonces existen tres elementos de A que forman un conjunto monocromático, es decir, ellas se conocen entre sí o son extrañas entre sí.

□

2.3.1. Lema de König. Para demostrar el teorema de Ramsey finito haremos uso de herramientas de la teoría del orden, específicamente, usaremos órdenes parciales con estructura de árbol.

Definición 2.3.7. Sea X un conjunto. Un ***orden parcial*** en X es una relación binaria $<$ en X tal que:

(P1) para todo $x \in X$, $x \nless x$;

(P2) para todo $x,y,z \in X$, si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$ (transitividad).

Un orden parcial $<$ en X es ***lineal*** o ***total*** si adicionalmente

(L) dados $x,y \in X$, $x < y$ ó $x = y$ ó $y < x$.

Definición 2.3.8. Sea $(T,<)$ un orden parcial. $(T,<)$ es llamado un ***árbol*** si

(T1) existe $r \in T$ tal que para todo $x \in T$, $r \leq x$ (r es la raíz del árbol);

(T2) para todo $x \in T$, el conjunto de predecesores de x, $\{y \in T : y \leq x\}$, es finito y linealmente ordenado por $<$.

Ejemplo 2.3.9. El conjunto $(\{0,1\}^*, \sqsubseteq)$ de las cadenas finitas de 0's y 1's con la relación de ***"ser segmento inicial de"***, es un árbol. La relación"ser segmento inicial de"se define de la siguiente manera. Sean $\alpha = a_0a_1a_2\ldots a_n$ y $\beta = b_0b_1b_2\ldots b_n\ldots b_m$ elementos de $\{0,1\}^*$ con $n \leq m$.

$$\alpha \sqsubseteq \beta \text{ si, y solo si, } a_i = b_i \text{ para todo } i \leq n.$$

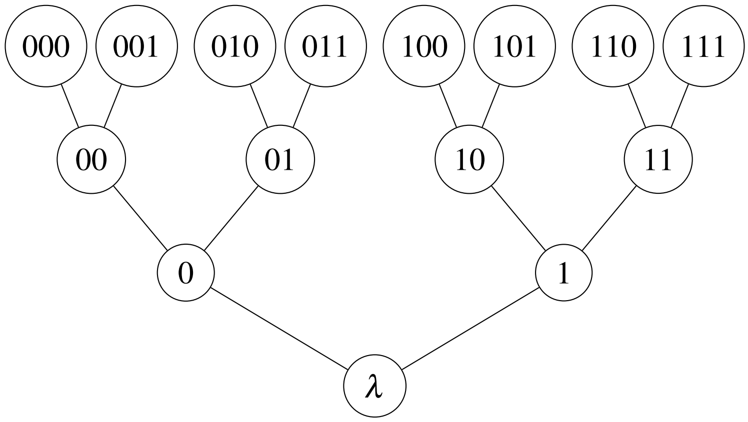
Por ejemplo, 010 es segmento inicial de 0101, y 010 no es segmento inicial de 011.

Para ver que $(\{0,1\}^*, \sqsubseteq)$ es un árbol, basta ver que λ, la cadena vacía, es la raíz, y que el conjunto de predecesores de un elemento $\alpha \in \{0,1\}^*$ es

$$\lambda \sqsubset a_0 \sqsubset a_0a_1 \sqsubset a_0a_1a_2 \sqsubset \cdots \sqsubset a_0a_1a_2\ldots a_n = \alpha,$$

el cuál es finito.

Figura 5. *El árbol* $(\{0,1\}^*, \sqsubseteq)$



Nota: Este es un caso de un árbol infinito.

Ejemplo 2.3.10. Dados $r, p \in \mathbb{N}^+$, el conjunto $\mathscr{C}_r^p = \{c : [n]^p \to r : n \in \mathbb{N}\}$ $([0] = \emptyset)$ organizado por extensión, es un árbol. El orden por extensión se define de la siguiente manera: Sean $c : [n]^p \to r$, $c' : [m]^p \to r$

$$c \preceq c' \text{ si, y solo si, } n \leq m \text{ y } c'|[n] = c.$$

En efecto, la raíz de $(\mathscr{C}_r^p, \preceq)$ es $\emptyset$ y el conjunto de predecesores de una función $c \in \mathscr{C}_r^p$ son las funciones restricción

$$\emptyset \prec c|[p]^p \prec c|[p+1]^p \prec c|[p+2]^p \prec \cdots \prec c,$$

el cuál claramente es finito y un orden total.

Definición 2.3.11. Dado un árbol $(T,<)$, una ***rama infinita*** en $(T,<)$ es una secuencia

$$r = x_0 < x_1 < x_2 < \dots,$$

donde todo $x_i \in T$ y para todo $i \in \mathbb{N}$, $\{x \in T : x < x_i\} = \{x_0, \dots, x_{i-1}\}$.

Ejemplo 2.3.12. Considere el árbol sobre $\mathbb{N}$ donde cero es la raíz y todo natural $n \geq 1$ es un sucesor inmediato de 0 (un abanico infinito). Este árbol no posee ninguna rama infinita.

Ejemplo 2.3.13. Considere el conjunto $(\mathscr{C}_r^p, \preceq)$ definido en el ejemplo 2.3.10. Sea $C : [\mathbb{N}]^p \to r$. El conjunto de restricciones de C para cada natural, como se indica abajo,

$$\emptyset \prec C|[p]^p \prec C|[p+1]^p \prec C|[p+2]^p \prec \dots$$

es una rama infinita.

Definición 2.3.14. Sea $(X,<)$ un orden parcial y $x \in X$. Decimos que y es un ***sucesor inmediato*** de x, si $x < y$ y para todo $z \in X$ tal que $x < z$ se tiene que $y \leq z$ siempre que z sea comparable con y.

Note que un elemento puede tener múltiples sucesores inmediatos.

Definición 2.3.15. Un árbol $(T,<)$ ***ramifica finitamente*** si para todo $x \in T$ se tiene que x tiene a lo sumo un número finito de sucesores inmediatos.

Los ejemplos $(\{0,1\}^*, \sqsubseteq)$, $(\mathscr{C}_r^p, \preceq)$ (ver 2.3.10 y 2.3.9) son árboles que ramifican finitamente.

Lema 2.3.16. (König) Si un árbol infinito $(T,<)$ ramifica finitamente, entonces tiene una rama infinita.

Demostración. Sea $x_0 = r$ (la raíz de T). Dado $x \in T$, denotamos con T_x la parte de T "por encima de x", es decir,

$$T_x = \{y \in T : x \leq y\}.$$

T_x hereda la estructura de árbol de T siendo x su raíz. Note que $T = T_r$. Sean $y_1, \dots, y_n$ el conjunto de sucesores inmediatos de r en T. Observemos que

$$T = \{r\} \cup T_{y_1} \cup \cdots \cup T_{y_n}.$$

Como T es infinito, por el principio infinito del palomar, uno de los arboles $T_{y_1}, \dots, T_{y_n}$ es infinito, digamos T_{y_i}. Tomamos $x_1 = y_i$.

Construimos recursivamente una rama infinita en T de la siguiente manera:

- Base: $x_0 = r$
- Paso recursivo: elegimos x_{k+1} como un sucesor inmediato de x_k tal que $T_{x_{k+1}}$ es infinito.

Como siempre queda un árbol infinito sobre x_k, la construcción se puede continuar indefinidamente y obtenemos la sucesión $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, una rama infinita en T. $\square$

2.3.2. Demostración del teorema finito de Ramsey. La siguiente demostración fue tomada de [Katz and Reimann, 2018].

Con los lemas y definiciones probados anteriormente ya podemos hacer una prueba del **teorema finito de Ramsey** (teorema 2.3.2).

Demostración. Suponga, contrariamente a lo que queremos probar, que para algún k, p y r tal que $k \geq p$, el teorema finito de Ramsey es falso. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe al menos una coloración $c : [n]^p \to [r]$ tal que no existe ningún subconjunto monocromático de tamaño k. Definimos

$$T = \{c : [n]^p \to r \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } [n] \text{ no posee subconjuntos monocromáticos de tamaño } k$$

$$\text{respecto a } c\}.$$

Ordenamos a T de la siguiente manera: Sean $c : [n]^p \to r$ y $c' : [m]^p \to r$ dos coloraciones,

$$c \prec c' \text{ si, y solo si, } n < m \text{ y } c' | [n] = c.$$

Es decir, c' extiende a c como función.

Las siguientes observaciones son cruciales:

1. $(T, \prec)$ es un árbol. La raíz es la función $\emptyset$ y los predecesores de una coloración $c \in T$ son

las funciones restricción de $c : [n]^p \to r$

$$\emptyset \prec c|[p]^p \prec c|[p+1]^p \prec \cdots \prec c|[n-1]^p \prec c.$$

2. T ramifica finitamente. Esto vale pues para todo n existen solo una cantidad finita de funciones $c : [n+1]^p \to r$, y todos los sucesores inmediatos de de una función $c : [n] \to r$ son funciones cuyo dominio es $[n+1]$. En efecto, sean $c \in T$ y $c' : [m] \to r \in T$ tal que $c \prec c'$, es claro que $c \preceq c'|[n+1] \preceq c'$ y que $c'[n+1] \in T$.

3. T es infinito. Esto se cumple pues estamos asumiendo que existe al menos una coloración para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teniendo presente estas observaciones podemos aplicar el lema de König para obtener una rama infinita

$$\emptyset \prec c_p \prec c_{p+1} \prec c_{p+2} \prec \ldots,$$

donde c_n tiene como dominio a $[n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como cada c_n en este camino es una extensión de todos los anteriores, podemos construir una función $C : [\mathbb{N}]^p \to r$ que tenga la propiedad de $C|[n]^p = c_n$. Esto quiere decir que si $\{a_1, \ldots, a_p\}$ es un p-subconjunto de $\mathbb{N}$ y a_p es el entero más grande en $\{a_1, \ldots, a_p\}$, entonces $C(\{a_1, \ldots, a_p\}) = c_{a_p}(\{a_1, \ldots, a_p\})$.

Ahora, tenemos una coloración de $[\mathbb{N}]^p$ y podemos aplicar el teorema infinito de Ramsey para garantizar que existe un subconjunto infinito de $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que $[H]^p$ es monocromático.

Escribimos $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < \ldots < h_k < \ldots\}$. Como H es monocromático para la coloración C, también lo es cada subconjunto de H. En particular, $M = \{h_1 < h_2 < \ldots < h_k\}$ es un subconjunto monocromático de tamaño k para la coloración C. Como $C([M]^p) = c_{h_k}([M]^p)$, M es un conjunto monocromático para c_{h_k} de tamaño k, lo cual contradice que $c_{h_k} \in T$. $\square$

3. Generalizaciones del teorema de Ramsey infinito

3.1. Introducción

En esta sección introduciremos definiciones y teoremas fundamentales para comenzar a generalizar los teoremas de Ramsey.

De ahora de adelante, a menos que se especifique lo contrario, utilizaremos letras en mayúscula cuando hablemos de conjuntos infinitos, los caracteres $a,b,c,\dots,r$ para hablar de números naturales, y los caracteres $s,t,\dots,z$ para hablar de conjuntos finitos.

Definición 3.1.1. $[X]^{<\infty}$ denotará la familia de subconjuntos finitos de X. Si X es infinito, denotaremos con $[X]^{\infty}$ el conjunto de los subconjuntos infinitos de X.

Definición 3.1.2. Dada $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y un subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ definimos la ***restricción*** de $\mathscr{F}$ a M como $\{s \in \mathscr{F} : s \subseteq M\}$ y la denotaremos por $\mathscr{F}|M$. Note que $\mathscr{F}|M = \mathscr{F} \cap [M]^{<\infty}$.

Definición 3.1.3. Denotamos con $\sqsubseteq$ la relación ***"ser segmento inicial de"*** sobre $[\mathbb{N}]^{<\infty}$. Esta se define de la siguiente manera: dados $s,t \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$,

$$s \sqsubseteq t \text{ si, y solo si, } s = t \text{ o } s = \{m \in t : m < n\} \text{ para algún } n \in t.$$

Por ejemplo $\{1,2\} \sqsubseteq \{1,2,3,4\}$, pero $\{1,3\} \not\sqsubseteq \{1,2,3,4\}$.

Definición 3.1.4. Dada una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, decimos que:

(1) $\mathscr{F}$ es ***Ramsey*** si para toda partición finita $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_k$ y todo subconjunto in-

finito $M \subseteq \mathbb{N}$, existe un conjunto infinito $N \subseteq M$ tal que a lo sumo una de las restricciones $\mathscr{F}_1|N, \ldots, \mathscr{F}_k|N$ es no vacía. Equivalentemente, existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mathscr{F}|N = \mathscr{F}_i|N$;

(2) $\mathscr{F}$ es ***Nash-Williams*** si $s \not\sqsubseteq t$ para todo par de elementos $s \neq t \in \mathscr{F}$;

(3) $\mathscr{F}$ es ***Sperner*** si $s \not\subseteq t$ para todo par de elementos $s \neq t \in \mathscr{F}$.

Observación 2. En la definición de una familia Ramsey, el conjunto N se puede pensar como un subconjunto monocromático de color i cuando $F|N \neq \emptyset$. Utilizaremos esta terminología cuando sea conveniente.

Observación 3. Una familia Nash-Williams también se llama $\sqsubseteq$-anticadena y análogamente una familia Sperner es una $\subseteq$-anticadena. Además, toda familia Sperner es Nash-Williams.

La relación $\sqsubseteq$ se generaliza a $[\mathbb{N}]^{<\infty} \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ de la manera obvia, es decir, $s \sqsubset A$ si $s = \{n \in A : n \leq m\}$ para algún $m \in A$. En este caso, diremos que s es un segmento inicial de A.

Definición 3.1.5. Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Definimos

$$[s, M] = \{A \in [\mathbb{N}]^{\infty} : s \sqsubset A \text{ y } A \subseteq M \cup s\}.$$

Definición 3.1.6. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$, tenemos que $([M]^{\infty}, \subseteq)$ es un orden parcial, es decir, $\subseteq$ es una relación binaria, reflexiva, transitiva y antisimétrica en $[M]^{\infty}$. Diremos que:

- $\mathscr{A} \subseteq [M]^{\infty}$ es ***denso*** si para cada $B \in [M]^{\infty}$ existe $C \in \mathscr{A}$ tal que $C \subseteq B$.

- $\mathscr{A} \subseteq [M]^\infty$ es ***abierto*** si para cada par $B, C \in [M]^\infty$ tal que $B \in \mathscr{A}$ y $C \subseteq B$, entonces $C \in \mathscr{A}$.

Observación 4. Note que la interesección finita de abiertos es abierta. De hecho, los conjuntos abiertos reciben ese nombre por ser los conjuntos abiertos en una topología sobre $[M]^\infty$, conocida como la topología del Aleksándrov asociada al orden de contención. El concepto de densidad definido anteriormente también es equivalente al concepto de densidad en la topología de Aleksándrov.

De ahora en adelante denotaremos las colecciones de conjuntos con mayúsculas caligráficas $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$

Ejemplo 3.1.7. Sea $c : [\mathbb{N}]^2 \to \{1,2\}$ una coloración de $[\mathbb{N}]^2$. Por el teorema infinito de Ramsey, la colección $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es homogéneo en algún color}\}$ es abierta y densa en $([\mathbb{N}]^{<\infty}, \subseteq)$. En efecto, dado $B \subseteq \mathbb{N}$ considere la restricción de c a $[B]^2$. Por el teorema infinito de Ramsey (teorema 2.2.6) existe $A \subseteq B$ tal que A es homogéneo, es decir $A \in \mathscr{A}$. Para ver que $\mathscr{A}$ es abierto basta observar que todo subconjunto de un conjunto monocromático es monocromático.

Ejemplo 3.1.8. Definimos un ideal sobre sobre un conjunto X como una colección $\mathscr{I}$ de subconjuntos de X que cumple las siguiente propiedades:

I1. Si $A \in \mathscr{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathscr{I}$.

I2. $\mathscr{I}$ es cerrado bajo la unión finita de conjuntos.

I3. $X \notin \mathscr{I}$ y $\emptyset \in \mathscr{I}$.

Note que si $\mathscr{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$, entonces $\mathscr{I} \cap [\mathbb{N}]^\infty$ es abierto.

Ejemplo 3.1.9. Sea

$$\mathscr{I} = \{A \subseteq \mathbb{N}^+ : \sum_{n \in A} 1/n < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Tenemos que $\mathscr{I}$ es un ideal.

Ahora veamos que este conjunto es abierto y denso en $([\mathbb{N}]^\infty, \subseteq)$. Claramente es abierto, veamos entonces que es denso. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si A posee infinitas potencias de 2, tome este subconjunto de A. En caso contrario construimos una sucesión de la siguiente manera:

- Base de la recursión: $n_1 \in A$ tal que $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{2}$,
- Paso recursivo: $n_{k+1} \in A$ tal que $\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}}$ y $n_k < n_{k+1}$,

Definimos $B = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Tenemos entonces que $\sum_{n \in B} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, y por lo tanto $B \in \mathscr{I}$.

Ejemplo 3.1.10. Coloración c de $[\mathbb{N}^+]^2$ cuyos conjunto de homogéneos, $\mathrm{hom}(c) = \{A \subseteq \mathbb{N}$: existe $i \in \{1,2\}$ tal que $c([A]^p) = i\}$, está contenido en el ideal $\mathscr{I}$ mencionado en el ejemplo 3.1.9.

Definimos $c : [\mathbb{N}^+]^2 \to 2$ de la siguiente manera: Sean $a, b \in \mathbb{N}^+$ tal que $a < b$

$$c(\{a,b\}) = 1, \text{ si } b \geq 2a;$$

$$c(\{a,b\}) = 2, \text{ si } b < 2a.$$

Veamos que sus $\hom(c) \subseteq \mathscr{I}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}^+$ tal que $c([A]^2) = 1$. Veamos que $A \in \mathscr{I}$. Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ la numeración creciente de A, veamos por inducción que $\frac{1}{a_{i+1}} \leq \frac{1}{2^i}$ para todo $i \in \mathbb{N}^+$ y por lo tanto $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_{i+1}} \leq \frac{1}{a_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty$.

- Base de la inducción: Es claro que $2^1 \leq a_2$ y por lo tanto $\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2^1}$.
- Paso inductivo: Sea $i \in \mathbb{N}^+$, Supongamos que $2^i \leq a^{i+1}$. Como $c(\{a_{i+1}, a_{i+2}\}) = 1$, tenemos que $a_{i+2} \geq 2 \cdot a_{i+1} \geq 2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$.

Ahora veamos mediante un argumento indirecto que no existen subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}^+$ que sean monocromáticos con el color 2. Supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}^+$ tal que $c([A]^2) = 2$. Como A es infinito existen $a, b \in A$ tal que $a < b$ y $b \geq 2a$, lo cual implica que $c(\{a, b\}) = 1$, y esto es absurdo.

Definición 3.1.11. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \subset \mathbb{N}$. Denotaremos

$$M/s = \{m \in M : m > \text{máx}(s)\}.$$

Cuando s sea unitario, es decir, $s = \{n\}$, solamente escribiremos M/n para hacer referencia al conjunto definido anteriormente.

A continuación definiremos el primer concepto de diagonalización. Hay que tener en cuenta que más adelante enunciaremos otra definición de diagonalización, sin embargo, cuando estas se utilicen no hará falta especificar a cual tipo de diagonalización se está haciendo referencia, pues cada tipo de diagonalización se aplica en familias de diferente naturaleza.

Definición 3.1.12. Dada una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $[\mathbb{N}]^\infty$, decimos que $D \in [\mathbb{N}]^\infty$ la ***diagonaliza*** si para cada $n \in D, D/n \subseteq F_n$.

Ejemplo 3.1.13. Considere la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$F_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}.$$

Podemos construir una diagonalización de la siguiente manera:

- Base de la recursión: $n_0 = \text{mín}(F_0)$.

- Paso recursivo: $n_{k+1} = \text{mín}(F_{k+1}/n_k)$.

Obtenemos que $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, lo cual claramente es una diagonalización de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Podemos usar el mismo algoritmo que usamos en el ejemplo anterior para hallar una diagonalización en cualquier sucesión decreciente de conjuntos como lo muestra el siguiente lema.

Lema 3.1.14. Dado $M \subseteq \mathbb{N}$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos de M. Entonces existe una diagonalización $D \subseteq M$ de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Construimos por recursión una sucesión de la siguiente manera:

- Base de la recursión: Elegimos arbitrariamente $n_0 \in F_0$.

- Paso recursivo: Tomamos arbitrariamente $n_{k+1} \in F_{k+1}/n_k$.

Note que siempre es posible elegir n_{k+1} en F_{k+1}/n_k pues F_{k+1} es infinito.

Sea $D = \{n_k\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que D es una diagonalización de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $n_k \in D$ y $n_l \in D/n_k$. Tenemos entonces que $n_l > n_k$ y por lo tanto $l-1 \geq k$ pues $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. Por como construimos la sucesión, tenemos que $n_l \in F_{n_l}/n_{l-1} \subseteq F_{n_k}/n_k \subseteq F_{n_k}$. Como n_l era arbitrario en D/n_k, queda probado que $D/n_k \subseteq F_{n_k}$. □

Definición 3.1.15. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$. Dada una sucesión $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$ de densos abiertos en $([M]^\infty, \subseteq)$, un conjunto $D \subseteq M$ es una ***diagonalización*** de $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$ si $D/s \in \mathscr{D}_s$ para cada $s \in [D]^{<\infty}$.

Observación 5. Dado $M \subseteq \mathbb{N}$, se tiene que $[M]^{<\infty}$ es numerable. En efecto, basta notar que

$$[M]^{<\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{s \subset M | \operatorname{máx}(s) \leq i\}.$$

Teorema 3.1.16. Dado $M \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión de abiertos densos $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$ en $([M]^\infty, \subseteq)$, existe $D \subseteq M$ que diagonaliza a $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$, es decir, $D/s \in \mathscr{H}_s$ para todo $s \in [D]^{<\infty}$.

Demostración. Sea $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ la numeración creciente de M, definimos

$$\mathscr{H}^n := \bigcap_{\operatorname{máx}(s)\leq n} \mathscr{H}_s.$$

Veamos que $\mathscr{H}^n$ es abierto y denso en $([M]^\infty, \subseteq)$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Sea $n \in \mathbb{N}^+$, veamos primero que $\mathscr{H}^n$ es denso. Sean m_k el mayor elemento de M tal que $m_k \leq n$, $A \subseteq M$ y sea

$s_1,\ldots,s_{2^k}$ una numeración de los subconjuntos de $\{m_1,m_2,\ldots,m_k\}$. Por densidad existe $B_1\subseteq A$ tal que $B_1\in\mathscr{H}_{s_1}$. De nuevo por densidad existe $B_2\subseteq B_1$ tal que $B_2\in\mathscr{H}_{s_2}$ (como $\mathscr{H}_{s_1}$ es abierto, $B_2\in\mathscr{H}_{s_1}$), argumentando análogamente obtenemos que existe B_k tal que $B_k\subseteq A$ con $B_k\in\mathscr{H}^n$. Esto prueba que $\mathscr{H}^n$ es denso. Veamos ahora que $\mathscr{H}^n$ es abierto. Sea $A\in\mathscr{H}^n$, y sea $B\subseteq A$. Como $A\in\mathscr{H}_{s_i}$ para todo $i\in\{1,\ldots,2^k\}$, tenemos que $B\in\mathscr{H}_{s_i}$ para todo $i\in\{1,\ldots,2^k\}$ pues los $\mathscr{H}_{s_i}$ son abiertos. Esto quiere decir que, $B\in\bigcap_{\text{máx}(s)\leq n}\mathscr{H}_s=\mathscr{H}^n$ y por lo tanto $\mathscr{H}^n$ es abierto.

A continuación construimos por recursión una sucesión a partir de los elementos de $(\mathscr{H}^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$.

- Base de la recursión: $D_1\in\mathscr{H}^1$ arbitrario.
- Paso recursivo: $D_{n+1}\in\mathscr{H}^{n+1}$ tal que $D_{n+1}\subseteq D_n$.

Por la densidad de los $\mathscr{H}^n$ es posible construir esta sucesión.

Como $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión decreciente, por el lema 3.1.14 tenemos que existe una diagonalización $D\subseteq M$ de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$. Por definición de diagonalización, para todo $n\in D$, $D/n\subseteq D_n\in\mathscr{H}^n$. Como $\mathscr{H}^n$ es abierto, sigue que para todo $n\in D$, $D/n\in\mathscr{H}^n$. Veamos que D es una diagonalización de $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$. Sea $s\in[D]^{<\infty}$, tome $p=\text{máx}(s)$. Tenemos que $D/s=D/p\in\mathscr{H}^p\subseteq\mathscr{H}_s$, por lo tanto D es una diagonalización de $(\mathscr{H}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$. $\square$

3.2. Teorema de Nash-Williams

En esta sección probaremos la primera generalización de los teoremas de Ramsey, esta proposición se conoce como el teorema de Nash-Williams. Antes de probarlo, veremos que el teorema de Nash-Williams efectivamente es una generalización de los teoremas de Ramsey, es decir, probaremos que el teorema de Nash-Williams implica el teorema de Ramsey infinito y por lo tanto el teorema de Ramsey finito. Posteriormente, probaremos algunos lemas, y concluimos la sección con una demostración del teorema de Nash-Williams.

Teorema 3.2.1. Nash-Williams(1965) Toda familia Nash-Williams es Ramsey.

Este teorema es muy útil para construir los tipos de familias de conjuntos finitos definidas en 3.1.4.

Veamos algunos ejemplos de familias de cada tipo.

- **Sperner:** $\mathscr{C} = [\mathbb{N}]^k$, $\mathscr{A} = \{\{0\},\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8,9\},\{10,11,12,13,14\},\dots\}$
- **Nash-Williams:** Considere la familia

$$\mathscr{B} = \{\{n-1,n\} : n \equiv 0 \text{ (mod 3) y } n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{\{n-2,n-1,n\} : n \equiv 0 \text{ (mod 3) y } n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Esta familia está conformada por conjuntos de la forma

$$\{2,3\},\{5,6\},\cdots,\{1,2,3\},\{4,5,6\},\dots$$

Veamos que esta familia es Nash-Williams. Sean $s,t \in \mathscr{B}$, con $s \neq t$. Si s y t no son $\subseteq$-comparables, entonces s,t no son $\sqsubseteq$-comparables. Si s,t son $\subseteq$-comparables, suponga sin pérdida de generalidad que $s \subsetneq t$. Por la definición de $\mathscr{B}$, tenemos que existe n múltiplo de 3 tal que $s = \{n-1,n\}$ y $t = \{n-2,n-1,n\}$, con lo cual concluimos que $s \not\sqsubseteq t$. Note que $\mathscr{B}$ no es Sperner pues por ejemplo $\{2,3\}$ y $\{1,2,3\}$ son miembros de $\mathscr{B}$.

- **Ramsey:** Considere la familia $\mathscr{F} = \mathscr{B} \cup \{1,2\}$. Por el teorema de Nash-Williams tenemos que $\mathscr{B}$ es Ramsey y claramente $\mathscr{F}$ no es Nash-Williams pues $\{1,2\}, \{1,2,3\}$ son miembros de $\mathscr{F}$. Veamos que $\mathscr{F}$ es Ramsey. Sea $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_r$ una partición de $\mathscr{F}$ y sea $M \subseteq \mathbb{N}$, considere la partición de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r$, dada por $\mathscr{B}_i = \mathscr{B} \cap \mathscr{F}_i$. Tenemos que existe $N \subseteq M$ tal que $\mathscr{B}|N = \mathscr{B}_i|N$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$. Tomando $P = N \setminus \{1,2\}$ tenemos que $\mathscr{F}|P = \mathscr{F}_i|P$, pues $\mathscr{F}|P = \mathscr{B}|P = \mathscr{B}_i|P = \mathscr{F}_i|P$.

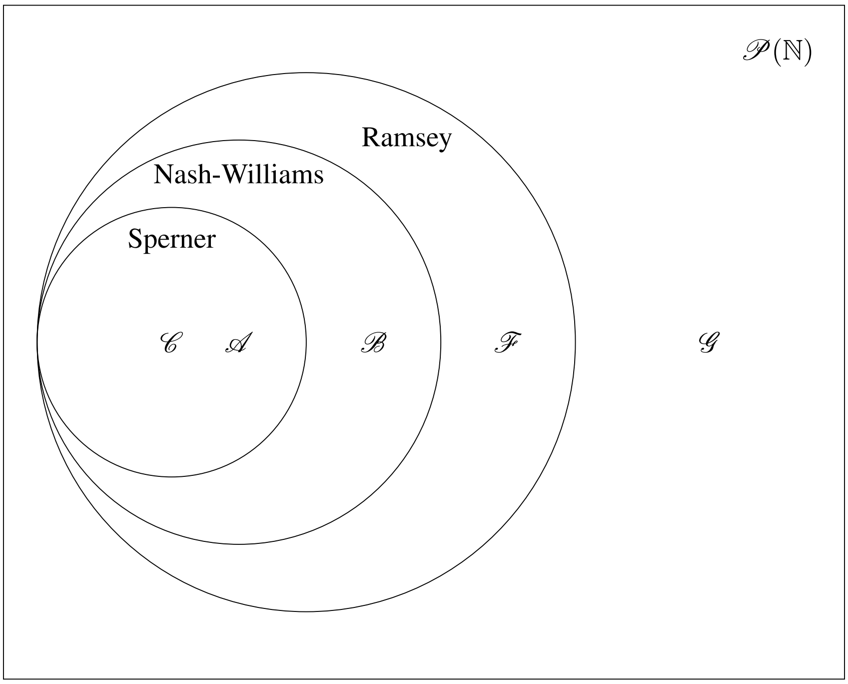
- **Ninguna de las anteriores:** $\mathscr{G} = [\mathbb{N}]^{<\infty}$ no es una familia Ramsey pues la partición dada por

$$\mathscr{G}_1 = \{s \in \mathscr{G}; |s| \text{ es par}\}; \quad \mathscr{G}_2 = \{s \in \mathscr{G} : |s| \text{ es impar}\}$$

no posee subconjuntos monocromáticos. Para ver esto observe que para cualquier subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ con $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\}$, tenemos que $\mathscr{G}|M = M^{[<\infty]}$, $\{m_1, m_2\} \in \mathscr{G}_1$ y $\{m_1, m_2, m_3\} \in \mathscr{G}_2$.

El siguiente diagrama ilustra los ejemplos que acabamos de enunciar.

Figura 6. *Ejemplos de familias*



Nota: El teorema de Nash-Williams fue fundamental para comprender como se organizan estas familias.

Como veremos a continuación, el teorema de Nash-Williams es una generalización del teorema de Ramsey.

El teorema de Nash-Williams implica el teorema infinito de Ramsey

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}^+$, es claro que $\mathscr{F} = [\mathbb{N}]^k$ es Nash-Williams. Por el teorema de Nash-Williams tenemos que $\mathscr{F}$ es Ramsey. Dada una r-coloración de $\mathscr{F}$, $c : \mathscr{F} \to r$, considere la r-partición de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_r$, dada por $F_i = c^{-1}(i)$. Por ser $\mathscr{F}$ Ramsey, tenemos que existe $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que a lo sumo una de las restricciones $\mathscr{F}_1|M, \ldots, \mathscr{F}_r|M$ es no vacía. Ya que $\emptyset \neq [M]^k = \mathscr{F}|M = \mathscr{F}_1|M \cup \cdots \cup \mathscr{F}_r|M$, tenemos que existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mathscr{F}|M =$

$\mathscr{F}_i|M \neq \emptyset$. Esto quiere decir que $[M]^k = \mathscr{F}_i|M \subseteq \mathscr{F}_i = c^{-1}(i)$, o equivalentemente, $c([M]^k) = i$. Esto prueba que M es monocromático. $\square$

Definición 3.2.2. Sean $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$, $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Decimos que M ***$\mathscr{F}$-acepta*** a s si existe $t \in \mathscr{F}$ tal que t es $\sqsubseteq$-comparable con s y $t \subseteq M \cup s$. Decimos que M ***$\mathscr{F}$-rechaza*** s si M no F-acepta a s, es decir, no existe $t \in \mathscr{F}$ tal que t es $\sqsubseteq$-comparable con s y $t \subseteq M \cup s$.

Definición 3.2.3. Decimos que M ***$\mathscr{F}$-acepta fuertemente*** a s si todo subconjunto infinito $P \subseteq M$ acepta a s. Finalmente decimos que M ***decide*** a s si M acepta fuertemente o rechaza a s.

Cuando sea claro cual es la familia $\mathscr{F}$ de conjuntos finitos a la cual se hace referencia, esta se omitirá como prefijo.

Observación 6. Sean $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Si un segmento inicial de s pertenece a $\mathscr{F}$, entonces cualquier conjunto infinito $\mathscr{F}$-acepta fuertemente a s.

Ejemplo 3.2.4. Considere la familia $\mathscr{F} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\dots\}$. Si $s_1 = \{3,4,5\}$, $\mathbb{N}$ acepta fuertemente a s_1.

Si $s_2 = \{4\}$, $\mathbb{N}$ acepta a s_2, pues $t = \{4,5\}$ satisface que $s_2 \sqsubseteq t$ y $t \subseteq \mathbb{N} \cup s_2$. Pero el conjunto de los pares rechaza a s_2 pues el único elemento de $\mathscr{F}$ que es $\sqsubseteq$-comparable con s_2 es $\{4,5\}$, y este elemento no está contenido en el conjunto de los pares unido con s_2. Esto implica que $\mathbb{N}$ no acepta fuertemente a s_2.

Si $s_3 = \{1,4\}$, $\mathbb{N}$ rechaza a s_3. Pues ningún elemento de $\mathscr{F}$ es $\sqsubseteq$-comparable con s_3.

Observación 7. Dado $M \subseteq \mathbb{N}, s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $\mathscr{F}$ una familia de conjuntos finitos. Note que para que M $\mathscr{F}$-acepte fuertemente a s no es necesario que $\mathscr{F}$ contenga un segmento inicial de s.

Considere por ejemplo los siguiente conjuntos:

$$s = \{1,2,3\}, \ \ \mathscr{F} = \{s \cup \{n\} : n > \text{máx}(s)\}.$$

Afirmamos que $\mathbb{N}$ $\mathscr{F}$-acepta fuertemente a s. En efecto, para ver que cualquier $M \subseteq \mathbb{N}$ acepta a s basta tomar $t = s \cup \{\text{mín}(M/s)\} \in \mathscr{F}$. Claramente $s \sqsubseteq t$ y $t \subseteq M \cup s$.

Lema 3.2.5. Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

1. Para todo $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, existe $N \subseteq M$ tal que N decide a s.

2. Si M acepta fuertemente (respectivamente, rechaza) a s, entonces todo subconjunto infinito de M acepta fuertemente (respectivamente, rechaza) a s.

Demostración.

1. Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \subseteq \mathbb{N}$. Si M no acepta fuertemente a s, entonces existe $P \subseteq M$ tal que P rechaza a s, y por lo tanto decide a s.

2. Por definición tenemos que si M acepta fuertemente a s, entonces todo subconjunto infinito de M acepta fuertemente a s. Veamos que cuando M rechaza a s, todo subconjunto infinito de M rechaza a s probando su contra-recíproca. Supongamos que no todo subconjunto de M rechaza a s, entonces existe $P \subseteq M$ tal que P acepta a s. Por lo tanto existe $t \in \mathscr{F}$ tal que t es $\sqsubseteq$-comparable con s y $t \subseteq (s \cup P) \subseteq (s \cup M)$. Esto quiere decir que M acepta a s.

$\square$

Lema 3.2.6. Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Dado $M \subseteq \mathbb{N}$, existe $N \subseteq M$ tal que N decide todos sus subconjuntos finitos.

Demostración. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$. Dado $s \subseteq M$, definimos el siguiente conjunto.

$$\mathscr{D}_s := \{C \subseteq M : C\ \mathscr{F}\text{-decide } s\}.$$

El lema 3.2.5 implica que $\mathscr{D}_s$ es denso y abierto en $([M]^\infty, \subseteq)$ para todo $s \subset M$. Por el lema 3.1.16 existe una diagonalización $D \subseteq M$ de $(\mathscr{D}_s)_{s \in [M]^{<\infty}}$.

Veamos que D decide a todos sus subconjuntos finitos. Sea $s \in [D]^{<\infty}$. Mostraremos que D decide a s. Tenemos que $D/s \in \mathscr{D}_s$ y por lo tanto decide a s. Si D/s acepta fuertemente a s, claramente D acepta fuertemente a s. Si D/s rechaza a s, veamos que D rechaza a s probando su contra-recíproca. Supongamos que D acepta a s. Tenemos que ocurre una de las siguientes alternativas:

(i) Existe $t \in \mathscr{F}$ tal que $t \sqsubseteq s$ y $t \subset D \cup s$. En este caso tendríamos que $t \subseteq s$ y por lo tanto $t \subset s \cup D/s$, lo cual quiere decir que D/s acepta a s.

(ii) Existe $t \in \mathscr{F}$ tal que $s \sqsubset t$ y $t \subset D \cup s$. Como $s \sqsubset t$, $t \subseteq s \cup D/s$ sigue que D/s acepta a s.

Por lo tanto D decide todos sus subconjuntos finitos.

$\square$

Lema 3.2.7. Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto que decide a todos sus subconjuntos finitos. Si M acepta fuertemente un subconjunto $s \subseteq M$, entonces

M acepta fuertemente $s \cup \{n\}$ para todo $n \in M$ excepto por un número finito de elementos de M.

Demostración. Veamos esto mediante un argumento indirecto. Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que M decide todos sus subconjuntos finitos. Supongamos que existe $s \subset M$ tal que M acepta fuertemente a s, pero no acepta fuertemente a $s \cup \{n\}$ para infinitos valores de n en M. Sea

$$N = \{n \in M/s : M \text{ no acepta fuertemente } s \cup \{n\}\}.$$

Por nuestra hipótesis, N es infinito.

Como M acepta fuertemente a s, tenemos que N acepta a s. Esto quiere decir que existe $t \in \mathscr{F}$ tal que t es $\sqsubseteq$-comparable con s, y $t \subseteq N \cup s$. Si $t \sqsubseteq s$, se tendría que $t \sqsubseteq s \cup \{n\} \subseteq (s \cup \{n\}) \cup M$ para todo $n \in N$, lo cual implicaría que M acepta a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in N$, y esto es absurdo. Ahora veamos que pasa cuando $s \sqsubset t$. Como $t \subseteq N \cup s$, existen $n_1 < \ldots < n_k \in N$ tal que $t = s \cup \{n_1, \ldots, n_k\}$ y por lo tanto $s \cup \{n_1\} \sqsubseteq t$. Como $t \subseteq M \cup s$, se tiene que M acepta a $s \cup \{n_1\}$, lo cual también es absurdo. □

Lema 3.2.8. Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Dado $M \subseteq \mathbb{N}$, existe un conjunto $P \subseteq M$ que decide todos sus subconjuntos finitos y si P acepta fuertemente a $s \subset P$, entonces acepta $s \cup \{n\}$ para todo $n \in P/s$.

Demostración. Por el lema 3.2.6 existe $Q \subseteq M$ tal que Q decide todos sus subconjuntos finitos.

Definimos

$$\mathscr{A}_Q := \{s \in [Q]^{<\infty} : Q \text{ acepta fuertemente a s}\}.$$

Vamos a construir una colección $\mathscr{G}_s$ de abiertos densos para cada $s \in [Q]^{<\infty}$. Para cada $s \in \mathscr{A}_Q$,

$$\mathscr{G}_s := \{C \subseteq Q : C \text{ acepta fuertemente a } s \cup \{n\} \text{ para todo } n \in C/s\},$$

y si $s \in [Q]^{<\infty} \setminus \mathscr{A}_Q$, $\mathscr{G}_s := [Q]^\infty$.

Sea $s \in [Q]^{<\infty}$. Veamos que $\mathscr{G}_s$ es abierto y denso en $([Q]^\infty, \subseteq)$. Cuando $s \in [Q]^{<\infty} \setminus \mathscr{A}_Q$ esto es claro. Veamos entonces el caso cuando $s \in \mathscr{A}_Q$. Primero veamos que es denso, sea $A \subseteq Q$, definimos $B := \{n \in A/s : Q \text{ acepta fuertemente a } s \cup \{n\}\}$. En virtud del lema 3.2.7, B es infinito. Por (2) del lema 3.2.5, note que B acepta fuertemente a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in B/s$. Por lo tanto $B \in \mathscr{G}_s$, y como A era arbitrario concluimos que $\mathscr{G}_s$ es denso. Por (2) del lema 3.2.5 tenemos que $\mathscr{G}_s$ es abierto.

Finalmente, por el lema 3.1.16, existe $P \subseteq Q$ tal que $P/s \in \mathscr{G}_s$ para todo $s \in [P]^{<\infty}$. Note que P decide todos sus subconjuntos finitos, pues $P \subseteq Q$. Por otra parte, si P acepta fuertemente a un subconjunto s, entonces Q también lo acepta fuertemente, pues Q decide a s. Como $s \in \mathscr{A}_Q$ y como $P/s \in \mathscr{G}_s$, entonces P/s acepta fuertemente a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in P/s$ y consecuentemente P acepta fuertemente a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in P/s$. □

Con estos lemas podemos hacer la prueba del teorema de Nash-Williams. Esta demostración fue tomada de [Todorcevic, 2010].

Demostración. Queremos probar que toda familia de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que es Nash-Williams, es Ramsey. Sea $\mathscr{F}$ una familia Nash-Williams, haremos esta prueba por inducción en el tamaño de la partición de $\mathscr{F}$.

- Base de la inducción: Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ una partición de $\mathscr{F}$, y $M \subseteq \mathbb{N}$. Queremos hallar una subconjunto infinito $P \subseteq M$ tal que una de las restricciones $\mathscr{F}_1|P$ o $\mathscr{F}_1|2$ es vacía. Aplicando el lema 3.2.8 a $\mathscr{F}_1$, tenemos que existe $P \subseteq M$ tal que $\mathscr{F}_1$-decide todos sus subconjuntos finitos y si P $\mathscr{F}_1$-acepta fuertemente un subconjunto s, entonces $\mathscr{F}_1$-acepta fuertemente a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in P/s$. Si P $\mathscr{F}_1$-rechaza a $\emptyset$, como $\emptyset$ es $\sqsubseteq$-comparable con todo conjunto, entonces ningún elemento de $\mathscr{F}_1$ es subconjunto de P. Por lo tanto, $\mathscr{F}_1|P = \emptyset$. Supongamos entonces que P acepta fuertemente a $\emptyset$.

  Veamos mediante inducción en la cardinalidad de los subconjuntos finitos de P, que P acepta fuertemente a todos sus subconjuntos finitos. Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos que P $\mathscr{F}_1$-acepta fuertemente a todos sus subconjuntos de cardinalidad n. Sea $t \subset P$ con $t = \{t_1, \ldots, t_{n+1}\}, t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$. Por la hipótesis de inducción tenemos que P $\mathscr{F}_1$-acepta fuertemente a $\{t_1, \ldots, t_n\} \cup \{t_{n+1}\} = t$. Por lo tanto P $\mathscr{F}_1$-acepta fuertemente a todos sus subconjuntos finitos.

  Como $\mathscr{F}$ es Nash-Williams, ningún par de elementos de $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ son $\sqsubseteq$-comparables. Mostraremos que P no contiene ningún elemento de la familia $\mathscr{F}_2$. Si P contuviera algún elemento t de la familia $\mathscr{F}_2$, P $\mathscr{F}_1$-aceptaría fuertemente a t, lo cual implicaría que existe un elemento de s de $\mathscr{F}_1$ tal que es $\sqsubseteq$-comparable con t, que es absurdo.

- Paso inductivo: Sea $n \geq 2$, supongamos que el teorema de Nash-Williams vale para toda n-partición de $\mathscr{F}$. Sea $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_{n+1}$ una partición de $\mathscr{F}$. Definimos una nueva partición de $\mathscr{F}$ de la siguiente manera:

$$\overline{\mathscr{F}}_i = \mathscr{F}_i, \text{ si } i \in \{1. \ldots, n-1\}, \text{ y}$$

$$\overline{\mathscr{F}}_n = \mathscr{F}_n \cup \mathscr{F}_{n+1}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que existen $P \subseteq M$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathscr{F}|P = \overline{\mathscr{F}}_i|P$. Si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mathscr{F}|P = \mathscr{F}_i|P$. Veamos entonces el caso cuando $i = n$. Como $\mathscr{F}_n \cup \mathscr{F}_{n+1}$ es una partición de $\overline{\mathscr{F}}_n$, por lo que fue probado en la base de la inducción tenemos que existen $P' \subseteq P$ e $i \in \{n, n+1\}$ tal que $\mathscr{F}_i|P' = \overline{\mathscr{F}}_n|P' = \mathscr{F}|P'$, lo cual concluye la prueba.

□

3.3. Teorema de Galvin

En esta sección demostraremos la última generalización de los teoremas de Ramsey que abordaremos en este texto, el teorema de Galvin. La demostración que mostraremos es una adaptación de la demostración de una proposición más general en [Pacheco Tobo et al., 2014]. Cabe resaltar que las de generalizaciones de los teoremas de Ramsey continúan, por ejemplo, se han estudiado teoremas tipo Ramsey para particiones de $[\mathbb{N}]^\infty$. Sin embargo, estos resultados no se encuentran dentro de los objetivos de este trabajo.

De nuevo, probaremos primero que el teorema de de Galvin generaliza los teoremas de Ramsey, y concluimos la sección con una demostración del teorema de Galvin.

Teorema 3.3.1. (Galvin) Para toda familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, y todo subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}$, existe $N \subseteq M$ tal que se cumple una de las siguientes alternativas:

(i) $\mathscr{F}|N = \emptyset$, i.e. $N^{[<\infty]} \cap \mathscr{F} = \emptyset$.

(ii) Todo subconjunto infinito de N tiene un segmento inicial en $\mathscr{F}$.

Como veremos a continuación, el teorema de Galvin es una generalización del teorema de Nash-Williams.

El teorema Galvin implica el teorema de Nash-Williams

Demostración. Probaremos el teorema por inducción fuerte en la cardinalidad de la partición en la definición de “ser una familia Ramsey". Sean $\mathscr{F}$ una familia Nash-Williams, un subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ y una partición $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ de $\mathscr{F}$. Aplicando el teorema de Galvin a $\mathscr{F}_1$, tenemos que existe $N \subseteq M$ tal que una de las siguientes alternativas es verdadera:

(i). $\mathscr{F}_1|N = \emptyset$.

(ii). Para todo subconjunto infinito $P \subseteq N$, existe $s \in \mathscr{F}_1$ tal que $s \sqsubseteq P$.

Si vale (i), $\mathscr{F}|N = \mathscr{F}_2|N$. Supongamos entonces que vale (ii). Mostraremos que $\mathscr{F}_2|N = \emptyset$ mediante un argumento indirecto. Supongamos que existe $s \in N^{[<\infty]}$ tal que $s \in \mathscr{F}_2$, entonces $s \sqsubseteq s \cup N/s$. Por otro lado, por (ii), para $P = s \cup N/s$, tenemos que existe $t \in \mathscr{F}_1$ tal que $t \sqsubseteq$

$s \cup N/s$, esto implica que s y t son $\sqsubseteq$-comparables, lo cual es absurdo pues $s \neq t$ y $\mathscr{F}$ es Nash-Williams. Con esto se concluye la base de la inducción.

Sea $r \in \mathbb{N}^+$, supongamos que para toda familia Nash-Williams $\mathscr{F}$ y toda k-partición de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$, con $2 \leq k \leq r$, existe $N \subseteq M$ tal que a lo sumo una de las restricciones $\mathscr{F}_1|N, \ldots, \mathscr{F}_k|N$ es no vacía. Sea $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_r, \mathscr{F}_{r+1}$ una partición de $\mathscr{F}$, considere la partición $\overline{\mathscr{F}}_1, \ldots, \overline{\mathscr{F}}_r$ dada por $\overline{\mathscr{F}}_i = \mathscr{F}_i$ si $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $\overline{\mathscr{F}_r} = \mathscr{F}_r \cup \mathscr{F}_{r+1}$. Por la hipótesis de inducción tenemos que existe $N \subseteq M$ tal que $\mathscr{F}|N = \overline{\mathscr{F}}_i|N$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$. Si $\mathscr{F}|N = \emptyset$, no hace falta hacer nada más. Si existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mathscr{F}|N = \overline{\mathscr{F}}_i|N \neq \emptyset$, pueden ocurrir dos casos:

(i). $i \in \{1, \ldots, r-1\}$.

(ii). $i = r$.

Si (i) vale, tenemos que $\mathscr{F}|N = \mathscr{F}_i|N$. Si (ii) vale, por la hipótesis inductiva aplicada a $\overline{\mathscr{F}_r}$ existe $P \subseteq N$ tal que existe $i \in \{r, r+1\}$ tal que $\mathscr{F}|P = \mathscr{F}_i|P$. Por lo tanto tenemos que existe $P \subseteq M$, $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ tal que $\mathscr{F}|P = \mathscr{F}_i|P$, es decir, P es monocromático de color i. $\square$

En la siguiente definición es importante recordar que el conjunto $[s, A]$ hace referencia al conjunto $\{N \subseteq A \cup s : s \sqsubset N\}$.

Definición 3.3.2. Diremos que $A \subseteq \mathbb{N}$ $\mathscr{F}$***-acepta*** a s, si todo elemento de $[s, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathscr{F}$; A **rechaza** a s si ningún subconjunto de A acepta a s. Decimos que A **decide** a s si A acepta o rechaza a s.

Es posible que el lector asocie estas nuevas definiciones de aceptar y rechazar con las definiciones de aceptar fuertemente y rechazar, respectivamente, dadas en la definiciones 3.2.2 y 3.2.3. Sin embargo, veremos a continuación que estas nuevas definiciones de aceptar y rechazar no son equivalentes a las anteriores.

Ejemplo 3.3.3. Aceptar fuertemente en la definición 3.2.2 no implica aceptar en la definición 3.3.2.

Sea $s = \{1,2,3\}$, $\mathscr{F} = \{s \cup \{n\} : n \geq 6 \text{ y } n \text{ es par }\}$, y M el conjunto de los pares. Tenemos que M $\mathscr{F}$-acepta fuertemente a s según la definición 3.2.2. Sin embargo, M no $\mathscr{F}$-acepta a s según la definición 3.3.2. En efecto, tome A como el conjunto de los múltiplos de 4. Es claro que $A \cup s \in [s,M]$ y que para todo $t \in \mathscr{F}$, $t \not\sqsubseteq A \cup s$.

Ejemplo 3.3.4. Rechazar en la definición 3.3.2 no implica rechazar en la definición 3.2.2.

Sea M el conjunto de los pares, $\mathscr{F} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\ldots\}$, y $s = \{1,2,3\}$. Afirmamos que M $\mathscr{F}$-rechaza a s con la definición 3.3.2. En efecto, sea $A \subseteq M$. Tenemos que $s \cup A/4 \in [s,A]$ y que para todo $t \in \mathscr{F}$, $t \not\sqsubseteq s \cup A/4$. Como A era arbitrario, tenemos que M rechaza a s.

Ahora, note que M $\mathscr{F}$-acepta a s con la definición 3.2.2, pues $s \sqsubseteq \{1,2,3,4\}$ y $\{1,2,3,4\} \subseteq M \cup s$. Por lo tanto, M no $\mathscr{F}$-rechaza a s con la definición 3.2.2.

Ejemplo 3.3.5. Aceptar en la definición 3.3.2 implica aceptar fuertemente en la definición 3.2.2.

Demostración. Sean $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $s, M \subseteq \mathbb{N}$ tal que M acepta a s según la definición 3.3.2. Así, para todo $A \in [s, M]$, existe $t \in \mathscr{F}$ tal que $t \sqsubseteq A$. Veamos que M acepta fuertemente a s según la definición 3.2.2. Sea $B \subseteq M$, tenemos que existe $t \in \mathscr{F}$ tal que $t \sqsubseteq s \cup B/s \in [s, M]$. Esto implica que t es $\sqsubseteq$-comparable con s y $t \subseteq s \cup B$, lo cual quiere decir que M acepta fuertemente a s. □

Ejemplo 3.3.6. Rechazar en la definición 3.2.2 implica rechazar en la definición 3.3.2

Demostración. Sean $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $s, M \subseteq \mathbb{N}$ tal que M rechaza a s según la definición 3.2.2. Veamos que M rechaza a s según la definición 3.3.2. Sea $A \subseteq M$. Para todo $t \in \mathscr{F}$ ocurre al menos una de las siguientes alternativas:

(i) $s \not\sqsubseteq t$ y $t \not\sqsubseteq s$.

En este caso tenemos que para todo $B \in [s, A]$, $t \not\sqsubseteq B$.

(ii) $t \not\subseteq M \cup s$.

En este caso tenemos que para todo $B \in [s, A]$, $t \not\subseteq B$ pues $B \subseteq M \cup s$. En consecuencia, $t \not\sqsubseteq B$.

Concluimos que ningún subconjunto de M acepta a s según la definición 3.3.2. Por lo tanto M rechaza a s según la definición 3.3.2. □

De ahora en adelante cuando se hable de aceptar o rechazar se hará referencia exclusivamente a la definición 3.3.2.

Lema 3.3.7. Sea $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Si A acepta (rechaza) s, entonces todo $B \subseteq A$ acepta (rechaza, respectivamente) s.

Demostración. Sean $A, s \subseteq \mathbb{N}$ tal que A acepta a s, y sea $B \subseteq A$. Es claro que todo elemento de $[s,B]$ es un elemento de $[s,A]$, por lo tanto todo elemento de $[s,B]$ tiene un segmento inicial en $\mathscr{F}$.

Supongamos ahora que A rechaza a s. Sea $B \subseteq A$ y sea $C \subseteq B$. Como $C \subseteq A$, C no acepta a s. $\square$

Lema 3.3.8. Sea $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Dados $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$, existe $B \subseteq A$ que decide a s.

Demostración. Note que si A no decide a s es por que no acepta ni rechaza a s. Como A no rechaza a s, tenemos que existe un subconjunto de $B \subseteq A$ que acepta a s y por lo tanto B decide a s. $\square$

Lema 3.3.9. Sea $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Si A $\mathscr{F}$-acepta s, entonces A $\mathscr{F}$-acepta $s \cup \{n\}$ para cada $n \in A/s$.

Demostración. Sea $n \in A/s$. Tenemos que todo elemento de $[s,A]$ posee un segmento inicial en $\mathscr{F}$. Basta ver que $[s \cup \{n\}, A] \subseteq [s,A]$. Sea $C \in [s \cup \{n\}, A]$, entonces $s \cup \{n\} \sqsubset C$ y $C \subseteq A \cup s \cup \{n\} = A \cup s$, pero como $s \sqsubset s \cup \{n\}$, tenemos que $s \sqsubset C$, y así $[s \cup \{n\}, A] \subseteq [s,A]$. $\square$

Lema 3.3.10. Sea $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Si A rechaza a s, entonces el conjunto $B = \{n \in A/s : A \text{ acepta a } s \cup \{n\}\}$ es finito.

Demostración. Supongamos, contrariamente a lo que queremos probar, que B es infinito. Mostraremos que B acepta a s. Sean $C \in [s,B]$ y $n = \text{mín}(C/s)$, como A acepta a $s \cup \{n\}$, todo elemento de $[s \cup \{n\}, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathscr{F}$, en particular C. Entonces B acepta a s, pues C era arbitrario.

Por hipótesis tenemos que A rechaza a s, y por el lema 3.3.7, tenemos que B rechaza a s, lo cuál es absurdo. $\square$

Lema 3.3.11. Sea $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$. Dado $M \subset \mathbb{N}$, existe $P \subseteq M$ que decide a cada unos de sus subconjuntos finitos.

Demostración. Sea $s \in [M]^{<\infty}$, Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{D}_s := \{C \subseteq M : C \text{ decide a } s\}.$$

Note que los lemas 3.3.7 y 3.3.8 implican que $\mathscr{D}_s$ es abierto y denso en $([M]^\infty, \subseteq)$.

Por el lema 3.1.16, existe una diagonalización D de $(\mathscr{D}_s)_{s\in[M]^{<\infty}}$, es decir, $D/s \in \mathscr{D}_s$ para todo $s \in [D]^{<\infty}$.

Veamos que D decide todos sus subconjuntos finitos. Sea $s \in [D]^{<\infty}$. Como $D/s \in \mathscr{D}_s$ tenemos que D/s decide a s. Si D/s acepta a s, D decide a s pues $[s, D/s] = [s, D]$. Ahora veamos que D rechaza a s cuando D/s rechaza a s. Sea $A \subseteq D$, como $A/s \subseteq D/s$, tenemos que A/s no acepta a s. Por lo tanto, existe $B \in [s, A/s]$ tal que B no tiene segmento inicial en $\mathscr{F}$. Como $[s, A/s] = [s, A]$, concluimos que A no acepta a s, esto es, D rechaza a s. $\square$

Con los lemas anteriores es posible probar el **teorema de Galvin** (ver teorema 3.3.1).

Demostración. Sean $\mathscr{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\infty}$ y $M \subseteq \mathbb{N}$. Por el lema 3.3.11, fijamos $B \subseteq M$ que decide a todos sus subconjuntos finitos. Si B acepta a $\emptyset$, entonces (ii) del teorema vale. En efecto, tendríamos que todo elemento de $[\emptyset, B] = [B]^\infty$ tiene un segmento inicial en $\mathscr{F}$.

Supongamos entonces que B rechaza a $\emptyset$. Definamos una colección $\mathscr{G}_s$ de abiertos densos para todo $s \in [B]^{<\infty}$. Para cada $s \in [B]^{<\infty}$ rechazado por B definimos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{G}_s = \{C \subseteq B : C \text{ rechaza a } s \cup \{n\} \text{ para cada } n \in C/s\}.$$

Cuando B acepta a s definimos $\mathscr{G}_s = [B]^\infty$.

Veamos que los conjuntos $\mathscr{G}_s$ son abiertos y densos en $([B]^\infty, \subseteq)$. Si B acepta a s, entonces $\mathscr{G}_s := [B]^\infty$ y este conjunto es claramente abierto y denso. Consideramos el caso cuando B rechaza a s. Primero veamos que son densos. Sean $s \in [B]^{<\infty}$ tal que B rechaza a s, $A \subseteq B$ y

$$C := \{n \in A/s : A \text{ no acepta a } s \cup \{n\}\}.$$

C es infinito pues $(A/s) \setminus C = \{n \in A/s : A \text{ acepta a } s \cup \{n\}\}$, el cual es finito por el lema 3.3.10 ya que A rechaza a s.

Mostraremos que $C \in \mathscr{G}_s$. Como $A \subseteq B$, A decide todos los subconjuntos finitos de B, luego A rechaza a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in C/s$. Por el lema 3.3.7, C rechaza a $s \cup \{n\}$ para todo $n \in C/s$. Por lo tanto $C \in \mathscr{G}_s$. La arbitrariedad de A implica que $\mathscr{G}_s$ es denso en $([B]^\infty, \subseteq)$. Veamos ahora que $\mathscr{G}_s$ es abierto. Sean $A \in \mathscr{G}_s$, $C \subseteq A$ y $n \in C/s$. Puesto que $n \in C/s$, $n \in A/s$ y por lo tanto A rechaza a $s \cup \{n\}$. Por el lema 3.3.7 C rechaza a $s \cup \{n\}$ y por lo tanto $C \in \mathscr{G}_s$.

Por el lema 3.1.16 tenemos que existe $N \subseteq B$ tal que $N/s \in \mathscr{G}_s$ para todo $s \in [N]^{<\infty}$. Mostraremos que $\mathscr{F}|N = \emptyset$. Para esto basta mostrar que N rechaza a todos sus subconjuntos finitos. Supongamos que esto ya lo mostramos y veamos que $\mathscr{F}|N = \emptyset$ mediante un argumento indirecto. Supongamos que existe $s \in [N]^{<\infty} \cap \mathscr{F}$. Entonces s es segmento inicial de todo elemento de $[s, N]$ y consecuentemente N acepta a s, lo cual contradice el hecho de que N rechaza a todos sus subconjuntos finitos.

Veamos ahora que N rechaza a todos sus subconjuntos finitos usando inducción en la cardinalidad de s. Como $N \in \mathscr{G}_\emptyset$, N rechaza a $\{n\}$ para todo $n \in N$. Supongamos ahora que N rechaza a todos los elementos de $[N]^n$. Sea $s \in [N]^{n+1}$ y $t = \{k_1, \ldots, k_n\}$(los primeros n elementos de s), como $N \in \mathscr{G}_t$, N rechaza a $t \cup \{k_{n+1}\} = s$. $\square$

Referencias Bibliográficas

Katz, M. and Reimann, J. (2018). *An Introduction to Ramsey Theory*, volume 87. American Mathematical Soc.

O'Connor, J. and Robertson, E. (2003). Frank plumpton ramsey. *MacTutor History of Mathematics archive*.

Pacheco Tobo, W. L. et al. (2014). Forcing con coideales semiselectivos. Master's thesis, Uniandes.

Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):264–286.

Sah, A. (2020). Diagonal ramsey via effective quasirandomness. *arXiv preprint arXiv:2005.09251*.

Spencer, J. (1977). Asymptotic lower bounds for ramsey functions. *Discrete Mathematics*, 20:69–76.

Todorcevic, S. (2010). *Introduction to ramsey spaces (am-174)*, volume 174. Princeton University Press.