EQUIVALENCIA ENTRE PREÓRDENES Y TOPOLOGÍAS

CARLOS AUGUSTO DÍAZ ROJAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005

EQUIVALENCIA ENTRE PREÓRDENES Y TOPOLOGÍAS

CARLOS AUGUSTO DÍAZ ROJAS

Monografía presentada como
requisito para optar al titulo
de *Licenciado en Matemáticas*

Rafael Fernando Isaacs Giraldo.
Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2005

A lo mas importante de mi vida

mi familia

que confió siempre en mis capacidades y me brindo su apoyo.

Agradecimientos

Doy mis mas sinceros agradecimientos:

- A mis padres Fabio Díaz y Martha Rojas por brindarmen su apoyo, cariño y comprensión.
- A mis hermanos Fabio, Maria Angelica y Luis Alejandro por su apoyo moral y afectivo.
- A mi sobrina Estefany que con su ternura a alegrado mi vida.
- A mi novia Adriana Marcela por su compresión, su apoyo incondicional y su grata compañía en todos estos años.
- A mi primo Félix Páez por ser un gran amigo y por brindarme su ayuda en el trascurso de toda la carrera.
- A mis compañeros de la universidad por su amistad y colaboración.
- A el profesor Rafael Isaacs quien además de ser un excelente director de monografía, es una gran persona.

TITULO: EQUIVALENCIA ENTRE PREÓRDENES Y TOPOLOGÍAS*

AUTOR: DÍAZ ROJAS Carlos Augusto**

PALABRAS CLAVES: topologías generadas por preórdenes, preórdenes generados por topologías, conexidad, compacidad, isomorfismos categóricos.

DESCRIPCIÓN

Algunas propiedades topológicas se han ido estudiando a través de preórdenes desde hace ya hace varios años, debido a características que tienen en común . Principalmente se tiene que a partir de un preorden se puede crear una topología de igual forma a partir de una topología se puede crear un preorden. Por esta razón, en esta monografía se trabajan tres objetivos específicos que se desprenden de algunos resultados obtenidos de este estudio. El primero de ellos es la introducción de condiciones que permitan establecer la conexidad en el producto arbitrario de espacios topológicos conexos. El segundo consiste en mostrar algunos isomorfismos categóricos que se forman entre conjuntos preordenados y espacios topológicos. Dichos espacios son aquellos que son cerrados para intersecciones arbitrarias. Por último se ve que la compacidad de un espacio topológico se puede definir a través de su preorden generado.

Para realizar estos objetivos es necesario definir lo que son preórdenes generados por topologías y topologías generadas por preórdenes, ampliando estas definiciones al producto directo de preórdenes, topología producto y topología por cajas, y al definir el concepto de conexidad en conjuntos preordenados, se obtienen las herramientas necesarias para alcanzar el primer objetivo.

Para el segundo objetivo se tiene en cuenta lo anterior junto con el hecho que todo preorden es generado por una única hipertopología y toda hipertopología es generada por un único preorden, como también que los morfismos entre conjuntos preordenados son exactamente las funciones continuas entre espacios hipertopológicos. En especial se tiene que los espacios T_0 generan relaciones de orden y viceversa. Este último argumento permite establecer una caracterización de los espacios compactos T_0 que sirve como enlace para obtener el último objetivo.

---

*Monografía

**Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

TITLE: EQUIVALENCY BETWEEN PREORDERS AND TOPOLOGIES*

AUTHOR: DÍAZ ROJAS Carlos Augusto**

KEY WORDS: Topologies generated for preorders, preorders generated for topologies, compactness, connects, categorical isomorphisms..

DESCRIPTION

Some properties have been studying through preorders from several years ago, because of characteristics that they have in common. Mainly we have that from a preorder we can create a topology in the same way from a topology we can create a preorder. For this reason, in this monograph three specific objectives has been worked which are results from this study. The first one is the introduction to conditions that let to establish connects in the arbitrary product of connected topological spaces. The second one consists of to show some categorical isomorphisms that are formed between preordered sets and topological spaces. These spaces are which are closed for arbitrary intersections. Finally, we see that the compactness of a topological space could be defined through its preorder generated.

For carrying out these objectives is necessary to define what are preorders generated for topologies and topologies generated for preorders, widening these definitions to the direct product of preorders, product topology and topology for boxes, and when the concept of connects in preorders sets is defined, the necessary tools for achieve the first objective are obtained.

For the second objective, it is bearing the previous information in mind with the fact of that all preorder is generated for a unique hypertopology and all hypertopology is generated for a unique preorder, also morphisms among preorders sets are exactly the continuous functions among hypertopological spaces. Especially, we have that the To spaces generate orden relations and vice versa. This last argument lets to establish a description of compact spaces To that is useful as link for obtaining the last objective.

---

*Monograph

**Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Aun cuando algunas propiedades topológicas se han venido estudiando a través de preórdenes desde hace ya varios años por muchos autores entre los que podemos citar a Ore, Alexandrov, Lorrain, Larson, Andima, Thron, Scott, Lawson, Kopperman, Kronheimer, Wilson, entre otros, sus resultados no son muy conocidos en el entorno matemático ([2]). En esta monografía trabajamos tres objetivos específicos que se desprenden de estos trabajos. El primero de ellos es la introducción de condiciones que nos permitan establecer la conexidad en el producto arbitrario de espacios topológicos. El segundo consiste en mostrar algunos isomorfismos categóricos que se forman entre las categorías de los conjuntos preordenados y la categoría de los espacios hipertopológicos. Dichos espacios son definidos en el capítulo **3**. Por último veremos que la compacidad de un espacio topológico se puede definir a través de su preorden generado.

Para llevar acabo estos objetivos iniciamos en el capítulo **1** mencionando brevemente algunas nociones y resultados conocidos tanto en la parte de topología como en la parte de relaciones de orden y equivalencia que se utilizan en el desarrollo de esta monografía. Igualmente damos las nociones de categorías y functores, así como de isomorfismos categóricos.

En el capítulo **2** trabajamos la parte de conjuntos preordenados en donde definimos lo que son conjuntos abiertos y cerrados centrándonos en una clase especial de dichos conjuntos que llamaremos abiertos fundamentales, también definimos conexidad y mostramos que el producto directo arbitrario de conjuntos preordenados conexos, es conexo y finalizamos con morfismos entre preórdenes con los cuales se define la categoría de los conjuntos preordenados. Los resultados obtenidos en este capítulo son utilizados en el capítulo **3** para definir lo que son preórdenes generados por topologías y topologías generadas por preórdenes ampliando estas definiciones al producto directo de preórdenes, topología producto y topología de cajas en donde observamos que el preorden generado por la topología producto y de cajas coinciden al igual que la topología generada por el producto directo de preórdenes es una topología de cajas; otro resultado que se obtiene, es que todo preorden es generado al menos por una topología pero no necesariamente toda topología es generada por un preorden, salvo en el caso de hipertopologías que además cumplen con propiedades interesantes como por ejemplo, todo espacio hipertopológico es conexo si, y solo si, el conjunto preordenado que este genera también lo es; al igual, se tiene que la topología de cajas conformada por hipertopologías es también una hipertopología. Teniendo en cuenta las propiedades ya mencionadas en lo referente al producto, y algunas otras que veremos en este capítulo llegaremos a nuestro primer objetivo.

Para obtener nuestro segundo objetivo mostramos que las funciones continuas entre espacios hipertopológicos son exactamente los morfismos entre los preórdenes, como también que todo espacio topológico T_0 genera un conjunto ordenado y todo conjunto ordenado genera un espacio topológico T_0. En especial se tendrá que la única hipertopología T_1 es la discreta.

Nuestro último objetivo es trabajado en el capítulo **4** y se lleva a cabo mediante una serie resultados en compacidad iniciando con una caracterización de los espacios topológicos T_0 que resulta ser una generalización del resultado obtenido por Lorrain (véase [7]) en espacios hipertopológicos compactos. Una vez obtenido esta caracterización definimos el espacio topológico cociente $(X/R, \tau/R)$ que se forma a partir de un espacio topológico (X, τ) y de una relación de equivalencia R sobre el mismo conjunto X. Este espacio topológico cociente es trabajado especialmente con una relación de equivalencia notada como $\bar{\Re}$ y genera siempre a partir de τ con lo cual se tiene que $(X/\bar{\Re}, \tau/\bar{\Re})$ siempre es T_0, además comparte similitudes con (X, τ) que nos lleva a obtener nuestro último resultado (véase [1]).

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo damos una serie de conceptos o nociones básicas que usaremos a lo largo de esta monografía con las cuales el lector debe estar ya familiarizado, como lo son el concepto de relaciones de orden y de equivalencia; al igual, aquellos que se presentan en cualquier curso introductorio a la topología. Es por esta razón que no entraremos en mayores detalles. Las demostraciones referente a relaciones de equivalencia y orden se encuentran en [9], salvo el lema de Zorn el cual se encuentra en [4] y las referentes a topología se encuentran en [8] y [11]

Relaciones de equivalencia

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío y sea R una relación sobre X. Se dice que la relación R es de equivalencia si ésta satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in X, \;\; (x, x) \in R$. "Reflexiva."
2. $\forall x, y, z \in X((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$. "Transitiva."
3. $\forall x, y \in X((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$. "Simétrica."

Definición 1.2. sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X y se a un elemento de X, se define la ***clase de equivalencia de*** a como el conjunto de los elementos de X que están relacionados con a mediante R dicho conjunto lo notaremos como $\overline{a}_R$ o simplemente $\overline{a}$ si se sobre entiende cual es la relación de equivalencia.

Lema 1.1. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto X y $x, y \in X$, se tiene que:

1. $x \in \overline{x}$.
2. Las afirmaciones $(x, y) \in R$, $x \in \overline{y}$, $\overline{x} = \overline{y}$ son equivalentes.

Dada una relación de equivalencia R sobre X, como una clase de equivalencia de un elemento de X es un subconjunto de X, podemos formar el conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a R de los elementos de X (notado X/R) con solo separar de la colección de todos lo subconjuntos de X, "$\mathcal{P}(X)$" aquellos elementos que sean clases de equivalencia según R, es decir,

$$X/R = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid (\exists x \in X)(Y = \overline{x})\}.$$

Se le acostumbra llamar el ***conjunto cociente*** de X por R.

Definición 1.3. Una ***partición*** de un conjunto no vacío X es una colección de subconjuntos no vacíos de X, disyuntos dos a dos y cuya unión es X.

Teorema 1.1. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X, el conjunto cociente X/R forma una partición de X.

Relaciones de orden

Definición 1.4. Sea X un conjunto no vacío y sea R una relación sobre X. Se dice que la relación R es antisimétrica si para todo $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ implica que $x = y$. Igualmente se dice que R es una relación de orden sobre X o que (X, R) es un conjunto ordenado si R es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Además si para todo $x, y \in R$ se tiene que $(x, y) \in R$ o $(y, x) \in R$, se dice que R es un ***orden total*** sobre X o que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Si (X, R) es un conjunto ordenado y A un subconjunto de X, $R \cap (A \times A)$ es una relación de orden sobre A y se dice que ésta es inducida por la primera; siempre que consideremos un subconjunto de un conjunto ordenado lo supondremos provisto de su ordenación inducida.

Definición 1.5. Sea (X, R) un conjunto ordenado; una ***R-cadena*** de X (o simplemente cadena cuando no haya lugar a confusión con respecto del orden a consideración) es un subconjunto de X totalmente ordenado por la relación de orden inducida por R.

Definición 1.6. Sea (X, R) un conjunto ordenado y A un subconjunto de X, una ***cota inferior*** de A es cualquier elemento x de X tal que para todo $a \in A$ se cumple que $(x, a) \in R$. Si existen cotas inferiores de A se dice que A esta ***acotado inferiormente***. Igualmente, una ***cota superior*** de A es cualquier elemento x de X tal que para todo $a \in A$ se cumple que $(a, x) \in R$. Si existen cotas superiores de A se dice que A esta ***acotado superiormente***.

Definición 1.7. Sea (X, R) un conjunto ordenado y A un subconjunto de X, un elemento a de A se dice ***minimal*** en A si para cualquier elemento x de X, $(x, a) \in R$ implica que $x = a$. Igualmente se dice que a es ***maximal*** si para cualquier elemento x de X, $(a, x) \in R$ implica que $x = a$.

Lema de Zorn. Si $(X.R)$ es un conjunto ordenado, tal que toda cadena de X es acotada superiormente en X, entonces X posee al menos un elemento maximal.
Un resultado dual del lema de Zorn es que si $(X.R)$ es un conjunto ordenado, tal que toda cadena de X es acotada inferiormente en X, entonces X posee al menos un elemento minimal; por consiguiente cuando utilicemos en el capítulo cuatro el lema de Zorn estaremos utilizando en realidad su dual.

Espacios topológicos

Proposición 1.1. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en τ.
2. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.
3. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

A la pareja (X, τ) se le conoce como ***espacio topológico*** y a los elementos de τ como ***abiertos***.

Ejemplo 1.1.
(a) Sobre todo conjunto X no vacío siempre se pueden definir al menos dos topologías. la primera es la colección de todos los subconjuntos de X, es decir, partes de X, "$\mathcal{P}(X)$" la cual se denomina **topología discreta** y suele notarse como τ_{disc}. La segunda esta compuesta

únicamente por X y $\emptyset$ y se denomina la **topología trivial**, o **indiscreta**, la cual suele notarse τ_{triv}.

(b) Sea X un conjunto y sea τ_f la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es finito o es todo X. Entonces τ_f es una topología sobre X, llamada ***topología de complementos finitos***.

Definición 1.8. Supongamos que τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\tau' \supseteq \tau$, diremos que τ' es ***más fina*** que τ; si τ' contiene propiamente a τ, diremos que τ' es ***estrictamente más fina*** que τ. Diremos que τ es comparable con τ' si $\tau' \supseteq \tau$ ó $\tau \supseteq \tau'$.

Definición 1.9. Si X es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X llamados "***elementos básicos***"tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si β satisface estas dos condiciones, se define y se nota $\langle\beta\rangle$ a la ***topología generada por*** β como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto según $\langle\beta\rangle$, si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq \beta$, es decir, si $U = \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha$ donde $B_\alpha \in \beta$ para cada $\alpha \in J$.

Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\langle\beta\rangle$.

Ejemplo 1.2.

(a) Sea β es la colección de todos los intervalos en la recta real,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

La topología generada por β se denomina ***topología usual*** sobre la recta real "$\mathbb{R}$", la cual suele notarse τ_u.

(b) Sea β' es la colección de todos los intervalos en la recta real,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

La topología generada por β se denomina ***topología del límite inferior***. sobre $\mathbb{R}$, la cual suele notarse τ_ℓ.

(c) Sea K el conjunto de todos los numeros de la forma $1/n$, para n en los enteros positivos y sea β'' la colección de todos los intervalos en $\mathbb{R}$ de la forma (a, b), junto con todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. La topología generada por β'' se denomina ***K-topología*** sobre $\mathbb{R}$, la cual suele notarse τ_K.
Las topologías τ_ℓ y τ_K son estrictamente mas finas que la topología τ_u, pero no son comparables.
(d) Si $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y $x \in X$, Sea $\beta^\star$ la colección de los conjuntos

$$[x, \infty) = \{y \in X \in x \leq y\}.$$

La topología generada por $\beta^\star$ se denomina ***topología de colas a la derecha*** o simplemente ***topología de colas*** y se denota por τ_{colas}.

Definición 1.10. Una **subbase** S para una topología sobre X es una subcolección de X cuya unión es igual a X. La colección β de todas las intersecciones finitas de elementos de S es una base para una topología sobre X, la cual se le conoce como la ***topología generada por la subbase*** S.

Definición 1.11. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

Es una topología sobre Y, denominada topología del subespacio; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de τ con Y.

Definición 1.12. Sean (X, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de X, se dice que A es ***cerrado*** según τ si el conjunto $X - A$ es abierto. Si se sobre entiende en qué espacio topológico se esta trabajando se dice simplemente que A es cerrado. De igual forma se define la adherencia de B y se nota $adh(B)$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a B. Si $adh_\tau(B) = X$ se dice que B es ***denso***. Si no hay lugar a confusiones la adherencia de B se nota simplemente $adh(B)$.

Por definición siempre se tiene que $B \subseteq adh(B)$

Teorema 1.2. Si (X, τ) un espacio topológico, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\emptyset$ y X son cerrados.

2. Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

3. Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.

Un resultado inmediato del teorema anterior es que en un espacio topológico un conjunto es cerrado si coincide con su adherencia.

Definición 1.13. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que x es un punto cerrado, si $adh\{x\} = \{x\}$.

Teorema 1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X, entonces.

1. $x \in adh(A)$ si, y sólo si, cada conjunto abierto U que contiene a x interseca a A. Es decir, $U \cap A \neq \emptyset$.

2. Si β es una base para τ, entonces $x \in adh(A)$ si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

Definición 1.14. Sean (X, τ) y (Y, τ') espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es **continua** si para cada subconjunto abierto U de τ', el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en τ. Si además f es biyección y la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua, se dice que f es un ***homeomorfismo*** y que X es homeomorfo a Y $(X \cong Y)$.

Ejemplo 1.3.
(a) Si $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_\ell)$ es la función identidad: $f(x) = x$ para cada numero real x. Entonces f no es una función continua; la imagen inversa del conjunto abierto $[a, b)$ de τ_ℓ es él mismo, que no es abierto en τ_u. Por otro lado la función identidad $g : (\mathbb{R}, \tau_\ell) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua, porque la imagen inversa de de (a, b) es él mismo, que es abierto en τ_ℓ.
b La función $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau u)$ dada por $f(x) = 2x + 1$ es un homeomorfismo. si definimos $g : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau u)$ dada por $g(y) = (y - 1)/2$ para todo x y y en $\mathbb{R}$ entonces se tiene $f(g(y)) = y$ y $g(f(x)) = x$. Se sigue que f es biyectiva y que $g = f^{-1}$; la continuidad de f y g es un resultado familiar del cálculo.

Definición 1.15. Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una J-upla de elementos de X como una función $\mathbf{x} : J \to X$. Si α es un elemento de J notaremos como x_α a $\mathbf{x}(\alpha)$ donde x_α la llamaremos la α-ésima **coordenada** de $\mathbf{x}$. Así mismo, si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de conjuntos indexados, definimos el producto cartesiano de esta familia indexada, denotado por $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$, como el conjunto de todas las J-uplas $\mathbf{x}$ de elementos de $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ tales que $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$, simbólicamente.

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha = \{\mathbf{x} : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \mid \forall\alpha \in J(x_\alpha \in A_\alpha)\}.$$

Además, para cada $\beta \in J$, se define la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima como,

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \to A_\beta,$$

donde $\pi_\beta(\mathbf{x}) = x_\beta$, la función π_β se denomina ***proyección*** asociada con el subíndice β.
Si se sobre entiende cual es el conjunto de índices, notaremos simplemente al espacio producto como $\prod A_\alpha$ y en ocasiones su elemento general por (x_α).

Definición 1.16. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. El conjunto $\{\prod A_\alpha \mid A_\alpha \in \tau_\alpha\}$ es una base para una topología sobre el espacio producto $\prod X_\alpha$, denominada ***topología por cajas***, la cual notaremos como $\otimes^c \tau_\alpha$.
De igual forma, los conjuntos $S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \in \tau_\beta\}$, forman una subbase para una topología sobre el espacio producto $\prod X_\alpha$ denominada topología producto, la cual notaremos por $\otimes\tau_\alpha$.

La principal diferencia entre la topología por cajas y la producto es que la primera tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada α, mientras que la topología producto tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un numero finito de valores de α. Por consiguiente se sigue que la topología por cajas es mas fina que la topología producto.

Teorema 1.4. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos y para cada $\alpha \in J$ sea β_α una base para τ_α. La colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \beta_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod X_\alpha$.

Definición 1.17. Si τ es una topología sobre un conjunto X, se dice que el espacio topológico (X, τ) es conexo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son vacío y el propio X.

Lema 1.2. $\mathbb{R}$ con la topología usual es conexo.

Definición 1.18. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección A de subconjuntos de X se dice que es un ***cubrimiento*** de X, si la unión de los elementos de A coincide con X. Si A esta formado por conjuntos abiertos de (X, τ), se dice que A es un cubrimiento abierto de X. Se dice que X es ***compacto*** si de cada cubrimiento abierto de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre a X.

Proposición 1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y Y es un subconjunto de X. entonces (Y, τ_Y) es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de (X, τ) contiene una subcolección finita que cubre a Y.

Definición 1.19. Si X es un conjunto y $\mathfrak{C}$ una colección de subconjuntos de X, se dice que $\mathfrak{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita de $\mathfrak{C}$ tiene intersección no vacía.

Teorema 1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathfrak{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C \neq \emptyset$.

Teorema 1.6. La imagen de un espacio compacto baja una aplicación continua es un espacio compacto.

Definición 1.20. Se dice que un espacio topológico (X, τ) es T_0, si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ pero $y \notin U$ o $y \in U$ pero $x \notin U$. De igual forma se dice que (X, τ) es T_1, si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $U_1,\ U_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1$ pero $y \notin U_1$ y $y \in U_2$ pero $x \notin U_2$.

Un resultado inmediato que se obtiene de la definición anterior es que todo espacio topológico T_1 es T_0. A continuación enunciamos una propiedad que caracteriza los espacios topológicos T_1.

Proposición 1.3. Un espacio topológico X es T_1 si, y sólo si, todo elemento de X es un punto es cerrado.

Proposición 1.4. Si τ y τ' son topologías sobre X tal que τ' es mas fina que τ. Entonces, si (X, τ) es T_0, (X, τ') es T_0.

Para terminar damos algunos conceptos básicos de categorías.

Categorías

Definición 1.21. Una ***categoría*** es una cuádrupla $C = (Ob, Mor, id, \circ)$ donde:

1. $Ob(\mathcal{C})$ es una clase no vacía cuyos elementos son llamados ***objetos*** de $\mathcal{C}$.

2. Para cada par (A, B) de objetos de C existe un conjunto $Mor_C(A, B)$ cuyos elementos son llamados morfismos de A en B y se notan con letras f,g,h,...etc, o completamente así,
   $f : A \to B, ...,$ o, $A \xrightarrow{f} B, ...,$ al objeto A se le llama dominio de f y al objeto B codominio de f. La reunión de todos los conjunto de morfismos, constituye la colección de morfismos de la categoría y se nota $Mor(\mathcal{C})$. Si no hay lugar a confusiones el conjunto $Mor_C(A, B)$ se nota simplemente $Mor(A, B)$. Si $(A, B) \neq (C, D)$ entonces $Mor(A, B) \cap Mor(C, D) = \emptyset$.

3. "$\circ$" es una ley de composición interna en $Mor(\mathcal{C})$ llamada composición, tal que para cada morfismo $A \xrightarrow{g} B$ y cada morfismo $B \xrightarrow{f} C$,existe un morfismo $A \xrightarrow{f \circ g} C$ llamado la composición de f y g sujeto a las siguientes condiciones:
   i. Asociatividad: para todos los morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ se tiene la siguiente igualdad.
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
   ii. Identidad: Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ existe un morfismo $id_A \in Mor(A, A)$ llamado identidad en A, notado por $A \xrightarrow{id_A} A$ tal que para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ y cada morfismo $C \xrightarrow{g} A$ se tiene las igualdades.
   $$f \circ id_A = f \text{ y } id_A \circ g = g.$$

Ejemplo 1.4.
a. La categoría de los conjuntos, notada ***Conj***. Los objetos de esta categoría son los conjuntos; los morfismos son las funciones, y la ley de composición en los morfismos corresponde a la composición usual de funciones.
b. Un conjunto ordenado (X, R) se puede ver como una categoría, cuyos objetos son los elementos de X, y para cada par de elementos x y y de X,

$$Mor(x, y) =: \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si} \quad (x, y) \in R. \\ \emptyset & \text{si} \quad (x, y) \notin R. \end{cases}$$

La transitividad de la relación de orden, define la composición en los morfismos, donde el morfismo identidad id_x es la pareja $\{(x, x)\}$

c. La categoría de los grupos notada ***Gr***. Los objetos de esta categoría son los grupos, los morfismos son los homomorfismos y la ley de composición en los morfismos corresponde a la composición usual de funciones.
d. La categoría ***Mat***, cuyos objetos son todos los numeros enteros positivos para el cual $Mor(m, n)$ es el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$; el morfismo identidad id_n es la matriz diagonal unitaria de $n \times n$ y la ley de composición en los morfismos corresponde a la multiplicación usual de matrices.
e. La categoría de los espacios topológicos denotada ***Top***, los objetos de esta categoría son los espacios topológicos, los morfismos son las funciones continuas y la ley de composición en los morfismos, corresponde a la composición usual funciones.

Para establecer el segundo objetivo de esta monografía es necesario introducir la noción de functor que son los encargados de interrelacionar la categoría de los espacios topológicos y la categoría de los conjuntos preordenados, las cuales mostraremos en el segundo capítulo.

Funtores

Definición 1.22. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un ***functor*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

1. Una aplicación $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$.

2. Para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, una aplicación

$$F : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

   que satisface las siguientes propiedades:
   i. Preserva identidades, es decir, para cada objeto A de C, $F(id_A) = id_{F(A)}$
   ii. Preserva composiciones, es decir, para morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ donde A, B y C son objetos de $\mathcal{C}$, se tiene. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Ejemplo 1.5.
a. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, se define el functor identidad $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que:

$$Id_{\mathcal{C}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$$

b. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías, para cualquier objeto A de $\mathcal{D}$, se define el functor constante $F_A : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que:

$$F_A(B \xrightarrow{f} C) = A \xrightarrow{id_A} A.$$

c. El functor olvido de estructura, $O : Top \to Conj$, que asigna a un espacio topológico (X, τ) su conjunto subyacente, es decir, $O(X, \tau) = X$ y a cada función continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ se le olvida su continuidad, es decir, $O(f : (X, \tau) \to (Y, \tau')) = f : X \to Y$.

Definición 1.23. Se dice que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas si existen functores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$ y $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$.

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS PREORDENADOS

Iniciamos este capítulo definiendo lo que es un conjunto preordenado, con el cual, el lector debe estar en parte familiarizado ya que de alguna u otro forma habrá trabajado con dichos conjuntos en cualquier curso que introduzca relaciones de orden y de equivalencia, estas a su vez resultan ser clases especiales de preórdenes que utilizaremos mas adelante. Posteriormente se dan una serie de definiciones y proposiciones acerca de conjuntos preordenados con los cuales obtendremos resultados importantes en los capítulos **3** y **4**. En sí, este capitulo puede verse como un capítulo introductorio a los dos restantes.

2.1. Preórdenes

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times X$. Se dice que R es un preorden sobre X, o (X, R) es un conjunto preordenado, si R es reflexiva y transitiva sobre X.

A continuación presentamos algunos ejemplos de conjuntos preordenados.

Ejemplo 2.1.1.
(a) Considere $\mathbb{Z}$ como el conjunto de los números enteros con la relación R, donde $(n, m) \in R$ significa n divide a m. Entonces $(\mathbb{Z}, R)$ es un conjunto preordenado.
(b) El orden usual sobre los números enteros. $\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\}$. Forma un

preorden.

(c) Si X es un conjunto cualquiera, la inclusión (ser un subconjunto de) forma un preorden sobre $\mathcal{P}(X)$.

(d) Sea m un entero fijo mayor o igual que 1. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $a \equiv b(m) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(a - b = mk)$; es decir, a es congruente con b modulo m si, y sólo si, $a - b$ es múltiplo de m. Ser congruente modulo m forma un preorden en los enteros.

(e) Sea X un conjunto, la relación $\approx$, "ser equipotente.^{en}tre subconjuntos de X, tal que $A \approx B \Leftrightarrow (\exists f)(f : A \to B \wedge f$ es biyección $)$, la relación ser equipotente forma un preorden.

(f) En $\mathbb{R}^2$ definimos el preorden S, tal que $((x, y), (u, v)) \in S \Leftrightarrow x + y \leq u + v$.

Nota 2.1.1. *Si (X, R) es un conjunto preordenado se tiene por simetría que (X, R^{-1}) es un conjunto preordenado.*

Definición 2.1.2. Sea (X, R) un conjunto preordenado y $A \subseteq X$, decimos que A es ***abierto*** en (X, R) si:

$$\forall x, y \in X(x \in A \wedge (x, y) \in R) \Rightarrow y \in A)$$

decimos que A es ***cerrado*** en (X, R) si:

$$\forall x, y \in X(y \in A \wedge (x, y) \in R) \Rightarrow x \in A).$$

Nota 2.1.2. *En especial, en todo conjunto preordenado (X, R) siempre se tiene que X y $\emptyset$ son abiertos y cerrados en (X, R). Si se sobre entiende que un conjunto es abierto (o cerrado) en determinado conjunto preordenado, diremos simplemente que es abierto (o cerrado).*

A continuación presentamos una serie de proposiciones que nos permitirán ver y entender con mayor claridad dichos conjuntos. En sí, nos centraremos principalmente en una clase de abiertos, los cuales llamaremos abiertos fundamentales y definiremos mas adelante.

Proposición 2.1.1. *En cualquier conjunto preordenado la unión e intersección de abiertos (cerrados) es abierto (cerrado).*

Demostración.
Sea (X, R) un conjunto preordenado y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de abiertos. Si $x, y \in X$ con $x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ y $(x, y) \in R$ entonces, para todo $\beta \in J$ se tiene que $x \in A_\beta$ y por ser A_β abierto, $y \in A_\beta$ por lo tanto $y \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$, luego $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es abierto.
Similarmente se prueba el resultado para cerrados. ∎

Proposición 2.1.2. *En cualquier conjunto preordenado los complementos de conjuntos abiertos son exactamente los conjuntos cerrados.*

Demostración.
Sea (X, R) un conjunto preordenado y $A \subseteq X$ un abierto. Supongamos que $X - A$ no es cerrado, entonces existen $x, y \in X$ tal que $(x, y) \in R$ con $y \in (X - A)$ y $x \notin (X - A)$; por lo tanto $x \in A$, y como A es abierto, entonces $y \in A$ contradiciendo que $y \in (X - A)$; luego $X - A$ es cerrado.
Similarmente se prueba que si X es cerrado su complemento es abierto. ∎

Definición 2.1.3. Sea (X, R) un conjunto preordenado y $x \in X$. El conjunto $\{y \in X \mid (x, y) \in R\}$. Lo llamaremos el ***abierto fundamental*** de x y notaremos por $R(x)$.

Proposición 2.1.3. *Sea (X, R) un conjunto preordenado y $x \in X$, entonces se tiene que $R(x)$ es el menor abierto que contiene a x.*

Demostración.
Por definición $R(x)$ es abierto. Ahora para ver que es el menor abierto que contiene a x, de la proposición (2.1.1) basta con ver que todo abierto que contiene a x, contiene a $R(x)$. Sea A un abierto tal que $x \in A$; si $y \in R(x)$ entonces $(x, y) \in R$ y por ser A abierto, $y \in A$. Luego $R(x) \subseteq A$. ∎

Corolario 2.1.1. *Sea (X, R) un conjunto preordenado y $A \subseteq X$, entonces:*
A es abierto si, y sólo si, $A = \bigcup_{x \in A} R(x)$

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $A \subseteq X$ abierto, si $y \in A$ entonces de la proposición anterior concluimos que $R(y) \subseteq A$; luego $\bigcup_{x \in A} R(x) \subseteq A$. Además como para cada $y \in X$ se tiene $y \in R(y)$ entonces $A \subseteq \bigcup_{x \in A} R(x)$.
$\Leftarrow$) El resultado es inmediato de las proposiciones (2.1.1) y (2.1.3).
∎

Nota 2.1.3. *Si (X, R) es un conjunto preordenado y $A \subseteq X$ entonces, A es abierto (cerrado) en (X, R) si y solo si A es cerrado (abierto) en (X, R^{-1}). Por consiguiente podemos concluir que el conjunto $R^{-1}(x)$ es el menor cerrado que contiene a x; o equivalentemente, $R^{-1}(x)$ es el abierto fundamental de x en (X, R^{-1}).*

2.2. Conjuntos preordenados como suma directa

Definición 2.2.1. Sea (X, R) un conjunto preordenado. Si $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es una familia indexada de conjuntos preordenados tales que $X = \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha$ y $R = \bigcup_{\alpha\in J} R_\alpha$ con $X_\beta \cap X_\gamma = \emptyset$ para todo $\beta, \gamma \in J$, $\beta \neq \gamma$. Decimos que (X, R) es ***suma directa*** de la familia $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$

En sí, todo conjunto preordenado (X, R) se puede ver como una suma directa de $\{(X, R), (\emptyset, \emptyset)\}$ la cual llamaremos suma directa trivial.

Definición 2.2.2. Sea R una relación sobre un conjunto X. Definimos la clausura de equivalencia sobre R y notamos $\widehat{R}$ a la menor relación de equivalencia sobre X que contiene a R.

Nota 2.2.1. *En toda relación sobre un conjunto, la clausura de equivalencia siempre existe debido a que la intersección de relaciones de equivalencias (sobre un mismo conjunto) es de equivalencia.*

Proposición 2.2.1. *Sea X un conjunto y $S \subseteq X \times X$ entonces $\widehat{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$ con $S^n = S \circ S \circ S\circ, ..., \circ S$ (n-veces) donde $\circ$ es la composición de relaciones y $S^0 = I_x$.*

Demostración.
Si $(x, y) \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tal que $(x, y) \in (S \cup S^{-1})^n$, por lo tanto existen $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ elementos de X donde $(x, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, y) \in (S \cup S^{-1})$; luego $(x, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, y) \in \widehat{S}$ y por transitividad se tiene que $(x, y) \in \widehat{S}$.
Veamos que $\bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$ es un relación de equivalencia sobre X que contiene a S. Como $(S \cup S^{-1})^0 = I_X$ y $S \subseteq (S \cup S^{-1})^1$, entonces $\cup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$ es reflexiva y contiene a S. Ahora si $(x, y), (y, z) \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$, existen $n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tal que $(x, y) \in S^n$ y $(y, z) \in S^m$, de donde concluimos que $(x, z) \in (S \cup S^{-1})^{n+m} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$. Además si $(a, b) \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$ entonces existen $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ elementos de A donde $(a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, b) \in (S \cup S^{-1})$ y en consecuencia $(b, a_{n-1}), (a_{n-1}, a_{n-2}), ..., (a_1, a) \in (S \cup S^{-1})$, por consiguiente (b, a) pertenece a $\bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$. Ahora como $\widehat{S}$ es la menor relación de equivalencia que contiene a S y la intersección de relaciones de equivalencia (sobre el mismo conjunto es de equivalencia), entonces se cumple que $\widehat{S} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(S \cup S^{-1})^n$.
$\blacksquare$

Corolario 2.2.1. *Si R y S son dos relaciones sobre un conjunto X entonces:*

1. *Si $R \subseteq S$ se tiene que $\widehat{R} \subseteq \widehat{S}$.*

2. *$\widehat{R} = \widehat{R \cup R^{-1}}$.*

Proposición 2.2.2. *Sea (X, R) un conjunto preordenado; entonces, los abiertos-cerrados en (X, R) son exactamente los abiertos en $(X, \widehat{R})$. Además, si $x \in X$, $\overline{x}$ es el menor abierto-cerrado en (X, R) que contiene a x. Donde $\overline{x}$ es la clase de equivalencia de x según $\widehat{R}$.*

Demostración.
Sea A un abierto en $(X, \widehat{R})$. Veamos que A es abierto en (X, R). Si $(a, b) \in R$ y $a \in A$ entonces $(a, b) \in \widehat{R}$ y por ser A abierto en $(X, \widehat{R})$ se tiene que $b \in A$; luego, A es abierto en (X, R). Similarmente, si $(a, b) \in R$ tal que $b \in A$ entonces $(b, a) \in \widehat{R}$ y por ser A abierto en $(X, \widehat{R})$ se tiene que $a \in A$; luego A es cerrado en (X, R).
Ahora, si A es abierto-cerrado en (X, R) tal que $(a, b) \in \widehat{R}$ y $a \in A$, veamos que $b \in A$. Por la proposición (2.2.1) existen $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ elementos de X donde $(a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, b)$ pertenecen a $(R \cup R^{-1})$; como $(a, a_1) \in (R \cup R^{-1})$ y A es abierto-cerrado en (X, R) con $a \in A$ entonces $a_1 \in A$; similarmente, $(a_1, a_2) \in (R \cup R^{-1})$ y en consecuencia $a_2 \in A$, siguiendo con este proceso $b \in A$, con lo cual concluimos que A es abierto en $(X, \widehat{R})$.
Si $x \in X$, veamos que $\overline{x}$ es el menor abierto-cerrado en (X, R) que contiene a x. Por definición $\widehat{R}(x) = \overline{x}$, luego $\overline{x}$ es un abierto-cerrado en (X, R) que contiene a x. Ahora si A es un abierto-cerrado con $x \in A$ y $A \subseteq \overline{x}$ entonces A es abierto en $(X, \widehat{R})$ y por la proposición (2.1.1) aplicada a $\widehat{R}$, $\overline{x} \subseteq A$. ■

La anterior proposición nos permite establecer las diferente formas de expresar un conjunto preordenado como suma directa no trivial de conjuntos preordenados (siempre y cuando esto sea posible). Un ejercicio fácil de demostrar es que si (X, R) es un conjunto preordenado, entonces $X = \bigcup_{B \in X/\widehat{R}} B$ y $R = \bigcup_{B \in X/\widehat{R}} R \cap (B \times B)$. Esto es debido a que $X/\widehat{R}$ forma una partición de X donde todo $B \in X/\widehat{R}$ es abierto en $\widehat{R}$ y de la proposición (2.2.2) es abierto-cerrado en (X, R), por consiguiente $(B, R \cap B \times B)$ sera un conjunto preordenado.

2.3. Producto directo de conjuntos preordenados

Definición 2.3.1. Sea $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de conjuntos preordenados. Definimos y notamos $\odot R_\alpha$ al producto directo de la familia de preórdenes $\{R_\alpha\}_{\alpha\in J}$ sobre $\prod X_\alpha$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \odot R_\alpha$ si, y sólo si, $(x_\beta, y_\beta) \in R_\beta$ para cada $\beta \in J$ donde $\pi_\beta(\mathbf{x}) = x_\beta$ y $\pi_\beta(\mathbf{y}) = y_\beta$.

$\odot R_\alpha$ forma un preorden sobre $\prod X_\alpha$ debido a que (X_β, R_β) es un conjunto preordenado para cada $\beta \in J$.

Lema 2.3.1. *Sea $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de conjuntos preordenados, entonces:*

1. $(\odot R_\alpha)^{-1} = \odot R_\alpha^{-1}$.
2. $(\odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1}))^{-1} = \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1})$.
3. *Si* $\xi = \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1})$ *entonces* $\widehat{\xi} = \widehat{\odot R_\alpha}$.

Demostración.
Veamos que $(\odot R_\alpha)^{-1} = \odot R_\alpha^{-1}$.

$$\begin{aligned}
((x_\alpha),(y_\alpha)) \in (\odot R_\alpha)^{-1} &\Leftrightarrow ((y_\alpha),(x_\alpha)) \in \odot R_\alpha \quad (\text{ def inv }).\\
&\Leftrightarrow (\forall \beta \in J)((y_\beta, x_\beta) \in R_\beta) \quad (\text{ def } 2.3.1).\\
&\Leftrightarrow (\forall \beta \in J)((x_\beta, y_\beta) \in R_\beta^{-1}) \quad (\text{ def inv }).\\
&\Leftrightarrow ((x_\alpha),(y_\alpha)) \in \odot R_\alpha^{-1} \quad (\text{ def } 2.3.1 \text{ }).
\end{aligned}$$

Veamos que $(\odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1}))^{-1} = \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1})$.

$$\begin{aligned}
(\odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1}))^{-1} &= \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1})^{-1} \text{ (inciso 1)}.\\
&= \odot(R_\alpha^{-1} \cup (R_\alpha^{-1})^{-1}) \text{ (Prop 2.2.1)}.\\
&= \odot(R_\alpha^{-1} \cup R_\alpha)\text{(Prop de relación inv)}.\\
&= \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1}) \text{ (Prop. de unión)}.
\end{aligned}$$

Veamos que Si $\xi = \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1})$ entonces $\widehat{\xi} = \widehat{\odot R_\alpha}$.
Como $R_\alpha \subseteq \xi$ para cada $\alpha \in j$, entonces $\widehat{\odot R_\alpha} \subseteq \widehat{\xi}$, (Coro. (2.2.1).
Ahora si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \widehat{\xi}$ de la proposición (2.2.1) existen $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m = \mathbf{y}$, elementos de ΠX_α tales que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \xi \cup \xi^{-1}$ con $k \in \{1, ..., m-1\}$, luego del inciso (2) concluimos que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \xi$ donde nuevamente de (2.2.1) se tiene que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \widehat{\odot R_\alpha}$. ■

Proposición 2.3.1. *Sea* $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *una familia indexada de conjuntos preordenados, entonces:*

$$\widehat{\odot R_\alpha} = \odot\widehat{R}_\alpha.$$

Demostración.
Veamos que $\widehat{\odot R_\alpha} \subseteq \odot\widehat{R}_\alpha$.
Sea $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \widehat{\odot R_\alpha}$, luego de la proposición (2.2.1) existen $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m = \mathbf{y}$, elementos de ΠX_α tales que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \odot R_\alpha \cup (\odot R_\alpha)^{-1}$ con $k \in \{1, ..., m-1\} = M$, donde por el lema anterior obtenemos que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \odot R_\alpha \cup \odot R_\alpha^{-1}$ con $k \in M$.
Así, dado k en M, se tiene que $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \odot R_\alpha$ o $(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_k) \in \odot R_\alpha^{-1}$.
Supongamos que $(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{a}_k) \in \odot R_\alpha$, entonces $(a_{\beta,k+1}, a_{\beta,k}) \in R_\beta$ para cada $\beta \in J$ donde $\pi_\beta(\mathbf{a}_k) = a_{\beta,k}$ con $k \in \{1, ..., m\}$, luego $(a_{\beta,k}, a_{\beta,k+1}) \in \widehat{R_\beta}$ y por propiedad transitiva $(a_{\beta,1}, a_{\beta,m}) \in \widehat{R_\beta}$ de lo cual concluimos que $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \odot\widehat{R_\alpha}$.
Para la otra inclusión sea $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \odot\widehat{R_\alpha}$, entonces $(x_\beta, y_\beta) \in \widehat{R_\beta}$ para cada $\beta \in J$ con $\pi_\beta(\mathbf{x}) = x_\beta$ y $\pi_\beta(\mathbf{y}) = y_\beta$.
(Veamos que siempre podemos formar m α-uplas "$\mathbf{a}_k$"donde $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) \in \odot(R_\alpha \cup R_\alpha^{-1}) = \xi$ con $k \in \{1, ..., m-1\}$).
Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada tal que para cada $\beta \in J$, Y_β esta conformado por un número finito de elementos de X_β que cumplen la proposición (2.2.1). Es decir si $n_\beta = \mid Y_\beta \mid$, entonces
$Y_\beta = \{a_{\beta,1}, ..., a_{\beta,n_\beta}\}$, donde $(a_{\beta,k}, a_{\beta,k+1}) \in (R_\beta \cup R_\beta^{-1})$ para $k \in \{1, ..., n_\beta - 1\}$, $a_{\beta,1} = x_\beta$ y $a_{\beta,n_\beta} = y_\beta$.
La propiedad (2.2.1) nos garantiza la existencia de $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ al igual que cada Y_β sea finito; por consiguiente, existe $\mu \in J$ tal que para cada $\beta \in J$, $n_\beta \leq m$, donde $m = n_\mu$
Ahora definamos para cada $\beta \in J$, la función $f_\beta : Y_\beta \to Y_\beta$ con $k \in \{1, ..., m\} = N$, tal que:

$$f_\beta(a_{\beta,k}) =: \begin{cases} a_{\beta,k} & \text{si} \quad k \leq n_k. \\ a_{\beta,n_k} & \text{si} \quad k > n_k. \end{cases}$$

De esta forma obtenemos para cada $k \in N$ la α-upla $\mathbf{a}_k = (f_\alpha(a_{\alpha,k}))$ donde para cada $\beta \in J$ se tiene:

$$(f_\beta(a_{\beta,k}), f_\beta(a_{\beta,k+1})) =: \begin{cases} (a_{\beta,k}, a_{\beta,k+1}) & \text{si} \quad k < n_k. \\ (a_{\beta,n_k}, a_{\beta,n_k}) & \text{si} \quad k \geq n_k. \end{cases}$$

Por consiguiente $(f_\beta(a_{\beta,k}), f_\beta(a_{\beta,k+1})) \in R_\beta \cup R_\beta^{-1}$ para $k \in \{1, ..., m-1\}$ luego de la definición de producto de preordenes $((f_\alpha(a_{\alpha,k})),(f_\alpha(a_{\alpha,k+1})))\in\xi$ para $k\in\{1,...,m-1\}$ y como $\xi\subseteq\widehat{\xi}$ por propiedad transitiva que se tiene $((f_\alpha(a_{\alpha,1})),(f_\alpha(a_{\alpha,m})))\in\widehat{\xi}$ donde por el lema anterior, $\widehat{\xi}=\widehat{\odot R_\alpha}$

Por ultimo veamos que $((f_\alpha(a_{\alpha,1})),(f_\alpha(a_{\alpha,m})))=(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Por definición de f_β se tiene que $\pi_\beta((f_\alpha(a_{\alpha,1})))=a_{\beta,1}$ y por definición de Y_β, $a_{\beta,1}=x_\beta$, de lo cual concluimos que $(f_\alpha(a_{\alpha,1}))=\mathbf{x}$, de igual forma obtenemos $\pi_\beta((f_\alpha(a_{\alpha,m})))=a_{\beta,n_\beta}=y_\beta$ y por consiguiente $(f_\alpha(a_{\alpha,m}))=\mathbf{y}$. De esta forma concluimos que $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\widehat{\otimes R_\alpha}$. ■

Lema 2.3.2. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de conjuntos, entonces:*

$$\odot(X_\alpha\times X_\alpha)=\prod X_\alpha\times\prod X_\alpha$$

Su demostración es inmediata de las definiciones de cada producto.

2.4. Conexidad y morfismos entre conjuntos preordenados

Proposición 2.4.1. *Sea (X,R) un conjunto preordenado, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *En (X,R) no existen dos abiertos-cerrados no vacíos disjuntos.*
2. *En (X,R) los únicos abiertos-cerrados son X y $\emptyset$.*
3. *(X,R) no se puede expresar como suma directa no trivial de conjuntos preordenados.*
4. *$\widehat{R}=X\times X$.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si A es un abierto-cerrado, según la proposición (2.1.2) $X-A$ es abierto-cerrado y como $A\cap(X-A)=\emptyset$ por hipótesis concluimos $A=\emptyset$ o $X=A$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si (Y,S) y (Z,T) son dos conjuntos preordenados tales que $Y\cap Z=\emptyset$, $X=Y\cup Z$ y $R=S\cup T$ entonces Y y Z son dos abiertos-cerrados en (X,R) debido a que $T\cap S=\emptyset$. Luego por hipótesis y como $Y\cap Z=\emptyset$ se tendrá que $(Y,S)=(\emptyset,\emptyset)$ ó $(Z,T)=(\emptyset,\emptyset)$, por consiguiente concluimos que (X,R) no se puede expresar como suma directa no trivial de conjuntos preordenados.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que $\widehat{R} \neq X \times X$. Sean $x, y \in X$ tal que $(x, y) \notin \widehat{R}$; por lo tanto, $y \notin \overline{x}$ y $B = X - \overline{x} \neq \emptyset$. Luego $X = \overline{x} \cup B$ y $R = (R \cap (\overline{x} \times \overline{x})) \cup (R \cap (B \times B))$, lo que contradice que (X, R) no se puede expresar como suma directa no trivial de preordenes. Por consiguiente $\widehat{R} = X \times X$.
4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que en (X, R) existen B y C abiertos-cerrados no vacíos disjuntos. Ahora como $\widehat{R} = X \times X$ entonces $\overline{x} = X$ para todo $x \in X$. Sean $y \in B$ y $z \in C$ luego por la proposición (2.2.2 y corolario 2.1.1), tenemos $\overline{y} \subseteq B$ y $\overline{z} \subseteq C$, pero $\overline{y} = X = \overline{z}$ por consiguiente $B = X = C$ lo que contradice que $B \cap C = \emptyset$. Luego concluimos que en (X, R) no existen dos abiertos-cerrados no vacíos disjuntos. ■

Definición 2.4.1. Si un conjunto preordenado (X, R) con $X \neq \emptyset$ cumple cualquiera de las condiciones de la proposición anterior, se dice que es ***conexo***.

Lema 2.4.1. *Si (X, R) un conjunto preordenado tal que para todo par de elementos x y y en X, existe $z \in X$, con $(x, z) \in R \cup R^{-1}$ y $(y, z) \in R \cup R^{-1}$. Entonces (X, R) es conexo.*

Ejemplo 2.4.1. Veamos cuales de los conjuntos preordenados del ejemplo (2.1.1) son conexos.
(1) En los numerales (a),(b) y (c) los conjuntos preordenados son siempre conexos. En (a), 1 divide a cualquier $n \in \mathbb{Z}$ por consiguiente en $\widehat{R}(1) = \mathbb{Z} = \widehat{R}(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ lo cual nos indica que solo existe una clase y por la proposición (2.2.2) se tendrá solo un abierto-cerrado diferente de vacío, de esta forma obtenemos su conexidad.
En (b), si tomamos $\leq$ como R y un $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\mathbb{Z} = R(n) \cup R^{-1}(n) \subseteq \widehat{R}(n)$, luego $\mathbb{Z} = \widehat{R}(n)$, luego el mismo análisis realizado en (a) nos permite obtener su conexidad.
En (c) se tiene que vacío esta contenido en todo conjunto, por lo tanto el mismo análisis realizado en (a) nos permite establecer su conexidad.
(2) En (d) para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, la relación ser equipotente modulo m, es de equivalencia, donde la clase de equivalencia de cualquier elemento es diferente a $\mathbb{Z}^+$ y por consiguiente se tendrá mas de un abierto-cerrado, luego no es conexo.
(3) En (e) la relación “ser equipotente”sobre $\mathcal{P}(X)$ es de equivalencia y nunca es conexa, ya que la única forma que se tenga solo una clase, es que $X = \emptyset$.
(4) En (f) si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$x_1 + y_1 \leq | x_1 + y_1 | + | x_2 + y_2 |$$

y

$$x_2 + y_2 \leq | x_1 + y_1 | + | x_2 + y_2 |,$$

luego $((x_1, y_1), (\mid x_1 + y_1 \mid, \mid x_2 + y_2 \mid)) \in S$ y $((x_2, y_2), (\mid x_1 + y_1 \mid, \mid x_2 + y_2 \mid)) \in S$ de esta manera por el lema anterior obtenemos su conexidad.

Proposición 2.4.2. *Sea* $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ *una familia indexada de conjuntos preordenados, entonces:*

$$(\Pi X_\alpha, \odot R_\alpha) \text{ es conexo} \Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)((X_\alpha, R_\alpha) \text{ es conexo })$$

.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\Pi X_\alpha, \odot R_\alpha) \text{ es conexo} & \\
& \Leftrightarrow \widehat{\odot R_\alpha} = X_\alpha \times \prod X_\alpha \ \text{(Def. 2.4.1).} \\
& \Leftrightarrow \widehat{\odot R_\alpha} = \odot(X_\alpha \times X_\alpha) \ \text{(Lema. 2.3.2).} \\
& \Leftrightarrow \odot \widehat{R}_\alpha = \odot(X_\alpha \times X_\alpha) \ \text{(Prop. 2.3.1).} \\
& \Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)(\widehat{R}_\alpha = X_\alpha \times X_\alpha) \ \text{(Def. 2.3.1).} \\
& \Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)((X_\alpha, R_\alpha) \text{ es conexo}) \ \text{(Def. 2.4.1).}
\end{aligned}$$

■

Definición 2.4.2. Sean (X, R), (Y, S) conjuntos preordenados y f una función de X en Y, se dice que f es un ***morfismo*** (de conjuntos preordenados) entre (X, R) y (Y, S) si:

$$(\forall x, y \in X)((x, y) \in R \Rightarrow (f(x), f(y)) \in S)$$

Si además tal f es biyectiva y f^{-1} es un morfismo entre los conjuntos preordenados (Y, S) y (X, R), decimos que f es un ***isomorfismo*** (de conjuntos preordenados) y que (X, R) y (Y, S) son isomorfos.

Proposición 2.4.3. *Sean* (X, R) *y* (Y, S) *conjuntos preordenados y* $f : X \longmapsto Y$, *una función, entonces,* f *es un morfismo si, y sólo si, para todo abierto* A *en* (Y, S) *se tiene que* $f^{-1}(A)$ *es abierto en* (X, R).

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea A un abierto en (Y, S) y sea $(x, y) \in R$ con $x \in f^{-1}(A)$, luego por ser f morfismo se tiene que $(f(x), f(y)) \in S$ y como A es abierto en (Y, S) y $f(x) \in A$, se tiene que $f(y) \in A$, por consiguiente $y \in f^{-1}(A)$. De esta forma, $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, R).

$\Rightarrow$) Supongamos que f no es un morfismo entre (X,R) y (Y,S), luego existen $x,y \in X$ tales que $(x,y) \in R$ pero $(f(x),f(y)) \notin S$, es decir $f(y) \notin S(f(x))$ el cual por definición es abierto en (Y,S), y por consiguiente su imagen inversa $f^{-1}(S(f(x)))$ sera abierto en (X,R), ahora como $x \in f^{-1}(S(f(x)))$ y $(x,y) \in R$ se tendrá que $y \in f^{-1}(S(f(x)))$, es decir, $f(y) \in S(f(x))$, lo cual contradice la existencia de x y y; de lo cual concluimos que f es un morfismo entre (X,R) y (Y,S). ■

Como un comentario tenemos el siguiente corolario de la proposición anterior

Corolario 2.4.1. *Sean (X,R) y (Y,S) conjuntos preordenados y $f : X \longmapsto Y$, una biyección, entonces,*

$$f \text{ es un isomorfismo} \Leftrightarrow (\forall x,y \in X)((x,y) \in R \Leftrightarrow (f(x),f(y)) \in S)$$

Para terminar este capitulo mostraremos la categoría de los conjuntos preordenados, la cual junto con la categoría de los espacios topológicos será fundamental para obtener nuestro segundo objetivo.

La categoría de los conjuntos preordenados la notaremos ***Pre*** y cuyos objetos son los conjuntos preordenados; los morfismos, son los morfismos entre preordenes; el morfismo identidad, es la función identidad y la composición de morfismos, es la composición usual de funciones.

CAPÍTULO 3

CORRESPONDENCIAS CATEGÓRICAS ENTRE HIPERTOPOLOGÍAS Y PREÓRDENES

En este capítulo estudiamos algunas relaciones que se pueden establecer entre conceptos similares que comparten las topologías y los preórdenes definidos sobre un mismo conjunto. Como es el caso de conexidad, con el cual obtenemos nuestro primer objetivo, así mismo los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados; topologías T_0 y relaciones de orden, al igual que funciones continuas entre espacios topológicos y morfismos entre conjuntos preordenados. Estas relaciones nos permitirán alcanzar nuestro segundo objetivo con lo cual terminamos este capítulo.

3.1. Preórdenes asociados con topologías

Definición 3.1.1. Dado un espacio topológico (X, τ) para cada $x \in X$ definimos $V_\tau(x) = \{A \subseteq X \mid \exists U \in \tau(x \in U \subseteq A\}$, de igual forma definimos $O_\tau(x) = \cap\{U \in \tau \mid x \in U\}$. Si no hay lugar a confusiones $V_\tau(x)$ lo notaremos simplemente como V_x y $O_\tau(x)$

como $O(x)$.

Un resultado inmediato de la definición anterior es que si (X, τ) es un espacio topológico y $A \in \tau$, entonces $A = \bigcup_{x \in A} O(x)$.
Siempre que se trabaja en espacios topológicos respecto a intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos o cerrados, el común de la gente prefiere trabajar con cerrados ya que dicha intersección resulta ser cerrada (teorema 1.2), lo cual no ocurre con los abiertos, sin embargo, como veremos a continuación trabajar con intersecciones arbitrarias de cerrados es inversamente equivalente que trabajar con intersecciones arbitrarias de abiertos.

Proposición 3.1.1. *Sea (X, τ) espacio topológico y $x, y \in X$. los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $x \in O(y)$.
2. $O(x) \subseteq O(y)$.
3. $V_y \subseteq V_x$.
4. $y \in adh(\{x\})$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ **2)** Supongamos que $O(x) \nsubseteq O(y)$. Sea $z \in O(x)$ tal que $z \notin O(y)$, luego de la definición (3.1.1), existe $U \in \tau$ donde $y \in U$ pero $z \notin U$, ahora como $x \in O(y)$ se tendrá que $x \in U$ y por consiguiente $O(x) \subseteq U$, lo que contradice que $z \in O(x)$ de lo cual concluimos que $O(x) \subseteq O(y)$.
2) $\Rightarrow$ **3)** Sea $A \in V_y$ por lo tanto, existe $U \in \tau$ tal que $y \in U \subseteq A$, luego por (3.1.1), $O(y) \subseteq U$ y como $x \in O(x)$ y $O(x) \subseteq O(y)$, se tiene que $x \in U \subseteq A$, por consiguiente $A \in V_x$.
3) $\Rightarrow$ **4)** Sea $A \in \tau$ con $y \in A$, luego $A \in V_y$ y como $V_y \subseteq V_x$ entonces $x \in A$ y como siempre se tiene que $x \in adh(\{x\})$, $A \cap adh(\{x\}) \neq \emptyset$, del teorema (1.3) concluimos que $y \in adh(\{x\})$.
4) $\Rightarrow$ **1)** Supongamos que $x \notin O(y)$ entonces por la definición (3.1.1), existe $A \in \tau$ con $y \in A$, tal que $x \notin A$, luego $x \in X - A$ el cual es cerrado y por el teorema (1.12) $adh(\{x\}) \subseteq X - A$ pero $y \in adh(\{x\})$ esto contradice la existencia de A, por consiguiente concluimos que $x \in O(y)$. ■

Definición 3.1.2. Dado un espacio topológico (X,τ) definimos el preorden $\Re(\tau)$ sobre X asociado con τ como sigue:

$$(x,y)\in\Re(\tau)\Leftrightarrow y\in O(x)$$

o equivalentemente

$$(x,y)\in\Re(\tau)\Leftrightarrow x\in adh(\{y\})$$

Nota 3.1.1. *La proposición (3.1.1) nos garantiza que si (X,τ) es un espacio topológico, $(X,R(\tau))$ es un conjunto preordenado. Además, para cada $x\in X$, por definición $O(x)=\Re(\tau)(x)$ y $adh\{x\}=(\Re(\tau))^{-1}(x)$.*

Ejemplo 3.1.1.
(a) En cualquier conjunto X, la menor topología, "la trivial" genera el mayor preorden, "$X\times X$", y la mayor topología, "la discreta" genera el menor preorden "la identidad".
(b) En $\mathbb{R}$, el preorden que genera τ_u es la identidad, ya que si $x\in X$, $O(x)=\{x\}$. para ver esto basta con tomar la familia de abiertos de la forma $\{(x-1/n,x+1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya intersección es $\{x\}$.
(c) En $\mathbb{R}$, el preorden generado por τ_ℓ es el mismo preorden generado por τ_K, el cual es la identidad. Esto se debe a que τ_K y τ_ℓ son mas finos que τ_u, luego para cada x en $\mathbb{R}$ se tendrá, $O(x)=\{x\}$. Este ejemplo nos muestra que topologías distintas pueden generan el mismo preorden, incluso sin ser comparables.
(d) En Todo conjunto totalmente ordenado $(X,\leq)$, el preorden generado por τ_{colas} es el mismo " $\leq$ ".

Proposición 3.1.2. *Sean τ y τ' topologías sobre un conjunto X, tales que τ' es mas fina que τ, entonces $\Re(\tau')\subseteq\Re(\tau)$.*

Demostración.
Supongamos que $\Re(\tau')\nsubseteq\Re(\tau)$. Sea $(x,y)\in\Re(\tau')$ tal que $(x,y)\notin\Re(\tau)$, luego $y\in\Re(\tau')(x)$ y $y\notin\Re(\tau)(x)=O_\tau(x)$ por lo tanto, existe $U\in\tau$ con $x\in U$ y $y\notin U$, pero como τ' es mas fina que τ, $U\in\tau'$ y en consecuencia $O_{\tau'}(x)\subseteq U$, lo cual contradice que $y\in\Re(\tau')(x)=O_{\tau'}(x)$, por consiguiente concluimos que $\Re(\tau')\subseteq\Re(\tau)$. ■

Vemos que el ejemplo (3.1.1) inciso (a) concuerda con la proposición anterior.

Proposición 3.1.3. *El preorden generado por la topología producto, es igual al preorden generado por la topología de cajas, el cual a su vez es igual al producto directo de preórdenes*

generados por las topologías que generan la topología de cajas.
Es decir. Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *es una familia indexada de espacios topológicos, entonces:*

$$\Re(\otimes\tau_\alpha) = \Re(\otimes^c\tau_\alpha) = \odot\Re(\tau_\alpha).$$

Demostración.
Como la topología de cajas es mas fina que la topología producto, de la proposición anterior tenemos, $\Re(\otimes^c\tau_\alpha) \subseteq \Re(\otimes\tau_\alpha)$.
Ahora veamos que $\Re(\otimes\tau_\alpha) \subseteq \odot\Re(\tau_\alpha)$. Supongamos que no se cumple la inclusión; sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Re(\otimes\tau_\alpha)$ con $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \odot\Re(\tau_\alpha)$, luego de la definición de producto directo de preórdenes existe $\beta \in J$ tal que $(x_\beta, y_\beta) \notin \Re(\tau_\beta)$ donde $\pi_\beta(\mathbf{x}) = x_\beta$ y $\pi_\beta(\mathbf{y}) = y_\beta$ de lo cual se tiene que $y_\beta \notin \Re(\tau_\beta)(x_\beta) = O_{\tau_\beta}(x_\beta)$, por lo tanto existe $U \in \tau_\beta$ tal que, $x_\beta \in U$ pero $y_\beta \notin U$, donde concluimos, $\mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U)$ y $\mathbf{y} \notin \pi_\beta^{-1}(U)$ con $\pi_\beta^{-1}(U) \in \otimes\tau_\alpha$ y de esta forma obtenemos que $\mathbf{y} \notin O_{\otimes\tau_\alpha}(\mathbf{x}) = \Re(\otimes\tau_\alpha)(\mathbf{x})$ lo cual contradice que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Re(\otimes\tau_\alpha)$, por consiguiente concluimos $\Re(\otimes\tau_\alpha) \subseteq \odot\Re(\tau_\alpha)$.
Por último veamos que $\odot\Re(\tau_\alpha) \subseteq \Re(\otimes^c\tau_\alpha)$. Supongamos que no se cumple la inclusión; sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \odot\Re(\tau_\alpha)$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \Re(\otimes^c\tau_\alpha)$, es decir, $\mathbf{y} \notin \Re(\otimes^c\tau_\alpha)(\mathbf{x}) = O_{\otimes^c\tau_\alpha}(\mathbf{x})$ por lo tanto, existe $\prod U_\alpha \in \otimes^c\tau_\alpha$ tal que $\mathbf{x} \in \prod U_\alpha$ pero $\mathbf{y} \notin \prod U_\alpha$, luego por la definición de producto cartesiano existe $\beta \in J$ donde $y_\beta \notin U_\beta$ y $x_\beta \in U_\beta$ con $U_\beta \in \tau_\beta$, $\pi_\beta(\mathbf{y}) = y_\beta$ y $\pi_\beta(\mathbf{x}) = x_\beta$, por consiguiente $y_\beta \notin O_{\tau_\beta}(x_\beta) = \Re(\tau_\beta)(x_\beta)$, es decir, $(x_\beta, y_\beta) \notin \Re(\tau_\beta)$, lo cual contradice que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \odot\Re(\tau_\alpha)$, de esta manera concluimos que $\odot\Re(\tau_\alpha) \subseteq \Re(\otimes^c\tau_\alpha)$. ∎

Proposición 3.1.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Si* A *es abierto (cerrado) en* (X, τ) *entonces* A *es abierto (cerrado) en* $(X, \Re(\tau))$.

Demostración.
Sea $A \in \tau$, entonces $A = \bigcup_{x\in A} O(x)$ y como $O(x) = \Re(\tau)(x)$ de la proposición (2.1.1), concluimos que A es abierto en $(X, \Re(\tau))$. Similarmente se obtiene el resultado para conjuntos cerrados. ∎

Corolario 3.1.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces* $(X, \Re(\tau))$ *es conexo implica que* (X, τ) *es conexo.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) no es conexo, entonces existe un subconjunto propio A abierto y cerrado, luego por el resultado anterior A es abierto y cerrado en $(X, \Re(\tau))$. Lo cual contradice la conexidad de $(X, \Re(\tau))$ y por consiguiente concluimos que (X, τ) es conexo. ∎

La otra implicación no es cierta. Para ver esto tomemos $(\mathbb{R}, \tau_u)$ el cual es conexo, pero el conjunto preordenado que genera $(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ no es conexo ya que todo punto es abierto y cerrado.

3.2. Topologías asociadas con preórdenes

Iniciamos esta sección con una definición la cual nos permite relacionar preórdenes con topologías sobre un mismo conjunto.

Definición 3.2.1. Dado un preorden R sobre un conjunto X, definimos la topología en X asociada con R, y notamos $\Im(R)$ a la topología generada por $\{R(x) \mid x \in X\}$.

Nota 3.2.1. *Las proposiciones del capítulo anterior nos garantizan que si (X, R) es un conjunto preordenado, $(X, \Im(R))$ es un espacio topológico. Además por definición, dado x en X, $O_{\Im(R)}(x) = R(x)$ y $adh_{\Im(R)}\{x\} = R^{-1}(x)$. En particular, R^{-1} es un preorden y su topología asociada es $\Im(R^{-1})$ donde sus abiertos son exactamente los cerrados en $\Im(R)$. Por simplicidad en este capítulo solo trabajaremos con (R) y $\tau(R)$, ya que sus resultados obtenidos serán inversamente equivalentes a los obtenidos con (R^{-1}) y $\Im(R^{-1})$.*

En sí, las topologías generadas por preórdenes como se definió en (3.2.1), cumplen propiedades especiales que no cumplen otras. Tal es el caso de la intersección arbitraria de abiertos la cual resulta ser un abierto, al igual la unión arbitraria de cerrados es un cerrado (2.1.1). En particular, en dichas topologías cada elemento del espacio cuenta con un abierto fundamental (2.1.3). Así mismo, toda base topológica contiene a la base formada por los abiertos fundamentales. Esto se puede ver de (2.1.1). Una topología que cumplen con estas propiedades, se le conoce como ***hipertopología*** y al espacio completo como espacio hipertopológico[1]. En especial, las topologías generadas por preórdenes y las topologías finitas son hipertopologías.

Ejemplo 3.2.1.
(a) En todo conjunto X no vació se tiene que $X \times X$ es el mayor preorden sobre X y su topología asociada es la menor "$\tau_{trivial}$", ya que para cada $a \in X$, $R(a) = X$.
(b) En todo conjunto X no vacío se tiene que la relación identidad, es el mayor preorden sobre X y su topología asociada es la mayor, "$\mathcal{P}(X)$", ya que para cada $a \in X$, $R(a) = \{a\}$.

[1]Algunos autores le dan el nombre de espacio saturado o topología de Alexandrov.

(c) En todo conjunto totalmente ordenado, la topología de colas resulta ser un caso particular de topologías generadas por preórdenes.

Proposición 3.2.1. *La topología asociada con el producto directo de preórdenes es la topología de cajas, la cual es generada por el producto de topologías asociadas con los preórdenes que conforman dicho producto directo de preórdenes.*
Es decir. Si $\{(X_\alpha, R_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *es una familia indexada de conjuntos preordenados, entonces:*

$$\Im(\odot R_\alpha) = \otimes^c \Im(R_\alpha).$$

Demostración.
En primer lugar veamos que para cada $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ se cumple $\odot R_\alpha((x_\alpha)) = \Pi R_\alpha(x_\alpha)$,

$$\begin{aligned}(y_\alpha) \in \odot R_\alpha((x_\alpha)) &\Leftrightarrow ((x_\alpha),(y_\alpha)) \in \odot R_\alpha \quad \text{(Def. 2.1.3).}\\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)((x_\alpha, y_\alpha) \in R_\alpha) \quad \text{(Def. 2.3.1).}\\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)(y_\alpha \in R_\alpha(x_\alpha)) \quad \text{(Def. 2.1.3).}\\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha \in J)((y_\alpha) \in \Pi R_\alpha((x_\alpha))) \quad \text{(Def. 1.15).}\end{aligned}$$

Ahora por la definición (3.2.1) tenemos si $\alpha \in J$ entonces $\{R_\alpha(x) \mid x \in X_\alpha\}$ forma una base para $\Im(R_\alpha)$, luego por la proposición (1.4) se tiene que $\{\prod R_\alpha(x_\alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha)\}$ forma una base para $\otimes^c(\Im(R_\alpha))$. De igual forma de (3.2.1) se tiene que:

$$\begin{aligned}\Im(\odot R_\alpha) &= \langle\{\odot R_\alpha((x_\alpha)) \mid (x_\alpha) \in \Pi X_\alpha\}\rangle\\ &= \langle\{\Pi R_\alpha(x_\alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha\}\rangle\\ &= \otimes^c \Im(R_\alpha).\end{aligned}$$

■

La anterior demostración y la definición (1.16) nos permite afirmar que los conjuntos $\{\pi^{-1}(R_\beta(x) \mid x \in X_\beta\}$ forma una subbase para la topología producto $\otimes\Im(R_\alpha)$ pero por la definición (1.16) ésta no es genera por un preorden salvo en el caso que coincida con la topología de cajas.

Proposición 3.2.2. *Si R y S son dos preórdenes sobre un conjunto X tales que sus topologías asociadas son iguales, entonces R y S son iguales.*

Demostración.
Si $\Im(R) = \Im(S)$ entonces, dado $x \in X$, $O_{\Im(R)}(x) = O_{\Im(S)}(x)$ y como $O_{\Im(R)}(x) = R(x)$ y $O_{\Im(R)}(y) = R(y)$ entonces $R(x) = S(x)$. Ahora si $y, z \in X$ entonces $(y, z) \in R$ si, y sólo si, $z \in R(y) = S(y)$ si, y sólo, $(y, z) \in S$. Luego $R = S$. ■

3.3. Generalizaciones

Vimos anteriormente que todo preorden R sobre un conjunto X genera un espacio topológico "$\Im(R)$", el cual a su vez genera un preorden "$\Re(\Im(R))$", así sucesivamente. De igual forma dada una topología τ sobre X, esta genera un preorden "$\Re(\tau)$", la cual a su vez genera una topología "$\Im(\Re(\tau))$" , así sucesivamente. Por lo tanto, es lógico preguntarnos. A partir del preorden R, ¿cuantas topologías y preórdenes se pueden generar y como todas estas se relacionan?. Del mismo modo, a partir de τ, ¿cuantos preórdenes y topologías se pueden generar y como todas estas se relacionan?. Otras preguntas que no podemos dejar sin hacer son: ¿todo preorden es generado por una topología? y ¿toda topología es generada por un preorden?. La respuesta a esta última es inmediata. Como mencionamos anteriormente, las topologías generadas por preórdenes cumplen propiedades que solo las cumplen las hipertopologías. Lo cual nos crea una nueva pregunta, ¿toda hipertopología es generada por un preorden?. La respuesta a casi todas las preguntas mencionas, se obtienen de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. *Si (X, R) un conjunto preordenado, entonces R coincide con el preorden generado por la topología generada por R; es decir, $R = \Re(\Im(R))$.*

Demostración.
Sea $x \in X$, como $R(x) = O_{\Im(R)}(x)$ y como $O_{\Im(R)}(x) = \Re(\Im)(x)$, obtenemos que $R(x) = \Re(\Im(R))(x)$ de donde se concluye que $R = \Re(\Im(R))$. ∎

Si (X, R) es un conjunto preordenado y τ es una topología sobre X. De la proposición anterior obtenemos los siguientes resultados.

1. A partir de R, solo se puede generar el mismo preorden "$\Re(\Im(R))$", al igual que una única topología "$\Im(R)$", la cual a su vez genera a R. Por consiguiente obtenemos que, todo preorden es generado al menos por una topología. En sí, es generado por una hipertopología. También podemos observar que la proposición (3.2.2), es un resultado de la proposición anterior.

2. A partir de τ, solo se puede generar un preorden "$\Re(\tau)$" y una topología "$\Im(\Re(\tau))$", la cual de las proposiciones (3.2.2) o (3.3.1), es generada únicamente por un preorden "$\Re(\tau)$".

La relación entre τ y $\Im(\Re(\tau))$ se muestra a continuación.

Proposición 3.3.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces se tiene que $\Im(\Re(\tau))$ es mas fina que τ.*

Demostración.
Sea $A \in \tau$ entonces de la proposición (3.1.1), A es abierto en $(X, \Re(\tau))$, luego del corolario (2.1.1) se tiene $A = \bigcup_{x\in A} \Re(\tau)(x)$ y como $\Re(\tau)(x) = O_{\Im(\Re(\tau))}(x)$ el cual resulta ser abierto en $\Im(\Re(\tau))$ por ser hipertopología, se concluye que $U \in \Im(\Re(\tau))$; por consiguiente, $\tau \subseteq \Im(\Re(\tau))$. ■

El resultado anterior junto con la proposición (3.3.1) justifican el por qué del nombre de hipertopologías, ya que dichas topologías resultan ser las más finas que pueden generar un preorden.

Corolario 3.3.1. *Para toda hipertopología τ sobre un conjunto X se tiene que $\tau = \Im(\Re(\tau))$*

Demostración.
Basta con probar que τ es mas fina que $\Im(\Re(\tau))$. Sea $A \in \Im(\Re(\tau))$, luego $A = \bigcup_{x\in A} O_{\Im(\Re(\tau))}(x)$ y como $O_{\Im(\Re(\tau))}(x) = \Re(\tau)(x)$ y $\Re(\tau)(x) = O_\tau(x)$ el cual resulta ser abierto en τ por ser hipertopología, de donde concluimos que $A \in \tau$. ■

Si τ es una hipertopología en un conjunto X, del resultado anterior y de la proposición (3.3.1) obtenemos, que τ es generada por el preorden $\Re(\tau)$. Por consiguiente se tiene que toda hipertopología es generada por un único preorden, al igual que todo preorden es generado por una única hipertopología. Además, por la definición de hipertopología, se tiene que la implicación contraria del corolario también es cierta. Por consiguiente podemos concluir que en en toda hipertopología los abiertos y cerrados son exactamente los abiertos y cerrados en el preorden que este genera. Lo anterior junto con las proposiciones de conexidad y producto de preórdenes y espacios topológicos nos brinda algunas herramientas que nos permitirán llegar a nuestro primer objetivo con lo cual terminamos esta sección. Para ver esto, basta con tomar la topología de cajas, ya que por ser menos fina la topología producto se obtendrá su conexidad.

Proposición 3.3.3. *Sea τ una hipertopología sobre un conjunto X. Entonces, (X, τ) es conexo si, y sólo si, $(X, \Re(\tau))$ es conexo.*

Su demostración es inmediata de lo mencionado anteriormente.

Proposición 3.3.4. *La topología de cajas formada por hipertopologías, es una hipertopología*

Demostración. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios hipertopológicos, luego de la demostración de la proposición (3.2.1) se tiene que para todo $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$, $\odot\Re(\tau_\alpha)((x_\alpha)) = \Pi\Re(\tau_\alpha)(x_\alpha)$ y como $\Re(\tau_\alpha)(x_\alpha) = O_{\tau_\alpha}(x_\alpha)$ pertenece a τ_α por ser hiretopología, entonces, $O_{\otimes^c\tau_\alpha} = \odot\Re(\tau_\alpha)((x_\alpha)) = \Pi\Re(\tau_\alpha)(x_\alpha)$ el cual pertenece a $\otimes^c\tau_\alpha$ (Def. 1.16) de donde concluimos que $\otimes^c\tau_\alpha$ es una hipertopología. ■

Proposición 3.3.5. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios hipertopológicos. Entonces*

$$(\Pi X_\alpha, \otimes^c\tau_\alpha) \text{ es conexo} \Leftrightarrow (\forall\alpha \in J)((X_\alpha, \tau_\alpha) \text{ es conexo }).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\Pi X_\alpha, \otimes^c\tau_\alpha) \text{ es conexo} &\Leftrightarrow (\Pi X_\alpha, \Re(\otimes^c\tau_\alpha)) \quad \text{es conexo (Prop. 3.3.3 y 3.3.4).}\\
&\Leftrightarrow (\Pi X_\alpha, \odot\Re(\tau_\alpha)) \quad \text{es conexo (Prop 3.1.3).}\\
&\Leftrightarrow (\forall\alpha \in J)((X_\alpha, \Re(\tau_\alpha)) \text{ es conexo}) \;\; \text{(Prop 2.4.2).}\\
&\Leftrightarrow (\forall\alpha \in J)((X_\alpha, \tau_\alpha) \text{ es conexo}) \;\; \text{(Prop 3.3.3).}
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.3.6. *Sea $\{X_{\alpha,\tau_\alpha}\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. Entonces $(\Pi X_\alpha, \otimes^c\tau_\alpha)$ es conexo, si $(X_\alpha, \Re(\tau_\alpha))$ es conexo para cada $\alpha \in J$.*

Demostración. Si $(X_\alpha, \Re(\tau_\alpha))$ es conexo para cada $\alpha \in J$. Entonces $(\Pi X_\alpha, \Re(\otimes^c\tau_\alpha)$ es conexo (Prop. 2.4.2) y por consiguiente $(\Pi X_\alpha, \otimes^c\tau_\alpha)$ es conexo (Prop. 3.1.1). ■

3.4. Correspondencias categóricas entre hipertopologías y preórdenes

En lo que resta del capítulo nos dispondremos a mostrar algunos de los resultados categóricos que se pueden establecer entre conjuntos preordenados y espacios hipertopológicos. Para llevar a cabo esto, iniciaremos con una serie proposiciones que nos permitirán establecer las diferentes correspondencias a mostrar.

Proposición 3.4.1. *Sea (X, τ) espacio topológico entonces, (X, τ) es T_0 si, y sólo si, $(X, \Re(\tau))$ es un conjunto ordenado.*

Demostración.

Demostremos su negación.

$$\begin{aligned}
\Re(\tau) \text{ no es de orden } &\Leftrightarrow (\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge (y,x) \in \Re(\tau) \wedge (x,y) \in \Re(\tau)) \quad \text{(Def. 1.4)}\\
&\Leftrightarrow (\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge y \in \Re(\tau)(x) \wedge x \in \Re(\tau)(y)) \ \text{(Def. 2.1.3)}\\
&\Leftrightarrow (\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge y \in O(x) \wedge x \in O(y)) \ \text{(Def. 3.1.2)}\\
&\Leftrightarrow (\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge V_x = V_y) \ \text{(Pro. 3.1.1).}\\
&\Leftrightarrow (X,\tau) \text{ no es } T_0 \ \text{(Def. 1.20 y 3.1.1)}
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.4.1. *Sea (X, R) un conjunto preordenado entonces.*

1. *(X, R) es un conjunto ordenado, si y sólo si, $(X, \Im(R))$ es T_0.*
2. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces (X,τ) es T_0, si y sólo si, $(X, \Im(\Re(\tau)))$ es T_0.*

Demostración.
(1) Como (X, R) es un conjunto ordenado y $(X, R) = (X, \Re(\Im(R)))$, de la proposición anterior concluimos que $(X, \Im(R))$ es T_0.
Similarmente, si $(X, \Im(R))$ es T_0, de la proposición anterior, $(X, \Re(\Im(R))) = (X, R)$ es un conjunto ordenado.
(2) Su demostración es inmediata del inciso (1) y la proposición (3.4.1). ■

Proposición 3.4.2. *Sea (X,τ) espacio topológico. Entonces (X,τ) es T_1 si, y sólo si, $\Re(\tau)$ es la identidad en X.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(X,\tau) \text{ es } T_1 &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(Adh\{x\} = \{x\}) \ \text{(Prop. 1.3).}\\
&\Leftrightarrow (\forall x \in X)(O(x) = \{x\}) \ \text{(Prop. 3.1.1).}\\
&\Leftrightarrow \Re(\tau) = I_X \ \text{(Def. Identidad y Def. 3.1.2).}
\end{aligned}$$

■

En el ejemplo (3.1.1), los incisos (b) y (c) concuerdan con la anterior proposición, ya que en $\mathbb{R}$, se tiene que la topología τ_u es T_1 y por consiguiente τ_ℓ y τ_K también lo serán, debido a que son mas finas que τ_u.

Corolario 3.4.2. *En todo conjunto la única hipertopología T_1 es la discreta.*

Su demostración es inmediata de la proposición anterior y las proposiciones (3.3.1) y (3.3.2).

Proposición 3.4.3. *Sean (X, R) y (Y, S) conjuntos preordenado y $f : X \to Y$ una función, entonces. f es un morfismo entre (X, R) y (Y, S) si, y sólo si, f es continua entre $(X, \Im(R))$ y $(Y, \Im(S))$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $A \in \Im(S)$, entonces A es abierto en (Y, S) y por ser f un morfismo, de la proposición (2.4.3) se tiene que $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, R), luego $f^{-1}(A) \in \Im(R)$ y por consiguiente f es una función continua entre $(X, \Im(R))$ y $(Y, \Im(S))$.
$\Leftarrow$) Similarmente, sea A abierto en (Y, S), entonces $A \in \Im(S)$ y por ser f continua, $f^{-1}(A) \in \Im(R)$ de donde tenemos que $f^{-1}(A)$ es abierto en $(X, \Im(R))$, luego por la proposición (2.4.3) concluimos que f es un morfismo entre (X, R) y (Y, S). ■

Corolario 3.4.3. *Sean (X, τ) y (Y, τ') espacios hipertopológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función, entonces f es continua entre (X, τ) y (Y, τ') si, y sólo si, f es un morfismo entre $(X, \Re(\tau))$ y $(Y, \Re(\tau'))$.*

como comentario también mencionamos que en espacios hipertopológicos, los homeomorfismos son exactamente los isomorfismos de los conjuntos preordenados que generan.

Proposición 3.4.4. *Entre los siguientes espacios, existe un correspondencia (isomorfismo) categórica.*

1. *Espacios hipertopológicos y conjuntos preordenados.*
2. *Espacios hipertopológicos T_0 y conjuntos ordenados.*
3. *Espacios hipertopológicos conexos y conjuntos preordenados conexos.*
4. *Espacios topológicos finitos y conjuntos preordenados finitos.*

Solo mostraremos el resultado para el primer inciso ya que los demás son casos particulares de este.

Notemos "***Toph***" a la categoría de los espacios hipertopológicos, que no es mas que una restricción a la categoría ***Top*** en las clases de objetos, los cuales serán espacios hipertopológicos. Definamos el funtor $F : Toph \to Pre$ tal que $F(X, \tau) = (X, \Re(\tau))$ y para toda función continua $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')$ se tiene $F((X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')) = (X, \Re(\tau)) \xrightarrow{f} (Y, \Re(\tau'))$. El functor F esta bien definido debido a que toda hipertopología τ genera un único preorden "$R(\tau)$". y que toda función continua $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')$ es un morfismo entre los preórdenes $(X, \Re(\tau))$ y $(Y, \Re(\tau'))$ (Prop. 3.4.3). Lo cual nos garantiza que se preservan las identidades y las composiciones de morfismos. Ahora definamos el functor $G : Pre \to Toph$ tal que $G(X, R) = (X, \Im(R))$ y para todo morfismo $(X, R) \xrightarrow{g} (Y, S)$ se tiene que, $G((X, R) \xrightarrow{g} (Y, S)) = (X, \Im(R)) \xrightarrow{g} (Y, \Im(S)))$. Donde el mismo análisis realizado a F nos garantiza que G esta bien definido.

Veamos que $F \circ G = Id_{Pre}$.

$$\begin{aligned}
F \circ G((X, R) \xrightarrow{g} (Y, S)) &= F(G((X, R) \xrightarrow{g} (Y, S))) \\
&= F((X, \Im(R)) \xrightarrow{g} (Y, \Im(S))) \\
&= (X, \Re(\Im(R))) \xrightarrow{g} (Y, \Re(\Im(S))) \\
&= (X, R) \xrightarrow{g} (Y, S).
\end{aligned}$$

Por último veamos que $G \circ F = Id_{Toph}$.

$$\begin{aligned}
G \circ F((X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')) &= G(F((X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')) \\
&= G((X, \Re(\tau)) \xrightarrow{f} (Y, \Re(\tau'))) \\
&= (X, \Im(\Re(\tau))) \xrightarrow{f} (Y, \Im(\Re(\tau'))) \\
&= (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau')
\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que entre espacios hipertopológicos y conjuntos preordenados existe una correspondencia (isomorfismo) categórica.

CAPÍTULO 4

TOPOLOGÍAS COMPACTAS POR MEDIO DE PREÓRDENES

Como mencionamos en la introducción, este capitulo esta dirigido al estudio de la compacidad de un espacio topológico por medio del conjunto preordenado que este genera, los resultados que a continuación presentamos se deben a R. Larson ([6]) y F. Lorrain ([7]) para hipertopologías T_0 y L. Acosta ([2]) que muestra una caracterización para topologías T_0 en términos del conjunto de puntos cerrados de la topología dada, para finalizar con una generalización a cualquier topología por medio del preorden que este genera y que se muestra en ([10]).

4.1. Una caracterización de las topologías compactas T_0

Definición 4.1.1. Sea (X, R) un conjunto preordenado. Un elemento $x \in X$ se llama minimal de (X, R) si, para todo $y \in X$, $(y, x) \in R$ implica $(x, y) \in R$. El conjunto de los minimales de (X, R) lo notaremos $Min(X, R)$. Igualmente, definimos:

$$Nm(X, R) = \{x \in X \mid \; (forally \in Min(X, R))((y, x) \notin R)\},$$

como el conjunto de los elementos no fundamentados. Si no hay lugar a confusiones notaremos a $Min(X,R)$ como $MinR$ y a $Nm(X,R)$ como NmR.

En el caso de una relación de orden esta definición coincide con la noción tradicional de minimal.

Definición 4.1.2. Sea (X,R) un conjunto ordenado. Decimos que (X,R) tiene suficientes minimales si para todo $y \in X$ existe por lo menos un $x \in MinR$ tal que $(x,y) \in R$, es decir, $x \in (R(y))^{-1}$ o equivalentemente $NmR = \emptyset$.

Sabemos que si (X,τ) es un espacio topológico T_0, $(X,\Re(\tau))$ es un conjunto ordenado donde para cada $x \in X$, $(\Re(\tau))^{-1}(x) = adh_\tau(\{x\})$. Por consiguiente el conjunto de puntos cerrados coincide con el conjunto de minimales según $(X,\Re(\tau))$, en donde tener suficientes minimales significa que que en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.
Para mayor comodidad notemos $\Re^{-1}(\tau)$ a $(\Re(\tau))^{-1}$.

Definición 4.1.3. Sea (X,τ) un espacio topológico. Notamos $\tau_c = \Im(\Re^{-1}(\tau))$. Es decir, τ_c es la hipertopología generada por los cerrados de τ.

Proposición 4.1.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico T_0. El conjunto de puntos cerrados -según τ- es denso en (X,τ_c) si, y sólo si, en la adherencia de todo punto -según τ- hay un punto cerrado.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $x \in X$, como $x \in \Re^{-1}(\tau)(x)$, $\Re^{-1}(\tau)(x) \in \tau_c$ y $Min\Re(\tau)$ es denso en (X,τ_c), entonces $Min\Re(\tau) \cap (\Re^{-1}(\tau))(x) \neq \emptyset$; luego existe $y \in Min\Re(\tau)$ tal que $y \in \Re^{-1}(\tau)(x)$.
$\Leftarrow$) Basta con ver que $X \subseteq adh(Min\Re(\tau))$. Sea $x \in X$ y $A \in \tau_c$ tal que $x \in A$, es decir $\Re^{-1}(\tau)(x) \subseteq A$, (Coro. 2.1.1) y como en la adherencia de todo punto existe un punto cerrado, entonces existe $y \in adh(Min\Re(\tau))$ tal que $y \in \Re^{-1}(\tau)(x)$; luego $y \in A$, de tal forma que $A \cap Min\Re(\tau) \neq \emptyset$, de lo cual concluimos que $X \subseteq adh(Min\Re(\tau))$. ■

Proposición 4.1.2. *Sean τ una topología T_0 sobre X, $\mathcal{D} = \{A \subseteq X \mid adh(A) = X\}$ y $C = \bigcap_{A\in\mathcal{D}} A$. Entonces:*

1. $Min\Re(\tau) \subseteq C$.

2. *Si en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, entonces*

$$Min\Re(\tau) = C.$$

Demostración.
(1) Supongamos que $Min\Re(\tau) \nsubseteq C$, luego existe $A \in \mathcal{D}$ tal que $Min\Re(\tau) \nsubseteq A$. Sea $x \in (Min\Re(\tau) - A)$ entonces $\Re^{-1}(\tau)(x) = adh(\{x\}) = \{x\}$, luego $\{x\} \in \tau_c$ y como $x \in adh(A) = X$, $\{x\} \cap A \neq \emptyset$; por lo tanto $x \in A$. Lo cual contradice que $A \in \mathcal{D}$ y por consiguiente $Min\Re(\tau) \subseteq C$.
(2) El resultado es inmediato de (1) y la proposición (4.1.1). ■

Proposición 4.1.3. *Sea τ una hipertopología T_0 sobre X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *(X, τ) es compacto.*
2. *X tiene un subconjunto finito y denso en (X, τ_c).*
3. *El conjunto de puntos cerrados -según τ- es finito y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Por ser τ una hipertopología, $\{\Re(\tau)(x) \mid x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de τ y por ser compacto, existe $M = \{x_1, ..., x_n\}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{n} \Re(\tau)(x_j)$. Veamos que $adh_{\tau_c}(M) = X$. Sea $y \in X$ entonces existe $x_j \in M$ tal que $y \in \Re(\tau)(x_j)$, es decir, $x_j \in \Re^{-1}(\tau)(y)$; por lo tanto, si $A \in \tau_c$ con $y \in A$, entonces se tiene que $\Re^{-1}(\tau)(y) \subseteq A$, (Coro. 2.1.1) y por consiguiente $x_j \in A$, luego $A \cap M \neq \emptyset$ de lo cual concluimos que $adh_{\tau_c}(M) = X$.
2) $\Rightarrow$ 3) Sea Y un subconjunto finito y denso en (X, τ_c), luego $Y \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es como en la proposición (4.1.2) para τ_c, por consiguiente $Min\Re(\tau) \subseteq C \subseteq Y$, así, $Min\Re(\tau)$ también es finito. Ahora, sea $y \in X = adh_{\tau_c}(Y)$ y como $\Re^{-1}(\tau)(y) \in \tau_c$ entonces $Z = \Re^{-1}(\tau)(y) \cap Y \neq \emptyset$. Puesto que Y es finito, Z es finito, por lo tanto tiene minimales -según $\Re(\tau)$-.
Veamos que los minimales de Z son puntos cerrados -según τ-.
Supongamos que existe z minimal en Z tal que z no es un punto cerrado, luego existe $x \in X$ con
$x \neq z$ donde $x \in adh_\tau(\{z\}) = \Re^{-1}(\tau)(z)$, es decir, $(x, z) \in \Re(\tau)$, además tenemos que $\Re^{-1}(\tau)(x) \cap Y \neq \emptyset$. Sea $w \in \Re^{-1}(\tau)(x) \cap Y$, entonces $(w, x) \in \Re(\tau)$ y como tenemos que $(x, z) \in \Re(\tau)$, $(w, z) \in \Re(\tau)$, luego por ser z minimal en Z y $\Re(\tau)$ un orden parcial, $z = w$ y por consiguiente $(x, w) \in \Re(\tau)$ de donde obtenemos que $x = w = z$, lo que contradice que $x \neq z$. Por lo tanto los minimales de Z son puntos cerrados -según τ-, y como $Z = \Re^{-1}(\tau)(y) \cap Y$, concluimos que $\Re^{-1}(\tau)(y)$ tiene minimales, es decir, en $adh_\tau(\{y\})$ hay

puntos cerrados.

3) $\Rightarrow$ **1)** Sea $M' = \{x_1, ..., x_n\}$ el conjunto de puntos cerrados -según τ-, veamos que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \Re(\tau)(x_j)$. Sea $y \in X$, luego existe $x_j \in M$ tal que $x_j \in \Re(\tau)^{-1}(y)$, es decir, $y \in \Re(\tau)(x_j)$ de lo cual concluimos que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \Re(\tau)(x_j)$.

Ahora, sea $\{A_i\}_{i\in J}$ un recubrimiento por abiertos de X; por lo tanto, dado $x_j \in M$ existe un $A_{i,j}$ tal que $x_j \in A_{i,j}$, luego $\Re(\tau)(x_j) \subseteq A_{i,j}$, así obtenemos que $\bigcup_{j=1}^{n} \Re(\tau)(x_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i,j}$ donde $\Re(\tau)(x_j) \subseteq A_{i,j}$ para cada j, con $j \in \{1, ..., n\}$ y como $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \Re(\tau)(x_j)$ entonces $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i,j}$. Con lo cual concluimos que (X, τ) es compacto. ■

Proposición 4.1.4. *Sea τ una topología T_0 sobre X. (X, τ) es compacto si, y sólo si, el conjunto de puntos cerrados es compacto y en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Demostremos que en la adherencia de todo hay un punto cerrado.

Supongamos que existe $y \in X$ en donde su adherencia no tiene puntos cerrados. Es decir, $\Re^{-1}(\tau)(x)$ no tiene minimales, luego por el lema de Zorn éste debe contener una cadena sin cotas inferiores, ya que de lo contrario $\Re^{-1}(\tau)(x)$ tiene minimales contradiciendo lo supuesto. Sea $\{y_j\}_{j\in K}$ dicha cadena. La colección de cerrados $\{\Re^{-1}(y_j)\}_{j\in k}$ tiene la propiedad de la de intersección finita, pero $\bigcap_{j\in K} \Re^{-1}(y_k) = \emptyset$. lo cual contradice que (X, τ) es compacto. Por consiguiente concluimos que en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado.

Para ver que que el conjunto de puntos cerrados o minimales -según $\Re(\tau)$- es compacto, basta con demostrar que todo cubrimiento de $Min\Re(\tau)$ es un cubrimiento de (X, τ). Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de $Min\Re(\tau)$, luego si $x \in X$ de lo demostrado anteriormente, existe $y \in Min\Re(\tau)$ tal que $(y, x) \in \Re(\tau)$ y como $Min\Re \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $j \in I$ donde $y \in A_j$ con $A_j \in \tau$, por lo tanto A_j es abierto en $(X, \Re(\tau))$, (Prop. 3.1.4) de lo cual concluimos que $x \in A_j$ y por consiguiente que $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de (X, τ).

$\Leftarrow$) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, por lo tanto también lo sera para $Min\Re(\tau)$ el cual es compacto, luego existen un numero finito de subíndices tal que $Min\Re(\tau) \subseteq \bigcup_{j=i}^{n} A_{i,j}$. Veamos que $X \subseteq \bigcup_{j=i}^{n} A_{i,j}$. Sea $y \in X$, como en la adherencia de todo punto hay un punto cerrado, existe $x \in Min\Re(\tau)$ tal que $y \in \Re(\tau)(x)$ y como $Min\Re(\tau) \subseteq \bigcup_{j=i}^{n} A_{i,j}$, existe $j \in \{1, ..., n\}$ donde $x \in A_{i,j}$, luego $\Re(\tau)(x) \subseteq A_{i,j}$ y en consecuencia, $y \in A_{i,j}$. Con lo cual concluimos que $X \subseteq \bigcup_{j=i}^{n} A_{i,j}$ y por consiguiente (X, τ) es compacto.

Ejemplo 4.1.1.

(a). $\mathbb{R}$ con la topología de colas es T_0 pero no es compacta ya que es generada por el orden

usual en $\mathbb{R}$ el cual no posee minimales y por consiguiente no existirán puntos cerrados en el espacio topológico.
(b). En los enteros positivos, la relación divide forma un orden que tiene como único minimal a 1 y el cual se encuentra incluido en todo cerrado. De donde se sigue que el espacio topológico que este genera es compacto.

4.2. Topologías compactas por su preorden generado

Definición 4.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Si $\theta : X \to X/R : \theta(x) = \overline{x}$ es la función canónica al cociente, definimos y notamos

$$\tau/R = \{A \subseteq X/R \mid \theta^{-1}(A) \in \tau\}.$$

Proposición 4.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Entonces $(X/R, \tau/R)$ es un espacio topológico.*

Demostración.
(1) Como $\theta^{-1}(X/R) = X \in \tau$ entonces, por definición $X/R \in \tau/R$, de igual forma $\theta^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$, por lo tanto $\emptyset \in \tau/R$.
(2) Sean $A_1, A_2 \in \tau/R$, entonces $\theta^{-1}(A_1), \theta^{-1}(A_2) \in \tau$, por consiguiente se tiene que $\theta^{-1}(A_1) \cap \theta^{-1}(A_2) \in \tau$ y como $\theta^{-1}(A_1) \cap \theta^{-1}(A_2) = \theta^{-1}(A_1 \cap A_2)$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau/R$.
(3) De igual forma si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una colección de elementos de τ/R, entonces $\{\theta^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$ es una colección de abiertos de (X, τ), por consiguiente $\bigcup_{i\in I} \theta^{-1}(A_i) \in \tau$ y como $\bigcup_{i\in I} \theta^{-1}(A_i) = \theta^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau/R$.
Luego $(X/R, \tau/R)$ es un espacio topológico. ■

Si (X, τ) es un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. La función canónica $\theta : (X, \tau) \to (X/R, \tau/R)$ es sobreyectiva y por definición de τ/R, es continua.

Definición 4.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico definimos y notamos

$$\bar{\Re}_\tau = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in O(y) \wedge y \in O(x)\}.$$

Es decir $\bar{\Re}_\tau = \Re(\tau) \cap \Re^{-1}(\tau)$, la cual es la mayor relación de equivalencia sobre X contenida en $\Re(\tau)$. Si no hay lugar a confusiones escribiremos $\bar{\Re}_\tau$ como $\bar{\Re}$, $\tau/\bar{\Re}$ como $\tau^\star$ y $X/\bar{\Re}$ como $X^\star$.

Proposición 4.2.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\theta : (X, \tau) \to (X^\star, \tau^\star)$. La función canónica y $A \in \tau$, entonces $\theta^{-1}(\theta(A)) = A$.*

Demostración.
Basta con ver que $\theta^{-1}(\theta(A)) \subseteq A$. Sea $y \in \theta^{-1}(\theta(A))$ entonces $\theta(y) = \overline{y} \in \theta(A)$, luego existe $x \in A$ tal que $\theta(x) = \theta(y)$ es decir, $\overline{x} = \overline{y}$, por consiguiente $(x, y) \in \bar{\Re} \subseteq \Re(\tau)$, de donde se tiene que $y \in \Re(\tau)(x)$ y como $x \in A$, $\Re(\tau)(x) \subseteq A$, así $y \in A$. Con lo cual concluimos que $\theta^{-1}(\theta(A)) \subseteq A$. ∎

Si (X, τ) es un espacio topológico, se tiene por definición que $A \in \tau^\star$, si y sólo si, $\theta^{-1}(A) \in \tau$. Un resultado inmediato de la proposición anterior es que $A \in \tau$ si, y sólo si, $\theta(A) \in \tau^\star$.

Proposición 4.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces (X, τ) es compacto si, y sólo si, $(X^\star, \tau^\star)$ es compacto.*

Demostración.
$\Rightarrow$) como θ es una función continua y sobre, y como (X, τ) es compacto entonces $(X^\star, \tau^\star)$ es compacto (Teo. 1.6).
$\Leftarrow$) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X, es decir, $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces

$$X^\star = \theta(X) = \theta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \theta(A_i)$$

y como de la proposición anterior, $\theta(A_i) \in \tau^\star$ para cada $i \in I$, entonces $\{\theta(A_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de $X^\star$ donde tenemos que $(X^\star, \tau^\star)$ es compacto y por consiguiente existe $\{i_1, ..., I_n\} \subseteq I$ tal que $X^\star = \bigcup_{j=1}^{n} \theta(A_{i_j})$. Veamos que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$.

$$X = \theta^{-1}(X^\star) = \theta^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \theta(A_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \theta^{-1}\left(\theta(A_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}.$$

Por lo tanto (X, τ) es compacto. ∎

Proposición 4.2.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces $(X^\star, \tau^\star)$ es T_0.*

Demostración.
Sean $\overline{x}, \overline{y} \in X^\star$ con $\overline{x} \neq \overline{y}$, entonces $(x, y) \notin \bar{\Re} = \Re(\tau) \cap \Re^{-1}(\tau)$, es decir, $(x, y) \notin \Re(\tau)$ o $(y, x) \notin \Re(\tau)$.
Supongamos que $(x, y) \notin \Re(\tau)$, es decir, $y \notin \Re(\tau)(x) = O_\tau(x)$, entonces existe $A \in \tau$ tal que $x \in A$ pero $y \notin A$, y como $A = \theta^{-1}(\theta(A))$, se tendrá que $\overline{x} \in \theta(A)$ y $\overline{y} \notin \theta(A)$, donde

$\theta(A) \in \tau^\star$. Análogamente si suponemos que $(y,x) \notin \Re(\tau)$ obtendremos un resultado similar. Por consiguiente concluimos que $(X^\star, \tau^\star)$ es T_0. ■

Tenemos que en un espacio topológico (X,τ), $(X^\star,\tau^\star)$ es T_0, por consiguiente $\Re(\tau^\star)$ es un orden sobre X y $Min\Re(\tau^\star)$ coincide con el conjunto de puntos cerrados -según $\tau^\star$-, lo cual no necesariamente ocurre con $Min\Re(\tau)$ -según τ- ya que si $y \in Min\Re(\tau)$ no implica que $\Re^{-1}(\tau) = \{y\}$. Sin embargo entre los conjuntos $Min\Re(\tau^\star)$ y $Min\Re(\tau)$ existe una estrecha relación, la cual veremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$, entonces.*

$$x \in Min\Re(\tau) \Leftrightarrow \overline{x} \in Min\Re(\tau^\star).$$

Demostración.
Demostremos su negación.
$\Leftarrow$) Si $\overline{x} \notin Min\Re(\tau^\star)$, entonces existe $\overline{y} \in X^\star$ tal que $(\overline{y},\overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$ con $\overline{y} \neq \overline{x}$.
Veamos que $(y,x) \in \Re(\tau)$. Sea $A \in \tau$ tal que $y \in A$, luego $\overline{y} \in \theta(A)$ donde tenemos por (4.2.2) que $\theta(A) \in \tau^\star$. Ahora como $(\overline{y},\overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$, es decir, $\overline{x} \in \Re(\tau^\star)(\overline{y}) = O_{\tau^\star}(\overline{y})$, se tiene que $\overline{x} \in \theta(A)$ y como $\theta^{-1}(\theta(A)) = A$, entonces $x \in A$, con lo cual concluimos que $x \in O_\tau(y) = \Re(\tau)(y)$, es decir, $(y,x) \in \Re(\tau)$.
Ahora veamos que $(x,y) \notin \Re(\tau)$. Como $\overline{y} \neq \overline{x}$, se tiene que $(x,y) \notin \bar{\Re}$, luego $(x,y) \notin \Re(\tau)$ o $(y,x) \notin \Re(\tau)$, pero como $(y,x) \in \Re(\tau)$ concluimos que $(x,y) \notin \Re(\tau)$. De esta forma tenemos que $x \notin Min\Re(\tau)$.
$\Rightarrow$) Ahora si $x \notin Min\Re(\tau)$, entonces existe $y \in X$ tal que $(y,x) \in \Re(\tau)$ y $(x,y) \notin \Re(\tau)$, luego $(x,y) \notin \bar{\Re}$ y por consiguiente $\overline{x} \neq \overline{y}$.
Veamos que $(\overline{y},\overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$. Sea $A \in X^\star$ tal que $\overline{y} \in A$, entonces $y \in \theta^{-1}(A)$ y como $\theta^{-1}(A) \in \tau$, luego es abierto en $\Re(\tau)$ y como $(y,x) \in \Re(\tau)$, $x \in \theta^{-1}(A)$, por consiguiente $\overline{x} \in A$, de lo cual concluimos que $\overline{x} \in O_{\tau^\star}(\overline{y}) = \Re(\tau^\star)(\overline{y})$, es decir $(\overline{y},\overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$. De esta forma tenemos que $\overline{x} \notin Min\Re(\tau^\star)$. ■

Corolario 4.2.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces. $Min\Re(\tau)$ es compacto, si y sólo si, $Min\Re(\tau^\star)$ es compacto.*

Su demostración es similar a la realizada en 4.2.1.

Proposición 4.2.6. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$, entonces. $x \in Nm\Re(\tau)$ si, y sólo si, $\overline{x} \in Nm\Re(\tau^\star)$.*

Demostración.

Demostremos su negación.

$\Rightarrow$) Si $x \notin Nm\Re(\tau)$, entonces existe $y \in Min\Re(\tau)$ tal que $(y, x) \in \Re(\tau)$.

Veamos que $(\overline{y}, \overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$. Sea $A \in \tau^\star$ con $\overline{y} \in A$, por lo tanto $y \in \theta^{-1}(A)$, donde tenemos que $\theta^{-1}(A) \in \tau$, lo que nos indica que $\theta^{-1}(A)$ es abierto en $\Re(\tau)$ y como $(y, x) \in \Re(\tau)$ entonces $x \in \theta^{-1}(A)$, luego $\overline{x} \in \theta(\theta^{-1}(A)) = A$, de lo cual concluimos que $\overline{x} \in O_{\tau^\star}(\overline{y}) = \Re(\tau^\star)(\overline{y})$, es decir $(\overline{y}, \overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$ y como $y \in Min\Re(\tau)$ del resultado anterior $\overline{y} \in Min\Re(\tau^\star)$. Con lo cual concluimos que $\overline{x} \notin Nm\Re(\tau^\star)$.

$\Leftarrow$) Similarmente, si $\overline{x} \notin Nm\Re(\tau^\star)$, existe $\overline{y} \in Min\Re(\tau^\star)$ tal que $(\overline{y}, \overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$.

Veamos que $(y, x) \in \Re(\tau)$. Sea $A \in \tau$ con $y \in A$, entonces $\overline{y} \in \theta(A)$ donde tenemos que $\theta(A) \in \tau^\star$, lo cual nos indica que $\theta(A)$ es abierto en $\Re(\tau^\star)$ y como $(\overline{y}, \overline{x}) \in \Re(\tau^\star)$ entonces $\overline{x} \in \theta(A)$, luego $x \in \theta^{-1}(\theta(A)) = A$, por consiguiente $x \in O_\tau(y) = \Re(\tau)(y)$, es decir, $(y, x) \in \Re(\tau)$ y como $\overline{y} \in Min\Re(\tau^\star)$ de la proposición anterior $y \in Min\Re(\tau)$. Con lo cual concluimos que $x \notin Nm\Re(\tau)$. ∎

Si (X, τ) es un espacio topológico, el resultado anterior nos indica que $Nm\Re(\tau) = \emptyset$ si, y sólo si, $Nm\Re(\tau/\bar{R}) = \emptyset$. Es decir, $(X, \Re(\tau))$ tiene suficientes minimales, si y sólo si, $(X^\star, \Re(\tau^\star))$ tiene suficientes minimales.

Proposición 4.2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces. (X, τ) es compacto si, y sólo si, $Nm\Re(\tau) = \emptyset$ y $Min\Re(\tau)$ es compacto. Es decir, X tiene suficientes minimales -según $\Re(\tau)$- y el conjunto de los minimales es compacto.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(X, \tau) \text{ es compacto} &\Leftrightarrow (X^\star, \tau^\star) \text{ es compacto (Prop. 4.2.3)} \\
&\Leftrightarrow Min\Re(\tau^\star) \text{ es compacto } \wedge Nm\Re(\tau^\star) = \emptyset \text{ (Prop. 4.1.4)} \\
&\Leftrightarrow Min\Re(\tau) \text{ es compacto } \wedge Nm\Re(\tau) = \emptyset \text{ (Coro. 4.2.1 y Prop. 4.2.6).}
\end{aligned}$$

∎

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACOSTA, Lorenzo. *Topologías Consistentes*. Boletín de Matemáticas Nueva Serie. Vol. V Nº1,(1998).p.15-26.

[2] ACOSTA, Lorenzo y LOZANO, Epifanio. *Una Caracterización de las Topologías Compactas* T_0. Boletín de Matemáticas Nueva Serie. Vol. VI Nº2,(1999).p.76-84.

[3] ADÁMEK, Jirí. Et al. *Abstract and Concrete Categories*. New York: John Wiley & Sons. 1989.

[4] HALMOS, Paul. *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Mexico D.F.: Cecsa. 1971.

[5] ISAACS, Rafael. *Todas las Topologías Finitas*....Preprint.Bucaramanga: Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander.2004.

[6] LARSON, R. Minimal T_0-Spaces and Minimal T_D-Spaces. En: Pacific Journal of Mathematics. Vol 31. N°2,(1969).p.451-457.

[7] LORRAIN, François. *Notes on Topological Space with Minimum Neighborhoods*. En: The American Mathematical Monthly. Vol.76,(1969).p.616-627.

[8] MUNKRES, James. *Topología*. Madrid: Prentice Hall. 2002.

[9] MUÑOZ, José. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Cuarta Edición. Bogóta: Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. 2002.

[10] RUBIO, Ibeth. *Extensiones Topológicas y Compactaciones por Finitos Puntos*. Tesis de Magister. Universidad Nacional de Colombia. 2002.

[11] WILLARD, Stephen. *General Topology*. New York: Addison Wesley. Publishing Company. 1968.