

# **EL FUNTOR $F_2$**

Realizado por:  
**Dairo José Ortiz Vidal**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Matemáticas**

Bucaramanga  
2004

# **EL FUNTOR $F_2$**

Realizado por:  
**Dairo José Ortiz Vidal**

Monografía presentado a la Facultad de ciencias de la  
Universidad Industrial de Santander sede Bucaramanga, como requisito  
parcial para optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director  
**Javier Enrique Camargo García**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Matemáticas**

Bucaramanga  
2004

# Dedicatoria

A mi más grande tesoro **GISELL DAYANNA ORTIZ RODRÍGUEZ**  
Por ser la razón de mi existencia, y lo mejor que me a pasado en esta maravillosa vida

# Agradecimientos

Mi más sinceros agradecimientos:

- ★ A **Dios** por permitirme ser como soy
- ★ A **JAVIER ENRIQUE CAMARGO** director de esta monografía por su incondicional y gran colaboración en la realización de este trabajo
- ★ A mis Padres **ELIO** y **ROSA** por el sacrificio para apoyarme en la consecución de este peldaño
- ★ A mis Hermanas **LEDA, EDA, EIDA, ELDA** y hermanos **DAIMER, DAIXER** y **DAIVER** porque de una u otra forma me brindaron su apoyo y aliento para seguir en esta lucha, en especial a **ELDA MARINA** quien fue mi apoyo económico en gran parte de este proceso.
- ★ A mis grandes amores **ESMERALDA RODRÍGUEZ** y mi hija **GISELL DAYANNA** por brindarme su amor, comprensión y apoyo en todo el trascurso de la carrera.
- ★ A los rectores **HUGO ALBERTO VARGAS RAMÍREZ** y **Hna ALIRIA PEDRAZA VALDERAMA** por permitirme desempeñarme como docente en las instituciones **JORGE ELIECER GAITAN** y **COLMERCEDES**
- ★ A todas aquellas personas que creyeron en mi, porque me dieron fuerzas en los momentos más difíciles

**TITULO:** EL FUNTOR  $F_2^*$

**AUTOR:** DAIRO JOSÉ ORTIZ VIDAL\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Categoría Funtor Inexpandible Hiperespacio

## DESCRIPCIÓN

La teoría de categoría nos permite relacionar diferentes propiedades de distintas ramas de la Matemática, razón por la cual ha despertado gran interés entre muchos estudiosos de esta ciencia y se han logrado grandes avances en muy poco tiempo. La teoría general de los funtores en la categoría de los espacios compactos “Comp” se inicia después de muchas investigaciones en la década de los 50s con la noción de funtor normal introducida por Evgenii Schepin [2] y algunas propiedades básicas topológicas como preservación de peso, preimágenes, epimorfismos, etc. Algunos ejemplos clásicos de funtores en la categoría “Comp” de los espacios compactos de Hausdorff y las funciones continuas, son el funtor de hiperespacio, y el hiperespacio de inclusión.

El hiperespacio  $F_2(X)$  definido en [1], induce un funtor en la categoría “Met” de los espacios métricos y las funciones inexpandibles. En la presente monografía se estudiarán algunas propiedades topológicas de este funtor, basados en la métrica de Hausdorff definida para  $F_2(X)$ , lo cual constituye un punto de partida para que el lector estudie este funtor en la categoría “Comp”, en futuros trabajos de investigación.

La investigación se desarrolló de la siguiente manera: En el primer capítulo se introdujeron conceptos básicos de espacios métricos, de topología general y de teoría de categoría. En el segundo capítulo se definió el espacio  $CL(X)$ , la métrica de Hausdorff y se dotó a  $CL(X)$  con esta métrica para así formar un espacio métrico, luego se analizó a  $CL$  como un funtor. El tercer y último capítulo se dedicó a la definición del funtor  $F_2$  con base en hiperespacio  $F_2(X)$ , también se dieron algunos ejemplos de modelos geométricos del espacio  $F_2(X)$  y se probaron algunas propiedades de este funtor en la categoría de los espacios métricos “Met” que es el objetivo principal de la monografía.

---

\* Monografía

\*\* FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. Director Javier Enrique Camargo García.

**TITLE: THE FUNTOR  $F_2^*$**

**AUTHOR: DAIRO JOSÉ ORTIZ VIDAL \* \***

**KEY WORDS:** Category Funtor Inexpandible Hiperspace

### **DESCRIPTION**

The theory of category allow to us to relate different properties of different Mathematics branches reason which it has awaked a great interest among many specialists of this science and big advances have been advanced in very little time. Funtors general theory in the category of the compact spaces “Comp” started after many investigations were made during the 50ths with the notion of normal functor introduced by Evgenii Schepin [2] and some basic topological properties like preservation of weight, preimágenes, epimorfismos, et cetera. Some classical examples of functors in the category “Comp.of hausdorff’s compact spaces and the continuous functions, are the functor of hiperspace functor, and the hiperspace of inclusion.

The hiperspace  $F_2(X)$  defined in [1], induces a functor in the category “Met.of the metric spaces and inexpandibles functions. At the present monograph some topological properties of this functor based on Hausdorff’s metrics, defined for  $F_2(X)$ , will be studied as a starting point for the reader studies this functor in the category “Comp”, in future works of investigation.

The investigation was developed in the following way: In the first chapter, basic concepts of metric spaces about general topology and theory of category were introduced. In the second chapter, the space  $CL(X)$  and Hausdorff’s metrics were defined and  $CL(X)$  was endowed with this metrics in order to form a metrical space; then CL was analyzed as a functor. The third and last chapter was dedicated to the definition of the functor  $F_2$  based on the hiperspace  $F_2(X)$ ; also some examples of geometric models of the space  $F_2(X)$  and some properties of this functor were tried in the category of the metric spaces “Met”that is the main objective of the monograph

---

\* Monograph

\*\* FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS. DIRECTOR  
Javier Enrique Camargo García

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>3</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	4
1.1.1. Elementos topológicos en espacios métricos . . . . .	8
1.2. Teoría de categorías (definiciones básicas) . . . . .	18
<b>2. El funtor de hiperespacio <math>CL</math></b>	<b>22</b>
2.1. El espacio $CL(X)$ . . . . .	22
2.2. El funtor $CL$ . . . . .	26
<b>3. El Funtor <math>F_2</math></b>	<b>30</b>
3.1. El hiperespacio $F_2(X)$ . . . . .	30
3.2. Ejemplos de Modelos Geométricos para el hiperespacio $F_2(X)$	32
3.2.1. $X$ es un arco . . . . .	32

3.2.2. X es un Triódo . . . . .	33
3.2.3. X es una Curva Cerrada Simple . . . . .	35
3.3. Propiedades Topologicas del funtor $F_2$ . . . . .	37
<b>Referencia Bibliográficas</b>	<b>40</b>

# Introducción

La teoría de categoría nos permite relacionar diferentes propiedades de distintas ramas de la matemática, razón por la cual a despertado gran interés entre muchos estudiosos de esta ciencia, por tal motivo a logrado grandes avances en muy poco tiempo.

La teoría general de los funtores en la categoría de los espacios compactos “*Comp*” se inicia después de muchas investigaciones en la década de los 50s con la noción de funtor normal introducida por Evgenii Schepin [2] y algunas propiedades básicas topológicas como preservación de peso, preimágenes, epimorfismos, etc.

El funtor de hiperespacio, hiperespacio de inclusión son ejemplos clásicos de funtores en la categoría “*Comp*” de los espacios compactos de Hausdorff, y las funciones continuas.

El hiperespacio  $F_2(X)$  definido en [1], induce un funtor en la categoría “*Met*” de los espacios métricos compactos y las funciones inexpandibles. En esta monografía estudiaremos algunas propiedades topológicas de este funtor, basados en la métrica de Hausdorff definida para  $F_2(X)$ , mostrando un punto de partida para estudiar este funtor en la categoría “*Comp*”, motivando al lector para un futuro trabajo de investigación.

Este trabajo se desarrollo de la siguiente manera: En el primer capítulo se introdujeron conceptos básicos de espacios métricos, topología general y teorías de categorías. En el segundo capítulo se definió el espacio  $CL(X)$ , la métrica de Hausdorff y se analizo a  $CL$  como un funtor, y el tercer y ultimo capítulo se dedico para definir el funtor  $F_2$  basándose en el hiperespacio  $F_2(X)$ , tam-

bién se dieron algunos ejemplos de modelos geométricos del espacio  $F_2(X)$  y se probaron algunas propiedades de este funtor en la categoría de los espacios métricos “*Met*” que es el objetivo principal de esta monografía.

# Lista de Figuras

	Pag
<b>Figura 3.1</b> Modelo geométrico de $F_2[0, 1]$	33
<b>Figura 3.2</b> Modelo geométrico de $F_2(\mathbb{T})$	35
<b>Figura 3.3</b> Modelo geométrico de $F_2(S^1)$	36
<b>Figura 3.3</b> Secuencia de pasos para obtener la cinta de Möebius	37

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se enunciarán definiciones básicas de espacios métricos, de topología general así como de teoría de categorías, necesarias para la comprensión del trabajo subsiguiente.

### 1.1. Definiciones básicas

Algunas de las siguientes definiciones, proposiciones y teoremas presentados en esta sección están enunciados en [3] con su respectiva demostración.

**Definición 1.1.** *Sea  $A$  un conjunto. Una función  $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$ , se llama una métrica en  $A$  si satisface*

1.  $d(a, b) = 0$  si y solo si  $a = b$
2.  $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$  para todo  $a, b, c \in A$ .

Un conjunto  $X$  con una métrica determinada se llama espacio métrico y se denota por  $(X, d)$ , la segunda propiedad se conoce con el nombre de desigualdad triangular.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos  $X$  un conjunto, si  $x, y \in X$  definimos  $d_o$  como sigue:

$$d_o(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \quad (1.1)$$

Es fácil comprobar que  $d_o$  cumple con la definición [1.1] por lo tanto  $(X, d_o)$  es un espacio métrico. Esta métrica es conocida como la métrica discreta y  $(X, d_o)$  espacio métrico discreto.

**Ejemplo 1.2.** Tomemos ahora el conjunto de los números reales y denotemos  $d_u$  la métrica definida como:

$$d_u(x, y) = |x - y| \quad (1.2)$$

Esta métrica es conocida como la métrica usual definida sobre  $\mathbb{R}$ , y el espacio métrico lo denotaremos como  $(\mathbb{R}, d_u)$ .

De forma más general, tomemos  $x, y \in \mathbb{R}^p$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  y definamos la función que denotaremos por  $d_u$  así

$$d_u(x, y) = d_u((x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p)) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - y_i)^2} \quad (1.3)$$

Esta función representa una métrica y es conocida como la métrica usual o distancia euclídea, la prueba de que esta función es una métrica se encuentra en [6]

**Ejemplo 1.3.** Un caso particular de el ejemplo anterior es cuando tomamos el plano  $\mathbb{R}^2$  con los puntos  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  y la métrica  $d_u$  para  $p = 2$  que define la métrica

$$d_u(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (1.4)$$

La cual es la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$

Otros ejemplo de métricas en  $\mathbb{R}^2$  son las siguientes

**Ejemplo 1.4.** Tomemos el plano  $\mathbb{R}^2$  y los puntos  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$  y definamos la función  $d_t$  como sigue

$$d_t(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad (1.5)$$

Esta función define una métrica en  $\mathbb{R}^2$  y recibe el nombre de la métrica del taxista.

**Ejemplo 1.5.** Otra métrica definida en el plano  $\mathbb{R}^2$  es la presentada a continuación

$$d_m(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (1.6)$$

Para cualquier par de puntos  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

A continuación presentamos unas definiciones básicas en espacios métricos.

**Definición 1.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $d$  es una métrica acotada en  $X$  si existe una constante  $A$  tal que  $d(x, y) < A$  para todo  $x, y$  que pertenecen a  $X$ .

De los ejemplos anteriores  $d_o$  es una métrica acotada y  $d_u, d_t$  y  $d_m$  no son acotadas.

**Definición 1.3.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es acotado si y sólo si la métrica  $d$  es acotada. De manera más general, dado  $A \subseteq (X, d)$  definimos el diámetro de  $A$  como

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}. \quad (1.7)$$

En caso de que  $\text{diam}(A) < \infty$  decimos que  $A$  es acotado.

**Ejemplo 1.6.** Dado el espacio métrico  $(X, d)$  definimos dos nuevas métricas  $\rho$  y  $\sigma$  como:

$$\rho(x, y) := \min\{1, d(x, y)\} \quad (1.8)$$

$$\sigma(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \quad (1.9)$$

Tanto  $\rho$  como  $\sigma$  son métricas acotadas por 1.

**Definición 1.4.** Decimos que dos métricas  $d$  y  $d'$  para un mismo conjunto  $X$ , son equivalentes métricamente si y sólo si existen dos números reales  $s, t$  tales que para cada par de puntos  $x, y \in X$  se satisface

$$sd(x, y) \leq d'(x, y) \leq td(x, y) \quad (1.10)$$

**Ejemplo 1.7.** Tanto  $\rho$  como  $\sigma$  definidas en las ecuaciones (1.8) y (1.9) son métricas equivalentes puesto que es inmediato verificar que existen  $s = 1$  y  $t = 2$  tal que  $\sigma \leq \rho \leq 2\sigma$ .

**Ejemplo 1.8.** Consideremos las métricas  $d_u, d_t, d_m$ , definidas sobre  $\mathbb{R}^2$ . Note que para cada  $z, w \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$d_u(z, w) \leq d_t(z, w) \leq 2d_m(z, w),$$

por otra parte

$$d_m(z, w) \leq d_u(z, w)$$

luego  $d_u, d_t, d_m$ , son métricamente equivalentes

**Definición 1.5.** Sean  $(X, d), (Y, d')$  espacios métricos. Una aplicación

$f : X \rightarrow Y$  se dice continua en  $x \in X$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_{x, \varepsilon} > 0$  tal que

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad d(x, y) < \delta_{x, \varepsilon}. \quad (1.11)$$

La aplicación se dice continua si lo es en todos los puntos de  $X$ .

**Definición 1.6.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d')$  espacios métricos y  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Diremos que  $\varphi$  es inexpandible, si para cualquiera  $x_1, x_2 \in X$  se tiene

$$d'(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq d(x_1, x_2). \quad (1.12)$$

Note que toda aplicación inexpandible es continua, pues haciendo  $\varepsilon = \delta$  se tiene que  $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y) < \delta$  luego  $d'(f(x), f(y)) < \delta$  pero  $\delta = \varepsilon$  entonces  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$  y esto quiere decir que  $f$  es continua.

### 1.1.1. Elementos topológicos en espacios métricos

En esta sección se recordarán algunos conceptos de topología que se manejan también en espacios métricos

**Definición 1.7.** *Sea  $X$  un conjunto no vacío; una topología de  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  (a los cuales llamaremos abiertos) que satisface las siguientes condiciones:*

( $T_1$ ) *Toda reunión de conjuntos de  $\tau$  es un conjunto de  $\tau$ .*

( $T_2$ ) *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos de  $\tau$  es un conjunto de  $\tau$ .*

( $T_3$ ) *El conjunto vacío ( $\phi$ ) y el mismo conjunto  $X$  pertenecen a  $\tau$ .*

Una pareja  $(X, \tau)$  constituida por un conjunto  $X$  y una topología  $\tau$  de  $X$ , se llama un espacio topológico. También se dice que  $X$  está dotado de la topología  $\tau$ . Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.9.** *Sea  $X$  un conjunto no vacío; si de acuerdo con ( $T_3$ ) tomamos  $\tau = \{\phi, X\}$ , observamos que es una topología de  $X$  puesto que cualquier reunión o intersección finita de conjuntos de  $\tau$  es  $\phi$  o  $X$ . Esta topología en la cual los únicos abiertos son  $\phi$  y  $X$ , se llama la “Topología trivial o indiscreta de  $X$ ”. Un conjunto  $X$  provisto de su topología trivial se llama espacio trivial.*

**Ejemplo 1.10.** *Sea  $X$  un conjunto no vacío. Tomemos  $\tau = P(X)$ , es decir la colección de todos los subconjuntos de  $X$ . Como cualquier reunión o intersección finita de subconjuntos de  $X$  es nuevamente subconjunto de  $X$ , ( $T_1$ ) y ( $T_2$ ) se cumplen y como  $\phi \subset X$  y  $X \subset X$  también se verifica ( $T_3$ ). Esta topología en la cual todo subconjunto de  $X$  es abierto, se llama la topología discreta de  $X$ ; un conjunto  $X$  dotado de su topología discreta se llama espacio discreto.*

**Ejemplo 1.11.** *Sea  $X = \{a, b, c\}$ . Existen varias topología de  $X$ , por ejemplo:*

$$\tau_1 = \{\phi, X, \{a, b\}\}$$

$$\tau_2 = \{\phi, X, \{a\}, \{b, c\}\}$$

$$\tau_3 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\tau_4 = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b\}\}$$

son topología de  $X = \{a, b, c\}$ , como puede comprobarse fácilmente.

**Ejemplo 1.12.** En  $\mathbb{R}$  definimos una topología  $\tau$  la cual la llamaremos usual y la denotaremos  $\tau_u$ , tomando  $U \in \tau_u$ , si y sólo si,  $U$  es la unión de intervalos abiertos es decir

$$\tau_u = \{U \subset \mathbb{R} : U = \cup (x, y), \quad \text{donde } x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (1.13)$$

El conjunto de los números reales y su topología usual forman el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

**Definición 1.8.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $V \subset X$  y  $x \in X$ . Decimos que  $V$  es vecindad de  $x$ , si existe un abierto  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$  y  $U \subset V$ .

El conjunto de todas las vecindades del punto  $x$  lo denotaremos  $\nu(x)$  y cada vecindad de  $x$  la notaremos  $V_x$ .

**Ejemplo 1.13.** Consideremos  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ; si  $x \in \mathbb{R}$ , una vecindad de  $x$  es un conjunto que contiene a un intervalo abierto al cual pertenece  $x$ ; así  $[0, 1]$  es una vecindad de  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{2}{5}$  pero no es vecindad de 0 ni de 1.

**Definición 1.9.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico, un elemento  $x \in X$  y un número real positivo  $r$ . El conjunto

$$B_d(x, r) = \{a \in X \mid d(x, a) < r\}, \quad (1.14)$$

se denomina bola con centro en  $x$  y radio  $r$ . El conjunto  $B(x, r) - \{x\}$  se llama bola perforada y se representa  $\overset{\circ}{B}_d(x, r)$ .

De acuerdo con esta definición y tomando  $(\mathbb{R}, d_u)$  toda bola  $B_d(x, r)$  es el intervalo  $(x - r, x + r)$ ; y recíprocamente, todo intervalo abierto  $(a, b)$  es una bola con centro en  $\frac{(a+b)}{2}$  y radio  $\frac{(b-a)}{2}$ .

**Definición 1.10.** Todo espacio métrico  $(X, d)$  genera una topología sobre  $X$  donde

$$\tau_d = \{U \subset X \mid U = \cup B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

es inmediato verificar que  $\tau_d$  cumple  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  luego  $(X, \tau_d)$  forma un espacio topológico y diremos que  $\tau_d$  es la topología generada por la métrica  $d$ .

**Definición 1.11.** Decimos que dos métricas  $d$  y  $d'$  para un mismo conjunto  $X$ , son topológicamente equivalentes si y sólo si generan la misma topología.

En otras palabras, dada  $B_d(x, \varepsilon)$  y un punto  $y$  con  $y \in B_d(x, \varepsilon)$  es posible encontrar una bola  $B_{d'}(y, \delta)$  de tal forma que

$$B_{d'}(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon), \quad y \quad B_d(x', \varepsilon') \subseteq B_{d'}(y, \delta'), \quad \text{para } x' \in B_{d'}(y, \delta).$$

Todo par de métricas equivalentes, son topológicamente equivalente pero no lo contrario, como veremos en el siguiente teorema toda métrica  $d$  es topológicamente equivalente a la métrica  $\rho(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$  pero claramente no tienen por qué serlo métricamente. Por ejemplo si tomamos  $X = (\mathbb{R}^n, d_u)$  no es posible encontrar  $s > 0$  que satisfaga  $d(x, y) \leq s\rho(x, y)$  para todo par de puntos  $x, y \in X$  dado que  $d_u$  no es acotada. Sin embargo, la métrica  $\rho$  es métricamente equivalente a la métrica  $\sigma(x, y) := \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$  pues se tienen las desigualdades  $\sigma \leq \rho \leq 2\sigma$ .

**Teorema 1.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico entonces la métrica  $d$  es topológicamente equivalente a una métrica acotada.

**Demostración.** Hay dos maneras naturales de remplazar la métrica  $d$  por una métrica acotada, como por ejemplo las métricas de las ecuaciones (1.8) y (1.9):

1.  $\rho(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$
2.  $\sigma(x, y) := \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ .

Ya vimos que tanto  $\rho$  como  $\sigma$  son métricas acotadas por 1. Demostremos ahora que  $\rho$  y  $\sigma$  son topológicamente equivalentes a la métrica  $d$ . En efecto, dada la métrica  $d$  y la métrica  $\rho$  tenemos que para la bola  $B_d(x, r)$  al tomar  $s = \min\{1, r\}$  se tiene que  $B_\rho(x, s) \subseteq B_d(x, r)$  la otra inclusión se tiene para el caso  $r' = \frac{s}{2}$  o también tomado  $r' = \frac{s}{1+s}$  como lo veremos a continuación.

Para el caso  $\sigma = \frac{d}{1+d}$ , es fácil verificar que

$$B_\sigma\left(x, \frac{r}{1+r}\right) \subseteq B_d(x, r) \quad y \quad B_d\left(x, \frac{r}{1+r}\right) \subseteq B_\sigma(x, r), \quad r < 1$$

Así toda métrica es equivalente a una métrica acotada

**Observación 1.1.** Sea  $(X, d)$ , un espacio métrico y  $S \subset X$ , se dice que  $S$  es acotado si existe una bola que lo contiene

$$S \text{ es acotado} \Leftrightarrow \exists x \in X, \exists r > 0 \mid S \subset B(x, r)$$

**Definición 1.12.** Sean  $(X, d)$ , un espacio métrico,  $S \subset X$  y  $x \in S$ . Se dice que  $x$  es un punto interior de  $S$  si con centro en  $x$  se puede construir una bola contenida totalmente en  $S$ . Es decir

$$x \text{ es punto interior de } S \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid B_d(x, r) \subset S$$

El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto  $S$  se denomina Interior de  $S$ , y se representa por  $IntS$  o  $\overset{\circ}{S}$ .

**Definición 1.13.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subset X$  y  $x \in S$ . Se dice que  $x$  es un punto de adherencia de  $S$  si toda bola con centro en  $x$  contiene necesariamente elementos de  $S$ . En símbolos:

$$x \text{ es punto de adherencia, de } S \Leftrightarrow \forall r > 0 : B_d(x, r) \cap S \neq \phi.$$

El conjunto de todos los puntos de adherencia del conjunto  $S$  constituye la clausura o adherencia de  $S$  y se denota por  $\overline{S}$ .

**Definición 1.14.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $S \subset X$  y  $x \in S$ . Se dice que  $x$  es un punto de acumulación de  $S$  si toda bola perforada con centro en  $x$  contiene necesariamente puntos de  $X$ . En símbolos:

$$x \text{ es punto de acumulación de } S \Leftrightarrow \forall r > 0 : \overset{\circ}{B}_d(x, r) \cap S \neq \phi.$$

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de  $S$  se denomina conjunto derivado de  $S$ , y se denota  $S'$  es obvio de las definiciones anteriores que:

$$S^\circ \subset S \subset \bar{S}.$$

$$S^\circ \subset S' \subset \bar{S}.$$

Sin embargo, no hay ninguna relación entre los conjuntos  $S'$  y  $S$ , como se puede ver por medio del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.14.** Consideremos el conjunto de los reales y su métrica usual  $(\mathbb{R}, d_u)$  y tomemos  $S = [0, 5)$ , según las definiciones [1,12, 1,13, 1,14] se tiene que

$$\overset{\circ}{S} = (0, 5) , \quad \bar{S} = [0, 5], \quad \text{y} \quad S' = [0, 5]$$

y es claro que

$$(0, 5) \subset [0, 5) \subset [0, 5] \subset [0, 5]$$

En otras palabras

$$\overset{\circ}{S} \subset S \subset S' \subset \bar{S}$$

De lo cual se tiene

$$S \subset S' \quad (1)$$

Pero si tomamos  $S = [0, 5] \cup \{7\}$  y encontramos los conjuntos anteriores tendremos

$$\overset{\circ}{S} = (0, 5), \quad \bar{S} = [0, 5] \cup \{7\}, \quad \text{y} \quad S' = [0, 5]$$

y entre ellos podemos establecer las siguientes relaciones de contenencias

$$(0, 5) \subset [0, 5] \subset [0, 5] \cup \{7\} \subset [0, 5] \cup \{7\}$$

o lo que es lo mismo

$$\overset{\circ}{S} \subset S' \subset S \subset \bar{S}$$

De lo cual se deduce que

$$S' \subset S \quad (2)$$

de (1) y de (2) se concluye que los conjuntos  $S'$  y  $S$  no tienen ninguna relación de contenencia establecida.

**Definición 1.15.** Sea  $(X, d)$ , un espacio métrico y  $S \subset X$ . Se dice que  $S$  es abierto si coincide con su interior.

Es evidente de la definición [1.12] que  $\overset{\circ}{S} \subset S$  y por lo tanto la definición anterior solo exige que  $S \subset \overset{\circ}{S}$ . Es decir

$$S \text{ es abierto} \Leftrightarrow \forall x \in S : x \in \overset{\circ}{S}.$$

La colección de todos los conjuntos abiertos de  $(X, d)$  ( entre los cuales estan  $\phi$  y  $X$  ) recibe el nombre de topología del espacio  $(X, d)$  y se simboliza por  $\tau_{(X,d)}$  o simplemente por  $\tau_X$ .

**Definición 1.16.** Sea  $(X, d)$ , un espacio métrico y  $S \subset X$ . Se dice que  $S$  es cerrado si coincide con su clausura.

Puesto que la contención  $S \subset \bar{S}$  ya esta dada por la definición [1,13], la definición anterior solo exige que  $\bar{S} \subset S$ , en otros terminos

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \forall x \in \bar{S} : x \in S.$$

La colección de todos los subconjuntos cerrados de  $X$  se representa por  $\bar{\tau}_X$ .

**Teorema 1.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $S \subset X$ . Entonces

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S^c \text{ es abierto}$$

**Demostración.**

$\Rightarrow$  Sea  $S \in \bar{\tau}_X$  y  $x \in S^c$ . Entonces  $x \notin S = \bar{S}$ , por lo tanto  $\exists r > 0$  tal que,  $B_d(x, r) \cap S = \phi$ . Por consiguiente,  $B_d(x, r) \subset S^c$ , lo cual significa que  $S^c \in \tau_X$ .

$\Leftarrow$  Sea  $S^c \in \tau_X$ . Entonces  $\forall x \in S^c : \exists r > 0$  tal que  $B_d(x, r) \subset S^c$  así que  $B_d(x, r) \cap S = \phi$  por tanto  $x \notin \bar{S}$ . Pero si  $x \in S^c$  se tiene que  $x \notin S$ , así que lo demostrado significa que  $x \notin S \Rightarrow x \notin \bar{S}$ , o, lo que es lo mismo, que  $x \in \bar{S} \Rightarrow x \in S$  por consiguiente  $S \in \bar{\tau}_X$ .

**Definición 1.17.** Sea  $A$  subconjunto de  $X$ ,  $A$  cerrado en  $X$  y tomemos  $x$  en  $X$ . Entonces la distancia de  $x$  a  $A$  la definimos como sigue:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Proposición 1.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  subconjunto cerrado de  $X$ , entonces:

i) Si  $x \in A$   $d(x, A) = 0$

ii)  $\forall x \notin A$   $d(x, A) > 0$

**Demostración.**

i) Si  $x \in A$ , entonces  $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ . Como  $x \in A$  entonces tomando  $a = x$  se tiene que  $d(x, x) = 0$  por ser  $d$  métrica; tenemos  $0 \leq d(x, A) \leq 0$  luego  $d(x, A) = 0$ .

ii) Si  $x \notin A$ , entonces  $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$  pero  $d$  es métrica entonces  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  si tomamos  $y = x$  y  $z = a$  se tiene que  $d(x, x) \leq d(x, a) + d(a, x)$  entonces  $d(x, x) \leq d(x, a) + d(x, a) = 2d(x, a)$  se tiene que  $0 < 2d(x, a)$  si dividimos por 2 se tiene  $0 < d(x, a)$ , para cada  $a \in A$ , pero como  $A$  es cerrado  $d(x, A) > 0$ .

Ahora, para cada  $\varepsilon > 0$  y  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ , definamos:

$$N_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}, \quad (1.15)$$

la llamaremos  $d$ -bola abierta generalizada en  $X$  con centro en  $A$  y radio  $\varepsilon$ .

**Teorema 1.3.** Toda bola en un espacio métrico es un conjunto abierto.

**Demostración.** Tomemos en  $(X, d)$  una bola con centro en  $a$  y radio  $r$ , y sea  $x \in B_d(a, r)$ . Debemos demostrar que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_d(x, \varepsilon) \subset$

$B_d(a, r)$ . Para ello, basta con tomar  $\varepsilon < r - d(a, x)$ .  
 En efecto. Sea  $y \in B_d(x, \varepsilon)$  entonces

$$d(x, y) < \varepsilon$$

$$d(x, y) < r - d(a, x)$$

Sumando  $d(a, x)$

$$d(x, y) + d(a, x) < r - d(a, x) + d(a, x)$$

y por la desigualdad triangular tenemos

$$d(a, y) \leq d(x, y) + d(a, x) < r - d(a, x) + d(a, x) = r$$

$$d(a, y) < r$$

y por consiguiente  $y \in B_d(a, r)$

**Teorema 1.4.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico si  $x_1, x_2 \in X$ , y  $x_1 \neq x_2$  entonces existen  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $X$  tales que  $x_1 \in U, x_2 \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .*

**Demostración.** Sean  $r = d(x_1, x_2) > 0$  y  $\varepsilon = \frac{r}{3}$ , construíamos las bolas con centro en  $x_1$  y radio  $\varepsilon$  y con centro en  $x_2$  y radio  $\varepsilon$  y tomemos los conjuntos

$$U = B_d(x_1, \varepsilon) \quad \text{y} \quad V = B_d(x_2, \varepsilon)$$

Por el teorema anterior se tiene que  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos de  $X$ . Nos faltaría demostrar que  $U \cap V = \emptyset$ .

Supongamos que  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces  $\exists w \in U \cap V$ . Tal que

$$w \in U \wedge w \in V$$

$$w \in B_d(x_1, \varepsilon) \wedge w \in B_d(x_2, \varepsilon)$$

Entonces

$$d(x_1, w) < \varepsilon \quad \wedge \quad d(x_2, w) < \varepsilon$$

Al sumar estas desigualdades

$$d(x_1, w) + d(x_2, w) < 2\varepsilon$$

Por la desigualdad triangular se tiene

$$d(x_1, x_2) < d(x_1, w) + d(x_2, w) < 2\varepsilon$$

De donde

$$r = d(x_1, x_2) < 2\varepsilon = \frac{2r}{3}$$

$$r < \frac{2r}{3} \text{ absurdo}$$

Luego  $U \cap V = \phi$  y queda hecha la demostración.

**Teorema 1.5.** *Sea  $F$  un subconjunto cerrado de  $(X, d)$  espacio métrico, y  $x \notin F$  entonces existen  $U, V \subset X$ ,  $U, V$  abiertos en  $X$  tal que  $F \subset U$  y  $x \in V$ , y  $U \cap V = \phi$ .*

**Demostración.** Miremos que como  $F$  es subconjunto cerrado de  $X$  entonces  $(X - F) \subset X$  y  $(X - F)$  es abierto, sea  $x \in (X - F) \exists \varepsilon > 0$  tal que  $B_d(x, \varepsilon) \cap F = \phi$  si tomamos  $\varepsilon = \frac{R}{3}$  donde  $R = \inf\{d(x, a), a \in F\}$  de acuerdo a la definición [1.17] y a la proposición [1.1], se tiene que  $\varepsilon > 0$ ,  $U = \cup B_d(y, \varepsilon)$  con  $y \in F$  es claro que  $F \subset U$  y

probemos ahora que  $U \cap B(x, \varepsilon) = \phi$ . Supongamos que  $U \cap B(x, \varepsilon) \neq \phi$ , entonces  $\exists w \in U \cap B(x, \varepsilon)$  tal que

$$w \in U \quad \wedge \quad w \in B(x, \varepsilon)$$

$$w \in \cup_{z \in F} B(z, \varepsilon) \quad \wedge \quad d(w, x) < \varepsilon$$

$$\exists z' \in F \mid w \in B(z', \varepsilon) \quad \wedge \quad d(w, x) < \varepsilon$$

$$d(w, z') < \varepsilon \quad \wedge \quad d(w, x) < \varepsilon$$

$$d(z', x) \leq d(w, z') + d(w, x) \leq 2\varepsilon$$

$$d(z', x) < 2\varepsilon \implies d(z', x) < \frac{2R}{3} < R$$

pero  $d(z', x) < \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}$

absurdo por que  $z' \in F$  luego  $U \cap B(x, \varepsilon) = \phi$

**Teorema 1.6.** *Sea  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  una función,  $f$  es continua si y sólo si para todo conjunto abierto  $U$  de  $Y$  el conjunto  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$*

**Demostración.**

$\implies$ ) Supongamos que  $f$  es continua y que  $U$  es un subconjunto abierto de  $Y$ . Sea  $x \in f^{-1}(U)$  entonces  $f(x) \in U$ . Puesto que  $U$  es abierto existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ . La continuidad de  $f$  asegura entonces la existencia de un  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

o en otras palabras  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ , lo que significa que  $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ . Puesto que es cierto para todo  $x \in f^{-1}(U)$  se deduce que  $f^{-1}(U)$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente. Sea  $x \in X$ , para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $B(f(x), \varepsilon)$  es un subconjunto abierto de  $Y$ , por lo que  $f^{-1}B(f(x), \varepsilon)$  es un subconjunto abierto de  $X$ . Pero como  $x \in f^{-1}B(f(x), \varepsilon)$ , esto significa que existe algún  $\delta > 0$  con  $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$  es decir  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ . En otras palabras, existe un  $\delta > 0$  tal que  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$  siempre que  $d(x, y) < \delta$ ; esto quiere decir que  $f$  es continua.

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del teorema anterior

**Teorema 1.7.** *Sea  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  la función,  $f$  es continua si y sólo si  $f^{-1}(H)$  es cerrado ( en  $X$  ) para todo  $H$  cerrado ( en  $Y$  ).*

## 1.2. Teoría de categorías (definiciones básicas)

La teoría de categorías es una rama de las matemáticas que ha venido evolucionando en los últimos tiempos. Su estudio nos permite abordar y relacionar estructuras de diferente naturaleza como por ejemplo las estructuras algebraicas con otras estructuras de tipos geométricas como la topología. En esta sección presentamos algunas definiciones básicas de teoría de categorías tomadas de [1] y [3].

**Definición 1.18.** Una **categoría** es una cuádrupla  $\mathcal{C} = (Ob, \text{hom}, id, \circ)$  que consiste de:

1. Una clase  $Ob\mathcal{C}$  cuyos miembros son llamados objetos de la categoría, (también lo notaremos por  $|\mathcal{C}|$ ).
2. Para cada par de objetos  $A, B$ , existe el conjunto  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , cuyos elementos son llamados morfismos o flechas de la categoría, que tienen dominio  $A$  y contradominio  $B$  (si  $f$  es un morfismo de la categoría se notará  $f \in \text{Mor}\mathcal{C}$ , o simplemente  $f \in \mathcal{C}$ , siempre que no haya lugar a confusión).
3. Para cada  $A$  objeto de la categoría  $\mathcal{C}$  existe un morfismo  $id_A : A \rightarrow A$ , llamado el morfismo identidad de  $\mathcal{C}$ .
4. Una ley de composición asociativa ( $\circ$ ), tal que si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  morfismos de  $\mathcal{C}$ , un morfismo  $g \circ f : A \rightarrow C$  llamado composición de  $f$  y  $g$ , cumple las siguientes condiciones:

a) La composición es asociativa, es decir

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h, \text{ para cada } f, g, h \in \text{Mor}\mathcal{C}.$$

b) Los morfismos identidades de  $\mathcal{C}$  actúan como tal con respecto a la composición; es decir, para  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de  $\mathcal{C}$  se tiene

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

c) Los conjuntos  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  son disyuntos dos a dos.

**Ejemplo 1.15.** Consideremos la categoría *Met* que esta conformada así

$$\text{Met} = (\text{Ob}(\text{Met}), \text{Mor}(\text{Met}), \text{id}_X, \circ)$$

Los objetos de esta categoría son espacios métricos compactos, y  $f$  es un morfismo de *Met*, ó  $f \in \text{Met}$  si y solo si  $f$  es inexpandible. Sean  $(M_1, d_1)$ ,  $(M_2, d_2)$ , y  $(M_3, d_3)$  objetos de *Met* y  $f, g$  morfismos de *Met*, tales que  $f$  se aplica de  $M_1$  en  $M_2$  y  $g$  de  $M_2$  en  $M_3$  además si  $f$  y  $g$  son inexpandibles entonces  $g \circ f$  es inexpandible, pues si tomamos  $x, y \in M_1$  y aplicamos  $g \circ f$  tenemos que  $d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d_3(g(f(x)), g(f(y))) \leq d_2(f(x), f(y))$  ya que  $g$  es inexpandible, pero  $d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y)$  ya que  $f$  también es inexpandible, por lo tanto  $d_3(g(f(x)), g(f(y))) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y)$  de lo cuál se concluye que  $g \circ f$  es inexpandible; yá que se tiene la siguiente desigualdad  $d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \leq d_1(x, y)$ .

Además se tiene

$$\text{id}_M : M \longrightarrow M$$

$$\text{id}_M(x) = x$$

con lo que completamos la definición de la categoría.

**Ejemplo 1.16.** Los siguientes son ejemplos de algunas categorías.

*Set* : Los objetos son conjuntos y los morfismos funciones entre ellos. La operación es la composición usual entre funciones.

*Grp* : Los objetos son grupos y las flechas son morfismos entre grupos.

*Top* : Los objetos son espacios topológicos, y los morfismos son funciones continuas.

*Tych* : Los objetos son espacios de Tíjonov, y los morfismos son funciones continuas.

*Comp* : Los objetos, son espacios compactos de Hausdorff, y los morfismos son funciones continuas.

*Nat* : Los objetos, son subconjuntos finitos de los Naturales, y los morfismos son la distancia euclidea entre ellos.

**Definición 1.19.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. Un funtor  $F$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  es una aplicación que asigna a cada objeto  $A$  de la categoría  $\mathcal{C}$  un objeto  $FA$  de la categoría  $\mathcal{D}$ , y a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  de la categoría  $\mathcal{C}$ , un morfismo  $Ff : FA \rightarrow FB$  en la categoría  $\mathcal{D}$ , tales que:

1. Preserva composición; es decir  $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$  siempre que  $f \circ g$  esté definida.
2. Preserva el morfismo identidad; es decir  $F(id_A) = id_{FA}$ , para cada objeto  $A$  en  $\mathcal{C}$

**Ejemplo 1.17.**

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría,  $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ; la aplicación identidad es trivialmente un funtor.

Si un funtor está definido de una categoría en sí misma, entonces éste lo llamaremos **endofuntor**.

**Ejemplo 1.18.** Consideremos las categorías  $Met$ ,  $Set$  y el funtor  $O : Met \rightarrow Set$  definido por

$$O(X, d) = X,$$

$$Of = f, \text{ para cada } f \in Met.$$

Este funtor se conoce como el funtor olvido de estructura.

**Definición 1.20.** Un morfismo  $f : A \rightarrow B$  es llamado un **epimorfismo** si para todo par de morfismos  $g, h : B \rightarrow C$  tales que  $h \circ f = g \circ f$  se tiene que  $h = g$ .

**Definición 1.21.** Un morfismo  $f : A \rightarrow B$  es llamado un **monomorfismo** si para todo par de morfismos  $g, h : C \rightarrow A$  tales que  $f \circ h = f \circ g$  se tiene que  $h = g$ .

Para la categoría  $Met$ , de los espacios métricos compactos, cuyos morfismos son funciones inexpandibles, un epimorfismo (monomorfismo) es simplemente una función sobreyectiva (inyectiva).

Este trabajo se desarrollará en la categoría  $Met$  de los espacios métricos compactos.

En el tercer capítulo se enunciarán algunas propiedades y definiciones generales de la teoría de funtores en esta categoría.

# Capítulo 2

## El funtor de hiperespacio $CL$

En este capítulo definiremos algunos conceptos necesarios para el objetivo del presente trabajo como lo son el conjunto  $CL(X)$ , la métrica de Hausdorff junto con algunas propiedades; para hablar del hiperespacio  $(CLX, H_d)$ , y con base a este espacio definiremos  $CL$  como un endofunctor en la categoría  $Met$ .

### 2.1. El espacio $CL(X)$

Comencemos definiendo el conjunto  $CL(X)$ .

**Definición 2.1.** *Sea  $(X, d)$  espacio métrico compactos, el hiperespacio de  $X$  lo definimos como*

$$CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto cerrado, y no vacío}\}.$$

Para la definición del hiperespacio  $CL(X)$  necesitamos dotar con una métrica el conjunto  $CL(X)$ . Para esto, con base en la métrica  $d$  de  $X$ , la definición [1.17] y la  $d$ -bola definiremos la métrica  $H_d$ , que la llamaremos métrica de Hausdorff.

**Definición 2.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico acotado,  $A, B \in CL(X)$  la métrica de Hausdorff para  $CL(X)$  inducida por la métrica  $d$  que se denota por  $H_d$  se define

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}.$$

Note que por el Teorema [1.1], para cada espacio métrico siempre podemos tomar una métrica topológicamente equivalente acotada. A continuación, en el siguiente teorema se demostrará que  $H_d$  es una métrica, para este propósito probemos primero la siguiente afirmación

**Proposición 2.1.** Para cualquier  $K, L \in CL(X)$  y  $\varepsilon > 0$ , se tiene  $K \subset N_d(L, H_d(K, L) + \varepsilon)$

**Demostración.**

Si  $K, L \in CL(X)$  por definición tenemos que

$$H_d(K, L) = \inf\{r > 0 : K \subset N_d(L, r) \text{ y } L \subset N_d(K, r)\}.$$

Supongamos que  $r = H_d(K, L)$  y sea  $\varepsilon > 0$ , si tomamos  $r' = r + \varepsilon$ , por definición tenemos  $K \subset N_d(L, r')$  y  $L \subset N_d(K, r')$ , luego  $K \subset N_d(L, r + \varepsilon)$  y así  $K \subset N_d(L, H_d(K, L) + \varepsilon)$

**Teorema 2.1.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico acotado, entonces  $H_d$  es una métrica sobre  $CL(X)$ .

**Demostración.**

Empezamos notando que, desde que  $d$  es una métrica acotada,  $H_d$  es una función real (no negativa). Observemos como es evidente de la definición anterior, que  $H_d$  es una función simétrica; en otras palabras,  $H_d(A, B) = H_d(B, A)$  para todo  $A, B \in CL(X)$ . Ahora asumamos que  $A, B \in CL(X)$  tal que  $H_d(A, B) = 0$ , entonces, por la definición anterior se tiene  $A \subset N_d(B, \varepsilon)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , tomando  $p \in A$ , definamos una sucesión  $\{b_n\} \subset B$  tal que para cada  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  se tiene  $d(p, b_n) < \frac{1}{n}$  claramente

$\{b_n\}$  converge a  $p$ , luego  $p$  es un punto adherente de  $B$  por lo tanto  $A \subset \overline{B}$ , pero como  $B$  es cerrado  $A \subset B$ . Un argumento similar muestra que  $B \subset A$  de donde concluimos que  $A = B$ . La condición  $H_d(A, A) = 0$  para todo  $A \in CL(X)$  se sigue de la definición. Solo nos resta demostrar la desigualdad triangular para  $H_d$ .

Sean  $A, B, C \in CL(X)$ . Demostremos que

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C).$$

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $a \in A$ , entonces, por la proposición anterior, existe  $b \in B$  tal que

$$1) \ d(a, b) < H_d(A, B) + \varepsilon$$

Tomando  $b \in B$ , y usando la proposición anterior de nuevo se tiene que existe  $c \in C$  tal que

$$2) \ d(b, c) < H_d(B, C) + \varepsilon$$

por (1) y (2) y la desigualdad triangular para  $d$ , se tiene que

$$3) \ d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$$

Así como  $a$  era un punto arbitrario de  $A$ , demostramos que

$$4) \ A \subset N_d(C, H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon).$$

Un argumento similar (que comienza con un punto de  $C$ ) muestra que

$$5) \ C \subset N_d(A, H_d(C, B) + H_d(B, A) + 2\varepsilon).$$

por la simetría de  $H_d$ , podemos escribir (5) de la siguiente forma

$$6) \ C \subset N_d(A, H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon)$$

por (4), (6) y la definición,  $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$ . por consiguiente, como tomamos  $\varepsilon > 0$  arbitrario,  $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $(\mathbb{R}, d_u)$  un espacio métrico. Calcular  $H_d([0, 1], [2, 8])$ . Por definición

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}.$$

si tomamos  $A = [0, 1]$  y  $B = [2, 8]$  se tiene

$$H_d([0, 1], [2, 8]) = \inf\{r > 0 : [0, 1] \subset N_d([2, 8], r) \text{ y } [2, 8] \subset N_d([0, 1], r)\}.$$

$[0, 1] \subset N_d([2, 8], r')$  esta contención se tiene para  $r' > 2$  de manera similar se tiene que  $[2, 8] \subset N_d([0, 1], r)$  para  $r'' > 7$  como es fácil de ver con  $r' > 2$  solo se verifica la primera contención mientras  $r'' > 7$  satisface las dos contenciones luego:

$$H_d([0, 1], [2, 8]) = \inf\{r > 0 : [0, 1] \subset N_d([2, 8], r) \text{ y } [2, 8] \subset N_d([0, 1], r)\} = 7$$

En adelante cuando hablemos de un espacio métrico  $(X, d)$  nos referiremos a una métrica acotada.

**Proposición 2.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A, B \in CL(X)$  entonces

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

**Demostración.**

\* Demostremos primero que

$$\max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\} \leq H_d(A, B).$$

Supongamos  $R = H_d(A, B)$ , por la proposición [2.1] tenemos  $A \subset N_d(B, R + \varepsilon) \wedge B \subset N_d(A, R + \varepsilon)$ , luego para cada  $a \in A$  y  $b \in B$  se tiene que  $a \in N_d(B, R + \varepsilon)$  y  $b \in N_d(A, R + \varepsilon)$ , así  $d(a, B) < R + \varepsilon$  y  $d(b, A) < R + \varepsilon$ , en consecuencia

$$\sup_{a \in A} d(a, B) \leq R \wedge \sup_{b \in B} d(b, A) \leq R$$

de donde

$$\max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\} \leq R = H_d(A, B).$$

\*\* Ahora para demostrar que

$$H_d(A, B) \leq \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

Supongamos que  $R = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$ , y demostremos que  $A \subset N_d(B, R) \wedge B \subset N_d(A, R)$ .

Sea  $z \in A$  entonces  $d(z, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, B) \leq R$  esto implica que

$z \in N_d(B, R)$  lo cual quiere decir que  $A \subset N_d(B, R)$ .

Analogamente se tiene que  $B \subset N_d(A, R)$  y por consiguiente

$$H_d(A, B) = \inf\{r \mid A \subset N_d(B, r) \wedge B \subset N_d(A, r)\} \leq R$$

de donde  $H_d(A, B) \leq \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$  por [\*] y [\*\*]

se concluye que  $H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$ .

## 2.2. El funtor $CL$

Según el teorema [2.1] donde se demostro que  $H_d$  es una métrica ( métrica de Hausdorff) y dotando el conjunto  $CL(X)$  con ésta, queda así formado un espacio métrico, lo cual nos permitirá definir a  $CL$  como un endofunctor en  $Met$ .

Comencemos definiendo a  $CL$  así:

Si  $(X, d)$  es un objeto de  $Met$ , entonces  $CL(X, d) =: (CLX, H_d)$

Además si  $(X, d), (Y, d')$  son espacios métricos y  $f$  un morfismo de  $X$  en  $Y$  en  $Met$ , (función inexpandible) y definiendo a  $CLf$  de  $CLX$  en  $CLY$  como

$$CLf(A) = f(A) \text{ para cada } A \in CLX.$$

Note que como  $A$  es acotado y  $f$  es una función continua entre espacios métricos,  $f(A)$  es cerrado y pertenece a  $CL(Y)$ . En la siguiente proposición mostraremos que la aplicación  $CL$  está bien definida, para así entrar a demostrar que  $CL$  de esta manera define un endofunctor en la categoría  $Met$ .

**Proposición 2.3.** Si  $f$  es un morfismo en  $Met$  definido del espacio  $(X, d)$  en  $(Y, d')$ , entonces  $CLf$  es también un morfismo en  $Met$  definido de  $CL(X)$  en  $CL(Y)$ . Es decir si  $A, B \in CL(X)$  se tiene  $H_{d'}(CL(f)(A), CL(f)(B)) \leq H_d(A, B)$ .

**Demostración.**

Según la definición de  $CL$  tenemos que probar que

$$H_{d'}(f(A), f(B)) \leq H_d(A, B),$$

utilizando la proposición [2.2] tenemos

$$H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}, \quad y$$

$$H_{d'}(f(A), f(B)) = \max\{\sup_{f(a) \in f(A)} d'(f(a), f(B)), \sup_{f(b) \in f(B)} d'(f(A), f(b))\}.$$

pero como  $\sup_{f(a) \in f(A)} d'(f(a), f(B)) = \sup_{a \in A} d'(f(a), f(B))$ , tenemos

$$\sup_{a \in A} \{\inf_{f(b) \in f(B)} d'(f(a), f(b))\} = \sup_{a \in A} \{\inf_{b \in B} d'(f(a), f(b))\},$$

utilizando la inexpandibilidad de  $f$  se tiene

$$\sup_{a \in A} \{\inf_{b \in B} d'(f(a), f(b))\} \leq \sup_{a \in A} \{\inf_{b \in B} d(a, b)\} = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq H_d(A, B).$$

De manera similar se prueba que  $\sup_{f(b) \in f(B)} d'(f(A), f(b)) \leq H_d(A, B)$ .

De lo cual se obtiene que  $H_{d'}(f(A), f(B)) \leq H_d(A, B)$  y

$CL(f)$  es inexpandible y por lo tanto  $CL(f) \in Met$ .

Para concluir que  $CL$  es un endofunctor en  $Met$ , debemos verificar los numerales 1 y 2 de la definición [1,19] que gráficamente es correcto enunciar de la siguiente manera:

Si 
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \circ f \searrow & & \downarrow^g \\ & & Z \end{array}$$
 es conmutativo.

Entonces 
$$\begin{array}{ccc} CLX & \xrightarrow{CL(f)} & CLY \\ CLg \circ f \searrow & & \downarrow^{CLg} \\ & & CLZ \end{array}$$
 es también conmutativo;

Es decir,

$$CL(g \circ f) = CLg \circ CLf$$

Para esto sea  $A \in CL(X)$  entonces:

$$\begin{aligned} CL(g \circ f)(A) &= (g \circ f)(A) = g(f(A)) = \\ &g(CLf(A)) = CLg(CLf(A)) = (CLg \circ CLf)(A) \end{aligned}$$

Además, si  $X$  es un espacio métrico y  $id_X$  es la aplicación identidad se completa la demostración probando que

$$\begin{array}{ccc} CL(X) & \xrightarrow{id_{CL(X)}} & CL(X) \\ CLid_X \downarrow & & \nearrow id_{CL(X)} \\ & & CL(X) \end{array} \text{ conmuta.}$$

tomando de nuevo  $A \in CL(X)$  se tiene:

$$CLid_X(A) =: id_X(A) = A$$

por lo tanto se tiene que

$$CLid_X(A) = id_{CL(X)}(A)$$

Con la proposición [ 2.3 ] y el hecho de que:

$$CL(g \circ f) = CLg \circ CLf$$

$$CLid_X(A) = id_{CL(X)}(A)$$

podemos concluir que  $CL$  es un funtor en  $Met$ . Este funtor es de gran importancia en las categorías  $Tych$  y  $Comp$ , donde se verifican algunas propiedades topológicas, las cuales permiten clasificarlo como un funtor normal de gran importancia en la teoría de funtores.

# Capítulo 3

## El Funtor $F_2$

En este capítulo con base al funtor de hiperespacio  $CL$  definido en el capítulo anterior introduciremos el funtor  $F_2$ , mostrando algunas representaciones geométricas del espacio  $F_2(X)$  revisando algunas propiedades topológicas de este funtor.

### 3.1. El hiperespacio $F_2(X)$

A continuación definiremos un espacio que estudiaremos como subconjunto de  $CL(X)$ , definido en el capítulo anterior.

**Definición 3.1.** *Sea  $(X, d)$  espacio métrico, el hiperespacio  $F_2X$  lo definimos como:*

$$F_2(X) = \{A \subset X \mid 1 \leq |A| \leq 2\}$$

donde  $|A|$  denota la cardinalidad de  $A$ .

Note que  $F_2X$  es subespacio de  $CLX$ , luego podemos dotar a  $F_2X$  de la métrica  $H_d$  definida sobre  $CLX$ ; es decir  $F_2(X, d) = (F_2X, H_d)$  donde  $(F_2X, H_d)$  es un espacio métrico.

Para completar la definición del funtor  $F_2$  consideremos  $(X, d)$  y  $(Y, d')$  dos espacios métricos y  $f$  un morfismo en  $Met$  (una función inexpandible) de  $(X, d)$  en  $(Y, d')$ . Definamos  $F_2f$  una aplicación de  $F_2X$  en  $F_2Y$  por  $F_2f(A) = f(A)$ , donde  $A \in F_2X$ . Note que  $F_2f$  esta bien definida, ya que  $f$  es una función, además note que  $F_2f$  es exactamente  $CLf|_{F_2X}$ , por lo tanto  $F_2f$  es inexpandible y en consecuencia un morfismo en  $Met$ .

Nos fataría probar que  $F_2(g \circ f) = F_2g \circ F_2f$  y que  $F_2id_X = id_{F_2X}$  pero eso es muy sencillo ya que por la definición se tiene que si  $A \in F_2X$

$$F_2f(A) = f(A)$$

luego

$$\begin{aligned} F_2(g \circ f)(A) &= (g \circ f)(A) \\ &= g(f(A)) \\ &= g(F_2f(A)) \\ &= F_2g(F_2f(A)) \\ &= (F_2g \circ F_2f)(A) \end{aligned}$$

de otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} F_2id_X(A) &=: id_X(A) \\ id_X(A) &= A \\ A &= id_{F_2X}(A) \end{aligned}$$

por lo cuál se tiene que

$$F_2id_X(A) = id_{F_2X}(A)$$

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de los calculos anteriores.

**Proposición 3.1.**  $F_2$  es un endofunctor en  $Met$ .

## 3.2. Ejemplos de Modelos Geométricos para el hiperespacio $F_2(X)$

Un modelo geométrico para un hiperespacio es un gráfico que muestra como mirar al hiperespacio, en realidad se pueden mostrar muchos modelos geométricos para un hiperespacio; en esta sección mostraremos ejemplos de como visualizar el hiperespacio  $F_2(X)$  para casos particulares del espacio  $X$ . En ocasiones cuando las limitaciones naturales nos permiten dibujar un gráfico entero del hiperespacio, el modelo geométrico ejemplar contiene bastante información para darnos una idea clara de la imagen del hiperespacio.

Los ejemplos que aquí mostraremos se realizaran para  $F_2(X)$  cuando  $X$  es un arco, un triódo y una curva cerrada simple.

### 3.2.1. $X$ es un arco

**Ejemplo 3.1.** *construiremos un modelo geométrico para  $F_2(X)$  cuando  $X$  es cualquier arco. Sin perdida de generalidad consideremos  $X = [0, 1]$ , observe que los puntos de  $F_2(X)$  son conjuntos de 1 o 2 elementos, es decir si  $\{a, b\}$  es un elemento de  $F_2(X)$  entonces  $0 \leq a \leq b \leq 1$  esto nos lleva a considerar la función  $h$  de  $F_2(X)$  en  $\mathbb{R}^2$  que se define como*

$$h(\{a, b\}) = (a, b) \quad \text{para } \{a, b\} \in F_2X$$

*la imagen de  $F_2(X)$  bajo  $h$  es el triángulo ( $T$ ) en  $\mathbb{R}^2$  con vertices en los puntos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  es fácil ver que  $h$  es biyectiva (1-1 y sobre). Note que si  $h\{a_1, b_1\} = h\{a_2, b_2\}$  entonces  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  luego  $a_1 = a_2$  y  $b_1 = b_2$ , por consiguiente  $\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$  luego  $h$  es inyectiva. Además si  $(a, b) \in T$ , se tiene  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , luego  $\{a, b\} \in F_2(X)$  y  $h\{a, b\} = (a, b)$  con lo que tenemos  $h(F_2(X)) = T$  y  $h$  es sobreyectiva. Note que la frontera de  $F_2(X)$  esta formada por los  $h(A)$  con  $A \in F_2(X)$  donde  $A$  cumple alguna de estas condiciones:*

1.  $0 \in A$
2.  $1 \in A$
3. si  $A = \{a, b\}$ , entonces  $a = b$ .

En otras palabras note que  $F_2(\partial X) \subset \partial F_2(X)$ , esto muestra un acercamiento a la continuidad de  $h$ , sin embargo la prueba de la bicontinuidad de  $h$  se encuentra en [1], en la cual se utilizan conceptos de teoría de dimensión y geometría que se escapan de los objetivos del presente trabajo.

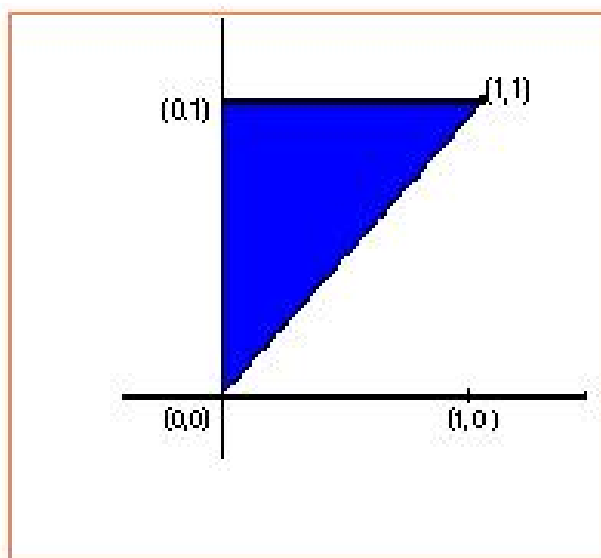


Figura 3.1: Modelo geométrico de  $F_2([0, 1])$ .

### 3.2.2. $X$ es un Triódo

**Ejemplo 3.2.** Este segundo ejemplo de modelos geométricos lo desarrollaremos para cuando  $X$  es un triódo el cual lo definiremos como un espacio homeomorfo a  $\mathbb{T}$  y lo construiremos de la siguientes manera; consideremos el intervalo cerrado  $[0,1]$  en cada una de los ejes  $x, y$  y  $z$ , y denotemos por  $\ell_1$  el intervalo  $[0,1]$  sobre el eje  $x$ ,  $\ell_2$  el intervalo  $[0,1]$  sobre el eje  $y$  y

finalmente  $\ell_3$  el intervalo  $[0,1]$  en el eje  $z$ , luego podemos considerar el triódo como  $\mathbb{T} = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$  con base a este podemos ahora encontrar  $F_2(\mathbb{T})$ . Según la definición [3.1] tenemos:

$$F_2(\mathbb{T}) = \{A \subset \mathbb{T} \mid 1 \leq |A| \leq 2\}$$

si  $A \in F_2(\mathbb{T})$ ,  $A = \{a, b\}$  donde puede suceder que  $a = b$ ; en este caso podemos considerar la función  $h$  así

$h : F_2(\mathbb{T}) \longrightarrow L \subset R^3$  como:

$$\{a, b\} \longrightarrow h(\{a, b\}) = p$$

donde  $p$  es un punto de espacio que cumple con la siguiente condición  $p = (a, b, c)$  donde por lo menos una de las componente es cero. Note que con  $p$  definido de esta manera se puede dar una de las siguientes situaciones las que nos permitira darnos la idea de la imagen de  $F_2(\mathbb{T})$  bajo  $h$

1. Si  $a \in \ell_1$  y  $b \in \ell_2$  entonces  $h(\{a, b\}) = p = (a, b, 0)$
2. Si  $a \in \ell_1$  y  $b \in \ell_3$  entonces  $h(\{a, b\}) = p = (a, 0, b)$
3. Si  $a \in \ell_2$  y  $b \in \ell_3$  entonces  $h(\{a, b\}) = p = (0, a, b)$
4. Si  $a, b \in \ell_1$  con  $a \leq b$  entonces utilizando lo visto del ejemplo anterior podemos definir  $h(\{a, b\}) = p = (b, 0, -a)$
5. Si  $a, b \in \ell_2$  con  $a \leq b$  entonces por la misma razón anterior se tiene  $h(\{a, b\}) = p = (-a, b, 0)$
6. Si  $a, b \in \ell_3$  con  $a \leq b$  entonces  $h(\{a, b\}) = p = (0, -a, b)$

En la siguiente página se presenta el modelo geométrico de  $F_2(\mathbb{T})$  bajo  $h$

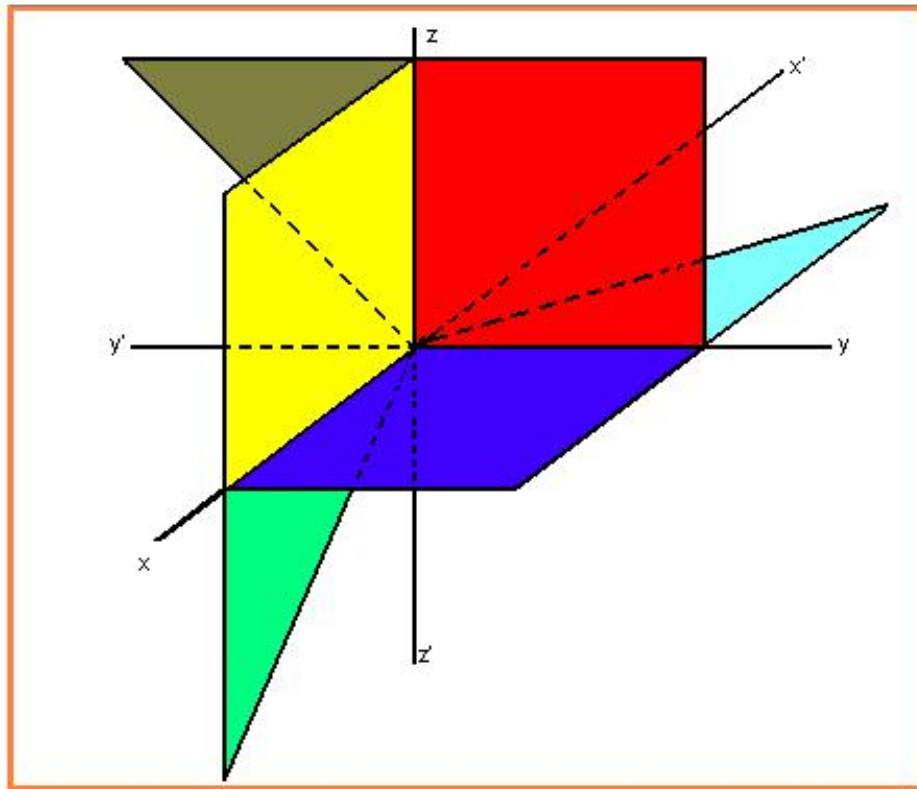


Figura 3.2: Modelo geométrico de  $F_2(\mathbb{T})$ .

De forma más general podemos considerar el caso cuando  $X$  es un  $n$ -odo, es decir un espacio formado por  $n$ -arcos interceptados en un único punto en común en la frontera de cada arco como un hiperespacio cuyo modelo es un subespacio del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2.3. $X$ es una Curva Cerrada Simple

**Ejemplo 3.3.** *Este ejemplo de modelo geométrico lo construiremos para cuando  $X$  es una curva cerrada simple, al igual que el ejemplo anterior sin pérdida de generalidad podemos considerar el caso cuando  $X$  es la circunfe-*

rencia unitaria  $S^1$  en el plano ( $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ), y definimos ahora la aplicación  $h$ , de  $F_2(S^1)$  hacia el disco de la unidad  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

Sean dos  $p$  y  $q$  dos puntos de  $S^1$ , denotemos por  $\widehat{pq}$  el menor arco de  $S^1$  que contienen a  $p$  y  $q$  como extremos, además  $m(\widehat{pq})$  el punto que divide a  $\widehat{pq}$  en dos subarcos de igual longitud y  $\ell(\widehat{pq})$  denota la longitud del arco  $\widehat{pq}$  en  $S^1$ . Definamos  $h(\{p, q\})$  como:

$$h(\{p, q\}) = (1 - [\frac{\ell(\widehat{pq})}{2\pi}]) * m(\widehat{pq})$$

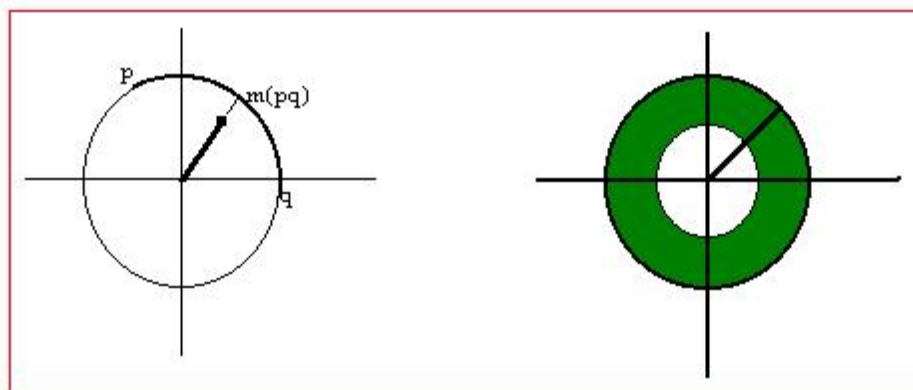


Figura 3.3: Modelo geométrico de  $F_2(S^1)$ .

Note que esta aplicación presenta un pequeño problema para cuando los puntos  $p$  y  $q$  son opuestos, ya que los arcos formados desde  $p$  a  $q$  y de  $q$  a  $p$  son opuestos y sus longitudes son iguales, por tanto la aplicación  $h$  toma solo uno de los arcos mientras que el otro queda sin imagen; el problema se presenta en el gráfico resultante exactamente en el borde interno y consiste en que algunos de sus puntos no son imágenes de ningún arco pero su punto opuesto si lo es, lo cual nos permite resolver nuestro problema pegando los puntos opuestos en el borde interno del gráfico anterior para obtener así el modelo geométrico de  $F_2(S^1)$  que es exactamente la cinta de Möbius lo cual se explica en la siguiente secuencia de gráficos.

Secuencia de pasos para obtener la cinta de Möebius

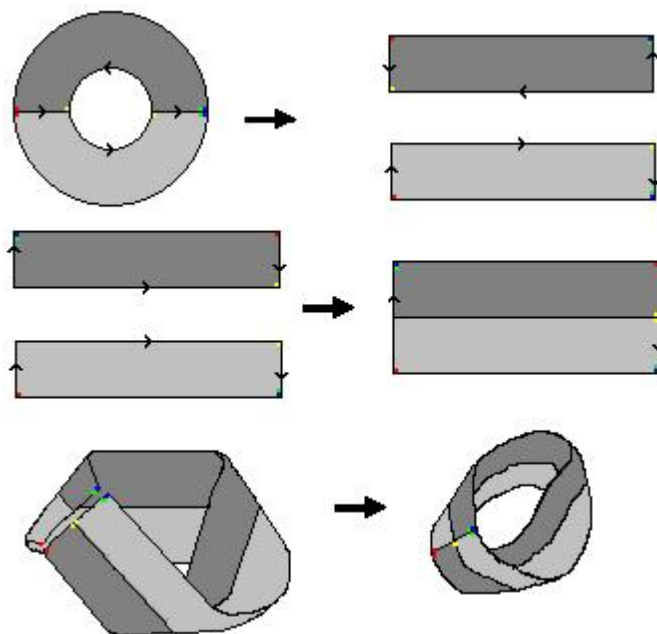


Figura 3.4: cinta de Möebius.

Una prueba formal de la bicontinuidad de  $h$ , no es muy sencilla y nuestro propósito es solo dar una idea del modelo geométrico para espacios muy específicos.

### 3.3. Propiedades Topológicas del functor $F_2$

A continuación se darán algunas definiciones generales de la teoría de funtores en la categoría de los espacios métricos, que cumple nuestro functor  $F_2$ . Si el lector desea estudiar más ejemplos se pueden encontrar en [2]

**Definición 3.2.** Sea  $F$  un endofunctor en  $Met$ ; entonces decimos que  $F$  es monomórfico, si preserva monomorfismos

Recuerde que un monomorfismo es solamente una función inyectiva por tratarse de esta categoría.

**Proposición 3.2.**  $F_2$  es un funtor monomórfico

**Demostración.** Sean  $X, Y \in |Met|$  y  $f : X \rightarrow Y$  un monomorfismo en  $Met$ . Tenemos que probar que  $F_2f : F_2X \rightarrow F_2Y$  es también un monomorfismo.

Sean  $A, B \in F_2X$  con  $A \neq B$ , tenemos  $A = \{a_1, a_2\}$  y  $B = \{b_1, b_2\}$  donde puede suceder que  $a_1 = a_2$  o  $b_1 = b_2$ , supongamos que  $a_1 \notin \{b_1, b_2\}$ , como  $f$  es un monomorfismo, tenemos que  $f(a_1) \notin \{f(b_1), f(b_2)\}$ , luego  $f(a_1) \notin F_2B$  y  $F_2A \neq F_2B$ .

**Definición 3.3.** Sea  $F$  un endofunctor en  $Met$ ; entonces decimos que  $F$  es epimórfico, si preserva epimorfismos

**Proposición 3.3.**  $F_2$  es un funtor epimórfico

**Demostración.** Consideremos  $f : X \rightarrow Y$  un epimorfismo en  $Met$  y demostremos que  $F_2f : F_2X \rightarrow F_2Y$  es también un epimorfismo en  $Met$ .

Sea  $B = \{b_1, b_2\}$  un elemento de  $F_2Y$ . Como  $f$  es un epimorfismo, existen  $\{a_1, a_2\}$  tal que  $f(a_1) = b_1$  y  $f(a_2) = b_2$ , luego  $F_2\{a_1, a_2\} = B$ , con lo que concluimos que  $F_2$  es epimórfico.

**Definición 3.4.** Sea  $F$  un funtor monomórfico de  $Met$  en  $Met$ ; entonces decimos que  $F$  preserva preimágenes, si para cada función inexpandible  $f : X \rightarrow Y$  y  $A \subset Y$  cerrado se tiene  $(Ff)^{-1}(FA) = F(f^{-1}(A))$ .

**Proposición 3.4.**  $F_2$  preserva preimágenes

**Demostración.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $Met$  (función inexpandible) y  $B$  un subconjunto cerrado de  $Y$ .

Proveamos que  $(F_2f)^{-1}(F_2B) = F_2(f^{-1}(B))$ .

Sea  $A \in (F_2f)^{-1}(F_2B)$ , entonces  $F_2f(A) \in F_2B$ , luego  $f(A) = \{b_1, b_2\}$  subconjunto de  $B$ , pero  $A \in F_2X$ , luego  $A = \{a_1, a_2\}$ , con lo que tenemos que  $\{a_1, a_2\} \subset f^{-1}(B)$ , así  $A \in F_2(f^{-1}(B))$ . Por otra parte si  $A \in F_2(f^{-1}(B))$ , entonces  $A = \{a_1, a_2\}$  subconjunto de  $f^{-1}(B)$ , luego  $\{f(a_1), f(a_2)\} \subset B$ , por lo tanto  $F_2f(A) \in F_2B$  y obtenemos  $A \in (F_2f)^{-1}(F_2B)$ .

# Referencia Bibliográficas

1. · Illanes A, Sam B, Nacller J. *Hypespaces Fundamentals and Recent advances*. Editorial Board, 1999.
2. Telejko A, Zarichnyi M. *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces*. Mathematical studies, Monograph Series, Volume 5, 1999.
3. · Apostol T. *Análisis Matemático Segunda Edición*. Editorial Reverté S.A. 1996
4. Adamek J., Herrlich H., Strecker G. *Abstract and concrete categories*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1989.
5. Engelking R. *Outline of general topology*. New York, Warszawa, 1968.
6. Rubiano G. *Topología General*. Universidad Nacional de Colombia.
7. Camargo J. *Sobre el funtor de hiperespacio  $F_2$* . ( En prensa).