

DIFUSIÓN Y DENSIDAD DE CORRIENTE EN
PLASMA MAGNETIZADO CON PRESIÓN NO
HOMOGÉNEA

JHOAN LEONARDO RODRÍGUEZ QUINTERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

DIFUSIÓN Y DENSIDAD DE CORRIENTE EN PLASMA MAGNETIZADO CON PRESIÓN NO HOMOGÉNEA

JHOAN LEONARDO RODRÍGUEZ QUINTERO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título
de Físico

Director
VALERIY D. DUGAR-ZHABON
Físico Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016

A mi compañera de vida,

Aty

Por el apoyo incondicional,

por sus cuidados y su protección,

pero sobre todo por su amor, que de sobra me ha sabido dar

Agradecimientos

Agradezco a mi madre y mi padre, quienes en la mayoría de momentos han apoyado mis decisiones durante mi formación y a pesar de las discrepancias siempre he contado con ellos.

Agradezco al Doctor Valery director de tesis, por su guía durante la realización de este trabajo. Por su gran apoyo y la oportunidad otorgados durante el desarrollo del presente. Por su enorme paciencia para explicar y orientar a este estudiante.

A todos los profesores de la escuela de física de la UIS, por sus valiosas enseñanzas.

A todos los compañeros del Fitek por sus consejos en el desarrollo de este trabajo.

Índice general

INTRODUCCIÓN	13
1 PROPIEDADES PARÁMETROS Y GENERALIDADES DEL PLASMA	16
1.1 CUASI-NEUTRALIDAD DEL PLASMA	17
1.2 EL ELECTRÓN-VOLTIO COMO UNIDAD DE ENERGÍA	17
1.3 TEMPERATURA	17
1.4 MAGNETIZACIÓN	18
1.5 VELOCIDAD DE DERIVA u_E	19
1.6 MODELOS Y DESCRIPCIONES MATEMÁTICAS DEL PLASMA . .	20
1.6.1 Modelo fluido	20
1.6.2 Modelo cinético	21
2 CONTEXTUALIZACIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL PLASMA BAJO ESTUDIO	22
2.1 DIFUSIÓN AMBIPOLAR	22
2.1.1 Radio de giro $\vec{\rho}$ como función del campo $\vec{B}$ y del impulso $\vec{p}$. . .	24
2.1.2 $\Delta\vec{R}$ como función de $\vec{B}$ y $\Delta\vec{p}$	25

2.1.3	Efecto de Difusión	25
2.2	CRITERIO DE PLASMA FUERTEMENTE IONIZADO	26
2.2.1	Grado crítico de ionización fuerte del plasma	27
2.3	DIFUSIÓN EN UN PLASMA FUERTEMENTE IONIZADO	30
3	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	34
3.1	AJUSTE DE LAS ECUACIONES A LA GEOMETRÍA DEL SISTEMA	35
3.2	DERIVA LIBRE	36
3.3	PLASMA CONTENIDO	37
3.4	GRADIENTE DE PRESIÓN CRÍTICO	39
3.5	ANÁLISIS MICROSCÓPICO	42
4	CONCLUSIONES	44
	CITAS	45
	BIBLIOGRAFÍA	47

Índice de figuras

1	Figura 1. Carga en movimiento perpendicular al campo magnético B . . .	14
1.1	Figura 2. Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ de la trayectoria de dos partículas cargadas. . .	20
2.1	Figura 3. Vectores posición de la partícula	23
2.2	Figura 4. Efectos de Difusión.	26
2.3	Figura 5. Sección eficaz de interacción.	29
3.1	Figura 6. Vectores de campos cruzados en plasma contenido.	35
3.2	Figura 7. Plasma en recipiente rectangular sometido a campos cruzados $\vec{E}$ y $\vec{B}$	35
3.3	Figura 8. Vectores de campos cruzados, deriva libre.	37
3.4	Figura 9. Vectores en campos cruzados, Plasma confinado	38
3.5	Figura 10. Aumento del gradiente de presión $\nabla\mathcal{P}$	39
3.6	Figura 11. Caso del gradiente de presión critico	40
3.7	Figura 12. Gradiente de presión mayor que el gradiente de presión critico	41
3.8	Figura 13. Ángulo entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y la densidad de corriente $\vec{j}$	42
3.9	Figura 14. Comportamiento diamagnético del plasma debido al gradiente de la presión	43

APÉNDICES

A1	CONDUCTIVIDAD DEL PLASMA.	50
A2	MODELO DE UN LÍQUIDO EN LA APROXIMACIÓN MHD	52
A3	LEY GENERALIZADA DE OHM	55

Resumen

TÍTULO: DIFUSIÓN Y DENSIDAD DE CORRIENTE EN PLASMA MAGNETIZADO CON PRESIÓN NO HOMOGÉNEA¹

AUTOR: RODRÍGUEZ QUINTERO, Jhoan Leonardo².

PALABRAS CLAVES: Difusión ambipolar, plasma magnetizado, corriente en plasma, presión en plasma, plasma diamagnético.

DESCRIPCIÓN: Como un aporte al estudio del plasma, su comportamiento e interacciones se presenta el análisis de la densidad de corriente en un plasma confinado debido a la presencia de un gradiente de presión cuando el plasma fluye hacia las paredes de su contenedor. Partiendo de la ecuación generalizada de Ohm se determina el flujo de difusión y el característico coeficiente de difusión ambipolar (en dirección perpendicular al campo magnético) en un plasma magnetizado y fuertemente ionizado que se deriva dentro de los campos eléctrico y magnético cruzados tratándolo como un fluido neutro conductor en movimiento dentro de un campo electromagnético (modelo magnetohidrodinámico (MHD) de un líquido). El estudio incluye el análisis de la dependencia de la densidad de corriente $\vec{j}$ y los campos eléctricos $\vec{E}$, adicionalmente se calcula el gradiente de presión crítico a partir del cual se anula la deriva del plasma. Se determina en el caso microscópico como se produce la densidad de corriente resultante que le otorga al plasma un comportamiento diamagnético, que muestra la influencia del aumento de presión, aun en ausencia del campo eléctrico aplicado $\vec{E}$. Dicho de otra forma al campo magnético externo se le opone en dirección contraria el campo magnético generado por la densidad de corriente resultante.

¹Trabajo de grado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Valeriy D. Dugar-Zhabon (Director)

Abstract

TITLE: DIFFUSION AND CURRENT DENSITY IN PLASMA MAGNETIZED AND INHOMOGENEOUS PRESSURE³

AUTHOR: RODRÍGUEZ QUINTERO, Jhoan Leonardo ⁴.

KEY WORDS: Ambipolar diffusion, magnetized plasma, plasma current, plasma pressure, plasma diamagnetic.

DESCRIPTION:

As a contribution to the study of plasma, their behavior and interactions is presented analysis of current density in a plasma due to the presence of a pressure gradient when plasma flows towards the walls of its container. Based on the generalized equation of Ohm is determined the flow of diffusion and the characteristic diffusion ambipolar coefficient in a magnetized and fully ionized plasma derived in crossed electric and magnetic fields treating him as a fluid in motion in an electromagnetic field (magnetohydrodynamic (MHD) model single fluid). The study includes analysis of the dependence of electric fields $\vec{E}$ and currents $\vec{J}$, additionally the critical pressure gradient is calculated from which cancels the drift of the plasma. Determined in the microscopic event as the current density resulting which gives the plasma a diamagnetic behaviour, which shows the influence of the pressure increase occurs, even in the absence of applied electric field E . In other words the external magnetic field is set in the opposite direction the magnetic field generated by the resulting current density.

³Degree project.

⁴Faculty of science, School of physics, Valeriy D. Dugar-Zhabon (Advisor).

INTRODUCCIÓN

El termino plasma fue introducido por Langmuir en 1928[1] para definir la columna positiva que se observó entre el cátodo y el ánodo en las descargas del gas de laboratorio. Esta definición se generalizó y actualmente se considera «plasma» a un gas ionizado, sometido a descargas eléctricas, pero no cualquier gas ionizado o conjunto de partículas cargadas tienen propiedades plasmáticas [2]; además de partículas cargadas el plasma contiene también átomos y moléculas neutras. Para ionizar átomos y moléculas es necesario invertir una energía del orden de $1 \text{ Rydberg} \approx 13eV$. Si la temperatura del gas en equilibrio termodinámico es grande $T \gg 1Ry$ una parte significativa del total de las partículas tienen la energía suficiente para la ionización. Tal plasma de $T \geq 10^5 K$ (que se llama plasma de alta temperatura) se refiere al plasma de las estrellas $T \sim 10^7 K$, la corona del sol $T \sim 10^6 K$, el viento solar $T \simeq 10^6 K$. En los reactores destinados para realizar reacciones termonucleares tratan de alcanzar temperaturas $T \geq 10^7 K$ cuando se realizan las reacciones de fusión de isótopos de hidrógeno (deuterio y tritio). Lo que se refiere a plasma de laboratorio los cuales se usan en fuentes de luz, incluso monocromáticas, en sistemas de láseres, en televisores de plasma, etc., la componente electrónica (no todas las partículas) se lleva a altas temperaturas $T_e \simeq 1Ry$ que al colisionar con átomos y moléculas producen la ionización; entonces en el plasma se mezclan partículas cargadas eléctricamente, donde la carga total de las partículas negativas es igual en modulo a la carga total positiva, lo que evidencia que el plasma es un conjunto eléctricamente neutro que conduce muy bien la corriente eléctrica. [3]

El grado de ionización del plasma (α) (ec: 2.16) depende principalmente de la temperatura de los electrones y se determina por el cociente entre la densidad de partículas cargadas y la densidad de partículas neutras n_i/n_a ; es importante mencionar que aunque el valor n_i/n_a sea pequeño el plasma se puede encontrar ionizado, el valor critico $(n_i/n_a)_c$ a partir del cual se puede tratar el plasma como fuertemente ionizado depende del proceso que sea de interés.

En muchos casos prácticos como fuentes de iones multicargados y negativos, generadores magnetohidrodinámicos, sistemas termonucleares, etc., el campo magnético externo respecto al plasma juega un papel decisivo para mantener el plasma en un vo-

lumen limitado. Cuando el plasma se encuentra en un campo magnético las partículas cargadas se ven sometidas a la fuerza de Lorentz si sus velocidades tienen componentes perpendiculares al campo magnético, lo cual logra que las cargas giren alrededor de líneas de fuerza magnética; el radio de giro o radio de Larmor en este caso debe ser mucho menor que las dimensiones características del plasma. La carga que gira puede salir del plasma en la dirección perpendicular al campo magnético solo como resultado de colisiones, que la envían de una línea de fuerza a otra como muestra la figura 1. Cuando las colisiones en el plasma son pocas el plasma puede permanecer en un recipiente con un campo magnético constante largo tiempo, a lo que se le denomina plasma magnetizado. [4]

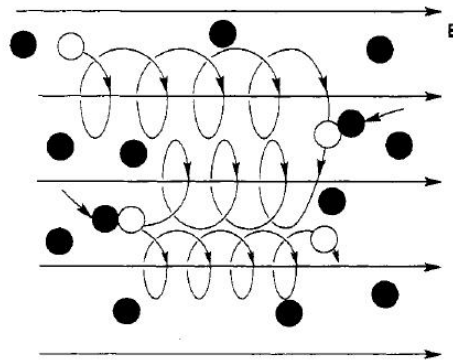


Figura 1: Carga en movimiento perpendicular al campo magnético B . [5]

En el plasma, los electrones tienen mayor movilidad que los iones, debido a la diferencia de masas entre ellos. Esto ocasiona que los electrones puedan moverse más rápidamente, pero con ello se crea un campo eléctrico de polarización cuando se separan las cargas y en ausencia de otra fuerza, retorna el flujo de electrones restableciendo la cuasi-neutralidad del plasma. Entonces la difusión electrónica es limitada por la difusión iónica, este fenómeno recibe el nombre de difusión ambipolar.

Es evidente que cualquier plasma de laboratorio, es decir en las condiciones de la Tierra, se genera en un recipiente por ejemplo, de vidrio (dependiendo del tipo de plasma que se desee generar). Comúnmente el plasma de laboratorio se estudia teóricamente teniendo en cuenta que en las paredes que envuelven el plasma suceden solo los procesos de recombinación de partículas cargadas sin tomar en consideración otros fenómenos que aparecen debido a que el plasma es limitado por paredes sólidas. Entre estos fenómenos podemos mencionar reflexión de partículas, reacciones químicas entre las partículas incidentes y el material de las paredes, enfriamiento del plasma en zonas próximas a la paredes, etc.

En este trabajo se estudia el fenómeno de la influencia del gradiente de la presión del plasma que provocan las paredes al carácter de difusión de partículas cargadas tomando en cuenta los flujos de difusión permitiendo entender mejor el enlace no trivial

de las densidades de corrientes y los campos eléctricos en el plasma confinado, es decir comprender el carácter de la conductividad.

Capítulo 1

PROPIEDADES PARÁMETROS Y GENERALIDADES DEL PLASMA

Se denomina *plasma* al estado especial de la substancia cuya propiedad más importante es que sus partículas están ionizadas en su mayoría y pueden llegar a estarlo en su totalidad. El grado de ionización (α) es la relación entre el número de partículas cargadas y el numero de partículas neutras (ec. 2.16). La gran cantidad de partículas cargadas que hay en el plasma condiciona su gran conductividad y, en este sentido, hace que se aproxime a los conductores de corriente eléctrica.

Una definición más precisa del plasma es: el conjunto cuasi-neutro de un gran número de partículas cargadas que ocupan una región del espacio de dimensiones lineales ($L \gg \lambda_D$) en la que L es la dimensión lineal del sistema de partículas, y λ_D un parámetro llamado *distancia o radio de apantallamiento de Debye*.

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

donde k_B —constante de Boltzman, T_e —temperatura de los electrones, n —densidad del plasma y e —carga del electrón.

La interacción coulombiana de largo alcance de las partículas cargadas en el plasma acarrea una peculiaridad cualitativa de este, y es una fuerte interacción con los campos magnéticos y eléctricos externos, debida a su gran conductividad eléctrica.

SECCIÓN 1.1**CUASI-NEUTRALIDAD DEL PLASMA**

El radio de apantallamiento de Debye caracteriza la interacción de partículas en el plasma. Cuando $L \gg \lambda_D$, y se producen alteraciones de la neutralidad del plasma, esta se restablece a expensas de los intensos campos eléctricos recuperadores que surgen en el plasma, es decir los plasmas muestran una fuerte tendencia a ser eléctricamente neutros, así que las densidades de carga de iones y electrones serán aproximadamente idénticas. Luego la separación de cargas estará provocada por campos eléctricos externos o la energía térmica interna.

SECCIÓN 1.2**EL ELECTRÓN-VOLTIO COMO UNIDAD DE ENERGÍA**

La unidad de energía, el *Julio*, es demasiado grande para describir partículas individuales así que se introduce el electrón-voltio, la energía para que acelere un electrón en un potencial de un voltio $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} J$. La energía cinética en *eV* es igual al valor de la tensión requerida para acelerar la partícula desde el reposo.

SECCIÓN 1.3**TEMPERATURA**

La temperatura del plasma se mide comúnmente en kelvins o electron-voltios, y es una medida informal de la energía térmica de las partículas. En la mayoría de los casos, los electrones están lo suficientemente cerca del equilibrio térmico ya que su temperatura está relativamente bien definida, incluso cuando hay una desviación significativa de una función de distribución de energía de Maxwell-Boltzmann, por ejemplo debido a la radiación de partículas energéticas, o de fuertes campos eléctricos. Debido a la gran dife-

rencia en masa, los electrones llegan al equilibrio termodinámico entre sí mismos mucho más rápido que con los iones o con átomos neutros. Por esta razón, la “temperatura de los iones T_i ” puede ser muy diferente (normalmente más baja) que la “temperatura de los electrones T_e ”, es decir cada especie puede estar en su propio equilibrio térmico, pero el plasma no puede durar lo suficiente para que las dos temperaturas se igualen, sin embargo se cumple que $T_e + T_i = \text{constante}$.

Hablando en rigor, el concepto de temperatura fue definido para el estado de equilibrio termodinámico pero el plasma no siempre se halla en ese estado, por lo que entendemos por temperatura la magnitud que caracteriza la energía cinética media de las partículas. Esta es la llamada temperatura cinética.

Basándose en las temperaturas relativas de los electrones, los iones y los átomos neutros, los plasmas se clasifican en “térmicos” y “no térmicos”. Los plasmas térmicos tienen los electrones y las partículas pesadas a la misma temperatura, es decir, están en el equilibrio térmico los unos con los otros. Los plasmas no térmicos, por otra parte, tienen los iones y los átomos neutros a una temperatura mucho más baja (normalmente, a temperatura ambiente), mientras que los electrones están a una mayor temperatura debido a su mayor movilidad.

La temperatura controla el grado de ionización del plasma. En particular, la ionización del plasma está determinada por la temperatura de los electrones relativa a la energía de ionización (y más débilmente por la densidad) en una relación llamada la ecuación Saha (ec. 2.15).

SECCIÓN 1.4

MAGNETIZACIÓN

Se dice que un plasma se encuentra magnetizado cuando el campo magnético es lo suficientemente fuerte para influir en el movimiento de las partículas cargadas. Un criterio cuantitativo común es que una partícula completa al menos una revolución alrededor de una línea de fuerza magnética antes de que ocurra una colisión, es decir la frecuencia ciclotrónica Ω es mayor que la frecuencia de colisiones ν , entonces se puede decir que el plasma se encuentra magnetizado si:

$$\frac{\Omega}{\nu} = \Omega\tau \gg 1 \quad (1.2)$$

donde ($\nu = 1/\tau$) y τ —tiempo entre colisiones.

SECCIÓN 1.5

VELOCIDAD DE DERIVA u_E

El comportamiento de una partícula cargada sobre la cual actúa un campo magnético $\vec{B}$ homogéneo y continuo y además un campo eléctrico $\vec{E}$ homogéneo y continuo cuyas líneas de intensidad son perpendiculares a las líneas de campo magnético (estos campos se llaman cruzados) es un desplazamiento del centro de giro de dicha partícula en dirección perpendicular tanto al campo eléctrico como al campo magnético.

Si el campo magnético es perpendicular al plano de la figura y se dirige al lector, mientras que el campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje y (figura 1.1) la evolución del movimiento transversal al campo magnético se puede describir con la ecuación de Newton-Lorentz

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{e}{m} \left(\vec{E}_\perp + \vec{v}_\perp \times \vec{B} \right) \quad (1.3)$$

Para resolver esta ecuación es cómodo introducir una nueva variable $\vec{v}'$ a través de la relación:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}' + \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} = \vec{v}' + \vec{u}_E \quad (1.4)$$

$$\vec{u}_E = \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} \quad (1.5)$$

donde $\vec{u}_E$ — es la velocidad de deriva cuyo vector está en el plano perpendicular a $\vec{B}$ en este caso en el plano $x - y$, se puede ver que la velocidad de deriva no depende del tipo de carga eléctrica por tal razón los iones y los electrones derivan con velocidades iguales en la misma dirección tanto perpendicular a $\vec{E}$ como a $\vec{B}$. (figura 1.1) [2]

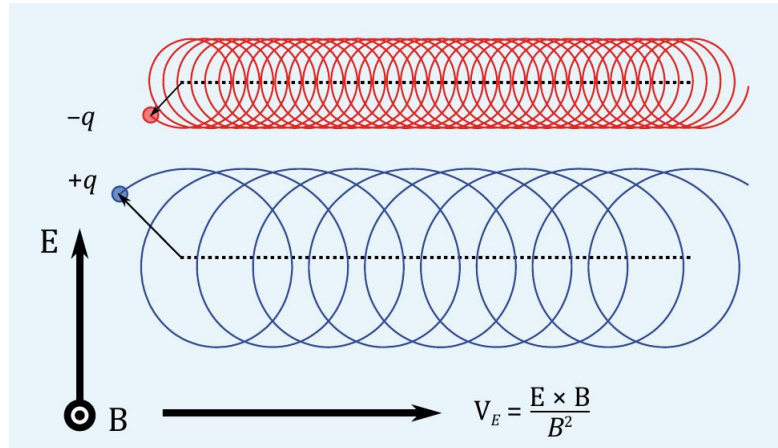


Figura 1.1: Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ de la trayectoria de dos partículas cargadas. [6]

SECCIÓN 1.6

MODELOS Y DESCRIPCIONES MATEMÁTICAS DEL PLASMA

Para describir completamente el estado de un plasma, se tendrían que escribir todas las posiciones y velocidades de las partículas, y describir el campo electromagnético en la región del plasma. Sin embargo, generalmente, no es práctico o no es necesario registrar todas las partículas de un plasma. Por ello, habitualmente se utilizan descripciones menos detalladas “modelos”, de los cuales hay dos tipos principales:

1.6.1 Modelo fluido

El objetivo principal de esta descripción “hidrodinámica” es el estudio de fenómenos de transferencia y transporte (de calor, de masa, etc). En este modelo se describen los plasmas en términos de cantidades continuas como la densidad y la velocidad media entorno a cada posición del espacio. Dentro de la magnetohidrodinámica se encuentra el modelo del fluido simple o modelo de un líquido, el cual trata el plasma como un fluido único gobernado por una combinación de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes. Una descripción más general es un modelo de plasma de dos fluidos, en la que los iones y los electrones se describen por separado. Los modelos de fluidos son cuidadosos manteniendo la distribución de velocidades del plasma a menudo cercana a una distribución de Maxwell-Boltzmann.

Los modelos fluidos del plasma se construyen tomando momentos de las ecuaciones cinéticas e invocando algún tipo de cierre que permita expresar momentos de un cierto orden en términos de los momentos de orden inferior. El resultado es un conjunto de ecuaciones de evolución que involucran a un número pequeño de momentos de las funciones de distribución, como la densidad, velocidad media, tensor de presiones, flujo de calor, etc. Si bien la descripción cinética es más completa que las descripciones fluidas, éstas son considerablemente más sencillas y retienen una parte de la dinámica no lineal del sistema que permite estudiar algunas características de la turbulencia y el transporte asociado. En este trabajo se adopta el modelo hidrodinámico más sencillo que es la magnetohidrodinámica (MHD) de un fluido simple, la MHD se construye sobre las hipótesis de fuerte magnetización y campo eléctrico $\vec{E}$ intenso en dirección perpendicular a las líneas de campo magnético.[6]

1.6.2 Modelo cinético

Los modelos cinéticos describen la función de distribución de la velocidad de las partículas en cada punto del plasma, por lo que no necesitan suponer una distribución de Maxwell-Boltzmann. Una descripción cinética a menudo es necesaria para plasmas sin colisiones. Hay dos aproximaciones comunes para la descripción cinética de un plasma. Una se basa en representar la función de distribución continua en un espacio de fase, velocidad y posición. La otra, conocida como la técnica partícula-dentro-celda (PIC) *por sus siglas en inglés, Particle In Cell*, incluye información cinética siguiendo las trayectorias de un gran número de partículas individuales. Los modelos cinéticos, generalmente, requieren más intensidad de cálculo que los modelos de fluidos. En plasmas magnetizados, un enfoque girocinético puede reducir sustancialmente el coste computacional de una simulación puramente cinética.

Capítulo 2

CONTEXTUALIZACIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL PLASMA BAJO ESTUDIO

En este capítulo se desarrolla la teoría que permite comprender la difusión ambipolar del plasma y la relación entre el campo magnético y los tipos de carga, este efecto de difusión ambipolar se presenta debido a las colisiones de tipo *electrón-ion* que ocurren en el plasma. Además se estudia el criterio que permite determinar el grado de ionización del plasma, la dependencia con la densidad de las partículas que lo constituyen y el proceso que se analiza para determinar el grado crítico de la ionización fuerte. Se determina el coeficiente que caracteriza la difusión dentro del modelo magnetohidrodinámico de un fluido.

SECCIÓN 2.1

DIFUSIÓN AMBIPOLAR

Cualquier plasma realista tiene un gradiente de densidad, y el plasma tiende a difundirse hacia las regiones de baja densidad. El problema central en la reacción termonuclear controlada es el de disminuir la velocidad de difusión mediante el uso de un campo magnético, cuando se configura un campo magnético continuo homogéneo las partículas se mueven por líneas helicoidales. Si las partículas no chocasen entre sí ellas

se moverían a lo largo de líneas de inducción magnética. Pero, en realidad, las partículas chocan entre sí. Como se dijo en la introducción, estos choques conducen a que las partículas salten de una línea de inducción a otra. En otras palabras, a causa de las colisiones, las partículas se desplazan en sentido perpendicular a las líneas de inducción (ver figura 1). Este fenómeno lleva el nombre de difusión transversal del plasma en el campo magnético.

Una teoría aproximada nos muestra que en la difusión transversal, en un gas fuertemente ionizado, las colisiones entre electrones e iones desempeñan el papel fundamental. La importancia de las colisiones de iones con iones y de electrones con electrones es insignificante como se muestra mas adelante.

Notemos que en un plasma bien ionizado la difusión en la dirección transversal al campo magnético tiene carácter ambipolar cuando los flujos de iones y electrones son iguales. Se analiza la difusión y la densidad de corriente a partir del modelo hidrodinámico donde el plasma se trata como un fluido. Como dijimos la difusión del plasma sucede debido a las colisiones entre las partículas resultando en un desplazamiento en la dirección perpendicular al campo magnético $\vec{B}$. Veamos como sucede esto, si se tiene un campo homogéneo en el cual las partículas giran en órbitas de Larmor de radio ρ , los vectores de posición de la partícula estan relacionados con el radio vector del centro de guía $\vec{R}$ y el radio de Larmor por $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$ como se muestra en la Figura 2.1.

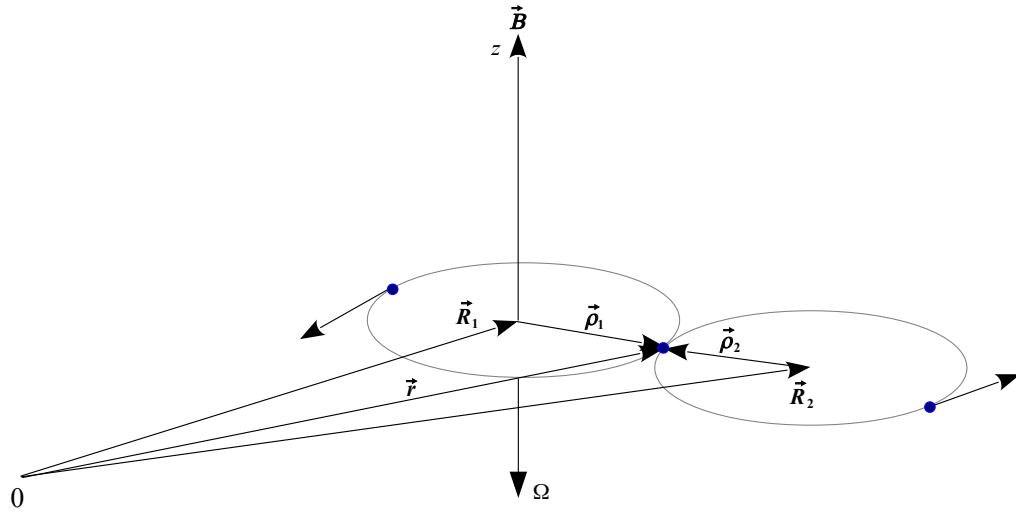


Figura 2.1: Vectores posición de la partícula

2.1.1 Radio de giro $\vec{\rho}$ como función del campo $\vec{B}$ y del impulso $\vec{p}$

El vector de posición de una partícula que gira en una circunferencia de radio $\vec{\rho}$ y esta enlazado con el radio-vector del centro de giro $\vec{R}$ esta dado por la relación:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad (2.1)$$

En un campo magnético $\vec{B}$ la partícula de masa m gira con una velocidad $\vec{v}$ en el plano perpendicular a $\vec{B}$ según la ecuación:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{\Omega} \times \dot{\vec{\rho}} \quad (2.2)$$

donde $\vec{\Omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}$ es la frecuencia ciclotrónica.

Integrando la ecuación (2.2):

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}' \quad (2.3)$$

donde $\vec{v}'$ es una constante de integración; en este caso $\vec{v}' = 0$ (rotación por una circunferencia de Larmor con una velocidad constante):

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \quad (2.4)$$

Multiplicando por $\vec{\Omega}$ de manera vectorial se encuentra:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{\rho}] = -\vec{\rho}\Omega^2 \quad (2.5)$$

se tiene

$$\vec{\rho} = -\frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}}{\Omega^2} = \frac{m}{qB^2} \vec{B} \times \vec{v} = \frac{1}{qB^2} \vec{B} \times \vec{p} \quad (2.6)$$

donde $\vec{p} = m\vec{v}$ es el impulso de la partícula.

Ahora la relación entre $\vec{r}$ y $\vec{R}$ (ec 2.1) se convierte en;

$$\vec{r} = \vec{R} + \frac{1}{qB^2} \vec{B} \times \vec{p} \quad (2.7)$$

2.1.2 $\Delta\vec{R}$ como función de $\vec{B}$ y $\Delta\vec{p}$

En el momento de la colisión el impulso de la partícula varia,

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} + \Delta\vec{p} \quad (2.8)$$

y consecuentemente el radio-vector del centro de guía

$$\vec{R} \longrightarrow \vec{R} + \Delta\vec{R} \quad (2.9)$$

la posición de la partícula queda igual que antes $\Delta\vec{r} = 0$ y se tiene

$$\Delta\vec{R} + \frac{1}{qB^2} \vec{B} \times \Delta\vec{p} = \Delta\vec{r} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \text{ó} \\ q\Delta\vec{R} &= -\frac{1}{B^2} \vec{B} \times \Delta\vec{p} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Entonces los desplazamientos de los centros de guía de las partículas en colisión están relacionados por:

$$q_1\Delta\vec{R}_1 + q_2\Delta\vec{R}_2 = -\frac{1}{B^2} \vec{B} \times (\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2) \quad (2.12)$$

como en las colisiones elásticas el impulso total se conserva, entonces

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \quad (2.13)$$

y se tiene que:

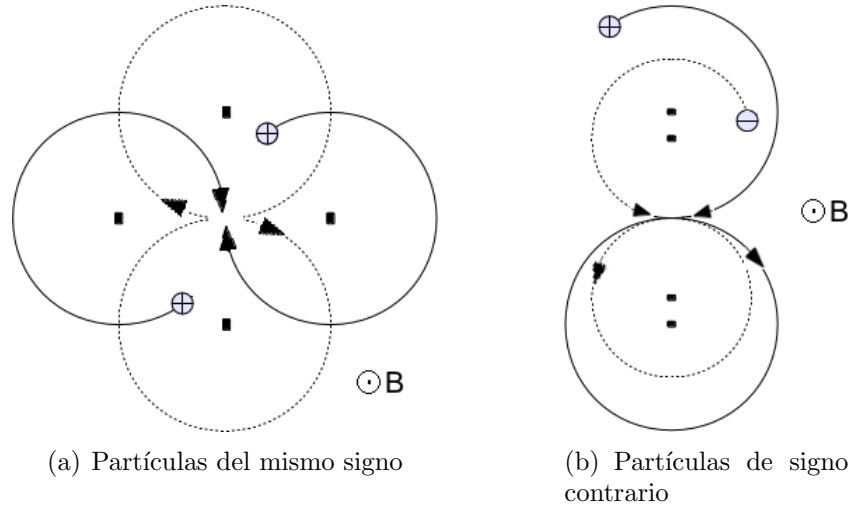
$$q_1\Delta\vec{R}_1 = -q_2\Delta\vec{R}_2 \quad (2.14)$$

2.1.3 Efecto de Difusión

Del análisis de la ecuación (2.14) se tienen las siguientes dos conclusiones:

- a) Si las partículas que colisionan tienen las mismas cargas $q_1 = q_2$, sus circunferencias de Larmor se desplazan en direcciones opuestas la misma cantidad es decir no hay transferencia de partículas, su movimiento no se da en la misma dirección. (figura 2.2.(a))
- b) Si las cargas son de signos opuestos $q_1 = -q_2$, se tiene $\Delta\vec{R}_1 = \Delta\vec{R}_2$, es decir ambas partículas en colisión se desplazan en la misma dirección. Es decir de la colisión resulta una difusión.

Se concluye que la difusión en un plasma con ionización fuerte tiene lugar debido solo a colisiones **electrón-ion**; en este proceso los electrones e iones se desplazan en la misma dirección, esto recibe el nombre de difusión ambipolar. (figura 2.2.(b))


 Figura 2.2: *Efectos de Difusión.*(Tomado de [3])

SECCIÓN 2.2

CRITERIO DE PLASMA FUERTEMENTE IONIZADO

Como se dijo en el capítulo 1 para que el plasma exista, es necesario que haya ionización. El término densidad de plasma por sí mismo normalmente se refiere a la densidad de electrones, es decir, el número de electrones libres por unidad de volumen. El grado de ionización de un plasma es la proporción de átomos que han perdido (o ganado) electrones, y es controlado principalmente por la temperatura. Incluso, un gas en que sólo se ioniza un 1 % de las partículas puede tener las características de un plasma (es decir, que responda a campos magnéticos y sea altamente conductor de la corriente).

Se pueden encontrar plasmas débilmente ionizados y plasmas fuertemente ionizados, en este trabajo se estudia el plasma con ionización fuerte. El grado de ionización α además de la temperatura también depende de la densidad del plasma ya que esta determina la frecuencia de colisiones entre partículas, incluidas las colisiones que producen la ionización. La formula de Saha [7] es útil ya que determina el grado de ionización del plasma:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = 2 \frac{g_i}{g_a} \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{(-\frac{I}{k_B T})} = F(T) \quad (2.15)$$

con n_a, n_i, n_e densidad de átomos, densidad de iones y densidad de electrones respectivamente, k_B —constante de Boltzman, en esta formula fue hecha la generalización, que consiste en el cambio de las densidades de los átomos en estado base por los átomos e iones en estados arbitrarios. En este caso los pesos estadísticos g_i y g_a son las sumas estadísticas $g_a = \sum g_{ak}$, $g_i = \sum g_{ik}$ y $g_e = 2$ que corresponde a las dos orientaciones del espín, del electrón; I potencial de ionización de los átomos y m —masa electrónica.

Entonces la temperatura y las densidades de las partículas determinan la relación entre iones y átomos (n_i/n_a) de la cual se desprende el criterio cuantitativo del grado de ionización α . Se mostrará como se determina este criterio y cual plasma se puede considerar con ionización débil y cual con ionización fuerte.

Sí $n_i = n_e$ (ionización ordinaria) el cociente de la concentración de iones entre la concentración de átomos es:

$$\alpha = \frac{n_i}{n_a} = \sqrt{\frac{F(T)}{n_a}} \quad (2.16)$$

donde se nota que α disminuye con el incremento de n_a . En el caso en que $n_i \ll n_a$ se tiene una ionización débil.

2.2.1 Grado crítico de ionización fuerte del plasma

La conductividad eléctrica es un proceso de transporte de carga cuya fuerza impulsora es el gradiente de potencial eléctrico, este proceso obedece la ley de Ohm cuyo coeficiente es la conductividad eléctrica, la conductividad de un plasma de ionización débil esta gobernada por las colisiones electrón-átomo, mientras que en un plasma fuertemente ionizado las colisiones electrón-ion predominan sobre las colisiones electrón-átomo. Teniendo en cuenta que las colisiones entre cargas idénticas no cambian la cantidad de movimiento total de electrones y no tienen ninguna influencia sobre la conductividad del plasma. La sección transversal de dispersión elástica electrón-ion es mucho más grande que la sección transversal electrón-átomo, así que el término “plasma fuertemente ionizado” puede referirse a un plasma con sólo una ligera ionización, pero con una conductividad mucho mayor que la de un plasma débilmente ionizado. [8]

El valor critico de la relación n_i/n_a a partir del cual se puede considerar el plasma con ionización fuerte depende del proceso de interés que se analice; en este caso se analiza la conductividad del plasma (que en la mayoría de procesos es de interés predominante)

para obtener

$$\alpha_c = \left(\frac{n_i}{n_a} \right)_c \quad (2.17)$$

La corriente eléctrica en el plasma se produce principalmente por los electrones. La densidad de corriente es

$$j = \sigma E \approx \frac{n_e e^2}{m\nu} E \quad (2.18)$$

donde n_e —densidad de electrones, ν —frecuencia total de colisiones de electrones, m y e masa y carga del electrón respectivamente. En un plasma los electrones sufren colisiones tanto con los iones como con los átomos:

$$\nu = \nu_{ei} + \nu_{ea} \quad (2.19)$$

donde $\nu_{ei} = n_i s_{ei} \bar{v}$, $\nu_{ea} = n_a s_{ea} \bar{v}$; s_{ei} , s_{ea} —secciones transversales de las interacciones correspondientes y $\bar{v}$ —velocidad caótica de los electrones.

Entonces la conductividad del plasma,

$$\sigma \approx \frac{n_e e^2}{m\bar{v}(n_i s_{ei} + n_a s_{ea})} \quad (2.20)$$

se determina por la magnitud mayor entre los valores $n_i s_{ei}$ y $n_a s_{ea}$. Si $n_i s_{ei} > n_a s_{ea}$, la conductividad está condicionada predominantemente por las colisiones coulombianas entre los electrones e iones. De esta expresión se sigue que, empezando desde el grado de ionización crítica

$$\alpha_c = \left(\frac{n_i}{n_a} \right)_c = \frac{s_{ea}}{s_{ei}} \quad (2.21)$$

la conductividad tiene carácter coulombiano, es decir, el plasma es de ionización fuerte cuando la conductividad es determinada por colisiones entre partículas cargadas. Se realiza una estimación de la magnitud crítica α_c .

Estimación del grado de ionización crítico

- Sección de interacción electrón - átomo

Los átomos son partículas neutras y por eso es posible considerar la sección de

colisiones electrón-átomo igual a la sección gasocinética de los átomos:

$$s_{ea} = \pi a_0^2 \approx 10^{-20} [m^2] \quad (2.22)$$

donde $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5,29 * 10^{-11} [m]$ que corresponde al radio de Bohr.

■ Sección de interacción electrón - ion

La sección eficaz de interacción coulombiana s_{ei} se estima partiendo de lo siguiente. La trayectoria del electrón en el campo del ion cambia significativamente (y consecuentemente la velocidad direccional $\vec{v}$ de su movimiento) si el parámetro de impacto ρ es suficientemente pequeño, esto es si el electrón se acerca al ion a una distancia ρ bastante pequeña, consideramos que la colisión coulombiana sucede si el electrón atraviesa la esfera de radio ρ_0 alrededor del ion donde la energía potencial del electrón $U = e^2/\rho_0$ se iguala a su energía cinética $k_B T$: [7] (Figura 2.3)

$$\frac{e^2}{\rho_0} = k_B T \quad (2.23)$$

Entonces el área de la circunferencia con radio ρ_0 determina, por orden de magnitud la sección eficaz de interacción coulombiana [9]

$$s_{ei} \approx \pi \rho_0^2 = \frac{\pi e^4}{(k_B T)^2} \quad (2.24)$$

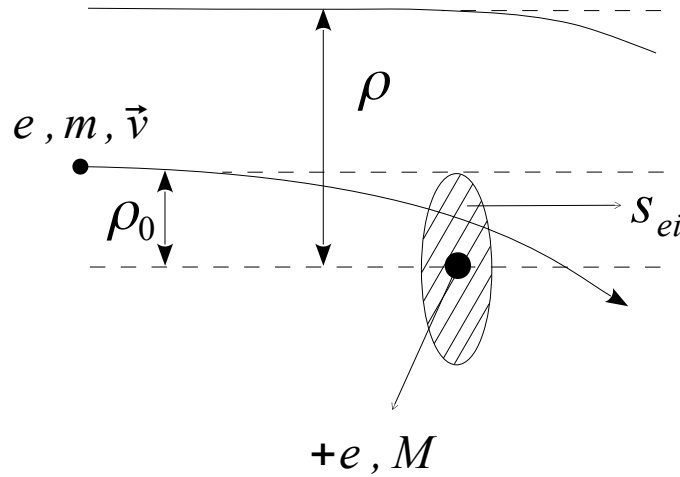


Figura 2.3: Sección eficaz de interacción.

sustituyendo en la ecuación (2.21) se encuentra

$$\left(\frac{n_i}{n_a}\right)_c = \frac{a_0^2(k_B T)^2}{e^4} \quad (2.25)$$

y pues $R_y = \frac{e^2}{2a_0} = 13,56[eV]$ así que se tiene

$$\left(\frac{n_i}{n_a}\right)_c = \frac{1}{4} \left(\frac{k_B T}{R_y}\right)^2 \approx 1,8 * 10^{-3} T^2 \quad (2.26)$$

donde T se mide en [eV]. Por ejemplo, para el caso de $T = 1eV$ la conductividad tiene carácter coulombiano ya que $n_i/n_a \approx 10^{-3}$. Entonces, bajo temperaturas no demasiado altas ($T < 10[eV]$) el plasma desde el punto de vista de la conductividad eléctrica ya se encuentra ionizado fuertemente cuando el grado de ionización es del orden de 1 %. Notemos que si se toma en consideración las colisiones lejanas, el grado de ionización en plasmas ionizados fuertemente disminuye a un orden de magnitud. Desde el punto de vista práctico casi todas las descargas en los gases que tienen aplicación tecnológica tienen un grado de ionización mucho mayor que 0.1 %, es decir presentan plasmas de ionización fuerte.

SECCIÓN 2.3

DIFUSIÓN EN UN PLASMA FUERTEMENTE IONIZADO

Una vez que describimos a partir de que grado se considera el plasma fuertemente ionizado y en que consiste el proceso de la difusión ambipolar transversal a un campo magnético homogéneo debido a colisiones entre las partículas que componen el plasma, podemos profundizar un poco mas en la descripción de dicho proceso que se presenta en el plasma fuertemente ionizado y hace parte de los fenómenos de transporte.

Haciendo uso del modelo de un fluido de la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) cuyo objetivo principal es el estudio de fenómenos de transferencia y transporte podemos analizar las relaciones entre las propiedades del plasma como la temperatura, la conductividad y los campos eléctricos y magnéticos. (apéndice 4)

La difusión como sabemos es un proceso de transporte en el cual la masa es la propiedad transportada cuya fuerza impulsora es el gradiente de concentración, este proceso obedece la ley de *Fick* cuyo coeficiente de transporte es el coeficiente de difusión transversal $D_{\perp}$. Para encontrar este coeficiente adoptamos el modelo hidrodinámico más sencillo que es como dijimos el modelo de un fluido simple de la (MHD) que se construye sobre la hipótesis de fuerte magnetización y campo eléctrico intenso en dirección perpendicular a las líneas de campo magnético. [6]

Consideraremos a continuación la difusión perpendicular a un campo magnético en un plasma fuertemente ionizado, donde dominan las colisiones de Coulomb sobre las colisiones con los átomos neutros. La ley de Ohm generalizada en el caso estático, que es el de nuestro interés ($\partial \vec{j} / \partial t = 0$) se escribe como (ec. 37):

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{ne} \nabla \mathcal{P}_e) \quad (2.27)$$

donde la cantidad $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ es el campo eléctrico efectivo visto por un elemento del fluido que se mueve con velocidad $\vec{v}$ a través del campo magnético $\vec{B}$, el termino que contiene $\vec{j} \times \vec{B}$ es el termino de Hall y el ultimo termino contiene el gradiente de presión electronica. En el plasma ionizado, el proceso de difusión es suficientemente lento para que el plasma se encuentre en un estado de equilibrio y por esta razón se permite despreciar la inercia de los iones, así como la de los electrones obteniendo la ecuación de equilibrio de fuerzas

$$\nabla \mathcal{P} = \nabla \mathcal{P}_e + \nabla \mathcal{P}_i = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.28)$$

Sustituyendo el gradiente de la presión electrónica para el movimiento en equilibrio,

$$\nabla \mathcal{P}_e = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \mathcal{P}_i \quad (2.29)$$

en la ecuación 2.27 se tiene:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \nabla \mathcal{P}_i) \quad (2.30)$$

Multiplcando la ecuación anterior por $\vec{B}$

$$\vec{j} \times \vec{B} = \sigma \vec{E} \times \vec{B} + \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\sigma}{ne} \nabla \mathcal{P}_i \times \vec{B} \quad (2.31)$$

aquí

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\vec{v}_\perp B^2 \quad (2.32)$$

y se encuentra la velocidad del plasma en la dirección perpendicular al campo magnético:

$$\vec{v}_\perp = -\frac{1}{\sigma B^2}(\vec{j} \times \vec{B}) + \frac{1}{B^2}(\vec{E} - \frac{1}{ne}\nabla\mathcal{P}_i) \times \vec{B} \quad (2.33)$$

Como dijimos en el caso estacionario en cada momento de tiempo en el plasma se observa el balance de la fuerza magnética y la fuerza de presión¹ $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla\mathcal{P}$ Entonces,

$$\vec{v}_\perp = -\frac{1}{\sigma B^2}\nabla\mathcal{P} + \frac{1}{B^2}(\vec{E} - \frac{1}{ne}\nabla\mathcal{P}_i) \times \vec{B} \quad (2.34)$$

El termino $\frac{1}{B^2}\vec{E} \times \vec{B}$ representa la velocidad de deriva común en campos cruzados $\vec{u}_E$, bajo un campo eléctrico ($\vec{F}_e = e\vec{E}$) y el ultimo termino, es la actuación del gradiente de la fuerza de presión de iones ó fuerza de presión ionica ($\vec{F}_{\nabla\mathcal{P}_i} = -\nabla\mathcal{P}_i/n$). El primer término determina el *flujo de difusión del plasma* $\vec{\Gamma}$ en la dirección perpendicular a $\vec{B}$ debido al gradiente de presión del plasma:

$$\vec{\Gamma} = n\vec{v}_{dif} = -\frac{n}{\sigma B^2}\nabla\mathcal{P} = -\frac{nk_B(T_e + T_i)}{\sigma B^2}\nabla n \quad (2.35)$$

suponiendo que $\nabla\mathcal{P} = k_B(T_e + T_i)\nabla n$, con $T_e + T_i = cte$ ²; entonces, *el coeficiente de difusión del plasma fuertemente ionizado en la dirección perpendicular al campo magnético*, que se determina a partir de la ley de Fick $\vec{\Gamma} = -D_\perp\nabla n$, es:

$$D_\perp = \frac{nk_B(T_e + T_i)}{\sigma B^2} \quad (2.36)$$

Como se conoce la conductividad³ para un plasma de ionización fuerte (ec. 5) ($\sigma =$

¹Según el analisis de la presión magnética en el caso **magnetohidrodinámico** esto se da para procesos lentos.

²En el modelo de líquido simple es natural, puesto que en el caso cuasi-estacionario se observa equilibrio termodinámico para los iones y para los electrones por separado, no entre iones y electrones.

³Esta conductividad se obtiene del análisis de las ecuaciones de movimiento de un fluido cargado (Apéndice 4) o de la ley generalizada de Ohm.

$\frac{ne^2\tau_{ei}}{m_e}$); de donde se sigue que:

$$D_{\perp} = \frac{m_e k_B (T_e + T_i)}{e^2 B^2 \tau_{ei}} \quad (2.37)$$

Se nota que el coeficiente $D_{\perp}$ de difusión perpendicular al campo magnético en un plasma de ionización fuerte se determina por los parámetros de ambas especies cargadas: electrones e iones (m_e, T_e, T_i, τ_{ei}). Esta difusión es debido a las colisiones electrón-ion se llama ambipolar y se caracteriza por el hecho que tanto los electrones como los iones se mueven juntos.

Es importante que en el coeficiente de difusión se encuentre la masa de las partículas más livianas, electrones y no iones, esto es debido a que en la dirección perpendicular al campo magnético la movilidad de los electrones es mucho mayor que de los iones; ambas especies en el régimen de la difusión ambipolar se mueven en conjunto con la velocidad que se determina por las partículas retardadas. Entonces podemos concluir que la difusión en plasmas fuertemente ionizados es intrínsecamente ambipolar, esta sorprendente propiedad resulta ser una consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento total de las colisiones *electrón-ion*

Capítulo 3

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se realiza un análisis de la dependencia mutua no trivial de la densidad de corriente $\vec{j}$ y los campos eléctricos $\vec{E}$ en un plasma que se deriva en campos cruzados $\vec{E} \perp \vec{B}$ (*carácter de conductividad*) para un caso particular cuando a la deriva se le opone el gradiente de presión. Tal situación es común para plasmas contenidos en un recipiente cerrado, el plasma se difunde hacia las paredes que limitan el movimiento en esta dirección; debido a este movimiento la densidad aumenta ante la pared y el gradiente de presión $\nabla\mathcal{P}$ aparece en el sentido de la velocidad de deriva $\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$; como se muestra en la Figura 3.1. Notese que el campo magnético se aplica para disminuir las pérdidas de partículas en las paredes y por esta razón el campo magnético es siempre paralelo a la pared en la cual se pretende disminuir el flujo plásmico. Por ejemplo, en una trampa magnética tipo espejo las líneas magnéticas en la zona activa son paralelas a la pared cilíndrica.[10][11][12]

Como el gradiente de presión $\nabla\mathcal{P}$ tiene el sentido a lo largo de la velocidad de deriva $\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ en campos cruzados (Figura 3.2) que corresponde a una deriva en un recipiente cerrado. Supongamos que en la dirección del eje x hay una pared que es un obstáculo para el movimiento de deriva. La deriva conlleva a un aumento de la concentración de plasma ante la pared.

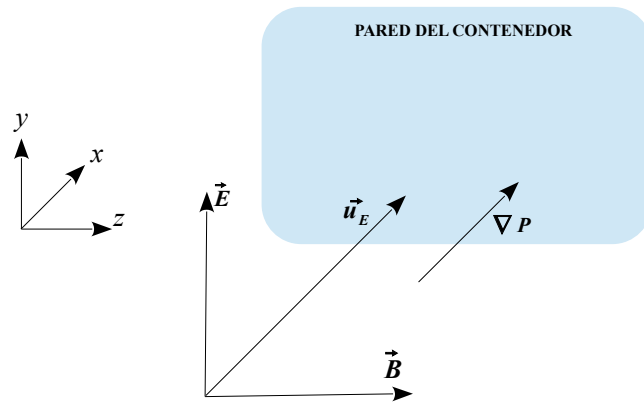
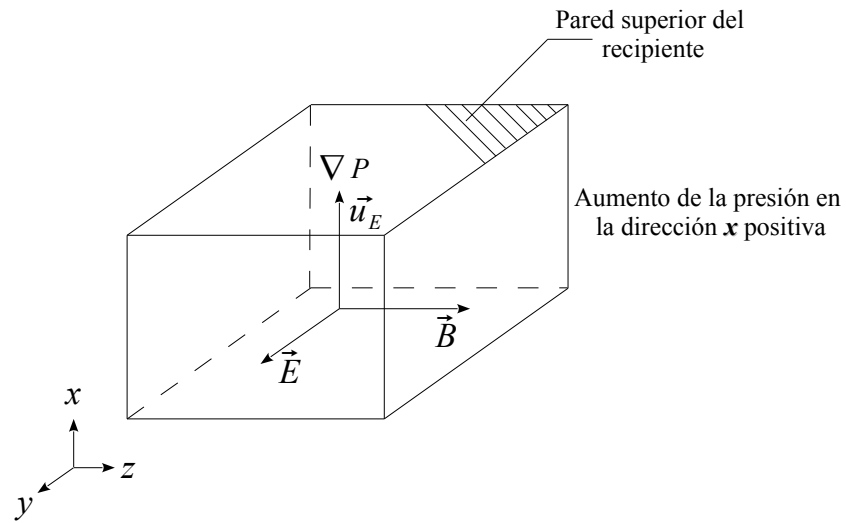


Figura 3.1: Vectores de campos cruzados en plasma contenido.

Figura 3.2: Plasma en recipiente rectangular sometido a campos cruzados $\vec{E}$ y $\vec{B}$

SECCIÓN 3.1

AJUSTE DE LAS ECUACIONES A LA GEOMETRÍA DEL SISTEMA

Según geometría del sistema tenemos el cuadro [3.1](#):

Cuadro 3.1: Geometría del sistema

Campo eléctrico:	$\vec{E} = E \hat{y}$
Campo magnético:	$\vec{B} = B \hat{z}$
Gradiente de la presión electrónica:	$\nabla P_e = \frac{\partial P_e}{\partial x} \hat{x}$
Gradiente de la presión iónica:	$\nabla P_i = \frac{\partial P_i}{\partial x} \hat{x}$
Gradiente de la presión total:	$\nabla P = \nabla P_e + \nabla P_i = \frac{\partial (P_e + P_i)}{\partial x} \hat{x}$

SECCIÓN 3.2

DERIVA LIBRE

En el caso de deriva libre (en un espacio infinito) $\nabla \mathcal{P} = 0$, $\vec{v}_d = 0$, $\vec{v}_y = 0$ y no se genera la densidad de corriente; esta situación se muestra en la Figura 3.3.

En este caso el campo eléctrico en el sistema de coordenadas que se mueve con el plasma es cero¹:

¹El campo marcado como $\vec{E}'$ es el campo en el sistema de coordenadas que se mueve con el plasma.

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{j}}{\sigma} &= \vec{E}' \\
&= \vec{E} + \vec{u}_E \times \vec{B} \\
&= \vec{E} + \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \times \vec{B} \right) \\
&= \vec{E} - \vec{E} = 0
\end{aligned}$$

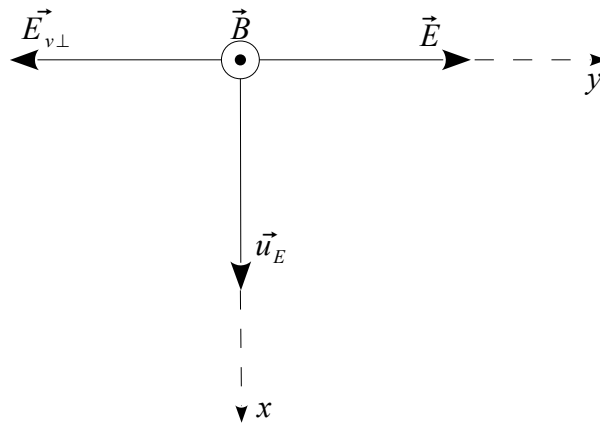


Figura 3.3: Vectores de campos cruzados, deriva libre.

SECCIÓN 3.3

PLASMA CONTENIDO

En un recipiente debido al movimiento de deriva eléctrica $\vec{u}_E$ resulta un aumento de la presión ante la pared que limita dicho movimiento es decir se configura el gradiente de presión $\nabla \mathcal{P}$ y se produce el flujo de difusión $\vec{\Gamma} = -D\nabla n = n\vec{v}_d$ (ver ec. 2.35) y la velocidad de movimiento a lo largo del eje x disminuye su magnitud una cantidad v_d , además el plasma empieza a moverse a lo largo del eje y (ver figuras 3.3, 3.4 y 3.5). La velocidad resultante en el plano $x - y$ que es $\vec{v}_\perp$ (ec. 2.34) (el campo $\vec{B}$ está a lo largo del eje z), como se encontró es:

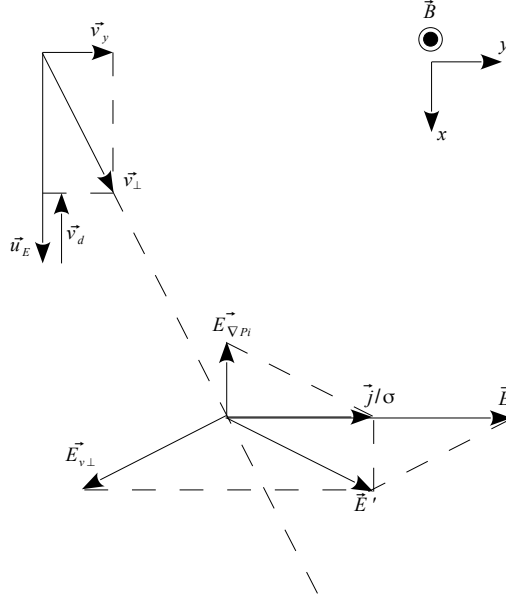


Figura 3.4: Vectores en campos cruzados, Plasma confinado

$$\vec{v}_{\perp} = -\frac{1}{\sigma B^2} \nabla \mathcal{P} + \frac{1}{B^2} \vec{E} \times \vec{B} - \frac{1}{n e B^2} \nabla \mathcal{P}_i \times \vec{B} \quad (3.1)$$

$$= \vec{v}_d + \vec{u}_E + \vec{v}_y \quad (3.2)$$

En términos de las velocidades correspondientes ahora se genera una densidad de corriente en el plasma: (ec. 2.30)

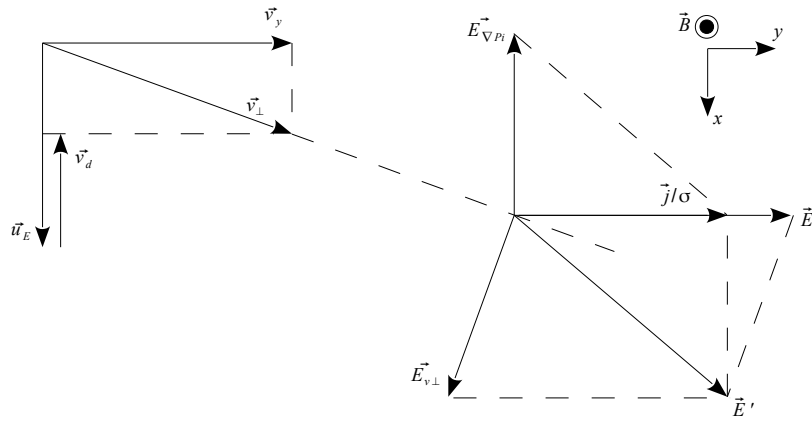
$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} - \frac{1}{n e} \nabla \mathcal{P}_i \right) \quad (3.3)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_{ef} \quad (3.4)$$

Cuyo valor se determina por el campo eléctrico efectivo:

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}_{v_{\perp}} + \vec{E}_{\nabla \mathcal{P}_i}$$

A medida que el gradiente de presión $\nabla \mathcal{P}$ crece, la densidad de corriente aumenta (Figuras 3.3, 3.4 y 3.5). El valor de esta densidad de corriente se determina por el

Figura 3.5: Aumento del gradiente de presión $\nabla \mathcal{P}$

balance de las fuerzas magnéticas y la fuerza de presión en cada momento del tiempo

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla \mathcal{P} \quad (3.5)$$

por lo tanto la densidad de corriente es:

$$\vec{j} = \frac{\vec{B} \times \nabla \mathcal{P}}{B^2} \quad y \quad j = \frac{|\nabla \mathcal{P}|}{B} \quad (3.6)$$

y en el sistema de coordenadas adoptado (tabla 3.1) el vector $\vec{j}$ siempre se encuentra dirigido a lo largo del eje y .

SECCIÓN 3.4

GRADIENTE DE PRESIÓN CRÍTICO

Según la ecuación (3.1) existe un valor de gradiente de la presión total tal que la velocidad en dirección x se anula completamente, es decir se anula la deriva del plasma

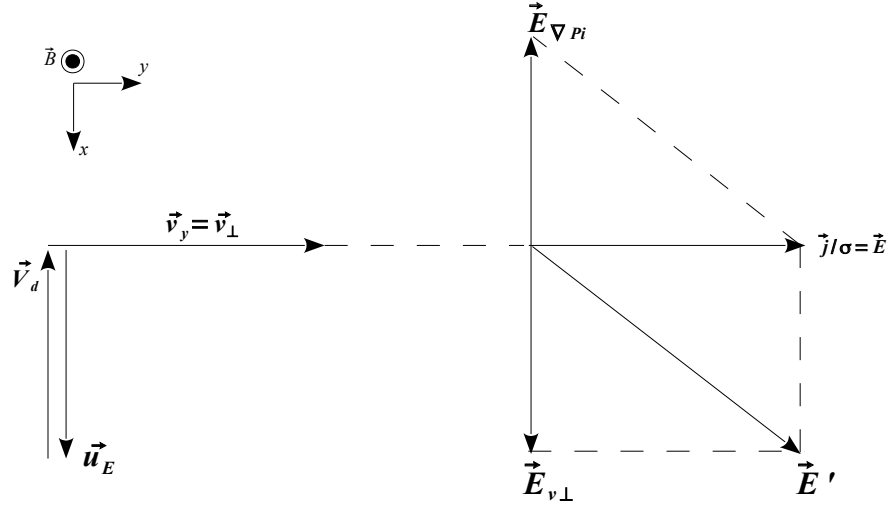


Figura 3.6: Caso del gradiente de presión crítico

en la dirección x pues $\vec{v}_d = -\vec{u}_E$, este valor se denomina gradiente crítico de presión,

$$|\nabla \mathcal{P}|_c = \sigma E B \quad (3.7)$$

Cuando esto ocurre la velocidad a lo largo del eje x se vuelve cero pues $\vec{v}_d = -\vec{u}_E$ y la densidad de corriente (ec. 3.6) toma su valor “habitual” directamente proporcional al campo eléctrico $\vec{E}$: (figura 3.6)

$$j = \sigma E \quad (3.8)$$

En este caso hay compensación mutua entre la densidad de corrientes de deriva y la densidad de corriente de difusión resultando un movimiento del plasma en la dirección y . El campo efectivo $\vec{E}_{ef}$ coincide con el campo aplicado $\vec{E}$ y la proyección $\vec{E}'$ al eje y es precisamente igual a $\vec{E}$, su otra componente $\vec{E}_{v\perp}$ resiste el gradiente de la presión iónica:

$$\vec{E}_{v\perp} = -\vec{E}_{\nabla P_i} \quad (3.9)$$

En el caso en que el gradiente de presión es mayor que el gradiente de presión crítico $\nabla \mathcal{P} > \nabla \mathcal{P}_c$ la densidad de corriente es mayor que su valor “habitual” ($j > \sigma E$), pues siempre tiene el valor $j = \frac{|\nabla \mathcal{P}|}{B}$ (ver ec. 3.6). La velocidad de difusión supera la de deriva, $v_d > u_E$ (figura 3.7)

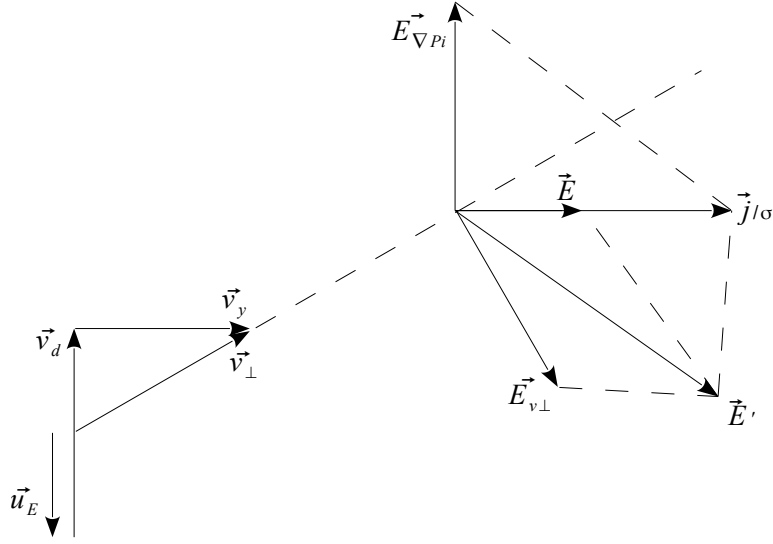


Figura 3.7: Gradiente de presión mayor que el gradiente de presión crítico

entonces se genera la densidad de corriente y cuando el campo eléctrico aplicado se elimina ($E = 0$) y en el sistema de coordenadas que se mueve con el plasma hay campo $\vec{E}' = \vec{v}_\perp \times \vec{B}$ como se muestra en la figura 3.8 el ángulo entre los vectores $\vec{E}_{v_\perp}$ y $\vec{j}$ o entre $\vec{v}_\perp$ y $\vec{v}_d$ se determina por el grado de magnetización del plasma:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_d} = \frac{|\nabla \mathcal{P}_i| \sigma B}{|\nabla \mathcal{P}| ne} \quad (3.10)$$

como $\Omega = \frac{eB}{m}$, $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ se tiene:

$$\tan \theta = \frac{|\nabla \mathcal{P}_i|}{|\nabla \mathcal{P}|} \Omega \tau \quad (3.11)$$

donde $\Omega\tau$ caracteriza la magnetización del plasma, es decir cuando $\Omega\tau \gg 1$ el campo magnético es fuerte, cuando $\Omega\tau \ll 1$ el campo magnético es débil y respectivamente la magnetización del plasma. Si $|\nabla \mathcal{P}_i|/|\nabla \mathcal{P}| = 1/2$ (figura 3.8), se tiene $\tan \theta = \Omega\tau/2$ corresponde al caso $\Omega\tau = 2$

Vale la pena aclarar que a partir del análisis presentado no es posible encontrar que valores de gradiente de presión se produce en diferentes equipos plásmicos, no se encuentran datos experimentales del gradiente de presión $\nabla \mathcal{P}$. Solo podemos calcular el gradiente de presión crítico $(\nabla \mathcal{P})_c$ cuando el flujo de difusión se compensa exactamente con el flujo de deriva en los campos cruzados.

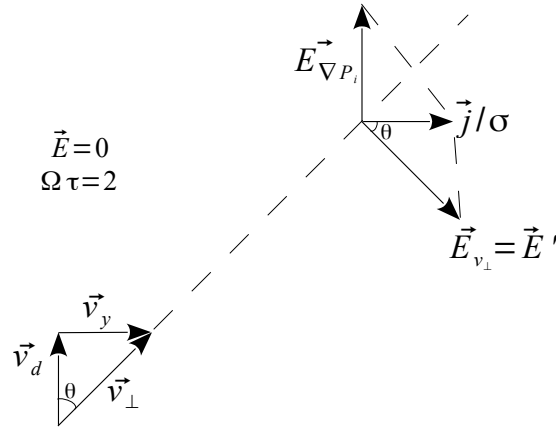


Figura 3.8: Ángulo entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y la densidad de corriente $\vec{j}$

SECCIÓN 3.5

ANÁLISIS MICROSCÓPICO

La situación microscópica de la generación de la densidad de corriente en campos magnéticos en ausencia del campo eléctrico externo se da en la figura 3.9. En esta figura, debido a la presencia de una pared la presión y consecuentemente la densidad de partículas crece de arriba hacia abajo. Por esto las corrientes elementales de Larmor de las partículas “inferiores” superan las corrientes elementales de la capa superior produciendo la densidad de corriente resultante. Se puede observar que las direcciones de rotación de los iones y de los electrones coinciden, pero el radio de Larmor de los iones es mucho mayor por lo menos 2000 veces el radio de Larmor de los electrones; por esta razón en muchos casos se tratan los iones como no magnetizados mientras que los electrones se encuentran fuertemente magnetizados y la densidad de corriente en ausencia del campo eléctrico $\vec{E}$ se produce solo por los electrones. En un plasma homogéneo estas corrientes se compensan. Entonces, en presencia del gradiente de la presión en un campo magnético se produce una densidad de corriente en la dirección perpendicular tanto a $\nabla \mathcal{P}$ como a $\vec{B}$ como se muestra en la figura 3.9. La densidad de corriente recorre las superficies isobáricas y como resultado se tiene la debilitación del campo magnético externo en la región de la presión elevada. El plasma se comporta como diamagnético, empuja el campo magnético del volumen de su ocupación.

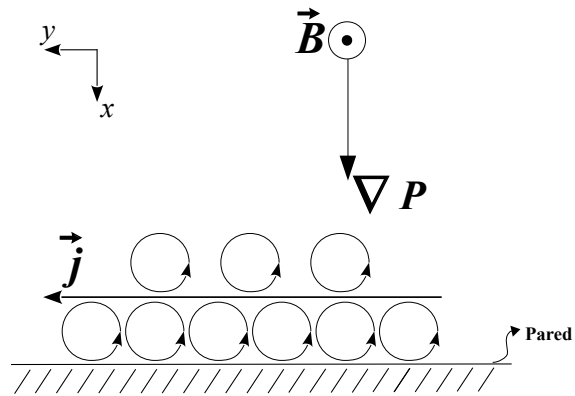


Figura 3.9: Comportamiento diamagnético del plasma debido al gradiente de la presión

Capítulo 4

CONCLUSIONES

1. Se analiza la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico en un plasma que se deriva en campos eléctrico y magnético cruzados cuando a esta deriva resiste el gradiente de la presión.
2. Se muestra la diferencia entre los casos de deriva del plasma en campos cruzados en estado libre y en el caso del plasma confinado por paredes.
3. Se encuentra que cuando el gradiente de presión del plasma alcanza un valor critico la influencia del campo magnético a la densidad de corriente desaparece y la densidad de corriente se determina solo por la conductividad del plasma en este caso tiene lugar una compensación mutua entre la densidad de corriente de deriva y la densidad de corriente de difusión.
4. Se muestra que en el caso del gradiente de presión mayor que critico el flujo de difusión se encuentra mayor que el flujo de deriva.
5. Se encuentra que en el caso $\nabla P > \nabla P_c$ la densidad de corriente en el plasma existe cuando el campo eléctrico aplicado se anula.
6. Se muestra por qué en ausencia del campo eléctrico, aparece la densidad de corriente eléctrica cuyo vector de densidad es perpendicular tanto al gradiente de presión como al campo magnético.
7. Se recomienda hacer el análisis de la influencia del gradiente de presión al comportamiento del plasma en contenedores de simetría cilíndrica que se encuentran en muchos equipos experimentales.

CITAS

- [1] I.Langmuir, PNAS, August 1, vol. 14 No. 8 627-637 (1928).
- [2] V.Milántiev and S. Temkó, *Física del plasma*, MIR Moscu 6-8, (1987).
- [3] Francis F. Chen, *Introduction to plasma and controlled fusion*. Second Edition, Volume 1: Plasma Physics Plenum Press., New York 186-190, (1984).
- [4] Boris N. Kuvshinov, Egbert Westerhof, Theo J. Schep a, Marcus Berning, *Electron magnetohydrodynamics of magnetized, inhomogeneous plasmas*. Physics Letters A, Volume 241, 287-292, (1998).
- [5] Goldston Robert J., Rutherford Paul Harding, *Introduction to plasma physics*, CRC Press, United Kingdom, (1995).
- [6] de Pablo, Juan Arturo Alonso, Almeida Jorge Sánchez . *La rotación y el transporte de momento en plasmas astrofísicos y de laboratorio*. Revista Española de Física vol. 27, no 4, p. 15-24, (2013).
- [7] Howatson, AM and Pitarch, Andrés Gomez, *Descargas eléctricas en gases*, Urmo, Bilbao España 93-105, (1970).
- [8] Smirnov, Boris M., *Physics of ionized gases*. John Wiley & Sons, United Kingdom, 170-172, (2008).
- [9] Spitzer L. *Physics of Fully Ionized Gases*. Interscience Publishers, Inc., New York, 76 (1956).
- [10] Mao T. Murillo, Valery Dougar, *Simulación de un Plasma RCE en una Trampa Tipo Espejo Mediante el Método Partícula en Celda*”, Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Bucaramanga, (2008).
- [11] V. D. Dugar-Zhabon, M. T. Murillo Acevedo, *Formation of a hot electron ring in an ECR mirror trap through a particle-in-cell simulation study*”, IEEE Transaction on Plasma Science, 38, 3449 - 3454 (2010).

-
- [12] Oswaldo O. Olarte, Mao T. Murillo, *Simulación del campo magnético producido por hilos con corrientes estacionarias e imanes con magnetización constante aplicado a trampas magnéticas tipo espejo, mínimo-B, Y cero-B*, Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Bucaramanga, 40-44, (2014).
- [13] Nave, Carl R., *HyperPhysics*, Georgia State University, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/magnetic/maspec.html>, (2005).
- [14] Nasser, Essam, *Fundamentals of gaseous ionization and plasma electronics*, Wiley-Interscience, (1971).
- [15] K. Miyamoto, *Fundamentals of Plasma Physics and Contolled Fusion*, National Institute for Fusion Science, Japan 8-19, (2000)
- [16] Lieberman, Michael A., Lichtenberg, Alan J. *Principles of plasma discharges and materials processing*. John Wiley & Sons, New Jersey, (2005).
- [17] Jardin, Stephen. *Computational methods in plasma physics*, CRC Press, USA, (2010).

BIBLIOGRAFÍA

KUVSHINOV, Boris N., et al. Electron magnetohydrodynamics of magnetized, inhomogeneous plasma. Physics Letters A,[online] 1998, Vol. 241, [cited: 3 febrero 2016], p. 287-292..

DE PABLO, Juan Arturo Alonso; ALMEIDA, Jorge Sánchez. La rotación y el transporte de momento en plasmas astrofísicos y de laboratorio. Revista Española de Física, [online] 2013, vol. 27, no 4, p. 15-24.

CHEN, Francis F. Introduction to plasma and controlled fusion. 2ed, Vol. I. : Plasma Physics. New York: Plenum Press, 1984. p. 15-24

GOLDSTON, Robert J.; RUTHERFORD, Paul Harding. Introduction to plasma physics. CRC Press, 1995.

HOWATSON, A. M.; PITARCH, Andrés Gomez. Descargas eléctricas en gases. Urmo, 1970.

LANGMUIR, I. PNAS, [online] 1928, vol. 14 No. 8 [cited: August 1] p. 627-637

JARDIN, Stephen. Computational methods in plasma physics. USA: CRC Press, 2010.

MIYAMOTO, Kenro. Fundamentals of plasma physics and controlled fusion. National Inst. for Fusion Science, 2011. p. 8-19

LIEBERMAN, Michael A.; LICHTENBERG, Alan J. Principles of plasma discharges and materials processing. John Wiley and Sons, 2005.

MURILLO Mao T., DOUGAR Valery, *Simulación de un Plasma RCE en una Trampa Tipo Espejo Mediante el Método Partícula en Celda*”, Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Bucaramanga, (2008).

NASSER, Essam. Fundamentals of gaseous ionization and plasma electronics. Wiley-Interscience, 1971.

NAVE, Carl R., *HyperPhysics*, Georgia State University, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/magnetic/maspec.html>, (2005).

OLARTE Oswaldo O., MURILLO Mao T., *Simulación del campo magnético producido por hilos con corrientes estacionarias e imanes con magnetización constante aplicado a trampas magnéticas tipo espejo, mínimo-B, Y cero-B*, Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Bucaramanga, 40-44, (2014).

SMIRNOV, Boris M. Physics of ionized gases. UK: John Wiley and Sons, 2008. p. 170-172

SPITZER, Lyman. Physics of fully ionized gases. Courier Corporation, 2013.

DUGAR-ZHABON, V. D., MURILLO, Acevedo, *Formation of a hot electron ring in an ECR mirror trap through a particle-in-cell simulation study*”, IEEE Transaction on Plasma Science, 38, 3449 - 3454 (2010).

MILÁNTIEV, V.; TEMKÓ, S. Física del plasma. Mir, 1987. p. 6-8

Apéndices

Conductividad del Plasma

Las ecuaciones de movimiento incluyendo los efectos de las colisiones de las partículas cargadas pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} Mn \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= en(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i - \nabla \vec{\pi}_i + \vec{R}_{ie} \\ mn \frac{d\vec{v}_e}{dt} &= en(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e - \nabla \vec{\pi}_e + \vec{R}_{ei} \end{aligned} \quad (1)$$

Los términos $\vec{R}_{ie}$ y $\vec{R}_{ei}$ representan, respectivamente la ganancia de momento del fluido ionico por las colisiones con los electrones, y viceversa. El tensor de tensión $\vec{P}_j$ se ha dividido en la parte isotrópica p_j y el tensor de viscosidad anisotrópico $\vec{\pi}_j$. Las colisiones de partículas idénticas dan lugar a presiones dentro de cada fluido individual que están contenidas en $\vec{\pi}_j$. Dado que estas colisiones no dan lugar a mucha difusión, vamos a ignorar los términos $\nabla \vec{\pi}_j$. En cuanto a los términos $\vec{R}_{ie}$ y $\vec{R}_{ei}$ que representan la fricción entre los dos fluidos, la conservación del momento requiere

$$\vec{R}_{ie} = -\vec{R}_{ei} \quad (2)$$

Podemos escribir $\vec{R}_{ei}$ en términos de la frecuencia de colisión de la manera habitual:

$$\vec{R}_{ei} = mn(\vec{v}_i - \vec{v}_e)\nu_{ei} \quad (3)$$

y similarmente para $\vec{R}_{ie}$. Dado que las colisiones son colisiones de Coulomb, sería de esperar que $\vec{R}_{ei}$ sea proporcional a la fuerza de Coulomb, que es proporcional a e^2 (para iones de una sola carga). Además, $\vec{R}_{ei}$ debe ser proporcional a la densidad de electrones n_e y a la densidad de centros de dispersión n_i , que por supuesto, es igual a

n_e . Finalmente, $\vec{R}_{ei}$ debe ser proporcional a la velocidad relativa de los dos fluidos. Por dichos motivos físicos, entonces, podemos escribir $\vec{R}_{ei}$, como

$$\vec{R}_{ei} = \frac{e^2 n^2}{\sigma} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \quad (4)$$

donde σ es una constante de proporcionalidad. Comparando esta ecuación con la ecuación (3) se puede ver que

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_{ei}}{m} \quad (5)$$

donde $\tau_{ei} = 1/\nu_{ei}$ es el tiempo entre colisiones electrón-ion y la constante σ es la conductividad del plasma, que concuerda con el significado habitual de la conductividad.[3]

Modelo de un Líquido en la Aproximación MHD

Antes de hablar del modelo de un líquido podemos hacer una pequeña introducción hablando del modelo de dos líquidos el cual considera que el plasma consiste de dos componentes o especies: los iones y electrones; la extensión a más especies es trivial. La ecuación que describe el movimiento de cada especie como fluido es en este modelo:

$$mn \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla \Pi - \nabla p + en \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + \vec{R} + \rho \vec{g} \quad (6)$$

Las variables en este modelo son los parámetros macroscópicos: concentraciones n_e y n_i velocidades medias v_e y v_i , las presiones p_e y p_i . Con estos parámetros están enlazados las densidades de masa $\rho_e = n_e m_e$ y $\rho_i = n_i m_i$ y las temperaturas T_e y T_i que se determinan por las ecuaciones de estado $p_e = n_e k_B T_e$ y $p_i = n_i k_B T_i$

El modelo de dos líquidos se utiliza para estudiar procesos cuyos tiempos característicos son menores o del orden del tiempo de establecimiento de equilibrio entre los electrones y los iones. Pero en nuestro caso el interés se centra en los procesos bastante lentos (o de baja frecuencia) comparados con el tiempo de establecimiento del equilibrio entre iones y electrones, podemos suponer que el plasma se encuentra en el estado de equilibrio y se comporta como un entero, como un líquido conductor. Tales condiciones son típicas para un plasma bastante denso pues los tiempos de relajación son inversamente proporcionales a la concentración $\tau \sim (nsv)^{-1}$ donde n —concentración, s —sección transversal de colisiones y v —velocidad media de masa. El modelo de un líquido presenta un interés especial para la aproximación magnetohidrodinámica; El modelo de un líquido se caracteriza por los siguientes parámetros:

- Densidad de masa total:

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \quad (7)$$

- Densidad de carga total:

$$\rho_q = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \quad (8)$$

- Velocidad media de masa:

$$\vec{v} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (9)$$

- Densidad de corriente total:

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (10)$$

Estudiamos un plasma que consiste en electrones e iones unicargados. Bajo la condición de cuasineutralidad:

$$\Delta n = |n_i - n_e| \ll n_i \simeq n_e = n \quad (11)$$

La densidad de masa de tal liquido se determina por los iones es decir:

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n \quad (12)$$

La velocidad del plasma se puede considerar igual a la velocidad de los iones:

$$\vec{v} = \frac{1}{m_i n} (m_i n \vec{v}_i + m_e n \vec{v}_e) = \vec{v}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{v}_e \simeq \vec{v}_i \quad (13)$$

pues $\frac{m_i}{m_e} > 10^3$, y prácticamente $\frac{v_e}{v_i} < 10^3$.

La ecuación de transferencia del impulso del fluido (ec. 6) es muy general y contiene un extenso rango de escalas temporales y espaciales para ser utilizada en muchos propósitos. Para continuar, haremos una serie de aproximaciones que permiten simplificarla, estas aproximaciones son válidas siempre y cuando las velocidades (v), las frecuencias (ω) y longitudes de escala de interés (L) satisfagan las desigualdades:

$$v \ll c, \quad (14)$$

$$\omega \ll \omega_{pe}, \quad (15)$$

$$L \gg \lambda_D. \quad (16)$$

Aquí v es la velocidad media, c la velocidad de la luz, ω_{pe} es la frecuencia plasmica del electrón, L longitud característica del plasma y λ_D es la longitud de Debye. En estas condiciones el plasma es cuasineutral (pues las dimensiones lineales prevalecen significativamente de la longitud de Debye). Estas consideraciones normalmente están bien satisfechas por los fenómenos macroscópicos en los experimentos modernos de fusión.

Entonces en la ecuación de transferencia del impulso (ec. 6) podemos despreciar el primer termino a la derecha el gradiente del tensor viscosidad $\nabla \Pi$ que es debido a desviaciones de la isotropía de la función de distribución esto es justo ya que la frecuencia de colisiones es mayor que los tiempos característicos ademas las colisiones de partículas idénticas, que dan lugar a tensiones dentro del fluido, están contenidos en el tensor Π . Dado que estas colisiones no dan lugar a mucha difusión, podemos ignorar este termino.

La lentitud del proceso significa que la velocidad media $\vec{v}$ y por lo tanto la densidad de corriente $\vec{j}$ son valores del primer orden de pequeñez y por lo tanto se pueden despreciar los valores proporcionales a v^2 (y a j^2) por esto en la ecuación de impulso se puede omitir el termino $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ resultando sin diferencia la derivada de Lagrange y la derivada de Euler.

El ultimo termino gravitacional $\rho \vec{g}$ en el caso de problemas astrofísicos es importante pero se puede despreciar ya que en plasmas de laboratorio no lo es.

Entonces las ecuaciones de movimiento de iones y electrones se pueden escribir entonces cómo

$$Mn \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = en(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + \vec{R}_{ie} \quad (17)$$

$$mn \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -en(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + \vec{R}_{ei} \quad (18)$$

Ley Generalizada de Ohm

Para obtener la ley de Ohm en magnetohidrodinámica partimos de la ecuación de transferencia de impulso de los electrones e iones en la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) = e_\alpha n_\alpha (\vec{E}_\alpha + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha \quad (19)$$

Multiplicando la ecuación (19) por e_α/m_α podemos encontrar un enlace entre los parámetros macroscópicos en el modelo de un líquido simple. La parte izquierda de la ecuación (19) después de la adición de las componentes $\alpha = e$ y $\alpha = i$ queda:

$$\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (en_i \vec{v}_i - en_e \vec{v}_e) \quad (20)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j}_i - \vec{j}_e) \quad (21)$$

$$= \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (22)$$

El primer termino a la derecha que contiene el campo eléctrico en (ec. 19) es, para $n_e = n_i = n$:

$$\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} n_\alpha \vec{E} = \frac{ne^2}{m_e} \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \vec{E} \quad (23)$$

$$\approx \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} \quad (24)$$

El segundo termino a la derecha de (ec. 19) es la suma de campos magnéticos, se realizan las siguientes transformaciones con el termino $\vec{B}$, teniendo en cuenta que

$\frac{m_e}{m_i} \ll 1$:

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{v}_{\alpha} \times \vec{B} = e^2 n \left(\frac{\vec{v}_e}{m_e} + \frac{\vec{v}_i}{m_i} \right) \times \vec{B} \quad (25)$$

$$= e^2 n \left[\left(\frac{\vec{v}_e}{m_e} - \frac{\vec{v}_i}{m_e} \right) + \left(\frac{\vec{v}_i}{m_i} + \frac{\vec{v}_i}{m_e} \right) \right] \times \vec{B} \quad (26)$$

$$\approx -\frac{e}{m_e} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{e^2 n}{m_e} \vec{v} \times \vec{B} \quad (27)$$

El tercer termino en (ec. 19) es el gradiente de la presión

$$-\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla p_{\alpha} = \nabla \left(\frac{e}{m_e} p_e - \frac{e}{m_i} p_i \right) \quad (28)$$

$$= \frac{e}{m_e} \nabla \left(p_e - \frac{m_e}{m_i} p_i \right) \quad (29)$$

$$\approx \frac{e}{m_e} \nabla p_e \quad (30)$$

El ultimo termino en (ec. 19) es la fuerza de frenado:

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{R}_{\alpha} = -\frac{e}{m_e} \vec{R}_e + \frac{e}{m_i} \vec{R}_i \quad (31)$$

$$= -\frac{e}{m_e} \vec{R} \left(1 - \frac{m_e}{m_i} \right) \quad (32)$$

$$\approx -\frac{e}{m_e} \vec{R} \quad (33)$$

aquí hemos tomado que $\vec{R}_e = \vec{R}_{ei} = -\vec{R}_i = -\vec{R}_{ie} = \vec{R}$, en un plasma electrón-ion como se vio en (ec. 2). Con ayuda de las ecuaciones (3), (4), (5) y (10) podemos reemplazar la fuerza de frenado $\vec{R}$ en términos de la densidad de corriente $\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{R} = \frac{\vec{j}}{\tau}$ y sustituyendo en la ecuación (33) tenemos.

$$= -\frac{e}{m_e} \frac{\vec{j} m_e}{e \tau} \quad (34)$$

$$\approx -\frac{\vec{j}}{\tau} \quad (35)$$

Entonces al operar la ecuación (19) y uniendo cada término obtenido en las ecua-

ciones (22), (24), (27), (30) y (35) esto queda:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e \right) - \frac{\vec{j}}{\tau} \quad (36)$$

o de la siguiente forma

$$\vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e \right) \quad (37)$$

donde la conductividad viene de la forma ($\sigma = ne^2\tau/m_e$)

Esta ecuación, llamada *ley generalizada de Ohm*. Describe las propiedades eléctricas del fluido conductor dando una relación entre la densidad de corriente $\vec{j}$ y la tensión del campo eléctrico $\vec{E}$. El término $\vec{j} \times \vec{B}$ se llama corriente de Hall. Las variables $\vec{B}$, $\vec{v}$, n , p_e son variables fundamentales las cuales obedecen las ecuaciones de avance en el tiempo.