

**CARACTERIZACIÓN DE LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO:
UNA EXPERIENCIA DE AULA**

ARISMIDIS RODRÍGUEZ DÍAZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
2004**

**CARACTERIZACIÓN DE LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO:
UNA EXPERIENCIA DE AULA**

ARISMIDIS RODRÍGUEZ DÍAZ

**Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática**

Director

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2004

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos a:

La Universidad Industrial de Santander, en donde he recibido la formación académica para desempeñarme eficientemente en mi vida profesional.

Profesores de la especialización en Educación Matemática que me enriquecieron con su cátedra y experiencia.

A Gabriel Jaimes Yáñez por su constante motivación, orientación y sus valiosas enseñanzas.

A Nubia, Secretaria de la Escuela de Matemáticas, por su valiosa colaboración.

Comunidad Educativa de la institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza (IETAVH), en especial al Rector Luís Alberto Díaz.

Los alumnos de Décimo Grado (2003) de la IETAVH.

Mi suegra Nerys del Carmen y mi Cuñada Cira María, por su amistad y colaboración.

DEDICATORIA

A DIOS por su presencia, iluminación y fortaleza constante.

A mi hijo Marco Antonio Rincones Rodríguez, por su apoyo moral en los momentos más difíciles.

A mis padres Jorge Eliécer Rodríguez y Tomasa Díaz.

A Marcelo Rincones Díaz, quien con su colaboración y amor me apoyó y animó para alcanzar este logro personal y profesional.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	10
1. MARCO TEÓRICO	13
1.1 FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA	13
1.1.1 La investigación en el aula	13
1.1.1.1 Una ruta reflexiva del/la maestro/a investigador/a.	14
1.1.2 Dos componentes fundamentales para el conocimiento matemático	16
1.1.2.1 Niveles del Campo Conceptual	17
1.1.2.2 Niveles del Campo Procedimental	19
1.1.3 Las situaciones problema	19
1.2 FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA	21
1.2.1 Los lugares geométricos	21
1.2.2 Secciones cónicas	22
1.2.3 La elipse.	24
1.2.3.1 Elementos de la elipse	24
1.2.3.2 Relación fundamental entre los ejes de la elipse	25
1.2.3.3 Superficie de la elipse	26
1.2.3.4 Longitud de la elipse	26
2.2.4 Importancia de la elipse	27
2. METODOLOGÍA DE TRABAJO	29
3. SUSTENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA	33
3.1 ACTIVIDADES PREVIAS	34
3.1.1 Actividad N ₀ 1	35
3.1.1.1 Análisis de la actividad N° 1	41
3.1.2 Actividad N° 2	42

3.1.2.1 Análisis de la actividad No 2	46
3.1.3 Actividad N° 3	47
3.1.3.1 Análisis de la actividad N° 3	51
3.1.4 Conclusiones de las actividades previas.	52
3.2 ACTIVIDAD DE ENLACE	54
3.2.1 Actividad N° 4	54
3.2.1.1 Análisis de la actividad N° 4.	63
3.2.2 Conclusiones sobre la actividad de enlace.	64
3.3 ACTIVIDADES DE DESARROLLO DEL TEMA	65
3.3.1 Actividad N° 5	66
3.3.1.1 Análisis de la actividad N° 5.	71
3.3.2 Actividad N° 6	72
3.3.2.1 Análisis de la actividad N° 6	76
3.3.3 Actividad N° 7	77
3.3.3.1 Análisis de la actividad N° 7.	80
3.3.4 Conclusiones sobre las actividades de desarrollo del tema	81
3.4 Actividades de preparación para el siguiente tema.	82
3.4.1 Actividad N° 8	82
3.4.1.1 Análisis de la actividad N° 8.	86
3.4.2 Conclusiones sobre la actividad de preparación para el siguiente tema.	86
3.5 PRUEBA ESCRITA	87
3.5.1 Análisis de la prueba escrita.	95
CONCLUSIONES	97
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Hechos aislados sobre triángulos.	18
Figura 2. Secciones cónicas.	23
Figura 3. Elipse	24
Figura 4. Ejes principales de la elipse	24
Figura 5. Puntos principales de la elipse.	25
Figura 6. Segmentos de recta de la elipse	25
Figura 7. Relación fundamental entre los ejes de la elipse	25
Figura 8. Semiejes mayor y menor de una elipse	26
Figura 9. Elipsoide de revolución.	28
Figura 10. Galería de los murmullos.	28
Figura 11. Trazo realizado por alumno.	44
Figura 12. Trazo realizado por una alumna por medio de una escuadra.	48
Figura 13. Rectas perpendiculares.	52
Figura 14. Rectas perpendiculares en diferentes posiciones.	52
Figura 15. Círculo de diámetro AB.	55
Figura 16. Elipse contraída.	62
Figura 17. Elipse posición horizontal.	63
Figura 18. Elipse a través de plegado de papel.	73
Figura 19. Elipse a través de círculos concéntricos.	77
Figura 20. Distancia focal de la elipse.	79
Figura 21. Puntos y segmentos de rectas notables.	82

LISTA DE ANEXO

	Pág.
ANEXO A. ACTIVIDAD N° 1	103
ANEXO B. ACTIVIDAD N° 2	105
ANEXO C. ACTIVIDAD N° 3	106
ANEXO D. ACTIVIDAD N° 4	107
ANEXO E. ACTIVIDAD N° 5	110
ANEXO F. ACTIVIDAD N° 6	112
ANEXO G. ACTIVIDAD N° 7	114
ANEXO H. ACTIVIDAD N° 8	116
ANEXO I. PRUEBA ESCRITA	118

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son objeto de interés e investigación para la educación. Muchas de las dificultades de los niños para comprender las nociones matemáticas, y de los maestros para acompañarlos adecuadamente, tienen su origen en el desconocimiento de los procesos cognoscitivos, afectivos y socio-culturales que se movilizan, o son movilizables, durante la acción educativa, procesos que dan cuenta de las diferencias individuales.

En este trabajo se presenta la caracterización de la elipse como lugar geométrico utilizando como método la investigación en el aula a través de situaciones problema, con el ánimo de lograr, desde el comienzo, la participación activa de los estudiantes.

En el primer capítulo se presenta el marco teórico con dos componentes claramente diferenciadas:

- ✓ La fundamentación pedagógica que toca tres aspectos: la investigación en el aula, las situaciones problema y las dos componentes fundamentales para el conocimiento matemático: la conceptual y la procedimental (Rico, 1990).
- ✓ La fundamentación científica que trata sobre los lugares geométricos, las secciones cónicas, la elipse (elementos, relación entre sus ejes, superficie y longitud) y su importancia.

En el segundo capítulo se propone la metodología de trabajo, donde el docente juega un papel importante como orientador de los alumnos en el desarrollo de las actividades que lo conduzcan a descubrir la verdad por sí solos sin que halla necesidad de recurrir a la profesora para que les apruebe los resultados obtenidos.

En el tercer capítulo se presentan las actividades divididas en cuatro sesiones para la enseñanza de los conceptos relacionados con la elipse, las cuales están diseñadas de manera que el docente, con la observación en el aula y su experiencia profesional, pueda orientarlas, enriquecerlas y seleccionar las más adecuadas para el logro de sus objetivos.

Estas actividades fueron aplicadas a 30 alumnos del grado décimo de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria “Vicente Hondarza” de Morales (sur de Bolívar). Todas ellas, excepto las 1, 2 y 3 (actividades previas) que están dedicadas exclusivamente a los lugares geométricos, nos muestran diversas maneras de construir elipses. La actividad No. 4 (actividad de enlace) presenta la elipse como una circunferencia “estirada” (proporcionalmente) en una dirección dada. La actividad No. 5, en cambio, muestra cómo construir una elipse de una forma dinámica, como en una especie de juego, utilizando solamente dos estacas pequeñas y una cuerda cumpliendo ciertas condiciones. La actividad No 6, presenta una manera de generar una elipse plegando un papel a lo largo de rectas que “envuelven” a la elipse en cuestión. Tanto esta actividad como la anterior, identifican y localizan fácilmente los dos focos de la elipse, que son fundamentales para su estudio. La actividad No. 7 propone la construcción de una elipse con escuadra y compás a través de círculos concéntricos.

Se conocen muchas otras construcciones interesantes para la elipse, desde luego, y lo mejor que podemos hacer aquí es recomendar al lector que consulte libros de dibujo para ingenieros como, por ejemplo, Diseño gráfico

en ingeniería de James H. Earle (1986). La actividad No 8 (actividad de preparación para el siguiente subtema) nos conduce a encontrar la ecuación de la elipse. Lo interesante de esta actividad es que el alumno es quien establece las conexiones entre la parte geométrica y la algebraica para descubrir la ecuación de la elipse con centro en el origen. Aquí el alumno pone en juego sus habilidades y destrezas en la aplicación de conocimientos previos como hallar la distancia entre dos puntos, aplicar la definición de elipse, establecer igualdades donde aparecen radicales, eliminación de los mismos, aplicar el teorema de Pitágoras, y otros que, con orientación del profesor, le pueden permitir descubrir la ecuación de la elipse.

Seguidamente se presenta una prueba escrita, cabe anotar que la evaluación de trabajo de aula no se restringe a resultados de pruebas escritas, pues incluye la valoración de las actuaciones de los estudiantes en las actividades que se realizaron. De todas maneras los resultados permiten conocer los significados que los estudiantes desarrollaron alrededor de la elipse.

Por último, en la evaluación de las actividades registradas en los análisis y conclusiones, tuve en cuenta el desarrollo de las siguientes competencias matemáticas: interpretación (las posibilidades para lograr identificar y dar sentido matemático a las situaciones problema), argumentación (las razones, justificaciones, conexiones, relaciones y/o los por qué que el estudiante manifiesta ante una situación) y la proposición en contextos de la matemática (generación de hipótesis, conjeturas, deducciones posibles que seleccione como válidas, desde la matemática, ante las situaciones propuestas).

1. MARCO TEÓRICO

1.1 FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA

1.1.1 La investigación en el aula. Según López (2000) los procesos de transformación cultural a los que asistimos no son ajenos a la escuela. Por el contrario, ésta es permeada no sólo por las concepciones predeterminadas social y políticamente, sino por la circulación de saberes y formas culturales en razón de la existencia de distintos actores que allí se interrelacionan.

Una manera de comprender ese complejo mundo de la escuela, y más específicamente del aula, es hoy facilitada por la investigación educativa y/o de aula, entendida como un proceso que, bajo ciertas condiciones que le son características, nos posibilita conocer nuestra práctica escolar (López, 2000).

La propuesta de investigación en el aula se inscribe en el contexto del debate en torno al maestro–investigador, propuesta que ha cobrado fuerza en la última década y con la que se pretende romper la dualidad teoría–práctica, haciendo de los procesos de enseñanza y aprendizaje objetos de investigación desde la práctica misma de los maestros.

En el prólogo al libro de Rafael Porlán Ariza (1995), *Constructivismo y Escuela*, Miguel A. Santos hace algunas anotaciones pertinentes, a propósito de esta reflexión:

La investigación da sentido a lo que se hace en la escuela y a lo que hace el profesor dentro de ella. Levantar la mirada de las cuestiones meramente técnicas y centrarla en la dimensión ética y política es una

exigencia de la tarea educativa... El profesor que solamente repite una lección tras otra, ofrece una explicación diferente que la de aquel que sabe que está construyendo el conocimiento. Y dista, a su vez, de la de quien sabe que está formando ciudadanos, para un mundo que sea más habitable, más humano, más hermoso.

La investigación en el aula tiene sentido en un contexto de mayor envergadura educativa, si entendemos que la sociedad actual, en su constante cambio, obliga a nuevos aprendizajes y por tanto nuevas formas de relación con el saber y el conocimiento, lo cual significa, a su vez, un nuevo ser y hacerse en la cultura, escenario natural del conocimiento (Murcia, 1992).

“El conocimiento es una de las formas mediante las cuales el ser humano asume el mundo, de las relaciones, de la individualidad, en un proceso inacabado de apropiación simbólica. El conocimiento implica tensión entre el sujeto cognoscente y lo cognoscible, pero al mismo tiempo un proceso de interacción intersubjetiva (López 2000,p.87).

1.1.1.1 Una ruta reflexiva del/la maestro/a investigador/a. Al menos con los siguientes tópicos, se verá involucrado el/la maestro/a, que asuma la investigación en el aula, como orientadora de su práctica profesional.

La investigación: condiciones y enfoques

Se propone aquí un reconocimiento y análisis de las condiciones y enfoques investigativos que desde diversas perspectivas, se presentan hoy como opción a los investigadores. Se sugieren las siguientes órdenes de preguntas orientadoras de la reflexión:

1) Respecto a la investigación como un método del proceso de conocimiento.

- ¿Cuáles son las condiciones históricas, epistemológicas, teóricas y metodológicas, que contextúan la investigación como proceso de conocimiento?

- ¿Qué incidencia tienen dichas condiciones en la configuración del sentido que la investigación pueda tener, para el/la maestro?

2) En cuanto a los enfoques investigativos o estilos en la actividad científica:

- ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento y en particular del conocimiento escolar?

- ¿Cuál es la relación que el investigador establece con lo que desea conocer, en la perspectiva de los diferentes enfoques investigativos?

- ¿Cuáles serían los principios procedimentales, relativos a la naturaleza del conocimiento, que puede proporcionar la práctica escolar?

- En consecuencia con las reflexiones anteriores, ¿Cómo sustentar la opción por un enfoque determinado?

3) La investigación como estrategia pedagógica en el trabajo de aula. Esta es una reflexión en torno a la práctica pedagógica, mirada como objeto de investigación. En tal sentido se propone como interrogantes:

- ¿Es posible que la práctica pedagógica permita construir conocimiento? ¿Qué tipo de conocimiento?

- Como estrategia pedagógica la investigación puede propiciar condiciones para el aprendizaje en la escuela. En tal sentido ¿cómo se relacionaría la investigación con la enseñanza y con los contenidos de la misma?

El maestro: un investigador de su propia práctica

Pensar al/a la maestro/a como sujeto de conocimiento –y pensarse a sí mismo como tal-, desde la perspectiva de la investigación de su propia

práctica, será el supuesto que anime la construcción de puntos de vista en torno a los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo caracterizar la propia práctica pedagógica?
- Desde las perspectivas teórica, epistemológica y metodológica, ¿es posible describir los rasgos de dicha práctica?
- ¿Es posible relacionar el proceso de formación inicial como maestro/a con el tipo de práctica pedagógica caracterizado?
- ¿Cuáles son las dificultades fundamentales detectadas en la práctica pedagógica?
- ¿Cuál o cuáles de dichas dificultades, ameritan ser problematizadas, para constituirse en orientadoras de un proceso de investigación?


1.1.2 Dos componentes fundamentales para el conocimiento matemático. Desde mediados del siglo XX, la idea de la matemática como un cuerpo estático y acabado de conocimientos, producido por la genialidad de algunas mentes, fue revaluada en dirección a reconocer que tales conocimientos han surgido, en las diferentes culturas, como respuesta a necesidades sociales (contar, medir, localizar, diseñar, explicar, jugar,...), y a su interdependencia con otras disciplinas. Así, mientras nuevos conceptos ganan vigencia, otros la pierden, y por tanto, es pertinente que la escuela también discuta acerca de la manera como las nuevas perspectivas, tanto en matemáticas como en didáctica, se reflejan en el currículo desarrollado con los niños.


Según Rico (1990), el conocimiento matemático que se genere en la escuela además de estar fundamentado en procesos de construcción, debe posibilitar tanto comprensión de los conceptos, formas de representación y uso del lenguaje matemático, como reconocimiento de su utilidad en contextos y situaciones específicas, y debe brindar elementos para explicar o sustentar


no sólo los procedimientos, sino también la pertinencia de las decisiones tomadas.

En este sentido, el conocimiento matemático no se considera un cúmulo de saberes rígidos y sin conexiones, por el contrario, en términos de Rico (1990), es concebido como una estructura configurada a partir de dos componentes fundamentales: la conceptual y la procedimental. Estas componentes no pueden pensarse una independiente de la otra, pues la historia muestra que la estructuración de un concepto como una identidad estática ha sido antecedida por largos períodos durante los cuales se ha concebido como un procedimiento; pero también en el trabajo matemático se reconoce la potencia de las estructuras conceptuales para seleccionar procedimientos adecuados al abordar problemas complejos.

1.1.2.1 Niveles del Campo Conceptual. Rico (1990) reconoce tres niveles del campo conceptual:

 *Hechos:* unidades de información que sirven como registro de acontecimientos, pero que pueden carecer de significado aisladamente.

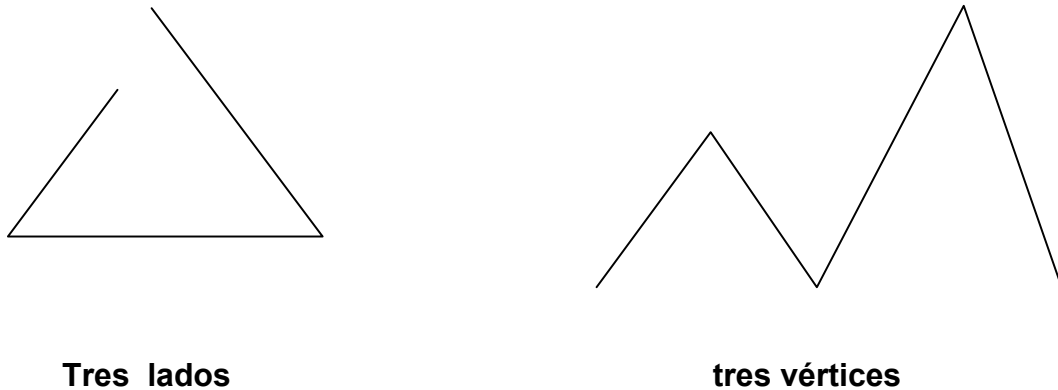
 *Conceptos:* serie de unidades de información conectadas entre sí por medio de relaciones.

 *Estructuras Conceptuales:* uniones o relaciones entre conceptos que constituyen conceptos de orden superior.

Una situación particular del currículo podría ilustrar los niveles antes descritos: es usual caracterizar un triángulo (como objeto matemático) a partir de enunciados como “tiene tres lados” o “tiene tres vértices”, los cuales podrían ser reconocidos por los niños en figuras que, aunque cumplen con

una de estas propiedades no son representaciones de un triángulo, como podrían ser (ver figura 1):

Figura 1. Hechos aislados sobre triángulos.



Así, dichos enunciados, como *hechos* aislados, no son suficientes para caracterizar ese objeto, en tanto no lo diferencian de otros. La construcción del *concepto* de triángulo requiere del reconocimiento de conexiones y relaciones entre diversos hechos: estar conformado por tres segmentos de recta, ser línea (poligonal) cerrada, tener tres vértices, tres ángulos, la longitud de cualquiera de sus lados no puede exceder la suma de las longitudes de los otros dos, además del reconocimiento de características que se conservan bajo transformaciones (traslaciones, giros, reflexiones, ampliaciones,...), entre otros. Y la *estructura conceptual* está dada, por ejemplo, por la posibilidad de construir criterios de clasificación para los triángulos (según la longitud de sus lados, o la amplitud de los ángulos), y del reconocimiento del triángulo como un tipo particular de polígonos: regulares, irregulares, convexos; así como, posteriormente, reconocer los criterios de semejanza y sus relaciones con los conceptos de la trigonometría.

1.1.2.2 Niveles del Campo Procedimental. Rico (1990) reconoce como niveles del campo procedimental:

☞ *Destrezas:* aritméticas, geométricas, métricas, gráficas y de representación que suponen el dominio de los hechos y tienen significado para quien las utiliza, y su ejecución debe darse al interior de una estructura conceptual.

☞ *Razonamientos en matemáticas:* enunciados, procesos para fundamentar una idea a partir de datos o premisas y reglas de inferencia.

☞ *Estrategias:* formas de responder a una determinada situación dentro de una estructura conceptual, como estimación, aproximación, construcción de tablas, simplificación de tareas difíciles, comprobación y establecimiento de conjeturas.

Generar este tipo de conocimiento matemático en la escuela, hace necesario pensar en el trabajo de aula que favorecería tal conocimiento, trabajo que no puede estar orientado por la memorización de definiciones y hechos aislados, sino por la construcción de estructuras conceptuales y de diversas estrategias.

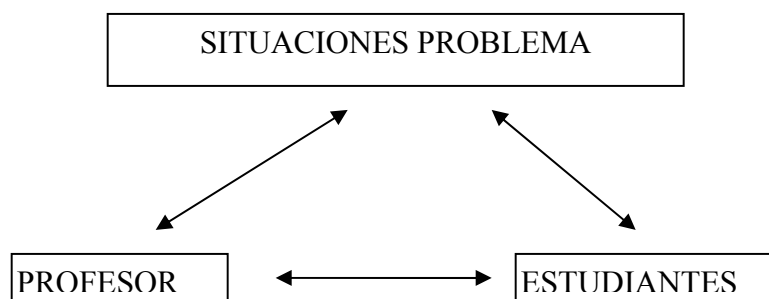
1.1.3 Las situaciones problema. Una situación problemática se define como un espacio de interrogantes que posibilite, tanto la conceptualización como la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas de tipo matemático.

Estar frente a una situación problemática significa encontrarse en estado de desequilibrio. Cada problema, teórico o práctico, pone de manifiesto la existencia de una laguna o de una perturbación. Resolver la situación problemática es lograr un nuevo estado de equilibrio.

Cuando se aborda el tema del diseño curricular surgen inquietudes relativas no sólo a las concepciones y saberes del profesor, a las concepciones y saberes de los estudiantes y al conocimiento escolar, sino también, a las dinámicas de aula o interacciones que entre profesor, estudiantes y saber se producen.

La atención explícita a estas interacciones, es considerada en la actualidad como un eje fundamental de la clase de matemáticas, en tanto es a partir de la discusión de los distintos puntos de vista, de los distintos argumentos (descriptivos, explicativos, comparativos o metafóricos, pruebas no formales,...), propuestas y contrapropuestas que se producen en el aula, como se construye colectivamente el saber y se legitima al otro como parte fundamental en el proceso de construcción de conocimiento y de competencias individuales. Por ello, en esta dinámica de construcción, el papel de la comunicación es fundamental para establecer consensos y construir criterios de validación colectivos ante el conocimiento que se pone en juego.

Este tipo de trabajo supone, por una parte, que el maestro cumple con un papel fundamental como mediador entre el razonamiento y los significados personales de los estudiantes y los razonamientos, argumentos y significados institucionales de las matemáticas como conocimiento cultural y, por otra, que es en la interacción de saberes, producida en el aula, donde se reconocen y se ubican las matemáticas como una actividad humana situada en un contexto; y que son precisamente estas interacciones entre situaciones problema-estudiantes-profesor, las que hacen aparecer la discusión sobre lo matemático, permitiendo construir criterios colectivos de validación (que se considera como solución para un problema, cuando dos soluciones son realmente distintas, reconocimiento de la validez de los argumentos y procedimientos,...) y normas sociales para la convivencia, discusión y concertación en el aula de clase (MEN, 2003.a).



Pero la pregunta fundamental es ¿cómo organizar toda esta postura epistemológica, metodológica y pedagógica en un diseño curricular coherente con sus fundamentos? Para dar respuesta a este interrogante se requiere realizar un análisis del enfoque direccionador de la clase, ya que es a partir de éste que se pueden “definir” o “redefinir” las temáticas a considerar a los ejes conceptuales fundamentales (conteo, medición, variación, aleatoriedad) que articularán el conocimiento matemático escolar, y por ende afinar algunos elementos metodológicos para que se produzcan las condiciones apropiadas para la consecución de los objetivos perseguidos.

1.2 FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA

1.2.1 Los lugares geométricos. El conjunto de todos los puntos es el espacio. Una figura geométrica es un conjunto de puntos gobernados por una o más condiciones geométricas restrictivas. Por lo tanto, una figura geométrica es un subconjunto del espacio.

En ocasiones, los matemáticos usan el término “lugar geométrico” para describir una figura geométrica.

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos, y sólo aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas.

Así, en lugar de usar las palabras “el conjunto de los puntos P tales que...”, podría decirse “el lugar geométrico de los puntos P tales que...”. Una circunferencia puede definirse como “el lugar geométrico” de los puntos en un plano a una distancia dada de un punto fijo del plano.

Así, para probar que una curva es un lugar geométrico, es necesario probar las dos condiciones siguientes:

1. Cualquier punto sobre la curva satisface la condición o conjunto de condiciones dadas.
2. (a) Todo punto que satisface la condición o conjunto de condiciones está sobre la curva; o bien
(b) Todo punto que no está sobre la curva no satisface la condición.

Un lugar geométrico puede consistir de uno o más puntos, curvas, superficies o combinaciones de ellos.

Para determinar un lugar geométrico es recomendable seguir los pasos siguientes:

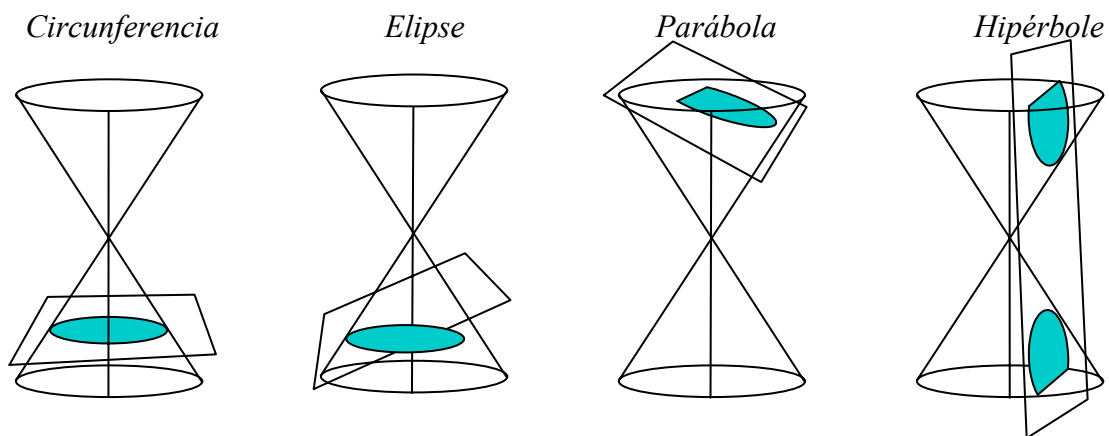
1. Localizar varios puntos que satisfagan las condiciones dadas.
2. Trazar una línea o varias líneas (rectas o curvas) que pasen por estos puntos.
3. Formar una conclusión referente al lugar geométrico y describir con exactitud la figura geométrica que represente la conclusión.
4. Probar la conclusión demostrando que la figura satisface las dos condiciones anteriores.

1.2.2 Secciones cónicas. Los antiguos griegos profundizaron en el estudio de las secciones cónicas y descubrieron propiedades que permitían definir

tales curvas en términos de puntos y rectas. Actualmente las cónicas son un medio importante para las investigaciones en el espacio exterior y para el análisis del comportamiento de las partículas atómicas (Centeno y Centeno, 1997).

Las secciones cónicas pueden obtenerse como la intersección de un cono circular recto de dos mantos con un plano (ver figura 2). Al variar la posición del plano, puede resultar una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola.

Figura 2. Secciones cónicas.

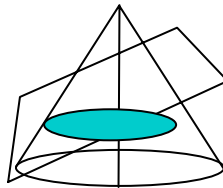


El término cónica hace referencia a su descripción. Cuando el plano pasa por el vértice del cono, se logran cónicas degradadas o degeneradas.

Existen muchas formas de estudiar las cónicas. Ellas pueden ser definidas ya sea en términos de intersección del cono con las diferentes posiciones del plano, o como lugares geométricos de puntos que cumplen ciertas propiedades. Ésta última definición es a la que se acoge la presente propuesta didáctica para estudiar en forma particular a la elipse.

1.2.3 La elipse. La elipse fue descubierta por un griego del siglo III a.c., Apolonio de Perga, cuando con un plano cortó oblicuamente un cono (ver figura 3). Descubierta en dicho siglo, la elipse permaneció como una curiosidad casi desconocida hasta principios del siglo XVII, cuando el astrónomo alemán Johan Kepler descubrió que los planetas se movían alrededor del sol en órbitas elípticas, y no en círculos (la curva perfecta para los antiguos). Kepler, al obtener este resultado espectacular, amplió los resultados de Apolonio, mostrando además cómo un hombre, estudiando el comportamiento de los astros, puede hacer aportes a la geometría, liberando simultáneamente a la humanidad de supersticiones (Contreras, 1998).

Figura 3. Elipse



1.2.3.1 Elementos de la elipse. A continuación, en la figura 4, 5 y 6, se representan algunos de los elementos importantes en el estudio de la elipse.

Figura 4. Ejes principales de la elipse.

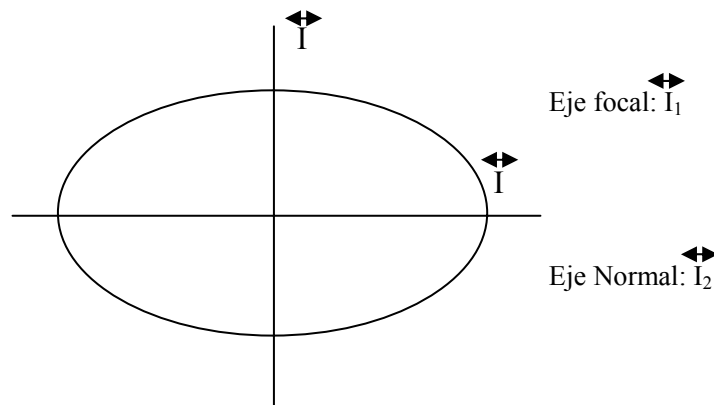
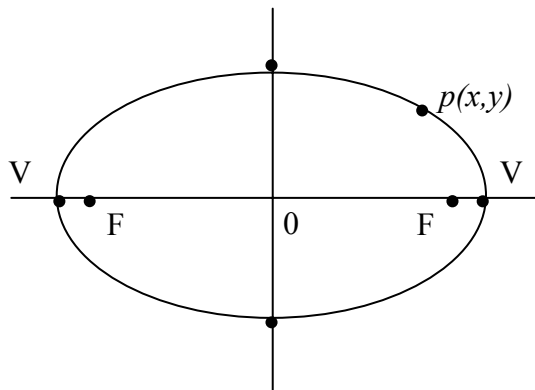
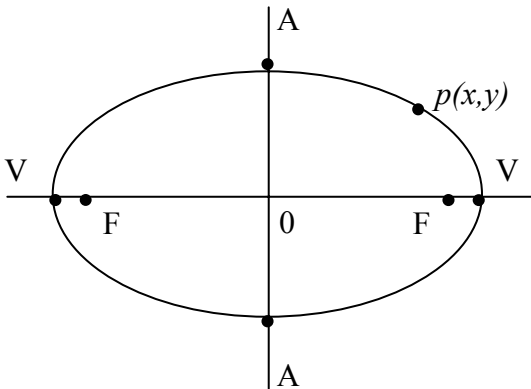


Figura 5. Puntos principales de la elipse.



Focos: F_1 y F_2
 Vértices: V_1 y V_2
 Centro: O
 Punto cualquiera: $p(x,y)$

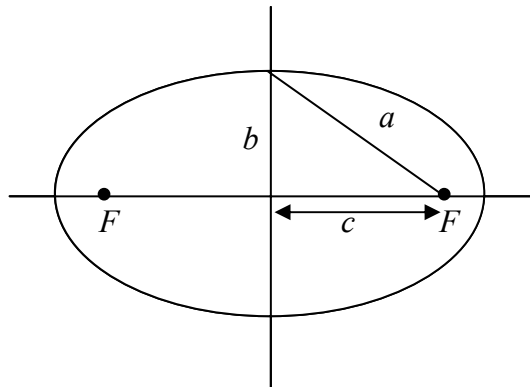
Figura 6. Segmentos de recta de la elipse.



Eje mayor: $\overline{(V_1 V_2)}$
 Eje menor: $\overline{(A_1 A_2)}$
 Distancia focal: $\overline{(OF_1 = OF_2)}$
 Eje focal: $\overline{(F_1 F_2)}$

1.2.3.2 Relación fundamental entre los ejes de la elipse

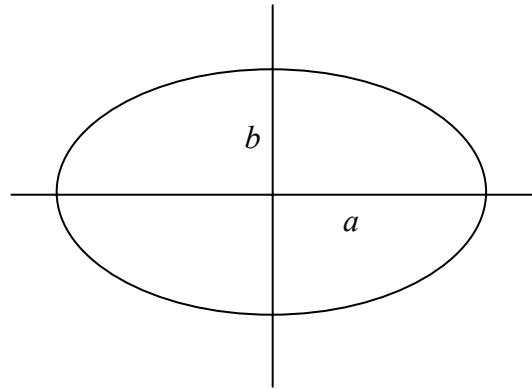
Figura 7. Relación fundamental entre los ejes de la elipse.



Como se observa en la figura 7, Si **a** es la longitud del semieje mayor, **b** es la longitud del semieje menor, **c** es la longitud del semieje focal, entonces: $a^2 = b^2 + c^2$

1.2.3.3 Superficie de la elipse

Figura 8. Semiejes mayor y menor de una elipse.



De la figura 8, si el semieje mayor de la elipse es **a** y el menor es **b**, se puede demostrar que su área vale πab (Larson, 1990, p.666).

1.2.3.4 Longitud de la elipse. Cuando la elipse no es muy aplanada (es decir, **a** y **b** no son demasiado diferentes), la fórmula $\pi (a + b)$ (utilizada en esta propuesta) da una aproximación bastante razonable de la longitud de una elipse pero, en general, una aproximación mucho mejor para hallar la longitud de una elipse, donde **a** y **b** pueden tener cualquier medida, es la que resulta de la fórmula:

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\vartheta)} d\vartheta \quad e = c/a \quad (\text{Larson, 1990, p.669})$$

2.2.4 Importancia de la elipse. Frecuentemente se usa la elipse para lograr efectos artísticos. A menudo se ven formas elípticas en los jardines, paseos, albercas, en lozas y muebles. En la construcción se usa el arco elíptico donde se desea lograr la belleza y los requerimientos de resistencia no son críticos. El arco elíptico se considera más bello que el arco parabólico.

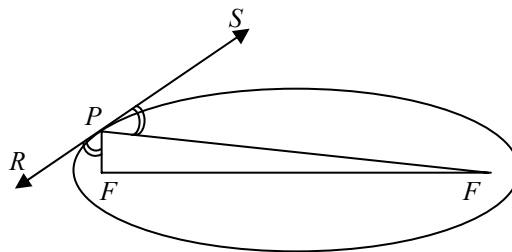
“En las máquinas se usan engranajes elípticos donde se requiere un avance lento y un retorno rápido (Hemmerling, 1998, p.362)”.

En 1609, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) descubrió –y publicó en su primer libro *Astronomía Nova*- que cada planeta en su período de traslación alrededor del sol describía una trayectoria en forma de elipse, con el sol en uno de los focos. Nuestro planeta Tierra, por ejemplo, en su viaje anual alrededor del Sol recorre una trayectoria elíptica con el Sol en uno de los focos. Por lo tanto, en las diferentes estaciones del año, la distancia del Sol a la Tierra variará. De modo semejante, la trayectoria de la Luna respecto a la Tierra es una elipse con la Tierra en uno de los focos. Las órbitas de los satélites de otros planetas también son elípticas. En la astronomía es esencial el conocimiento de las trayectorias (lugares geométricos) a lo largo de las cuales se mueven estos planetas y sus satélites. Los astrónomos pueden expresar estos movimientos mediante ecuaciones, predecir con un alto grado de exactitud cosas como los eclipses lunares y solares.

La elipse, como la parábola, tiene una propiedad geométrica que la hace útil para reflejar la luz y el sonido (ver figura 9). Dos rectas trazadas desde los focos F_1 y F_2 hacia cualquier punto P sobre la elipse formarán ángulos congruentes con la tangente a la curva en P , es decir, $\angle RPF_1 \cong \angle SPF_2$.

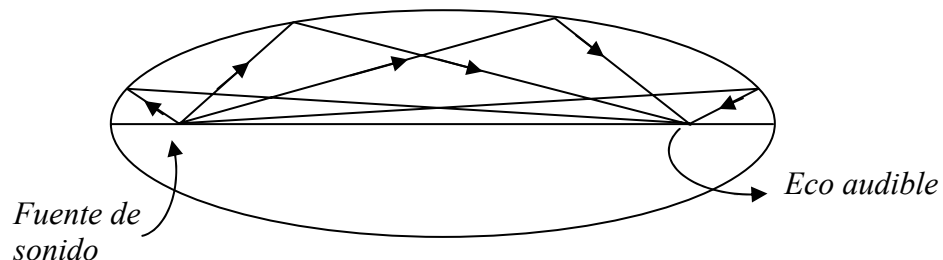
Debido a esta propiedad geométrica y la propiedad de las superficies reflectoras (Hemmerling, 1998.p.360), si se coloca una fuente de luz en cualquiera de los focos de una superficie elíptica, los rayos incidentes sobre la superficie se reflejarán hacia el otro foco. En realidad, cuando se usan reflectores elípticos, la superficie reflectora es la que se obtiene al hacer girar la elipse alrededor de la recta F_1F_2 . Esta superficie se denomina *elipsoide de revolución*.

Figura 9. Elipsoide de revolución.



Las ondas sonoras se reflejan en la misma forma que las ondas luminosas. Por lo tanto, si al techo de un cuarto se le da la forma de un semielipsoide (ver figura 10), un sonido débil que se produjera en uno de los focos se escucharía con claridad en el otro foco que puede estar a una distancia considerable. Generalmente el sonido no se escucha en los otros puntos. Locales construidos de esa manera se conocen como *galerías de los murmullos*. Ejemplos de galerías así se encuentran en la cúpula del Tabernáculo Mormón en la ciudad del Lago Salado (Utah) y en el Salón de las Estatuas en el Capitolio de Washington, D.C (Hemmerling,1998).

Figura 10. Galería de los murmullos.



2. METODOLOGÍA DE TRABAJO

Teniendo en cuenta que los docentes somos quienes asumimos el mejoramiento de las metodologías de enseñanza y la educación y perfeccionamiento de las que han propiciado buenos resultados de aprendizaje, investigamos (maestro como investigador de su propia práctica), nos documentamos, nos capacitamos de distintas maneras, creamos y ejercemos el acercamiento hacia el estudiante para estimular su trabajo, y valorarlo en su individualidad.

En este trabajo presento algunas pautas para aplicar métodos activos desarrollados a través de la investigación en el aula como metodología didáctica, para lograr desde el comienzo, la participación activa de los estudiantes, donde se les presenta una situación problema y con base a ella plantean sus propias preguntas, comunican sus ideas, las discuten y trabajan en grupos cooperativos (participación activa de los estudiantes).

Las actividades que se proponen a continuación tienen como objetivo estimular y animar al estudiante a desarrollar los conceptos básicos relacionados con la elipse; serán dirigidos mediante preguntas y órdenes adecuadas que conduzcan a la búsqueda de solución de las situaciones problemas planteadas. En estas acciones del estudiante respecto a la situación problema, la pregunta es el **lugar** de encuentro entre los saberes, la experiencia natural o la experiencia vivida y los conocimientos matemáticos, sus lógicas y razonamientos plausibles.

La pregunta en la clase de matemáticas debe ser entonces un elemento que permita problematizar (analizar pertinencia y validez, reconocer alcances y

limitaciones,...), complejizar (lo cual no significa complicar, sino favorecer el establecimiento de relaciones, de perspectivas diversas,...), y orientar el conocimiento en discusión; la pregunta en tanto permite comunicar los significados compartidos y no compartidos entre estudiantes y docente, no tiene que ser responsabilidad exclusiva del profesor.

A través de las preguntas que se formulen en la clase, puede darse la posibilidad de validación del saber, la generación y construcción de discursos que favorezcan el uso de distintas formas de argumentación. Además es a partir de las preguntas de sus estudiantes, como el profesor puede dar cuenta de los significados y los sentidos que ellos dan a los conocimientos que circulan en el aula, por lo cual, ésta se constituye también en una alternativa importante para la evaluación. Por lo tanto, es importante que durante el desarrollo de las presentes actividades el docente, con la observación en el aula y su experiencia profesional, pueda orientarlas y enriquecerlas, para facilitar un avance progresivo del aprendizaje, de tal manera que el desarrollo del tema (o temas) en cada una de ellas sea un recurso más de aprendizaje y no un contenido para memorizar.

Las actividades están distribuidas en cuatro sesiones así:

1) ACTIVIDADES PREVIAS (Determinación de las concepciones de los alumnos). Estas actividades le permiten al estudiante disminuir la tensión ante los nuevos temas y le crea expectativas en relación con lo que se va a estudiar. Al docente, le facilita información acerca del nivel previo de conocimientos de los estudiantes, lo que le permite organizar las actividades subsiguientes en cuanto al enfoque y la profundidad para adecuarlas al tiempo y estilo de aprendizaje del alumno.

Las actividades 1, 2 y 3 pertenecen a esta sesión.

2) ACTIVIDADES DE ENLACE. Con estas actividades se busca crear un espacio para que el alumno construya conocimientos y busque generar ambientes de discusión acerca de los temas tratados para establecer relaciones entre lo que ya sabe y el nuevo conocimiento, por medio de juegos, construcciones, experiencias con modelos de la vida diaria, etc.

La actividad 4 tiene este propósito.

3) ACTIVIDADES DE DESARROLLO DEL TEMA. El desarrollo de los temas mediante actividades escritas permite la distribución de los contenidos teniendo en cuenta la secuencia, el grado de dificultad y la profundidad de los mismos, para dar lugar a un mejor aprovechamiento del tiempo. El docente puede identificar con rapidez cuáles temas y en qué partes los alumnos presentan dificultades, a fin de programar oportunamente las actividades necesarias para superarlas; así mismo le facilita la orientación y corrección de los trabajos, logrando una mayor eficiencia a la atención individual del estudiante.

Las actividades 5, 6 y 7 tienen este propósito.

4) ACTIVIDADES DE PREPARACIÓN PARA EL SIGUIENTE TEMA. Estas actividades buscan preparar al alumno en los conceptos necesarios para adquirir nuevos conocimientos.

La actividad 8 pertenece a esta sesión.

No se pretende que el estudiante alcance el conocimiento con solo aplicar la actividad, es necesario un acompañamiento por parte del docente.

Al final de cada actividad se realizarán debates en clase permitiéndole al estudiante clarificar las dudas, reafirmar lo aprendido y corregir sus

errores; y a vez practique los valores de respeto, solidaridad, tolerancia, liderazgo, participación y desarrolle habilidades de expresión oral y escrita en el sentido crítico como posición positiva de la vida en sociedad.

Cabe resaltar que, el estudiante debe compartir sus saberes y opiniones con el docente y sus compañeros, de una manera continua a lo largo de todo el proceso de aprendizaje. Esto se convierte en un instrumento de evaluación, ya que permite al docente conocer el nivel de aprendizaje que están logrando sus estudiantes y la eficacia de las actividades propuestas.

Por último se presenta una actividad de prueba escrita (actividad 9), para que permita conocer qué tanto alcanzaron los estudiantes los objetivos propuestos. Pero cabe anotar, que la evaluación del trabajo de aula no se restringe a los resultados de pruebas escritas, pues incluye la valoración de las actuaciones de los estudiantes en las actividades realizadas, y esta evaluación posibilita reconocer no sólo la corrección matemática de las respuestas y conclusiones, sino también diversas interpretaciones de conceptos, procesos desarrollados, procedimientos y estrategias utilizadas al abordar situaciones específicas, formas de argumentación y de razonamientos implícitos en la interacción entre estudiantes, o, entre éstos y el profesor.

3. SUSTENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Teniendo en cuenta las dos componentes fundamentales para el conocimiento matemático (Rico, 1990), la relación profesor-situaciones problema-estudiantes y la importancia de la pregunta en la clase de matemáticas, se diseñaron las siguientes actividades didácticas, las cuales fueron aplicadas a 30 estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria “Vicente Hondarza” de Morales (sur de Bolívar), conformada por 9 actividades divididas en varias sesiones así:

Actividades previas (actividades 1, 2 y 3), actividad de enlace (actividad 4), actividades de desarrollo del tema (actividad 5, 6 y 7), actividades de preparación para el tema siguiente (actividad 8) y actividad de prueba escrita (actividad 9).

Para la utilización de materiales (o recursos didácticos) en estas actividades, no se ha perdido de vista el trabajo práctico manual, que de ninguna manera ha de considerarse como un aspecto secundario en las actividades de tipo espacial. El contemplar un dibujo, por claro que sea, nunca puede sustituir al proceso de construir y manejar un modelo o mover un mecanismo articulado. Sin embargo, no se necesita nada muy complicado: hojas de bloc (o cartulina), tijeras, compás, regla, hilo o cuerda, dos estacas pequeñas y prácticamente nada más.

Las respuestas presentadas en el presente trabajo son las que dieron algunos estudiantes por escrito (respuestas en las fotocopias) u orales (obtenidas en el diálogo exploratorio, y escritas por el profesor que me colaboró en la toma de notas de clase) en cada una de las actividades.

3.1 ACTIVIDADES PREVIAS

Para el diseño de cada una de estas tres actividades que pertenecen a esta sesión, tomé algunos problemas sobre lugares geométricos del Libro Geometría Elemental de Hemmerling (1998), los cuáles inicié con una situación problema adaptándolos, para su desarrollo, a una serie de preguntas que permitieran alcanzar el objetivo propuesto por cada uno de ellos (ver anexos).

La finalidad de estas actividades previas es que el alumno se familiarice, reconozca y describa curvas y lugares geométricos que hasta el momento serán resueltos con rectas y circunferencias.

Para el desarrollo de cada una de estas actividades previas, se realizó inicialmente un diálogo exploratorio partiendo de la situación problema planteada en el punto N°1 de cada actividad (al mismo tiempo, un profesor de matemáticas me colaboró en la toma de notas de clase sobre lo que los estudiantes opinaron tratando de resolver la situación problema planteada), con el objetivo de saber la capacidad de análisis e interpretación con que cuentan los estudiantes; además se les comunicó que cada actividad la resolvieran individualmente; también se les aclaró que la profesora actuaría como la moderadora de todo el grupo para canalizar las discusiones que se presentaran en cada subgrupo y que no se les daría respuesta alguna sino, que se limitaría a orientarlos en la selección y aplicación de sus estrategias y al final de cada actividad se haría una socialización, una confrontación y argumentación para exponer respetuosamente sus ideas y estrategias (y a su vez, respetar a las de los demás) para resolver cada una de las preguntas planteadas en cada una de ellas, con la finalidad de corregir errores, orientarlos con la superación de bloqueos, fortalecer y afianzar los aciertos.

Para motivar la participación, se les mencionó que en la solución de una situación problema el estudiante debe de disponer de buena voluntad, tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de dicha situación o problema, debe usar representaciones, estrategias cognitivas o utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entenderlo; no importa cuantas veces se equivoque, lo importante es que sea perseverante y que le dedique tiempo a la búsqueda de la solución; por lo tanto se hace necesario romper el esquema de la enseñanza tradicional (donde el maestro resolvía el problema) y que el maestro cumpla un papel fundamental como mediador entre el razonamiento y los significados personales de los estudiantes.

3.1.1 Actividad N_o 1 (ver anexo 1)

La profesora comenzó la actividad escribiendo en el tablero la siguiente situación problema: ¿Qué figura geométrica forma el conjunto de todos los puntos que están a igual distancia de un punto dado (aparece como punto No 1 en la actividad)?

En los primeros minutos algunos alumnos se mostraron nerviosos al leer la situación problema; puesto que no sabían que responder; en este instante se les aclaró que lo que ellos opinaran o sugirieran para la solución del problema no se tendría en cuenta para asignar una nota, así que podían a su vez preguntar acerca de las dudas que les generó dicha situación.

A continuación se presentan algunos apartes del diálogo que ocurrió entre los alumnos y la profesora.

Adriana: “¿Qué es una figura geométrica?”

Carolina: “como el triángulo, el cuadrado, el rectángulo...”

Amay, saca una hoja y dice: “tomemos un punto para ver que pasa”

La mayoría de los estudiantes toman una hoja.

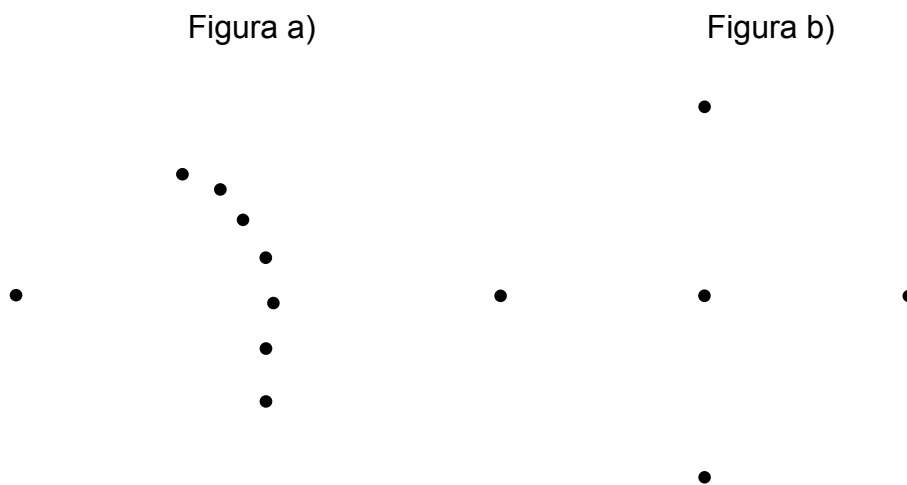
Sirley: “¿qué distancia tomamos?”

Amay: “tomemos cualquiera... tomemos 3 cm...”

Pasados un par de minutos, Jorge pregunta: “¿Profesora, cuántos puntos en total tomamos a esa distancia?”

Profesora: “todos los que pueda hallar”

Algunos estudiantes hicieron lo siguiente:



Profesora: ¿qué figura geométrica se formó?

Miguel: “una cantidad de puntos”

Jazmany: “una serie de puntos a igual distancia de otro punto”

Como los estudiantes no relacionaron los puntos obtenidos con una curva continua, la profesora entregó la fotocopia de la actividad para dar comienzo a su desarrollo (pasamos al punto No 2 de la actividad).

2. Dibuja el conjunto de los puntos que se encuentran a 5cm de un punto dado O.

Algunos estudiantes tomaron puntos muy cercanos el uno del otro, otros tomaron puntos bien distanciados, pero solo tomaron unos cuantos puntos.

La mayoría de los alumnos, a partir del punto fijo que aparece en la hoja de la actividad, tomaron una regla y lápiz y fueron dibujando los puntos que se encontraron a 5cm del punto O (ver foto 1).



Otros alumnos no lo hicieron con regla, sino que tomaron un hilo (o pita) con la medida pedida y procedieron a ubicar los puntos (ver foto 2).



3. Enumera los puntos en la forma siguiente $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$, que se encuentran a 5cm de O.

Los estudiantes nombraron los puntos con las letras correspondientes en la figura obtenida.

4. ¿Cuántos puntos ($P = P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$) pudistes encontrar?

Cinco estudiantes respondieron al igual que Miguel: *“Ocho puntos”*

Siete estudiantes respondieron al igual que Dioselina: *“Doce puntos”*

Diez estudiantes respondieron al igual que Luz Einys: *“muchos puntos”*

Nueve alumnos respondieron al igual que Carolina: *“Infinitos puntos”*

Emelis: *“Por más puntos que ubiquemos, siempre vamos a encontrar otros puntos que también se encuentran a 5cm, por lo tanto son infinitos”*

5. Traza una curva continua que pase por dichos puntos (huella de P).

Algunos estudiantes tomaron un hilo y apoyando un dedo sobre uno de los extremos del hilo trazaron la curva, otros lo hicieron a mano alzada y el resto utilizó compás.

6. ¿Qué forma tiene dicha curva?

Seis alumnos respondieron al igual que Adriana: *“Es un círculo”*

Veinticuatro alumnos respondieron al igual que Carolina: *“Es una circunferencia”*

Profesora: *“Entonces qué se obtuvo, ¿un círculo o una circunferencia?”*

Los alumnos en general coincidieron que se trataba de una circunferencia y Carolina aclaró: *“es una circunferencia, porque se tiene solo en cuenta la curva que está formada por infinitos puntos, más no su interior”*.

La profesora aprovechó la discusión para aclarar la diferencia entre círculo y circunferencia.

Continuando con la actividad, los estudiantes dibujaron varias circunferencias teniendo en cuenta las siguientes condiciones dadas en el siguiente punto.

7. Realiza el anterior procedimiento pero ahora para una distancia de 2,5cm; luego para 8cm.

Los alumnos tomaron de nuevo el hilo, otros el compás y las realizaron sin la menor dificultad.

8. ¿Qué nombre recibe esta distancia fija (5cm, 2,5cm, 8cm...) para las anteriores figuras?

Ocho alumnos respondieron al igual que Shirley: *“diámetro”*

Veintidos estudiantes respondieron al igual que Amay: *“ se llama radio”*

Profesora: *¿Cuál es la diferencia entre diámetro y radio?*

Jhon: *“el diámetro es el doble del radio”*

9. ¿Qué puedes concluir? Responde la pregunta inicial.

Sebastián: *“Que todos los puntos P pueden ser infinito en la figura geométrica anterior”*

Adriana: *“que la forma que tiene la circunferencia es de igual distancia”*

Sirlieth: *“que al unir los puntos distantes de 5cm del punto O llamado centro se van hallando muchos mas puntos”*

Luz Einnys: *“Que al unir los puntos distante a 5cm de radio al centro se halló una circunferencia”*

Victor: *“los puntos que están a igual distancia de un punto dado forman una circunferencia”*

Respuestas similares se obtuvieron de los demás alumnos.

10. Ahora, utilizaremos los términos *“lugar geométrico”* para describir una figura geométrica. Así, en lugar de usar las palabras “el conjunto de los puntos P tales que...”, podemos decir “el lugar geométrico de los puntos P tales que...”. Trata de definir la circunferencia en términos de lugar geométrico.

Carolina dijo: *“Profesora, solo se va a cambiar la palabra conjunto por lugar geométrico”*

Los alumnos dieron las siguientes definiciones:

Oscar: *“Una circunferencia es el lugar geométrico formado por los puntos dados son infinitos y los puntos dados tienen la misma distancia al punto O”*

Luz Einys: *“Una circunferencia es el lugar geométrico que resulta al unir los puntos distante a 5cm al centro”*

Yaider: *“Una circunferencia es el lugar geométrico formado por unos puntos de igual distancia partiendo de un punto céntrico”*

Sebastián: *“una circunferencia es el lugar geométrico que de unos puntos dados, tienen igual distancia”*

Victor: *Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de un punto dado”*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

Teniendo en cuenta las respuestas de los alumnos se finalizó la actividad con la siguiente definición: ***una circunferencia es el lugar geométrico de***

todos los puntos, que están a una misma distancia de un punto fijo llamado CENTRO.

3.1.1.1 Análisis de la actividad N° 1. En cuanto a las preguntas que se formularon en la actividad No 1 se analizó lo siguiente:

- ✓ Algunos alumnos identificaron la circunferencia sólo como la curva que desde preescolar les habían inculcado, pero ignoraban que dicha curva está compuesta por infinitos puntos. Esto se observó cuando en el diálogo exploratorio inicial se les preguntó: ¿qué figura geométrica se formó? Y algunos respondieron: “muchos puntos”, “una serie de puntos”; pero no los relacionaron con la circunferencia.
- ✓ Los alumnos conocían, en general, los elementos de una circunferencia: centro, diámetro y radio, sin embargo no conocían la relación que caracteriza la circunferencia (esto se evidenció cuando se les pidió que resolvieran la situación planteada en el punto No 1).
- ✓ A la mayoría de los alumnos se les dificultó traducir la situación planteada inicialmente porque en ella se les preguntó en forma general la propiedad que caracteriza a la elipse; por ejemplo cuando se les dijo: tomen los puntos que están a *“igual distancia”*, inmediatamente ellos preguntan *¿qué distancia tomamos?*, no comprenden la información de que pueden tomar cualquier distancia. Pero en cambio, cuando se les señala un punto específico *“el punto O”* para que a partir de éste tomen una distancia determinada, vemos que resuelven la actividad sin la menor dificultad.
- ✓ Los alumnos establecieron diferencias entre círculo y circunferencia, al respecto en el punto No 6, Carolina respondió: *“es una circunferencia,*

porque se tiene solo en cuenta la curva que está formada por infinitos puntos, más no su interior”.

- ✓ Otra dificultad detectada fue el paso de un conjunto finito de puntos a una curva cerrada (ver figuras a y b).
- ✓ Los alumnos en general presentaron dificultades con la redacción y la ortografía. El alumno expresa lo que está viendo pero le cuesta organizar sus ideas para plasmarlas en un papel. Esto se ve reflejado más que todo al escribir las conclusiones de la respectiva actividad.
- ✓ Los alumnos mostraron una buena disposición durante la realización de la actividad.

3.1.2 Actividad N° 2 (ver anexo 2). Para dar inicio al diálogo exploratorio, la profesora escribió en el tablero la siguiente situación problema: **¿Cuál es el lugar geométrico del centro de una rueda que se mueve a lo largo de un piso horizontal** (punto No1 en la actividad)?

Los alumnos no respondieron, tal vez no entendieron la pregunta. Entonces se les formuló de la siguiente manera:

Profesora: *“Cambiemos los términos “lugar geométrico” por “figura geométrica que describe”, entonces ¿Qué figura describe el centro de una rueda que se mueve a lo largo de un piso horizontal?”*

Dos alumnos respondieron al igual que Sebastián: *“Se forma una espiral porque se mueve así (y mueve el dedo en forma de espiral)”*

Profesora: *“Sebastián está describiendo el movimiento de la rueda más no el movimiento del punto centro de la misma. ¿ Alguien más quiere opinar al respecto?”*

Pasados un par de minutos, ninguno responde.

Profesora: *“Adriana, entre la bicicleta (la mayoría de los niños llegan al colegio en bicicleta) que usted trajo y desplácela por el salón (ver foto 3)”*



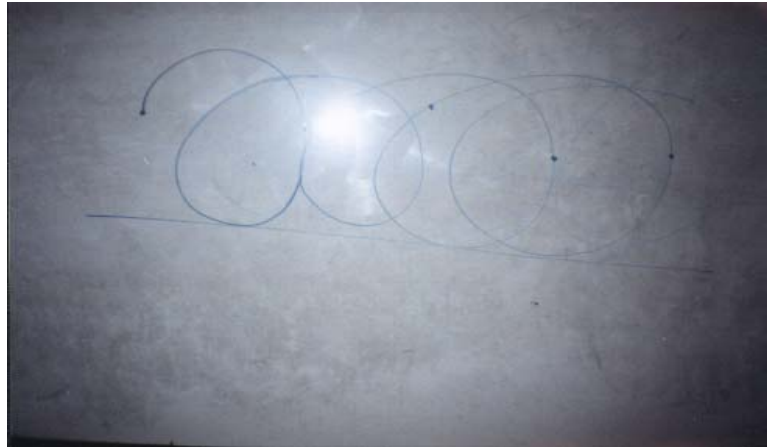
¿En qué se asemeja esta situación a la planteada inicialmente?

Jorge: *“Es la misma, lo que pasa es que solamente tenemos que mirar el comportamiento de una sola rueda respecto al piso”.*

Profesora: *“¿Quién pasa al tablero y trata de dibujar el movimiento realizado por el centro de la rueda delantera?”*

Miguel se dirige al tablero y realiza el dibujo mostrado en la siguiente foto:

Figura 11. Trazo realizado por alumno.



Profesora: *“Ahora, ¿si pueden responder la pregunta inicial?”*

Los alumnos no asociaron los puntos con una línea continua. Entonces la profesora procedió a entregar el material fotocopiado (para comenzar con el punto No 2), de tal modo que siguieran con la metodología que se les propuso inicialmente; también los invitó a tomar conciencia sobre la responsabilidad del trabajo.

2. ¿Qué figura geométrica forma el conjunto de todos los puntos que representan las posiciones del centro a medida que avanza la rueda?

Después de observar el dibujo realizado por Miguel en el tablero, y de tener en cuenta en que dirección se desplaza el centro de la rueda, todos coincidieron que se trataba de una línea recta.

3. ¿Qué relación existe entre esta figura geométrica y la línea recta formada por el piso?

Adriana: *“es igual y conservan la paralela”*

Sirlieth: *“La misma distancia, son líneas paralelas”*

Emelis: *“La distancia es la misma que hay desde el punto cero hasta uno de los puntos dados. Su relación es que son paralelas”*

Carolina: *“conservan la misma distancia. La relación que existe es que ambas son paralelas”*

Respuestas similares se obtuvieron de los demás estudiantes.

4. ¿Qué puedes concluir? Responde la pregunta inicial.

Oscar: *“Que el numero de vueltas va a ser infinito mediante una línea recta”*

Dioselina: *“Que al formarse una línea recta pasa por puntos infinitos y que hay una misma distancia entre ellos .El lugar geométrico es una línea recta”*

Mirleydis: *“Podemos concluir que la línea recta también está formada por infinitos puntos. En este caso el lugar geométrico forma una línea recta pero también puede ser curva. La línea recta formada tiene una distancia igual con el piso. Luego, el lugar geométrico es una línea recta paralelas”.*

Carolina: *“se obtiene una línea recta que es paralela al piso, la cual está formada por infinitos puntos que van a tener la misma distancia”*

Emelis: *“El lugar geométrico formado por el centro de una rueda que se mueve a lo largo de un piso horizontal es una línea recta paralela a este mismo”*

Respuestas similares se obtuvieron de los demás alumnos.

Teniendo en cuenta las diversas respuestas de los estudiantes, la profesora finalizó con la respuesta de la pregunta inicial: **El lugar geométrico formado por el centro de una rueda que se mueve a lo largo de un piso horizontal es una línea recta paralela al piso.**

3.1.2.1 Análisis de la actividad No 2

- ✓ A pesar de que al finalizar la primera actividad se hizo la respectiva aclaración sobre los lugares geométricos, los alumnos presentaron dificultades con el uso de la expresión al principio de la segunda actividad. Sin embargo, cuando se les dijo que cambiaran los términos de “lugar geométrico” por la “figura geométrica que describe” se facilitaron un poco las cosas y empezaron a opinar.
- ✓ Los alumnos presentaron dificultades para modelar la realidad. Por ejemplo, en la situación problema planteada al inicio se les pidió que observen cómo se desplaza el centro de una rueda a medida que ésta avanza y la mayoría de los alumnos se mostraron inseguros para asociar el problema planteado con una situación de la vida diaria para poder analizarlo. Esperaron a que se les sugiriera la situación para ellos poder empezar a opinar. A pesar de que se les ha enfatizado de que, para resolver cualquier situación cotidiana siempre están intrínsecas las matemáticas; pero parece que se les dificulta hacer el proceso inverso.
- ✓ Llama la atención el especial énfasis que los estudiantes le dan a la idea de los infinitos puntos que tiene la recta, puesto que ellos la identifican por la forma que tiene y no por los puntos que la componen.
- ✓ Algunos alumnos no analizaron el movimiento del centro de la rueda sino que analizaron el movimiento de un punto sobre el borde de la misma, por eso dijeron que el punto seguía la trayectoria en forma de espiral. Y los alumnos que tuvieron en cuenta el movimiento del centro de la rueda dijeron que se trataba de una línea recta, pero después de observar la figura hecha por Miguel en el tablero; puesto que cuando se hizo el diálogo exploratorio tuvieron dificultad para verlo.

- ✓ Inversamente se presenta la confrontación entre lo discreto y lo continuo. Los alumnos asociaron sin dificultad la sucesión de puntos dejada por el centro de la rueda al ser desplazada con la línea recta.
- ✓ La mayoría de los estudiantes identifican las rectas paralelas como: “rectas que tienen distancias iguales” o “rectas que conservan la misma distancia” pero ninguno habla de paralelas como “rectas que no se cortan”.
- ✓ Los alumnos se mostraron muy solidarios entre sí en cuanto a compartir opiniones y concedieron la razón al que los convenció.

3.1.3 Actividad N° 3. Con el ánimo de fomentar el diálogo exploratorio, la profesora planteó en el tablero la siguiente situación problema: **¿cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de dos puntos dados** (punto No 1 de la actividad)?.

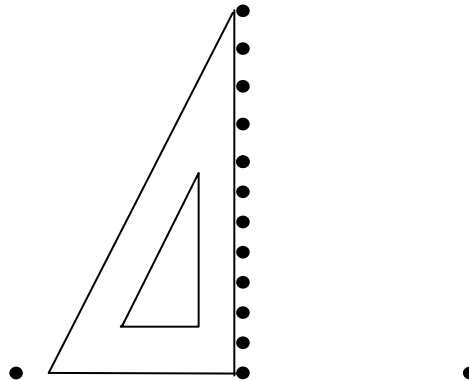
Al respecto, algunos alumnos sugirieron:

Emelis: *“Seño, tomamos dos puntos cualesquiera y buscamos los puntos que están a igual distancia de esos dos puntos”*

Profesora: *“Emelis, pase al tablero y nos dibuja lo que acaba de decir”*

Emelis realizó lo siguiente: ubicó dos puntos, tomó la distancia con una regla y encontró el punto medio, a partir de éste ubicó una escuadra formando un ángulo de 90^0 y trazó varios puntos hacia arriba siguiendo la perpendicular (ver figura 12); luego midió la distancia de varios puntos hallados y verificó que estaban a igual distancia de los dos puntos tomados inicialmente. Esto se le facilitó debido a que ellos estudian dibujo técnico.

Figura 12. Trazo realizado por una alumna por medio de una escuadra.



Emelis: *“¿Sólo tomó los puntos que están arriba?”*.

Profesora: *“Dibuje todos los que pueda, tanto arriba como abajo”*.

Pasados un par de minutos Johan dijo: *“Se obtuvo una línea recta”*.

Profesora: *“¿Qué condiciones cumple esta recta?”*.

Efraín: *“forma una recta vertical”*.

Profesora: *“¿Qué más podemos decir de ella?”*.

Ninguno respondió... La profesora procedió a entregar el material fotocopiado para continuar con el punto No 2 de la actividad.

2. Observa los puntos A y B.

A •

• B

3. Toma un punto P en una posición aproximadamente equidistante de A y B.

Miguel: “¿Qué es equidistante?”

Emelis: “que está a la misma distancia”

Algunas parejas toman el punto P en la parte superior de la hoja, otras parejas lo hacen en la parte inferior ya sea utilizando una regla o un pedazo de hilo.

4. Ahora “mueva” el punto P (deje huella con el lápiz) poco a poco procurando que la distancia de P a A y a B sean iguales (ver foto 4).



Algunas parejas lo hicieron con regla, otras a mano alzada.

5. ¿Qué forma tiene la huella de P?

Myleidis: “forma una línea recta”.

Efraín: “forma una recta vertical”.

6. ¿Podrían describir exactamente su posición con respecto al segmento AB? ¿Por cuál punto exactamente del segmento AB pasa dicha figura?

Mileydis: *“Si porque me guio por la distancia al moverlo”.*

Victor: *“si, porque siempre tiene que pasar por un punto medio y a igual distancia de A y B”.*

Obed: *“Una linea recta perpendicular y con respecto a A y B es equidistante”.*

Emelis: *“Si, porque solo forma una línea recta que pasa por el punto medio y siempre que se mueva debe ser en la misma dirección”.*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

La profesora sugirió: *“Realicen el anterior procedimiento, pero ahora A y B se encuentran en la siguiente posición (en una hoja aparte)”.*

• B

• A

Los alumnos hicieron el mismo procedimiento realizado en los puntos anteriores y llegaron a las mismas conclusiones anotadas anteriormente. Aunque a cuatro estudiantes se le dificultó tomar el punto P a la misma distancia de A y B, y no estaban convencidos de que la rectas obtenidas fueran perpendiculares

7. ¿Qué nombre recibe esta figura geométrica formada por la huella de P?

Victor: “recibe el nombre de recta perpendicular que pasa por el punto medio que se llama mediatriz”.

Yaider: “una linea mediatriz porque pasa por el punto céntrico y es perpendicular”.

Carolina: “Mediatriz porque es perpendicular a los puntos A y B”.

Emelis: “Recibe el nombre de Mediatriz, ya que es perpendicular y forma un ángulo de 90° . El lugar geométrico es una mediatriz”.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

Teniendo en cuenta las diferentes respuestas se finalizó con la respuesta de la pregunta inicial: **el lugar geométrico formado por todos los puntos que están a igual distancia de dos puntos dados se llama MEDIATRIZ, es decir una línea recta perpendicular al segmento AB (en este caso) y que pasa por su punto medio.**

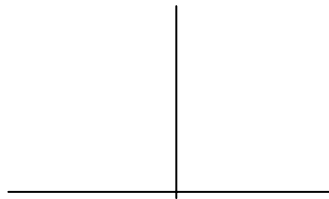
3.1.3.1 Análisis de la actividad N° 3

Los alumnos para una situación dada en forma general no analizan varias situaciones particulares para comprobarla; sólo se conforman con una, por ejemplo, cuando se les dice tome a A y a B en la siguiente posición (horizontal); realizan la actividad pero no proponen tomar otras posiciones (vertical, oblicua,...) para dichos puntos para ver si se sigue cumpliendo lo que hallaron.

El concepto de mediatriz no lo manejaban correctamente, puesto que sólo lo asociaban con ser línea recta y ser perpendicular dejando de lado la condición de tener que pasar por el punto medio del segmento dado. Pero

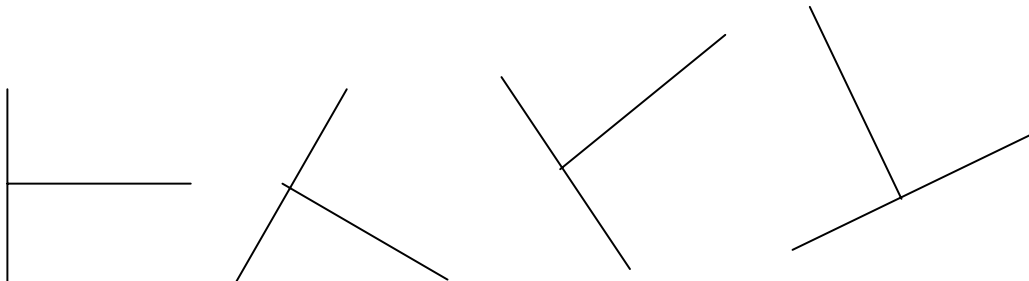
también se pudo observar que algunos alumnos cuando se sugirió tomar los puntos A y B en otra posición diferente a la dada inicialmente, dudaron respecto a la perpendicularidad del segmento AB y la línea recta, esto debido a que a veces algunos docentes cuando introducimos el concepto de rectas perpendiculares le presentamos al estudiante en la mayoría de los casos esta posición:

Figura 13. Rectas perpendiculares.



Y obviamos otras posiciones como:

Figura 14. Rectas perpendiculares en diferentes posiciones.



3.1.4 Conclusiones de las actividades previas. Respecto a las actividades previas afirmo que los estudiantes se sintieron a gusto buscando la solución a las situaciones planteadas, puesto que participaron activamente en la socialización que se hizo al final de cada actividad para aclarar las dudas, corregir errores y reafirmar aciertos.

La mayoría de los estudiantes presentan dificultad para describir la figura geométrica que representa al lugar geométrico, es decir, qué figura

geométrica describe la trayectoria dejada por un punto; puesto que dichas descripciones deben ser precisas y exactas. La dificultad radica en trazar una recta continua que una todos los puntos trazados y que cumplen la condición dada. Este paso de lo discreto a lo continuo (pasar de una sucesión de puntos a una línea recta o curva) aunque no lo exploremos directamente, puede dificultarse por la imposibilidad que representa probar que todos los puntos incorporados cumplan la condición exigida. Tal vez situaciones como éstas sean un motivo para realizar una demostración que ayuda a visualizar que cualquier punto del lugar geométrico satisface la condición dada.

Algunos estudiantes manejan **hechos** aislados de los conceptos matemáticos, es el caso cuando el lugar geométrico hallado en la actividad 3 fue una MEDIATRIZ, que sólo la asociaron con la perpendicularidad, pero no se percataron que además de ser perpendicular debe pasar exactamente por el punto medio.

Los alumnos no presentaron dificultad para identificar rectas paralelas (actividad No 2), puesto que lo aplicaron como rectas que conservan la misma distancia y no como rectas que nunca se cortan.

Algunos estudiantes dieron respuestas incoherentes e incompletas a las preguntas formuladas. Así como también se notó la mala ortografía y la falta de redacción puesto que les cuesta trabajo organizar sus ideas.

Lo importante es que la mayoría de los estudiantes muestran buena disposición para aprender y para corregir los errores.

Las actividades previas se diseñaron con el propósito de que los estudiantes a través de situaciones problemas se familiarizaran, reconocieran y describieran curvas y lugares geométricos como rectas y circunferencias.

3.2 ACTIVIDAD DE ENLACE

Para el diseño de esta actividad tuve en cuenta el problema presentado en la página 2 del libro Actividades Matemáticas de Brian Bolt (1989); el cual nos presenta la elipse como una circunferencia “estirada” (proporcionalmente) en una dirección dada. Pero lo desarrollé a través de una serie de preguntas para que el estudiante sea quien construya por sí solo dicho lugar geométrico, es decir la elipse, y a la vez aplique otros conceptos matemáticos relacionados con el mismo como su longitud y el área que encierra.

Esta actividad tiene el propósito de que los alumnos activen los conocimientos, los relacionen con los presentes, los comuniquen y los discutan durante el desarrollo de la actividad y en la socialización realizada al final cuando entreguen el material fotocopiado.

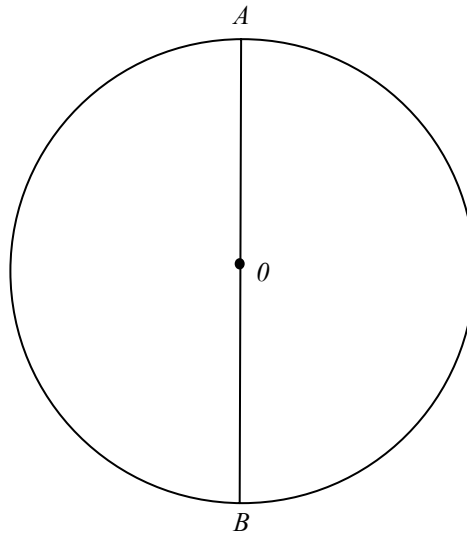
3.2.1 Actividad N° 4 (ver anexo 4). Para el desarrollo de esta actividad de enlace, se entregó a los alumnos el material de la actividad fotocopiado (de 8:00-9:30 a.m) y se les comunicó que la actividad la resolvieran en parejas.

Una vez entregadas las fotocopias de la actividad, algunos estudiantes preguntaron, ¿cómo se desarrolla esto?, ¿en cuál hoja se contesta?, inmediatamente los invité a que siguieran las instrucciones dadas en las fotocopias, sin embargo minutos después vi la necesidad de aclarar la forma o el orden como debían nombrar los puntos de intersección de cada recta paralela con la circunferencia.

Minutos después, los alumnos se concentraron en el desarrollo de la actividad y al final se obtuvo lo siguiente (un profesor de matemáticas me colaboró en la toma de las notas de clase):

1. Traza una circunferencia de 5cm de radio en una hoja de papel y traza uno de sus diámetros, como indica la figura en el tablero (ver figura 4).

Figura 15. Círculo de diámetro AB.



2. Luego dibuja el diámetro COD perpendicular al segmento AB y prolongalo por los dos extremos hasta donde más puedas.

Los alumnos lo hicieron en sin dificultad.

3. Ahora traza un haz de rectas paralelas al segmento CD prolongado y separadas unas de otras por 1 cm. Nombra los puntos de intersección de cada recta paralela con la circunferencia así: Del centro hacia arriba con $C_1, D_1; P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2; \dots$, y hacia abajo con $E_1, E_2; F_1, F_2; G_1, G_2; \dots$, y así sucesivamente.

Los alumnos enumeraron los puntos de intersección de cada recta paralela con la circunferencia utilizando las letras pedidas.

4. Sobre la figura que has obtenido puedes “estirar” la circunferencia hasta duplicar su anchura en la dirección de cada una de las rectas paralelas, tomando puntos como los $C_1', D_1'; P_1', P_2'; Q_1', Q_2'; \dots$ cuya distancia al diámetro AB es el doble que la de los $C_1, D_1; P_1, P_2; Q_1, Q_2; \dots$, respectivamente.

Los alumnos utilizaron una regla para duplicar cada uno de los segmentos dibujados.

5. Une los puntos C_1', P_1', Q_1' , etc; por una curva continua y obtendrás una nueva figura. ¿Sabes cómo se llama este lugar geométrico?

Los estudiantes hicieron comentarios como los siguientes:

Adriana: “¿Cuál es el diámetro... cuál es el radio...?”

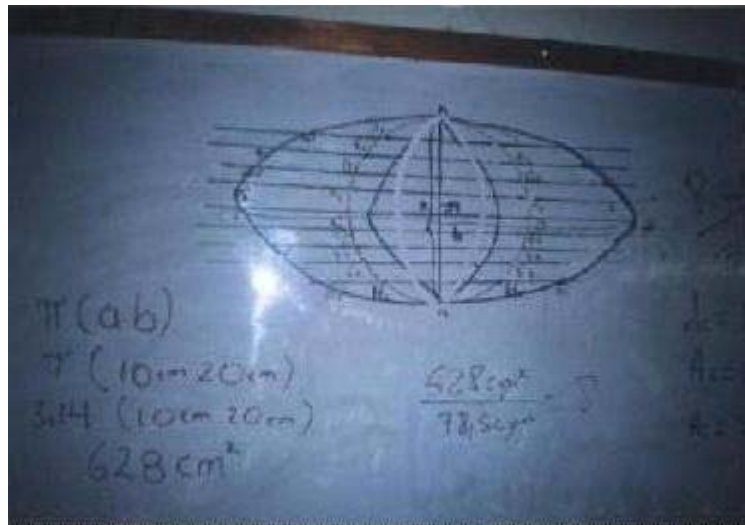
Sirley: “¿Qué son un haz de rectas paralelas?”

Carolina: “Sirley, te acuerdas que en la actividad No 2 dijimos que rectas paralelas son las que conservan la misma distancia”.

Sirley: “Si, pero yo pregunto ¿Que es un haz?”

Carolina: “Un haz es un conjunto, es decir, un conjunto de rectas paralelas”

Los alumnos hicieron la construcción ayudándose el uno al otro, y por último unieron los puntos encontrados (ver foto 5). A la pregunta: ¿Sabes cómo se llama este lugar geométrico? Respondieron:



Dos parejas respondieron al igual que Sebastián y Miguel: “una *circunferencia ovalada*”.

Cinco parejas responden al igual que Danis y Jaider: “*circunferencia alargada*” .

Una pareja respondió al igual que Dioselina y Adriana: “*Tiene la forma de mapamundi*”.

Dos parejas respondieron al igual que Jhon y Dayhana: “una *elipse*”.

6. ¿Qué objetos de nuestro medio tienen esta forma?

Diana y Luz Einis: “*Algunas mesas y algunos espejos*”.

Jorge y Victor: “*el balón de fútbol americano mirado de frente*”.

Adriana y Dioselina: “*algunos adornos de porcelana*”.

7. En la elipse llamaremos al diámetro \overline{AOB} EJE MENOR, donde $\overline{OB} = \overline{OA} = a$ y lo simbolizaremos **2a**, y al segmento $\overline{(C'_1OD'_1)}$ EJE MAYOR, donde $\overline{(OC'_1)} = \overline{(OD'_1)} = b'$ y lo simbolizaremos **2b**. Los extremos del eje mayor lo llamaremos VÉRTICES (V_1 y V_2).

8. Utiliza una cuerda (hilo), midan la longitud de la circunferencia inicial, midan también la longitud de la elipse, compara las longitudes. ¿Qué observas?

Victor y Jorge: *“La longitud de la elipse es mayor que la longitud de la circunferencia”* (ver foto 6).



Profesora: *“¿Qué tan mayor es?”*

Emelis y Amay: *“Si miramos las cuerdas podemos decir que la longitud de la elipse es una vez y media la longitud de la circunferencia”*.

9. Utilicen la fórmula matemática para calcular la longitud de la circunferencia (dada en grados anteriores). ¿Cuál es la longitud de la circunferencia inicial?

Obed: *“¿Cómo es que es la fórmula...?”*

Johan: *“es $2\pi r$ ”*.

Todas las parejas realizaron: " $L = 2\pi r = 2 (3,14) (5cm) = 31,42cm$ ".

10. Si la longitud de la elipse es $\pi (a + b)$ ¿Cuánto mide esta elipse?

Se obtuvieron tres tipos de respuestas:

Amay y Emelis: " $L = \pi(a + b) = 3,14 (5cm + 10cm) = 47,12cm$ ".

Sebastián y Miguel: " $L = \pi (a + b) = 3,14 (10cm + 20cm) = 94,2cm$ ".

Oscar y Norbey: " $L = \pi (a + b) = 3,14 (10 + 20) = 31,4 + 20 = 51,4cm$ ".

Profesora: "*¿Cuál de las tres respuestas es correcta?*".

Amay: "*la primera, porque a no es todo el eje mayor sino la mitad y b no es todo el eje menor sino la mitad*".

La profesora aprovecha la situación para hacer las respectivas aclaraciones con respecto a la medida del eje mayor y el eje menor en términos de **a** y **b**, así como también aclarar el error cometido en la tercera respuesta dada por Oscar y Norbey, que además de tomar mal las medidas de los semiejes mayor y menor, se equivocaron en la aplicación de la fórmula.

11. En términos de razón, ¿Cómo es la longitud de esta elipse, con respecto a la longitud de la circunferencia de partida?

Se obtuvieron tres tipos de respuestas.

Amay y Emelis: " $L (elipse) / L (circunf.) = 47,12cm / 31,42cm = 1,5 veces$ ".

Sebastián y Miguel: " $L (E) / L (circun.) = 94.2cm / 31,42cm = 3 veces$ ".

Oscar y Norbey: " $L(elipse) / L(circunf.) = 51,4 / 31,42 = 1,6 veces$ ".

Profesor: "*¿Cuál es la respuesta correcta?*".

Carolina: "*la primera, por lo que dijo Amay anteriormente*".

12. Realiza el anterior procedimiento (el de comparar las longitudes), pero ahora “estira” la misma circunferencia dos veces en la dirección de las paralelas.

Los alumnos que tomaron correctamente las medidas de **a** y **b** obtuvieron lo siguiente: $L(E) / L(\text{circunf.}) = 62.8\text{cm} / 31,42\text{cm} = 2$ veces (aproximadamente).

Los alumnos que tomaron incorrectamente las medidas de **a** y **b** obtuvieron: $L(E) / L(\text{circunf.}) = 125.6\text{cm} / 31.42\text{cm} = 4$ veces (aproximadamente).

Dos parejas no respondieron esta pregunta.

La profesora, con la colaboración de los alumnos, hizo las respectivas aclaraciones.

13. ¿Cuál es el área del círculo inicial?

Sirley: “¿Cómo es la fórmula... πr^2 ... $2\pi r$?”.

Jhon: “ πr^2 ”.

Todas las parejas coincidieron en que: “ $A = \pi r^2 = 3,14 (5\text{cm})^2 = 78,5\text{cm}^2$ ”.

14. Si el área de la elipse es: πab . ¿Cuánto es el área de la anterior elipse?

Jhon y Dayhana: “ $A = \pi ab = 3,14 (5\text{cm}) (10\text{cm}) = 157\text{cm}^2$ ”.

Danis y Jaider: “ $A = \pi ab = 3,14 (10\text{cm}) (20\text{cm}) = 628\text{cm}^2$ ”.

El profesor con la participación de los alumnos aclara de por qué la primera respuesta es la correcta.

15. Utilizando razones, ¿Cómo es el área encerrada por la elipse, comparada con la del círculo inicial?

Se obtuvieron dos tipos de respuestas:

a) $A(\text{elipse})/A(\text{circunf.}) = 157\text{cm}^2/78,5\text{cm}^2 = 2.$

El área de la elipse es aproximadamente dos veces mayor con respecto a la del círculo inicial.

b) $A(\text{elipse})/A(\text{circunf.}) = 628\text{cm}^2/78,5\text{cm}^2 = 8.$

El área de la elipse es aproximadamente ocho veces mayor con respecto a la del círculo inicial.

Los mismos estudiantes acordaron que la primera respuesta es la correcta, por lo aclarado anteriormente con respecto a **a** y **b**.

16. Realiza el anterior procedimiento (sobre el área), pero ahora “estira” la misma circunferencia dos veces en la dirección de las paralelas.

Sólo se obtuvieron dos tipos de respuesta:

Amay y Emelis: “ $A(\text{Elipse})/A(\text{circunf.}) = 232,5/78,5 = 3$ veces (aproximadamente)”.

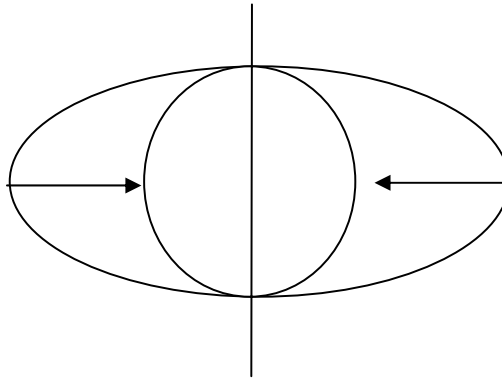
Oscar y Norbey: “ $A(E)/A(\text{circunf.}) = 942 / 78,5 = 12$ veces (aproximadamente)”.

La respuesta correcta es la primera por lo aclarado anteriormente sobre **a** y **b**.

17. Investiga, cual será la forma de la curva obtenida a partir de la circunferencia, si en vez de “estirla” la “contraes” a la mitad en la dirección de las rectas paralelas.

La mayoría de los alumnos dibujaron lo siguiente (ver figura 5):

Figura 16. Elipse contraída.



Todos coincidieron en que sigue siendo una elipse pero en posición vertical.

18. Por último, si miramos los diámetros de la circunferencia como si fueran el eje X (AOB) y el eje Y (COD). ¿Qué podemos decir de la elipse “estirada” y de la “contraída” con respecto a sus ejes?

Mileydis y Johan: “En la elipse “estirada” el eje mayor está sobre el eje X y en la elipse “contraída” el eje mayor queda sobre Y”.

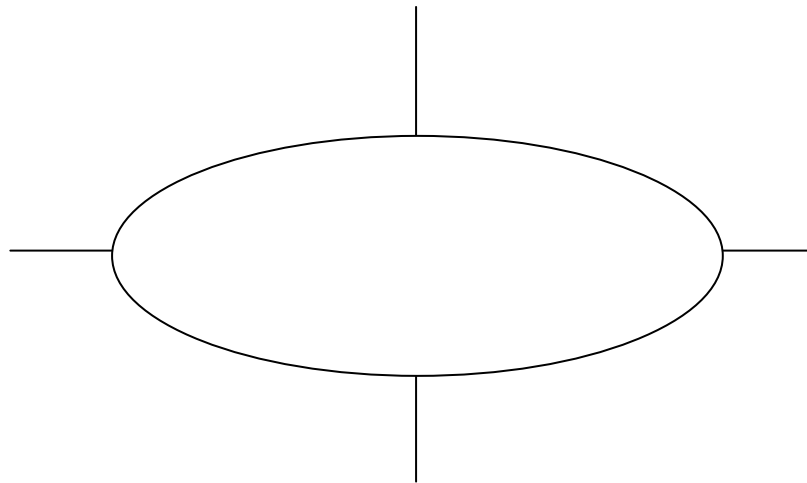
Luz y Diana: “*En la elipse “estirada” el eje mayor está sobre el eje X y está en posición horizontal; en la elipse “contraída” el eje mayor está sobre el eje Y y está en posición vertical*”.

Adriana preguntó: “¿La elipse sólo se encuentra en esas dos posiciones?”.

Los estudiantes no supieron que responder porque hasta el momento se les había presentado la elipse sólo en dos posiciones, la vertical y la horizontal.

Profesora: “*Observen la elipse siguiente y hagan sobre ella un giro de 45° (ver figura 16)*”.

Figura 17. Elipse posición horizontal.



Profesora: “*¿sigue siendo una elipse? ¿Por qué?*”.

Johan: “*Si profesora, porque simplemente cambió de posición*”.

Jhon: “*Entonces la elipse puede encontrarse en varias posiciones porque así como se giró 45° se puede girar cualquier ángulo*”.

3.2.1.1 Análisis de la actividad N° 4. Los estudiantes no tuvieron dificultades para construir la elipse. Ellos relacionaron la curva con varios objetos de nuestro medio como la forma de algunas mesas, espejos, algunos adornos de porcelana, el balón de fútbol americano visto de frente y otros.

La mayoría de los alumnos conocían como hallar matemáticamente la longitud de una circunferencia y el área de un círculo, esto se evidencia en los cálculos realizados por los estudiantes en los numerales 9 y 13.

El concepto de razón lo aplicaron muy bien para comparar las longitudes de una circunferencia y una elipse (ver punto 11). Así mismo, para comparar el área de un círculo y la que encierra una elipse (ver punto 15). Además, compararon de una manera práctica (acomodando un hilo sobre el contorno de las figuras) y teórica (fórmula matemática) la longitud de la elipse con respecto a la circunferencia (ver punto 8). De igual forma concluyeron que a mayor longitud mayor área encierra la figura.

Algunos alumnos no tuvieron en cuenta que la longitud del eje mayor era $2a$, por lo tanto la mitad de este eje mide a . Por eso cuando hicieron el cálculo matemáticamente de la longitud y el área de la elipse cometieron errores (ver puntos 10 y 14). Lo mismo ocurrió con la longitud del eje menor.

Por otro lado, dos parejas aplicaron mal la fórmula para hallar la longitud de la elipse, puesto que al calcular $\pi(a + b)$ lo igualaron a $\pi a + b$.

Los estudiantes, también observaron que la elipse puede estar en posición horizontal, si el eje mayor está sobre el eje X; y en posición vertical si el eje mayor está sobre el eje Y; pero, además puede encontrarse en otras posiciones (oblicuas...), al igual que cualquier figura geométrica, después que cumpla con las condiciones.

3.2.2 Conclusiones sobre la actividad de enlace. Respecto a esta actividad afirmo que los estudiantes se sintieron a gusto buscando la figura geométrica que se generaba a partir de la circunferencia, teniendo en cuenta las instrucciones dadas en los numerales 1-5, pues la primera pareja que la halló inmediatamente se dirigió a la profesora para realizar dicha

construcción en el tablero (foto 5), pero la profesora les dijo que tendrían que esperar a que los demás compañeros terminaran (lo mismo sucedió cuando iban terminando las demás parejas). Aunque ellos sugirieron que un integrante de la pareja que mejor les había quedado dibujada la curva pasaría al tablero a construirla.

En dicha construcción, los estudiantes relacionaron los conocimientos previos (circunferencia, radio, diámetro, rectas perpendiculares y paralelas, puntos de intersección, lugar geométrico y otros) que los llevó a encontrar su propio conocimiento, en este caso construir una elipse.

Los alumnos a través de esta actividad fueron diferenciando los elementos de una elipse como: “su forma (ver punto 5)”, “tiene dos vértices (ver punto 7)”, “tiene un eje mayor y otro menor (ver punto 7)”, etc. Así, dichos enunciados, como **hechos** aislados (primer nivel del campo conceptual según Rico, 1990) no son suficientes para caracterizar la elipse como lugar geométrico, en tanto no diferencian la elipse de otras figuras geométricas.

El uso de material didáctico (tijeras, hilo o cuerda fina, etc.) y las instrucciones anexas a cada enunciado despertaron interés y dieron seguridad a los alumnos, el hecho de manipular material y visualizar algunas relaciones existentes entre los datos obtenidos a través de dicho material y las fórmulas matemáticas (cuando les tocó a los alumnos comparar la longitud de la circunferencia y la longitud de la elipse en los puntos 8 y 10) les facilitó enunciar y resolver problemas análogos.

3.3 ACTIVIDADES DE DESARROLLO DEL TEMA

Para el diseño de dos de las tres actividades que pertenecen a esta sesión (actividades 5 y 6), tuve en cuenta las situaciones didácticas presentadas en las páginas 4 y 5 del libro Actividades Matemáticas de Brian Bolt (1989).

Aunque, para la actividad 5, los alumnos no utilizaron dos chinchetas y una mesa de dibujo para construir la elipse, sino que tuve en cuenta el entorno, y propuse hacerla en el patio del colegio (en el suelo), usando una cuerda delgada y dos estacas pequeñas apoyadas en el suelo.

Para el diseño de la actividad 7, tuve en cuenta las instrucciones dadas en la actividad 3, inciso b) de la página 284 del libro Logros Matemáticos de Héctor Contreras y otros (1997). Adaptándolas a una serie de preguntas para que el alumno construya la elipse por sí solo utilizando escuadra y compás. Además adicioné otras preguntas sobre verificación de elementos relacionados con la elipse aprendidos en las actividades anteriores, como encontrar los focos y los vértices a partir de la elipse dada.

Estas actividades de desarrollo del tema, tienen como propósito que el alumno conozca las rectas y los puntos importantes de una elipse a través de una forma dinámica, que retan al estudiante a aplicar sus conocimientos matemáticos y a desarrollar su capacidad creadora.

3.3.1 Actividad N° 5 (ver anexo 5). Para el desarrollo de la presente actividad se necesitan los siguientes materiales: una cuerda y dos estacas pequeñas (la intención de utilizar esta forma es porque los alumnos del colegio hacen murales, entonces quiero que aprendan una manera sencilla y práctica de construir elipses por si las llegan a necesitar en sus dibujos)

Una vez entregadas las fotocopias de la actividad (para resolverla de 9:00-10:30), se les invitó a seguir las instrucciones que aparecen en ella.

Pero antes, se trasladaron los alumnos al patio del colegio, y se le pidió a uno de ellos que clavara en el suelo dos estacas pequeñas A y B, separadas una de otra un metro. Y con una cuerda delgada de unos 1,5 m de longitud, atara uno de sus extremos a la estaca A y el otro a la B.

A continuación, se presenta lo que se obtuvo de la actividad:

1. Tomen un palo puntiagudo y ubíquelo en la cuerda de tal manera que la estire y, manteniéndola tensionada como indica la figura, desplacen la punta del palo sobre el suelo hasta obtener una figura. ¿cuál es este lugar geométrico?

Jazmany alcanzó dos estacas pequeñas y las clavó al suelo, Norbey midió la cuerda y la ató a las dos estacas con la ayuda de Yaider, mientras tanto Carolina lee la actividad en voz alta y con la participación y sugerencias de los demás del grupo Norbey construye la elipse. Esto debido a que el espacio es reducido y no se pudo formar varios grupos (ver foto 7). Pero el texto guía de la fotocopia se resolvió en grupos de tres alumnos.



Los alumnos respondieron inmediatamente realizado el dibujo: “es *una elipse*”

2. Miren la gráfica obtenida en el suelo y la hoja de la actividad. ¿Cómo es la suma de las distancias $AP + PB$ para cualquier punto P de la elipse?

Todos los estudiantes coincidieron en que la suma de las distancias $AP + PB$ son iguales puesto que la cuerda es la misma.

Profesora: *“Estos dos puntos fijos (estacas A y B), se llamarán FOCOS de la elipse”*

3. ¿Qué relación existe entre la suma de las distancias $AP + PB$ y el eje mayor de la elipse?

Norbey, desamarró la cuerda de las estacas y la puso sobre el eje mayor de la elipse y todos coincidieron que son de igual longitud.

4. Si Q es un punto interior de esta elipse (toma varias posiciones para Q), ¿Qué podrían decir de la suma de las distancias $AQ + QB$?

Grupo de Danis: *“Las sumas de las distancias son diferentes”*.

Grupo de Mileydis: *“Las sumas de las distancias son diferentes, por lo tanto Q no pertenece a la elipse”*.

Respuestas similares se obtuvieron de los demás grupos.

5. Investiguen el resultado de utilizar diferentes longitudes de cuerda y fijas las estacas A y B (es decir, los focos).

Los alumnos tomaron una cuerda cuya longitud es de 2 m, luego toman una de 1,2 m.

Todos los grupos coincidieron en que siempre se obtiene una elipse.

Profesora: “¿Qué sucede si la cuerda la toman de 1 m (los alumnos no habían tomado esta medida)?”.

Norbey toma la medida y la estira sobre el suelo de una estaca a la otra y se miraron unos a otros.

Emelis: “Se obtiene una línea recta, porque en esa dirección se desliza el palo”

6. Ahora experimentemos lo contrario; imagínense ¿Qué ocurre si cada vez juntamos más las estacas y siempre tomamos la misma longitud de la cuerda que habíamos tomado al inicio (1,5 m)?

El grupo de Dayhana: “cada vez que juntamos más los focos siempre se obtuvo una elipse cada vez menos achatada”.

7. ¿Qué ocurre, si hacemos coincidir las estacas, dejando una fija y manteniendo la misma longitud de la cuerda?

Grupo de Diocelina: “pasa como en la actividad 1, se obtiene una circunferencia”.

Respuestas similares se obtuvieron de los demás grupos.

Profesora: “esta acción de mantener un foco fijo y el otro lo acercamos a éste nos induce al concepto de límite, que trabajaremos en el grado once. Por ahora, sólo podemos decir que el límite de una elipse es una circunferencia cuando mantenemos un foco fijo y el otro lo acercamos, es decir, los puntos que conforman la elipse tienden a formar una circunferencia a medida que hacemos coincidir los focos”.

Todos los grupos pasaron al salón (queda en frente de donde realizamos la actividad) para continuar con la actividad.

8. ¿Todas las circunferencias son elipses?

Unos contestan si y otros no.

Profesora: *Los que dijeron no, ¿díganme por qué?*

Obed: *“No, porque para construir la elipse se necesitan dos puntos fijos en cambio para la circunferencia solo necesitamos uno”*

Ningún otro alumno dio otra respuesta diferente; y los que dijeron sí, no supieron qué argumentar.

Profesora: *“Si recuerdan cuando hicimos coincidir los focos (las estacas A y B) ¿Qué ocurrió con los punto A y B?”*

Adriana: *“el punto A quedó sobre B”*.

Profesora: *“¿Qué pasó con la distancia entre ellos?”*

Dayhana: *“No hay distancia”*.

Profesora: *“¿En números, qué podemos decir?”*

Diocelina: *“que la distancia es cero”*.

Profesora: *“Sí es una elipse; lo que pasa es que la distancia entre los dos focos es cero”*.

9. Si la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, que están a una misma distancia de un punto fijo llamado CENTRO. Definan la elipse como un lugar geométrico.

Grupo de Amay: *“La elipse es el lugar geométrico que de un punto cualquiera en la figura sumadas las distancias hasta los focos es constante”*.

Grupo de Norbey: *“La elipse es el lugar geométrico de dos puntos llamados focos que a la suma de las distancias de cualquier punto dado son las mismas es constantes”.*

Grupo de Sebastián: *“La elipse es el lugar geométrico que de un punto cualquiera en la figura sumadas las distancias hasta los focos es constante”.*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás grupos.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas por los estudiantes la profesora concluyó: **una ELIPSE es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es constante.**

3.3.1.1 Análisis de la actividad N° 5. En cuanto a las preguntas que se formularon en la actividad y teniendo en cuenta las actitudes de los alumnos durante su desarrollo se analizó lo siguiente:

Los estudiantes realizaron la actividad con entusiasmo. Identificaron que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es la misma. Además que la longitud del eje mayor es igual a dicha suma, esto lo ven fácilmente porque desamarraron la cuerda y la hicieron coincidir con la longitud del eje (punto 3).

Los estudiantes no presentaron dificultad para saber que el lugar geométrico generado de esta forma era una elipse. También observaron que, por la posición de los focos la curva obtenida puede ser una elipse, una circunferencia (si los focos coinciden) o sencillamente el segmento de recta que une los dos focos si la cuerda es de igual longitud que la distancia entre los focos (puntos 5 y 7).

Cuando los dos focos se hacen coincidir se obtiene una circunferencia. Miremos que en esta acción se encuentra la idea implícita de límite si mantenemos un foco fijo y acercamos el otro. Podemos decir “que el límite de una elipse es una circunferencia”, pero la mayoría de los estudiantes no alcanzaron asimilar esta idea.

Algunos alumnos al redactar la definición de elipse (punto 9) como lugar geométrico, cometieron muchas incoherencias porque se les dificulta utilizar el lenguaje matemático, es decir, los términos matemáticos.

3.3.2 Actividad N° 6 (ver anexo 6). Esta actividad nos presenta una manera muy entretenida de generar una elipse plegando un papel a lo largo de rectas que “envuelven” a la elipse en cuestión, permitiendo identificar y localizar fácilmente los dos focos de la elipse, que son dos puntos fundamentales para su estudio.

Los estudiantes realizaron esta actividad en parejas (de 8:00-9:00 a.m), pues al tener que confrontar sus puntos de vista con su compañero enriquece y refuerza el conocimiento, permite establecer un nivel más alto de comprensión, subsana algunas dudas en su léxico y aligera el ritmo de trabajo.

Para el desarrollo de la presente actividad se necesitan los siguientes materiales: una hoja de bloc, tijeras, regla y lápiz.

Una vez entregado el material fotocopiado, se les invitó a seguir las instrucciones que aparecen en él.

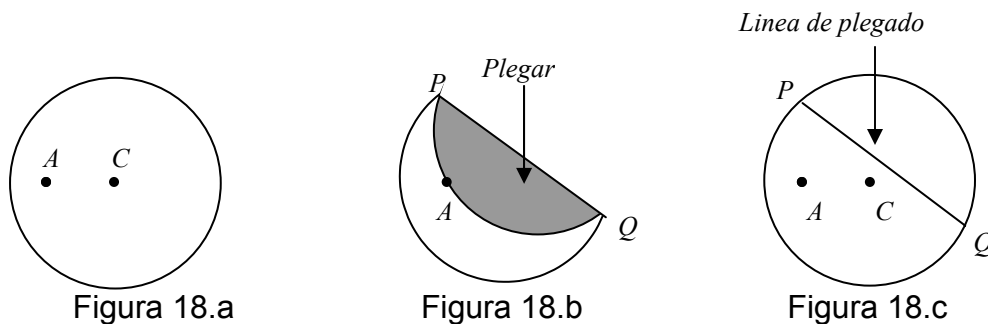
1. Dibuja y recorta con cuidado un círculo de una hoja de bloc, de unos 16cm. de diámetro, y marca sobre él un punto A a unos 2cm del borde. Estas

medidas no son esenciales pero permiten ver las cosas con suficiente claridad.

En la práctica, puedes dibujar la circunferencia con ayuda de algún objeto redondo apoyado en el papel, como un plato pequeño boca abajo o una lata de conservas redonda.

2. Pliega el círculo por una cuerda cualquiera PQ, de manera que el arco correspondiente de la circunferencia pase por A, como indica la figura b).

Figura 18. Elipse a través de plegado de papel.



Una vez desdoblado el círculo traza sobre él con un lápiz la cuerda PQ utilizada para plegarlo (figura c).

Los alumnos lo realizaron sin dificultad.

3. Repite el proceso 30 veces (entre más veces mejor) dibujando siempre la cuerda de plegado. ¿Qué lugar geométrico rodean o “envuelven” todas las cuerdas dibujadas?

Miguel sólo hizo diez dobleces (mirando la hoja se pueden contar) y dice: “yo no veo ninguna figura geométrica”.

Profesora: “Miguel, siga doblando por lo menos unas 20 veces mas, entre más dobleces hagas mucho mejor”

Pasados un par de minutos.

Amay: “Sí profesora, envuelven una elipse (ver foto 8)”.

Dayhana: “el lugar geométrico es una elipse”.



Respuestas similares se obtuvieron de los demás alumnos.

4. ¿Cómo son las rectas trazadas a la elipse?

Dioselina: “son *tangentes*”.

Leonelys: “Las rectas trazadas a la elipse son *tangentes*”.

Diana: “Son *tangentes* porque tocan un solo punto”.

Respuestas similares se obtuvieron de los demás estudiantes.

5. Investiga ¿qué ocurriría al tomar el punto A más próximo al centro C del círculo?

Mileydis contesta inmediatamente: *“La elipse se centra más y disminuye su tamaño”*.

Profesora: *“Tomen otro círculo y verifiquen lo que dice Mileydis”*.

Los alumnos tomaron otro círculo y realizaron el procedimiento anterior; compararon las elipses obtenidas midiendo con una cuerda.

Pasados algunos minutos contestaron:

Obed: *“La elipse obtenida es menos achatada”*.

Dioselina: *“La longitud de la elipse aumenta”*.

Diana: *“La elipse se centra más, pero aumenta su tamaño”*.

Amay: *“La elipse queda de tamaño más grande, pero en un lugar más central”*.

Jhon: *“La longitud de la elipse aumenta y su área también”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

6. ¿Y si A coincidiera con el centro C?

Los alumnos tomaron otro círculo de papel e hicieron el procedimiento anterior y verificaron que se trataba de una circunferencia.

7. Observa la curiosa manera de estar situados los puntos A y C, simétricos con respecto a la elipse. ¿Qué nombre reciben estos puntos?

Todos coincidieron en que eran los focos de la elipse.

8. **INFÓRMATE:** La trayectoria de un satélite artificial que gire alrededor de la Tierra es una elipse; pues bien, la Tierra ocupa uno de sus focos, es decir, un punto como el A o el C, y no el centro de la elipse.

3.3.2.1 Análisis de la actividad N° 6. Los alumnos se mostraron muy interesados en el desarrollo de la actividad. Descubrieron otra manera de construir una elipse, que al principio no la veían pero a medida que fueron aumentando el número de dobles la pudieron encontrar.

Cuando se les pidió analizar qué ocurriría al tomar el punto A más cercano al centro C del círculo, algunos estudiantes creyeron que la longitud de la elipse debía disminuir, pero al tomar otro círculo para verificar lo dicho, se dieron cuenta que la longitud de la elipse aumentó y cada vez era menos achatada a medida que A se aproximaba a C hasta obtener una circunferencia (ver punto 6).

La mayoría de los alumnos aplicaron el concepto de tangente puesto que todas las cuerdas dibujadas en el círculo cumplieron esta condición con respecto a la elipse.

El alumno Oscar verificó el punto 7, donde se le dice que los focos son puntos simétricos de la elipse, dobló la elipse (hallada en el círculo de papel) e hizo coincidir los focos y lo mostró a sus compañeros.

El uso de material didáctico y las instrucciones anexas a cada enunciado despertaron interés y dieron seguridad a los alumnos, el hecho de manipular material y visualizar algunas relaciones existentes entre los datos dados en las instrucciones les facilitó enunciar y resolver situaciones análogas (ver puntos 5 y 6)

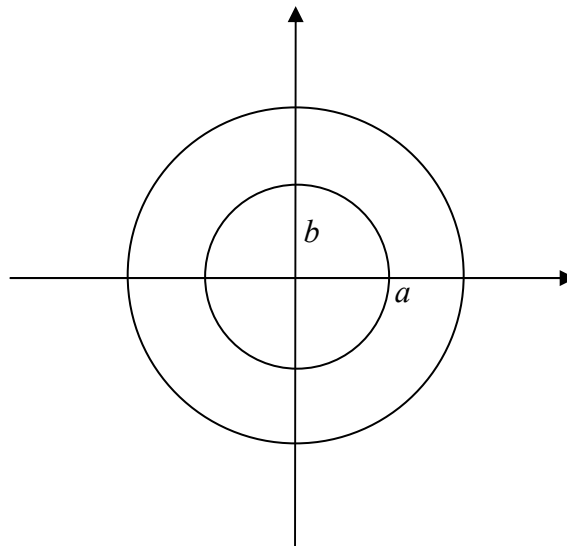
3.3.3 Actividad N° 7(ver anexo 7). Esta actividad a través de una serie de instrucciones nos conduce a construir una elipse con escuadra y compás a partir de dos círculos concéntricos.

Los estudiantes realizaron la actividad en parejas (de 10:00-11:00).

Una vez entregadas las fotocopias de la actividad, se les invitó a seguir con la metodología utilizada en la actividad anterior.

En un plano cartesiano para construir una elipse con escuadra y compás se trazan dos círculos concéntricos con centro en el origen cuyos radios son iguales a los semiejes **a** y **b** (ver figura 19).

Figura 19. Elipse a través de círculos concéntricos.



1. En el primer cuadrante, traza radios al círculo de mayor diámetro y llámalos 1, 2, 3, 4,...

La mayoría de los alumnos trazaron cuatro radios y dejaron una amplitud más o menos uniforme entre los mismos.

2. Llaman a los puntos de intersección de los radios trazados con la circunferencia de menor radio $1', 2', 3', 4', \dots$, respectivamente.

Los estudiantes enumeraron los puntos de intersección con lo pedido.

3. Desde $1, 2, 3, 4, \dots$ tracen paralelas al eje Y; y desde $1', 2', 3', 4', \dots$ traza paralelas al eje X.

Los alumnos lo realizaron sin dificultad.

4. Realicen el anterior procedimiento, para los tres cuadrantes restantes.

Las parejas realizaron el trabajo el procedimiento para los demás cuadrantes sin dificultad.

5. Observen y deduzcan los puntos que generan la elipse. ¿Cuáles son?

Mileydis y Amay: *“Las intersecciones entre las paralelas del eje X y las paralelas del eje Y forman la elipse”.*

Respuestas similares se obtuvieron de las demás parejas.

6. ¿Podrían hallar geoméricamente los focos para la anterior elipse (ubíquenlos en la figura)?

Pasados algunos minutos, sólo una pareja llamó a la profesora y le explicó lo siguiente:

Victor y Efraín: *“Como la suma de las distancias de los focos a cualquier punto de la elipse es igual a la longitud del eje mayor, entonces tomemos un*

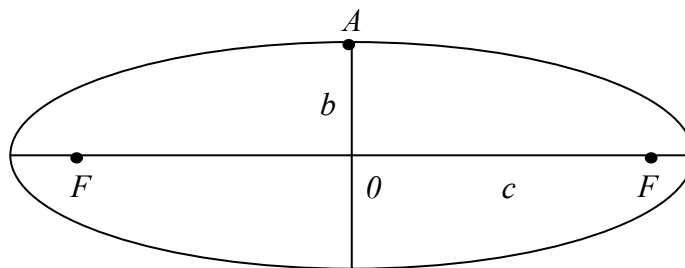
punto cualquiera de la elipse (señaló con el dedo el extremo de b), en este caso el eje mayor mide 8cm, entonces parándome en dicho punto mido 4cm hacia el eje mayor (acercándonos a uno de los vértices) y donde me den los 4cm con la regla ahí se encuentra un foco (F_1), lo mismo hago para el otro foco (F_2)”

Efraín pasó al tablero y le explicó a sus compañeros.

Ninguna otra pareja dio otra sugerencia.

7. Observa la siguiente figura, la distancia entre el centro de la elipse y el extremo superior del eje menor (punto A) se llama b , y llamemos c la distancia del centro sobre el eje mayor hasta donde se encuentra ubicado uno de los focos (Por ejemplo F_1) (ésta distancia se llama **distancia focal**) Unan los puntos A y F_1 . ¿Qué figura obtuvieron?

Figura 20. Distancia focal de la elipse.



Dolmar y Obed: “*un triángulo*”.

Jorge y Sebastián: “*un triángulo rectángulo*”.

Respuestas similares se obtuvieron de las demás parejas.

Profesora: “*¿cuánto mide la hipotenusa?*”.

Danis: “*depende de cuanto mida b y c* ”.

Efraín: *“mide a, porque es la mitad del eje mayor”* (Efraín lo había identificado cuando explicó como hallar los focos).

8. ¿Qué relación se puede establecer entre las longitudes de los lados de la figura obtenida?

Danis y Miguel: *“que son desiguales a, b, y c”*

Jhon: *“el Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ ”*

Tres parejas dieron respuestas similares a Jhon, cinco parejas igual que Danis y las demás parejas no establecieron ninguna relación entre **a**, **b** y **c**.

9. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices, en términos de a y cuáles son las coordenadas de los focos, en términos de c?

Todos coincidieron en que las coordenadas de los vértices: $V_1 = (a,0)$ y $V_2 = (-a,0)$ y las coordenadas de los focos: $F_1 = (c,0)$ y $F_2 = (-c,0)$.

3.3.3.1 Análisis de la actividad N° 7. Los estudiantes hacen las construcciones sin dificultad. Identificaron los puntos que generaron la elipse como las intersecciones de las rectas paralelas al eje X y las paralelas al eje Y. Una pareja de estudiantes a través de un razonamiento lógico dio a conocer una estrategia para ubicar cada uno de los focos de una elipse conociendo la longitud del eje mayor (dada por Victor y Efraín, punto 6), que consistió en lo siguiente: Como la suma de las distancias de los focos a cualquier punto de la elipse es igual a la longitud del eje mayor, entonces tomemos un punto cualquiera de la elipse (señaló con el dedo el extremo de b), en este caso el eje mayor mide 8cm, entonces parándome en dicho punto mido 4cm hacia el eje mayor (acercándonos a uno de los vértices) y donde me den los 4cm con la regla ahí se encuentra un foco (F_1), lo mismo hago para el otro foco (F_2).

Las parejas identificaron claramente que al unir el punto extremo superior de **b** con el punto extremo del semieje focal **c**, se forma un triángulo rectángulo donde la hipotenusa mide **a**; y algunas parejas pudieron establecer la relación entre sus ejes aplicando el Teorema de Pitágoras, es decir $a^2 = b^2 + c^2$ (punto 7). Los alumnos que no establecieron ninguna relación entre **a**, **b** y **c**, argumentaron que no sabían cuanto valía **a**, **b** y **c**, por lo tanto no podían comparar las longitudes (respondió Jorge).

3.3.4 Conclusiones sobre las actividades de desarrollo del tema. Las tres actividades anteriores, muestran diferentes formas de construir elipses; donde se identificaron y localizaron fácilmente los dos focos de la elipse, que son fundamentales para su estudio. Así como también el centro, el eje mayor, el eje menor, los vértices, la distancia focal etc. Además en la actividad 5, los estudiantes identificaron la propiedad de los puntos que están sobre la elipse y la relación que existe entre dicha propiedad y el eje mayor. En la actividad 7 hicieron el ejercicio de asociar la curva de la elipse a un sistema de coordenadas cartesianas con centro en el origen y relacionaron las longitudes de sus ejes haciendo uso del Teorema de Pitágoras.

En el desarrollo de estas tres actividades se observa la habilidad de algunos alumnos para aplicar los conocimientos previos como son: radio, diámetro, círculos concéntricos, líneas paralelas, intersecciones de rectas, Teorema de Pitágoras y otros para obtener las propiedades fundamentales que caracterizan una elipse.

Los alumnos presentaron dificultad para redactar sus respuestas, puesto que no tienen en cuenta los signos de puntuación; es más, muchas veces no los utilizaron en su redacción.

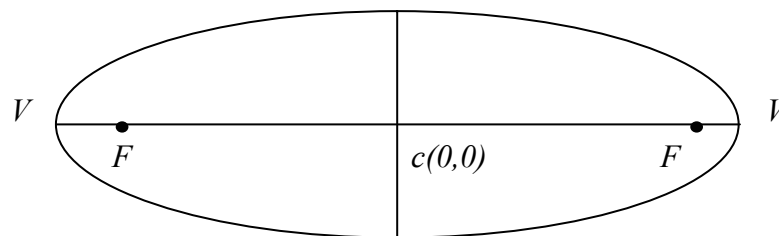
3.4 Actividades de preparación para el siguiente tema. El propósito de la presente actividad, es que el alumno establezca por sí mismo las conexiones entre la parte geométrica y la parte algebraica para descubrir la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Los estudiantes realizaron esta actividad en parejas de 9:00 a 10:30 a.m.

En esta actividad, los estudiantes pueden preguntar para aclarar dudas durante el desarrollo de la misma

3.4.1 Actividad N° 8. En la siguiente elipse se encuentran señalados sus puntos y segmentos de rectas notables:

Figura 21. Puntos y segmentos de rectas notables.



- ◆ Los dos puntos fijos: Focos F_1 y F_2
- ◆ Los extremos: Vértices V_1 y V_2
- ◆ El punto medio entre los focos: Centro C
- ◆ El segmento que une a los vértices: Eje mayor
- ◆ El segmento perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro: Eje menor.

1. Grafica una elipse donde el eje menor tenga longitud **2a**, el eje mayor **2b** y la distancia del centro C (0,0) a cada foco sea **c**.

Los alumnos dibujaron la elipse con la ayuda de una cuerda y dos chinchas.

2. Toma un punto cualquiera sobre la elipse y denótalo P (x,y). Halla la distancia de P a F₁ (-c,0) y de P a F₂ (c, 0).

Miguel: “¿cómo es que es la fórmula para hallar la distancia?”

Jhon: “d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ”

Profesora: “o también, d = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ”

Los alumnos reemplazaron en la primera fórmula así:

Amay: “de P a F₁: d = $\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \rightarrow d = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ ”

“de P a F₂: $\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \rightarrow d = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ ”

3. Aplica la definición de elipse tomando la constante como **2a**.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

4. Ahora tienes una igualdad donde aparecen radicales. ¿Cómo se eliminan radicales en una ecuación? Encuentra la ecuación de la elipse.

Diana: *“elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad”*.

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a)^2$$

Algunos alumnos se dieron cuenta de que si dejan los radicales en el miembro izquierdo de la igualdad les queda muy complicado resolverlo entonces decidieron pasar uno de los radicales al miembro derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned}(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 \\(x-c)^2+y^2 &= 4a^2 - 4a*\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2\end{aligned}$$

Redujeron términos semejantes.

Efraín: *“queda de nuevo otro radical, ¿profesora, hay que elevar al cuadrado nuevamente?”*.

Algunos alumnos no supieron que más hacer. Otros realizaron transposición de términos, resolvieron binomios, redujeron términos semejantes y obtuvieron:

$$4a*\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4xc$$

Y así continuaron resolviendo, preguntando y colaborándose mutuamente.

En la parte final los estudiantes presentaron dificultades, así que les dije la forma como debían agrupar los términos y factorizaran; puesto que no sabían mas que hacer ni mucho menos a donde tenían que llegar. De ahí en adelante trabajamos en el tablero.

$$(4a * \sqrt{(x+c)^2 + y^2})/4 = (4a^2 + 4xc)/4$$

$$(a * \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (a^2 + xc)^2$$

Realizaron las operaciones y obtuvieron

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \text{ dividiendo por } a^2(a^2 - c^2)$$

$$(x^2 / a^2) + (y^2 / (a^2 - c^2)) = 1, \text{ como } a^2 - c^2 = b^2$$

Finalmente, pudieron encontrar la ecuación general de la elipse con centro en el origen con los focos sobre el eje X.

$$(x^2 / a^2) + (y^2 / b^2) = 1.$$

Profesora: *“a esta ecuación se le denomina la forma reducida o forma canónica de la elipse. Esta forma de la ecuación nos da gran cantidad de información sobre las longitudes: semieje mayor (a), semieje menor (b), semieje focal $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ y de este último deducimos las coordenadas de los focos.*

5. Realiza el anterior procedimiento, para encontrar la ecuación general de la elipse con centro en el origen y los focos sobre el eje Y, es decir, $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$.

En forma análoga, los alumnos pudieron demostrar que la ecuación de la elipse es:

$$(x^2 / b^2) + (y^2 / a^2) = 1.$$

3.4.1.1 Análisis de la actividad N° 8. La mayoría de los estudiantes graficaron la elipse (pedida en el punto 1) en forma rápida utilizando un cordón de sus zapatos y dos chinchas que la profesora les facilitó. Ellos asociaron la gráfica a un sistema de coordenadas cartesianas y ubicaron los puntos $C(0,0)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ y $P(x,y)$ (actividad 7). Los estudiantes aplicaron la fórmula de la distancia entre el centro y cada uno de los focos, establecieron la definición de elipse e igualaron a la constante $2a$ (longitud del eje mayor) y eliminaron radicales elevando al cuadrado. Un grupo de estudiantes no siguieron resolviendo el problema porque no tuvieron en cuenta que en el miembro izquierdo de la igualdad quedaron dos radicales y al elevar al cuadrado la solución de dicho binomio les resultó bastante complicado y no supieron que más hacer. Otros estudiantes se percataron de esto e hicieron transposición de términos, redujeron términos semejantes, resolvieron binomios pero les quedó de nuevo otro radical y se dieron por vencidos. Un alumno sugiere elevar de nuevo al cuadrado para eliminar el radical, observaron lo que les quedó y no supieron más que hacer. Esta dificultad se presentó debido que a la incertidumbre de no saber a dónde tenían que llegar, ante el menor obstáculo algunos estudiantes se dieron por vencidos. Pero a otros se les despertó la curiosidad y el entusiasmo porque estaban aplicando muchos temas vistos anteriormente en un solo ejercicio (así lo expresó un estudiante). Y a pesar de que fue un proceso bastante largo tuvieron en cuenta las sugerencias de la profesora y pudieron hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen con su eje mayor sobre X.

3.4.2 Conclusiones sobre la actividad de preparación para el siguiente tema. En algunos alumnos se notó la falta de habilidad para realizar operaciones entre las expresiones algebraicas, pues cometieron muchos errores con los signos al despejar una variable y no tuvieron en cuenta los signos de agrupación al desarrollar binomios. En la socialización, la profesora hizo las observaciones pertinentes al respecto. También se notó la falta de organización en el desarrollo de las expresiones algebraicas (me

refiero a que el signo igual lo ponen en cualquier parte, lo mismo los radicales no cubren toda la expresión que tienen que cubrir, etc.)

Algunos estudiantes, ante el menor obstáculo en la realización del ejercicio, suspendieron el trabajo y se limitaron solo a observar a los demás compañeros. Ante estas situaciones el docente debe ser recursivo, tolerante y reflexivo para orientar a los alumnos en los procesos de solución.

En conclusión, el alumno a través de esta actividad estableció por sí mismo las conexiones entre la parte geométrica y la algebraica para descubrir la ecuación de la elipse con centro en el origen.

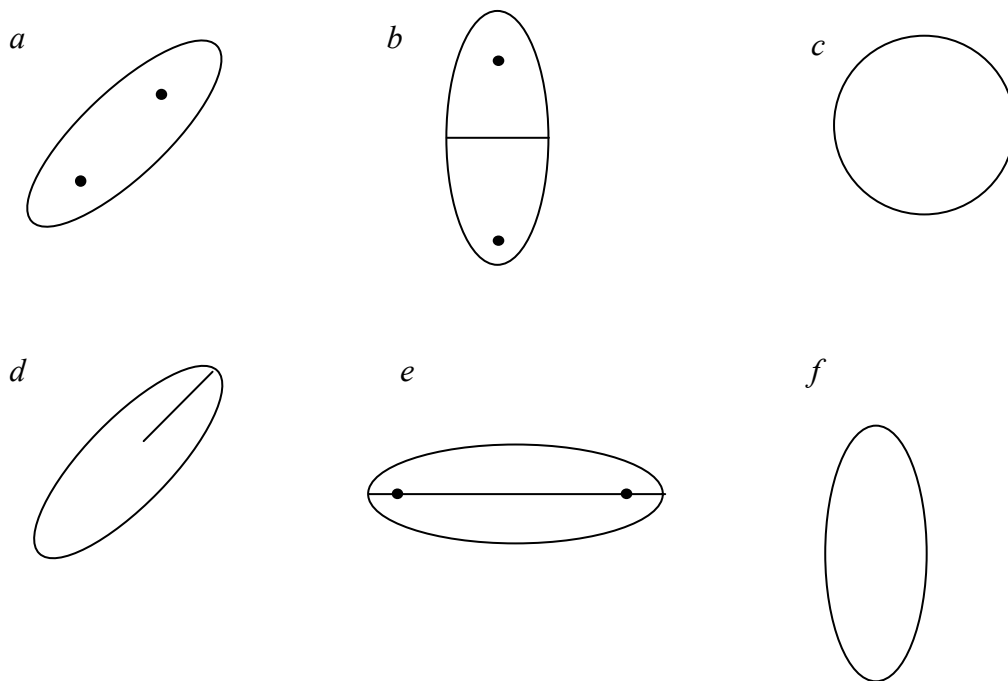
3.5 PRUEBA ESCRITA (anexo 9)

Para la realización de esta prueba escrita se dio un tiempo límite de dos horas. Los alumnos pudieron consultar apuntes y preguntar siempre y cuando se trate de aclarar algún punto de la prueba. Pero dicha aclaración se hace en forma general.

Los ejercicios de la presente prueba fueron escogidos pensando en que los estudiantes tuvieran la oportunidad de aplicar la propiedad que define a la elipse y la relación entre sus elementos.

Al principio los alumnos presentaron temor para presentar esta prueba, pero la profesora les aclaró que el objetivo no era la de asignar una nota, sino como una actividad de refuerzo para los temas visto hasta el momento.

1. Dadas las siguientes figuras clasifica cuáles son o no son elipses y por qué?



Veintiocho estudiantes dijeron que la figura del inciso a) sí es una elipse. Veamos algunas justificaciones:

Emelis: *“muestra los dos focos”*.

Luz Einnys: *“tiene dos focos y su figura es la de una elipse”*.

Amay: *“parte de dos puntos como guía (focos) para ayudar a formar el lugar geométrico”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

Y dos estudiantes dijeron que a) no es una elipse porque,

Victor: *“la elipse es el contorno y no los puntos interiores”*.

Carolina: *“la elipse está formada por los puntos que están sobre la curva”*.

Once de los estudiantes dijeron que la figura del inciso b) sí es una elipse porque,

Johan: *“presenta los dos focos y su eje menor”*.

Obed: *“los focos y el eje menor son elementos de la elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

Y diecinueve estudiantes dijeron que b) no es una elipse porque,

Dayhana: *“aparece dibujado el eje menor”*.

Diana: *“además de los focos muestra el eje menor y cuando hicimos la actividad de la cuerda y las dos estacas aparecían solamente los focos y no estaba el eje menor”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

Veinte alumnos dijeron que la figura del inciso c) no es una elipse porque,

Dioselina: *“solo posee un punto y es una circunferencia”*.

Leonelys: *“se forma de un punto fijo llamado centro”*.

Jorge: *“solo hay un punto fijo y la circunferencia tiene dos”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás.

Y diez alumnos dijeron que c) sí es una elipse porque,

Jazmany: *“la circunferencia es un caso particular de la elipse”*.

Victor: *“la distancia entre los dos focos es cero”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los otros alumnos.

Veinticuatro de los estudiantes dijeron que la figura del inciso d) no es una elipse porque,

Yaider: *“no es un elemento de la elipse”*.

Jhon: *“los puntos que pertenecen al semieje que aparece dibujado no pertenecen a la elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás.

Y seis alumnos dijeron que d) sí es una elipse porque,

Adriana: *“la figura es la de una elipse”*.

Shirly: *“la forma es la de una elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás.

Once estudiantes dijeron que la figura del inciso e) sí es una elipse porque,

Miguel: *“además de los focos muestra el eje mayor”*.

Dolmar: *“muestra dos elementos de la elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

Y diecinueve alumnos dijeron que e) no es una elipse porque,

Oscar: *“no debe aparecer el eje mayor”*.

Luz: *“además de los focos aparece el eje mayor”*.

Jhon: *“los puntos del eje mayor no cumplen la condición de elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás.

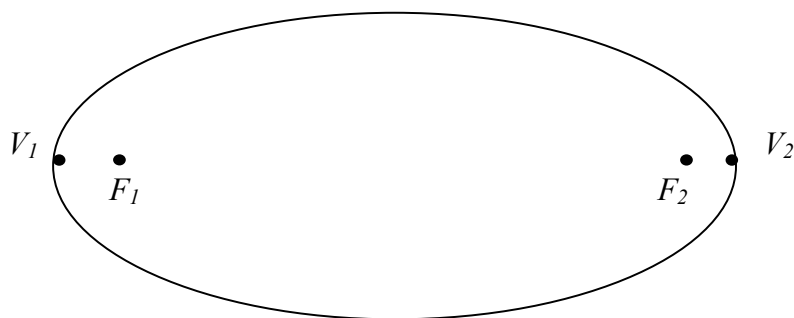
El 100% de los alumnos dijeron que la figura del inciso f) sí es una elipse porque,

Emelis: *“su lugar geométrico es una elipse independiente a que tenga o no puntos fijos”*.

Victor: *“ los puntos de la elipse son los que están sobre la curva”*.

Jhon: *“cumple la propiedad de elipse”*.

2. Analiza y responde:



a) ¿Los focos son puntos de la elipse? ¿Por qué?

Veinte alumnos respondieron que sí pertenecen a la elipse porque,

Diana: *“los focos nos sirven de guía para construir la elipse”*

Jorge: *“los focos son elementos de la elipse”*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

Y diez alumnos respondieron que no pertenecen a la elipse porque,

Carolina: *“aunque una parte de ellos no pertenecen a la curva”*.

Victor: *“los focos no cumplen la condición para pertenecer al contorno de la elipse”*.

Emelis: *“los focos no cumplen la condición de elipse”*.

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

b) ¿Los vértices son puntos de la elipse? ¿Por qué?

Los treinta alumnos respondieron que los vértices pertenecen a la elipse porque,

Emelis: *“pasan por la elipse y hacen parte de ella, además se forman sólo cuando la elipse ya está hecha”*

Victor: *“los vértices cumplen la condición de los puntos de una elipse”*

Mileydis: *“los vértices son puntos que sumada sus distancias a los dos focos es igual a la longitud del eje mayor, por lo tanto son puntos de la elipse”*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

3. Explica un procedimiento para hallar los focos de la siguiente elipse, y ubícalos en la figura.

Algunos estudiantes utilizaron regla, y otros usaron compás para ubicar los focos.

Veinticinco estudiantes dieron respuestas similares a las siguientes:

Jorge: *“Se mide el eje mayor de la elipse, después se toma un punto cualquiera de la figura geométrica, interceptando dos puntos que al sumarlo de la misma distancia”.*

Shirly: *“Se mide el eje mayor primero, después se escoge un punto cualquiera de la elipse luego se ubican dos puntos que al sumarlo con el punto ubicado de igual al eje mayor”.*

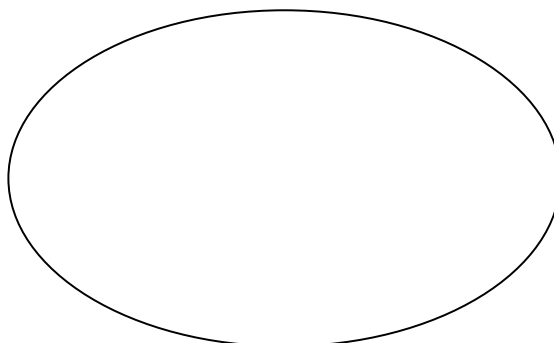
Emelis: *“Primero se mide el eje mayor de la elipse. Luego se escoge un punto extremo del eje menor de la figura geométrica, después se ubican dos puntos que son los focos que al sumar sus distancias hasta el punto ubicado, de igual al eje mayor”.*

Similares respuestas se obtuvieron del resto de los estudiantes. Y además, todos ubicaron los focos en la elipse.

Los otros cinco estudiantes no respondieron este punto de la evaluación.

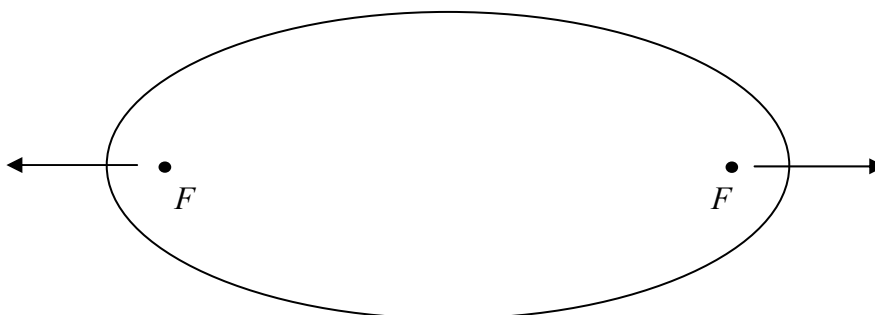
4. Si tenemos la siguiente elipse en posición horizontal y la rotamos un ángulo de 45° , donde **a** es la longitud del semieje mayor y **b** la longitud

del semieje menor, ¿qué ocurre con la longitud y el área que encierra la elipse inicial con respecto a la elipse final?



Todos los estudiantes respondieron en forma similar: *“La longitud y el área es igual, lo único que cambia es la posición”*

5. En la actividad 5, se construyeron elipses manteniendo los focos fijos y variando la longitud de la cuerda; luego se dejó fija la longitud de la cuerda y se varió la distancia entre los focos. Ahora, si se separan los focos de la elipse, pero se conserva la longitud del eje menor, ¿las figuras obtenidas siguen siendo elipses? ¿por qué? ¿qué pasa con el área y la longitud?



Yaider: *“La figura geométrica sigue siendo la misma y la longitud tanto como el área aumenta”*.

Danis: *“al separar más los focos del eje mayor el lugar geométrico que se va obteniendo son más grandes y lo mismo ocurre con su área y su longitud, porque su eje menor se está manteniendo”.*

Carolina: *“la figura que se obtiene es la misma, porque solo se van a separar los puntos, por lo tanto cambia la longitud del eje mayor pero el menor es la misma. El área y la longitud aumentan pues la elipse crece”.*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes.

6. Ahora, si en vez de separar los focos, los acercamos, ¿Las figuras obtenidas siguen siendo elipses? ¿Qué pasa con el eje mayor y el eje menor de la elipse inicial? ¿Qué ocurre con la posición de la elipse?

Johan: *“La figura sigue siendo una elipse, el eje mayor se va reduciendo y de horizontal pasa a vertical”.*

Dayhana: *“La figura obtenida es una elipse, el eje mayor disminuye y el eje menor aumenta La posición cambia de horizontal a vertical”.*

Similares respuestas se obtuvieron de los demás alumnos.

7. Si tenemos una elipse en posición horizontal con centro en el origen donde el eje mayor mide 24cm. y el eje menor 10cm. ¿cuáles son las coordenadas de los focos (utiliza la relación fundamental entre los ejes)?

Veintiocho estudiantes realizaron la siguiente operación:

Jhon Jairo: *“entonces, $a = 12\text{cm}$ y $b = 5\text{cm}$,*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (12)^2 - (5)^2$$

$$c^2 = 119$$

$$c = 10.9\text{cm}$$

$$F_1 = (-10.9,0) \text{ y } F_2 = (10.9,0)$$

Similares respuestas se obtuvieron de los demás estudiantes. Aunque, dos estudiantes cometieron errores al despejar la relación entre los ejes y obtuvieron otros resultados.

3.5.1 Análisis de la prueba escrita. En las respuestas dadas por la mayoría de los estudiantes al punto No 1 de la evaluación, no utilizaron la propiedad que caracteriza a la elipse, sólo tuvieron en cuenta la forma de la elipse para decir si las figuras presentadas eran elipses o no.

Pero en el punto No 2 de la evaluación cuando se les preguntó por puntos específicos como los focos y los vértices, la mayoría de los estudiantes si aplicaron la condición que deben cumplir los puntos para pertenecer a una elipse.

La mayoría de los alumnos, a pesar de redactar de una forma incompleta y confusa el procedimiento ideado por algunos de ellos para ubicar los focos de una elipse, los dibujaron correctamente en la figura dada.

El procedimiento para ubicar los focos en la elipse dado por la mayoría de los estudiantes consistió en lo siguiente: como la suma de las distancias de los focos a cualquier punto de la elipse es igual a la longitud del eje mayor, entonces se toma un punto de la elipse (extremo de b), se toma la medida del eje mayor, entonces del extremo de b mido la mitad de lo que midió el eje mayor (acercándose a uno de los vértices) y donde me de esta última medida, de tal modo que intercepte a dicho eje con la regla, entonces ahí se encuentra un foco (F_1), lo mismo hago para el otro foco (F_2).

Buena parte de los estudiantes aplicaron bien los conceptos de área y longitud de una elipse, al igual que la invariabilidad de los mismos al rotar una elipse.

Los alumnos manejaron muy bien la relación fundamental entre los ejes para hallar la distancia focal y por consiguiente las coordenadas de los focos dependiendo del eje que estemos utilizando. Excepto dos estudiantes que cometieron errores para despejar la ecuación establecida.

La variabilidad del eje mayor cuando se separan o se acercan los focos la asociaron con el incremento o disminución de la longitud y el área respectivamente.

El 80% de los estudiantes lograron el objetivo de esta prueba escrita, el 20% restante presentaron incoherencias en sus respuestas.

CONCLUSIONES

El cambio que se ha venido produciendo en lo que se considera el conocimiento matemático pertinente y deseable para los ambientes escolares, me motivó a seleccionar actividades que indujeran al estudiante al desarrollo de algunas caracterizaciones de los hechos, conceptos, estructuras, destrezas, razonamientos y estrategias que configuran la elipse como lugar geométrico.

Los estudiantes relacionaron los conocimientos previos en cada una de las actividades que los llevó a encontrar su propio conocimiento.

Con este trabajo se logró que los estudiantes caracterizaran la elipse como lugar geométrico puesto que, los alumnos a través de las actividades fueron diferenciando las características de una elipse como: “es un lugar geométrico (actividad 5, punto 9)”, “tiene dos focos (actividades 5 y 6)”, “tiene dos vértices (actividad 4, punto 7)”, “tiene un eje mayor y otro menor (actividad 4, punto 7)”, etc. Así dichos enunciados, como **hechos** aislados (primer nivel del campo conceptual según Rico, 1990) no fueron suficientes para caracterizar la elipse como lugar geométrico, en tanto no diferencian la elipse de otras figuras geométricas.

La construcción del **concepto** (segundo nivel del campo conceptual según Rico, 1990) de elipse requiere del reconocimiento de conexiones y relaciones entre los diversos **hechos**; entonces con el estudio de la actividad 5 y la participación activa de los estudiantes se llegó a la propiedad que caracteriza a la elipse: una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es

constante. Además del reconocimiento de características que se conservaron bajo transformaciones (actividad 4, puntos 5, 12 y 17), rotaciones (actividad 4, punto 18), traslaciones (actividad 5), ampliaciones (actividades 4, 5 y 6) y otros.

Los alumnos formaron **estructuras conceptuales** (tercer nivel del campo conceptual según Rico, 1990) cuando establecieron criterios de clasificación para las elipses a través de la propiedad que las caracteriza (prueba escrita, punto 1), además reconocieron la elipse como un tipo particular de las cónicas, aplicaron razones para comparar la longitud de una circunferencia con respecto a la de una elipse, al igual que con las áreas que encierran respectivamente (actividad 4, puntos 11 y 15). Pero algunos alumnos presentaron dificultades para pasar de lo discreto a lo continuo, tal vez por esto la mayoría de los estudiantes clasificaron elipses teniendo en cuenta sólo su “forma” más no la propiedad que las caracteriza (prueba escrita, punto 1).

La mayoría de los estudiantes desarrollaron **destrezas** (primer nivel del campo procedimental según Rico, 1990) aritméticas, geométricas, métricas, gráficas y de representación al construir elipses utilizando diferentes métodos (actividades 4, 5, 6 y 7), al encontrar la relación fundamental entre sus ejes (actividad 7, punto 8), al asociar la elipse a un plano cartesiano (actividad 7, puntos 1-5) y al establecer conexiones entre la parte algebraica y geométrica para encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen (actividad 8).

Algunos alumnos hicieron **razonamientos matemáticos** (segundo nivel del campo procedimental según Rico, 1990) al fundamentar la idea de ubicar los focos en una elipse cualquiera como la siguiente (actividad 7, punto 6):

Victor y Efraín: “Como la suma de las distancias de los focos a cualquier punto de la elipse es igual a la longitud del eje mayor, entonces tomemos un punto cualquiera de la elipse (señaló con el dedo el extremo de b), en este

caso el eje mayor mide 8cm, entonces parándome en dicho punto mido 4cm hacia el eje mayor (acercándonos a uno de los vértices) y donde me den los 4cm con la regla ahí se encuentra un foco (F_1), lo mismo hago para el otro foco (F_2)”

El nivel de las **estrategias** (tercer nivel del campo procedimental según Rico, 1990) no fue desarrollado hasta el momento por los estudiantes; pero vale la pena rescatar la parte donde se habló que “el límite de una elipse es una circunferencia” puesto que, al dejar un foco fijo de la elipse y acercar el otro hasta hacerlos coincidir se observó que los puntos que componen la elipse “tienden” a formar los de una circunferencia.

En las observaciones realizadas durante el desarrollo de las actividades y debates (o socializaciones) logré detectar en los estudiantes: concepciones matemáticas, intereses, creatividad, actitudes, progreso y obstáculos; aspectos que tuve en cuenta para cambiar y mejorar la planificación.

A medida que fui registrando las notas de clase (tomadas por el profesor de matemáticas que me colaboró), la actitud y el desempeño de los estudiantes frente a cada actividad, obtenía información valiosa para mejorar las interacciones profesor-conocimiento-estudiantes.

Estas actividades de situaciones no rutinarias (es decir, diferentes en donde los estudiantes hacen cálculos sobre algún tema, teniendo en cuenta las definiciones y los procedimientos explicados previamente por el profesor) donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de construir el conocimiento, les permitió confrontar con sus compañeros las estrategias que emplearon en la solución de las preguntas realizadas; esto facilitó crear e incorporar nuevas ideas y conceptos en su estructura mental para mejorar la comunicación matemática y poder modelar algunos problemas de la vida real.

Por último se puede decir que los estudiantes, gracias a las actividades diseñadas, a las aclaraciones y correcciones dadas por la profesora al final de cada actividad y a la valoración de sus propias acciones frente a ellas, lograron identificar la propiedad que caracteriza a la elipse, mediante el análisis de los elementos geométricos que intervienen en su construcción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLT, B. (1989). *Actividades Matemáticas*. Labor. Barcelona

CENTENO, G. y CENTENO, H. (1997). *Nueva Matemática Constructiva*. Libros □ Libros. Santa Fe de Bogotá. D.C.

CONTRERAS, H. Y LIZCANO, G. (1998). *Logros Matemáticos*. McGraww-Hill. Santa Fe de Bogotá. D.C.

EARLE, J. (1986). *Diseño Gráfico de Ingeniería*. Addison-Wesley. Iberoamericana.

HEMMERLING, E. (1998). *Geometría Elemental*. Editorial Limuja. México. D.F.

LARSON, R. (1990). *Cálculo y geometría Analítica*. McGraww-Hill. México. D.F.

LÓPEZ, N. (2000). *La Investigación en el aula. en: revista investigación educativa y formación docente. N° 4. enero, p. 86 – 87*. Santa fe de Bogotá.

MEN (2003.a). *Matemáticas Escolares: Aportes para orientar procesos de innovación*. Bogotá: MEN.

MEN (2003.b). *Evaluar para transformar*. Bogotá: MEN.

MEN. (2003.c). *Estándares Básicos de Calidad*. Bogotá: MEN.

MURCIA, J. (1992). *Investigar para Cambiar, un enfoque sobre investigación acción participante*, tercera edición. Cooperativa editorial Magisterio. Santa fe de Bogotá.

PORLÁN, R. (1995). *Constructivismo y Escuela*. Sevilla: Editorial Diada.

RICO, L. (1990). Diseño curricular en educación matemática: elementos y evaluaciones. En: LINARES, S. y SANCHEZ, M (Eds). *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

ANEXO A.
ACTIVIDAD No 1

- ✓ Analiza la siguiente pregunta y responde: **¿qué figura geométrica forma el conjunto de todos los puntos que están a igual distancia de un punto dado?**

Si no sabes la respuesta, te invito a que sigas las siguientes instrucciones:

- ✓ Dibuja el conjunto de los puntos que se encuentran a 5cm de un punto dado O.

• O

- ✓ Los puntos que hallastes enúmeralos de la siguiente forma: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$, que se encuentran a 5cm de O.
- ✓ ¿Cuántos puntos ($P = P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$) pudistes encontrar?
- ✓ A continuación traza una curva continua que pase por dichos puntos (huella de P).

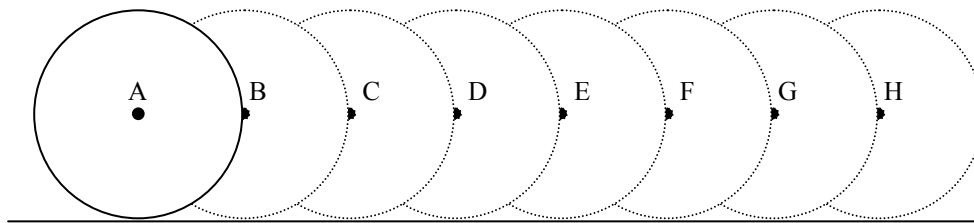
- ✓ ¿Qué forma tiene la huella de P?
- ✓ ¿Qué nombre recibe esta distancia fija (5cm) para la circunferencia?
- ✓ Realiza el anterior procedimiento pero para una distancia de 2.5cm, luego para 8cm.
- ✓ ¿Qué puedes concluir?
- ✓ Ahora, en lugar de usar las palabras “el conjunto de los puntos P tales que...”, podemos decir “el lugar geométrico de los puntos P tales que...” Trata de definir la circunferencia en términos de lugar geométrico.

ANEXO B

ACTIVIDAD No 2

8. Comencemos la actividad con la pregunta: **¿Cuál es el lugar geométrico del centro de una rueda que se mueve a lo largo de un piso horizontal?**

9. Los puntos A, B, C, D,... representan algunas posiciones del centro de la rueda a instantes diferentes durante su movimiento.



10. ¿Qué figura geométrica forma el conjunto de todos los puntos que representan las posiciones del centro a medida que avanza la rueda?

11. ¿Qué relación existe entre esta figura geométrica hallada y la línea recta formada por el piso?

12. ¿Qué puedes concluir? Responde la pregunta inicial.

ANEXO C

ACTIVIDAD No 3

6. Comencemos la actividad con la pregunta: **¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de dos puntos dados?**

7. Observa los puntos A y B.



8. Toma un punto P en una posición equidistante de A y B.

9. Ahora “mueva” el punto P (deje huella con un lápiz) poco a poco procurando que las distancias de P a A y a B sean iguales.

10. ¿Qué forma tiene la huella de P?

11. ¿Cómo es la posición de la figura obtenida en el punto anterior, con respecto al segmento AB?

12. ¿Por cuál punto exactamente del segmento AB pasa dicha figura hallada?

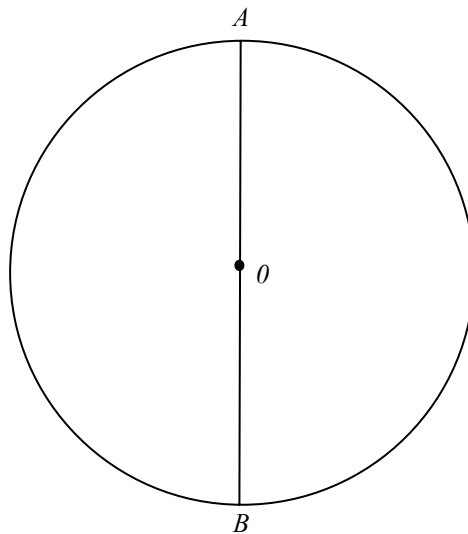
13. ¿Qué nombre recibe esta figura geométrica formada por la huella de P respecto al segmento AB?

14. Responde la pregunta inicial.

ANEXO D

ACTIVIDAD No 4

- ✓ Traza una circunferencia de 5cm de radio en una hoja de papel y traza uno de sus diámetros \overline{AOB} como indica la figura.



- ✓ Luego dibuja el diámetro \overline{COD} perpendicular al segmento \overline{AB} y prolongalo por los dos extremos hasta donde tu hoja te lo permita.
- ✓ Ahora traza un haz de rectas paralelas al segmento CD separadas unas de otras por 1cm. Enumera los puntos de intersección de cada recta paralela con la circunferencia así: del centro hacia arriba con $C_1, D_1; P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2, \dots$, y hacia abajo con $E_1, E_2; F_1, F_2; G_1, G_2; \dots$ y así sucesivamente.
- ✓ Sobre la figura que has obtenido puedes “estirar” la circunferencia hasta duplicar su anchura en la dirección de cada una de las rectas paralelas,

tomando puntos como los $C_1', D_1'; P_1', P_2', Q_1', Q_2', \dots$, cuya distancia al diámetro AB es el doble que la de los $C_1, D_1; P_1, P_2; Q_1, Q_2, \dots$, respectivamente.

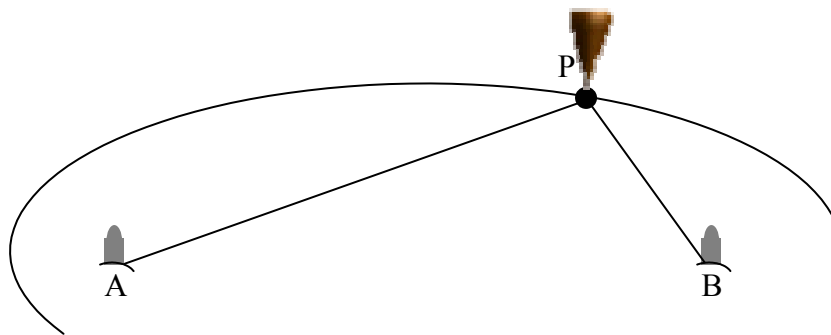
- ✓ Une los puntos C_1', P_1', Q_1', \dots ; para una curva continua y obtendrás una nueva figura. ¿Sabes como se llama este lugar geométrico?
- ✓ ¿Qué objetos de nuestro medio tienen esta forma?
- ✓ En la elipse llamaremos al diámetro $\overline{A'OB'}$ de EJE MENOR. Donde el segmento $\overline{OB'} = \overline{OA'} = \mathbf{a}$ y lo simbolizaremos $2\mathbf{a}$, y al segmento $C_1'O'D_1'$ EJE MAYOR, donde el segmento $OC_1' = OD_1' = \mathbf{b}$ y lo simbolizaremos $2\mathbf{b}$. Los extremos del eje mayor los llamaremos VÉRTICES (V_1 y V_2).
- ✓ Utilicen una cuerda (hilo), midan la longitud de la circunferencia inicial, midan también la longitud de la elipse, compara las dos longitudes ¿Qué observan?
- ✓ Utiliza la fórmula matemática (para calcular la longitud de la circunferencia), ¿Cuál es la longitud de la circunferencia inicial?
- ✓ Si la longitud de la elipse es $\pi(a+b)$ ¿Cuánto mide esta elipse?
- ✓ En términos de razón, ¿cómo es la longitud de esta elipse con respecto a la longitud de la circunferencia de partida?

- ✓ Realiza el anterior procedimiento (el de comparar las longitudes), pero ahora, “estira” la misma circunferencia dos veces en la dirección de las paralela. ¿Qué sucede?
- ✓ ¿Cuál es el área del círculo inicial?
- ✓ Si el área encerrada por la elipse es $\pi(ab)$ ¿Cuánto es el área encerrada por la elipse de la actividad?
- ✓ ¿Cómo es el área encerrada por la elipse, comparada con la del círculo inicial?
- ✓ Realiza el anterior procedimiento (sobre el área), pero ahora, “estira” la misma circunferencia dos veces en la dirección de las paralelas.
- ✓ Investiga, ¿cuál será la forma de la curva obtenida a partir de la circunferencia, si en vez de “estirla” la “contraes” a la mitad en la dirección de las rectas paralelas?
- ✓ Por último, si miramos los diámetros de la circunferencia como si fueran el eje X (AOB) y el eje Y (COD). ¿qué podrías decir de la elipse “estirada” y de la “contráda”?

ANEXO E

ACTIVIDAD No 5

- ✓ Se trasladan los alumnos al patio del colegio, y se pide a uno de ellos que clave en el suelo dos estacas pequeñas A y B, separadas una de otra por un metro. Con una cuerda delgada (o lazo) de unos 1.5m de longitud, ata uno de sus extremos a la estaca A y el otro a la B.
- ✓ Tomen un palo puntiagudo y ubíquelo en la cuerda de tal manera que la estiren y, manteniéndola pensionada como indica la figura, desplacen la punta del palo sobre el suelo hasta obtener una figura. ¿Cuál es este lugar geométrico?



- ✓ Mira la gráfica obtenida en el suelo y la hoja de la actividad. ¿cómo son las distancias de $AP + PB$ para cualquier punto P de la elipse?
- ✓ Si Q es un punto interior de esta elipse, ¿qué podrían decir de la suma de las distancias $AQ + QB$?

- ✓ Investiga el resultado de utilizar diferentes longitudes de cuerda y fijas las estacas A y B (los focos).

- ✓ ¿Qué ocurre si cada vez juntan más las estacas (los focos) y dejan la misma longitud de la cuerda que habían tomado al inicio de la actividad (1.5m)?

- ✓ ¿Qué ocurre si hacemos coincidir las estacas (los focos) dejando una fija y manteniendo la misma longitud de la cuerda?

- ✓ ¿Todas las circunferencias son elipses?

- ✓ Si la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto fijo llamado CENTRO. Definan la elipse como un lugar geométrico.

ANEXO F

ACTIVIDAD No 6

- ☞ Dibuja y recorta con cuidado un círculo de una hoja de bloc, de unos 16cm. de diámetro, y marca sobre él un punto A a unos 2cm del borde. Estas medidas no son esenciales pero permiten ver las cosas con suficiente claridad.

En la práctica, puedes dibujar la circunferencia con ayuda de algún objeto redondo apoyado en el papel, como un plato pequeño boca abajo o una lata de conservas redonda.

- ☞ Pliega el círculo por una cuerda cualquiera PQ, de manera que el arco correspondiente de la circunferencia pase por A, como indica la figura 2.

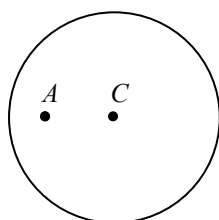


Figura 1

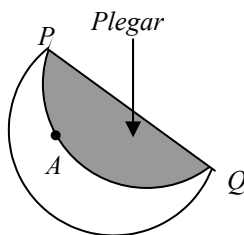


Figura 2

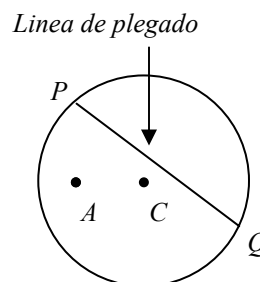


Figura 3

Una vez desdoblado el círculo traza sobre él con un lápiz la cuerda PQ utilizada para plegarlo (figura 3)

- ☞ Repite el proceso por lo menos unas 30 veces, dibujando siempre la cuerda de plegado. ¿Qué lugar geométrico rodean o “envuelven” todas las cuerdas dibujadas?

- ☞ ¿Cómo son las rectas trazadas a la elipse?

- ☞ Investiga: ¿qué ocurrirá al tomar el punto A más próximo al centro C del círculo?

- ☞ ¿Y si A coincidiera con el centro C?

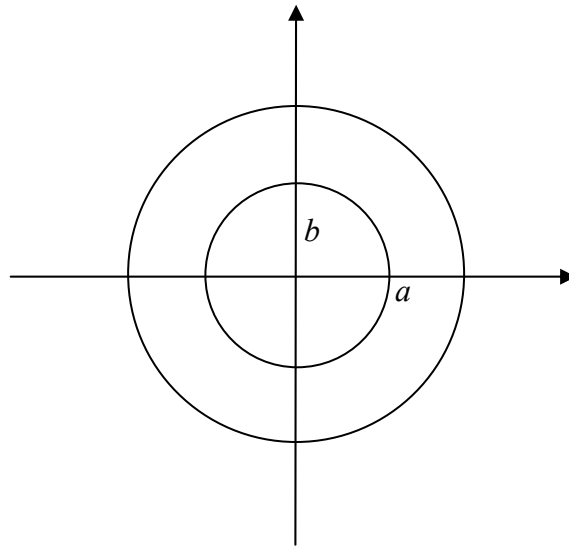
- ☞ Observa la curiosa manera de estar situados los puntos A y C, simétricos con respecto a la elipse. ¿Qué nombre reciben estos puntos?

- ☞ **INFÓRMATE:** La trayectoria de un satélite artificial que gire alrededor de la Tierra es una elipse; pues bien, la Tierra ocupa uno de sus focos, es decir, un punto como el A o el C, y no el centro de la elipse.

ANEXO G

ACTIVIDAD No 7

10. En un plano cartesiano para construir una elipse con escuadra y compás se trazan dos círculos concéntricos cuyos radios son iguales a los semiejes **a** y **b** (ver figura).



11. Traza radios 1, 2, 3, 4, ..., al círculo de mayor radio dejando una amplitud entre ellos más o menos uniforme.
12. Llama a los puntos de intersección de los radios trazados con la circunferencia de menor radio $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ..., respectivamente.
13. Desde 1, 2, 3, 4, ..., traza paralelas al eje Y; y desde $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ..., traza paralelas al eje X.

14. Observa y deduce los puntos que generan la elipse. ¿Cuáles son?

15. Analiza e intenta hallar geoméricamente los focos de la elipse anterior, e identifica sus coordenadas.

16. Observa la siguiente figura, si \mathbf{b} es la distancia entre el centro de la elipse y el extremo superior del eje menor (punto A) y \mathbf{c} la distancia del centro sobre el eje mayor hasta donde se encuentra ubicado uno de los focos (por ejemplo F_1). Unan los puntos A y F_1 por una recta. ¿Qué figura obtuvieron?

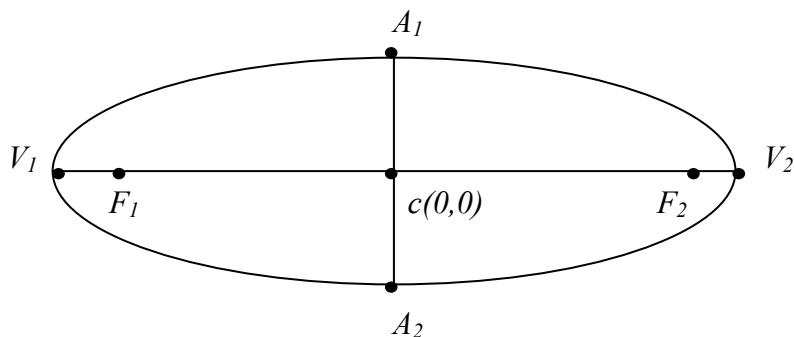
17. ¿Qué relación se puede establecer entre las longitudes de los lados de dicha figura?

18. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices (en términos de \mathbf{a}), y cuáles son las coordenadas de los focos (en términos de \mathbf{c})?

ANEXO H

ACTIVIDAD N° 8

En la siguiente elipse se encuentran señalados sus puntos y segmentos de rectas notables:



19. Los dos puntos fijos: focos F_1 y F_2
 20. Los extremos: vértices V_1 y V_2
 21. El punto medio entre los focos: centro C
 22. El segmento que une a los vértices: eje mayor V_1V_2
 23. El segmento perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro: eje menor A_1A_2
-
8. Grafica una elipse donde el eje mayor tenga longitud $2a$, el eje menor $2b$ y la distancia del centro $C(0,0)$ a cada foco sea c .
-
9. Toma un punto cualquiera sobre la elipse y denótelo $P(X,Y)$. Halle la distancia de P a F_1 y de P a F_2 .

10. Aplique la definición de elipse tomando la constante como **2a**

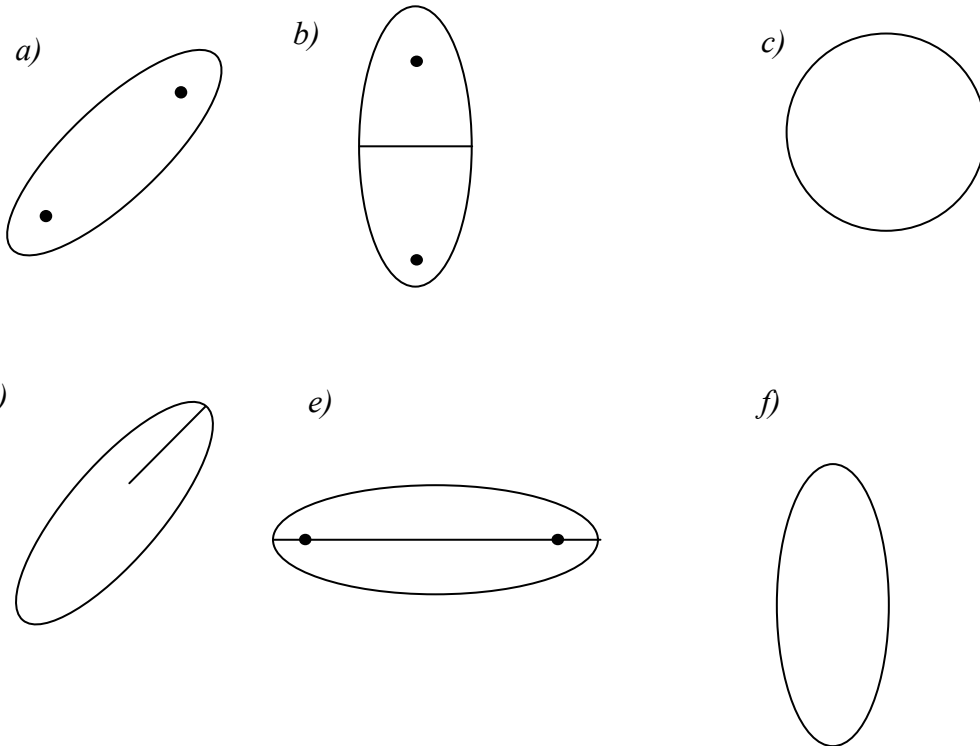
11. Ahora tienes una igualdad donde aparecen radicales ¿Cómo se eliminan radicales en una ecuación?

12. Encuentra la ecuación de la elipse.

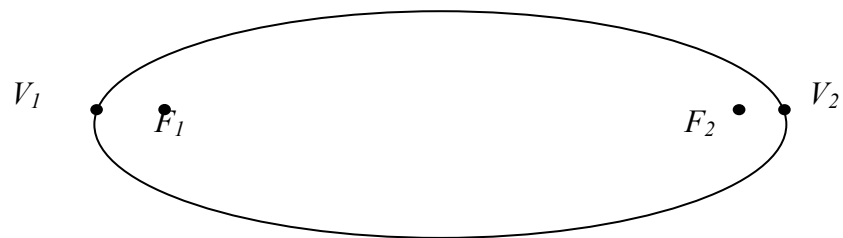
ANEXO I

PRUEBA ESCRITA

☞ Dadas las siguientes figuras, clasifica cuáles son o no son elipses y ¿Por qué?

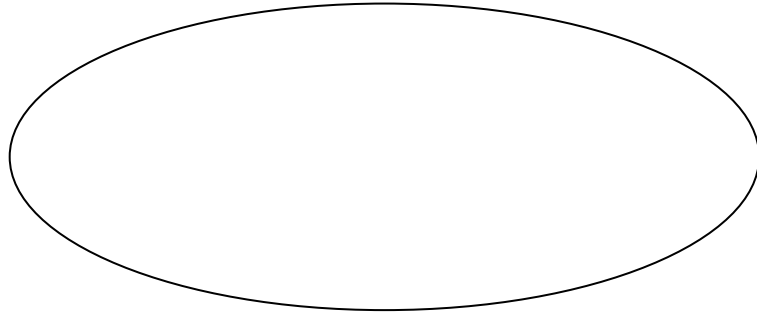


Analiza y responde:



6. ¿Los focos son puntos de la elipse? ¿Por qué?
7. ¿Los vértices son puntos de la elipse? ¿Por qué?

- 📖 Explica un procedimiento para hallar los focos de la siguiente elipse y ubícalos.

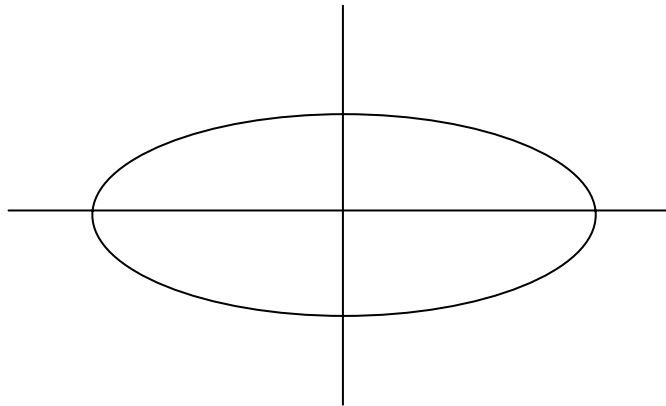


- 📖 Observa la siguiente elipse y róta un ángulo de 45° ; donde:

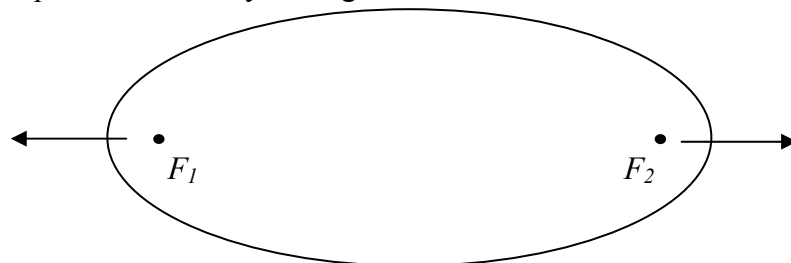
2a: Longitud del eje mayor.

2b: Longitud del eje menor

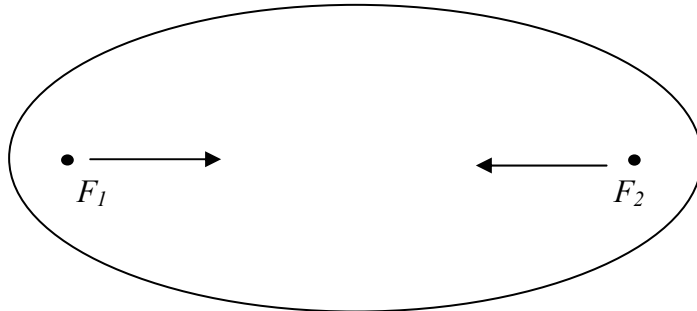
¿Qué ocurre con la longitud y el área que encierra la elipse inicial con respecto al elipse final?



- 📖 En la actividad 5, se mantuvieron fijos los focos y se varió la longitud de la cuerda; luego se dejó fija la longitud de la cuerda y se varió la distancia entre los focos. Ahora si se separan los focos de la elipse pero se conserva la longitud del eje menor, ¿Las figuras obtenidas siguen siendo elipses? ¿Por qué? ¿Qué pasa con el área y la longitud?



- ✎ Ahora, si en vez de separar los focos, los acercamos conservando la longitud del eje menor ¿Las figuras obtenidas siguen siendo elipses? ¿Qué pasa con el eje mayor y el eje menor de la elipse inicial? ¿Qué ocurre con la posición de la elipse?.



- ✎ Dada una elipse en posición horizontal con centro en el origen, donde el eje mayor mide 24cm y el eje menor 10cm ¿Cuánto mide su distancia focal? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos (utiliza la relación fundamental entre los ejes)?.

¡SUERTE!