# Secuencia de enseñanza para la comprensión y deducción de propiedades de triángulos hiperbólicos en un entorno de geometría dinámica

Héctor Fabián Herrera Herrera

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Director:

Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en didáctica de las matemáticas

Codirectora:

Dra. Claudia Inés Granados Pinzón

Doctora en matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de las Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2026

## Dedicatoria

*Dedico este trabajo a Dios nuestro Señor porque en ti, Dios mío, vivimos, nos movemos y existimos (Hch 17, 28). Todo es por ti, para ti y nada ocurre sin ti. Este trabajo fue fruto de tu divina voluntad y hoy lo presento para honra y gloria tuya.*

*Dedico este trabajo a mi mamá: nunca tendré cómo pagarte todo lo que has hecho por mí y, por eso, te dedico mi esfuerzo, mi sacrificio, mis desvelos, mis horas de lectura, mis momentos de fe y de incertidumbre para que este trabajo sea lo que es. Tu apoyo incondicional, tus palabras de ánimo y tus pequeños y grandes gestos de amor, me mantuvieron siempre firme para llevar a buen término esta investigación.*

*Dedico este trabajo a mi papá: querido padre, este es un modesto homenaje, para manifestarte mi eterna gratitud por tus noches de desvelo en el trabajo, tu sacrificio diario por amor a tus hijos para que cumplamos nuestros sueños y tengamos siempre la tranquilidad de que contamos con tu apoyo. Tus palabras de aliento fueron un aliciente para terminar con éxito este trabajo.*

## Agradecimientos

Agradezco a Dios nuestro Señor, por darme vida y salud para realizar esta investigación. Por iluminarme con su sabiduría y darme fuerza cada vez que el camino se ponía difícil. Gracias Señor, por los familiares, amigos, profesores, compañeros y demás personas que pusiste en mi camino y que hicieron más llevadero y ameno este proceso. Gracias Dios mío porque todo es por ti y para ti. Ahora que concluyo este trabajo, me uno a las palabras del salmista: “El Señor es mi fuerza y mi escudo, mi corazón confiaba en él, y me socorrió, por eso mi corazón se alegra y le canto agradecido”.

Agradezco a mis padres, por su apoyo incondicional durante toda la maestría; gracias porque me ayudaron en todos los sentidos posibles y me animaron para culminar con éxito este trabajo.

Agradezco a mis hermanas María Fernanda y Surley Andrea, por su invaluable apoyo, sus palabras de aliento y su cercanía a lo largo del desarrollo de esta investigación. Extiendo mis agradecimientos a toda mi familia por estar siempre para mí.

Agradezco al profesor Jorge Enrique Fiallo Leal, por la dirección de este trabajo. Sus valiosos consejos a lo largo de la maestría y como mi asesor, ayudaron a elevar la calidad de mis discusiones académicas y del trabajo mismo. Gracias por su paciencia, por sus palabras de ánimo, por su comprensión y por su voto de confianza en mí. Espero con este trabajo haber respondido a ese voto de confianza.

Agradezco a la profesora Claudia Inés Granados Pinzón, por motivarme a realizar la maestría y continuar mi formación en la UIS. Gracias profe por creer siempre en mí y ayudarme a mí mismo, a creer en mí. Su huella fue, es y será imborrable en mi vida y estaré eternamente agradecido. Deseo que muchos más estudiantes tengan la fortuna de tenerla como profesora y asesora.

Agradezco al profesor Luis Ángel, a la profesora Solange, a la profesora Sandra y a la profesora Edith por sus valiosas clases, aportes y consejos compartidos durante la maestría y que contribuyeron positivamente al desarrollo de esta investigación y a mi crecimiento como matemático, educador matemático y persona.

Agradezco a los estudiantes del curso de didáctica de la geometría del semestre 2025-1 por su valiosa participación en este trabajo. De manera especial, agradezco al profesor Jairo Gutiérrez Balaguera por su disposición, contribuciones y sugerencias para que el trabajo sea lo que hoy es.

Agradezco al profesor Luis Ángel Pérez y al profesor Heber Mesa por la evaluación de este trabajo, por el tiempo que se tomaron para leerlo y por las sugerencias y aportes que enriquecieron y mejoraron sustancialmente el trabajo.

Agradezco a mis compañeros de la maestría, Álvaro, Jennifer, Luis, Sebastián y Sergio por compartir conmigo este camino de la maestría. Juntos fuimos un gran equipo, compartimos grandes momentos y quedaron recuerdos muy especiales que atesoraré siempre: risas, viajes, celebraciones y hasta pequeños momentos de estrés que juntos superamos. No pude tener mejores compañeros.

Agradezco a la Universidad Industrial de Santander, a la Facultad de Ciencias y a la Escuela de Matemáticas por esta oportunidad de formación. Es un orgullo llevar el sello UIS, como matemático y como magíster en Educación Matemática.

Agradezco a mi profe Cecilia Uribe Motta por su apoyo en todos los sentidos a lo largo del trabajo, por motivarme e impulsarme en el estudio de esta maestría y siempre invitarme a dar lo mejor de mí. Ceci y su linda familia, hijo, sobrinos, hermanos y demás, han sido una gran bendición en mi vida.

Agradezco al Liceo San Fernando, a su rector y mi amigo, Nestor Ricardo, a mis compañeros de trabajo, y de manera especial a Yennith, Leydi y Paula, amigos, amigas y estudiantes por su apoyo a lo largo de este trabajo. Aunque tuve que distanciarme un poco por el compromiso de la maestría, siempre sentí su cariño, afecto y apoyo, que me sostuvo también en los momentos difíciles.

Queridos estudiantes, cada hora de estudio, de trabajo, de lectura, de investigación que realicé es para que ustedes tengan una mejor clase de matemáticas y una mejor experiencia en el ratico que compartimos.

Agradezco al Preicfes H y H y al profesor Hugo, mi amigo, socio y mentor, por el respaldo y apoyo para cursar la maestría.

Agradezco a todas las personas que de una u otra manera aportaron al desarrollo de mi maestría y al feliz término de este trabajo. Que Dios derrame abundantes bendiciones sobre ustedes.

Me agradezco a mí, por seguir siempre adelante a pesar de las noches de cansancio y el tiempo invertido.

## Tabla de contenido

# Lista de tablas

# Lista de figuras

## Resumen

**Título:** Secuencia de enseñanza para la comprensión y deducción de propiedades de triángulos hiperbólicos en un entorno de geometría dinámica *

**Autor**: Héctor Fabián Herrera Herrera **

**Palabras clave:** modelo de Van Hiele, geometría hiperbólica, experimento de enseñanza, disco de Poincaré, Geogebra.

**Descripción**: este trabajo presenta los resultados de una investigación desarrollada bajo la metodología del experimento de enseñanza, cuyo propósito fue diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica orientada al desarrollo de los tres primeros niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele en relación con las propiedades del triángulo hiperbólico. La secuencia se diseñó en el Aula Virtual de GeoGebra e integró la caracterización de los niveles de Van Hiele para los procesos de descripción, definición y demostración propuesta por Algarín y Fiallo (2013).

Como punto de partida, se elaboró una caracterización a priori de los niveles 1, 2 y 3 de razonamiento respecto a propiedades específicas del triángulo hiperbólico, tomando como modelo de representación el disco de Poincaré. Esta caracterización constituyó la conjetura central del experimento y orientó el diseño de las actividades. La secuencia fue implementada en el curso de Didáctica de la Geometría durante el primer semestre de 2025 en la Universidad Industrial de Santander.

El análisis de los resultados permitió refinar tanto la caracterización inicial como la secuencia de enseñanza. Como productos de la investigación se ofrece una caracterización refinada de los niveles de razonamiento de Van Hiele relacionada con las propiedades del triángulo hiperbólico, ampliando su aplicación más allá del ámbito euclidiano, y una secuencia de enseñanza como propuesta didáctica fundamentada teórica y metodológicamente para la enseñanza de dichas propiedades. Finalmente, se presentan reflexiones sobre las implicaciones de aplicar el modelo de Van Hiele en un contexto geométrico no euclidiano.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en didáctica de las matemáticas. Codirector: Claudia Inés Granados Pinzón. Doctora en matemáticas.

## Abstract

**Title:** Teaching Sequence for the Understanding and Deduction of Properties of Hyperbolic Triangles in a Dynamic Geometry Environment *

**Author:** Héctor Fabián Herrera Herrera **

**Keywords:** Van Hiele model, hyperbolic geometry, teaching experiment, Poincaré disk, GeoGebra.

**Description:** This study presents the results of a research project conducted under the teaching experiment methodology, whose purpose was to design, implement, and evaluate a teaching sequence aimed at fostering the development of the first three levels of reasoning of the Van Hiele model in relation to the properties of the hyperbolic triangle. The sequence was designed in the GeoGebra Virtual Classroom and incorporated the characterization of the Van Hiele levels for the processes of description, definition, and proof proposed by Algarín and Fiallo (2013).

As a starting point, an a priori characterization of Levels 1, 2, and 3 of reasoning was developed with respect to specific properties of the hyperbolic triangle, using the Poincaré disk as the model of representation. This characterization constituted the central conjecture of the teaching experiment and guided the design of the instructional activities. The sequence was implemented in the Geometry Didactics course during the first semester of 2025 at the Universidad Industrial de Santander.

The analysis of the results led to a refinement of both the initial characterization and the teaching sequence. The outcomes of the study include a refined characterization of the Van Hiele levels of reasoning related to the properties of the hyperbolic triangle, extending their application beyond the Euclidean domain, and a theoretically and methodologically grounded teaching sequence as a didactic proposal for the instruction of these properties. Finally, reflections are presented on the implications of applying the Van Hiele model in a non-Euclidean geometric context.


---

* Degree Work

** Faculty of Sciences, School of Mathematics. Advisor: Jorge Enrique Fiallo Leal, Ph.D. in Mathematics Education. Co-Advisor: Claudia Inés Granados Pinzón, Ph.D. in Mathematics.

# Introducción

Desde su formulación, el quinto postulado de Euclides, relacionado con las rectas paralelas, despertó gran inquietud entre los matemáticos ya que, la complejidad de su enunciado lo hacía parecer más un teorema que un principio intuitivo y evidente. Por esta razón, numerosos matemáticos intentaron demostrarlo a partir de los cuatro primeros axiomas u optaron por proponer versiones equivalentes al mismo (Wolfe, 2012, p. 20). En el camino surgieron distintas reformulaciones, siendo la más reconocida y popularizada la del matemático y geólogo francés John Playfair, quien establece: “en un plano, dada una línea y un punto que no está en ella, solo se puede trazar una línea paralela a la línea dada que pase por dicho punto” (Trudeau, 2008, p. 128).

En 1763, Georg Klügel[1], presentó una recopilación de 28 intentos fallidos de demostración del quinto postulado de Euclides. A partir de su análisis, concluyó que dicho postulado era irreductible (independiente de los otros postulados) y solo se sostenía por el juicio de nuestros sentidos. A raíz de esta afirmación, varios matemáticos comenzaron a explorar la posibilidad de una geometría consistente basada en la geometría neutra[2] junto con la negación del quinto postulado.

La negación del quinto postulado dio origen a dos afirmaciones: (I) en un plano, dada una línea y un punto que no está en ella, no existe ninguna línea paralela a la línea dada que pase por dicho punto y (II) en un plano, dada una línea y un punto que no está en ella, existen infinitas líneas paralelas a la línea dada que pasan por dicho punto. La primera afirmación dio origen a la geometría elíptica y la segunda afirmación dio origen a la “geometría hiperbólica” denominada así

[1] Estudiante de doctorado de la Universidad de Gotinga

[2] Esta geometría cual incluye los términos primitivos y definidos de Euclides, los primeros cuatro axiomas, las nociones comunes y los teoremas derivados de ellos

por Felix Klein y desarrollada por grandes matemáticos, Gauss en Alemania, Bolyai en Hungría y Lobachevsky en Rusia (Wolfe, 2012, p. 45). Esta nueva geometría representó una ruptura con el pensamiento geométrico tradicional. Ya no se consideraba que la geometría euclidiana era la única posible; surgieron nuevas geometrías, completamente consistentes.

Es así que desde el siglo XIX, la geometría hiperbólica ha ganado relevancia, convirtiéndose en la base matemática de diversas teorías en las ciencias naturales y extendiéndose su enseñanza en instituciones dedicadas a la formación matemática.

La aparición de las geometrías no euclidianas se suma a otros hitos en la historia de la geometría, como el surgimiento de la geometría analítica de Descartes y Fermat, o de la geometría proyectiva de Desargues en el siglo XVII. Sin embargo, a pesar de su relevancia, la geometría fue en gran medida relegada durante los siglos XIX y XX debido a su carácter intuitivo, mientras que muchas áreas de las matemáticas optaron por un enfoque más analítico, centrado en lo aritmético y algebraico. Como consecuencia, la enseñanza de la geometría fue desplazada de los programas formativos. No obstante, algunos matemáticos mantuvieron su interés en el razonamiento geométrico, convencidos de su importancia. En este contexto surgió el trabajo de los Van Hiele, quienes abordaron el problema de la comprensión en geometría.

Estos esposos holandeses, “basados en las experiencias de aula y las dificultades de comprensión que habían observado en sus estudiantes elaboraron un modelo que explica, por una parte, cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos a que mejoren la calidad de su razonamiento” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 1). Así, según los Van Hiele, el razonamiento en geometría se promueve a través en cinco niveles: de reconocimiento o visualización, de análisis, de clasificación o abstracción, de deducción formal y de rigor. Además, proponen cinco fases de aprendizaje que permiten avanzar de un nivel a otro: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración (Hoffer, 1981; Burger y Shaughnessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990). Este enfoque ha sido ampliamente utilizado como marco teórico en estudios sobre el razonamiento geométrico de los estudiantes, convirtiéndose en un referente clave para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

En un comienzo, este modelo fue utilizado especialmente para la geometría euclidiana, dado que la enseñanza de las geometrías no euclidianas había sido muy limitada. No obstante, con el paso del tiempo varios matemáticos y educadores han reflexionado sobre cómo el estudio de geometrías no euclidianas, como la hiperbólica, puede contribuir a mejorar la comprensión de la propia geometría euclidiana y al desarrollo de un pensamiento matemático avanzado. Esto ha llevado a proponer la inclusión de estas geometrías en programas educativos, tanto a nivel universitario como en la educación secundaria; incluso se ha utilizado en muchos casos, el modelo de Van Hiele como marco teórico y metodológico para su enseñanza y aprendizaje en el aula.

En este contexto se situó esta investigación, cuyo objetivo es caracterizar los niveles de razonamiento de los estudiantes según el modelo de Van Hiele en relación con un objeto específico de la geometría hiperbólica: el triángulo hiperbólico. A partir de esta caracterización, se propuso una secuencia de enseñanza en donde se promueve el paso de un nivel de razonamiento a otro, contribuyendo así al desarrollo tanto teórico como práctico en la disciplina. En el ámbito teórico, nos enfocamos en la caracterización de los niveles de razonamiento, mientras que, en el ámbito práctico, desarrollamos una secuencia de enseñanza basada en las fases del modelo de Van Hiele. Esta secuencia podrá ser utilizada por los profesores o servir como referencia para nuevas estrategias de enseñanza en el aula.

Ahora bien, entre los distintos modelos de representación de la geometría hiperbólica, probablemente el más utilizado es el modelo del disco de Poincaré, dado que ofrece una representación de los elementos de la geometría hiperbólica desde un punto de vista euclidiano, lo que permite a los estudiantes una mejor comprensión de los objetos hiperbólicos y sus propiedades. Aprovechando las ventajas del disco de Poincaré, nuestra investigación se apoyó en este modelo para facilitar la comprensión visual y conceptual de la geometría hiperbólica por parte de los estudiantes.

Con el fin de aprovechar las ventajas que proporciona el modelo y dado que múltiples investigaciones han demostrado que el uso de recursos tecnológicos, como softwares de geometría dinámica, contribuye al desarrollo de las habilidades espaciales, visuales y de razonamiento de los estudiantes, la secuencia de enseñanza se diseñó en GeoGebra de modo que, a través de la exploración dinámica, los estudiantes pudieran descubrir y comprender mejor las propiedades relacionadas con el triángulo hiperbólico.

Finalmente, como se mencionó antes, para que la investigación tenga un impacto real en el aula en la formación de futuros matemáticos y licenciados en matemáticas el marco metodológico consistió en un experimento de enseñanza que “consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico” (Camargo, 2021, p. 86). En este experimento, se puso a prueba la secuencia de enseñanza y se evaluó como hipótesis los descriptores propuestos en la caracterización a priori de los niveles de razonamiento. Así, esta investigación tiene como productos una caracterización refinada de los tres primeros niveles de razonamiento específicos a las propiedades del triángulo hiperbólico y una secuencia de enseñanza refinada, orientada a la promoción de dichos niveles.

Este experimento de enseñanza se implementó en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes del curso de didáctica de la geometría del semestre 2025-1. Dadas también las condiciones limitadas de tiempo, no se buscó llevarlos hasta la formalidad del nivel 4 o el rigor del nivel 5 de Van Hiele sino hasta el nivel 3 de deducción informal, donde los estudiantes fueron capaces de razonar sobre el triángulo hiperbólico conforme a los indicadores (descriptores) que corresponden a este nivel.

La estructura de este trabajo se organizó de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentan los antecedentes de la investigación, a partir de una revisión literaria en la que se analizan estudios relacionados con el modelo de Van Hiele, la enseñanza de la geometría hiperbólica y el uso de la tecnología como herramienta para favorecer el aprendizaje de la geometría en los estudiantes. A la luz de estas ideas, se plantea el problema de investigación, así como la pregunta y los objetivos que orientan este trabajo.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico compuesto por el modelo de Van Hiele, la caracterización de los procesos de descripción, definición y demostración propuesto por Algarín y Fiallo (2013), así como los postulados, definiciones y teoremas de la geometría hiperbólica que son de interés en esta investigación.

En el tercer capítulo se plantea el experimento de enseñanza como marco metodológico de la investigación. Este experimento parte de una conjetura, que orienta la investigación. Esta conjetura tiene dos dimensiones, una relacionada con el qué enseñar y otra con el cómo enseñar. En relación con la primera dimensión, se expone la caracterización a priori de los tres niveles de razonamiento; respecto a la segunda, se describe la secuencia de enseñanza diseñada a partir de dicha caracterización.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los resultados de la implementación del experimento.

En el quinto capítulo, con base en los resultados, se exponen las versiones refinadas de la caracterización y la secuencia de enseñanza.

En el sexto capítulo se propone una versión del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría hiperbólica a la luz de algunas consideraciones derivadas de los resultados propuestos en los capítulos anteriores.

Finalmente, en el séptimo capítulo se presentan las conclusiones de la investigación.

# 1 Antecedentes y problema de investigación

Para abordar los objetivos planteados en la introducción, fue fundamental realizar un análisis histórico y epistemológico de la geometría hiperbólica para comprender las circunstancias que propiciaron su surgimiento, las razones que sustentan su consistencia, los modelos que la representan, sus principales resultados y su aplicabilidad.

Junto a esto, fue fundamental estudiar el modelo de Van Hiele, sus características y las aplicaciones reportadas en investigaciones previas, así como el modo en que el uso de entornos de geometría dinámica puede facilitar la transición entre los distintos niveles de razonamiento. De igual forma, se estudiaron los procesos de descripción, definición y demostración en la actividad matemática con el objetivo de clasificar los descriptores de acuerdo a dichos procesos.

Finalmente, fue necesario profundizar en el experimento de enseñanza como marco metodológico de una investigación, revisando sus principales características, sus etapas y algunos ejemplos de implementación exitosa.

Con base en estos elementos, se organizaron los antecedentes de la investigación en tres grandes ejes:

(1) historia y epistemología de la geometría hiperbólica,

(2) el modelo de Van Hiele como referente para la caracterización del razonamiento geométrico, el estudio de los procesos matemáticos y el avance entre niveles mediante el uso de GeoGebra

(3) el experimento de enseñanza como marco metodológico de investigación.

## 1.1 Historia y la epistemología de la geometría hiperbólica.

El desarrollo de la geometría hiperbólica ha sido objeto de diversos estudios históricos y epistemológicos. Bonola (1955) expone algunos de los argumentos más importantes dados por los griegos, los árabes y los geómetras del renacimiento en su intento de probar el quinto postulado de Euclides. Además, analiza las ideas de Saccheri, considerado precursor de la geometría hiperbólica, quien empleó la reducción al absurdo para intentar demostrar que el quinto postulado era consecuencia de los otros cuatro. Aunque Saccheri no pretendía desarrollar una nueva geometría, su trabajo condujo de manera indirecta a la aparición de la geometría hiperbólica. Bonola (1955) también aborda los principios fundamentales de los sistemas geométricos basados en la negación del quinto postulado de Euclides desarrollados por Lobachesky y Gauss y finalmente, presenta una descripción detallada de la evolución de las geometrías no euclidianas.

En este mismo sentido, Gans (1973) examina los postulados y las nociones comunes de Euclides, así como algunas consecuencias del quinto postulado y posibles reformulaciones para este. Además de revisar los intentos de demostración del quinto postulado, Gans aborda aspectos que resultaron especialmente relevantes para esta investigación: el estudio de algunas propiedades del triángulo hiperbólico, tales como la suma de sus ángulos internos de un triángulo hiperbólico o la congruencia y la semejanza en este nuevo contexto.

Por su parte, Trudeau (2008), realiza un análisis histórico y epistemológico de la geometría hiperbólica. Comienza presentando la sistematización de Euclides de la geometría a través de sus términos primitivos, términos definidos, postulados y nociones comunes. Luego, expone los teoremas del libro I de Euclides que no dependen del quinto postulado (los cuales también se cumplen en la geometría hiperbólica) y los que sí dependen de este, haciendo énfasis en los pasos de la demostración vinculados al quinto postulado, así como los problemas, las reinterpretaciones y expresiones lógicamente equivalentes que dieron algunos matemáticos de este postulado. Al destacar la diferencia entre los teoremas que son independientes de este postulado y aquellos que no lo son, Trudeau expone algunos argumentos históricos sobre la posibilidad de desarrollar una geometría consistente basada en la negación del quinto postulado y la geometría neutral. Finalmente, presenta algunos resultados (teoremas) de la geometría hiperbólica y presenta el modelo del disco de Poincaré que proporciona reinterpretación visual de los objetos de la geometría euclidiana en la geometría hiperbólica.

Wolfe (2012) complementa este análisis al mostrar cómo la negación del quinto postulado afecta propiedades fundamentales y define nuevas propiedades. Por ejemplo, en geometría hiperbólica, a diferencia de la geometría euclidiana, la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre menor de 180°, lo cual se relaciona directamente con el concepto de "defecto" y la relación entre el área y dicho defecto. Este punto es fundamental para entender las diferencias visuales y conceptuales entre ambas geometrías.

Finalmente, Coxeter (1998) no solo muestra y amplía algunos de los resultados anteriores, sino que también presenta teoremas relacionados con las líneas y puntos notables del triángulo hiperbólico.

La revisión de estos antecedentes proporcionó una base sólida para entender los fundamentos históricos, lógicos y visuales de la geometría hiperbólica. Permitió comprender no solo las razones que llevaron a su desarrollo, sino también cómo estas nuevas geometrías abren caminos para replantear la enseñanza tradicional, liberándonos de las limitaciones de las representaciones visuales habituales.

## 1.2 El modelo de Van Hiele como referente para la caracterización del razonamiento geométrico, el estudio de los procesos matemáticos y el avance entre niveles mediante el uso de GeoGebra

### *1.2.1 El modelo de Van Hiele*

Este modelo es ampliamente reconocido y utilizado a nivel mundial para la caracterización del razonamiento geométrico. Diversos estudios han explorado su aplicación en diferentes niveles educativos y contextos geométricos. Hoffer (1981), al reflexionar sobre la apatía hacia la geometría mostrada por los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, propone un marco que permite vincular las habilidades geométricas de los estudiantes con los niveles de razonamiento establecidos por Van Hiele. Por su parte, Burger y Shaughnessy (1986) realizaron un estudio con 13 estudiantes desde el primer grado hasta la universidad, evaluando su razonamiento geométrico mediante entrevistas clínicas sobre triángulos y cuadriláteros. Ambos artículos aportan una descripción detallada de los niveles de Van Hiele y de ejemplos de aplicación que sirvieron como base teórica para esta investigación.

Corberán (1989) describe tanto los niveles de razonamiento como las fases de aprendizaje que componen el modelo, ofreciendo un ejemplo de su aplicación al caracterizar los primeros cuatro niveles de razonamiento en relación con las propiedades de los polígonos. Además, propone un proceso de evaluación dividido en dos fases: la observación directa, que se lleva a cabo a lo largo de las diversas actividades desarrolladas en las distintas fases de aprendizaje, y la fase de interrogación, en la que a través de preguntas se busca que el estudiante demuestre su nivel de comprensión y razonamiento.

Siguiendo esta línea, Jaime y Gutiérrez (1990) presentan una amplia descripción del modelo de Van Hiele que luego utilizan para presentar en (1991) una investigación cuyo objetivo es acercar a los profesores al modelo de razonamiento propuesto por Van Hiele mediante una unidad de enseñanza centrada en los giros en el plano. El estudio comienza con una fundamentación teórica de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del modelo, seguida de una descripción detallada de las características de cada nivel en relación con los giros.

Finalmente, se introduce la unidad didáctica, diseñada específicamente para estudiantes de tercero a undécimo grado y futuros docentes de educación primaria.

Asimismo, encontramos otros ejemplos de aplicación de este modelo para la enseñanza de distintos conceptos y resultados de la geometría. Corberán et al. (1994), en el marco de una convocatoria nacional de proyectos de investigación educativa, diseñaron una propuesta curricular específica para la enseñanza de la geometría plana, haciendo uso del modelo de Van Hiele. Por su parte, Guillén (2004) aplicó este modelo de Van Hiele para la enseñanza de sólidos geométricos, destacando su importancia para la comprensión de estas figuras.

Vargas et al. (2013) aplican un conjunto de doce actividades relacionadas con el teorema de Pitágoras mediadas por GeoGebra a un grupo de estudiantes de grado noveno con el objetivo de medir el nivel de razonamiento de estos estudiantes de acuerdo con el modelo de Van Hiele y compararlo con un grupo de estudiantes que abordan el teorema de Pitágoras con el enfoque tradicional.

La anterior revisión bibliográfica ofrece distintos ejemplos sobre cómo se puede utilizar el modelo de Van Hiele para la enseñanza y aprendizaje de la geometría y nos sirven de referentes para la caracterización de los niveles de razonamiento y la elaboración de las actividades de la secuencia de enseñanza.

### *1.2.2 Procesos de la actividad matemática*

Algarín y Fiallo (2013) implementaron el modelo de Van Hiele en una unidad de enseñanza compuesta por cuatro actividades apoyadas en GeoGebra, a través de las cuales analizaron el nivel de razonamiento de los estudiantes en relación con las razones trigonométricas. Para llevar a cabo este análisis, caracterizaron los comportamientos de los estudiantes en cada nivel del modelo, considerando el proceso matemático que estaban desarrollando: descripción, definición o demostración.

En este trabajo se adoptó dicha caracterización por procesos como base para la formulación de los descriptores correspondientes a cada nivel de razonamiento.

### *1.2.3 Modelo de Van Hiele y geometría dinámica*

En el marco del proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica y media de Colombia, Castiblanco et al. (2004) plantean las siguientes características y fortalezas de los softwares de geometría dinámica:

- La capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación (p. 19).
- El uso extensivo de locus (lugar geométrico) y trace (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) permite visualizar y descubrir hechos geométricos (p. 21).

- La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico (p. 22).

De igual forma, plantean que:

> El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Al estrechar los lazos entre la visualización y la justificación, los programas de geometría dinámica contribuyen a crear un puente entre el dibujo (producido utilizando únicamente ajustes perceptivos) y el objeto geométrico que dicho dibujo representa (producido con base en relaciones geométricas). El uso del software se convierte así en un puente entre el conocimiento empírico que se valida a través de la ostensión y el conocimiento formal que se valida a través de la deducción (Castiblanco et al., 2004, p. 25).

Asimismo, Patsiomitou (2008) propone que los softwares de geometría dinámica “fueron diseñados para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y pueden desempeñar un papel fructífero y crucial en el proceso de creación y evaluación de conjeturas que fomentan la creatividad de los estudiantes, contribuyendo en gran medida al desarrollo del razonamiento matemático” (p. 355). Y sobre las actividades comenta que “deben diseñarse para motivar a los estudiantes y alentarlos a construir activamente el conocimiento” (p. 355). Patsiomitou (2008) concluye que el uso de software de geometría dinámica puede contribuir al paso de un nivel a otro de acuerdo al modelo de Van Hiele.

En este mismo sentido, Gawlick (2005) reflexiona sobre cómo el uso de la geometría dinámica puede promover el avance de los tres primeros niveles de razonamiento a los dos últimos (relacionados con la deducción formal y el rigor en matemáticas). En este sentido dice:

> El valor del enfoque dinámico es doble: puede continuarse en niveles superiores y prepararse en niveles inferiores, de modo que los estudiantes se familiarizan con las herramientas, así como con una mentalidad de "descubridor". en todos los niveles; proporciona una base material para las fases secuenciales del aprendizaje en la descripción de Van Hiele sobre la progresión de un nivel a otro: es decir, pueden explorar el tema en una fase de orientación dirigida a través del software de geometría dinámica y luego construir los nuevos conceptos por sí mismos, basándose en sus conocimientos previos (Gawlick, 2005, p. 10).

Fuys, Geddes y Tischler, (1988) citados en Gawlick (2005) afirman que "las manipulaciones dinámicas ayudan en la transición del primer al segundo nivel de Van Hiele" (p. 1) y que "es recomendable que los estudiantes analicen figuras dinámicas para descubrir sus propiedades características y relacionarlas" (p. 1).

Finalmente, Restrepo-Ochoa et al. (2023) construyen una unidad didáctica para el estudio de la proporcionalidad en geometría (semejanza, homotecia, teorema de Tales) bajo los principios del modelo de Van Hiele y enfatizando en la habilidad de visualización mediante el uso de GeoGebra. Un aspecto importante de este artículo es que enfatiza en la importancia del proceso de visualización y las ventajas del uso de software para el mejoramiento del razonamiento, como lo enuncian en una de las contribuciones a la literatura: “Los resultados de este estudio confirman que el uso de la geometría dinámica, especialmente el software GeoGebra, junto con el desarrollo de unidades didácticas bien estructuradas, a partir del modelo de Van Hiele (1986), contribuyó al desarrollo del razonamiento geométrico” (p. 2).

Los anteriores referentes muestran las ventajas del uso de Software de Geometría dinámica como GeoGebra para la promoción de la comprensión y el razonamiento en geometría. En nuestro caso, utilizamos GeoGebra como una herramienta que favorece la visualización, el descubrimiento de propiedades y la argumentación en las actividades propuestas en la secuencia de enseñanza de modo que los estudiantes alcanzaran el nivel de razonamiento que se deseaba.

### *1.2.4 El uso de Geogebra en la geometría hiperbólica*

Venema (2013, pp. 96-106), utiliza GeoGebra como herramienta para explorar algunos resultados de geometría euclidiana avanzada (resultados de geometría euclidiana posteriores a Euclides). En particular, el autor presenta ejemplos que facilitan la exploración del modelo del disco de Poincaré, el cual actúa como una representación euclidiana de una geometría no euclidiana pues como señala el autor, “la herramienta principal utilizada en la construcción del modelo de disco de Poincaré es la inversión en círculos euclidianos” (p. 105).

En el capítulo XIII, titulado “Modelo de Poincaré”, Venema (2013) guía a los estudiantes en la construcción de líneas rectas hiperbólicas dentro del disco de Poincaré, comenzando con un ejercicio preliminar sobre inversión en círculos. A lo largo del capítulo, invita a los estudiantes a aprovechar las herramientas euclidianas disponibles en GeoGebra. Después de construir segmentos y triángulos, introduce conceptos como las líneas asintóticamente paralelas y perpendiculares a una línea hiperbólica dada.

Posteriormente, el autor guía a los estudiantes en la construcción de círculos hiperbólicos, a los que se refiere como el "compás hiperbólico" y en la utilización de otras herramientas hiperbólicas. Finalmente, se presentan ejercicios que permiten a los estudiantes identificar puntos y rectas notables, así como sus propiedades en un triángulo hiperbólico, un aspecto de gran relevancia para nuestra investigación.

Rodríguez (2012) presenta el paso a paso de la elaboración en GeoGebra de algunas herramientas de la geometría hiperbólica utilizando el modelo del disco de Poincaré, en particular, de recta, semirrecta por dos puntos, punto medio, segmento entre dos puntos, recta perpendicular, rectas paralelas, mediatriz, circunferencia dado su centro y uno de sus puntos, distancia hiperbólica, circunferencia dado su centro y radio, reflexión respecto a una recta hiperbólica, reflexión en un punto, ángulo, área de un triángulo, triángulo equilátero, cuadrado, rotación, traslación. Estas herramientas se crearon en GeoGebra y se utilizaron en la secuencia de enseñanza de esta investigación.

### *1.2.5 Enseñanza de las geometrías no euclidianas, en particular, la geometría hiperbólica*

Silva (2013) propone una secuencia de actividades que permitan enseñar desde el nivel escolar las geometrías no euclidianas a través del uso de software de geometría dinámica. Se apoya en la idea de Bonete (2000) de que “esta inclusión [de las geometrías no euclidianas] puede proporcionar una visión más amplia de los conocimientos geométricos euclidianos y no euclidianos, así como una comprensión del significado filosófico de esos conocimientos” (p. 119), más aún, “no tendrán la geometría euclidiana como la única geometría posible y verdadera, sino como una de las posibles y verdaderas” (p. 119). Un aspecto interesante de esta propuesta es que, aunque no declara explícitamente el uso del Modelo de Van Hiele para caracterizar el razonamiento de los estudiantes, aparece implícito al realizar afirmaciones como: “Organizamos la secuencia de actividades en un grado creciente de complejidad, haciendo siempre un paralelo con conceptos e ideas que son conocidos de la geometría euclidiana” (p. 119) o “este trabajo no tuvo la pretensión de realizar demostraciones en el campo de las geometrías no euclidianas. Es una propuesta orientada a realizar los primeros experimentos de pensamiento en el universo de las geometrías no euclidianas” (p. 120).

Por su parte, Hitt et al. (2017) publican su libro “Mathematics and technology” como un resultado de recopilación de los principales artículos expuestos en los congresos de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas en donde exponen que las herramientas tecnológicas “permiten un nuevo tipo de representación dinámica y ofrecen oportunidades a los docentes para enfatizar la construcción particular del conocimiento, como elementos del entorno de aprendizaje de los estudiantes, brindando la oportunidad de comprender conceptos matemáticos de manera dinámica” (p. 2).

De estos artículos destacamos el de Kotarinou y Stathopoulou, C. (2017) en donde proponen que:

> La enseñanza de las geometrías no euclidianas ayudaría a los estudiantes a reconocer que existen varias otras geometrías y espacios, distintos de los euclidianos, y a darse cuenta de que las matemáticas no son una verdad absoluta y que las comparaciones entre conceptos geométricos similares en los diversos sistemas axiomáticos contribuyen a una mejor comprensión de estos conceptos (p. 77).

Asimismo, Moreno, Brady y Elizondo (2018) presentan los resultados de una investigación en donde prepararon un entorno de aprendizaje mediado por GeoGebra para introducir a profesores en servicio en el estudio de un modelo hiperbólico. Concluyen que un entorno de geometría dinámica puede "ayudarnos a operar para construir significado en el ámbito hiperbólico, permitiéndonos erigir un sistema hiperbólico dentro del euclidiano, si aprendemos a ver los objetos y acciones geométricas como hiperbólicas o euclidianas en sucesión" (p. 19). Este artículo presenta un análisis del impacto de la aparición de la geometría hiperbólica en la epistemología de las matemáticas y sus consecuencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Lugo y Rojas (2021) plantean un conjunto de diez actividades para estudiantes de grado séptimo que les permitan "Caracterizar el pensamiento geométrico involucrado en el proceso de realizar construcciones en las que se contraste la forma en que se relacionan la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana". Las actividades se desarrollan en 3 etapas: La primera se basa en realizar diferentes construcciones con regla y compás, buscando motivar a los estudiantes para aprender. La segunda etapa se basa en llevar a cabo un proceso de construcción de las proposiciones del Libro I de Euclides, etapa que se complementa con el desarrollo de problemas no rutinarios basados en esta geometría. Finalmente, en la tercera etapa, se investigan nuevas geometrías con la ayuda de la computadora.

Los antecedentes presentados proporcionaron una base sólida para la presente investigación sobre la enseñanza de la geometría hiperbólica y el uso del modelo de Van Hiele en el contexto educativo, así como la eficacia del uso de un entorno de geometría dinámica como GeoGebra. Estas investigaciones no solo validaron la relevancia del modelo de Van Hiele para facilitar la comprensión de conceptos geométricos, sino que también subrayaron la importancia de incorporar tecnologías digitales para potenciar el aprendizaje.

## 1.3 El experimento de enseñanza como metodología de Investigación

Con el fin de que los resultados de la investigación trasciendan el ámbito teórico y puedan tener un impacto real en el aula, se optó por utilizar el experimento de enseñanza como marco metodológico. Kelly (2004) destaca que una de las principales fortalezas de este enfoque es su capacidad para "eliminar el abismo existente entre la práctica educativa y los análisis teóricos, ya que proveen informes contextualizados sobre el aprendizaje de los estudiantes, relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido".

El experimento de enseñanza forma parte de un paradigma metodológico más amplio denominado investigación de diseño. El artículo de Molina et al. (2011) busca "contribuir a la divulgación y desarrollo de la investigación de diseño, así como promover la reflexión y discusión sobre este paradigma metodológico" (p. 76). En este artículo se presentan las características del experimento de enseñanza, sus fases, su duración y todos los elementos que intervienen. Steffe y Thompson (2000) citados en Molina et al. (2011) establecen que “de forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores” (p. 79).

Dado que en esta investigación se caracterizaron los primeros niveles de razonamiento de los estudiantes en relación con las propiedades del triángulo hiperbólico, de acuerdo con modelo de Van Hiele, el experimento de enseñanza resultó especialmente adecuado. Como señala Molina et al. (2011), estos experimentos “se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos” (p. 79). En este caso, la hipótesis central fue la caracterización a priori del razonamiento de los estudiantes en relación con los triángulos hiperbólicos.

En este mismo artículo de Molina y otros, se presenta un ejemplo de investigación relacionada con el pensamiento numérico y algebraico en estudiantes de primaria cuyo marco metodológico es el experimento de enseñanza.

Para aplicar adecuadamente este enfoque metodológico, es fundamental profundizar en cada una de las fases que conforman el experimento de enseñanza. En este sentido, Steffe et al. (2012) reflexionan sobre los principales lineamientos y elementos clave de este marco y sus fases.

A lo largo de la literatura, encontramos múltiples ejemplos de aplicación exitosa del experimento de enseñanza y sobre los cuales reflexionaremos para una adecuada implementación en nuestra investigación. Perry et al. (2012) presentan en su artículo los resultados de “un experimento de enseñanza realizado en un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas.” Moore (2013) utiliza el experimento de enseñanza como marco metodológico en una investigación donde se explora cómo la cuantificación de la medida angular, mediante procesos que implican la medición de longitudes de arcos, puede apoyar comprensiones coherentes de la medida de ángulos.

De igual manera, Samper y Toro (2017) proponen un experimento de enseñanza en tres etapas (diseño, implementación y análisis) para enseñar conceptos básicos de geometría euclidiana y teoremas sobre la congruencia de triángulos, utilizando el software de geometría dinámica Cabri con estudiantes de octavo grado.

Por último, recurrimos al libro de Camargo (2021), dirigido a investigadores en formación y a educadores. Este libro ofrece un recurso bibliográfico valioso para aquellos que están elaborando tesis o trabajos de grado en educación matemática. Nos enfocamos particularmente en el capítulo 3, que detalla la estrategia investigativa del experimento de enseñanza, la cual fue clave para estructurar nuestra investigación.

En resumen, el experimento de enseñanza proporcionó un marco metodológico sólido y adaptable para abordar el problema de esta investigación y generar resultados aplicables en la práctica educativa.¿

## 1.4 Planteamiento del problema

A pesar de su importancia en el desarrollo del pensamiento geométrico y la comprensión de diferentes sistemas axiomáticos, la geometría hiperbólica sigue siendo poco enseñada en los entornos educativos tradicionales. El modelo de Van Hiele ha demostrado ser eficaz para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico y para crear estrategias para favorecer el desarrollo de estos niveles en los estudiantes, pero hasta la fecha no existe una caracterización clara de los niveles de razonamiento en torno al triángulo hiperbólico, ni una secuencia didáctica que permita a los docentes abordar su enseñanza de manera estructurada. Además, el uso de GeoGebra ha mostrado un gran potencial para facilitar la comprensión de objetos geométricos complejos, pero su aplicación en el contexto de la geometría hiperbólica sigue siendo limitada.

Por tanto, el objetivo de esta investigación fue diseñar, implementar y evaluar una secuencia de enseñanza del triángulo hiperbólico con la mediación de GeoGebra para los tres primeros niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele. La investigación también buscó caracterizar los niveles de razonamiento de los estudiantes en relación con las propiedades del triángulo hiperbólico y verificar la efectividad de la secuencia en la práctica, contribuyendo a la incorporación de la geometría hiperbólica en el aula.

## 1.5 Pregunta de investigación

¿Cuáles son las características de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele específicos al estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico en un experimento de enseñanza mediado por GeoGebra con estudiantes universitarios?

## 1.6 Objetivos

A la luz de la pregunta de investigación y del planteamiento del problema, se presentan los siguientes objetivos:

### *1.6.1 Objetivo general*

Caracterizar los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión de las propiedades del triángulo hiperbólico en un entorno de geometría dinámica.

### *1.6.2 Objetivos específicos*

- Realizar una caracterización a priori de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele específicos al estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico en un experimento de enseñanza mediado por GeoGebra.

- Diseñar una secuencia de enseñanza en GeoGebra para estudiantes universitarios, orientada a desarrollar los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele específicos al estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico, teniendo en cuenta la caracterización a priori.

- Implementar una secuencia de enseñanza en GeoGebra con estudiantes universitarios, orientada a desarrollar los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele específicos al estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico.

- Complementar la caracterización a priori con las características emergentes del experimento de enseñanza y plantear una caracterización de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele específicos al estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico en GeoGebra para estudiantes universitarios.

- Ajustar la secuencia de enseñanza con los resultados obtenidos del experimento de enseñanza y la caracterización de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele.

# 2 Marco teórico

El marco teórico aborda tres elementos fundamentales: el modelo de Van Hiele como referente teórico para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; la caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele concernientes a los procesos de descripción, definición y demostración según lo propuesto por Algarín y Fiallo (2013); y las definiciones, postulados y teoremas de la geometría hiperbólica relacionados con las propiedades del triángulo hiperbólico relevantes para esta investigación.

## 2.1 Modelo de Van Hiele

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, pp. 304-305), las ideas centrales del modelo de Van Hiele pueden enunciarse así:

1. Se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2. Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma.

Con base en esto, los mismos autores (1990, p. 305) identifican dos componentes o dimensiones del modelo de Van Hiele:

- **Dimensión descriptiva**: identifica los niveles de razonamiento, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo.

- **Dimensión metodológica**: proporciona a los profesores directrices denominadas fases de aprendizaje sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que puedan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento.

### *2.1.1 Niveles de razonamiento*

Con el objetivo de tener una caracterización amplia y detallada de cada uno de los niveles de razonamiento, se han considerado diferentes referentes teóricos que de una u otra manera complementan la caracterización a partir de los descriptores y/o reflexiones que ofrecen.

Las siguientes son las características de los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele:

**Nivel 1. De reconocimiento o visualización**

Como su nombre lo indica, en este nivel de razonamiento los estudiantes reconocen las propiedades físicas de los objetos geométricos a partir de la visualización. En otras palabras, su razonamiento se basa en lo que perciben visualmente y no en las propiedades geométricas ni las reglas de la lógica.

Hoffer (1981, p. 13) describe el nivel 1 como el momento en el que “el estudiante aprende vocabulario y reconoce una figura como un todo”, enfatizando la función lingüística y perceptiva del inicio del razonamiento geométrico. En esta misma línea, Burger y Shaughnessy (1986, p. 1), afirman que en este nivel “el estudiante razona sobre conceptos básicos geométricos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo sin consideración explícita de las propiedades de sus componentes”. Ambas perspectivas coinciden en la visualización como fuente primaria de conocimiento geométrico al considerar las figuras como un todo, aunque cada uno enfatiza en un aspecto fundamental de la teoría: Hoffer resalta el papel de la visualización en la adquisición del lenguaje geométrico mientras que Burger y Shaughnessy enfatizan en la visualización como una forma de razonamiento previa a la conceptualización cognitiva. Crowley (1987, p. 2) amplía esta descripción al afirmar que:

> En esta etapa inicial, los estudiantes son conscientes del espacio únicamente como algo que existe a su alrededor. Los conceptos geométricos se perciben como entidades totales más que como objetos con componentes o atributos. Las figuras geométricas, por ejemplo, se reconocen por su forma en conjunto, es decir, por su apariencia física, no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona en este nivel puede aprender vocabulario geométrico, identificar figuras específicas y, dada una figura, puede reproducirla.

Por su parte, Fuys et al. (1988, p. 5), caracterizan este nivel en términos de las acciones que el estudiante puede realizar, por ejemplo, “el estudiante identifica, nombra, compara y opera con figuras geométricas (por ejemplo, triángulos, ángulos, líneas que se intersecan o paralelas) según su apariencia”.

De acuerdo con lo anterior, este nivel es el más elemental del razonamiento geométrico.

Los siguientes son algunos descriptores que plantean Burger y Shaughnessy (1986, p. 9):

1. Uso de propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras.

2. Referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.
3. Inclusión de atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.
4. Clasificaciones inconsistentes; es decir, clasificaciones por propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas.

Fuys et al. (1988, pp. 58-59) complementan los anteriores descriptores afirmando que en este nivel el estudiante:

5. Construye, dibuja o copia una figura.

Finalmente, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 306) plantean que en este nivel los estudiantes:

6. Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
7. Perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
8. Se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
9. Basan las descripciones de la figura en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como "… se parece a…", "…tiene forma de…", etc.
10. No suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

Corberán (1989), sintetiza adecuadamente las características del nivel 1, afirmando que:

> En este nivel, una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos. Las descripciones reflejan experiencias puramente visuales (…). Un alumno en este nivel puede aprender vocabulario geométrico, puede identificar formas geométricas determinadas de entre un conjunto de ellas y, dada una figura, puede reproducirla.

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 307) resaltan un aspecto fundamental del razonamiento: “cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, estos van a pasar por el nivel 1”. Esta observación fue particularmente importante para esta investigación, ya que los estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza no habían tenido contacto previo con la geometría hiperbólica y, por lo tanto, al comienzo se encontraban todos en este nivel del modelo.

En síntesis, el nivel 1 representa el punto de partida del razonamiento de los estudiantes en el que el pensamiento es predominantemente perceptivo y global.

**Nivel 2. De análisis**

En contraste con el nivel 1, en el que los estudiantes consideraban las figuras como un todo y se centraban en reconocer sus propiedades físicas, en el nivel 2, los estudiantes comienzan a identificar las componentes y propiedades geométricas de los objetos y a partir de ellas conformar clases de figuras.

Hoffer (1981, p. 14), describe este nivel como aquel en el que “el estudiante empieza a analizar las propiedades de las figuras”. Burger y Shaughnessy (1986, p. 1) amplían esta descripción al señalar que dichas propiedades se analizan a través de sus componentes, es decir, “el estudiante razona sobre conceptos geométricos por medio de un análisis informal de las partes componentes y atributos. Se establecen las propiedades necesarias del concepto”. En otras palabras, el razonamiento pasa de ser global y perceptivo a analítico pues los estudiantes comienzan a identificar y comparar propiedades matemáticas.

Crowley (1987, p. 2), profundiza en esta idea al señalar que “a través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades emergentes se utilizan luego para conceptualizar clases de figuras”. Esta característica fue fundamental para esta investigación, ya que el uso del aula virtual de GeoGebra favoreció la observación y la experimentación para el descubrimiento de las propiedades por parte de los estudiantes.

Al igual que en el nivel anterior, Fuys et al. (1988, p. 5) describen el nivel en términos de las acciones o comportamientos de los estudiantes, por ejemplo, en este nivel “el estudiante analiza las figuras en términos de sus componentes y las relaciones entre estos, y descubre empíricamente propiedades o reglas de una clase de figuras (por ejemplo, doblando, midiendo, usando una cuadrícula o un diagrama)”.

Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) caracterizan el nivel 2 a partir de los siguientes descriptores:

1. Comparar figuras explícitamente por medio de propiedades de sus componentes.

2. Clasificar por atributos simples, tales como propiedades de los lados, mientras descuidan ángulos, simetrías, etc.
3. Aplicar una letanía de propiedades necesarias en lugar de determinar propiedades suficientes cuando identifican figuras, explican identificaciones y se deciden por una figura misteriosa.
4. Descripciones de tipos de figuras mediante uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos, incluso si los conocen.
5. Rechazo explícito de las definiciones de figuras de los libros de texto en favor de la caracterización personal.
6. Tratamiento de la geometría como física cuando se comprueba la validez de una proposición; por ejemplo, contando con una variedad de dibujos y haciendo observaciones sobre ellos.
7. Carencia explícita de comprensión de la prueba matemática.

Fuys et al. (1988, pp. 60-63) amplían la lista de descriptores así:

8. Descubre propiedades de figuras específicas de manera empírica y generaliza propiedades para esa clase de figuras.
9. Descubre propiedades de una clase de figuras desconocida.
10. Resuelve problemas geométricos usando propiedades conocidas de las figuras o enfoques ingeniosos.
11. Formula y usa generalizaciones acerca de las propiedades de las figuras (guiado por el profesor/material o espontáneamente), y utiliza lenguaje relacionado (por ejemplo, todo, cada, ninguno), pero:

a. No explica cómo ciertas propiedades de una figura están relacionadas.
b. No formula ni usa definiciones formales.
c. No explica relaciones entre subclases más allá de verificar ejemplos específicos con una lista de propiedades.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), en este nivel los estudiantes:

12. Se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.
13. Además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
14. No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51) además establecen que, en este nivel, los estudiantes:

15. Deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308) establecen que un cambio fundamental del nivel 2 respecto al nivel 1 es que los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades. Otro avance importante en el tipo de razonamiento de un nivel respecto a otro está en el desarrollo por parte de los estudiantes de la capacidad para reconocer que las figuras concretas que están manipulando son (o pueden ser) representantes de unas familias.

De igual forma, los mismos autores (1990, p. 309) plantean que el nivel 2 es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar "matemático", pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían. Sin embargo, esta capacidad de razonamiento es limitada, pues usarán las propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí.

Corberán (1989) sintetiza adecuadamente las características del segundo nivel así:

> El alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante procesos de observación y experimentación. Empiezan a establecerse las propiedades esenciales de los conceptos, aunque todavía el alumno es incapaz de ver relaciones entre propiedades y entre figuras. Tampoco es capaz de elaborar o entender definiciones.

El nivel 2 entonces representa un cambio fundamental en el razonamiento: los estudiantes comienzan a construir redes conceptuales basadas en la identificación de propiedades geométricas de los objetos mediante la observación y la experimentación. En este nivel comienza el razonamiento matemático, aunque todavía depende de la manipulación empírica de los objetos que realicen los estudiantes.

**Nivel 3. De clasificación, abstracción o deducción informal**

En el nivel 3 las redes conceptuales construidas por los estudiantes en el nivel 2 se hacen más complejas. Los estudiantes comienzan a establecer relaciones entre las propiedades descubiertas en el nivel 2 y refinan sus definiciones, su vocabulario y, en general, su razonamiento lógico.

Hoffer (1981, p. 14), describe este nivel como aquel en el que “el estudiante organiza lógicamente las figuras, comprende relaciones entre ellas y la importancia de las definiciones precisas”. Burger y Shaughnessy (1986, p. 1) complementan la caracterización de Hoffer al mencionar que en este nivel el estudiante no solo comprende la importancia de las definiciones, sino que “construye definiciones abstractas y puede distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto”.

Crowley (1987, p. 2), señala algunas limitaciones de este nivel:

> El estudiante en este nivel no comprende aún la importancia de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas. Los resultados empíricos obtenidos suelen utilizarse junto con técnicas deductivas. Las demostraciones formales pueden ser seguidas, pero los estudiantes no ven cómo podría modificarse el orden lógico ni cómo construir una demostración a partir de premisas diferentes o poco familiares.

Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) plantean los siguientes descriptores para caracterizar el nivel 3:

1. Formación de definiciones completas de tipos de figuras.
2. Habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos.

3. Referencias explícitas a las definiciones.
4. Habilidad para aceptar formas equivalentes de definiciones.
5. Habilidad para clasificar figuras conforme a una variedad de atributos matemáticamente precisos.
6. Uso explícito de enunciados “si, entonces”.
7. Habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales, usando implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena (si *p* implica *q* y *q* implica *r*, entonces *p* implica *r*) y la ley de separación (*modus ponens*).
8. Confusión entre los papeles de axioma y teorema.

Fuys et al. (1988, pp. 64-68) complementan la anterior caracterización así:

9. Reconoce informalmente la diferencia entre un enunciado y su recíproco.
10. Identifica y utiliza estrategias o razonamientos intuitivos para resolver problemas.

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309), amplían la caracterización del nivel 3 así:

11. Comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir estas implicaciones; en particular, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.

12. Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticas correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
13. Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración: pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.
14. Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51) agregan que los estudiantes en este nivel:

15. Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades en base a propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal.
16. No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 310) reflexionan sobre algunas diferencias fundamentales del nivel 3 respecto al nivel 2: si la capacidad de razonamiento propia del nivel 2 no permitía a los estudiantes entender que unas propiedades pueden deducirse de otras, al alcanzar el nivel 3 habrán adquirido esta habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. Asimismo, en este nivel los estudiantes podrán dar definiciones matemáticamente correctas, sin redundancia, en vez de “definir” las figuras mediante listas exhaustivas de propiedades, como hacían en el nivel 2. La capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, es decir, implicaciones simples, no pudiendo, por ejemplo, darse cuenta de la técnica seguida para hacer la demostración completa de un teorema.

Frente a la demostración, los mismos autores plantean que la incapacidad de los estudiantes para comprender las demostraciones viene acompañada de un sentimiento de que las demostraciones formales no son necesarias, pues para ellos es suficiente si se comprueba el teorema en cuestión en una cantidad “razonablemente grande” de casos. Una reacción típica de los estudiantes del nivel 3 o inferiores es que, ante la petición del profesor de que demuestren alguna propiedad, le reprochen: “¿por qué tenemos qué demostrarla, si ya sabemos que es verdad?”.

Corberán (1989) sintetiza el nivel 3 así:

> El alumno ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, empieza a construir definiciones abstractas y puede distinguir entre necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades en la determinación de un concepto. En este nivel puede seguir y dar argumentos informales, pero no comprende el significado de la deducción o el papel de los axiomas. Puede seguir demostraciones formales, pero no puede entender cómo construir una demostración partiendo de premisas diferentes.

Los tres niveles mencionados anteriormente son los que se abordaron en esta investigación. Sin embargo, para tener una visión global del modelo, se presentan a continuación las características de los niveles 4 y 5.

**Nivel 4. De deducción formal**

En el nivel 4 los estudiantes utilizan la deducción para establecer nuevas propiedades de los objetos geométricos a partir de definiciones, postulados y propiedades o teoremas ya establecidos.

De acuerdo con Hoffer (1981, p. 14), en este nivel "el estudiante entiende la importancia de la deducción y el papel de los postulados, teoremas y pruebas". En esta misma línea, Fuys et al. (1988, p. 5) afirman que en este nivel el estudiante no solo comprende la importancia del sistema axiomático, sino que **"**demuestra teoremas deductivamente **y** establece interrelaciones entre redes de teoremas"**.**

Crowley (1987, p. 3) complementa la cuestión de la demostración al afirmar que "una persona puede construir demostraciones, no solo memorizarlas; percibe la posibilidad de desarrollar una demostración de más de una manera; comprende la interacción entre las condiciones necesarias y suficientes; y puede distinguir entre una proposición y su recíproca".

Burger y Shaughnessy (1986, p. 10) caracterizan este nivel así:

1. Clasificación de cuestiones ambiguas y reformulación de problemas en un lenguaje preciso.
2. Conjeturas frecuentes e intentos de verificar conjeturas deductivamente.
3. Confianza en la demostración como autoridad *final* para decidir la verdad de una proposición matemática.
4. Comprensión de los papeles de las componentes en un discurso matemático, tales como axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones.

5. Aceptación implícita de los postulados de la geometría euclídea.

Para Fuys et al. (1988, pp. 69-70) en este nivel, el estudiante:

6. Reconoce las características de una definición formal, como las condiciones necesarias y suficientes, y la equivalencia entre definiciones.
7. Demuestra en un contexto axiomático las relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 3.
8. Demuestra relaciones entre un teorema y enunciados relacionados, tales como el recíproco, el inverso y el contrarrecíproco.
9. Establece interrelaciones entre redes de teoremas.
10. Compara y contrasta diferentes demostraciones de teoremas.
11. Crea demostraciones a partir de conjuntos simples de axiomas, usando con frecuencia modelos para apoyar los argumentos.
12. Realiza argumentos deductivos formales, pero no investiga la estructura axiomática en sí misma ni compara diferentes sistemas axiomáticos.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 310), en este nivel los estudiantes:

13. Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.
14. Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir, el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, etc.

15. Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema), la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990), al alcanzar el nivel 4 de razonamiento se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se esté estudiando.

Corberán (1989) sintetiza este nivel así:

> El alumno razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas. En este nivel un alumno es capaz de construir, no ya memorizar, demostraciones. Se puede estudiar la posibilidad de que una demostración se desarrolle siguiendo más de una secuencia de proposiciones. Se entiende la interacción entre condición necesaria y suficiente.

**Nivel 5. De rigor**

Crowley (1987, p. 3) señala que este nivel es el menos desarrollado en los trabajos originales y Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que muchos autores consideran que este nivel es problemático en tanto que representa un salto no secuencial respecto al nivel anterior.

Según Hoffer (1981, p. 14) en este nivel, “el estudiante comprende la importancia de la precisión en los fundamentos y las relaciones entre estructuras”. Burger y Shaughnessy (1986, p. 1) amplían esta descripción al afirmar que “el estudiante puede comparar sistemas basados en diferentes axiomas y puede estudiar varias geometrías en ausencia de modelos concretos.

Fuys et al. (1988, p. 71) propone los siguientes descriptores para este nivel:

1. Establece rigurosamente teoremas en diferentes sistemas axiomáticos.
2. Compara sistemas axiomáticos (por ejemplo, geometrías euclidianas y no euclidianas); explora espontáneamente cómo los cambios en los axiomas afectan la geometría resultante.
3. Establece la consistencia de un conjunto de axiomas, la independencia de un axioma y la equivalencia de diferentes conjuntos de axiomas; crea un sistema axiomático para una geometría.
4. Inventa métodos generalizados para resolver clases de problemas.
5. Busca el contexto más amplio en el cual un teorema o principio matemático puede aplicarse.
6. Realiza un estudio profundo de la lógica del tema para desarrollar nuevas perspectivas y enfoques sobre la inferencia lógica.

Corberán (1989) sintetiza este nivel así:

> El alumno puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Este nivel es prácticamente inalcanzable por un estudiante de secundaria. Por ello la mayoría de los trabajos de investigación se centran en los tres primeros. El propio Pierre Marie Van Hiele reconoce su interés casi exclusivo por los tres primeros niveles.

**Características generales del modelo**

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 311) destaca las siguientes características:

1. No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.
2. Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles. Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Asimismo, el significado de la palabra demostrar varía de acuerdo al nivel.
3. El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua. Cada nivel de Van Hiele se caracteriza por varias habilidades de razonamiento cuando se tenga un dominio adecuado de todas esas destrezas.

### *2.1.2 Evaluación*

Los profesores e investigadores que trabajan sobre el modelo de Van Hiele utilizan generalmente dos métodos para determinar el nivel de razonamiento. Uno de los métodos consiste en la realización de entrevistas individuales entre el profesor y cada estudiante, durante las cuales el profesor plantea diversas actividades y dialoga con el alumno en función de su forma de resolverlas y del nivel de razonamiento que vaya mostrando durante la entrevista. El otro método consiste en la realización por los estudiantes de un ejercicio escrito formado por una serie de actividades que pueden ser similares a las usadas en el modelo anterior. En este caso se optó por el segundo método.

**Normas para la elaboración del cuestionario**

- Se deben seleccionar actividades cuyas respuestas sean lo suficientemente largas como para que los estudiantes puedan hacer visibles sus ideas y su forma de razonar.
- Para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así.

### *2.1.3 Fases de aprendizaje*

Estas fases hacen referencia a las etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, es decir, es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieren de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. A continuación, se presenta la descripción de cada fase propuesta por Jaime y Gutiérrez (1990):

- **Primera fase. Información:** el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Asimismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho. Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que este averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar.

- **Segunda fase. Orientación dirigida**: en esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que "las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior" (Van Hiele, 1986, p. 97).

Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

- **Tercera fase. Explicitación:** una de las finalidades principales de esta fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), ordenarlas y expresarlas con claridad.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar.

- **Cuarta fase. Orientación libre:** en esta fase, los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero estos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. El núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y formas de razonamiento.

- **Quinta fase. Integración:** a lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

## 2.2 Procesos de la actividad matemática

La actividad matemática se desarrolla a través de distintos procesos, entre los que se encuentran la descripción, la definición y la demostración, descritos por Algarín y Fiallo (2013) así:

- **Proceso de descripción:** según Guillén (2004), este proceso consiste en enumerar las propiedades o características físicas y geométricas de conceptos u objetos matemáticos. Gutiérrez (2007) añade que la descripción se da mediante la observación de ejemplos, la identificación de propiedades y su verbalización.
- **Proceso de definición**: de acuerdo con Gutiérrez (2007), la formulación de una definición implica varias acciones clave como observar ejemplos, identificar propiedades y generalizarlas para, finalmente, verbalizar una definición.
- **Proceso de demostración**: según Fiallo (2011), la demostración es el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o

validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

**Niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele y su relación con los procesos matemáticos**

Algarín y Fiallo (2013) caracterizan los tres primeros niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele asociados a los procesos de descripción, definición y demostración de la siguiente manera:

**Nivel 1:**

- **Proceso de descripción:** los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo (Burger y Shaughnessy, 1986). Según Gutiérrez (2007), en este nivel los estudiantes describen las propiedades físicas de los objetos.

- **Proceso de definición:** Los estudiantes describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.

- **Proceso de demostración:** en este nivel no hay razonamiento matemático formal, por lo que los estudiantes no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007).

**Nivel 2:**

- **Proceso de descripción:** los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, estableciendo las propiedades necesarias del concepto (Burger y Shaughnessy, 1986). Gutiérrez (2007) señala que, en este nivel, los estudiantes describen las propiedades geométricas de los objetos matemáticos.

- **Proceso de definición:** los estudiantes describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos. Utilizan definiciones con una estructura lógica simple y construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades de los objetos, de manera redundante o insuficiente (Gutiérrez, 2007).

- **Proceso de demostración:** Los estudiantes realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2011).

**Nivel 3:**

- **Proceso de descripción:** se considera que en este nivel no se da ya el proceso de descripción.

- **Proceso de definición**: los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y distinguen entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al definir un concepto (Burger y Shaughnessy, 1986). Además, pueden utilizar cualquier tipo de definiciones (Gutiérrez, 2007).

- **Proceso de demostración**: los estudiantes realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual, experimento mental transformativo y experimento mental estructurado (Fiallo, 2011), es decir, los estudiantes realizan demostraciones deductivas informales.

## 2.3 Geometría hiperbólica

Existen numerosas propiedades que se pueden explorar del triángulo hiperbólico, en particular, en este trabajo se estudiaron las siguientes:

- Clasificación de los triángulos hiperbólicos según sus lados y sus ángulos.
- Suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico.
- Desigualdad triangular.
- Congruencia y semejanza de triángulos hiperbólicos.
- El teorema de Pitágoras en el triángulo hiperbólico.
- Puntos y líneas notables en triángulos hiperbólicos.

Algunas de estas propiedades, como la desigualdad triangular, dependen únicamente de los primeros cuatro postulados de Euclides (geometría neutra) y, por lo tanto, se cumplen tanto en la geometría euclidiana como en la no euclidiana. Sin embargo, otras propiedades, como el teorema de Pitágoras, requieren el quinto postulado, por lo que no se cumplen en la geometría hiperbólica.

A continuación, se presentan las definiciones, los postulados y los teoremas que se consideraron para el estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico mencionadas anteriormente.

### 2.3.1 El sistema axiomático formal de la geometría euclidiana

Con Tales de Mileto, la geometría adquiere una dimensión abstracta: deja de ser simplemente una herramienta de medición y cálculo destinada a la agricultura y la construcción para convertirse en una ciencia deductiva. Pitágoras continúa este camino de formalización, y en el proceso surgen numerosos geómetras que se dedican a sistematizar el conocimiento acumulado hasta ese momento. Sin embargo, es el tratado de Euclides el que finalmente prevalece sobre los demás, lo que le confiere el título de "gran sistematizador". Así, la geometría pasa a denominarse geometría euclidiana. Esta geometría puede considerarse como un sistema axiomático formal compuesto de términos primitivos (no definidos), postulados, términos definidos y teoremas.

Como se mencionó previamente, la geometría neutra incluye solo los primeros cuatro postulados de Euclides, omitiendo el quinto postulado. Esta geometría es compatible tanto con la geometría euclidiana como con la geometría hiperbólica. A continuación, se presentan los principales elementos de la geometría neutra con base en Bonola (1995), Gans (1973), Trudeau (2008) y Wolfe (2012).

**Términos primitivos**

Wolfe (2012, p. 4) menciona que “las figuras de la geometría se construyen a partir de varios elementos como puntos, líneas, planos, curvas y superficies”. Estos elementos fundamentales como punto, línea, línea recta son fundamentales también y constituyentes de los elementos de la geometría hiperbólica.

**Postulados** (Wolfe, 2012, p. 4)

- **Postulado 1**: es posible trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier punto.
- **Postulado 2**: es posible prolongar una línea recta finita de manera continua en una línea recta.
- **Postulado 3**: Es posible describir un círculo con cualquier centro y cualquier distancia (radio).
- **Postulado 4**: todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

**Nociones comunes** (Wolfe, 2012, p. 4)

- **Primera noción:** las cosas que son iguales a una misma cosa también son iguales entre sí.
- **Segunda noción**: si a iguales se les añade iguales, los conjuntos son iguales.
- **Tercera noción:** si a iguales se les resta iguales, los restos son iguales.
- **Cuarta noción:** Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

- **Quinta noción:** El todo es mayor que las partes.

## Términos definidos

Dentro de los términos definidos Euclides propone: ángulo plano, ángulo rectilíneo, ángulo recto, recta perpendicular, ángulo obtuso, ángulo agudo, círculo, centro de un círculo, entre otros.

Finalmente, con base en los axiomas, en las nociones comunes y con los términos primitivos y definidos, se producen de manera deductiva y sintética los resultados lógicos denominados teoremas.

Por tanto, se enuncian los teoremas del libro I de Euclides relacionados con las propiedades de interés para este trabajo.

### Teoremas del libro I que dependen de los cuatro primeros postulados

Los 28 primeros teoremas del libro I y el teorema 31 se demuestran solo con los 4 primeros postulados y las nociones comunes (Trudeau, 2008). En particular son de interés para este trabajo los relacionados con los triángulos:

- **Teorema 1**: en la línea recta finita dada, construir un triángulo equilátero.

- **Teorema 4:** Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen los ángulos formados por las líneas rectas iguales, también tendrán la base igual a la base, el triángulo será igual al triángulo, y los ángulos restantes serán iguales a los ángulos restantes respectivamente, es decir, aquellos que están opuestos a los lados iguales. **Criterio de congruencia L-A-L**.

- **Teorema 5:** En los triángulos isósceles, los ángulos en la base son iguales entre sí, y, si las líneas rectas iguales se prolongan, los ángulos debajo de la base también serán iguales entre sí.

- **Teorema 6**: Si en un triángulo dos ángulos son iguales entre sí, los lados que subtienden esos ángulos también serán iguales entre sí.

- **Teorema 8**: Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y también tienen la base igual a la base, entonces también tendrán los ángulos iguales que están contenidos por las líneas rectas iguales. **Criterio de congruencia L-L-L**.

- **Teorema 20**: En cualquier triángulo, dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante. **Desigualdad triangular.**

- **Teorema 26:** Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente, y un lado igual a un lado, a saber, ya sea el lado adyacente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante. **Criterio de congruencia A-L-A.**

- **Teorema 31.** A través de un punto dado trazar una línea recta paralela a una línea recta dada.

Los teoremas 1, 5 y 6 contribuyen, por ejemplo, a la clasificación de los triángulos; los teoremas 4, 8 y 26 aportan información sobre la congruencia de triángulos (en particular, en la geometría hiperbólica, la congruencia de triángulos es equivalente a la semejanza de triángulos) y el teorema 20 introduce la desigualdad triangular.

**Quinto postulado**: Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas forma ángulos interiores en el mismo lado que son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se extienden indefinidamente, se encontrarán en ese lado donde están los ángulos menores que los dos ángulos rectos.

Con frecuencia, el quinto postulado se presenta mediante la formulación equivalente propuesta por Playfair, según la cual, por un punto exterior a una recta, solo puede trazarse una recta paralela a la recta dada.

**Teoremas del libro I que se prueban con el quinto postulado:**

- **Teorema 32**. En cualquier triángulo, si uno de los lados se prolonga,

- (a) el ángulo exterior es igual a los dos ángulos interiores y opuestos, y
- (b) los tres ángulos interiores del triángulo son iguales a dos ángulos rectos. **Suma de los ángulos internos del triángulo.**

- **Teorema 47**: En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que contienen el ángulo recto. **Teorema de Pitágoras.**

- **Teorema 48:** Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo es recto.

El teorema 32 se refiere a la suma de los ángulos internos de un triángulo, el teorema 47 enuncia el teorema de Pitágoras, y el teorema 48 establece el recíproco de dicho teorema. Dado que estos teoremas dependen del quinto postulado, no se cumplen en la geometría hiperbólica.

### *2.3.2 Definiciones y resultados de la geometría hiperbólica*

**Definición 1 (Rectas ultraparalelas):** Dos rectas hiperbólicas son ultraparalelas si no se cortan en el plano hiperbólico ni tienen puntos en común en el infinito.

**Definición 2 (Rectas asintóticamente paralelas):** Dos rectas hiperbólicas son asintóticamente paralelas si no se cortan en el plano hiperbólico, pero tienen un punto común en el infinito.

**Definición 3 (Cuadrilátero de Saccheri):** es un cuadrilátero en el que un par de lados opuestos son iguales y tienen uno de los otros lados como perpendicular común. La perpendicular común se llama la base, el lado opuesto a ella es el vértice, y los ángulos adyacentes al vértice son los ángulos del vértice. Trudeau (2008, p. 132)

**Teorema 4**: Si los vértices de un cuadrilátero son consecutivamente A, B, C, D, con ángulos rectos en A y B, entonces DA es mayor que, igual a o menor que CB si y solo si, respectivamente, el ángulo CDA es menor que, igual a o mayor que el ángulo DCB. Trudeau (2008, p. 133).

**Corolario 5:** Los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son iguales. Trudeau (2008, p. 133).

**Teorema 6:** Sea ABC un triángulo. Sean D y E los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Trácese la recta hiperbólica l que pasa por los puntos D y E. Por los vértices B y C constrúyanse las rectas perpendiculares a l, las cuales intersectan a l en los puntos F y G, respectivamente, entonces:

a. El cuadrilátero BCGF es un cuadrilátero de Saccheri.
b. La base FG mide el doble de DE.

c. La suma de los dos ángulos de la cumbre, FBC y GCB, es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo. Trudeau (2008, pp. 134-135).

**Teorema 7:** Los ángulos de la cumbre del cuadrilátero de Saccheri son agudos. Trudeau (2008, p. 210).

**Teorema 8**. La suma de los ángulos de cualquier triángulo hiperbólico es menor que 180°. Trudeau (2008, p. 210) y Wolfe (2012, p. 82).

**Teorema 9**. La suma de los ángulos de todo cuadrilátero hiperbólico es menor que 360°. Trudeau (2008, p. 212) y Wolfe (2012, p. 82).

**Teorema 10.** Si los tres ángulos de un triángulo son iguales, respectivamente, a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. Trudeau (2008, p. 212) y Wolfe (2012, p. 83).

El teorema 8 establece una diferencia fundamental entre la suma de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana y en la geometría hiperbólica: en la primera, la suma es exactamente 180° mientras que en la segunda es menor que 180°.

En la geometría euclidiana, el teorema 10 se relaciona con el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo para la semejanza de triángulos; sin embargo, en este contexto corresponde a un criterio de congruencia.

**Teorema 11:** En la Geometría Hiperbólica, al igual que en la Euclidiana, las mediatrices perpendiculares de los lados de un triángulo son concurrentes, y también lo son las bisectrices de los ángulos**,** las alturas y las medianas. Sin embargo, en este caso, las líneas deben considerarse a veces como si se intersectaran en puntos ideales (puntos en el infinito, es decir, en el borde del disco) o ultraideales (puntos más allá del borde del disco). Wolfe (2012, pp. 90-91).

En el caso de las líneas que se cortan en puntos ultraideales, puede interpretarse como líneas que no se cortan, dentro del modelo.

### *2.3.3 El modelo del disco de Poincaré*

El modelo de Poincaré reduce la consistencia de la geometría hiperbólica a la de la geometría euclidiana. (Trudeau, 2008, p. 236)

Los puntos en el modelo del disco de Poincaré son los puntos del disco unitario abierto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

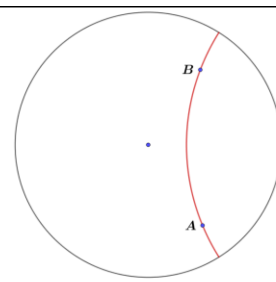
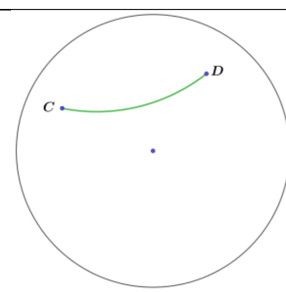
Con este modelo euclidiano de la geometría hiperbólica, Poincaré reemplazó el plano infinito por un disco circular finito donde la circunferencia del disco representa la infinitud hiperbólica. En el modelo de disco, las líneas hiperbólicas se muestran como arcos de círculos ortogonales a la circunferencia del disco. Dentro de nuestro "mundo" hiperbólico, las otras formas se definen de la manera habitual. Los ángulos se miden de manera euclidiana, considerando el ángulo entre las líneas tangentes de las curvas en el vértice del ángulo, mientras que la definición de la distancia no es la euclidiana (Davis 1993).

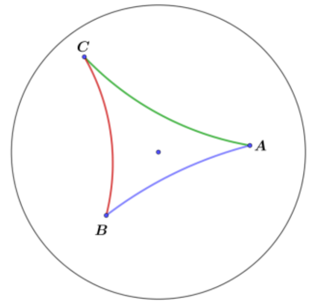
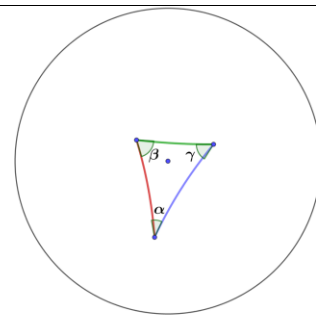
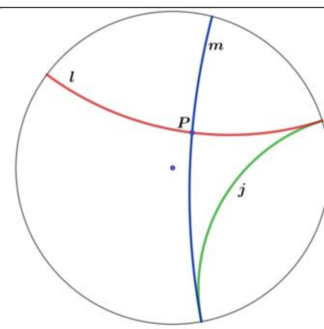
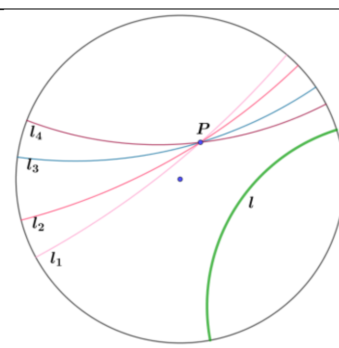
Este modelo, desde una perspectiva didáctica, permite, a través de la visualización, enseñar a los estudiantes la geometría hiperbólica como un sistema axiomático consistente y ayudarles a distinguir algunos de los teoremas y propiedades inusuales de esta geometría (Kotarinou y Stathopoulou, 2017).

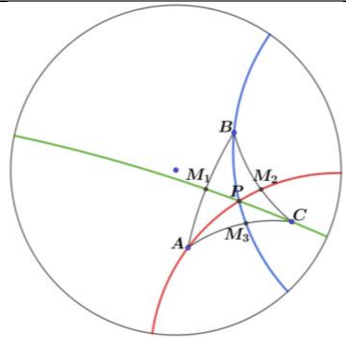
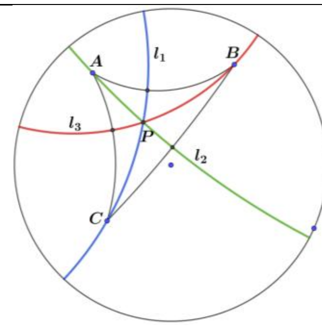
A continuación, se muestran algunas de las construcciones básicas en el disco de Poincaré:

Tabla 1

*Algunas representaciones en el disco de Poincaré*

| N | Objeto o propiedad | Descripción | Representación gráfica |
|---|---|---|---|
| 1. | Recta hiperbólica $AB$ (Geodésica) | Arco de circunferencia perpendicular al borde del disco de Poincaré. |   |
| 2. | Segmento hiperbólico $CD$ | Parte de una recta hiperbólica que conecta dos puntos dentro del disco. (Es el menor camino entre esos dos puntos). |   |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. | Triángulo hiperbólico $ABC$ | Región comprendida por 3 puntos hiperbólicos $A, B, C$ no colineales unidos por 3 segmentos hiperbólicos $(AB, BC, AC)$. |  |
| 4 | Suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico | En todo triángulo hiperbólico con ángulos internos $\alpha, \beta, \gamma$, se cumple que $\alpha + \beta + \gamma < 180°$ |  |
| 5 | Rectas paralelas (Asintóticamente paralelas) | Las rectas $l$ y $m$ son rectas asintóticamente paralelas (se encuentran en un punto en el infinito) a la recta $j$ que pasan por el punto $P$. |  |
| 6 | Rectas ultraparalelas (Paralelas divergentes) | Las rectas $l_1, l_2, l_3$ y $l_4$ son ultraparalelas (no tienen puntos en común) a la recta $l$ que pasan por el punto $P$. |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | Medianas y baricentro hiperbólico. | $M_1, M_2, M_3$ son los puntos medios de los segmentos hiperbólicos $AB, BC$ y $AC$ respectivamente. Las líneas $M_1C$, $M_2A$, $M_3B$ son las medianas y se cortan en el baricentro $P$. |  |
| 8 | Alturas y ortocentro hiperbólico. | $l_1, l_2, l_3$ son las alturas del triángulo hiperbólico $ABC$ y, en este caso, concurren en el ortocentro $P$. |  |

# 3 Metodología de investigación

El método que se utilizó en esta investigación es el de experimento de enseñanza, que de acuerdo con Camargo (2021) consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico.

## 3.1 Productos de una investigación basada en un experimento de enseñanza

Camargo (2021) propone los siguientes como posibles productos de una investigación que utiliza el experimento de enseñanza como método de investigación:

1. Secuencias de enseñanza implementadas, evaluadas y mejoradas, con indicaciones explícitas sobre los cambios que se sugieren para que los estudiantes puedan progresar.

2. Modelos reales de actividad matemática de los estudiantes y de la transformación de esta actividad como resultado de una secuencia de enseñanza.

3. Pruebas de existencia.

4. Constructos o interpretaciones más profundas de las que se tenían hasta el momento.

Esta investigación tiene como producto una caracterización refinada de los tres primeros niveles de razonamiento específicos a algunas propiedades del triángulo hiperbólico y una secuencia de enseñanza implementada y refinada con las respectivas indicaciones para replicar en el aula de clase.

## 3.2 Participantes del experimento de enseñanza

El equipo de investigación estuvo conformado por el autor de la investigación, el director y la codirectora del trabajo, en estrecha colaboración con los compañeros de la cohorte de maestría en educación matemática. El autor asumió los roles de investigador principal y profesor, y la secuencia se implementó con el grupo de estudiantes de didáctica de la geometría del semestre 2025-1 de la Universidad Industrial de Santander.

Durante el semestre 2025-1, el equipo de investigación se reunió semanalmente con el propósito de revisar las tareas propuestas, analizar los resultados obtenidos durante la implementación y plantear o resolver las preguntas surgidas en el proceso. Estas reuniones resultaron sumamente enriquecedoras para el desarrollo del trabajo, ya que contribuyeron a mejorar la calidad de las secuencias de enseñanza, fortalecer los análisis teóricos y, en general, a enriquecer la investigación con los diversos puntos de vista y conocimientos de cada integrante.

## 3.3 Fases del experimento de enseñanza

### *3.3.1 Preparación del experimento*

De acuerdo con el problema y los objetivos de investigación planteados, se diseñó una secuencia de enseñanza en el aula virtual de GeoGebra formada por actividades orientadas a promover los niveles de razonamiento de los estudiantes en relación con las propiedades planteadas en el marco teórico.

Las actividades estuvieron diseñadas y organizadas de acuerdo con las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración) y se revisaron en las distintas sesiones de reunión con el director del trabajo, con el equipo de investigación y con el docente titular de la asignatura de didáctica de la geometría.

### *3.3.2 Experimentación*

En esta fase se llevó a cabo la implementación de la secuencia de enseñanza previamente diseñada, la cual tuvo una duración de cuatro semanas. Cada semana se tuvieron dos sesiones: una de tres horas y otra de dos horas.

Durante la primera semana se abordó el nivel 1 y se implementaron los talleres 1 al 5 de la secuencia. En la segunda semana se trabajó el nivel 2, desarrollando los talleres 6, 7 y 9. Finalmente, en la tercera semana se abordó el nivel 3, aplicando el taller 10 y la primera mitad del taller 11.

Durante cada sesión se recogieron datos de todo lo que ocurre en el aula, de las respuestas de los estudiantes y de los factores que pudieron afectar la implementación de la secuencia de enseñanza en cuanto al software, las actividades, entre otros. Con base en esto, para la siguiente sesión, en caso de ser necesario, se fue refinando la hipótesis y ajustando las actividades de la secuencia de enseñanza en función de los resultados observados.

Para la recolección de datos, el aula virtual de GeoGebra almacenó automáticamente el trabajo de los estudiantes. Además, se realizaron grabaciones de audio y video de cada sesión.

### *3.3.3 Análisis de datos*

En esta fase, se sistematizó y analizó toda la información recolectada durante cada sesión para realizar un análisis global del conjunto de datos. Se establecieron como categorías de análisis los descriptores planteados en la caracterización a priori para cada nivel y se identificaron los datos que validaran o modificaran el descriptor o que llevaran a la necesidad de proponer uno nuevo. A la luz de estos resultados, se refinó la caracterización a priori y la secuencia de enseñanza.

## 3.4 Conjetura

La conjetura que se propone en un experimento de enseñanza, tiene dos dimensiones: "una, referida al contenido matemático en juego, que responde al interrogante sobre qué debería ser enseñado; otra, referida al aprendizaje, que responde al cómo debería ser enseñado" (Camargo, 2021).

### *3.4.1 Primera dimensión de la conjetura: ¿qué enseñar?*

Con base en el modelo de Van Hiele y en la caracterización por procesos establecida en nuestro marco teórico, se propuso la siguiente caracterización de razonamiento específico a las propiedades de los triángulos hiperbólicos establecidas anteriormente. Esta caracterización correspondió a la conjetura del experimento.

#### 3.4.1.1 Caracterización a priori del nivel 1

**Proceso de descripción:**

- **Descriptor 1:** reconoce el disco de Poincaré como un modelo de representación de la geometría hiperbólica, donde los objetos adoptan formas distintas a las del plano euclidiano. Sin embargo, no comprende aún las implicaciones métricas y topológicas del modelo.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 307), "cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, estos van a pasar por el nivel 1". En este caso, no solo se les está presentando un nuevo concepto geométrico sino una nueva geometría. Según los mismos autores (1990, p. 308), "siempre habrá un periodo de tiempo en el que los estudiantes sólo tendrán un conocimiento físico, visual de las nuevas figuras"; así, en este nivel se realiza la introducción y reconocimiento visual de los elementos básicos de los nuevos objetos geométricos.

Reconocer el modelo y la representación gráfica de los objetos corresponde al primer nivel, ya que los estudiantes se aproximan al modelo a través de la forma de los objetos que perciben en la pantalla. Como señalan Jaime y Gutiérrez (1990, p. 307), en el nivel 1, "los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de las que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas", es decir, las formas geométricas se reconocen en función de su apariencia física en su totalidad como lo afirma Crowley (1987, p. 2). Así, establecen, por ejemplo, que los segmentos, rectas y semirrectas tienen una forma curva en esta nueva geometría.

En este contexto, el estudiante distingue visualmente que la forma de los objetos hiperbólicos cambia respecto a los objetos euclidianos, pero aún no comprende, por ejemplo, que detrás de ese cambio existen unas implicaciones métricas como las relacionadas con la forma de medir distancias, que corresponden a un nivel superior de razonamiento.

- **Descriptor 2:** reconoce y describe los segmentos hiperbólicos a partir de su forma curva o arqueada y los relaciona con formas de la geometría euclidiana o del mundo físico.

Según Jaime y Gutiérrez (1990, p. 307), en el nivel 1 las descripciones que dan los estudiantes de las figuras «están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como "… se parece a…", "… tiene forma de…"». En consecuencia, se espera que, en este nivel, los estudiantes describan los segmentos hiperbólicos a partir de la forma curva que adoptan en este modelo, relacionándolos con objetos de la geometría euclidiana como, por ejemplo, secciones de circunferencias, parábolas, elipses o hipérbolas, así como con formas del mundo físico asociadas a estos objetos como arcos o puentes.

A través de estas comparaciones, expresadas en lenguaje cotidiano o geométrico, establecen que los segmentos hiperbólicos no son "rectos" en el sentido euclidiano sino curvos.

- **Descriptor 3:** Identifica los puntos en el borde del disco de Poincaré como puntos que representan el infinito en la geometría hiperbólica.

Como se mencionó en el descriptor 1, en el primer nivel el estudiante se aproxima a las características del nuevo modelo de representación en el que van a tomar forma los objetos de la geometría hiperbólica; esto implica reconocer algunos elementos que conforman el modelo, como los puntos del borde del disco.

Al interactuar con el modelo, los estudiantes identifican visualmente el borde del disco como el lugar donde “termina” la recta hiperbólica. No obstante, al establecer una correspondencia intuitiva con el comportamiento de las rectas euclidianas y reflexionar sobre cómo darle sentido a “los extremos” de una recta hiperbólica, los estudiantes pueden identificar estos puntos como puntos en el infinito a través del reconocimiento global de este patrón visual.

Con lo anterior, no significa que los estudiantes comprendan la idea topológica de límite o de frontera o que la distancia hiperbólica hacia el borde tiende a infinito (comprensión que corresponde a niveles superiores), sino que visualmente identifican el borde como puntos que están en el infinito para darle sentido a objetos que se extienden infinitamente, como las semirrectas o rectas hiperbólicas, de manera análoga a lo que ocurre en la geometría euclidiana, donde las rectas y semirrectas también se extienden hacia el infinito.

- **Descriptor 4:** Identifica las rectas hiperbólicas en el disco de Poincaré como arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco.

Cuando los estudiantes exploran el disco de Poincaré, descubren que las rectas hiperbólicas tienen una forma distinta a las rectas euclidianas, en particular, adoptan una forma curva. Sin embargo, esta curva no es arbitraria, sino que corresponde a un arco de circunferencia ortogonal al borde del disco.

Esta identificación es un comportamiento del nivel 1 porque permite al estudiante familiarizarse con el modelo hiperbólico a través de la observación y de un razonamiento geométrico que no corresponde propiamente a la geometría hiperbólica, sino que se apoya en la geometría euclidiana.

Visualmente, el estudiante puede reconocer que una recta hiperbólica se representa como un arco de circunferencia. En cuanto a la ortogonalidad, aunque se trata de una propiedad matemática, en este nivel se interpreta desde una perspectiva euclidiana (circunferencias ortogonales) y no desde los fundamentos métricos propios de la geometría hiperbólica, por lo tanto, corresponde a un nivel inicial de razonamiento en esta geometría donde prevalece el reconocimiento perceptivo sobre la comprensión deductiva.

- **Descriptor 5:** reconoce visualmente las semirrectas y rectas euclidianas de las semirrectas y rectas hiperbólicas.

Autores como Crowley (1987) y Burger y Shaughnessy (1986) llaman al nivel 1, nivel de visualización mientras que Gutiérrez y Jaime (1990) lo llaman nivel de reconocimiento. Ambas denominaciones sintetizan adecuadamente uno de los comportamientos fundamentales de este primer nivel: la identificación de objetos a partir de la forma que adoptan y que se percibe mediante la observación visual.

En este sentido, Gutiérrez y Jaime (1990, p. 50) señalan que en el nivel 1 los estudiantes “describen los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica en base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos”. Así, las rectas y semirrectas euclidianas conservan la forma recta con la que los estudiantes están familiarizados mientras que las rectas y semirrectas hiperbólicas adoptan una forma curva en el disco.

Por lo tanto, la identificación visual de semirrectas o rectas euclidianas e hiperbólicas a través de su forma es un comportamiento característico de este primer nivel.

- **Descriptor 6:** Reconoce el triángulo hiperbólico como una figura cerrada con tres lados curvos y utiliza expresiones como triángulo curvado, triángulo con lados curvos, triángulo con arcos, triángulo con curvas hacia adentro o hacia afuera para referirse a su forma.

En la geometría euclidiana, los estudiantes reconocen visualmente al triángulo como una figura compuesta por 3 puntos unidos por 3 segmentos. Todos poseen una imagen de este objeto, la cual trasladan a esta nueva geometría para reconocer los triángulos hiperbólicos. Esto se explica porque según Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) los estudiantes "hacen referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras". En este caso, el prototipo son los triángulos euclidianos, con la diferencia de que los estudiantes son conscientes de que, en el disco de Poincaré, los lados no se perciben rectos como acostumbran, sino que los segmentos hiperbólicos adoptan una forma curva.

Respecto al lenguaje, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 313) señalan que existe una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento geométrico; en otras palabras, a cada nivel le corresponde un tipo específico de lenguaje. Las expresiones del descriptor corresponden a un lenguaje del nivel 1 en el que, como afirman los autores mencionados (1990, p.306), «las descripciones están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como "… se parece a…", "… tiene forma de…"».

De este modo, el cambio en la forma de los segmentos, implica un cambio en la caracterización que los estudiantes dan de los triángulos: ya no es solo una figura con tres lados, sino que esos lados tienen además una forma particular que describen como curva, arqueada, curveada, entre otras, con lo que establecen una diferencia significativa respecto de los triángulos euclidianos en cuanto a su representación visual y verbal.

- **Descriptor 7:** Compara perceptivamente el tamaño de los ángulos y los lados del triángulo hiperbólico con los del triángulo euclidiano. (Por ejemplo, reconoce que los ángulos de los triángulos hiperbólicos se perciben más pequeños que los ángulos en los triángulos euclidianos y que, cuanto mayor se percibe el tamaño de los lados del triángulo hiperbólico, más pequeños son sus ángulos).

La comparación perceptiva del tamaño de los ángulos y los lados en triángulos euclidianos e hiperbólicos corresponde al nivel 1 ya que se basa en la observación sin recurrir a ninguna noción métrica ni el uso de propiedades formales. Como afirma Corberán (1989), las descripciones en este nivel "reflejan experiencias puramente visuales".

En este mismo sentido, Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) afirman que, en este nivel los estudiantes "hacen uso de propiedades imprecisas o cualidades para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras", por lo tanto, el uso de expresiones como lados o ángulos "grandes" o "pequeños" evidencia un lenguaje característico del primer nivel de razonamiento.

- **Descriptor 8:** Diferencia triángulos de la geometría euclidiana con triángulos hiperbólicos, pero no es capaz de diferenciarlos con triángulos de otra geometría como la elíptica ni de explicar el porqué de esas diferencias.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 306), "los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas". Así, con base en la forma de los segmentos (curvos o rectos en el sentido euclidiano) los estudiantes pueden diferenciar un triángulo euclidiano de un triángulo hiperbólico.

No obstante, como en la geometría elíptica los segmentos también son curvos en el sentido euclidiano, es posible que no diferencien triángulos hiperbólicos de triángulos elípticos.

Como dicen los autores, en este nivel, los estudiantes perciben las figuras como objetos individuales, es decir, que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase, por ello, no diferencian triángulos hiperbólicos de elípticos, ya que su criterio es la forma curva de los segmentos.

**Observación**: debido a limitaciones de tiempo, este descriptor no fue trabajado dentro de la secuencia de enseñanza y, en consecuencia, se mantuvo únicamente como parte de la caracterización a priori.

- **Descriptor 9:** reproduce construcciones de la geometría euclidiana, como la del triángulo equilátero, para la construcción de objetos hiperbólicos y reconoce las propiedades físicas y geométricas que se heredan de un contexto a otro.

Este comportamiento corresponde al nivel 1, ya que el estudiante actúa por analogía y no desde los fundamentos de la geometría hiperbólica, es decir, reproduce procedimientos y construcciones que son familiares para él en la geometría euclidiana sin justificar por qué funcionan o por qué son válidos en esta nueva geometría. No obstante, dada la validez euclidiana de estos, es posible que concluyan que también son válidos en la geometría hiperbólica o que visualmente establezcan que así es.

De acuerdo con Crowley (1985, p. 2), en el nivel 1 los estudiantes son capaces de "aprender vocabulario geométrico, identificar figuras específicas y, dada una figura, reproducirla".

#### 3.4.1.2 Caracterización a priori del nivel 2

**Proceso de descripción:**

- **Descriptor 10:** Reconoce que la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico es no constante y menor que 180° y lo justifica a partir de ejemplos.

En la geometría euclidiana, la suma de los ángulos internos siempre es constante y equivale a 180°. Descubrir mediante la experimentación que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es no constante y menor que 180° corresponde al nivel 2, ya que, según Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), en este nivel los estudiantes "deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación".

- **Descriptor 11:** Clasifica los triángulos hiperbólicos de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos.

De acuerdo con Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) los estudiantes en el nivel 2 son capaces de "comparar figuras explícitamente por medio de las propiedades de sus componentes y de clasificarlas por atributos simples, tales como propiedades de los lados, mientras descuidan ángulos, simetrías, etc". Así, según la medida de los lados, pueden clasificar los triángulos hiperbólicos en equiláteros, isósceles o escalenos y según la medida de sus ángulos, pueden clasificar los triángulos hiperbólicos en acutángulos, rectángulos u obtusángulos al igual que en la geometría euclidiana. Es importante aclarar que, en este nivel, como afirma Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), "los estudiantes no realizan clasificaciones lógicas" a partir de definiciones y relaciones de inclusión, sino que esta clasificación se realiza con base en las medidas de los lados y los ángulos.

- **Descriptor 12:** Establece propiedades de los triángulos hiperbólicos según su clasificación, a partir de la observación y la experimentación; por ejemplo, reconoce que todos los triángulos equiláteros son equiángulos pero dichos ángulos no miden necesariamente 60°.

Los estudiantes conocen algunas propiedades de los triángulos euclidianos según su clasificación. Por ejemplo, que los triángulos euclidianos equiláteros son equiángulos con ángulos de 60°, o que, en los triángulos isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes, son congruentes. En este nivel, los estudiantes exploran algunas de estas propiedades en el contexto hiperbólico a partir de la manipulación del software, el uso de ejemplos y la validación numérica. No significa que deduzcan estas propiedades de manera lógica, sino que lo hacen a partir de la experimentación, ya que como señala Corberán (1989), en este nivel "el alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante la observación y la experimentación". Según Crowley (1987, p. 2) a partir del reconocimiento de estas propiedades los estudiantes comienzan a "conceptualizar clases de figuras".

Así, a través de la experimentación, los estudiantes descubren que los triángulos hiperbólicos equiláteros también son equiángulos pero que estos ángulos no miden 60° o que en los triángulos hiperbólicos isósceles se mantiene la propiedad de que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes, entre otras propiedades.

Es importante resaltar que estas propiedades no se establecen mediante la deducción formal, sino a partir de un análisis experimental de carácter inductivo, propiciado en muchos casos por la comparación con las propiedades que cumplen los triángulos en la geometría euclidiana.

- **Descriptor 13:** Identifica, a partir de ejemplos y validación numérica, relaciones entre los lados de los triángulos hiperbólicos para establecer propiedades como la desigualdad triangular.

Según Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), en el nivel 2 los estudiantes son capaces de "deducir nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación". En este sentido, los estudiantes pueden realizar comprobaciones numéricas que les permiten identificar y validar propiedades, tales como la desigualdad triangular, a partir de la observación y la experimentación con distintos tipos de triángulos, ahora en el contexto hiperbólico.

- **Descriptor 14**: Descubre experimentalmente que en geometría hiperbólica los criterios LLL y LAL no garantizan semejanza (triángulos con lados proporcionales tienen ángulos diferentes), mientras que el criterio AAA produce semejanza trivial: la congruencia.

La semejanza y congruencia de triángulos constituyen relaciones fundamentales en la geometría euclidiana. En dicho contexto, los criterios de semejanza garantizan la proporcionalidad entre lados correspondientes y la congruencia de los ángulos, de modo que dos triángulos pueden tener la misma forma, aunque difieran en su tamaño. Esta relación de semejanza depende del quinto postulado de Euclides.

En la geometría hiperbólica, dicha relación cambia: cumplir el criterio LLL no garantiza la igualdad de ángulos, y cumplir el criterio LAL tampoco asegura la proporcionalidad del tercer par de lados ni la igualdad de los ángulos restantes. De igual manera, el criterio AAA conduce únicamente a una semejanza trivial, es decir, a la congruencia de los triángulos.

Los estudiantes pueden descubrir estas diferencias a través de la experimentación con distintos ejemplos que les permiten analizar cada uno de los criterios. Este comportamiento, en el que parten de la exploración de casos concretos para luego generalizar la invalidez de los criterios LLL o LAL o la congruencia que se deriva del criterio AAA, corresponde al nivel 2 del modelo de Van Hiele ya que como señala Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), en este nivel los estudiantes pueden "reconocer propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos (…) y deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación". En este mismo sentido, Crowley (1987, p. 2) señala que en este nivel los estudiantes elaboran generalizaciones de propiedades a partir de ejemplos.

En este caso, dichas propiedades o generalizaciones corresponden a la validez o invalidez de los criterios de semejanza en el contexto hiperbólico, establecida a partir de la experimentación.

- **Descriptor 15:** reconoce y establece, a partir de la experimentación, los criterios de congruencia de triángulos hiperbólicos.

Los criterios de congruencia LAL, LLL y ALA no dependen del quinto postulado de Euclides y, por tanto, garantizan congruencia de triángulos hiperbólicos. A ellos se suma el criterio AAA, que, como se indicó en el descriptor anterior, también asegura congruencia, en contraste con la geometría euclidiana, donde este criterio solo garantiza semejanza.

El reconocimiento de la validez de los criterios LAL, LLL y ALA en el contexto hiperbólico, a partir de la experimentación, corresponde al nivel 2. Según Burger y Shaughnessy (1986, p. 1), en este nivel, “el estudiante razona sobre conceptos geométricos por medio de un análisis informal de las partes, componentes y atributos. Se establecen las propiedades del concepto”. Así, en términos del descriptor, en este nivel, los estudiantes razonan sobre la congruencia (concepto geométrico) mediante la comparación entre los lados y los ángulos correspondientes de distintos triángulos a partir de la experimentación (análisis informal de las partes, componentes y atributos) para finalmente establecer la validez de criterios de congruencia LAL, LLL, ALA (establecer las propiedades del concepto).

Además de confirmar los criterios conocidos, este nivel también permite explorar nuevos criterios. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), afirman que el estudiante “deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación”. Así, el descubrimiento empírico del nuevo criterio de congruencia AAA que no se tiene en la geometría euclidiana, es un comportamiento propio de este nivel. Este descubrimiento es especialmente relevante porque requiere que el estudiante identifique una propiedad única de la geometría hiperbólica que contrasta directamente con su experiencia euclidiana previa.

Finalmente, Corberán (1989) afirma que, “el alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante procesos de observación y experimentación” de modo que es importante resaltar que los estudiantes no llegan a estos criterios por medio de deducciones formales, sino a través de la validación numérica, el uso de ejemplos y la generalización experimental.

De este modo, el descriptor refleja cómo en el nivel 2 los estudiantes construyen un entendimiento empírico de la congruencia en geometría hiperbólica, paso clave hacia un razonamiento más avanzado en los siguientes niveles.

- **Descriptor 16:** Construye líneas notables de un triángulo hiperbólico como alturas, medianas, bisectrices y mediatrices, pero no establece criterios claros sobre su concurrencia ni identifica correctamente la ubicación de los puntos de concurrencia como ortocentro, centroide, incentro, circuncentro.

Los estudiantes conocen los procesos de construcción de las líneas notables en la geometría euclidiana y, como las definiciones de estas líneas no cambian, replican estas construcciones en la geometría hiperbólica, por tanto, son capaces de construir las líneas notables en este nuevo contexto, apoyándose además de las herramientas que el software le ofrece.

De igual forma, en geometría euclidiana tienen algunos criterios claros sobre la concurrencia de estas líneas y la existencia y ubicación de los puntos notables para ciertos tipos de triángulos, pero no siempre son capaces de establecer estos criterios. Esta dificultad se transfiere también al contexto hiperbólico, donde se intensifica debido a las diferencias visuales que perciben los estudiantes.

De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), en el nivel 2 los estudiantes “deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación”. Sin embargo, el establecimiento claro de criterios de concurrencia exige apoyarse en propiedades geométricas y métricas que ya no se derivan únicamente de la percepción visual o de la validación numérica. Esto corresponde a razonamientos de niveles superiores.

En consecuencia, en el nivel 2 los estudiantes se limitan a la construcción empírica de las líneas notables y al reconocimiento parcial de patrones de concurrencia, sin alcanzar aún una comprensión formal de los puntos notables del triángulo hiperbólico.

- **Descriptor 17:** Reconoce, a partir de la experimentación, qué propiedades de los triángulos euclidianos se mantienen y cuáles se modifican en el contexto de la geometría hiperbólica.

Desde su formación escolar inicial, los estudiantes tienen contacto amplio con la geometría euclidiana a diferencia de las geometrías no euclidianas, como la hiperbólica, que en muchos casos ni siquiera forma parte de los planes de estudio de los programas de matemáticas, licenciatura en matemáticas o áreas afines. Por esta razón, en los dos primeros niveles los estudiantes suelen apoyarse en el conocimiento previo adquirido en sus cursos de geometría euclidiana, lo cual genera una tensión evidente entre la nueva geometría que comienzan a explorar y la que ya conocen.

En este nivel, dicha tensión se hace más evidente, ya que, a través de la experimentación, los estudiantes comienzan a identificar diferencias fundamentales entre ambas geometrías.

En el nivel 1, los estudiantes reconocen visualmente algunas diferencias, principalmente relacionadas con la forma de los objetos hiperbólicos en el modelo de representación. Por ejemplo, reconocen que los segmentos, rectas y semirrectas hiperbólicos adquieren una forma curva. En el nivel 2, en cambio, el razonamiento evoluciona de lo perceptivo a lo geométrico, de modo que comienzan a indagar no solo en aspectos visuales, sino también en propiedades geométricas de los objetos hiperbólicos, en este caso particular, del triángulo hiperbólico.

En este sentido, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), afirman que en el nivel 2 los estudiantes "se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal". Así, mediante la experimentación, el uso de ejemplos y la validación numérica, los estudiantes identifican qué propiedades de la geometría euclidiana se mantienen en la geometría hiperbólica; por ejemplo, que los triángulos equiláteros son equiángulos o que los criterios de congruencia continúan siendo válidos.

De igual forma, Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51) señalan que en el nivel 2, los estudiantes "deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación". En consecuencia, son capaces de reconocer qué propiedades de la geometría euclidiana no se cumplen en la geometría hiperbólica y, a partir de esto, establecer nuevas propiedades en este contexto. Por ejemplo, descubren que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico no es exactamente 180° como en la geometría euclidiana, sino que establecen una nueva propiedad: en los triángulos hiperbólicos, la suma de los ángulos internos no es constante y siempre es menor que 180°.

Así, este descriptor refleja un comportamiento propio del nivel 2 en el que los estudiantes validan algunas propiedades de la geometría euclidiana y comienzan a deducir informalmente propiedades nuevas en un contexto no euclidiano.

- **Descriptor 18:** utiliza un vocabulario adecuado para describir los objetos hiperbólicos.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 315) “a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico”. En el nivel 1 el lenguaje está asociado a las descripciones físicas y visuales de los objetos, por lo tanto, los estudiantes utilizan términos como forma arqueada, forma curva, lados “alargados” o “curveados”, entre otras. En cambio, en el nivel 2, al reconocer que las figuras están compuestas por partes y poseen propiedades matemáticas (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 308), utilizan un lenguaje más preciso para expresar dichas propiedades.

De este modo, en el nivel 2, los estudiantes emplean expresiones como “hiperbólica” para referirse a los objetos de esta geometría, el concepto de “geodésica”, así como nociones geométricas más formales como medida, ángulo, congruencia y semejanza, entre otras.

**Proceso de definición:**

- **Descriptor 19:** Relaciona las definiciones que se le plantean en el contexto hiperbólico con sus equivalentes euclidianos para definir objetos hiperbólicos.

El proceso de definición formal es propio del nivel 3. Por ejemplo, Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51) plantean que es en el nivel 3 donde los estudiantes “describen las figuras de manera formal, es decir, que comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta”. En este mismo sentido, Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) afirman que es en el nivel 3 donde los estudiantes tienen la “habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar definiciones de nuevos conceptos”.

Dado que este descriptor es del nivel 2, no se plantea que los estudiantes sean capaces de elaborar definiciones propias de objetos hiperbólicos, sino que pueden interpretar definiciones de la geometría euclidiana en el contexto hiperbólico, es decir, establecen una correspondencia conceptual entre objetos de ambas geometrías a partir de las propiedades que reconocen experimentalmente en los objetos hiperbólicos y su conocimiento previo de la geometría euclidiana.

Así, por ejemplo, al pedir que construyan la bisectriz hiperbólica de un ángulo, establecen una correspondencia con la definición euclidiana de bisectriz y la utilizan adecuadamente en el nuevo contexto.

**Proceso de demostración:**

- **Descriptor 20:** Utiliza argumentos empíricos (basados en la percepción visual, la experimentación, el uso de ejemplos o en cálculos numéricos) para justificar la validez o invalidez de algunas propiedades euclidianas en el contexto de los triángulos hiperbólicos.

Según Gutiérrez y Jaime (1991, p. 53) un estudiante de nivel 2 se convence de la validez o invalidez de una propiedad a partir de uno o varios ejemplos. En esta misma línea, Algarín y Fiallo (2013), con base en los tipos de demostración propuestos por Fiallo (2011), señalan que en este nivel los estudiantes realizan demostraciones de carácter inductivo o empírico, tales como la demostración de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genético analítico, en las cuales los ejemplos constituyen el principal elemento de convicción.

Así, en coherencia con las características de este nivel, los estudiantes se convencen de las propiedades de los triángulos hiperbólicos a partir de la exploración en los distintos applets de la secuencia diseñada en GeoGebra validando o rechazando propiedades euclidianas a partir de distintos ejemplos, del arrastre y de la comprobación numérica, y no a través de la deducción lógica.

A diferencia del nivel 3, donde los estudiantes comprenden y manejan la deducción lógica (Gutiérrez y Jaime, 1991), este descriptor enfatiza el razonamiento empírico-inductivo, propio del nivel 2.

- **Descriptor 21:** Justifica, mediante comprobaciones numéricas, que el teorema de Pitágoras (en el sentido euclidiano de relacionar los catetos con la hipotenusa) no se cumple en los triángulos hiperbólicos.

Al explorar distintos triángulos hiperbólicos rectángulos en el applet, los estudiantes comprueban que el teorema de Pitágoras no se cumple como en la geometría euclidiana. De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 313), en el nivel 2 la demostración para el estudiante consiste en “comprobar que la afirmación es cierta en unos pocos casos, incluso en uno solo, haciendo las mediciones oportunas con alguna herramienta”. En este nivel, el estudiante no analiza qué propiedad de la geometría euclidiana deja de garantizarse en el contexto hiperbólico, sino que invalida la afirmación mediante la experimentación y el uso de ejemplos. Esta forma de justificación, basada en comprobaciones numéricas y casos particulares, corresponde a un razonamiento inductivo característico del nivel 2.

#### 3.4.1.3 Caracterización a priori del nivel 3

**Proceso de definición:**

- **Descriptor 22:** Comprende las definiciones de objetos de la geometría hiperbólica, tales como puntos ideales, rectas ultraparalelas o asintóticamente paralelas y las utiliza para realizar construcciones, demostraciones, establecer nuevas propiedades o definiciones.

En el nivel 2, los estudiantes son capaces de interpretar las definiciones de los objetos que conocen de la geometría euclidiana en el contexto hiperbólico. Así, por ejemplo, aceptan y utilizan las definiciones de las líneas notables del triángulo hiperbólico, análogas a las del triángulo euclidiano, y aplican dichas definiciones de la misma manera en ambos contextos. Incluso emplean objetos que no se definen explícitamente en la secuencia, pero cuya definición trasladan de una geometría a otra, como la del círculo hiperbólico.

Ahora, en el nivel 3, según Burger y Shaughnessy (1986, p. 9), los estudiantes tienen la "habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos". En consecuencia, comprenden las definiciones de objetos que tienen sentido únicamente en esta geometría hiperbólica y que son nuevos para ellos, como los puntos ideales, las rectas ultraparalelas o asintóticamente paralelas y las utilizan adecuadamente.

- **Descriptor 23:** establece propiedades suficientes y necesarias para definir objetos geométricos.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309), en el nivel 3 "los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta". Justamente, los requisitos de una definición correcta son las propiedades suficientes y necesarias que caracterizan los objetos geométricos. En este nivel, los estudiantes comienzan a razonar sobre la validez de las definiciones en la geometría hiperbólica, identificando qué propiedades son fundamentales para distinguir cada objeto.

- **Descriptor 24:** Comprende la noción de distancia hiperbólica, analiza su definición y su relación con la distancia euclidiana.

En el nivel 1, los estudiantes reconocen que los objetos geométricos hiperbólicos cambian de forma respecto a sus equivalentes euclidianos. En el nivel 2, identifican que la medida es independiente del tamaño aparente o la forma que los objetos hiperbólicos adoptan en el modelo; por ejemplo, concluyen que, en los triángulos equiláteros, aunque los lados no parecen congruentes (un lado puede parecer de mayor longitud que otro), sí lo son.

En el nivel 3, ya son capaces de comprender que esa independencia entre la forma de los objetos y sus medidas asociadas no es arbitraria, sino que está relacionada con un cambio en la métrica, es decir, con una forma distinta de medir las distancias. En consecuencia, comprenden que la distancia hiperbólica se define de manera diferente a la distancia euclidiana. Este comportamiento coincide con lo propuesto por Burger y Shaughnessy (1986, p. 9) quienes afirman que, en este nivel, los estudiantes tienen la “habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos”.

Ahora bien, se habla de la noción de distancia hiperbólica porque comprenderla totalmente implica un razonamiento de nivel superior, pues los estudiantes deben conocer propiedades métricas y topológicas del espacio, como su curvatura negativa, que es la que realmente causa el cambio en las formas y cuyo efecto se traduce en una métrica distinta.

**Proceso de demostración:**

- **Descriptor 25:** Establece de manera incluyente propiedades que relacionan diferentes tipos de triángulos hiperbólicos.

De acuerdo con Burger y Shaughnessy (1986, p. 10), en este nivel, los estudiantes tienen la “habilidad para clasificar figuras conforme a una variedad de atributos matemáticamente precisos”. Sin embargo, estos atributos ya no se perciben como aislados ni como una larga lista de propiedades, como ocurre en el nivel 2, sino que los estudiantes logran establecer conexiones entre ellos para clasificar los objetos geométricos, como en este caso, triángulos hiperbólicos. Tal como afirma Crowley (1987, p. 3): “en este nivel, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones de las propiedades tanto dentro de las figuras como entre figuras. Así, pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases”.

- **Descriptor 26:** Comprende y justifica que, en la geometría hiperbólica, si dos triángulos tienen los mismos ángulos correspondientes, necesariamente sus lados son iguales; por tanto, no existen triángulos semejantes que no sean congruentes.

En el nivel 2, a partir de la exploración en el software los estudiantes concluyen que los criterios de semejanza euclidiana como Lado-Ángulo-Lado y Lado-Lado-Lado, no garantizan semejanza en los triángulos hiperbólicos y que el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo implica congruencia de triángulos hiperbólicos. Esto constituye un cambio fundamental de la geometría hiperbólica respecto a la geometría euclidiana, que los estudiantes identifican en el nivel 2, aunque todavía no son capaces de justificarlo.

En el nivel 3, en cambio, el estudiante es capaz de presentar una argumentación informal que le permite justificar esta propiedad, pues, como señala Burger y Shaughnessy (1986, p. 10), en este nivel los estudiantes tienen la “habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales”.

De acuerdo con Crowley (1987, p. 3), en este nivel, “los resultados obtenidos empíricamente suelen utilizarse en conjunto con técnicas de deducción”. Así, el estudiante integra los nuevos elementos teóricos que adquiere en este nivel con las propiedades que ha descubierto experimentalmente en el nivel anterior para justificar este importante cambio entre ambas geometrías.

- **Descriptor 27:** Establece y justifica las condiciones bajo las cuales las líneas notables del triángulo hiperbólico concurren o dejan de concurrir en un mismo punto.

La concurrencia de las líneas notables en triángulos hiperbólicos implica que los estudiantes reflexionen sobre la posibilidad de que estas se corten en un punto en el infinito (punto ideal) o que sean ultraparalelas. Estas posibilidades no son contempladas aún en el nivel 2, pues los estudiantes están fuertemente influenciados por la noción de concurrencia que tienen de la geometría euclidiana.

En el nivel 3, los estudiantes son capaces de comprender estas nuevas posibilidades y de plantear un razonamiento informal que les permita establecer criterios para garantizar la concurrencia o no, en términos hiperbólicos, de estas líneas notables. Este comportamiento es propio del nivel 3 pues, según Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), en este nivel el estudiante “realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades en base a propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de un razonamiento informal".

- **Descriptor 28:** Demuestra las propiedades de la geometría euclidiana que también se cumplen en la geometría hiperbólica como, por ejemplo, la desigualdad triangular, a partir de las reglas teóricas y razonamientos lógicos que conoce y utiliza en la geometría euclidiana

En los niveles 1 y 2 los estudiantes descubren que algunas propiedades se cumplen de igual manera en la geometría hiperbólica y en la euclidiana mientras que otras difieren. Al llegar al nivel 3, comprenden que las propiedades que se mantienen, son aquellas que dependen de los 4 primeros postulados, es decir, que pertenecen a la geometría neutra y que, por tanto, se cumplen en ambas geometrías mientras que las que no se cumplen se derivan del quinto postulado. Este descriptor enfatiza en las propiedades comunes a ambas geometrías y que los estudiantes, muy probablemente ya conocen.

Los estudiantes que se enfrentan a un curso de geometría hiperbólica, generalmente han tenido un curso formal universitario de geometría euclidiana, como es el caso de los participantes de esta investigación. De acuerdo con esta condición, estos estudiantes suelen encontrarse en un nivel tres de razonamiento en geometría euclidiana y son capaces de demostrar informalmente los teoremas que se le presenten de la geometría euclidiana, que también se cumplen en geometría hiperbólica.

No obstante, esta instrucción previa no es garantía de que el estudiante se encuentre en nivel 3: es posible que el estudiante no haya conseguido avanzar del nivel 2 o, por el contrario, haya alcanzado el nivel 4. En cualquier caso, dicha instrucción previa, favorece el desarrollo de un razonamiento matemático que le permite al estudiante, a partir del conocimiento euclidiano que tiene y que ha fortalecido en los dos niveles anteriores, transferir este conocimiento a la geometría hiperbólica y demostrar informalmente propiedades relacionadas con el triángulo hiperbólico.

Esto no significa que el estudiante produzca demostraciones deductivas formales en geometría hiperbólica, sino que replica demostraciones de la geometría euclidiana o elabora demostraciones incipientes a partir de la interrelación lógica de propiedades que constituyen un primer paso para una demostración deductiva formal.

Burger y Shaughnessy (1987, p. 10) afirman que en este nivel los estudiantes hacen "uso explícito de enunciados si, entonces", es decir, reconocen las hipótesis que conducen al establecimiento de una propiedad. Este comportamiento también se observa en el estudio de la geometría hiperbólica, donde los estudiantes aplican la misma estructura lógica que utilizan en la geometría euclidiana. Más aún, los mismos autores (1987, p. 10) sostienen que, en este nivel, los estudiantes poseen la "habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales, usando implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena y la ley de separación".

- **Descriptor 29:** Realiza demostraciones informales a partir de propiedades previamente establecidas; por ejemplo, utiliza las propiedades del cuadrilátero de Saccheri para justificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180° y a su vez, deduce que no existen cuadriláteros hiperbólicos rectángulos.

Fuys et al. (1988, pp. 64-66) plantean que, en el nivel tres, los estudiantes “presentan argumentos informales para justificar una conclusión utilizando relaciones lógicas o descubrir nuevas propiedades mediante deducción”. En el mismo sentido, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309) señalan que, en este nivel, los estudiantes “ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones”. Así, este descriptor, refleja un comportamiento propio del nivel 3.

El cuadrilátero de Saccheri es un objeto geométrico que se puede utilizar como figura auxiliar en las demostraciones de geometría hiperbólica. En este cuadrilátero, los ángulos de la cumbre son agudos y, a partir de esta y otras propiedades, los estudiantes pueden deducir de manera lógica, que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180°. Además, dado que un cuadrilátero se puede descomponer en dos triángulos, la suma de los ángulos del cuadrilátero hiperbólico será menor que 360° y, por tanto, no pueden existir cuadriláteros rectángulos en esta geometría.

- **Descriptor 30:** Utiliza la negación del quinto postulado o de sus formulaciones equivalentes para explicar o justificar por qué algunas propiedades de la geometría euclidiana no se cumplen en la geometría hiperbólica como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo-Ángulo.

En el descriptor 28 se estableció el comportamiento de los estudiantes frente a las propiedades comunes a la geometría euclidiana y la geometría hiperbólica. En este descriptor se aborda el comportamiento esperado frente a las propiedades que solo se cumplen en geometría hiperbólica.

Fuys et al. (1988, pp. 64–66) sostienen que, en el nivel 3, los estudiantes "presentan argumentos informales para justificar una conclusión utilizando relaciones lógicas o descubren nuevas propiedades mediante deducción". De modo similar, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309) afirman que, en este nivel, "los estudiantes son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones".

En consecuencia, en el nivel 3, los estudiantes reconocen que la geometría hiperbólica nace de la negación del quinto postulado de Euclides. Al comprender esto, entienden que las relaciones de paralelismo y perpendicularidad no se tienen de la misma forma que ocurre en la geometría euclidiana porque dependen del quinto postulado de Euclides. Por tanto, los teoremas que dependen del quinto postulado y de estas relaciones, no se mantienen en la geometría hiperbólica en el mismo sentido que se tienen en el contexto euclidiano.

Así, reconocen, por ejemplo, que el teorema de Pitágoras y las relaciones de semejanza no se tienen en la geometría hiperbólica, ya que comprenden que estas propiedades son consecuencias lógicas del quinto postulado y, por tanto, al negarlo, la nueva geometría no las conserva.

- **Descriptor 31:** Comprende las demostraciones que se le presentan sobre las propiedades del triángulo hiperbólico, aunque no es capaz de elaborarlas de manera deductiva por su propia cuenta.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309) en el nivel 3 los estudiantes “pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos”. En la misma línea, Crowley (1987, p. 3) señala que, en este nivel, “las demostraciones formales pueden ser seguidas” por los estudiantes.

En este sentido, los estudiantes son capaces de comprender y justificar un listado de pasos de una demostración relacionada con las propiedades de los triángulos hiperbólicos utilizando los axiomas, las definiciones y las propiedades que ya conoce o que el profesor o un libro de texto le presentan. Sin embargo, aún no es capaz de construir una demostración propia a partir de dichos elementos teóricos.

Es importante resaltar que, en este nivel, el estudiante utiliza tanto las propiedades que obtuvo en el nivel 2 a partir de la experimentación como las propiedades que ha deducido a partir de otras. En términos de Crowley (1987, p. 3), en este nivel “los resultados obtenidos empíricamente suelen emplearse junto con técnicas de deducción”. De modo que, el estudiante comienza a comprender la estructura lógica de la geometría hiperbólica sin alcanzar aún la autonomía del nivel 4.

### *3.4.2 Segunda dimensión de la conjetura: ¿cómo enseñar?*

En cuanto a la segunda dimensión, nuestra conjetura planteó que la implementación de una secuencia de enseñanza diseñada a partir de la caracterización a priori anterior y mediada por el aula virtual de GeoGebra, que integre las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, favorece el desarrollo de los niveles de razonamiento en el estudio de las propiedades del triángulo hiperbólico.

Esta secuencia se diseñó en el aula virtual de GeoGebra en forma de libro digital, organizado en 3 capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de razonamiento a promover:

- **Capítulo 1:** formado por los talleres 1 al 5 orientados a la promoción del nivel 1.
- **Capítulo 2**: formado por los talleres 6 al 9 orientados a la promoción del nivel 2.
- **Capítulo 3:** formado por los talleres 10 y 11 orientados a la promoción del nivel 3.

De igual forma, los talleres se estructuraron de acuerdo a las fases del modelo de Van Hiele: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, integración. En esta sección se describen detalladamente las actividades de la secuencia y se proponen algunas sugerencias metodológicas para su implementación.

### 3.4.2.1 Secuencia de enseñanza para el nivel 1

**Descripción**: los talleres del capítulo 1 permiten al estudiante aproximarse al Disco de Poincaré como modelo de representación de la geometría hiperbólica y reconocer algunos objetos geométricos hiperbólicos como segmentos, semirrectas, rectas o triángulos.

**Fase de información:**

#### *3.4.2.1.1 Taller 1- Segmentos hiperbólicos*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 1 y 2 correspondientes al proceso de descripción.

**Descripción del taller:** en lugar de presentar directamente las características del modelo, este taller busca que los estudiantes descubran y comprendan algunas de ellas a través de su propia exploración. Por tanto, se enmarca dentro de la **fase de información** del nivel 1. En particular, se espera que los estudiantes identifiquen que los puntos hiperbólicos en este modelo se encuentran dentro del disco y que los segmentos hiperbólicos son arcos de circunferencia.

**Actividad 1.1**

**Descripción**: La primera actividad consiste en una exploración inicial del Disco de Poincaré, en la que los estudiantes ubican dos puntos dentro del círculo y construyen un segmento hiperbólico utilizando la herramienta correspondiente del menú de herramientas.

El objetivo es que los estudiantes arrastren los puntos y observen la forma que adopta el segmento. Este es el primer gran cambio que perciben: la representación de los segmentos hiperbólicos difiere de la de los segmentos euclidianos.

Durante el taller 1 se emplea siempre el término círculo para referirse al disco. En la fase de explicitación se introduce el término Disco de Poincaré.

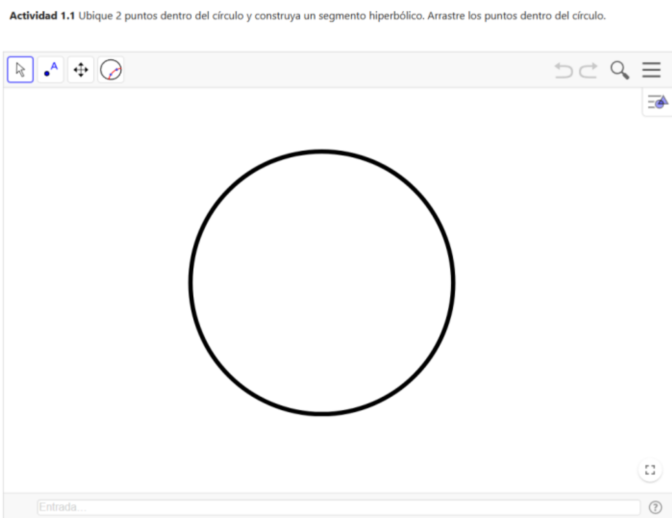



*Figura 1 Disco de Poincaré*

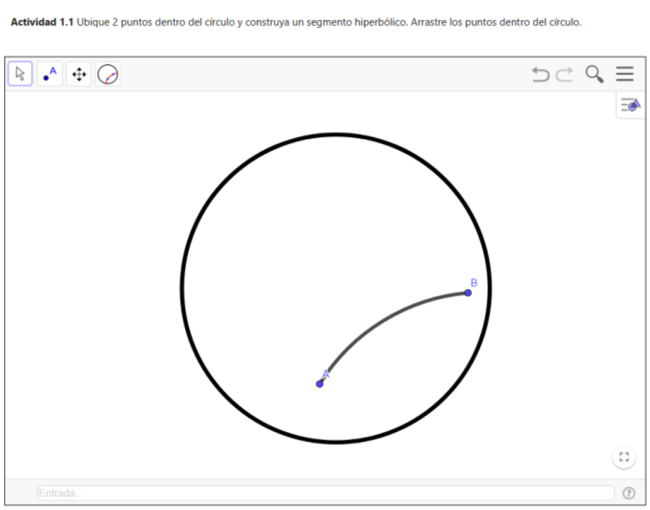



*Figura 2 Segmento hiperbólico*

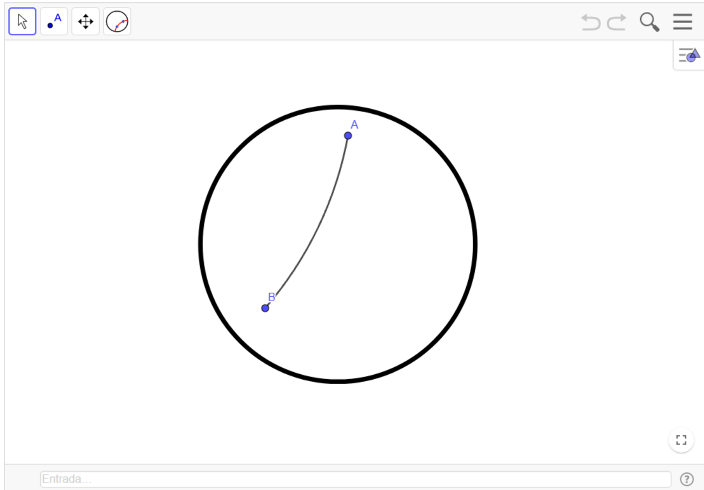
Las siguientes actividades tienen como propósito que los estudiantes describan, con sus propias palabras, la forma de los segmentos hiperbólicos, apoyándose en representaciones físicas y comparaciones con la geometría euclidiana. Además, se espera que concluyan que los objetos de la geometría hiperbólica existen dentro del círculo del applet, es decir, en el Disco de Poincaré.

**Pregunta 1.1.1**


Según Jaime y Gutiérrez (1990, p. 306), en el nivel 1 los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras y basan sus descripciones en su semejanza con otros objetos. Con esta pregunta se indaga sobre el lenguaje que utilizan los estudiantes para describir las relaciones que establecen los estudiantes entre los objetos y su forma. En particular, se espera que utilicen palabras relacionadas con características físicas o conceptos de la geometría euclidiana para describir la forma del segmento hiperbólico. Se busca que identifiquen y expresen que el segmento no es “recto” en el sentido euclidiano, sino curvo o arqueado, y/o que lo comparen con algunas curvas de la geometría euclidiana. Según nuestra caracterización, las respuestas esperadas incluyen descripciones como “forma curva”, “forma de arco” o “forma de semicírculo”, entre otras.

Es posible que los estudiantes respondan que, en ciertas ubicaciones de los puntos el segmento tiene forma de arco y en otras, el segmento parece adoptar una forma recta en el sentido euclidiano (por ejemplo, cuando están muy cerca entre sí o cuando están sobre el diámetro de la circunferencia), como se muestra en el siguiente ejemplo.

Tarea 1




**1.1.1** ¿Qué forma tiene el segmento hiperbólico?

**Respuesta**

El segmento hiperbólico tiende a tener forma de arco, pero esa forma no se mantiene en todos los lados en que se ubique el segmento, a simple vista se puede ver que si el segmento queda en posición centrada, es decir como si fuese el diámetro o el radio del circulo, se puede ver que tiene una forma recta pero en la medida que se mueve uno de los puntos se puede ver que el segmento va tomando la forma de arco que se ,mencionó al principio.

En este momento, el profesor puede indicarles que utilicen el comando *Centro(<Cónica>)* en la barra de entrada y reemplacen <*Cónica*> por el nombre del segmento hiperbólico, para determinar su centro. Luego, pueden construir la circunferencia que tiene dicho centro y que pasa por uno de los puntos del segmento hiperbólico. Así, los estudiantes concluirán que, en realidad, dicho segmento hiperbólico corresponde a un arco de circunferencia. A partir de esta observación, el profesor puede reflexionar sobre cómo en una circunferencia de radio grande como la que construyeron, los arcos tienen apariencia de segmento de recta euclidiano.

## Pregunta 1.1.2

**1.1.2** Arrastre uno de los dos puntos fuera del círculo . ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta actividad, los estudiantes observan que, al mover uno de los puntos fuera del círculo, el segmento desaparece automáticamente. Esto les permite comenzar a reflexionar sobre el hecho de que las herramientas hiperbólicas funcionan únicamente dentro del disco.

## Pregunta 1.1.3

**1.1.3** Arrastre el otro punto fuera del círculo. ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Igual que en la actividad anterior, los estudiantes pueden ver que el segmento hiperbólico desaparece.

## Pregunta 1.1.4

**1.1.4** Arrastre los dos puntos hacia el interior del círculo. ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Cuando los estudiantes arrastran ambos puntos al interior del círculo, el segmento aparece en la pantalla. Esto les permite darse cuenta que, mientras los dos puntos permanezcan dentro del círculo, es posible construir el segmento; en cambio, si uno o ambos puntos están fuera, la construcción no es posible.

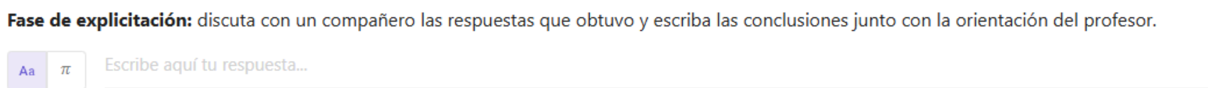
## Pregunta 1.1.5

**1.1.5** ¿Qué condición deben cumplir los puntos para que exista el segmento hiperbólico?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Se espera que los estudiantes concluyan, a partir de la exploración y actividades previas, que los puntos deben estar dentro del círculo para que el segmento exista y que, en nuestro modelo de representación, solo se consideran los puntos dentro del disco.

## Fase de explicitación


**Fase de explicitación:** discuta con un compañero las respuestas que obtuvo y escriba las conclusiones junto con la orientación del profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En particular, en esta fase, después de la socialización de las respuestas dadas por los estudiantes, se puede concluir que, en el modelo que se va a utilizar, los puntos se encuentran dentro del círculo. En este momento, al círculo se le asigna el nombre del **disco de Poincaré**. De igual manera se concluye que, los segmentos hiperbólicos corresponden a arcos de circunferencia.

Las actividades propuestas en este taller 1 no serían viables en un entorno de lápiz y papel pues se fundamentan en el dinamismo que ofrece GeoGebra. En un entorno estático, sería necesario indicar explícitamente al estudiante que los puntos hiperbólicos son aquellos que están ubicados dentro del disco, que las rectas hiperbólicas se representan con arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco y que las semirrectas y segmentos hiperbólicos son secciones de dichos arcos.

En contraste, el entorno dinámico posibilita que los estudiantes descubran estas propiedades por sí mismos a través de la manipulación y la exploración. Como señala el MEN (2004, p. 21) "*quien explora en un ambiente dinámico, tiene a mano un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariantes*". Así, GeoGebra favorece la identificación de regularidades y la construcción de relaciones que difícilmente emergerían en un contexto tradicional de lápiz y papel.

### *3.4.2.1.2 Taller 2- Rectas hiperbólicas*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 3 y 4 correspondientes al proceso de descripción.

**Descripción del taller:** en el taller anterior, se estableció el disco de Poincaré como modelo de representación de la geometría hiperbólica, donde los puntos hiperbólicos son los que están en el interior del disco. De igual forma, se estableció que los segmentos hiperbólicos corresponden a arcos de circunferencia.

Con este taller se busca profundizar en la comprensión del modelo a partir de la caracterización de los puntos del borde del disco de Poincaré como puntos en el infinito y la introducción de las rectas hiperbólicas, que corresponden a arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco.

Además, se reflexiona sobre la unicidad de la recta hiperbólica que pasa por dos puntos dados y el cumplimiento del primer postulado en ambas geometrías. Los estudiantes pueden ver la consistencia de la representación de la geometría hiperbólica a través del modelo del disco de Poincaré donde se garantiza también que la recta hiperbólica que pasa por dos puntos es única pues el arco de circunferencia que pasa por dos puntos dados y es ortogonal al borde del disco es único.

## Actividad 2.1

**Descripción:** en esta actividad, los estudiantes deben construir la recta hiperbólica que pasa por dos puntos dados en el disco, utilizando la herramienta correspondiente del menú. Al hacerlo, observarán que la recta hiperbólica es un arco de circunferencia, al igual que los segmentos construidos en el taller anterior.

Para este punto del taller, los estudiantes ya habrán asimilado que las rectas hiperbólicas no son rectas euclidianas, sino arcos de circunferencia, gracias a la exploración y actividades previas.

**Actividad 2.1** Construya una recta hiperbólica. Luego, arrastre los puntos.

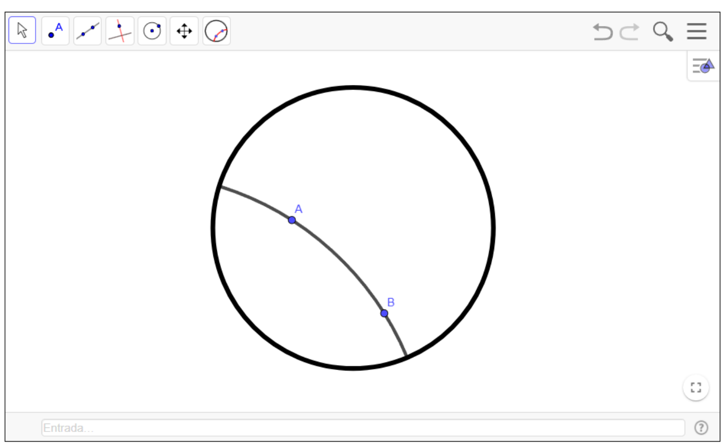
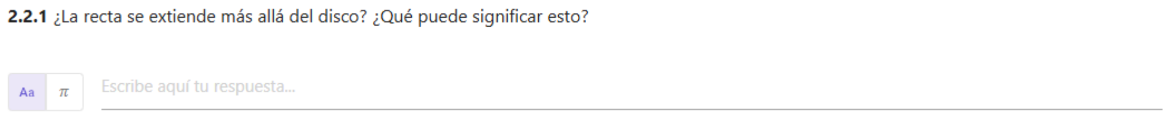


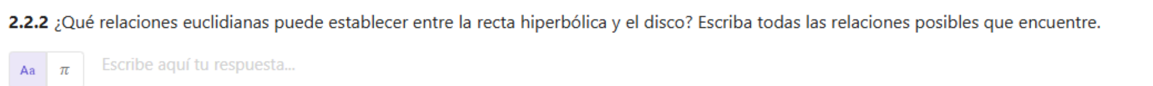

*Figura 3 Recta hiperbólica*

**Pregunta 2.2.1**




A través de esta pregunta, se busca que los estudiantes, por un lado, confirmen la conclusión del taller anterior sobre la existencia de los objetos hiperbólicos dentro del disco de Poincaré al ver que la recta no se extiende más allá del disco y, por otro lado, deduzcan que el borde del disco representa los puntos en el infinito en este modelo.

**Pregunta 2.2.2**




Esta pregunta tiene como propósito orientar a los estudiantes hacia el descubrimiento de la relación de ortogonalidad que existe entre el arco de circunferencia que representa a la recta hiperbólica y el borde del disco.

La primera relación que encuentran los estudiantes es que la recta hiperbólica y el disco se intersecan en dos puntos. Asimismo, pueden mencionar otras relaciones como el siguiente estudiante, que hace referencia a la ubicación del centro del arco de circunferencia que determina la recta hiperbólica:

**2.2.2** ¿Qué relaciones euclidianas puede establecer entre la recta hiperbólica y el disco? Escriba todas las relaciones posibles que encuentre.

**Respuesta**

la recta hiperbólica dentro del disco puede verse como el arco  de circunferencia de otro circulo con centro fuera del disco original

Sin embargo, la relación que se quiere es la de la ortogonalidad entre las curvas. Si esta relación no surge de manera espontánea entre los estudiantes, el profesor debe conducir la discusión en esa dirección. Para ello, se plantea la siguiente pregunta.

### Pregunta 2.2.3

**2.2.3** ¿Cómo se puede medir el ángulo entre la recta hiperbólica y el disco?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Dado que, la recta hiperbólica es un arco de circunferencia, la pregunta es equivalente a ¿cómo medir el ángulo entre dos curvas? Se espera que los estudiantes respondan, de acuerdo a sus conocimientos previos en geometría euclidiana y cálculo, que el ángulo entre la recta hiperbólica y el borde del disco es el mismo ángulo que se forma entre las tangentes a las dos curvas en el punto de intersección y también es el mismo ángulo que forman los radios de los círculos trazados hasta el punto de intersección de los círculos.

### Pregunta 2.2.4

**2.2.4** ¿Qué relación existe entre la recta hiperbólica y el disco?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

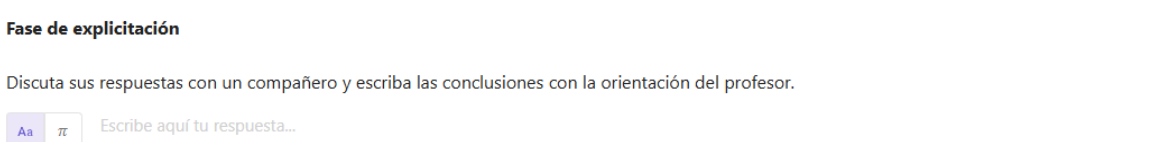
Una vez que los estudiantes recuerden cómo medir el ángulo entre dos curvas, se les pide que determinen el ángulo entre una recta hiperbólica cualquiera y el borde del disco. Al arrastrar los puntos de la recta hiperbólica, podrán observar el comportamiento del ángulo y concluir que la relación entre ambas curvas es de ortogonalidad.

**Pregunta 2.2.5**


En la geometría hiperbólica, también se cumple el primer postulado de Euclides, que establece que por dos puntos dados pasa una única recta. Esta pregunta busca que los estudiantes reflexionen sobre la unicidad de la recta en el disco de Poincaré, puesto que, dados dos puntos en el disco, existe un único arco de circunferencia ortogonal al borde del disco de Poincaré que pase por esos dos puntos.

Para reforzar esta idea, el profesor puede pedir a los estudiantes que construyan un nuevo arco de circunferencia que pase por estos dos puntos y que midan el ángulo entre el nuevo arco y el borde del disco. Los estudiantes se darán cuenta que no son ortogonales y, por tanto, la recta hiperbólica es única.

**Fase de explicitación:**



En esta fase, los estudiantes socializan sus respuestas y, a partir de la discusión, se concluye que los puntos del borde del disco de Poincaré corresponden a los puntos en el infinito de la geometría hiperbólica. Además, se establece que las rectas hiperbólicas cumplen el primer postulado de Euclides y se representan mediante arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco de Poincaré.

**Fase de orientación dirigida**

#### *3.4.2.1.3 Taller 3- Percepción visual*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 3 y 4 correspondientes al proceso de descripción.

**Descripción del taller:**

En los dos primeros talleres, los estudiantes reconocieron la existencia y la forma de los segmentos y las rectas hiperbólicas. El segmento hiperbólico lo identificaron como un arco de circunferencia y la recta hiperbólica como un arco de circunferencia ortogonal al borde del disco. Ahora, en este taller, se busca que los estudiantes comparen la representación de estos objetos en ambas geometrías con el fin de que establezcan diferencias perceptivas entre los segmentos, semirrectas y rectas en ambas geometrías. En este taller se hace énfasis en la forma de los objetos y la percepción visual que los estudiantes tienen de estos ya que según Jaime y Gutiérrez (1990), este nivel es de reconocimiento y se hace énfasis en las propiedades físicas de los objetos y su caracterización visual y no geométrica. Se busca también que los estudiantes utilicen las palabras euclidiano e hiperbólico en sus respuestas.

De igual manera, se espera que los estudiantes reconozcan que, al igual que en la geometría euclidiana, en la geometría hiperbólica también existen y pueden construirse polígonos como los triángulos. Por razones de tiempo, en el taller y en la secuencia didáctica solo se abordará la construcción de triángulo y, eventualmente, de algún cuadrilátero. Sin embargo, es importante aprovechar este momento para dejar claro que en la geometría hiperbólica es posible construir cualquier polígono de $n$ lados y círculos.

### Actividad 3.1

**Descripción:** con esta actividad se busca que los estudiantes reconozcan y diferencien de manera visual los segmentos euclidianos y los hiperbólicos.

**Actividad 3.1** Construya un segmento hiperbólico. Luego, fuera del disco, construya un segmento euclidiano.

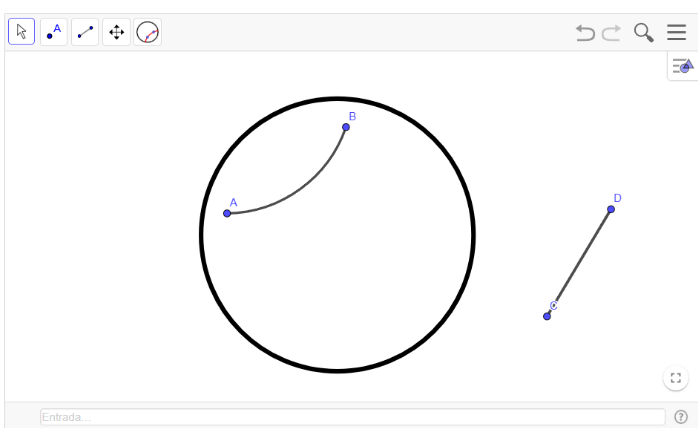



*Figura 4 Segmento hiperbólico y segmento euclidiano*

## Pregunta 3.1.2

**3.1.2** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre el segmento hiperbólico y el segmento euclidiano?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Es posible que los estudiantes respondan que el segmento euclidiano es “recto” mientras que el segmento hiperbólico no es “recto” sino curvo. Esto es porque aún tienen la representación visual prototípica de segmento y recta de la geometría euclidiana que genera una imagen mental insuficiente de estos objetos. En este punto, el profesor puede recordar que segmento y recta son términos indefinidos igualmente válidos en ambas geometrías, aunque con representaciones distintas.

## Actividad 3.2

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes reconozcan y diferencien de manera visual las rectas euclidianas y las hiperbólicas.

**Actividad 3.2** Construya una recta hiperbólica. Luego, fuera del disco, construya una recta euclidiana.

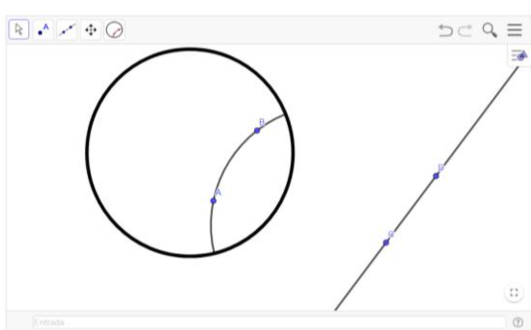


*Figura 5 Recta hiperbólica y recta euclidiana*

**Pregunta 3.2.1**

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al igual que la pregunta anterior, se espera que los estudiantes distingan perceptivamente una recta euclidiana de una recta hiperbólica. Algunos estudiantes podrían afirmar que, a diferencia de las rectas euclidianas que se extienden hasta el infinito, las rectas hiperbólicas no, pues tienen punto de inicio y final. Ante esta respuesta, el profesor puede invitar a los estudiantes a revisar el taller anterior y recordar que los puntos extremos de la recta que están en el borde del disco corresponden a puntos en el infinito en el modelo de Poincaré.

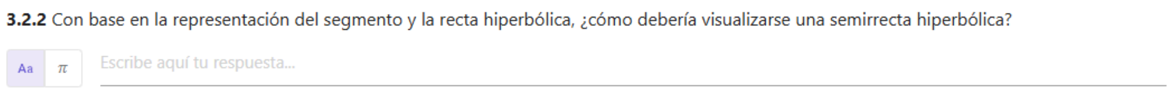
También, es posible que un estudiante dé la respuesta en términos de ángulos así:

**Respuesta**

la recta euclidiana forma un ángulo llano y la hiperbólica no

Una primera posibilidad sería que el profesor indique al estudiante que ubique tres puntos sobre la recta hiperbólica y mida el ángulo formado entre ellos; el resultado será 180°. Sin embargo, en los talleres del nivel 1 se ha evitado el uso de herramientas de medición de ángulos y distancias. El profesor también puede invitar al estudiante a imaginar que camina sobre una recta hiperbólica: parte de un punto, avanza por el arco y nunca se desvía. Si no gira ni cambia de dirección significa que está caminando sobre una línea recta, aunque visualmente la trayectoria se vea curva. Luego, si al llegar a un punto de la recta decide regresar al punto inicial, da media vuelta, es decir, realiza un giro de 180° y recorre exactamente el mismo camino, sin desviaciones, aunque en sentido contrario. Esto permite concluir que, al igual que en la geometría euclidiana, la recta hiperbólica también forma un ángulo llano, es decir, en un mundo hiperbólico, el estudiante no percibiría que va caminando sobre una curva.

## Pregunta 3.2.2


**3.2.2** Con base en la representación del segmento y la recta hiperbólica, ¿cómo debería visualizarse una semirrecta hiperbólica?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta pregunta se busca que los estudiantes relacionen lo que han aprendido sobre el segmento hiperbólico y la recta hiperbólica en las actividades anteriores. Una semirrecta tiene un punto de origen y no tiene punto final, se extiende infinitamente. En este sentido, se espera que los estudiantes afirmen que la semirrecta hiperbólica es un arco de circunferencia con un extremo dentro del disco y otro extremo en el borde.

Es posible también que algunos estudiantes utilicen expresiones como que la semirrecta hiperbólica es la mitad de una recta hiperbólica, o que es una recta hiperbólica a la que se le ha quitado un pedazo.

## Actividad 3.3

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes construyan una semirrecta euclidiana y una semirrecta hiperbólica y las comparen. Además, una vez hecha la construcción de la semirrecta, el profesor debe preguntar a los estudiantes sobre si la representación gráfica de la semirrecta hiperbólica que obtuvieron los estudiantes corresponde o no a la descripción que habían dado en la respuesta de la pregunta anterior.

**Actividad 3.3** Construya una semirrecta hiperbólica. Luego, fuera del disco, construya una semirrecta euclidiana.

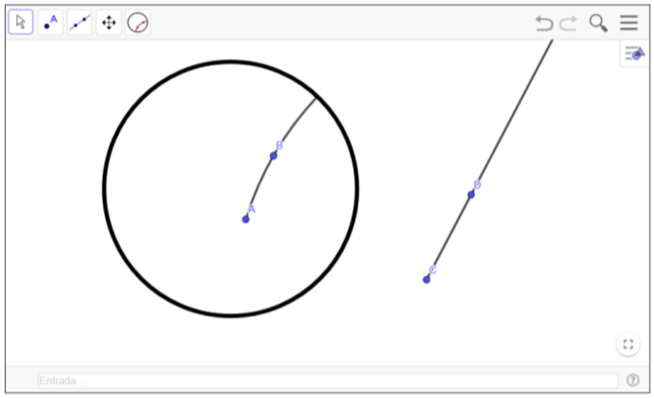


*Figura 6 Semirrecta hiperbólica y semirrecta euclidiana*

## Actividad 3.4

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes comprendan que, al igual que en la geometría euclidiana, en la geometría hiperbólica también es posible construir objetos geométricos como los polígonos, a partir de puntos y segmentos. En particular, se espera que reconozcan la existencia de triángulos hiperbólicos a partir de su construcción, del mismo modo que en la geometría euclidiana: a partir de 3 puntos no colineales y la construcción de los segmentos que tienen dichos puntos como extremos. Además, se busca que los estudiantes observen la forma del triángulo hiperbólico resultante y reflexionen sobre las diferencias perceptivas con respecto al triángulo euclidiano.

**Actividad 3.4** Ubique tres puntos en el disco de Poincaré. Construya los segmentos que tienen como extremos dichos puntos. Arrastre los puntos.

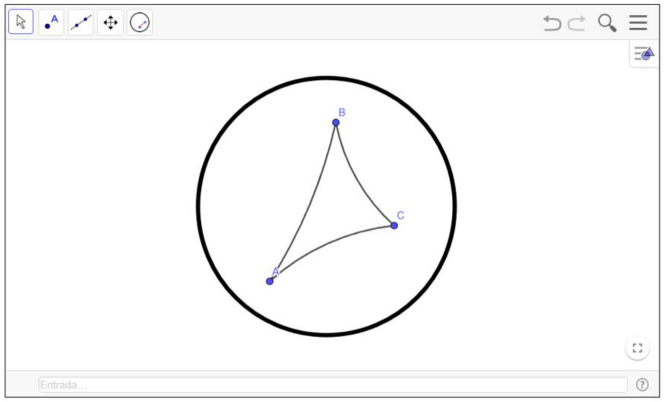



*Figura 7 Triángulo hiperbólico*

## Pregunta 3.4.1

**3.4.1** ¿Cómo llamaría a esta figura?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta pregunta se busca que los estudiantes reconozcan por primera vez el triángulo hiperbólico, que es el objeto geométrico de estudio de esta secuencia de enseñanza. Además, se busca que reconozcan que, así como en la geometría euclidiana, la unión de segmentos permite la formación de polígonos, también ocurre lo mismo en la geometría hiperbólica.

## Pregunta 3.4.2

**3.4.2** ¿Qué elementos puede identificar en esta figura?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al reconocer que la figura es un triángulo, los estudiantes identifican como elementos los 3 vértices, 3 lados y 3 ángulos.

**Pregunta 3.4.3**

**3.4.3** ¿Qué semejanzas y diferencias puede enunciar de manera perceptiva entre esta figura y su equivalente en la geometría euclidiana?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

La semejanza que encuentran los estudiantes es que tanto el triángulo hiperbólico como el euclidiano tiene 3 vértices, 3 lados y 3 ángulos. La diferencia que encuentran es la curvatura de los lados del triángulo hiperbólico.

**Fase de explicitación**

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con un compañero y escriba las conclusiones orientado por su profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En esta fase, se reconoce al triángulo hiperbólico como una figura que conserva los elementos característicos del triángulo euclidiano (vértices, lados, ángulos), pero cuyos lados presentan una forma arqueada propia de la geometría hiperbólica.

***3.4.2.1.4 Taller 4- Triángulos hiperbólicos***

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 7 y 8 correspondientes al proceso de descripción.

## Actividad 4.1

**Descripción**: visualmente, la forma y tamaño de los segmentos hiperbólicos depende de la ubicación de sus extremos en el disco de Poincaré. Con esta actividad se busca que los estudiantes exploren esta propiedad y establezcan algunas conclusiones al respecto en aras de ir estableciendo algunas propiedades físicas perceptivas del triángulo hiperbólico.

**Actividad 4.1** Construya un triángulo hiperbólico y arrastre los vértices de modo que queden cerca del centro del disco. Luego, arrastre los vértices de modo que se acerquen al borde del disco.

Realice la construcción de un triángulo euclidiano fuera del círculo y mueva sus vértices.

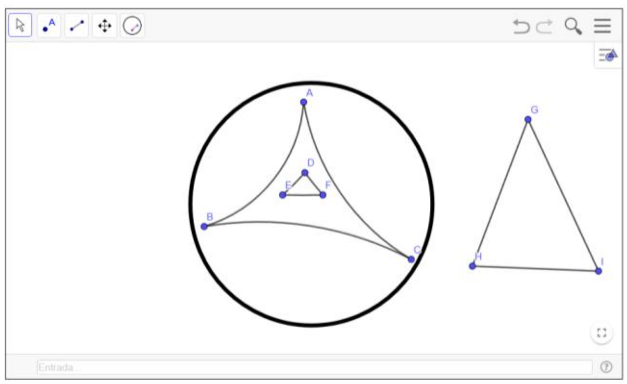



*Figura 8 Triángulos hiperbólicos y triángulo euclidiano*

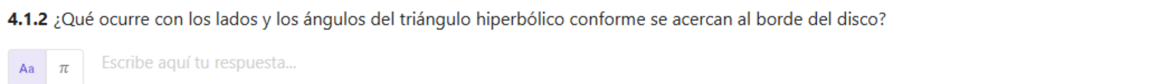
## Pregunta 4.1.1

**4.1.1** ¿Qué ocurre con los lados y los ángulos del triángulo hiperbólico conforme se acercan al centro del disco?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Conforme los vértices se acercan al centro del disco, las circunferencias que contienen los arcos de los segmentos hiperbólicos se hacen más grandes y, por tanto, los segmentos hiperbólicos se asemejan a los segmentos euclidianos. Además, los ángulos van aumentado su tamaño y el triángulo se asemeja bastante a un triángulo euclidiano. Es posible que los estudiantes den respuestas en este sentido utilizando expresiones como que los lados se ven más “rectos”, más “derechos” o menos curvos.

**Pregunta 4.1.2**

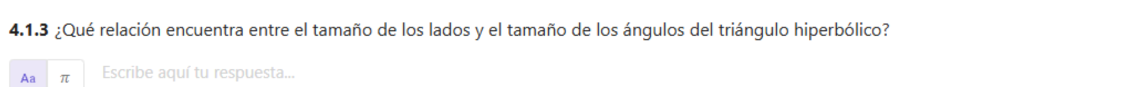



Conforme los puntos se acercan al borde del disco se tiene dos posibilidades:

- Que los puntos estén cerca del borde, pero separados entre sí donde los lados se perciben de “mayor longitud”, los ángulos se ven “de menor amplitud” y los lados se ven “más curvos”.
- Que los puntos estén cerca del borde, pero cerca entre sí, donde los lados se perciben de “menor longitud”, los ángulos se ven “de mayor amplitud” y los lados se ven “más rectos” en el sentido euclidiano.

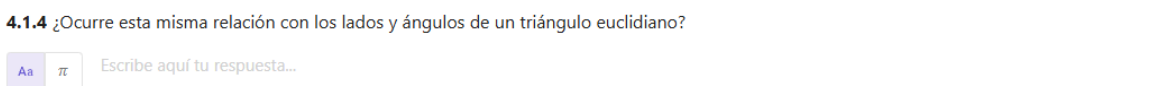
Los estudiantes tienden a ubicar los vértices del triángulo cerca del borde del disco y bastante alejados entre ellos. El profesor puede pedir a los estudiantes que acerquen dos puntos entre sí y que estén cerca del borde para ver cómo cambia la forma del triángulo.

**Pregunta 4.1.3**



En geometría euclidiana, al ángulo de mayor amplitud es opuesto al lado de mayor longitud y, entre más grande sea el lado opuesto, más grande es el ángulo opuesto. En la geometría hiperbólica, también se cumple esta relación numérica. Sin embargo, como este taller corresponde al nivel 1, los estudiantes tienden a responder de acuerdo a lo que perciben en la pantalla, de modo que, algunos afirman que entre mayor sea el tamaño de los lados, menor es el tamaño de los ángulos.

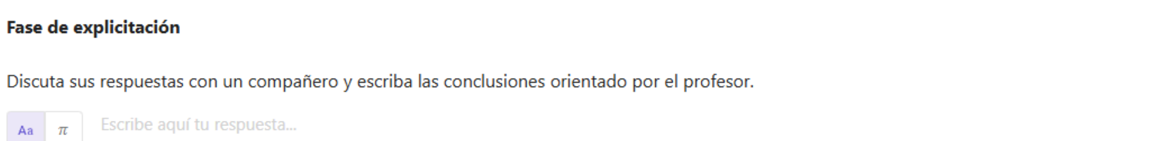
## Pregunta 4.1.4


**4.1.4** ¿Ocurre esta misma relación con los lados y ángulos de un triángulo euclidiano?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Como mencionamos anteriormente, en los triángulos euclidianos existe una propiedad bien definida que relaciona lados y ángulos: el ángulo de mayor medida es opuesto al lado de mayor longitud. Y, conforme la longitud de los lados aumenta, la medida de los ángulos también, hecho que se puede evidenciar visualmente, a diferencia de la geometría hiperbólica.

## Fase de explicitación


**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con un compañero y escriba las conclusiones orientado por el profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Fase de orientación libre**

### *3.4.2.1.5 Taller 5- Algunas construcciones*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueve el descriptor 9 correspondiente al proceso de descripción.

- **Descriptor 9:** reproduce construcciones de la geometría euclidiana, como la del triángulo equilátero, para la construcción de objetos hiperbólicos y reconoce las propiedades físicas y geométricas que se heredan de un contexto a otro.

**Descripción del taller:**

**Actividad 5.1**

**Descripción**: con esta tarea se busca que los estudiantes recuerden cómo construir un triángulo equilátero euclidiano con el fin de que la repliquen para construir un triángulo equilátero hiperbólico. La herramienta de polígono regular se encuentra desactivada y, por tanto, los estudiantes deben recurrir a las circunferencias de mismo radio.

**Actividad 5.1** Construya un triángulo euclidiano equilátero.

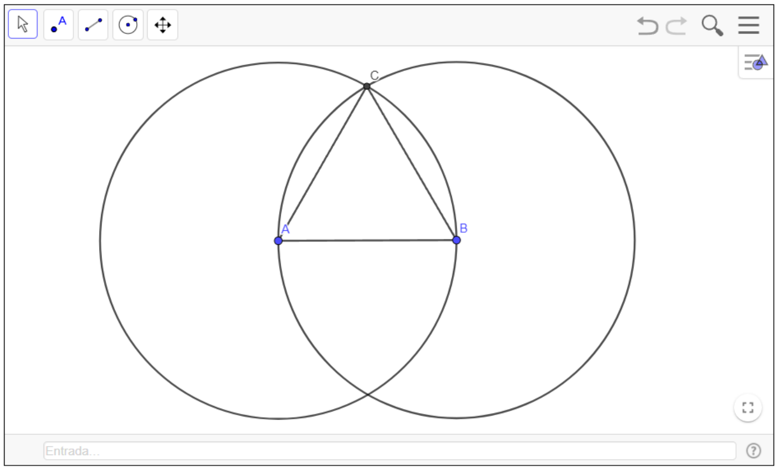



*Figura 9 Construcción de un triángulo euclidiano equilátero*

## Pregunta 5.1.1

**5.1.1** Enuncie algunas propiedades del triángulo equilátero euclidiano.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Dentro de las propiedades que pueden enunciar los estudiantes están que, en el triángulo equilátero euclidiano, todos los lados son congruentes, todos los ángulos son congruentes y, en particular, miden 60°. Es posible que enuncien también algunas propiedades relacionadas con las líneas y puntos notables del triángulo equilátero.

## Actividad 5.2

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes construyan un triángulo hiperbólico equilátero replicando la construcción del triángulo euclidiano equilátero. Para llevar a cabo esta construcción, los estudiantes deben reconocer y aceptar ciertos cambios propios de la geometría hiperbólica. Por ejemplo, la circunferencia se define igualmente como el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro, aunque en este contexto la distancia no se percibe de la misma manera que en el sentido euclidiano.

De este modo, los estudiantes descubren que el método de construcción es válido también en la geometría hiperbólica y comienzan a desligar la noción de distancia de la simple apariencia visual. Así, un segmento que parece "largo" en la representación no necesariamente posee mayor longitud hiperbólica que otro que se percibe como "corto".

**Actividad 5.2** Construya un triángulo hiperbólico equilátero.

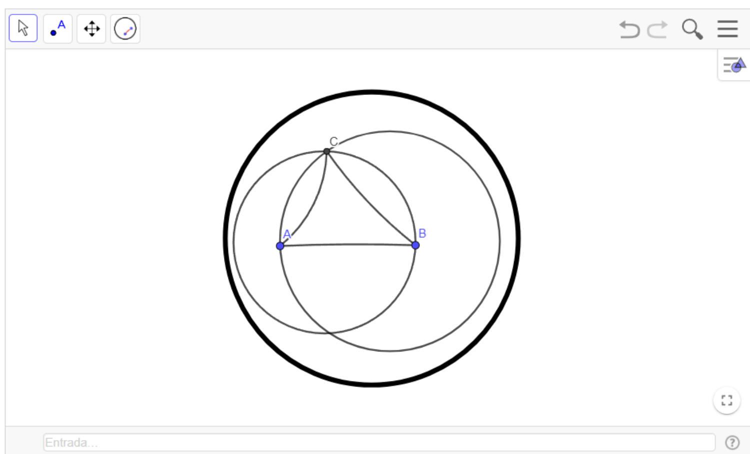



*Figura 10 Construcción de un triángulo hiperbólico equilátero*

## Pregunta 5.2.1

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

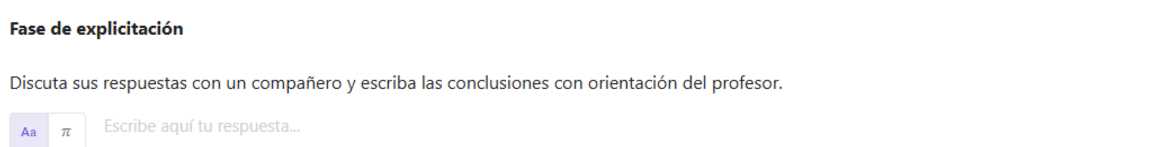
Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Como los estudiantes replicaron la construcción de la geometría euclidiana, es posible que supongan que las propiedades de los triángulos equiláteros euclidianos se heredan en la geometría hiperbólica.

No obstante, al observar la representación en la pantalla, algunos pueden pensar que los triángulos equiláteros hiperbólicos no cumplen ninguna de esas propiedades, pues los lados no parecen congruentes y los ángulos tampoco.

Ante esta situación, el profesor debe invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las propiedades que garantizan que el triángulo construido en geometría euclidiana sea equilátero, y analizar si dichas propiedades se cumplen o no dentro del contexto hiperbólico.

**Fase de explicitación**




### 3.4.2.2 Secuencia de enseñanza Nivel 2

#### *3.4.2.2.1 Taller 6- Clasificación de triángulos hiperbólicos:*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 10, 11, 12, 17 y correspondientes al proceso de descripción y el descriptor 19 del proceso de definición.

**Descripción del taller:** En el nivel 1, los estudiantes se familiarizaron con el modelo del disco de Poincaré y reconocieron que, en este, los objetos hiperbólicos adquieren una forma distinta a la de sus equivalentes en la geometría euclidiana. En este primer taller del nivel 2, los estudiantes empiezan a superar el análisis basado únicamente en la percepción visual y avanzan hacia la formulación de propiedades geométricas de los objetos. En particular, se explora una propiedad fundamental: la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico y su contraste con la geometría euclidiana.

De igual manera, se les pide construir un triángulo hiperbólico equilátero y uno isósceles. A través de esta actividad, los estudiantes establecen una correspondencia conceptual con sus equivalentes euclidianos. Aunque no se les pide de manera explícita que definan cada tipo de triángulo, resulta evidente que transfieren y aplican las definiciones propias de la geometría euclidiana a la hiperbólica.

En este sentido, la experimentación con el software permite que los estudiantes identifiquen propiedades específicas de los triángulos hiperbólicos y establezcan comparaciones entre ambas geometrías.

Finalmente, según Gutiérrez y Jaime (1990, pp. 333-334), "*el objetivo principal de la fase de orientación dirigida es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando*". En consecuencia, este taller se ubica dentro de la fase de orientación dirigida, pues las actividades están orientadas a que los estudiantes descubran propiedades geométricas del triángulo hiperbólico y las contrasten con las del triángulo euclidiano.

## Fase de orientación dirigida

## Actividad 6.3

**Descripción**: Con esta actividad se busca que los estudiantes reconozcan la diferencia que existe entre los triángulos euclidianos y los hiperbólicos en relación con la suma de sus ángulos internos.

**Actividad 6.3**

**6.3.1** Arrastre los vértices del siguiente triángulo hiperbólico y observe los ángulos.

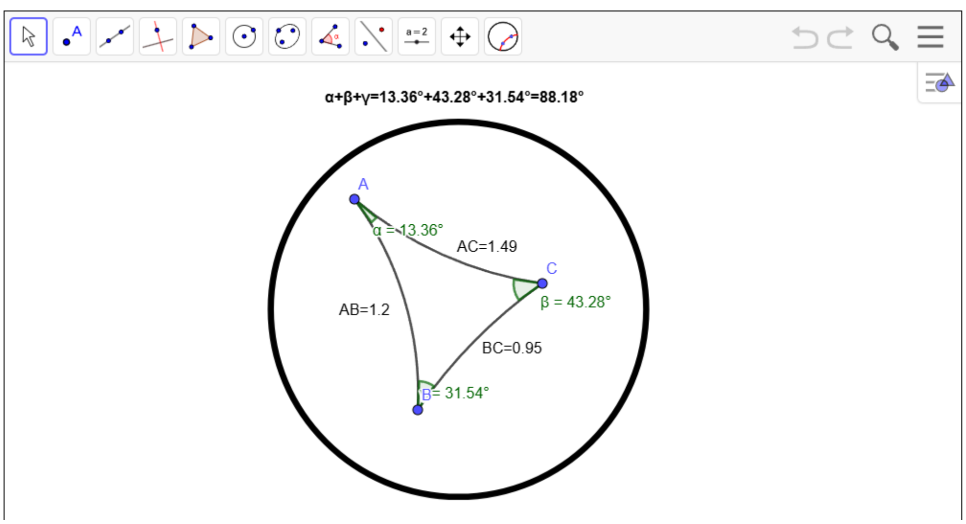



*Figura 11 Suma de los ángulos internos de un triángulo*

**Pregunta 6.3.3**

**6.3.3** ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo hiperbólico? ¿Este valor es constante?
Establece una comparación entre la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico y del triángulo euclidiano.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Una de las propiedades más conocidas por los estudiantes sobre los triángulos euclidianos es que la suma de sus ángulos internos es igual a 180°. En el contexto hiperbólico, la suma de los ángulos no es constante y siempre es menor que 180°,

**Fase de explicitación:**

**Fase de explicitación:**

Discuta las respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones con la orientación del profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Es posible que algunos estudiantes respondan que la suma de los ángulos internos depende de la posición de los vértices, en el sentido de que cuanto más cerca estén los puntos del borde del disco, menor será la suma de los ángulos o que cuanto más cerca estén del centro del disco, mayor será la suma de los ángulos y más a 180°, como afirma el siguiente estudiante, por ejemplo:

**Respuesta**

Depende, este valor no es constante por la posición de los puntos en el disco de Poincaré que conforman al triangulo. si los puntos están muy cerca del borde y alejados entre si , la suma de los ángulos internos tiende a 0. si los puntos están muy cerca entre si y alejados del borde del disco, es decir en el centro, la suma de los ángulos internos tiende a ser 180 grados. Luego el valor de la suma de los ángulos internos esta en el intervalo (0,180)

No obstante, es importante que el profesor mencione que, en la geometría hiperbólica, la suma de los ángulos internos del triángulo está relacionada con el área del triángulo más que con la ubicación de los vértices pues un triángulo se puede reflejar respecto a una recta hiperbólica (inversión respecto a un círculo) y aunque los vértices cambien de posición, la suma de los ángulos permanece igual.

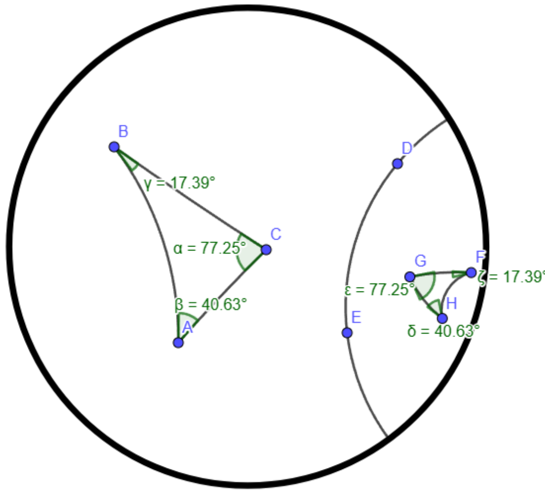



*Figura 12 Triángulos hiperbólicos congruentes por reflexión*

Por ejemplo, en la figura, el triángulo $\Delta ABC$ está más cerca del centro y el triángulo $\Delta GFH$ está más cerca del borde, pero ambos son congruentes y la suma de sus ángulos es igual.

### Actividad 6.4

**Descripción**: una vez identificado el hecho de que, en un triángulo hiperbólico, la suma de los ángulos internos es menor que 180°, se busca que el estudiante explore otras propiedades relacionadas con los ángulos en este tipo de triángulos. En particular, con esta actividad se busca establecer algunas propiedades relacionadas con los ángulos en un triángulo hiperbólico equilátero.

**Actividad 6.4**

**6.4.1** Construya un triángulo hiperbólico equilátero.

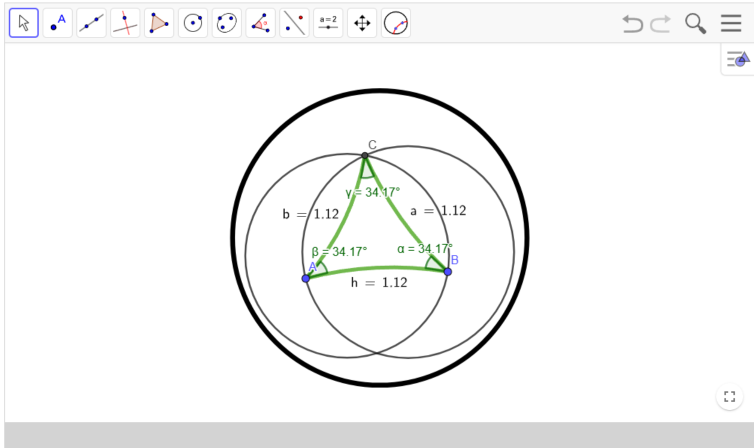



*Figura 13 Ángulos internos de un triángulo hiperbólico equilátero*

## Pregunta 6.4.3

**6.4.3** Utilice la herramienta ángulo hiperbólico para medir los ángulos del triángulo equilátero hiperbólico construido y arrastre los vértices. ¿Cuánto miden estos ángulos? ¿Qué propiedades encuentra en estos ángulos? ¿Los triángulos hiperbólicos equiláteros son equiángulos como los triángulos euclidianos equiláteros?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Como se mencionó en el descriptor 12, los triángulos equiláteros euclidianos son equiángulos, y cada uno de sus ángulos mide 60°. En la geometría hiperbólica, los triángulos equiláteros también son equiángulos, pero como la suma de sus ángulos internos es menor que 180°, cada uno de sus ángulos es menor a 60°. Con esta actividad se busca que los estudiantes descubran esta diferencia fundamental entre ambas geometrías.

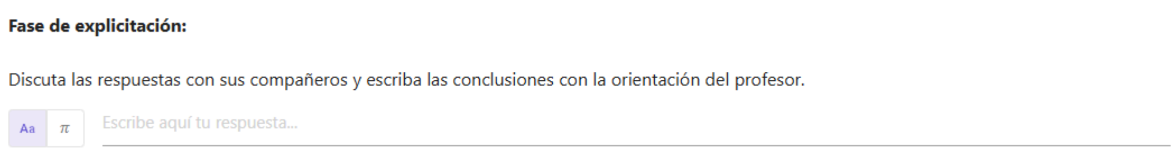
## Pregunta 6.4.4

**6.4.4** Utilice la herramienta de distancia hiperbólica para medir la longitud de los lados del triángulo anterior y arrastre los vértices. ¿Los lados del triángulo son congruentes?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Para algunos estudiantes, el triángulo hiperbólico construido no parece equilátero, ya que visualmente los lados no se perciben como congruentes. Por tanto, esta pregunta tiene una doble intención: por un lado, convencerlos numéricamente de que el triángulo sí es equilátero invitándolos a cuestionar lo que observan, pues en geometría hiperbólica, la percepción visual no siempre refleja con precisión las propiedades matemáticas; y, por otro lado, reforzar la idea de que las propiedades que utilizaron para realizar la construcción, garantizan que el triángulo sea equilátero.

**Fase de explicitación:**


**Fase de explicitación:**

Discuta las respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones con la orientación del profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En esta fase, los estudiantes discuten con sus compañeros y profesor, en torno a las propiedades que descubrieron de los triángulos hiperbólicos equiláteros.

**Fase de orientación libre:**

**Actividad 6.5**

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes integren sus conocimientos de geometría euclidiana, como la duplicación de un segmento y la definición del triángulo isósceles, con lo aprendido de geometría hiperbólica en las actividades anteriores, para construir un triángulo hiperbólico isósceles que cumple ciertas condiciones.

**Actividad 6.5**

**6.5.1** Construya un triángulo hiperbólico isósceles de modo que la longitud de cada lado congruente sea el doble de la longitud de un segme dado y encuentre la medida de los lados y de los ángulos.

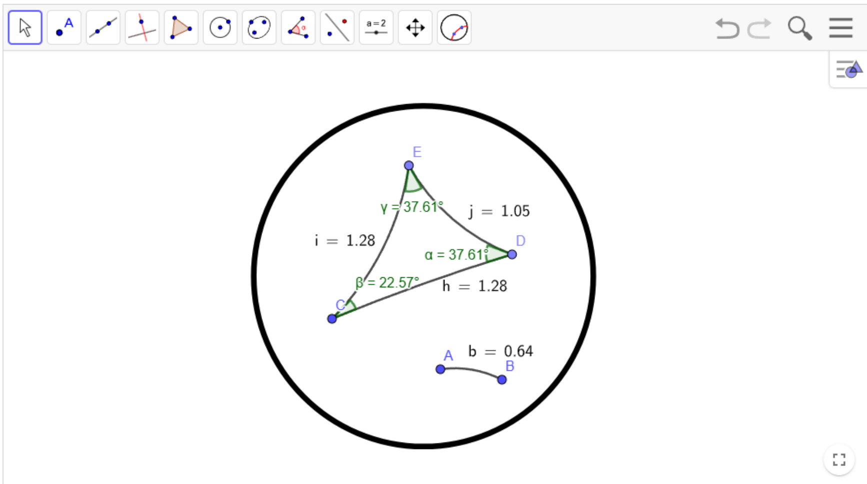



*Figura 14 Construcción de un triángulo hiperbólico isósceles*

## Pregunta 6.5.2

**6.5.2** ¿Qué propiedades de los triángulos isósceles euclidianos se cumplen en los triángulos isósceles hiperbólicos y cuáles no?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta pregunta se busca que los estudiantes observen que en los triángulos hiperbólicos se cumple la misma propiedad euclidiana de que los ángulos opuestos a los lados congruentes, son congruentes.

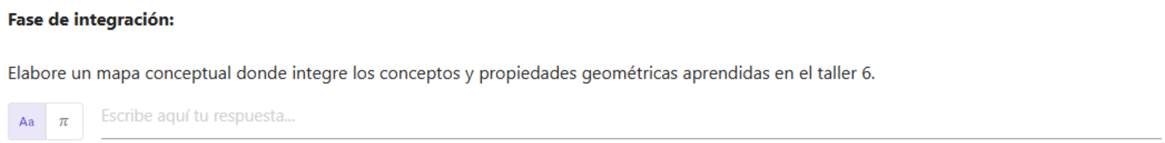
## Fase de explicitación:

**Fase de explicitación:**

Discuta las respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones con la orientación del profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Fase de integración:**


**Fase de integración:**

Elabore un mapa conceptual donde integre los conceptos y propiedades geométricas aprendidas en el taller 6.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

### *3.4.2.2.2 Taller 7- Desigualdad triangular, líneas y puntos notables del triángulo hiperbólico.*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 11, 13, 16, 17 y 18 correspondientes al proceso de descripción, el descriptor 19 del proceso de definición y el descriptor 20 del proceso de demostración.

**Fase de orientación dirigida**

**Descripción del taller:** en el taller 6 se exploró la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico y algunas propiedades de los triángulos hiperbólicos equiláteros e isósceles. En este taller se continúa con la indagación de otras propiedades geométricas, como la desigualdad triangular o la concurrencia de líneas notables: mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.

**Actividad 7.1**

**Descripción**: en esta actividad, los estudiantes exploran la desigualdad triangular en la geometría hiperbólica con el fin de establecer si esta relación también se cumple en este contexto.

**Actividad 7.1**

**7.1.1** A continuación se presenta un triángulo hiperbólico con sus respectivas medidas. Arrastre los vértices y observe las longitudes de los lados.

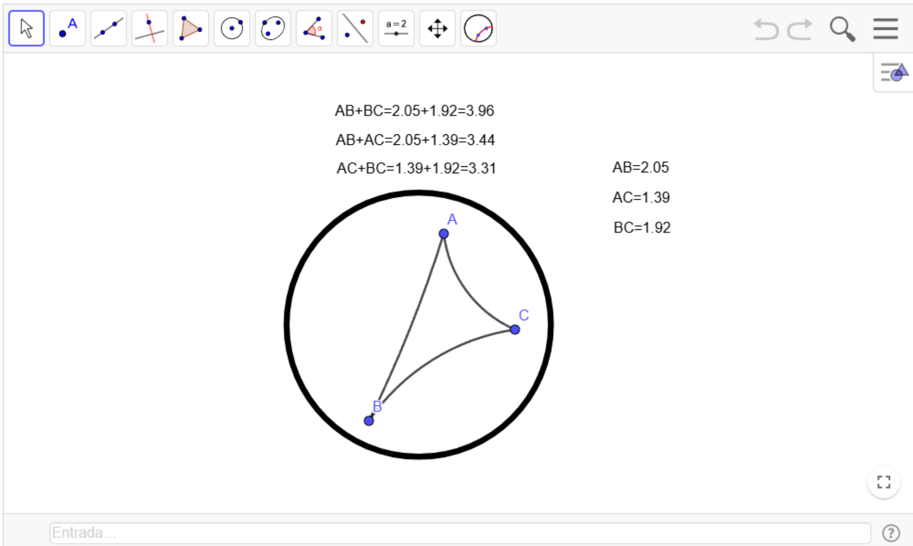



*Figura 15 Desigualdad triangular hiperbólica*

## Pregunta 7.1.2

**7.1.2** ¿Qué relación existe entre la suma de dos lados y el lado restante del triángulo hiperbólico? Establezca una comparación con la geometría euclidiana.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta pregunta se busca que los estudiantes descubran que, al igual que en la geometría euclidiana, en la geometría hiperbólica también se cumple la desigualdad triangular, es decir, la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo hiperbólico es mayor que la longitud del tercer lado.

## Pregunta 7.1.3

**7.1.3** ¿Por qué cree que se cumple esta relación en los lados de los triángulos hiperbólicos?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Esta pregunta busca que los estudiantes comiencen a justificar las propiedades que descubren de los triángulos hiperbólicos. Hasta este punto, ya han establecido que algunas propiedades relacionadas con los ángulos no se cumplen en la geometría hiperbólica. Por esta razón, es posible encontrar respuestas como la siguiente:

**7.1.3** ¿Por qué cree que se cumple esta relación en los lados de los triángulos hiperbólicos?

**Respuesta**

Porque la unica diferencia entre un triangulo hiperbolico y un triangulo euclidiano es la suma interna de sus angulos.

Otros estudiantes simplemente transfieren la desigualdad triangular euclidiana para validar esta relación en el contexto hiperbólico:

**7.1.3** ¿Por qué cree que se cumple esta relación en los lados de los triángulos hiperbólicos?

**Respuesta**

Por la desigualdad triangular que dice "la suma de dos lados siempre va a ser mayor que el lado restante".

## Pregunta 7.1.4

**7.1.4** ¿Es posible construir un triángulo con longitudes hiperbólicas 1, 2 y 4? ¿Por qué?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Una vez aceptada la desigualdad triangular hiperbólica, se espera que los estudiantes contesten que no es posible construir dicho triángulo dado que $1 + 2 = 3 < 4$.

## Fase de explicitación:

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con un compañero y escriba las conclusiones orientado por el profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

## Actividad 7.2

**Descripción**: Con esta actividad se busca que los estudiantes construyan las bisectrices de un triángulo hiperbólico. En este nivel se espera que repliquen la construcción de las bisectrices de un triángulo euclidiano a partir del uso de circunferencias.

**Actividad 7.2**

**7.2.1** Construya la bisectriz hiperbólica de cada uno de los ángulos de un triángulo hiperbólico.

**Bisectriz hiperbólica**: recta hiperbólica que divide un ángulo interno del triángulo en dos ángulos de igual medida.

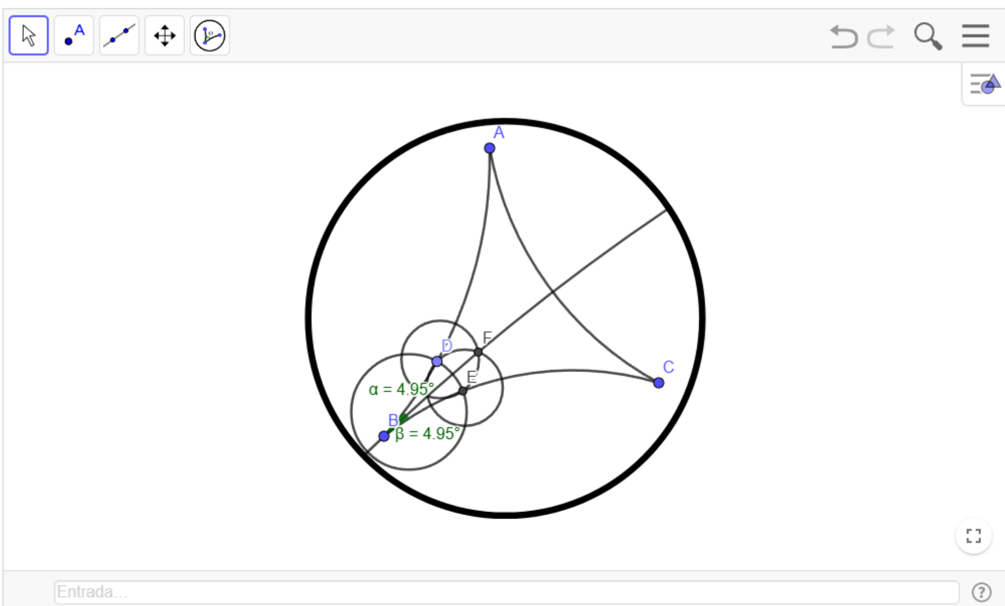
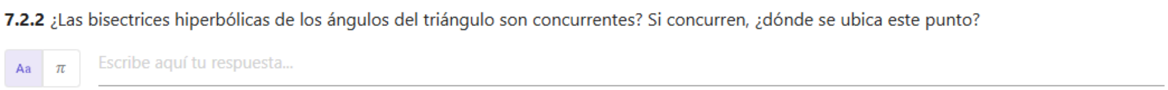



*Figura 16 Construcción de la bisectriz hiperbólica*

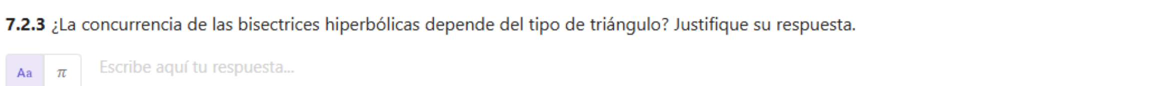
Es posible que algunos estudiantes no recuerden o no conozcan cómo se construye la bisectriz de un ángulo en el contexto euclidiano. Como sugerencia metodológica, el profesor puede indagar primero por la construcción de la bisectriz en la geometría euclidiana para luego replicar el proceso en la geometría hiperbólica.

### Pregunta 7.2.2




En efecto, al igual que en la geometría euclidiana, las bisectrices de los ángulos de un triángulo hiperbólico concurren en un punto llamado incentro hiperbólico, que siempre se ubica dentro del disco y del triángulo. Esta actividad busca que los estudiantes descubran esta propiedad y le asignen este nombre al punto de concurrencia.

### Pregunta 7.2.3




La concurrencia de las bisectrices en un triángulo hiperbólico no depende del tipo de triángulo; esta propiedad siempre se cumple.

Es posible que los estudiantes justifiquen la concurrencia en el contexto hiperbólico argumentando que utilizaron el mismo procedimiento que en geometría euclidiana para la construcción de las bisectrices y, dado que allí concurren, entonces deben concurrir también en geometría hiperbólica.

### Pregunta 7.2.4

**7.2.4** Construya, si es posible, el círculo inscrito del triángulo hiperbólico.

El círculo inscrito en un triángulo hiperbólico es el círculo más grande contenido dentro del triángulo que es tangente a los tres lados y cuyo centro es el incentro del triángulo; es decir, se define igual que en geometría euclidiana. Es posible que algunos estudiantes no recuerden qué es el círculo inscrito, por lo que el profesor debe recordar la definición en clase.

Al igual que en las actividades anteriores, se espera que los estudiantes realicen una transferencia conceptual de la geometría euclidiana a la geometría hiperbólica sobre las definiciones y construcciones, replicando así en el contexto hiperbólico la construcción del círculo inscrito que realizan en el contexto euclidiano.

### Fase de explicitación

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con un compañero y escriba las conclusiones orientado por el profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

### Actividad 7.3

**Descripción**: esta actividad tiene como propósito que los estudiantes construyan las medianas de un triángulo hiperbólico y establezcan condiciones para su concurrencia.

**7.3.1** Construya las medianas hiperbólicas de un triángulo hiperbólico.

**Mediana hiperbólica:** recta hiperbólica que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

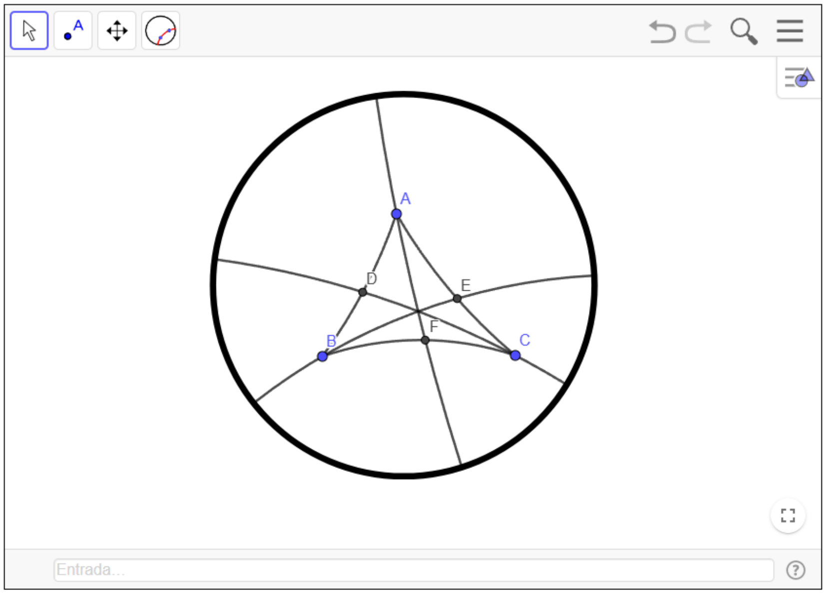



*Figura 17 Medianas de un triángulo hiperbólico*

## Pregunta 7.3.2

**7.3.2** ¿Las medianas hiperbólicas de los lados del triángulo hiperbólico son concurrentes? Si concurren, ¿dónde se ubica este punto?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En efecto, al igual que en la geometría euclidiana, las medianas de un triángulo hiperbólico siempre concurren en un punto llamado baricentro hiperbólico, que siempre se ubica dentro del disco. Esta actividad busca que los estudiantes descubran esta propiedad y le asignen este nombre al punto de concurrencia.

## Pregunta 7.3.3

**7.3.3** ¿La concurrencia de las medianas hiperbólicas depende del tipo de triángulo hiperbólico? Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

La concurrencia de las medianas en un triángulo hiperbólico no depende del tipo de triángulo; esta propiedad siempre se cumple. En este punto, los estudiantes basan sus justificaciones a partir de la exploración en el software.

## Fase de explicitación

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con un compañero y escriba las conclusiones orientado por el profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En esta fase, después del intercambio de sus respuestas a las distintas actividades, los estudiantes concluyen que las medianas, al igual que en la geometría euclidiana, siempre concurren y, por analogía, denominan a este punto baricentro.

## Fase de orientación libre:

## Actividad 7.4

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes construyan las mediatrices hiperbólicas de un triángulo, replicando el procedimiento que conocen de geometría euclidiana.

**7.4.1** Construya la mediatriz de un lado del triángulo hiperbólico.

**Mediatriz hiperbólica**: recta hiperbólica perpendicular a un lado del triángulo que pasa por su punto medio.

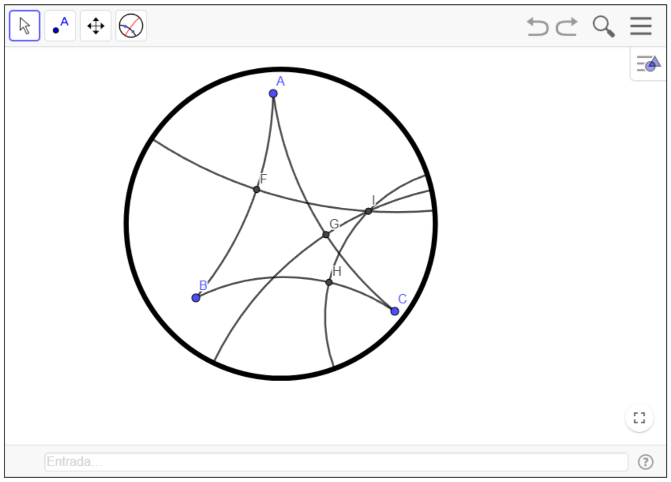



*Figura 18 Mediatrices concurrentes en un punto exterior del triángulo hiperbólico*

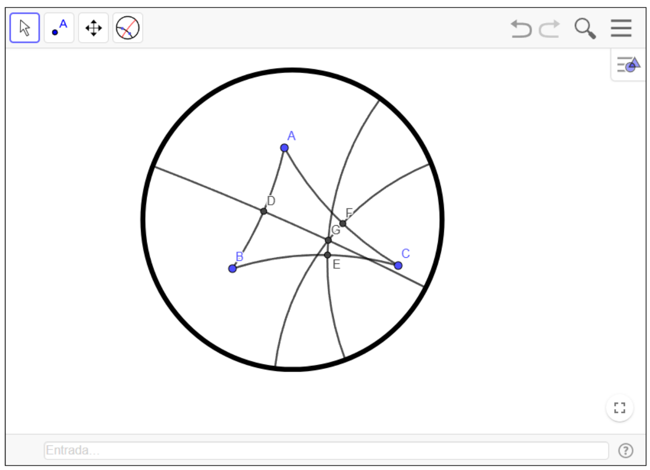



*Figura 19 Mediatrices concurrentes en un punto interior del triángulo hiperbólico*

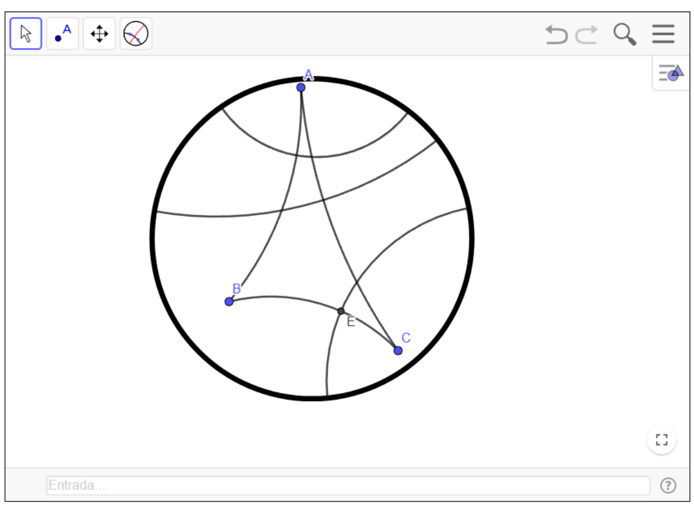
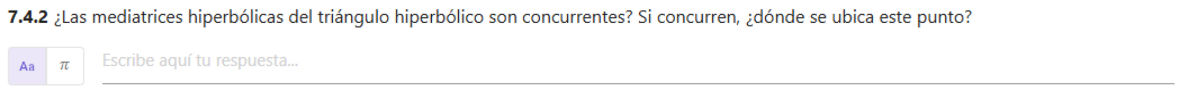



*Figura 20 Mediatrices no concurrentes*

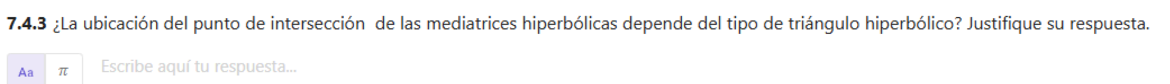
**Pregunta 7.4.2**


**7.4.2** ¿Las mediatrices hiperbólicas del triángulo hiperbólico son concurrentes? Si concurren, ¿dónde se ubica este punto?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En la geometría euclidiana, las mediatrices de cualquier triángulo siempre concurren en un punto llamado circuncentro, que equidista de los tres vértices del triángulo. En los triángulos hiperbólicos no siempre son concurrentes dentro del disco, como se muestra en la figura 20. No obstante, cuando el punto de concurrencia existe, recibe el nombre de circuncentro hiperbólico y puede ubicarse dentro o fuera del triángulo, como se muestra en las figuras 18 y 19. Esta pregunta busca que los estudiantes establezcan conjeturas respecto a la concurrencia de las mediatrices en triángulos hiperbólicos.

**Pregunta 7.4.3**


**7.4.3** ¿La ubicación del punto de intersección de las mediatrices hiperbólicas depende del tipo de triángulo hiperbólico? Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

La intersección de las mediatrices no depende únicamente del tipo de triángulo, sino también de relaciones métricas asociadas con su tamaño y la medida de sus ángulos. No obstante, los primeros criterios que pueden establecer los estudiantes, al igual que en la geometría euclidiana, parten de la clasificación de los triángulos. Por ejemplo, en los triángulos hiperbólicos equiláteros, las mediatrices siempre concurren en un punto. En las siguientes actividades se explora la concurrencia de las mediatrices y la ubicación de su punto de intersección según el tipo de triángulo.

Tarea 66: Construya un triángulo hiperbólico equilátero

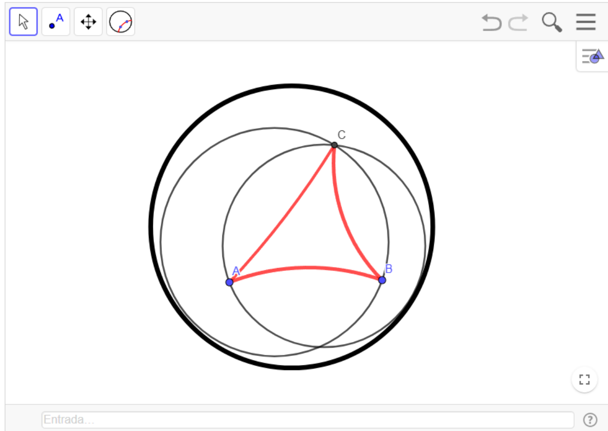



*Figura 21 Triángulo hiperbólico equilátero*

## Pregunta 7.4.4

**7.4.4** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es equilátero? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Cuando el triángulo hiperbólico es equilátero, las mediatrices concurren y el punto de concurrencia se ubica dentro del triángulo. Las justificaciones de los estudiantes en este nivel se sustentan en lo que perciben en la pantalla y en la analogía con la geometría euclidiana.

Tarea 68: Construya un triángulo hiperbólico isósceles

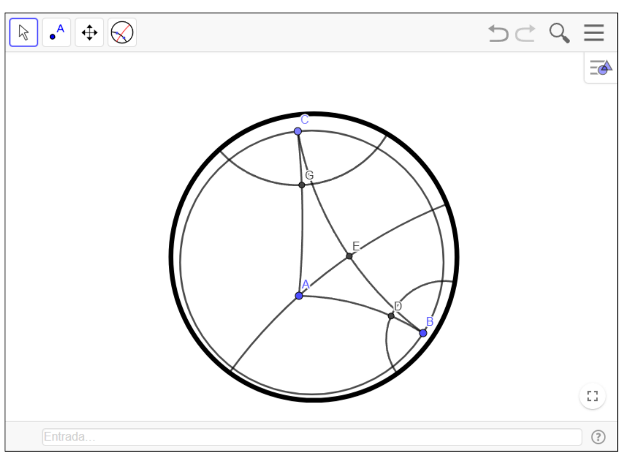



*Figura 22 Mediatrices de un triángulo hiperbólico isósceles*

## Pregunta 7.4.5

**7.4.5** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es isósceles? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Las mediatrices de un triángulo hiperbólico isósceles no siempre concurren en un punto dentro del disco, como se muestra en la figura donde las rectas son ultraparalelas. Cuando concurren, el punto puede ubicarse dentro, sobre o fuera del triángulo, dependiendo de sus ángulos.

Tarea 70: Construya un triángulo hiperbólico escaleno

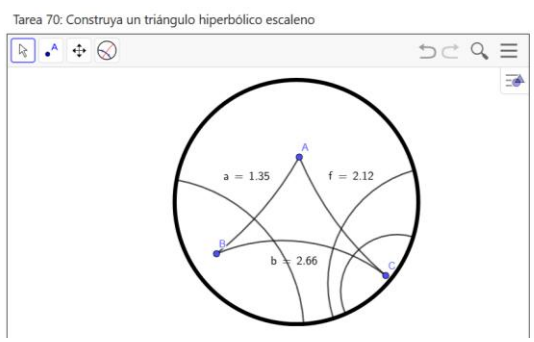



*Figura 23 Mediatrices de un triángulo hiperbólico escaleno*

## Pregunta 7.4.6

**7.4.6** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es escaleno? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al igual que en los triángulos hiperbólicos isósceles, las mediatrices de un triángulo hiperbólico escaleno no siempre concurren en dentro del disco.

Tarea 72: Construya un triángulo hiperbólico acutángulo

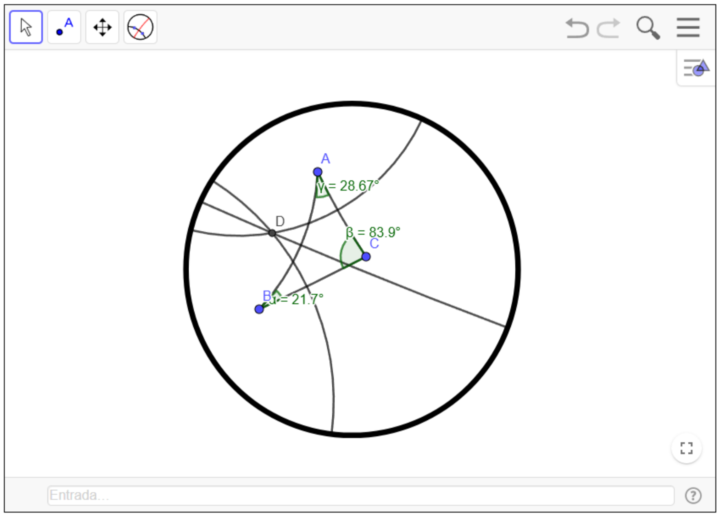



*Figura 24 Mediatrices concurrentes de un triángulo hiperbólico acutángulo*

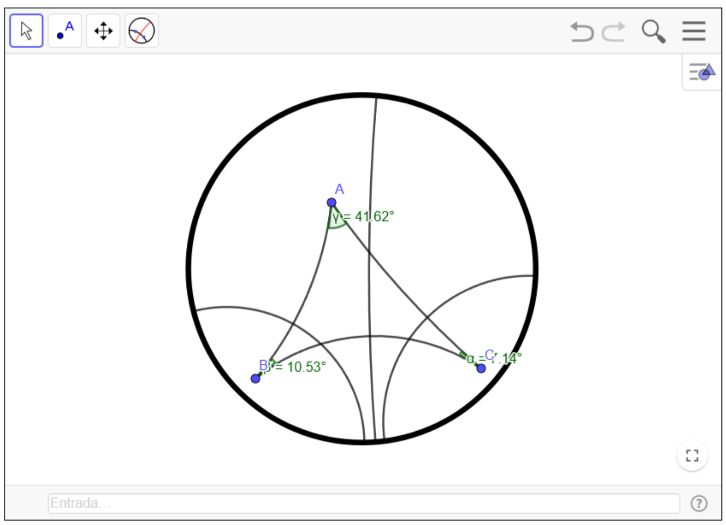



*Figura 25 Mediatrices no concurrentes de un triángulo hiperbólico acutángulo*

## Pregunta 7.4.7

**7.4.7** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es acutángulo? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

De acuerdo a la experimentación en el software y el uso de distintos triángulos acutángulos, los estudiantes pueden concluir que las mediatrices de un triángulo hiperbólico acutángulo no siempre concurren dentro del disco como se muestra en la figura.

Tarea 74: Construya un triángulo hiperbólico rectángulo

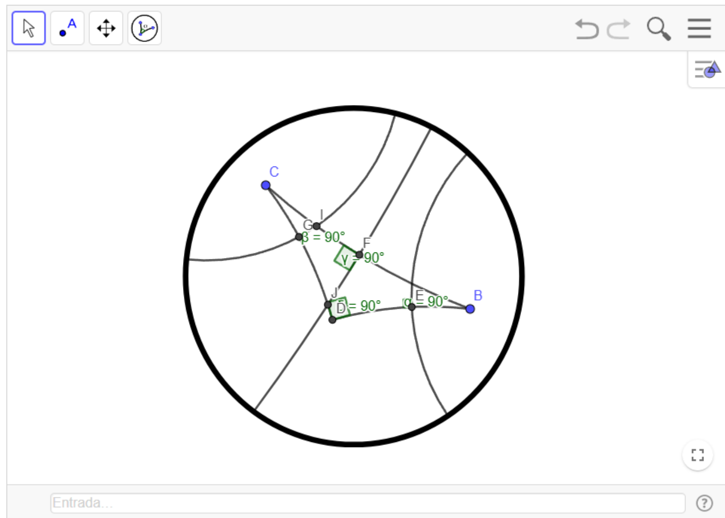



*Figura 26 Mediatrices no concurrentes dentro del disco de Poincaré*

## Pregunta 7.4.8

**7.4.8** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es rectángulo? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Cuando el triángulo hiperbólico es rectángulo, las mediatrices pueden concurrir o no dentro del disco. Es posible que los estudiantes concluyan que la concurrencia no siempre se garantiza, o bien que se presenta únicamente para ciertos valores de los otros dos ángulos del triángulo. Asimismo, podrían establecer criterios para determinar si este punto se encuentra dentro o fuera del triángulo con base en la medida de los ángulos. Como es característico de este nivel, sus argumentos se fundamentan en la experimentación con el software

## Pregunta 7.4.9

**7.4.9** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es obtusángulo? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al igual que en los casos anteriores, a partir de la exploración con el software, los estudiantes concluyen que las mediatrices de los triángulos hiperbólicos obtusángulos no siempre concurren dentro del plano.

## Actividad 7.5

**Descripción**: En esta actividad se invita a los estudiantes a explorar con el software otra línea notable: la altura.

**Actividad 7.5**

**7.5.1** Construya las alturas hiperbólicas de un triángulo hiperbólico.

**Altura hiperbólica:** es la recta hiperbólica perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto (o a su prolongación).

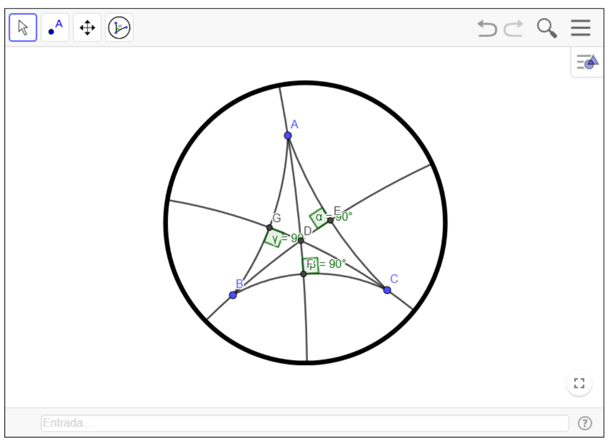



*Figura 27 Alturas de un triángulo hiperbólico*

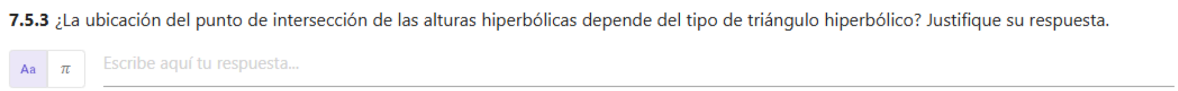
## Pregunta 7.5.2

**7.5.2** ¿Las alturas del triángulo son concurrentes? Si concurren, ¿dónde se ubica este punto?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

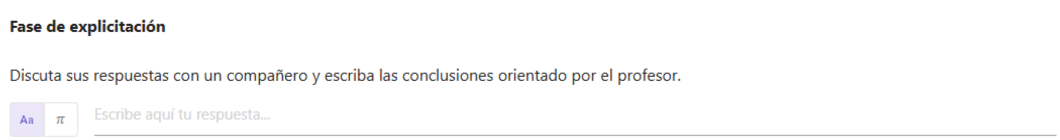
Las alturas de un triángulo hiperbólico no siempre concurren. Cuando lo hacen, el punto de concurrencia se denomina ortocentro hiperbólico y puede ubicarse en el interior, sobre un lado o en el exterior del triángulo.

**Pregunta 7.5.3**




La ubicación del ortocentro hiperbólico varía según los ángulos y los lados del triángulo. Es posible que los estudiantes identifiquen criterios que garanticen la concurrencia para casos particulares, ya sea por valores específicos de ángulos o por la clasificación del triángulo según sus lados.

**Fase de explicitación:**




### *3.4.2.2.3 Taller 8- Líneas y puntos notables II*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 16, 17 y 18 correspondientes al proceso de descripción, el descriptor 19 del proceso de definición y el descriptor 20 del proceso de demostración.

**Descripción del taller:** En este taller se continúa con la exploración de algunas propiedades de las líneas y puntos notables para ciertos tipos particulares de triángulos.

## Actividad 8.1

**Descripción**: en la geometría euclidiana, una de las propiedades de los triángulos equiláteros es que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro siempre existen, se ubican en el interior del triángulo y coinciden en un mismo punto. Con esta actividad se busca que los estudiantes exploren esta propiedad en el contexto hiperbólico.

**Actividad 8.1**

**8.1.1** Construya un triángulo hiperbólico equilátero y construya el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

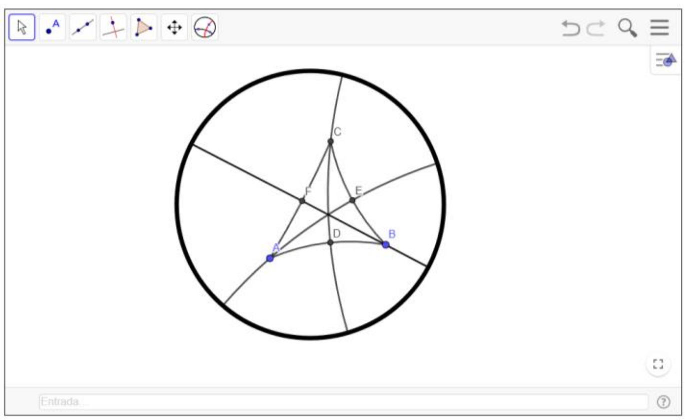



*Figura 28 Líneas y puntos notables coincidentes en un triángulo hiperbólico equilátero*

## Pregunta 8.1.2

**8.1.2** ¿Qué relación existe entre estos 3 puntos? ¿Ocurre lo mismo en la geometría euclidiana?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

A partir de la exploración, los estudiantes concluyen que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de los triángulos hiperbólicos equiláteros coinciden, al igual que en la geometría euclidiana.

## Fase de explicitación:

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones orientado por su profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

## Actividad 8.2

**Descripción**: con esta actividad se busca explorar la existencia de estos puntos notables en geometría hiperbólica en los triángulos isósceles.

**Actividad 8.2**

**8.2.1** Construya un triángulo hiperbólico isósceles y construya el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

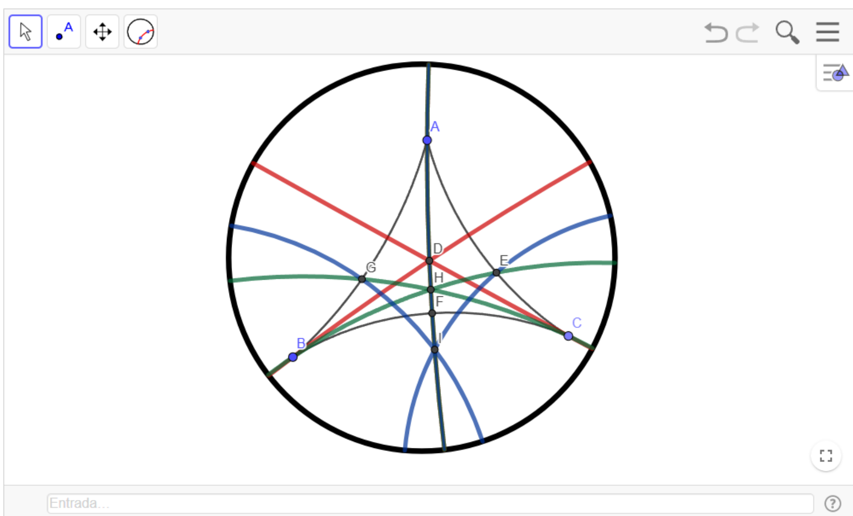



*Figura 29 Línea de Euler de un triángulo hiperbólico isósceles*

En la imagen, las líneas rojas representan las alturas, las verdes representan las medianas y las azules representan las mediatrices.

## Pregunta 8.2.2:

**8.2.2** ¿Qué relación existe entre estos 3 puntos? ¿Ocurre lo mismo en la geometría euclidiana? Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al igual que en la geometría euclidiana, cuando estos puntos existen, pueden ubicarse dentro, sobre o fuera del triángulo. Sin embargo, la diferencia fundamental es que en la geometría euclidiana el baricentro, el circuncentro y el ortocentro siempre existen, mientras que en la geometría hiperbólica la concurrencia de las líneas notables no siempre está garantizada en las mismas condiciones que en la geometría euclidiana.

**Fase de explicitación:**

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones orientado por su profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Actividad 8.3**

**Descripción**: la línea de Euler es la recta que contiene el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo, siempre que dichos puntos existan y no coincidan. Con esta actividad se busca que los estudiantes exploren esta línea en el software y establezcan algunos criterios para su existencia.

**Actividad 8.3**

**8.3.1** Explique bajo qué condiciones existe la línea hiperbólica de Euler (análoga a la línea euclidiana de Euler).

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

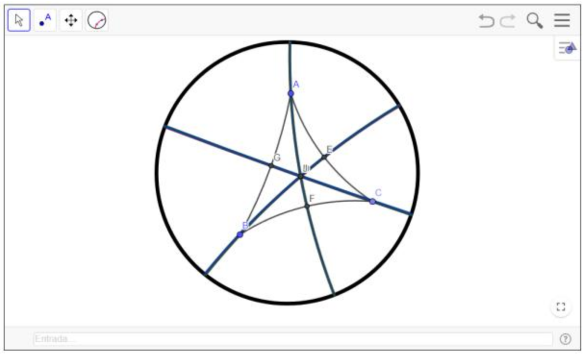


*Figura a*

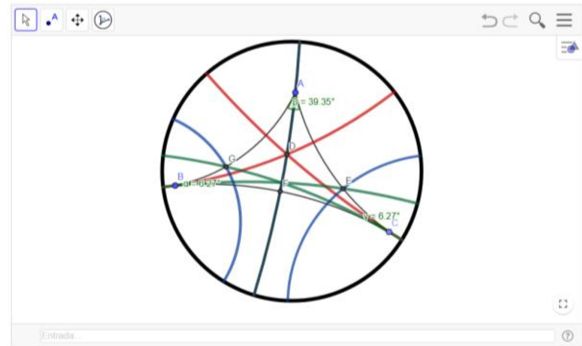


*Figura b*

**Fase de explicitación:**

**Fase de explicitación**

Discuta sus respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones orientado por su profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Es posible que algunos estudiantes concluyan que la línea de Euler se reduce a un único punto, como en el triángulo hiperbólico equilátero de la figura a; que no existe, como en el triángulo de la figura b donde las líneas notables no necesariamente concurren; o que existe bajo ciertos valores de los ángulos o relaciones entre los lados.

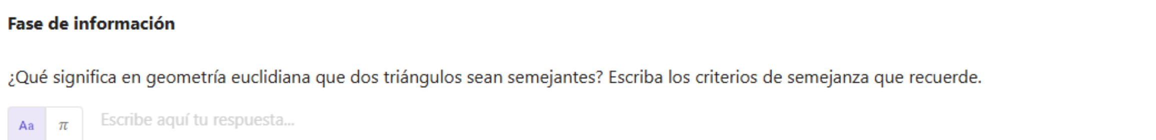
#### *3.4.2.2.4 Taller 9- Semejanza y Congruencia de triángulos- Teorema de Pitágoras*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 14, 15, 17 y 18 correspondientes al proceso de descripción, el descriptor 19 del proceso de definición y los descriptores 20 y 21 del proceso de demostración.

**Descripción del taller:** con este taller se busca que los estudiantes descubran que la semejanza de triángulos en la geometría hiperbólica no ocurre como en la geometría euclidiana, más aún, que los criterios de semejanza euclidianos implican congruencia en la geometría hiperbólica, siendo esta una diferencia fundamental entre las dos geometrías.

**Fase de información:**

En esta fase se busca que los estudiantes recuerden que dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son semejantes. Asimismo, que recuerden algunos criterios de semejanza como Ángulo-Ángulo (AA), Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ángulo-Lado (LAL).




**Fase de orientación dirigida:**

**Actividad 9.1**

**Descripción**: en esta actividad, los estudiantes inician la exploración de los criterios de semejanza en geometría euclidiana, establecidos en la fase de información, para contrastarlos con lo que ocurre en la geometría hiperbólica y descubrir que en este contexto dichos criterios no se cumplen.

En la actividad se garantiza que dos pares ángulos correspondientes son congruentes. Esta condición en el contexto euclidiano implicaría necesariamente que el tercer par de ángulos debe ser congruente también, dado que la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°).

Sin embargo, en geometría hiperbólica esto no se puede garantizar ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico no es constante. A partir de esta observación, se espera que los estudiantes descubran que el criterio ángulo-ángulo no garantiza semejanza en la geometría hiperbólica.

Finalmente, al mover los vértices de modo que el tercer par de ángulos sea también congruente, se espera que los estudiantes deduzcan mediante la validación numérica que el criterio AAA garantiza congruencia y no semejanza de triángulos.

**Actividad 9.1**

**9.1.1** En los triángulos que se muestran en la figura, dos ángulos correspondientes son congruentes. Mueva los vértices de los triángulos de modo que perceptivamente el otro par de ángulos sea congruente también.

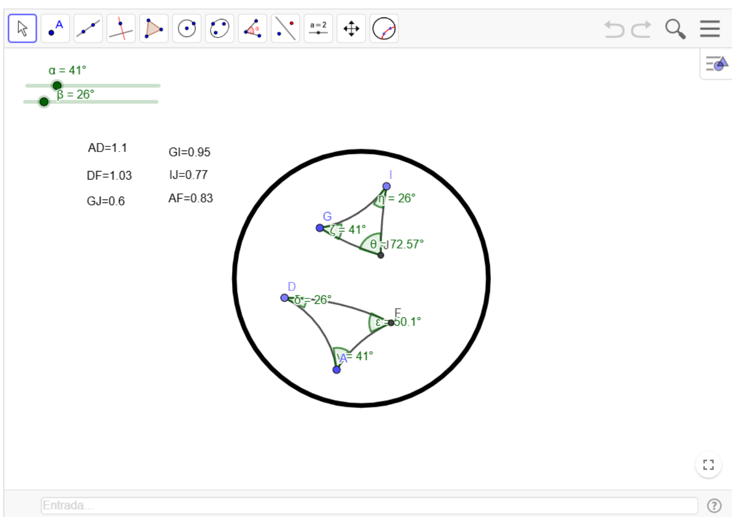



*Figura 30 Exploración del criterio de congruencia hiperbólica AAA*

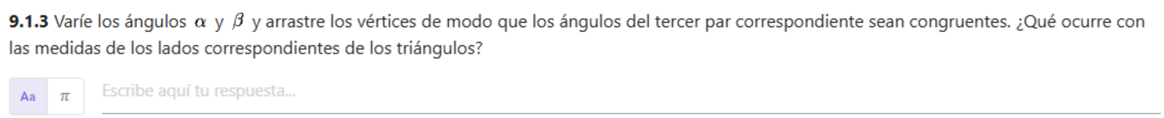
## Pregunta 9.1.2

**9.1.2** ¿Qué observa de las medidas de los lados correspondientes de los triángulos? ¿Por qué cree que ocurre esto?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Cuando los ángulos correspondientes son congruentes, los estudiantes identifican que las medidas de los lados correspondientes también son congruentes. En este nivel, es posible que sus justificaciones estén relacionadas con algunas propiedades de la geometría hiperbólica como el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico no es constante y siempre es menor que 180° o con la no validez del quinto postulado de Euclides.

**Pregunta 9.1.3**




Con esta actividad se busca que los estudiantes confirmen que, independientemente de la medida de los ángulos, el hecho de que los ángulos correspondientes sean congruentes implica que los lados correspondientes sean congruentes.

**Pregunta 9.1.4**


A partir de las actividades anteriores, se espera que los estudiantes concluyan que los triángulos son congruentes. No obstante, dado que esta actividad está relacionada con la semejanza de triángulos, es posible que algún estudiante responda que los triángulos son semejanzas con razón 1. En este caso, el profesor puede precisar que esta condición corresponde justamente al hecho de ser congruentes.

## Pregunta 9.1.5

**9.1.5** ¿Se da la misma relación en la geometría hiperbólica que en la geometría euclidiana cuando los ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

No, en la geometría euclidiana el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo garantiza semejanza y no congruencia de triángulos. Esta es una diferencia fundamental entre ambas geometrías que los estudiantes descubren gracias al dinamismo que ofrece el software y la exploración que puede realizar en él.

## Pregunta 9.1.6

**9.1.6** ¿Por qué cree que se da la congruencia de los lados en lugar de la proporcionalidad?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Es posible que algunos estudiantes recurran a las observaciones realizadas en el software para concluir que no se garantiza proporcionalidad distinta de 1 entre los triángulos, sino congruencia. Otros, en cambio, podrían fundamentar su respuesta en la negación del quinto postulado de Euclides o en el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico no es constante y siempre es menor que 180°.

## Fase de explicitación:

Discuta sus respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones con la orientación del profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Fase de orientación libre**

**Actividad 9.2**

**Descripción**: en la actividad anterior se consideró el criterio Ángulo- Ángulo-Ángulo. Ahora, en esta actividad, se busca que los estudiantes aborden el criterio Lado-Ángulo-Lado y descubran que, en geometría hiperbólica, este tampoco garantiza la semejanza de triángulos.

En geometría euclidiana, si se trazan los puntos medios $D$ y $E$ de los segmentos $AB$ y $AC$, respectivamente, se cumple que los triángulos $ABC$ y $ADE$ son semejantes con razón 2. Esto ocurre porque comparten el ángulo $A$ y los lados correspondientes son proporcionales ya que $D$ y $E$ son puntos medios de $AB$ y $AC$, respectivamente, así, por el criterio Lado-Ángulo-Lado, se puede establecer que los otros ángulos correspondientes son congruentes.

Sin embargo, en la geometría hiperbólica, aunque también se garantiza la proporcionalidad entre los lados y el ángulo en común, los demás ángulos correspondientes no son congruentes y, por tanto, no se tiene la semejanza de los triángulos.

**Actividad 9.2**

**9.2.1** Dado el siguiente triángulo $ABC$, construya $D$ y $E$, puntos medios de los lados $AB$ y $AC$ respectivamente y una el segmento $DE$

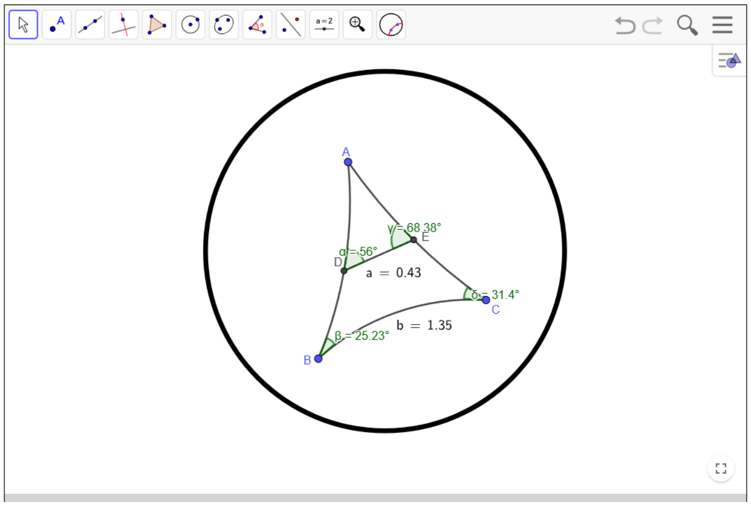



*Figura 31 Exploración del criterio de congruencia hiperbólica LAL*

## Pregunta 9.2.

**9.2.2** Mida los ángulos $ABC$ y $ADE$. ¿Son congruentes?
Mida los ángulos $ACB$ y $AED$. ¿Son congruentes?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al medir los ángulos, los estudiantes establecerán que los ángulos no son congruentes.

## Pregunta 9.2.3

**9.2.3** Compare el lado $DE$ con el lado $BC$ ¿Se conversa la proporcionalidad que guardan los otros lados?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En geometría euclidiana, el teorema del segmento medio establece que, en un triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la de dicho lado. A partir de la exploración en el software, se busca que los estudiantes descubran y respondan que esta propiedad no se cumple en la geometría hiperbólica.

## Pregunta 9.2.4

**9.2.4** ¿Qué puede decir del criterio Lado- Ángulo- Lado para la semejanza? ¿Qué respuestas obtendríamos en esta actividad si los triángulos fueran euclidianos?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

## Fase de explicitación:

Discuta sus respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones orientado por el profesor.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

## Actividad 9.3

**Descripción**: en geometría euclidiana, dos triángulos equiláteros siempre son semejantes y se puede justificar a partir de dos criterios: por un lado, el criterio AAA, ya que los ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60°; y, por otro lado, el criterio LLL, pues al ser congruentes los lados de un triángulo equilátero, estos van a ser proporcionales con los de cualquier otro triángulo equilátero.

En esta actividad se aborda el criterio LLL. En particular, se busca que los estudiantes descubran que, aunque dos triángulos tengan sus lados correspondientes proporcionales (como en este caso de triángulos hiperbólicos equiláteros), sus ángulos correspondientes no son congruentes y, por tanto, no se garantiza la semejanza de los triángulos.

**Actividad 9.3**

**9.3.1** Construya dos triángulos hiperbólicos equiláteros.

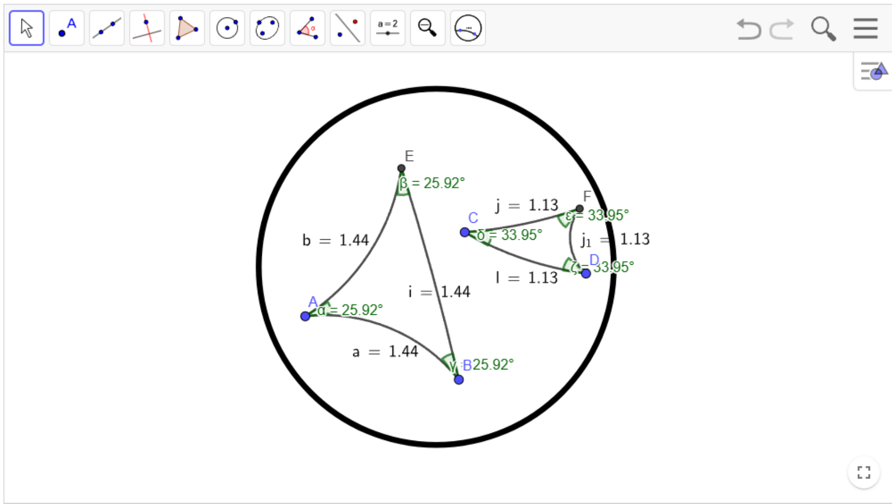



*Figura 32 Comparación de triángulos hiperbólicos equiláteros*

## Pregunta 9.3.2

**9.3.2** ¿Son semejantes en el sentido euclidiano? Justifique su respuesta

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

En este nivel, los estudiantes pueden afirmar que no se da la semejanza en este caso porque no se cumplen las relaciones de proporcionalidad entre los lados ni la congruencia de ángulos, basándose en la exploración con el software y la validación numérica, sin indagar en las razones geométricas que explican por qué no se garantiza la semejanza.

## Pregunta 9.3.3

**9.3.3** ¿Qué relación existe entre los triángulos equiláteros euclidianos?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Con esta pregunta se busca que los estudiantes establezcan una comparación entre ambas geometrías: mientras en la geometría euclidiana el criterio LLL garantiza semejanza de triángulos, en la geometría hiperbólica no ocurre lo mismo.

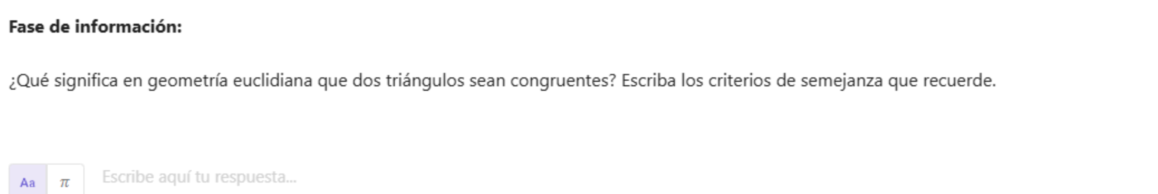
**Fase de explicitación:**

¿Qué ocurre con la semejanza en triángulos hiperbólicos?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Fase de información:**

Una vez explorados los criterios de semejanza en los triángulos hiperbólicos, se aborda ahora la congruencia. En particular, en esta fase de información, análogamente a lo hecho en la semejanza, se busca que los estudiantes recuerden qué es la congruencia de triángulos y cuáles son los criterios que la garantizan.



**Fase de información:**

¿Qué significa en geometría euclidiana que dos triángulos sean congruentes? Escriba los criterios de semejanza que recuerde.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

**Fase de orientación dirigida**

**Actividad 9.4**

**Descripción:** en esta actividad se busca que los estudiantes reconozcan la congruencia de triángulos hiperbólicos a partir de la reflexión respecto a una recta. Al reflejar un triángulo respecto a una recta, el triángulo obtenido es congruente con el original, es decir, sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

**Actividad 9.4**

**9.4.1** Construya un triángulo hiperbólico y refléjelo respecto a una recta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

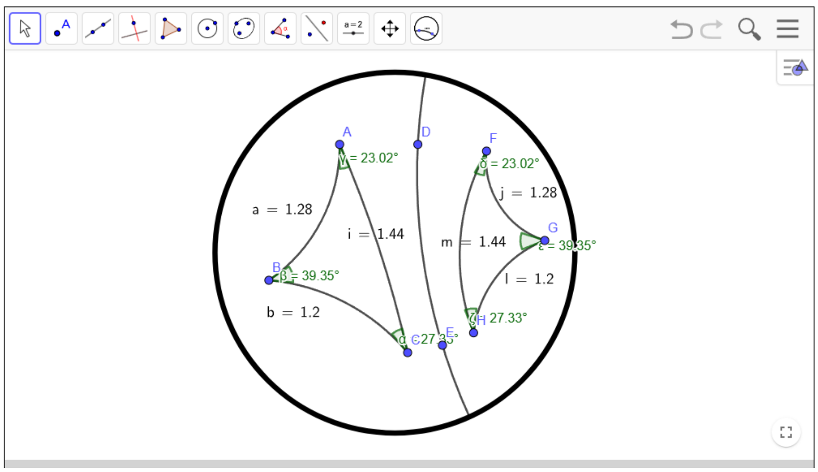



*Figura 33 Reflexión de triángulos hiperbólicos*

## Pregunta 9.4.2

**9.4.2.** ¿Qué características tiene el triángulo hiperbólico reflejado respecto a las del triángulo hiperbólico original?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

El triángulo reflejado es congruente con el triángulo original.

## Actividad 9.5

**Descripción:** con esta actividad se busca que los estudiantes exploren el criterio Lado-Lado-Lado para la congruencia de triángulos. En particular, se espera que descubran que dicho criterio también garantiza congruencia en la geometría hiperbólica.

**Actividad 9.5**

**9.5.1** Construya dos triángulos hiperbólicos con lados correspondientes congruentes

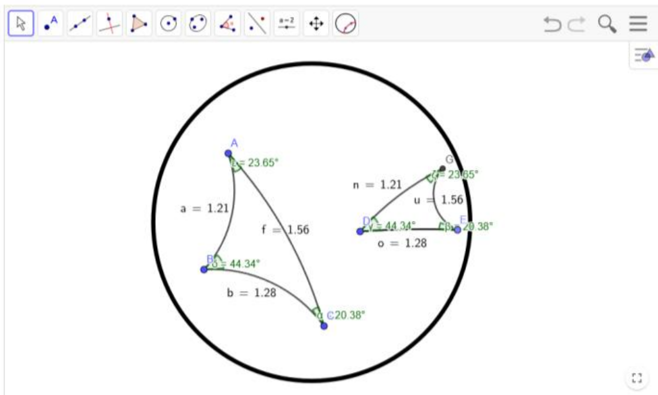



*Figura 34 Criterio de congruencia hiperbólica LLL*

## Pregunta 9.5.2

**9.5.2** ¿Son congruentes los ángulos? ¿Qué ocurre con el criterio L-L-L?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

A partir de la exploración en el software, los estudiantes observan que los ángulos correspondientes son congruentes y, por tanto, el criterio L-L-L garantiza congruencia de triángulos.

## Fase de orientación libre

## Actividad 9.6

**Descripción**: en esta actividad de aborda el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado. Ya que criterio no depende del quinto postulado de Euclides, también se cumple en la geometría hiperbólica. Se busca que los estudiantes descubran esta propiedad a partir de la exploración en el software.

**Actividad 9.6**

**9.6.1** Construya dos triángulos con un par de lados correspondientes congruentes y el ángulo entre ellos congruente,

### Pregunta 9.6.2

**9.6.2** ¿son congruentes los triángulos? Justifique su respuesta.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

A partir de la exploración, los estudiantes concluyen que los triángulos si son congruentes y utilizan la validación numérica para justificar que el criterio Lado-Ángulo-Lado corresponde efectivamente a un criterio de congruencia de triángulos hiperbólicos.

### Fase de explicitación:

**Fase de explicitación**

¿Qué ocurre con la congruencia en los triángulos hiperbólicos?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

### Actividad 9.8

**Descripción**: el Teorema de Pitágoras depende del quinto postulado de Euclides, por tanto, no se cumple en la geometría hiperbólica. Con esta actividad se busca que los estudiantes exploren esta relación en un triángulo hiperbólico rectángulo para que concluyan que, en este contexto, el teorema no es válido.

**Actividad 9.8**

9.8.1 Arrastre los vértices del siguiente triangulo rectángulo hiperbólico y observe las medidas que aparecen en pantalla.

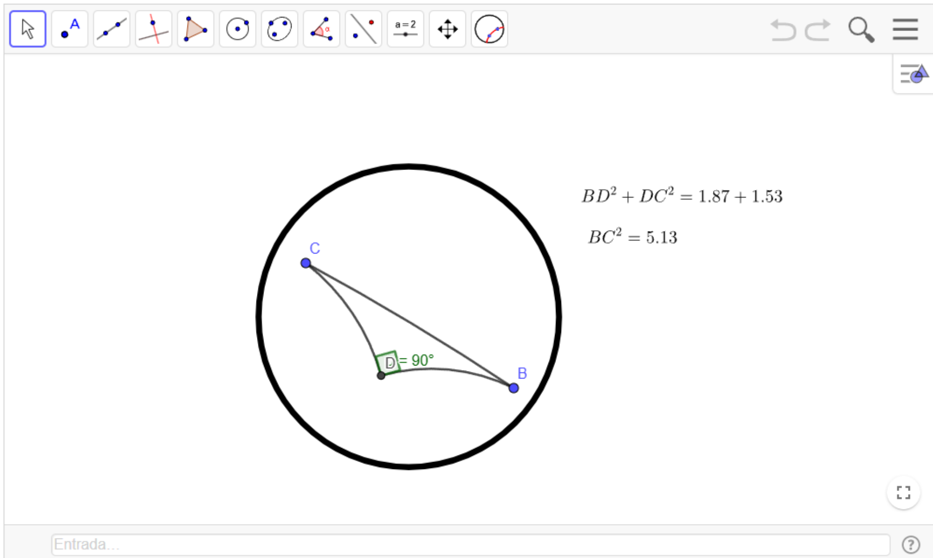



*Figura 35 Exploración del teorema de Pitágoras en el disco de Poincaré*

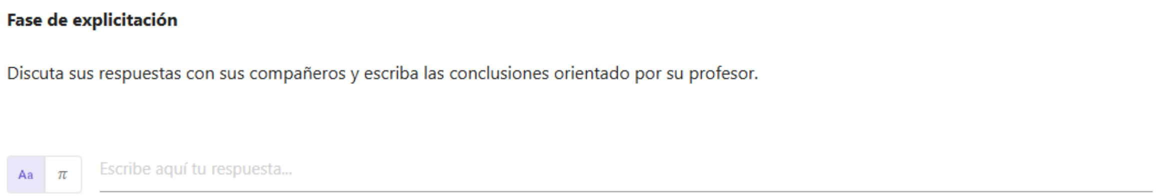
## Pregunta 9.8.2

9.8.2 **¿Se cumple el teorema de** Pitágoras en el sentido eclidiana?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Es pertinente preguntar a los estudiantes por qué consideran que no se cumple esta relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Las respuestas pueden variar: algunos podrían argumentar que se debe a que no se cumple el quinto postulado de Euclides; otros podrían señalar que no es posible construir cuadrados en geometría hiperbólica, ya que la suma de sus ángulos sería menor que 360°, lo que impide comparar las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo como se hace en geometría euclidiana.

**Fase de explicitación:**




### 3.4.2.3 Secuencia de enseñanza nivel 3

#### *3.4.2.3.1 Taller 10- Postulados y teoremas de la geometría hiperbólica*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven el descriptor 22 correspondiente al proceso de definición y los descriptores 29, 30 y 31 del proceso de demostración.

**Descripción del taller:** con este taller se busca introducir a los estudiantes al sistema axiomático formal de la geometría hiperbólica. En la fase de información, se presentan los términos primitivos, los términos definidos, las nociones comunes y los 4 primeros postulados de Euclides. Aunque estos elementos pueden resultar familiares para los estudiantes, en esta etapa del curso se abordan de manera formal y sistemática, como fundamento para el estudio de la nueva geometría.

Posteriormente, se presentan los teoremas que se pueden deducir de los 4 primeros postulados y que, por tanto, son comunes a ambas geometrías.

Luego, se presenta a los estudiantes el quinto postulado de Euclides y la reformulación planteada por Playfair que es la más conocida.

**Actividad 10.1**

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes conozcan la negación del quinto postulado que da origen a la geometría hiperbólica.

**10.1.1** Escriba las dos posibles negaciones del quinto postulado de Euclides e identifique cuál corresponde a la geometría euclidiana y cuál corresponde a la geometría hiperbólica.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

El postulado es: Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Las dos negaciones posibles son:

- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar más de una paralela a la recta dada. Esta negación da origen a la geometría hiperbólica.
- Por un punto exterior a una recta, no se puede trazar ninguna paralela a la recta dada. Esta negación da origen a la geometría elíptica.

Como parte de esta actividad se definen también dos tipos de paralelas y se les pide a los estudiantes que construyan estas rectas en el disco:

**Rectas ultraparalelas:** son rectas que no se intersectan.
**Rectas asintóticas**: rectas que convergen asintóticamente en un punto en el infinito.

Dada la siguiente recta y el punto exterior, grafique las rectas ultraparalelas y asintóticas a la recta dada que pasan por el punto dado.

**Observación:** para graficar las rectas asintóticas, seleccione la herramienta recta paralela, el punto exterior dado y la recta dada.

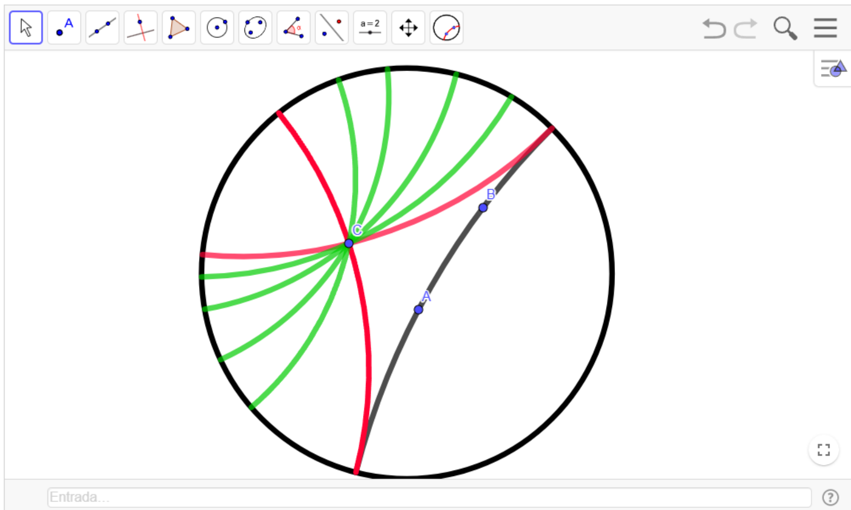



*Figura 36 Rectas ultraparalelas y asintóticamente paralelas a una recta dada por un punto exterior dado*

Las rectas verdes son ultraparalelas y las rectas rojas son asintóticamente paralelas a la recta $AB$ que pasan por el punto $C$.

Finalmente, en esta fase se presentan los teoremas del libro I que se prueban con el quinto postulado y que, por tanto, no se cumplen en la geometría hiperbólica como la suma de los ángulos internos del triángulo o el teorema de Pitágoras.

**Fase de orientación dirigida**

**Actividad 10.2**

**Actividad 10.2**

**10.2.1** Demuestre que, en un triángulo euclidiano, la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Utilice el applet de geogebra para apoyar su demostración. Describa el paso a paso de su demostración.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Los estudiantes recurren a la demostración clásica en la que, dado un triángulo ABC, se traza una recta paralela a B que pase por el vértice C y, a partir de las relaciones entre ángulos alternos internos, concluyen que la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°.

**Pregunta 10.2.2**

**10.2.2** ¿Qué propiedad de la demostración anterior no se cumple en la geometría hiperbólica y que, por tanto, no garantiza que la suma de los ángulos internos sea 180°? ¿Por qué cree que es menor que 180° y no mayor que 180°?

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

La unicidad de la recta paralela que trazan no se cumple y, por tanto, no se garantiza que la suma sea 180°.

**Actividad 10.3**

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes construyan un cuadrilátero de Saccheri y establezcan algunas de sus propiedades para luego utilizarlas en otras demostraciones.

**Actividad 10.3**

**10.3.1** Un cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero en el que un par de lados opuestos son iguales y tienen uno de los otros lados como perpendicular común. La perpendicular común se llama **la base**, el lado opuesto a esta es **la cumbre**, y los ángulos adyacentes a la cumbre son **los ángulos de la cumbre**. Construya un cuadrilátero de Saccheri $ABCD$ con base $AB$

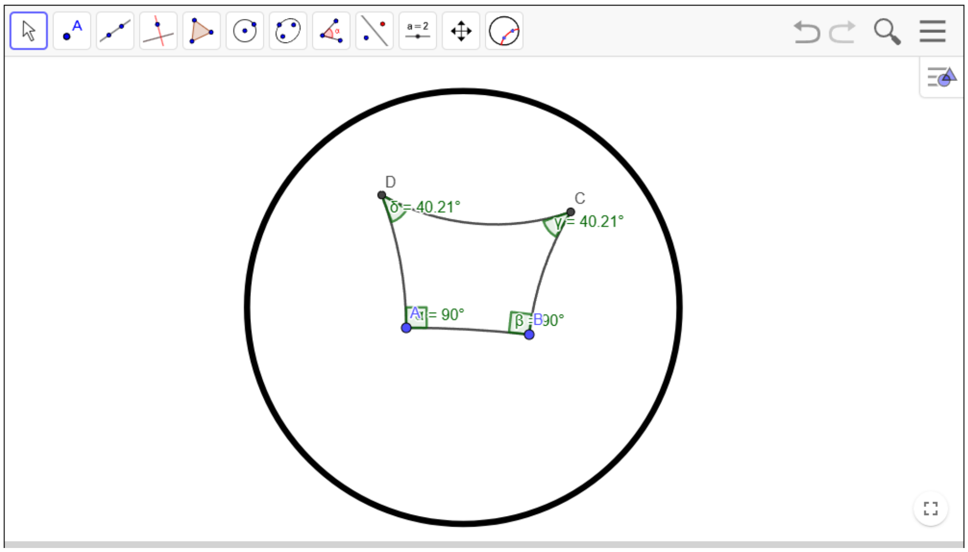



*Figura 37 Cuadrilátero de Saccheri*

**Propiedad 1:** si los vértices de un cuadrilátero son consecutivamente $A, B, C, D$, con ángulos rectos en $A$ y $B$, entonces $DA$ es mayor que, igual a o menor que $CB$ si y solo si, respectivamente, $\angle CDA$ es menor que, igual a o mayor que $\angle DCB$.

**Propiedad 2** :Los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.

## Pregunta 10.3.2

**10.3.2** Demuestre la propiedad 2.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Como en el cuadrilátero de Saccheri, los ángulos $A$ y $B$ son rectos y $DA = DC$, entonces los ángulos $\sphericalangle CDA$ y $\sphericalangle CBD$ son iguales de acuerdo a la propiedad 1. Con esta pregunta se busca que los estudiantes pongan en juego la definición del cuadrilátero de Saccheri y las condiciones de la propiedad 1 para deducir que los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.

**Actividad 10.4**

**Descripción**: Con esta actividad se busca que los estudiantes verifiquen ciertas propiedades que, por limitaciones de tiempo, no pudieron demostrarse, pero que resultan necesarias para las demostraciones posteriores.

**Actividad 10.4**

**10.4.1** Realice la siguiente construcción:

1. Construya un triángulo $ABC$.
2. Construya $D$ y $E$ puntos medios de $AB$ y $AC$ respectivamente.
3. Construya la recta hiperbólica $l$ que pasa por $D$ y $E$.
4. Construya la recta perpendicular a $l$ que pasa por $B$ y la recta perpendicular a $l$ que pasa por $C$.
5. Marque los puntos de intersección $F$ y $G$ de la recta $l$ con las rectas perpendiculares del paso anterior.

Diga cuáles de las siguientes propiedades se verifican:

**Propiedad 3:** el cuadrilátero $BCGF$ es un cuadrilátero de Saccheri.
**Propiedad 4:** la base $FG$ mide el doble de $DE$
**Propiedad 5:** la suma de los dos ángulos de la cumbre $\angle FBC$ y $\angle GCB$ es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo.
**Propiedad 6:** los ángulos de la cumbre del cuadrilátero de Saccheri son agudos.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

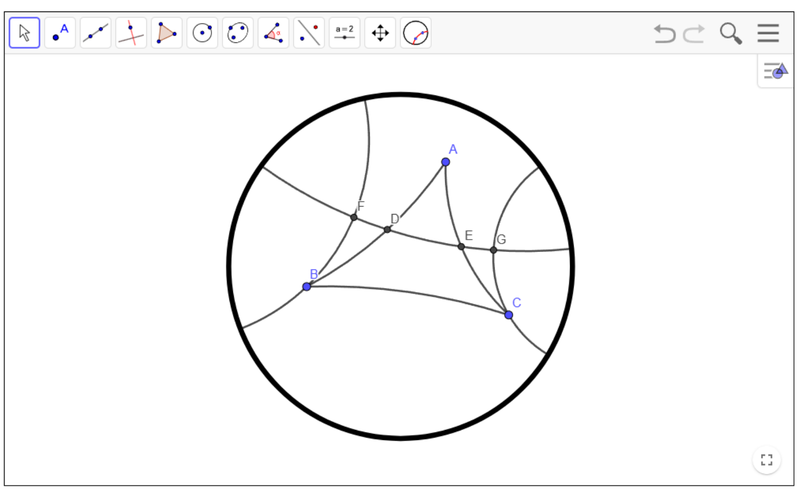



*Figura 38 Construcción de un cuadrilátero de Saccheri*

Al realizar la construcción, las 4 propiedades se verifican.

### Pregunta 10.4.2

**10.4.2** Escriba las justificaciones para cada una de las siguientes afirmaciones, que demuestran que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180°.
**Paso 1**: sea $ABC$ cualquier triángulo.
**Paso 2**: Sean $D$ y $E$ los puntos medios de los segmentos $AB$ y $AC$.
**Paso 3**: Sea $DE$ una recta hiperbólica.
**Paso 4**: Sean $BF$ y $CG$ perpendiculares a $DE$.
**Paso 5:** $GFBC$ es un cuadrilátero de Saccheri y $\angle FBC + \angle GCB = \angle A + \angle B + \angle C$.
**Paso 6**: $\angle FBC < 90^\circ$ y $\angle GCB < 90^\circ$.
**Paso 7**: $\angle FBC + \angle GCB < 180^\circ$
**Paso 8**: la suma de los ángulos internos del triángulo $ABC$ es menor que $180^\circ$

**Propiedad 7:** la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que $180^\circ$

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Los estudiantes deben escribir la justificación de cada uno de los pasos.

### Pregunta 10.4.3

**10.4.3** Demuestre que no existen cuadriláteros rectángulos.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Al descomponer cualquier cuadrilátero en dos triángulos, la suma de sus ángulos es siempre menor que 360°

#### *3.4.2.3.2 Taller 11- Postulados y teoremas de la geometría hiperbólica II*

**Descriptores de la caracterización a priori:** en este taller se promueven los descriptores 26, 30 y 31 del proceso de demostración.

## Fase de orientación libre

## Actividad 11.1

**Descripción**: con esta actividad se busca que los estudiantes recuerden la demostración del teorema de Pitágoras a partir de la semejanza de triángulos, para identificar la propiedad que hace que no se cumpla el teorema en la geometría hiperbólica.

**Actividad 11.1**

**11.1.1** Analice la siguiente demostración del teorema de Pitágoras.

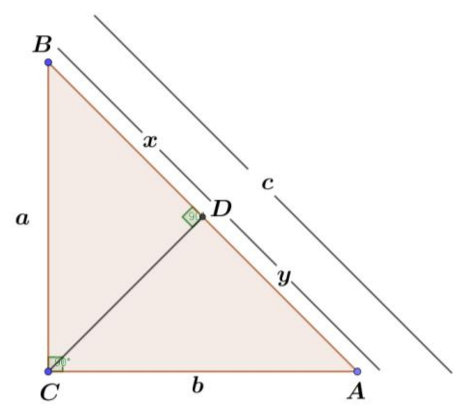



*Figura 39 Teorema de Pitágoras a partir de la semejanza euclidiana*

**11.1.2** Siga los pasos de la demostración y complete las justificaciones:

**Paso 1.** los triángulos $ABC$ y $BCD$ son semejantes.
**Paso 2.** los triángulos $ABC$ y $ACD$ son semejantes.
**Paso 3.** $\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$
**Paso 4.** $\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$
**Paso 5.** $x = \frac{a^2}{c}$
**Paso 6.** $y = \frac{b^2}{c}$
**Paso 7.** $x + y = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$
**Paso 8.** $c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$
**Paso 9.** $c^2 = a^2 + b^2$

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Los estudiantes deben escribir la justificación de cada uno de los pasos.

## Actividad 11.2

**Descripción:** con esta actividad se busca que los estudiantes comprendan por qué no se cumple el teorema de Pitágoras en la geometría hiperbólica, partiendo de la idea de que sí se cumple y llegando a una contradicción.

**Actividad 11.2**

**11.2.1** En la siguiente figura, el triángulo $ABC$ es rectángulo en $A$, $E$ y $F$ son puntos medios de $AB$ y $AC$ respectivamente y los segmentos $BG$ y $CF$ son perpendiculares a la recta $ED$. Analice los pasos descritos a continuación y escriba una conclusión sobre el teorema de Pitágoras en la geometría hiperbólica.

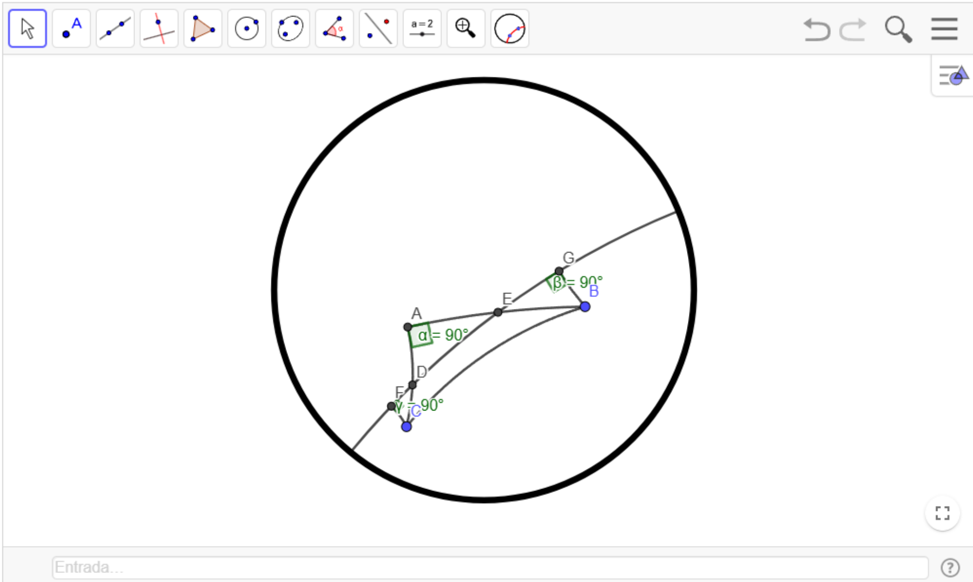



*Figura 40 Invalidez del teorema de Pitágoras en la geometría hiperbólica*

Asuma que el teorema de Pitágoras se cumple y justifique cada paso. Escriba la conclusión.

**Paso 1.** $AB^2 + AC^2 = BC^2$
**Paso 2.** $AE^2 + AD^2 = ED^2$
**Paso 3.** $AD = \frac{1}{2}AB$
**Paso 4.** $AE = \frac{1}{2}AC$
**Paso 5.** $DE^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2\right)$
**Paso 6.** $DE^2 = \frac{1}{4}BC^2$
**Paso 7.** $DE = \frac{1}{2}BC$
**Paso 8.** $DE = \frac{1}{2}FG$
**Paso 9.** $BC = FG$
**Paso 10.** Contradicción.

Aa π Escribe aquí tu respuesta...

Los estudiantes deben escribir la justificación de cada uno de los pasos.

## Actividad 11.3

**11.3.1** Considere la siguiente demostración sobre el criterio de congruencia AAA.

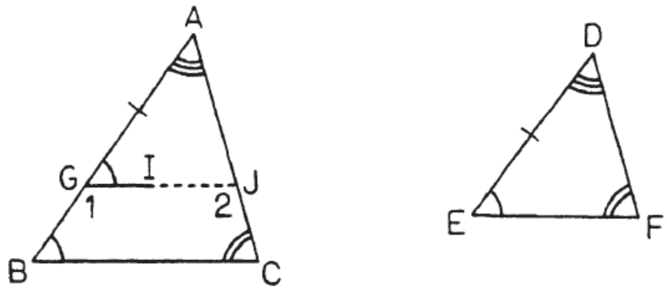



*Figura 41 Criterio AAA en la geometría hiperbólica*

Escriba la justificación de cada uno de los siguientes pasos de la demostración de que el criterio AAA implica congruencia de triángulos en la geometría hiperbólica.

**Paso 1.** Sean $ABC$ y $DEF$ dos triángulos tales que $\angle ABC = \angle DEF$ , $\angle ACB = \angle DFE$ , $\angle BAC = \angle EDF$
**Paso 2.** Supongamos que $AD \neq DE$ y sin pérdida de generalidad, asumamos que $AB > DE$ .
**Paso 3**. Sea $G$ en $AB$ tal que $AG = DE$ .
**Paso 4**. Sea $I$ un punto tal que $\angle AGI = \angle ABC$
**Paso 5.** La línea $GI$ corta al triángulo $ABC$ exactamente en un punto $J$ .
**Paso 6**. $J$ no está en $AB$.
**Paso 7**. $GJ$ es paralela a $BC$.
**Paso 8.** $J$ no está en $BC$.
**Paso 9.** $J$ está en $AC$.
**Paso 10.** $\angle AGI = \angle DEF$
**Paso 11.** Los triángulos $AGJ$ y $DEF$ son congruentes.
**Paso 12.** $\angle AGI + \angle 1 = 180^\circ$
**Paso 13**. $\angle ABC + \angle 1 = 180^\circ$
**Paso 14.** $\angle AJI = \angle DFE$
**Paso 15.** $\angle AJI = \angle ACB$
**Paso 16.** $\angle AJI + \angle 2 = 180^\circ$
**Paso 17.** $\angle ACB + \angle 2 = 180^\circ$
**Paso 18.** La suma de los ángulos internos del cuadrilátero $BCJG$ es $360^\circ$ .
**Paso 19.** La suma de los ángulos del cuadrilátero $BCJG$ es menor que $360^\circ$ .
**Paso 20.** Contradicción.
**Paso 21.** $AB = DE$
**Paso 22.** Los triángulos $ABC$ y $DEF$ son congruentes.

Aa $\pi$ Escribe aquí tu respuesta...

Los estudiantes deben escribir la justificación de cada uno de los pasos.

# 4 Análisis de resultados

## 4.1 Resultados nivel 1

**Descriptor 1:** Reconoce el disco de Poincaré como un modelo de representación de la geometría hiperbólica, donde los objetos existen y adoptan formas distintas a las del plano euclidiano. Sin embargo, no comprende las implicaciones métricas y topológicas del modelo.

Los estudiantes, en general, reconocieron el disco de Poincaré como el espacio en el que existen los objetos de la geometría hiperbólica. A partir del taller 1, observaron que los segmentos hiperbólicos solo podían construirse cuando sus extremos estaban dentro del círculo; al mover uno o ambos puntos hacia fuera, el segmento desaparecía, como contesta el siguiente estudiante:

**1.1.2** Arrastre uno de los dos puntos fuera del círculo . ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico?

**Respuesta**

Cuando algún punto está fuera de la circunferencia el segmento desaparece.

Este hecho, inicialmente descrito como un fenómeno visual, refleja que estaban construyendo implícitamente la noción de que el modelo hiperbólico se encuentra acotado al interior del disco.

Cuando los estudiantes arrastraban los puntos nuevamente al interior del disco, el segmento aparecía de nuevo como responde el siguiente estudiante:

**1.1.4** Arrastre los dos puntos hacia el interior del círculo. ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico?

**Respuesta**

El segmento hiperbólico vuelve aparecer.

Finalmente, los estudiantes, concluyeron que, para que un segmento hiperbólico exista, sus extremos deben estar en el círculo:

**Respuesta**

la condición que deben cumplir los dos puntos para que exista el segmento hiperbólico es que ambos deben estar dentro del círculo.

Así, en la fase de explicitación del taller 1 se concluyó que, al igual que ocurre con los segmentos, los objetos de la geometría hiperbólica existen dentro del círculo. Esta conclusión corresponde al reconocimiento, por parte de los estudiantes, del disco de Poincaré como un modelo de representación de la geometría hiperbólica y confirma el análisis a priori realizado frente a este descriptor.

Esta construcción conceptual corresponde al primer nivel del modelo de Van Hiele porque conocer el modelo corresponde a los conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho, como lo expresan Jaime y Gutiérrez (1990), es decir, el reconocimiento del modelo es un prerrequisito para el trabajo matemático posterior. Sin embargo, es del nivel 1 porque los estudiantes no han tenido ningún contacto con el modelo del disco de Poincaré y solo se preguntan por el cómo funciona y no por el por qué funciona así.

Una pregunta que no se había hecho en la secuencia, en particular en el taller 1 era, ¿qué ocurría con los puntos que están exactamente en el borde del disco? La pregunta surgió por parte de un estudiante en la fase de explicitación:

**[L1] Estudiante:** ¿los puntos pueden estar sobre la circunferencia?

**[L2] Investigador**: bueno, pensemos en esa pregunta, ¿qué ocurre cuando ustedes ubican los puntos sobre la circunferencia?, ¿se forma o no se forma el segmento?

**[L3] Estudiante**: si el punto se ubica en el borde desaparece el segmento.

**[L4] Investigador**: entonces los puntos deben estar en el interior, ni en el borde ni por fuera del círculo.

Esta pregunta espontánea muestra un aspecto importante en el desarrollo del pensamiento matemático: la exploración de casos límite. El hecho de que surgiera de los propios estudiantes sugiere la existencia de un razonamiento matemático a priori donde se busca entender no solo las reglas generales sino también los casos particulares.

Frente a la forma de los objetos hiperbólicos, cuando construyeron el segmento, los estudiantes notaron que este tenía una forma distinta a la del segmento euclidiano lo que representó un primer acercamiento a la comprensión de que en la geometría hiperbólica se modifica la representación de los objetos.

Con la forma curva o arqueada del segmento hiperbólico construido, los estudiantes notaron que la forma de los objetos en la geometría hiperbólica es distinta a la forma de sus equivalentes en geometría euclidiana. Sin embargo, en algunos puntos los estudiantes manifestaron que la forma del segmento era curva y en otra que la forma del segmento era recta lo que permite ver que no entienden la métrica y topología del disco de Poincaré, conforme se había planteado en la caracterización a priori.

La observación de que el segmento cambia de forma según la ubicación de los puntos corresponde al nivel 1 de razonamiento, ya que los estudiantes se apoyan únicamente en la percepción visual y no en las propiedades geométricas de los objetos.

En la fase de explicitación, se dio la siguiente conversación entre el profesor y los estudiantes:

**[L1] Investigador**: ¿qué ocurrió cuando los dos puntos estaban dentro del círculo?

**[L2] Estudiante 1:** el segmento era visible.

**[L3] Investigador:** ahora, si arrastro un punto fuera del círculo, ¿qué ocurrió?

**[L4] Estudiante 1:** desaparece

**[L5] Investigador:** si arrastro el otro punto fuera del círculo, ¿qué pasa?

**[L6] Estudiante 2:** sigue desaparecido.

**[L7] Investigador:** ¿qué ocurre si llevo los dos puntos hacia el interior del círculo?

**[L8] Estudiante 3:** vuelve a aparecer.

**[L9] Investigador:** entonces, ¿qué conclusión podemos sacar de ahí?

**[l10] Estudiante 3:** que los puntos de inicio y fin deben estar dentro de la circunferencia para que pueda existir el segmento de hipérbola.

Esta interacción evidencia dos aspectos fundamentales: el potencial del dinamismo de GeoGebra para que los estudiantes establezcan propiedades sobre el modelo y, específicamente, una propiedad esencial: los objetos hiperbólicos existen únicamente cuando se encuentran dentro del círculo.

| |
|---|
| **Descriptor 2:** Describe los segmentos hiperbólicos a partir de su forma curva o arqueada y los relaciona con formas de la geometría euclidiana o del mundo físico. |

Los estudiantes reconocieron que el segmento hiperbólico toma una forma curva o arqueada y algunos relacionaron dicha forma con otras curvas de la geometría euclidiana como arcos de circunferencia o segmentos de parábola. Esta identificación de la forma “curva o arqueada” del segmento corresponde a una estrategia fundamental: la asimilación de los nuevos objetos o conceptos mediante conceptos preexistentes. Esta asimilación conlleva a la construcción inicial de significado matemático en el nuevo contexto, en este caso, el hiperbólico. Esta caracterización de la forma de los segmentos hiperbólicos corresponde al nivel 1, donde las propiedades de los objetos geométricos se perciben a través de su apariencia, como se había anticipado en la caracterización a priori.

Para cierta posición de los puntos como cuando se encuentran ubicados en un diámetro del disco de Poincaré o cuando estos se encuentran muy cercanos entre sí, los estudiantes concluyeron que la forma del segmento era recto en el sentido euclidiano, como afirma, por ejemplo, el siguiente estudiante:

**1.1.1** ¿Qué forma tiene el segmento hiperbólico?

**Respuesta**

Tiene forma de arco a medida que se acerca al borde del circulo y cuando se va hacia la mitad del circulo tiene una forma recta.

Este hallazgo emergente es significativo porque muestra, por un lado, la capacidad de los estudiantes de identificar casos particulares que aparentemente contradicen la generalización inicial de que los segmentos hiperbólicos son curvos, y, por otro lado, corresponde claramente a un comportamiento del nivel 1 porque es una afirmación que surge de un reconocimiento visual producto de arrastrar los vértices.

Los estudiantes utilizaron expresiones como “el segmento tiene forma curva”, “forma de arco”, “forma de parábola” o “forma recta” para referirse a la forma del segmento hiperbólico. Esto refleja claramente un lenguaje del nivel 1 donde los estudiantes utilizan comparaciones con objetos conocidos y características físicas que se perciben a través de la visualización. Además, algunos sugirieron “un comportamiento extraño del segmento” o una “forma de curva un tanto peculiar” que se puede interpretar como la respuesta de los estudiantes al estar ante algo que desafía sus modelos mentales previos y la necesidad de adaptarse a un nuevo modelo de representación geométrico y más cuando en este nivel los estudiantes recurren a prototipos visuales para caracterizar figuras como lo indican Burger y Shaughnessy (1987).

En la fase de explicitación se evidencian varios comportamientos propios del nivel 1:

**[L1] Investigador**: ¿qué forma tiene el segmento hiperbólico?

**[L2] Estudiante 1:** como forma de arco.

**[L3] Investigador:** ¿en todo el… [círculo]?

**[L4] Estudiante 2:** no, cuando está por la mitad se vuelve como una recta.

**[L5] Investigador:** más o menos parece una recta, pero, ¿es una recta o no es una recta?

**[L6] Estudiante 3:** no, no, no.

**[L7] Estudiante 4:** es la percepción en la que se ve, ¿no?

Por un lado, en [L2] los estudiantes describen la forma del segmento hiperbólico como un arco. De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 313), existe una estrecha relación entre el lenguaje y cada nivel de razonamiento, y el uso de estas comparaciones es un comportamiento característico del nivel 1. De manera similar, el cambio que se percibe en la forma descrita en [L4] evidencia que el estudiante tiene una comprensión meramente visual, y no geométrica, de los segmentos hiperbólicos.

Finalmente, en [L7] se constata que las respuestas de los estudiantes se fundamentan en lo que perciben en la pantalla a partir de la experimentación, lo cual es también propio del nivel 1, pues según Corberán (1984), en este nivel "*las descripciones reflejan experiencias puramente visuales*".

| |
|---|
| **Descriptor 3:** identifica los puntos en el borde del disco de Poincaré como puntos que representan el infinito en la geometría hiperbólica. |

En el taller 2, los estudiantes respondieron que la recta no se extiende más allá del borde del disco de Poincaré por lo que sirve como límite para las rectas hiperbólicas, como muestra el siguiente estudiante:

**2.2.1** ¿La recta se extiende más allá del disco? ¿Qué puede significar esto?

**Respuesta**

No, la recta tiene como limite el borde del circulo.

Además, reforzaron la idea de que los objetos hiperbólicos existen solamente dentro del disco de Poincaré; por ejemplo:

**2.2.1** ¿La recta se extiende más allá del disco? ¿Qué puede significar esto?

**Respuesta**

La recta deja de aperecer justo donde está la circunferencia o donde termina el disco, esto puede significar que al igual que el segmento hiperbolico, la recta también existe unicamente dentro de la circunferencia.

Las respuestas anteriores permiten ver que los estudiantes interpretaron el borde como una frontera convencional y no que representan puntos que están infinitamente lejos de cualquier punto interior.

A pesar de la orientación del profesor y del uso de analogías con la geometría euclidiana, los estudiantes presentaron dificultades para reconocer el borde del disco como el conjunto de puntos del modelo que se encuentran en el infinito. En consecuencia, aunque en el nivel 1 los estudiantes adquieren información sobre el nuevo modelo con el que van a trabajar, esta comprensión no sobrepasa los límites de la visualización ni del conocimiento previo que poseen.

Además, dado que a lo largo de su formación no se han familiarizado con la noción de puntos en el infinito, dicho concepto no apareció en el nivel 1. Por tanto, las actividades deben refinarse para centrarse únicamente en una interpretación visual del borde del disco, sin abordar aún su significado geométrico o topológico. El descriptor, por consiguiente, se refina así:

**Descriptor 3:** identifica los puntos del borde del disco de Poincaré como extremos o límites de las rectas hiperbólicas y no como puntos ideales (en el infinito) del modelo.

**Descriptor 4**: Reconoce que las rectas hiperbólicas en el disco de Poincaré corresponden a arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco.

Para que los estudiantes reconocieran que las rectas hiperbólicas corresponden a arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco, se les pidió que identificaran las distintas relaciones que podían establecerse entre el arco de circunferencia que define la recta hiperbólica y el borde del disco. La única relación que identificaron fue la intersección entre ambas curvas. A partir de esto, se orientaron las preguntas hacia el ángulo que se forma entre las curvas, con el propósito de concluir que dicho ángulo mide 90° y que, por tanto, las curvas son ortogonales. Sin embargo, esto representó un desafío para los estudiantes.

Ningún estudiante recordó cómo encontrar el ángulo entre dos curvas y tuvieron qué consultar información al respecto.  En el momento en el que se les pidió calcular el ángulo, por ejemplo, un grupo de estudiantes construyó una recta, ubicó 3 puntos sobre ella y midieron el ángulo, como se ilustra en la figura:

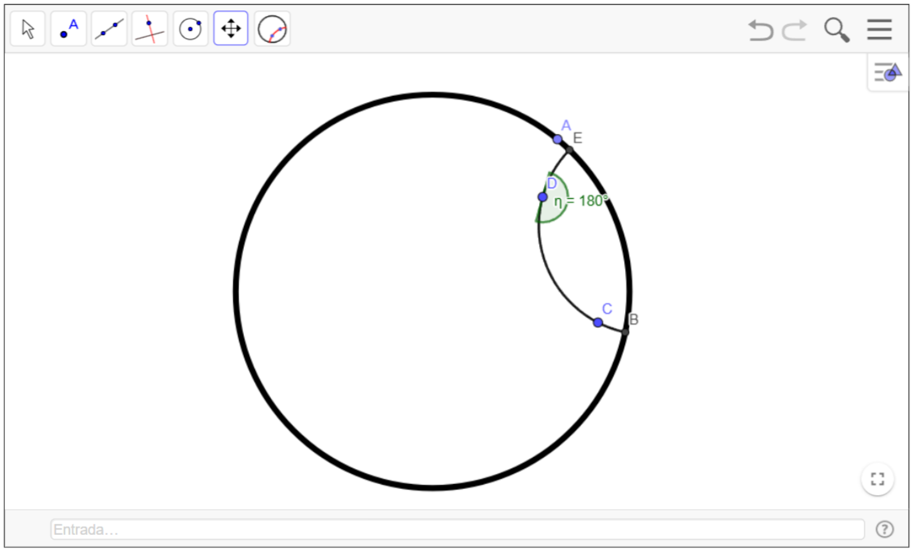
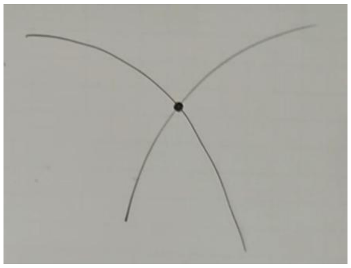



*Figura 42 Ejemplo fallido del cálculo del ángulo entre la recta hiperbólica y el borde del disco*

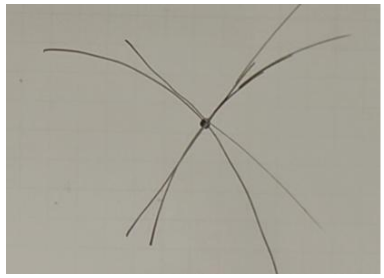
Pero aún, conociendo luego cómo medir el ángulo a partir de las tangentes, se les dificultó realizar esta medición, como se ilustra en la solución propuesta por los siguientes estudiantes:

**[L1] Investigador**: ¿qué podemos hacer para medir el ángulo entre 2 curvas? Por ejemplo, ¿Cómo puedo medir este ángulo?



**[L2] Estudiante 1**: con las tangentes.

**[L3] Investigador:** muy bien, con la recta tangente. Ahora usen eso para ver qué pueden concluir, qué pueden mirar



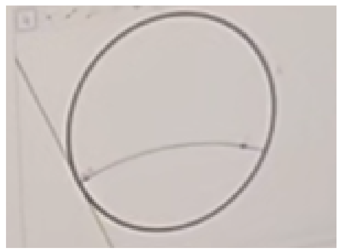
**[L4] Investigador**: por lo que dijo su compañera, la recta y el disco hiperbólico se intersecan, ¿si? Entonces pues midan el ángulo en esta intersección. Pueden usar la herramienta intersección para obtener los puntos de intersección ¿no?

En este punto, este estudiante no tenía claro cuáles eran las rectas tangentes que debía graficar y, por tanto, graficó esas dos tangentes que seguramente eran familiares para él, por resultados de la geometría euclidiana. Continuando con la conversación:

**Investigador**: mira lo que te estoy preguntando, quiero medir el ángulo entre este arco de circunferencia [la recta hiperbólica] y esta circunferencia. ¿Dónde yo podría medir ese ángulo?

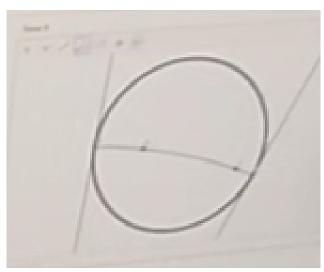
**Estudiante 1**: en el punto de intersección.

En este momento, el estudiante comprendió que esas dos rectas tangentes que graficó previamente no son las que necesita, las borró y trazó la siguiente tangente:



**Investigador**: recuerda que es el ángulo entre la circunferencia y la recta hiperbólica, entonces ¿cuántas tangentes necesitas?

**Estudiante 1**: dos



**Profesor**: ¿y por qué escogiste ese punto?

El estudiante trazó ahora tangentes en los dos puntos de intersección de la recta hiperbólica con el borde del disco. Esto evidencia la dificultad que puede representar para los estudiantes encontrar esta relación entre las dos curvas. En este punto, interviene otro estudiante.

**Estudiante 2**: esos dos ángulos son iguales o sea los de las dos intersecciones ¿son iguales? O sea, porque en el este hay dos intersecciones del segmento con el disco ¿cierto? Digamos la de la izquierda y la de la derecha, ¿son el mismo ángulo verdad?

**Investigador**: intentémoslo. No hemos calculado aún el primer ángulo.

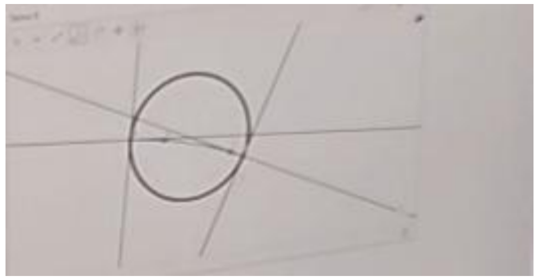
**Estudiante 2**: [Dirigiéndose al estudiante 1] pues si quiere trace la tangente también, pero en otro punto.

**Investigador**: ya hallaste la tangente a la circunferencia, ahora necesitamos la tangente a…

El estudiante seleccionó un punto sobre la recta hiperbólica

**Investigador**: no, pero no en ese punto, en donde se cortan [y lo señala]

Finalmente, con la ayuda del investigador, el estudiante comprendió cuáles son las tangentes que debe trazar y cuál es el ángulo que debe considerar.



**Investigador**: ¿entonces cómo son?

**Estudiante**: son perpendiculares

**Investigador**: ahora mueve los puntos y mira si se mantiene la relación

**Estudiante**: si, el ángulo es de 90° [obtenido sin medición, mediante percepción visual]

Jaime y Gutiérrez (1990, p. 305) señalan que "un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento". En este sentido, dificultades observadas, presentes en la mayoría de los estudiantes, son evidencia de que este descriptor corresponde a un nivel superior de razonamiento.

Por consiguiente, al igual que en el descriptor anterior, aunque en este nivel los estudiantes deben adquirir la información necesaria sobre el modelo, no se puede ir más allá de su nivel de razonamiento actual, el cual se limita a la visualización y al uso de propiedades geométricas previamente conocidas. Por tanto, se redefine el descriptor 4 así:

**Descriptor 4**: Reconoce que las rectas hiperbólicas en el modelo del disco de Poincaré corresponden a arcos de circunferencia, aunque aún no comprende que dichos arcos son ortogonales al borde del disco.

**Descriptor 5:** reconoce visualmente los segmentos, semirrectas y rectas euclidianas de los segmentos, semirrectas y rectas hiperbólicas.

Frente a las diferencias perceptivas, la mayoría de los estudiantes coinciden con que los segmentos euclidianos son “rectos” mientras que los segmentos hiperbólicos son “curvos”, lo que muestra la persistencia de un marco de referencia euclidiano, es decir, los estudiantes interpretan los nuevos conocimientos de la geometría hiperbólica, a la luz del conocimiento previo de la geometría euclidiana. Esto no es un error sino una etapa natural en la construcción de nuevos significados matemáticos. Asimismo, destacan el espacio en el que existe o es posible construir cada segmento, como lo expresa el siguiente estudiante:

Tarea 16

**3.1.2** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre el segmento hiperbólico y el segmento euclidiano?

**Respuesta**

el segmento euclidiano siempre va a ser recto y puede existir tanto dentro como fuera del disco de Poincaré, mientras que el segmento hiperbólico puede adoptar formas de arco y solo puede existir dentro del disco Poincaré

Así, para los estudiantes es claro que, en nuestro modelo, los segmentos hiperbólicos existen en el disco de Poincaré mientras que los segmentos euclidianos existen en todo el plano euclidiano.

De igual forma, en las respuestas pueden surgir expresiones como arqueado, o de parábola referencias a la inclinación o curvatura, como se ejemplifica a continuación:

**3.1.2** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre el segmento hiperbólico y el segmento euclidiano?

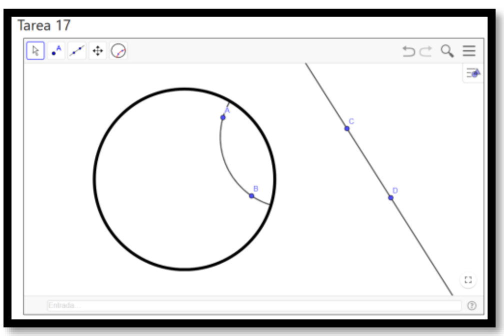
**Respuesta**

la perspectiva arqueada del segmento hiperbólico, a pensar que ambos en teoría debería ser la distancia mas corta entre ambos

El uso de estas palabras muestra que los estudiantes buscan un vocabulario que consideren adecuado para describir los objetos, pero siguen recurriendo a descripciones propias del nivel 1.

Justamente, con este taller también se buscaba que los estudiantes refinaran su lenguaje haciendo énfasis en la importancia de agregar los términos hiperbólico o euclidiano para hacer referencia a cada uno de los contextos en específico de modo que el estudiante tenga la capacidad de distinguir entre el objeto matemático y sus diversas representaciones.

En el caso de las rectas, los estudiantes construyeron sin ninguna dificultad tanto la recta euclidiana como la recta hiperbólica.




Al momento de pedir que establecieran semejanzas y diferencias de manera perceptiva, los estudiantes respondieron que la recta hiperbólica tiene un límite mientas que la recta euclidiana no o que la recta euclidiana es recta mientras que la recta hiperbólica es curva, esta caracterización es propia del nivel 1 porque los estudiantes caracterizan las rectas solo a partir de su forma.

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

**Respuesta**

Se ve que la recta hiperbólica tiene un limite. En cambio, la recta euclidiana se ve que es infinita.

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

**Respuesta**

La recta euclidiana se extiende infinitamente mientras la recta hiperbólica mantiene su extensión dentro del disco de Poincaré

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

**Respuesta**

al igual que con el segmento, cuando observamos la recta euclidiana vemos lo que consideramos, valga la redundancia, una recta, mientras que cuando observamos una recta hiperbolica, percibimos esta como una especie de arco o parabola, incluso como un segmento de circunferencia.

Algunos estudiantes asimilaron ya el hecho de que los puntos del borde son puntos en el infinito para decir que ambas rectas son infinitas, pero para algunos, sigue existiendo la confusión entre la representación visual de la recta como una curva dentro del disco y la conceptualización de que esta se extiende al infinito.

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

**Respuesta**

la recta hiperbólica pareciera que tiene un fin o que termina, en cambio la recta euclidiana no proyecta un fin, sin embargo ya sabemos que los puntos del disco representan el infinito del espacio euclidiano

Una respuesta interesante que surgió está relacionada con el ángulo asociado a la línea recta. El estudiante manifestó que la recta euclidiana forma un ángulo llano mientras que la hiperbólica no, esto ocurre porque aún está muy influenciado por su visión euclidiana de la geometría.

**3.2.1** ¿Qué diferencia perceptiva encuentra entre la recta hiperbólica y la recta euclidiana?

**Respuesta**

la recta euclidiana forma un ángulo llano y la hiperbólica no

Como los estudiantes ya habían construido segmentos y rectas, se les pidió inicialmente que describieran cómo podría verse una semirrecta. Esta indicación permitió la activación de conocimientos previos y la anticipación conceptual como base para la nueva construcción, así se integró el concepto euclidiano de semirrecta con las propiedades de representación del modelo hiperbólico. Considere la siguiente respuesta:

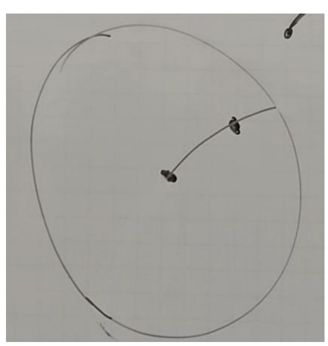
**3.2.2** Con base en la representación del segmento y la recta hiperbólica, ¿cómo debería visualizarse una semirrecta hiperbólica?

**Respuesta**

Como un segmento que inicia dentro del círculo y "finaliza" en el disco

El estudiante tiene claro que el punto de inicio está dentro del disco de Poincaré y que como la semirrecta se extiende infinitamente, esta debe terminar en el borde del disco que representa los puntos en el infinito. Aquí el estudiante utiliza la expresión incorrecta, no es segmento sino arco.

El siguiente corresponde al dibujo de otro estudiante cuando contestó esta pregunta:



Luego cambió la concavidad del arco para garantizar la ortogonalidad entre el arco que determina la semirrecta hiperbólica y el borde del disco de Poincaré:

En este nivel 1 es normal encontrar respuestas como la siguiente:

**3.2.2** Con base en la representación del segmento y la recta hiperbólica, ¿cómo debería visualizarse una semirrecta hiperbólica?

**Respuesta**

Tal como una recta hiperbolica a la que se le ha borrado una parte.

Esta respuesta muestra que aún no ha comprendido todas las actividades y conclusiones a las que se ha llegado inicialmente. La siguiente es una noción usual que representa una interpretación de lo que es la semirrecta más no una percepción visual de la misma.

**3.2.2** Con base en la representación del segmento y la recta hiperbólica, ¿cómo debería visualizarse una semirrecta hiperbólica?

**Respuesta**

Como la mitad de una recta hiperbólica.

**3.2.2** Con base en la representación del segmento y la recta hiperbólica, ¿cómo debería visualizarse una semirrecta hiperbólica?

**Respuesta**

Por el comportamiento que hemos observado, la semirrecta es la mitad de la recta hiperbólica, conservando su ortogonalidad.

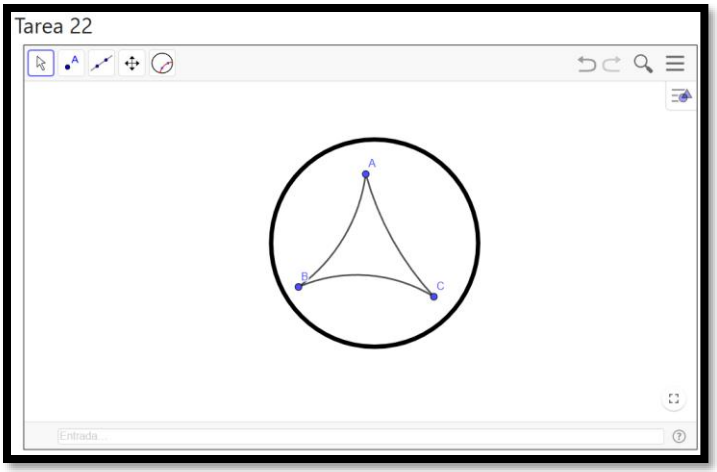
Dentro del lenguaje es posible que sigan utilizando expresiones como una curva arqueada porque sigue estando en el nivel 1 de razonamiento:

**Respuesta**

UNA CURVA ARQUEADA PERO COMENZANDO DSDE UN PUNTO DE LA HIPERBOLA

**Descriptor 6:** Reconoce el triángulo hiperbólico como una figura cerrada con tres lados curvos y utiliza expresiones como triángulo curvado, triángulo con lados curvos, triángulo con arcos, triángulo con curvas hacia adentro o hacia afuera para referirse a la forma del triángulo.

En el taller 3, a los estudiantes se les pidió que graficaran 3 puntos no colineales y que construyeran los segmentos con extremos en dichos puntos. los estudiantes no tuvieron ningún problema en realizar la construcción y ninguna resistencia cognitiva en dar como nombre a esta figura triángulo hiperbólico en analogía al triángulo euclidiano.




**3.4.1** ¿Cómo llamaría a esta figura?

**Respuesta**

Triangulo hiperbólico.

Asimismo, reconocieron los elementos del triángulo hiperbólico como los mismos del triángulo euclidiano: 3 vértices, 3 lados y 3 ángulos.

**3.4.2** ¿Qué elementos puede identificar en esta figura?

**Respuesta**

Al igual que los tríangulos euclidianos, este posee tres lados, tres ángulos y tres vertices

A la hora de comparar los triángulos hiperbólicos con los triángulos euclidianos, estos manifestaron que los lados del triángulo hiperbólico son curvos, arcos, arqueados, mientras que los del triángulo euclidiano son rectos pero que tienen los mismos elementos en común: 3 vértices, 3 lados y 3 ángulos.

**3.4.3** ¿Qué semejanzas y diferencias puede enunciar de manera perceptiva entre esta figura y su equivalente en la geometría euclidiana?

**Respuesta**

Que los lados en el triangulo hiperbólico son curvos y en la geometría euclidiana son rectos.

**3.4.3** ¿Qué semejanzas y diferencias puede enunciar de manera perceptiva entre esta figura y su equivalente en la geometría euclidiana?

**Respuesta**

Semejanzas tienen la misma cantidad de lados, ángulos y vértices y diferencias la forma que toma sus lados

**3.4.3** ¿Qué semejanzas y diferencias puede enunciar de manera perceptiva entre esta figura y su equivalente en la geometría euclidiana?

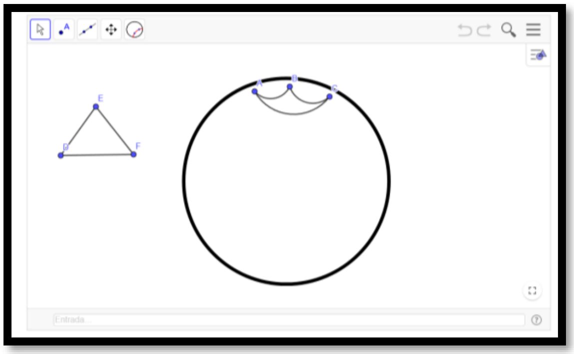
**Respuesta**

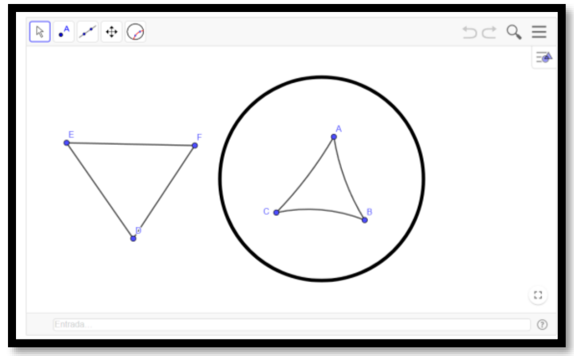
Sus lados tienen diferente apariencia, ya que esos en la geometría euclidiana son rectos y aquí sus lados son curvos.

Los estudiantes comprendieron que la esencia del triángulo no es la rectitud de los lados sino la conexión de 3 puntos no colineales mediante segmentos. Esto facilita el tránsito hacia el nivel 2 ya que los estudiantes van superando la barrera visual y se concentran en las características y propiedades geométricas.

**Descriptor 7:** Compara perceptivamente el tamaño de los ángulos y los lados del triángulo hiperbólico con los del triángulo euclidiano. (Por ejemplo, los ángulos de los triángulos hiperbólicos se ven más pequeños que los ángulos en los triángulos euclidianos y cuánto más grande es el triángulo hiperbólico, más pequeños son los ángulos).

Los estudiantes son capaces de construir un triángulo hiperbólico como se muestra en las figuras. En la primera figura el estudiante intentó hacer lo más curvos posibles los lados del triángulo mientras que en la segunda figura el estudiante intentó hacer el triángulo parecido a un triángulo euclidiano.





Cuando los estudiantes construyeron el triángulo hiperbólico con los vértices cerca del centro del disco obtuvieron que las longitudes de los lados disminuyen y los ángulos del triángulo aumentan su tamaño. Asimismo, algunos estudiantes afirmaron que, cuanto más pequeño es el triángulo, sus lados se asemejan más a los de un triángulo euclidiano. Estas conclusiones corresponden al nivel 1 de razonamiento pues se basan en la percepción visual de los estudiantes y la experimentación en el software.

Por ejemplo, la siguiente estudiante utiliza la expresión “lados más derechos” para indicar que se parecen a los lados de un triángulo euclidiano.

**4.1.1** ¿Qué ocurre con los lados y los ángulos del triángulo hiperbólico conforme se acercan al centro del disco?

**Respuesta**

a menor distancia entre ellos, se percibe que los lados son mas derechos y los ángulos se aprecian mas grandes

**Respuesta**

Los lados del triangulo hiperbólicos se asemejan al euclidiano y los ángulos aumentan a medida que se acerca al centro.

Se pueden encontrar respuestas muy variadas a la pregunta, pero todas exhiben un comportamiento del nivel 1. Por ejemplo, esta estudiante relaciona la forma del triángulo hiperbólico con la de un triángulo rectángulo euclidiano cuando los vértices están cerca del centro.

> **Respuesta**
>
> A medida que acercamos los vértices al centro del disco este tiene una perspectiva de triangulo rectángulo.

Este estudiante compara el triángulo hiperbólico con la sección que resulta de cortar medio cono.

> **Respuesta**
>
> La figura cuando se acerca al centro se asemeja mas al triangulo convencional que conocemos mientras que cuando lo acercamos al borde se parece a la mitad de un cono

Cuando los vértices están cerca del borde del disco los estudiantes encuentran una relación inversa entre el tamaño de los lados y de los ángulos, es decir, entre más grandes son los lados del triángulo (porque se acercan a los bordes), más pequeños son los ángulos del mismo tal y como lo expresa este estudiante:

> **Respuesta**
>
> Mientras los vértices se acercan sus ángulos son mayores y sus lados son de menor longitud, en cambio cuando se acercan mas al disco los ángulos parecen ser que se vuelven mas pequeños y la longitud de los lados es mayor.

Asimismo, los estudiantes hacen énfasis en que sus respuestas se basan más en una percepción óptica que métrica.

**Respuesta**

de una manera óptica el triangulo se vuelve mas euclidiano por así decirlo, sus lados son mas rectos

Otros estudiantes hacen énfasis en la curvatura de los lados, cuando los vértices están cerca del centro, los lados se ven más derechos y por tanto el triángulo se asemeja a uno euclidiano pero cuando los vértices se acercan a los bordes, los lados se notan más curvos.

**Respuesta**

a mayor distancia entre ellos, se percibe que los ángulos se ven mas pequeños y los lados mas curvos.

También utilizan la expresión arqueados, propia de una descripción del nivel 1:

**Respuesta**

Cuándo lo alejamos al borde del disco, sus lados se perciben arqueados.

Es interesante ver cómo este estudiante utiliza un concepto de la física para explicar la curvatura de los lados. Para el estudiante, "el borde del disco atraía por decirlo de alguna forma pues los puntos y las rectas y esta curvatura o atracción se notaba más conforme se acercará más y más al borde por eso lo trate de explicar con lo de la gravedad".

**Respuesta**

la curvatura de los lados se vuelve mayor, como si el borde del disco fuera un campo gravitatorio que atrae los lados y vértices al borde

Los estudiantes utilizan también la palabra puntiagudos o puntudos para referirse a la forma del triángulo, siendo este un vocabulario propio del nivel 1.

> **Respuesta**
>
> cuando se aleja los ángulos se ven más puntiagudos y pequeños y los lados más curvo

> **Respuesta**
>
> Empiezan a tomar forma arqueada y un poco puntudo y sus ángulos se hacen más pequeños.

Al preguntar por la relación entre el tamaño de los lados y el tamaño de los ángulos las respuestas fueron variadas, por ejemplo, la respuesta de la siguiente estudiante:

> **Respuesta**
>
> que a medida que aumentan los lados del triangulo hiperbólico sus ángulos disminuyen.

En general la mayoría de las respuestas se reducen a esta:

> **Respuesta**
>
> Si los lados se extienden, los ángulos disminuyen, si se acercan al centro del disco, sus lados disminuyen pero los ángulos aumentan.

Frente a la pregunta de si ocurre la misma relación con la geometría euclidiana la respuesta varía

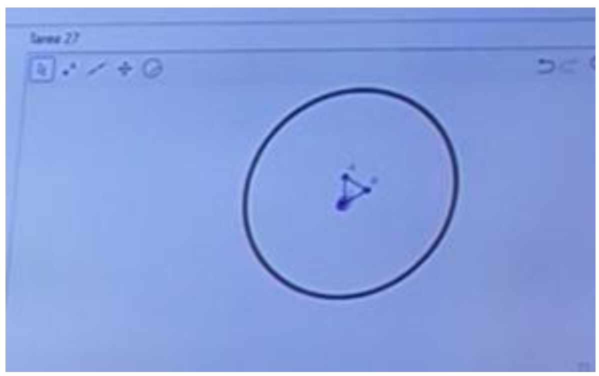
> **Respuesta**
>
> Si los lados se extienden, los ángulos disminuyen, y si sus lados disminuyen pero los ángulos aumentan.

**Respuesta**

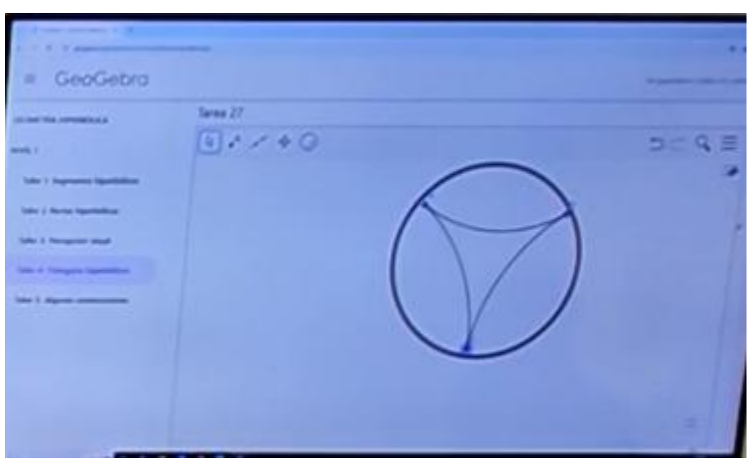
no, los ángulos no tienen relación con la longitud de los lados sino con la apertura entre ellos

En la siguiente transcripción se evidencian algunos comportamientos propios del nivel 1 que confirman la validez de este descriptor:

**[L1] Estudiante**: cuando los puntos se acercan al centro del disco sus lados disminuyen y sus ángulos tienen a expandirse




Dependiendo de la posición de los vértices que lo coloquemos porque si lo vamos expandiendo hacia el borde del disco, entonces los lados se extienden y los ángulos tienden a disminuir

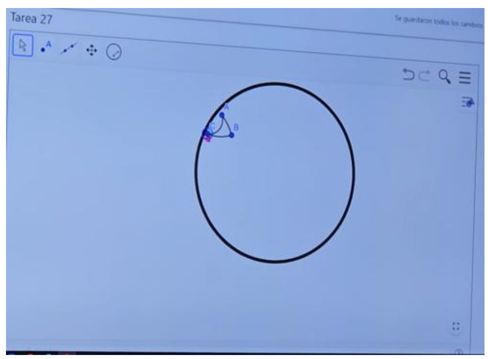


**[L2] Investigador**: ahora vamos a hacer lo siguiente. Esos 3 puntos, en efecto, están alejados del centro del disco, eso es cierto, ahora esos mismos 3 puntos alejados del centro pero que esos 3 estén juntos.

**[L3] Estudiante 1**: ¿cómo así?

Investigador: mira, ahí esos 3 puntos están lejos del centro pero también están lejos entre ellos. Ahora quiero los 3 puntos lejos del centro pero que entre ellos 3 estén cerca, o sea, que los 3 puntos estén cerca del borde.

**[L4] Estudiante 2**:




**[L5] Investigador**: bueno, ¿y ahora?

**[L6] Estudiante 1**: parece el triangulito del mouse.

**[L7] Estudiante 2**: ese punto [A] también lo puede poner más arriba

**[L8] Investigador**: ¿ese sigue siendo un triángulo o no?

**[L9] Estudiantes**: pues, si, sigue siendo un triángulo hiperbólico.

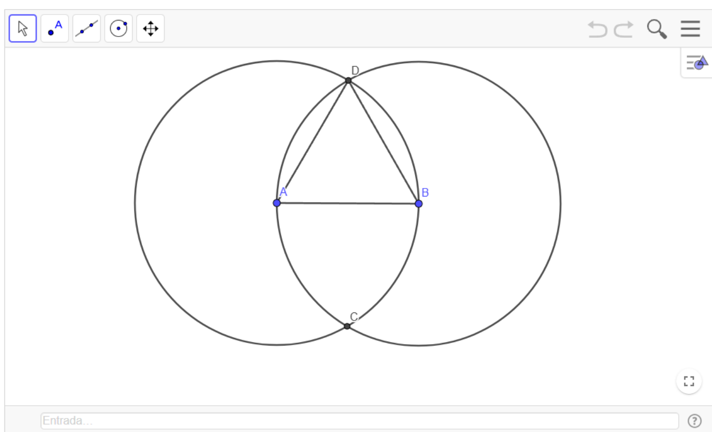
**Descriptor 8:** Diferencia triángulos de la geometría euclidiana con triángulos hiperbólicos, pero no es capaz de diferenciarlo con triángulos de otra geometría como la elíptica ni de explicar el porqué de esas diferencias.

Por cuestiones de tiempo, no se diseñó un taller que permitiera evidenciar este descriptor.

**Descriptor 9:** reproduce construcciones de la geometría euclidiana, como la del triángulo equilátero, para la construcción de objetos hiperbólicos y reconoce las propiedades físicas y geométricas que se heredan de un contexto a otro.

Inicialmente, los estudiantes recordaron la construcción del triángulo euclidiano equilátero:

Tarea 33




Y mencionaron algunas de las propiedades que este tipo de triángulos cumplen, como las siguientes:

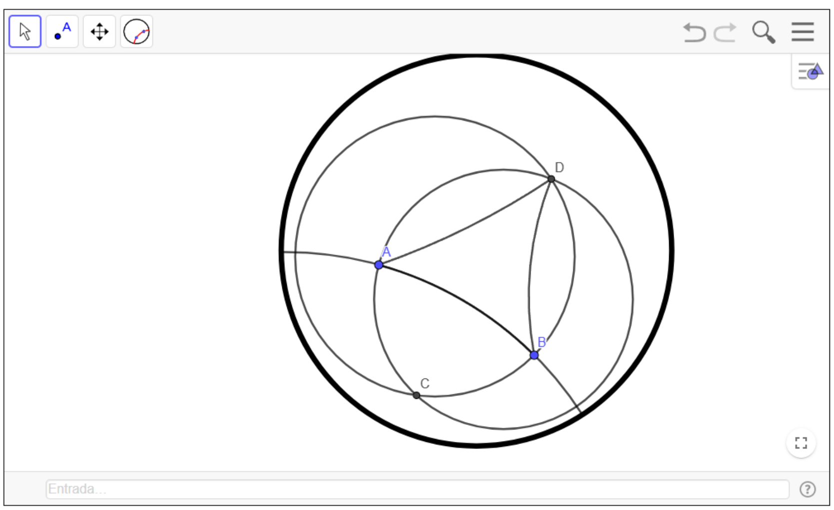
**5.1.1** Enuncie algunas propiedades del triángulo equilátero euclidiano.

**Respuesta**

todos sus lados son guales
todos sus ángulos son iguales y miden 60°
tiene tres ejes de simetría
todas sus alturas son iguales
todas sus medianas son iguales
todas sus bisectrices son iguales

Según Corberán (1984), en el nivel 1 "*dada una figura, el estudiante es capaz de reproducirla*". En este caso, la mayoría de los estudiantes no solo fueron capaces de reproducir una figura si no de realizar una correspondencia conceptual entre ambas geometrías que les permitiera replicar la construcción del triángulo euclidiano equilátero, ahora en el contexto hiperbólico.

Tarea 35




Los estudiantes replicaron la construcción del triángulo euclidiano para construir el triángulo hiperbólico a partir del uso de circunferencias hiperbólicas. Varios estudiantes identificaron que, por las propiedades de la construcción, de manera análoga al caso euclidiano, se mantiene, por lo menos la congruencia de los lados. Algunos, incluso, afirmaron también la congruencia de los ángulos. Estos estudiantes están transitando al nivel 2 porque comienzan a pensar en propiedades geométricas y no solamente físicas.

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

**Respuesta**

Que también sus lados son iguales, ya que los círculos para crear este triangulo es lo mismo que en el euclidiano.

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

**Respuesta**

Yo creo que e lo mismo porque sus radios van a medir lo mismo entonces los lados del triangulo miden lo mismo y si miden los mismo supongo que sus ángulos son iguales

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

**Respuesta**

Los ángulos y lados son congruentes entre sí por el hecho de estar trabajando a través de una circunferencia en ambos casos lo cual se define igual en ambas geometrías

No obstante, en algunos estudiantes primó la visualización a la luz de la distancia euclidiana y asumieron que estos lados no eran congruentes. Este comportamiento es propio del nivel 1 de acuerdo a Burger y Shaughnessy (1986) quienes afirman que en el primer nivel los estudiantes son incapaces de usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura, por ejemplo:

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

**Respuesta**

al parecer ninguna, porque hay distancias de segmentos que parecen que son mas largas que otras y también los ángulos

**5.2.1** ¿Cuáles propiedades del triángulo equilátero euclidiano cumplen también los triángulos equiláteros hiperbólicos?

**Respuesta**

Ninguna pues parece que sus lados no son iguales.

### *4.1.1 Descriptor emergente:*

Como se mostró a lo largo del anterior análisis, en varios ejemplos de exploración, los estudiantes analizaron casos particulares, especiales o límite, ya que estos les permitieron evidenciar con mayor claridad las semejanzas y diferencias entre los objetos desde la perspectiva de la geometría euclidiana y la geometría hiperbólica. En consecuencia, se plantea el siguiente descriptor para el nivel 1:

- Explora casos particulares, observando cómo las figuras se modifican al aproximarse al borde o al centro del disco, sin atribuir todavía un significado métrico o topológico a dichos comportamientos.

## 4.2 Análisis de resultados nivel 2

| |
|---|
| **Descriptor 10:** Reconoce que la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico es no constante y menor que 180° y lo justifica a partir de ejemplos. |

A partir de la exploración en el software, los estudiantes concluyeron que, a diferencia de lo que ocurre en la geometría euclidiana, donde la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es constante e igual a 180°, en la geometría hiperbólica dicha suma no es constante y siempre es menor que 180°, como responde, por ejemplo, el siguiente estudiante:

**6.3.3** ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo hiperbólico? ¿Este valor es constante?
Establece una comparación entre la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico y del triángulo euclidiano.

**Respuesta**

La suma de los ángulos internos es menor de 180°, y estos valores son aleatorios, una comparación seria que la suma de los ángulos internos de un triangulo euclidiano es exactamente de 180° mientras que la del triangulo hiperbólico son valores menores a 180°.

Al igual que en las actividades del nivel anterior, los estudiantes exploraron casos particulares relacionados con la posición de los vértices, en particular, cuando estos se encontraban cerca del borde o del centro del disco. En esta ocasión, aunque no se les indicó explícitamente que analizaran dichas posiciones, de manera espontánea repitieron este tipo de exploraciones y llegaron a conclusiones como las siguientes: cuando los vértices se ubican cerca del borde, la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico disminuye, y a medida que se acercan más al borde, esta suma tiende a cero; mientras que, cuando los vértices se aproximan al centro del disco, la suma aumenta, de modo que el triángulo adquiere una apariencia euclidiana y la suma de sus ángulos se aproxima a 180°, como lo expresa el siguiente estudiante:

## Tarea 39

**6.3.3** ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo hiperbólico? ¿Este valor es constante?
Establece una comparación entre la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico y del triángulo euclidiano.

**Respuesta**

Depende, este valor no es constante por la posición de los puntos en el disco de Poincaré que conforman al triangulo. si los puntos están muy cerca del borde y alejados entre si , la suma de los ángulos internos tiende a 0. si los puntos están muy cerca entre si y alejados del borde del disco, es decir en el centro, la suma de los ángulos internos tiende a ser 180 grados. Luego el valor de la suma de los ángulos internos esta en el intervalo (0,180)

Ahora bien, otros estudiantes exploraron no solo la cercanía de los vértices al centro o al borde del disco sino también entre ellos, como menciona este estudiante:

**Respuesta**

Entre más cerca se encuentren sus vértices entre ellos, la suma de estos ángulos se aproxima a 180°, y mientras mas lejos se encuentren los vértices de los otros se aproxima a 0°

La exploración de distintos casos y el reconocimiento de que la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico no es constante, sino que varía, aumentando o disminuyendo, según la posición de los vértices, y que en todos los casos es menor que 180°, constituye un comportamiento característico del nivel 2. En este nivel, los estudiantes establecen relaciones y propiedades geométricas a partir de la observación y la validación empírica mediante el uso del software. Tal como señalan Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), en el nivel 2 "el estudiante deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación".

En general, los estudiantes concluyeron que la suma de los ángulos internos depende de la posición de los vértices, como afirma el siguiente estudiante:

**6.3.3** ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo hiperbólico? ¿Este valor es constante?
Establece una comparación entre la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico y del triángulo euclidiano.

**Respuesta**

La suma de los ángulos de un triangulo hiperbólico varia según la posición de los vértices.
la suma de los ángulos de un triangulo hiperbólico no es constante como la de un triangulo euclidiano.

Sin embargo, esta afirmación no es completamente cierta, ya que, desde el punto de vista matemático, la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico se relaciona con su área, más que con la posición de sus vértices dentro del disco. Así, una conclusión de este tipo corresponde a un razonamiento propio del nivel 2, pues los estudiantes se basan en la validación empírica que obtienen mediante el software, a partir de la exploración de diversos ejemplos, sin apoyarse aún en el análisis formal de las propiedades geométricas.

En conclusión, la exploración en el software, la validación numérica y el establecimiento de una propiedad geométrica como la relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico, a partir de la experimentación, evidencian una transición de los estudiantes del nivel 1 al nivel 2 de razonamiento.

**Descriptor 11:** Clasifica los triángulos hiperbólicos de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos.

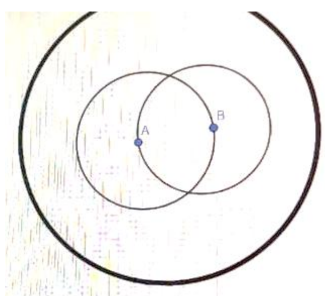
De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), en este nivel los estudiantes “se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal”. En este sentido, los estudiantes reconocieron que, al igual que en la geometría euclidiana, los triángulos hiperbólicos tienen lados y ángulos y que estos elementos, dotan a dichos triángulos de propiedades que permiten clasificarlos.

En las actividades propuestas, los estudiantes construyeron triángulos hiperbólicos equiláteros, isósceles, escalenos, acutángulos, rectángulos y obtusángulos aplicando las definiciones equivalentes de estos triángulos en la geometría euclidiana. Estas construcciones evidencian la capacidad de los estudiantes para reconocer y clasificar los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados o de sus ángulos, lo cual corresponde a un comportamiento propio del nivel 2 pues según Hoffer (1981, p. 15), en este nivel, el estudiante "usa propiedades dadas de las figuras para dibujar o construir figuras". De igual forma, los estudiantes superaron el nivel visual y utilizaron la medición, junto con las propiedades que conocían de la geometría euclidiana para la clasificación y construcción de los triángulos.

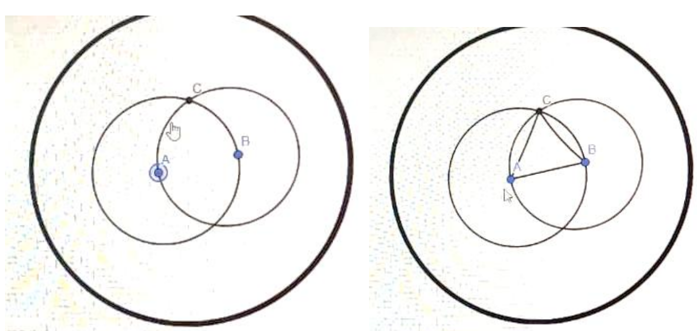
Por ejemplo, el siguiente estudiante transfirió la definición de triángulo equilátero de la geometría euclidiana al contexto hiperbólico, replicando el proceso de construcción euclidiano para obtener un triángulo hiperbólico equilátero:

**[L1] Investigador**: explícanos lo que estás haciendo en la pantalla.

**[L2] Estudiante**: voy a construir un triángulo equilátero.




**[L3] Estudiante**: Aquí, en la intersección de los dos círculos, se pone un punto y ahí quedaría un triángulo equilátero.



El estudiante replicó la construcción que realiza en geometría euclidiana de un triángulo equilátero.

**[L4] Investigador**: ¿Y qué te garantiza que ese triángulo que tienes ahí es equilátero?

**[L5] Estudiante**: Pues tiene todos los lados igual, ¿no? Y nunca se... Uno lo mueve y no se deforma. Mantiene sus medidas.

**[L6] Investigador**: ¿Y por qué sabes que todos los lados son iguales?

**[L7] Estudiante**: yo lo estoy diciendo por la simple vista, pero…

**[L8] Investigador**: ¿Por qué usaste los círculos para construir el triángulo?

**[L9] Estudiante**: porque tiene las mismas distancias

**[L10] Investigador**: Entonces eso es lo que te garantiza que...

**[L11] Estudiante**: Que todos los lados sean iguales.

En esta construcción, el estudiante no solamente se orientó por su percepción visual, que seguramente le indicaría que ese triángulo no es equilátero porque los lados no se ven congruentes, sino que recurrió a propiedades geométricas que conoce de la geometría euclidiana y que garantizan que el triángulo construido es equilátero como lo es el uso de círculos para la construcción de segmentos congruentes.

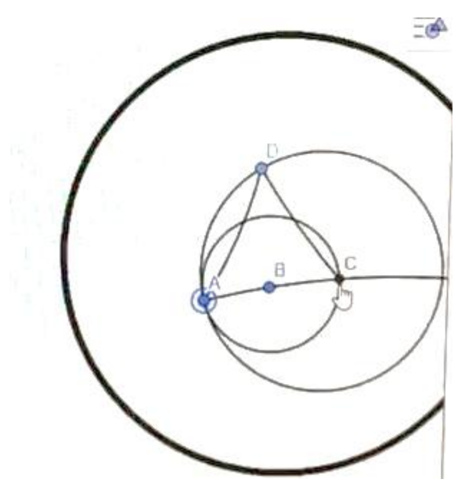
Por ejemplo, en [L5] y [L11] se observa que el estudiante asumió que, en ambas geometrías, ser equilátero significa tener lados de igual longitud, característica que garantiza mediante el uso de circunferencias. Esto demuestra un comportamiento del nivel 2 donde ya el estudiante no solamente recurre a la visualización sino a propiedades geométricas de los objetos.

En la actividad de las mediatrices se les pidió a los estudiantes construir un triángulo hiperbólico isósceles. Los estudiantes construyeron satisfactoriamente el triángulo. Por ejemplo, el siguiente estudiante construyó un triángulo isósceles replicando la construcción que él realiza en la geometría euclidiana.

**[L1] Investigador**: ¿Puedes ir explicando lo que estás haciendo?

**[L2] Estudiante**: Entonces acá trazamos un segmento AB y la circunferencia [con centro en B que pasa por A] [trazó la semirrecta AB y marcó la intersección C entre la circunferencia y la semirrecta], marcamos la circunferencia. A y B tienen la misma distancia de B y C, por ser radios del mismo círculo. [Ahora, trazaron la circunferencia con centro en C que pasa por A]

**[L3] Estudiante**: Entonces marcamos un punto aleatorio aquí [Circunferencia con centro en C que pasa por A] y trazamos los segmentos [AD y CD] Y ya tendríamos el triángulo isósceles.




**[L4] Investigador**: ¿Y qué te garantiza que ese triángulo es isósceles?

**[L5] Estudiante**: Que tiene la misma distancia como son estos segmentos del mismo radio [CA y CD]. O sea, radios del mismo círculo, entonces por eso ya.

En [L5], en efecto, el estudiante justificó acertadamente por qué el triángulo que construyó es isósceles.

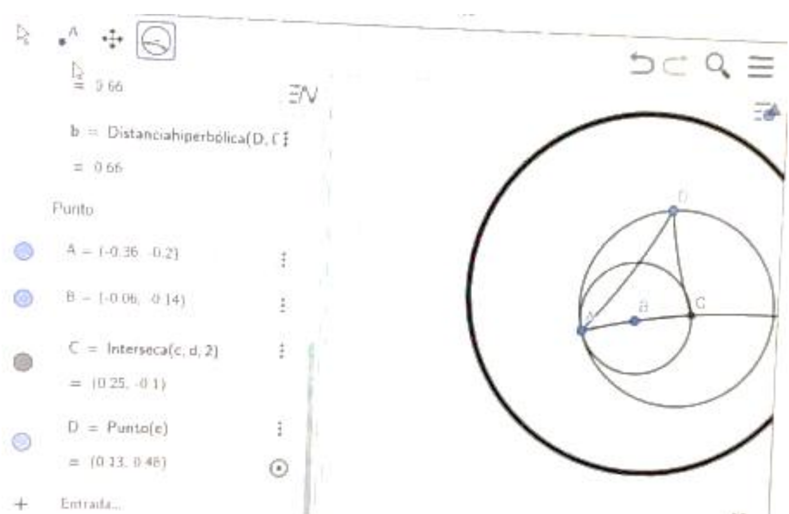
**[L6] Investigador**: ¿Y si lo mueves? ¿Si mueves el punto D, por ejemplo?

**[L7] Estudiante**: Este hace con este [AC con CD] Son isósceles.

**[L8] Investigador**: ¿Lo podemos verificar?

**[L9] Estudiante**: ¿Con herramientas?

**[L10] Investigador**: Con la distancia.




**[L11] Estudiante**: 0,66 acá y 0,66 acá

**[L12] Investigador**: Son isósceles, entonces AC y CD son congruentes.

**[L13] Estudiante**: Ajá.

**[L14] Investigador**: ¿Sí? Listo, muy bien.

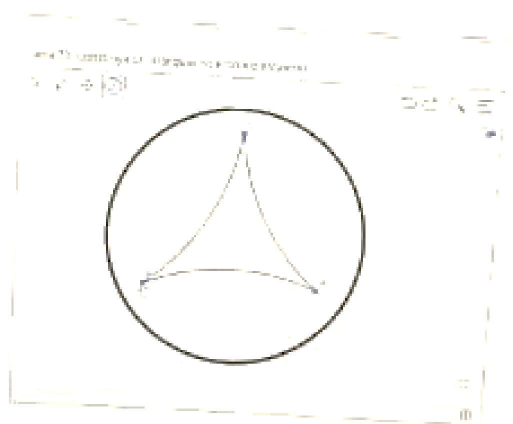
**[L15] Estudiante**: y se puede también con los ángulos, el ángulo CAD es congruente con ADC y ya.

Además, en [L15] el estudiante verificó otra propiedad más de los triángulos isósceles, que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes, confirmando que reconoce a los triángulos hiperbólicos isósceles y propiedades específicas de estos.

Finalmente, en el mismo ejercicio de la construcción de las mediatrices, se les pidió a los estudiantes construir un triángulo hiperbólico escaleno. A continuación, se presenta la construcción de dos estudiantes:

**[L1] Investigador**: ¿Qué van a hacer?

**[L2] Estudiantes**: Primero dibujamos el triángulo. Como es escaleno entonces [ubicamos] tres puntos cualesquiera y pues unimos mediante segmentos.

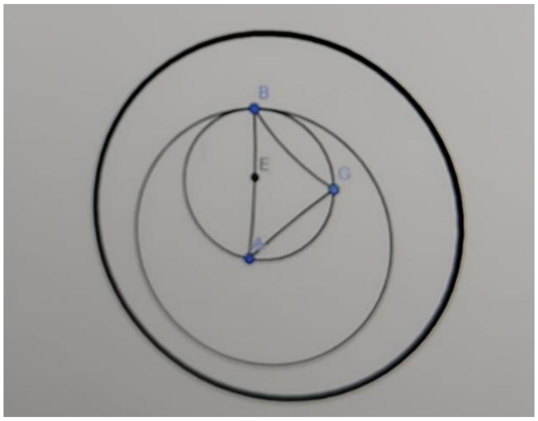


Los estudiantes reconocieron que, para que un triángulo sea escaleno, sus lados deben ser de longitudes diferentes. En consecuencia, ubicaron tres puntos cualesquiera que no cumplen condiciones particulares lo que muy posiblemente podría dar lugar a un triángulo escaleno. Sin embargo, esta estrategia no garantiza que el triángulo construido sea escaleno, de hecho, al no realizar una construcción a partir de propiedades geométricas, es posible que este triángulo sea isósceles o, incluso, equilátero.

Frente a la clasificación de los triángulos respecto a sus ángulos, en la actividad de las mediatrices se les pidió a los estudiantes construir también un triángulo acutángulo, uno rectángulo y uno obtusángulo.

La siguiente es la construcción de un triángulo acutángulo realizada por un estudiante:

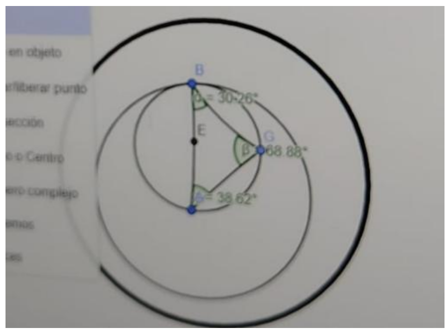
**[L1] Estudiante**: Empezamos haciendo un segmento cualquiera AB, luego trazamos un círculo con centro en A que pase por B y sacamos punto medio de A y B [El punto E], bueno esto fue más como por curiosidad. Si yo recorto esta distancia, el circulo que va a generar [centro en el punto medio de AB y que pasa por A] va a ser más pequeño que este grande [centro en A y que pasa por B], no sé si me hago entender, el caso es que si yo trazo un círculo con centro en A que pase por B, bueno me garantiza que no va a tomar como los 180°, más o menos así, sino que va a estar entre ese intervalo de 90, de 0 a 90. Si, entonces que hacemos acá




La expresión que utilizó el estudiante en [L1], “por curiosidad”, evidencia una característica fundamental de este nivel: la experimentación.

**[L2] Investigador**: o sea con esa construcción tú que quieres hacer

**[L3] Estudiante**: que el triángulo que yo construyo varíe, entre 0 a 60, digo entre 0 a 90, entonces vamos a segmento hiperbólico, trazamos un triángulo cualquiera y si medimos los ángulos, ahí están todos los agudos,

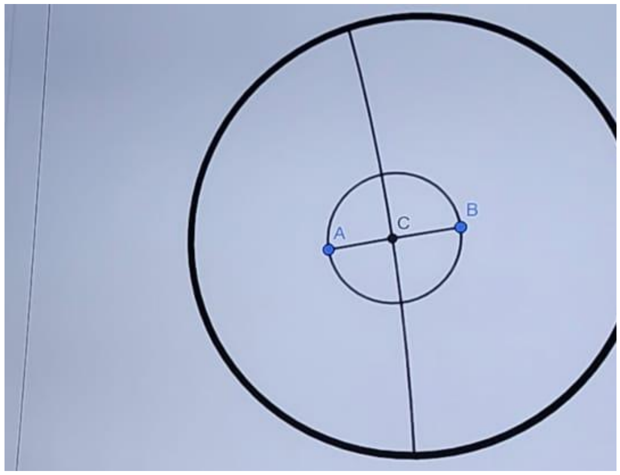



**[L4] Estudiante:** y por más de que los movamos, si nos movemos más, cumple las condiciones de acutángulo, entonces listo.

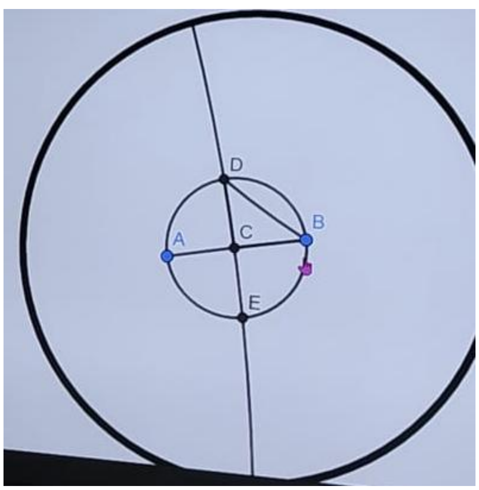
En geometría euclidiana, el triángulo que construyó el estudiante sería un triángulo rectángulo. Sin embargo, esta propiedad no se cumple en geometría hiperbólica. El estudiante no parece ser consciente de que está construyendo un triángulo que podría ser rectángulo (si se cumpliera lo mismo que en la geometría euclidiana). Sin embargo, lo importante es que el estudiante busca garantizar una propiedad como lo muestra en [L3]: que los ángulos internos sean menores de 90° para hacer que el triángulo sea acutángulo.

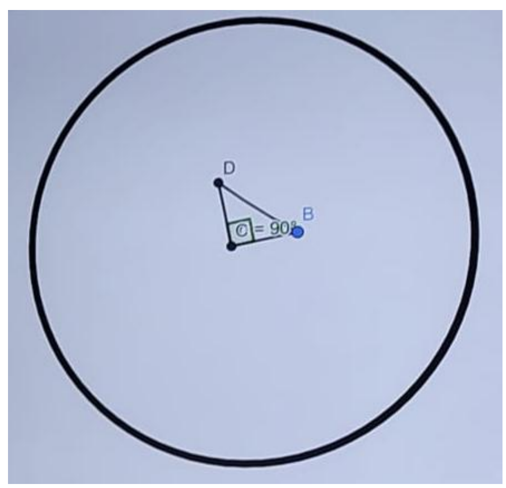
Ahora, se presenta la construcción de un triángulo rectángulo que realizó otro estudiante:

**[L1] Estudiante**:  construyo el segmento AB, construyo el punto medio [de dicho segmento] y construyo un círculo con centro en el punto medio y que el radio pase por AB. Ahora construyo la mediatriz del segmento AB




**[L2] Estudiante**: ahora uno estos tres lados [vértices], oculto lo demás y comprobamos que esto es un ángulo de 90°




En [L1], se observa que el estudiante utilizó la mediatriz para garantizar la perpendicularidad y, por tanto, el ángulo de 90° y en [L2] lo valida numéricamente a través de la medición del ángulo de modo que reconoce la característica fundamental de un triángulo rectángulo: tener un ángulo recto.

Todas estas construcciones evidencian positivamente que, en general, los estudiantes transfieren la clasificación de los triángulos euclidianos al contexto hiperbólico. No obstante, se debe refinar el taller 6 para que los estudiantes expresen de manera explícita dicha clasificación.

**Descriptor 12:** Establece propiedades de los triángulos hiperbólicos según su clasificación, a partir de la observación y la experimentación; por ejemplo, reconoce que todos los triángulos equiláteros son equiángulos pero dichos ángulos no miden necesariamente 60°.

Los estudiantes reconocieron, a partir de la exploración en el applet, que, los triángulos hiperbólicos equiláteros también son equiángulos y descubrieron que cada ángulo de un triángulo equilátero mide entre 0 y 60°, como afirma el siguiente estudiante:

**Fase de explicitación:**

Discuta las respuestas con sus compañeros y escriba las conclusiones con la orientación del profesor.

**Respuesta**

Las propiedades obtenidas por el triángulo hiperbólico equilátero: 1. son equiángulos con ángulos internos menores a 60°; 2. La suma de los ángulos internos varia entre 0 y 180 grados

De la misma manera que con los triángulos equiláteros, a partir de la exploración en el software, los estudiantes construyeron y establecieron propiedades para otro tipo de triángulos como, por ejemplo, los isósceles. En particular, verificaron la siguiente propiedad:

**6.5.2** ¿Qué propiedades de los triángulos isósceles euclidianos se cumplen en los triángulos isósceles hiperbólicos y cuáles no?

**Respuesta**

Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triangulo hiperbólico son congruentes.

Asimismo, pudieron establecer propiedades de concurrencia de líneas notables

**7.4.4** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es equilátero? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.

**Respuesta**

Si concurren y el punto se ubica dentro del triángulo.

Los estudiantes no establecieron las propiedades de manera deductiva sino a través de la validación empírica. Este es un comportamiento propio del nivel 2 donde los estudiantes comienzan a reconocer propiedades geométricas de las figuras a partir de la experimentación en el software ya que de acuerdo a Gutiérrez y Jaime (1991, p. 51), el estudiante en este nivel "deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación".

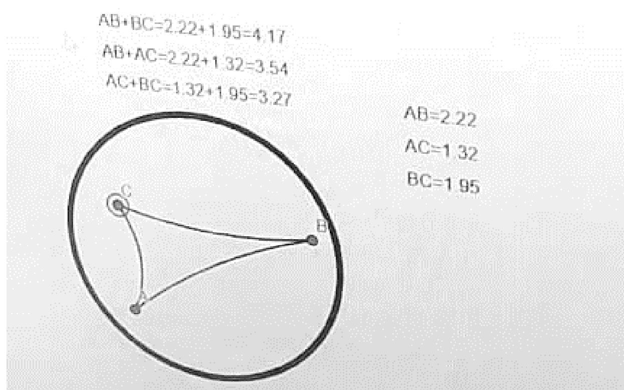
Este descriptor evidencia un avance respecto al anterior: los estudiantes no solo clasifican los triángulos, sino que reconocen sus propiedades de acuerdo a dicha clasificación. Esto confirma su ubicación en el nivel 2 del modelo, con manifestaciones incipientes hacia el nivel 3, donde se espera una comprensión más formal de la deducción para establecer nuevas propiedades.

**Descriptor 13:** Identifica, a partir de ejemplos y validación numérica, relaciones entre los lados de los triángulos hiperbólicos para establecer propiedades como la desigualdad triangular.

A partir de la exploración en el software, los estudiantes establecieron la desigualdad triangular al igual que ocurre en la geometría euclidiana. Por ejemplo,

**[L1] Investigador**: cuéntanos, ¿qué hiciste?

**[L2] Estudiante**: Bueno, yo inicialmente moví como se sugiere que se muevan los vértices del triángulo y bueno, miré que la suma de los lados, de dos de los lados del triángulo siempre va a ser mayor a un lado del triángulo, por ejemplo, si comparamos AB con BC, el resultado de esta suma es mayor a cualquiera de los tres lados, pero acá el lado que nos interesa es el lado que no sumamos entonces sumamos AB y BC, el lado que nos interesa es AC y AC es menor que la suma de estos dos lados del triángulo.




En [L2] se observan tres aspectos fundamentales: el estudiante utilizó la exploración de distintos tipos de triángulos al afirmar que "movió los vértices del triángulo"; el estudiante utilizó la validación numérica comparando los valores que aparecían en la pantalla y, finalmente, partir de la exploración en el software, el estudiante pudo establecer claramente la desigualdad triangular en los mismos términos en que se da en la geometría euclidiana. Estas tres acciones del estudiante están en concordancia con el nivel 2 de razonamiento ya que según Jaime y Gutiérrez (1991, p.

308), en este nivel los estudiantes “además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de figuras y sus elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación”.

A continuación, se presenta el razonamiento de otro estudiante:

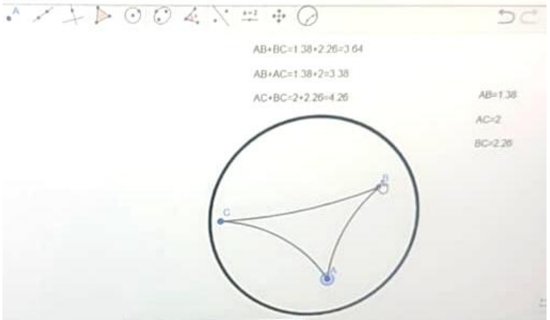
**[L1] Investigador**: ¿qué están haciendo?

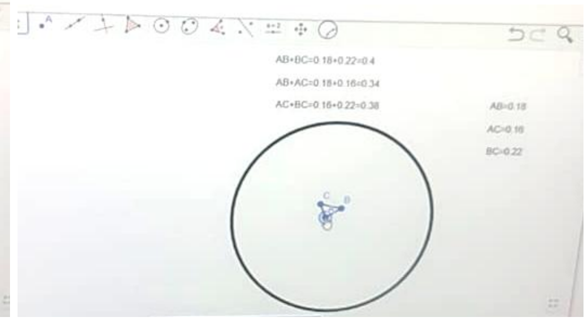
**[L2] Estudiante 1**: estamos mirando si se cumple la propiedad de que la suma de dos lados es mayor o igual al otro lado del triángulo.

La pregunta indagaba por la que relación existe entre la suma de dos lados y el lado restante del triángulo hiperbólico y pedía a los estudiantes establecer una comparación con la geometría euclidiana. En [L2] se observa que los estudiantes asumieron que la relación que debían establecer era que la suma era mayor o igual que el lado restante, haciéndose presente una vez más las nociones que los estudiantes tienen previamente de la geometría euclidiana.

**[L3] Profesor:** ¿y qué estrategia han utilizado?

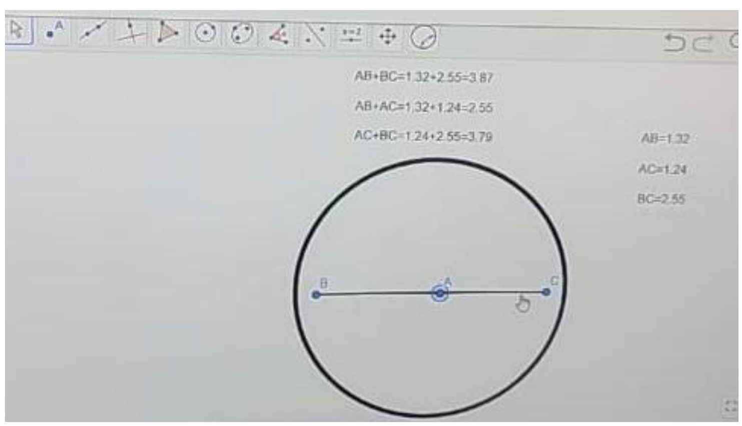
**[L4] Estudiante 2:** estamos mirando, como en el caso de los ángulos, qué pasa cuando los vértices están cerca del [borde del] disco y qué pasa cuando están cerca del centro del disco a ver si hay algún cambio y, pues, de momento pues no.




En actividades anteriores de la secuencia, los estudiantes exploraron algunas propiedades a partir del arrastre de los vértices, acercándolos o alejándolos del borde, del centro del disco o entre sí. En esta actividad, algunos estudiantes utilizaron estas mismas ideas para explorar distintos casos y ver qué ocurre con la desigualdad triangular en este nuevo contexto.

**[L5] Estudiante 2**: y estamos viendo que si como colocamos los puntos como colineales podría decirse nos damos cuenta que la desigualdad pues si se mantiene.




**[L6] Estudiante 1**: se cumple la igualdad.

**[L7] Estudiante 2**: vemos que la suma de los dos lados del triángulo corresponde a que es mayor o en este caso igual que el lado restante.

En [L7] vemos que el estudiante concluye la desigualdad triangular, en los mismos términos que en la geometría euclidiana.

Finalmente, a la pregunta: ¿es posible construir un triángulo de lados 1, 2, 4?, todos los estudiantes contestaron acertadamente, lo que implica una comprensión total de la propiedad, evidenciando una transición hacia el nivel siguiente. A continuación, se presenta la respuesta de una estudiante:

**[L1] Investigador:** Pueden leer por favor la pregunta 52

**[L2] Estudiante:** ¿Es posible construir un triángulo con longitudes hiperbólicas 1, 2 y 4? ¿Por qué? Pues como ya habíamos respuesto la número 51 y consideramos que igual que en la euclidiana, en la hiperbólica se sigue conservando la desigualdad triangular en un triángulo que las longitudes sean 1, 2 y 4, no se cumpliría, porque tenemos que los lados, 1 y 2, la suma sería 3 y esa suma sería menor al tercer lado que sería 4. No se cumple la desigualdad triangular porque 1 más 2 es 3 y es menor que 4.

Se observa que, la estudiante utiliza la propiedad que acaba de establecer para validar la imposibilidad de construir un triángulo que posea las longitudes planteadas. Esto responde a un razonamiento del nivel 2 ya que según Fuys et al. (1986, p. 10), los estudiantes no solo formulan las propiedades de las figuras, sino que también las pueden utilizar en distintas situaciones.

**Descriptor 14**: Descubre experimentalmente que en geometría hiperbólica los criterios Lado-Lado-Lado y Lado-Ángulo-Lado no garantizan semejanza (triángulos con lados proporcionales tienen ángulos diferentes), mientras que el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo produce semejanza trivial: la congruencia.

A partir de la fase de información del taller 9, los estudiantes recordaron qué significa que dos triángulos sean semejantes y cuáles criterios garantiza semejanza, en geometría euclidiana, como el siguiente estudiante:

¿Qué significa en geometría euclidiana que dos triángulos sean semejantes? Escriba los criterios de semejanza que recuerde.

**Respuesta**

que sus lados correspondientes sean proporcionales y sus ángulos correspondientes sean congruentes, los criterios de semejanza son:
1. ángulo-ángulo
2. lado-lado-lado
3. lado-ángulo-lado

La mayoría de los estudiantes recordaron esto o al estar trabajando en equipo, compartían ideas que les permitía recordar la semejanza en geometría euclidiana.

A partir de esto, se comenzó la exploración de estos criterios en la geometría hiperbólica.

El primer criterio que se abordó fue el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo. Los estudiantes tenían dos triángulos en los que dos pares de ángulos correspondientes eran congruentes; en geometría euclidiana, esto garantizaría que el tercer par de ángulos correspondientes también fueran congruentes porque la suma de los ángulos internos del triángulo es constante. Esto no se tiene en la geometría hiperbólica, y, por tanto, el criterio Ángulo-Ángulo no garantiza semejanza de triángulos (es importante refinar el taller 9 para que los estudiantes sean conscientes de esta propiedad). Así, se les pidió a los estudiantes que hicieran congruentes el tercer par de ángulos y que observaran qué ocurría con los lados. A partir de la exploración con distintos valores para los ángulos, los estudiantes concluyeron que los lados correspondientes eran congruentes.

Lo primero que se observa es una constante tensión entre lo visual y lo métrico. Los estudiantes tienen la idea de la geometría euclidiana de que dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño y son semejantes si tienen la misma forma, pero diferente tamaño. Muchos apelan a estas ideas perceptivas para establecer congruencia y semejanza en geometría hiperbólica. Así, se encuentran situaciones como la siguiente:

**[L1] Investigador**: ¿qué has notado cuando has hecho la actividad?

**[L2] Estudiantes**: Pues que en los triángulos parecieran… No es que, bueno, los lados son iguales en ese sentido de que acomodamos los ángulos congruentes y pareciera que fueran congruentes los triángulos, pero tampoco son congruentes.

**[L3] Investigador**: ¿Por qué?

**[L4] Estudiantes**: ese por qué si no, no le hallo razón.

**[L5] Investigador**: No, pero en este momento ¿por qué estás diciendo que no sé? ¿Cuáles son los criterios que necesitas para que dos triángulos sean congruentes?

**[L6] Estudiantes**: Que los lados sean iguales y que los ángulos sean iguales.

**[L7] Investigador**: Ahí los ángulos como los tienes son iguales, ¿sí? No, creo que este está en 10 y debe estar en 15°, ajústalo, ahora sí.

**[L8] Estudiante**: sí

**[L9] Investigador**: Y ahora mira los lados.

**[L10] Estudiante**: Iguales.

**[L11] Investigador**: Entonces, ¿cómo son esos triángulos?

**[L12] Estudiante**: Congruentes.

**[L13] Investigador**: Son congruentes.

**[L14] Estudiante**: Pero, ¿no era que uno de los criterios de congruencia era que tenían la misma forma?

**[L15] Investigador**: Bueno, pero ya aquí, por lo que hemos hablado, pues...

**[L16] Estudiante**: No va a tener la misma forma.

**[L17] Investigador**: Ajá, exactamente.

**[L18] Estudiante**: Muy raro.

En [L1] se le preguntó al estudiante qué observó al hacer que el otro par de ángulos fuera congruente. En [L2] el estudiante respondió que pareciera que los triángulos fueran congruentes pero que no lo son, guiándose por su percepción visual. Cuando se le invitó a reflexionar sobre qué significa que dos triángulos sean congruentes, el estudiante, en [L6], contestó acertadamente la relación que debe existir entre los lados y ángulos correspondientes. Al ajustar adecuadamente el par de ángulos restantes, en [L10] el estudiante reconoció que los lados correspondientes son congruentes y, por tanto, en [L12] concluyó que los triángulos son congruentes. Sin embargo, en [L14] se pone en evidencia la tensión entre lo visual y lo métrico: a pesar de haber verificado que tiene las mismas medidas, el estudiante apeló a la idea gráfica que tiene de congruencia en la geometría euclidiana. Este comportamiento muestra que este estudiante se encuentra en ese proceso de transición del nivel 1 al nivel 2 porque, aunque utiliza la validación numérica, la visualización aún sigue siendo un factor importante para él.

Sin embargo, no ocurrió así con todos los estudiantes. a partir de respuestas como la siguiente, se observa que, aunque la cuestión de la visualización sigue siendo importante, ahora hay otros elementos de convicción como la validación numérica de las medidas: puede que visualmente no parezcan congruentes los lados, pero sus medidas son iguales y, por tanto, son congruentes:

> **9.1.2** ¿Qué observa de las medidas de los lados correspondientes de los triángulos? ¿Por qué cree que ocurre esto?
>
> **Respuesta**
>
> A simple vista se perciben de distinta medida, pero cuando vemos su medida hiperbólica, estos son iguales (congruentes).

Este comportamiento evidencia una transición del nivel 1 al nivel 2 porque de acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), en el nivel 2 los estudiantes “son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían.

Ahora bien, como en geometría euclidiana, este criterio garantiza semejanza, algunos estudiantes, expresaron este hallazgo de la geometría hiperbólica en términos de una relación de semejanza con razón 1 y no en términos de congruencia.

> **9.1.2** ¿Qué observa de las medidas de los lados correspondientes de los triángulos? ¿Por qué cree que ocurre esto?
>
> **Respuesta**
>
> se igualan en ambos triángulos, puede ser un caso en el que la proporción sea 1 a 1, tal vez.

A partir de la relación que encontraron entre los ángulos y los lados del triángulo, los estudiantes concluyeron que estos triángulos eran congruentes. Este constituye un cambio conceptual fundamental para los estudiantes en relación con ambas geometrías.

Dado que aún no disponen de las herramientas matemáticas necesarias para justificar este cambio más allá de la exploración que les permite el software, es posible que en sus respuestas se evidencie cierto grado de incertidumbre como el siguiente estudiante:

> **9.1.4** ¿Qué relación puede establecer entre los dos triángulos?
>
> **Respuesta**
>
> al parecer si se garantiza que los 3 ángulos correspondientes sean congruentes entonces los lados de los triángulos son congruentes.

O que sí sea suficiente como ocurrió para la mayoría de los estudiantes:

> **9.1.4** ¿Qué relación puede establecer entre los dos triángulos?
>
> **Respuesta**
>
> podemos decir que ambos triángulos son congruentes, lo que nos lleva a ver que el criterio AAA se vuelva un criterio de congruencia.

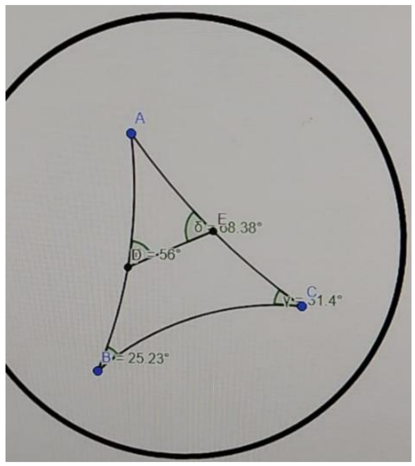
Finalmente, los estudiantes establecieron este gran cambio respecto a ambas geometrías:

> **9.1.5** ¿Se da la misma relación en la geometría hiperbólica que en la geometría euclidiana cuando los ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes?
>
> **Respuesta**
>
> No, ya que en la euclidiana que los ángulos correspondientes sean congruentes no implica congruencia.

Con la actividad 9.2 del taller 9 se exploró el criterio lado-ángulo-lado. A continuación, se presentan las respuestas de un estudiante:

**[L1] Investigador**: Bueno, construyeron los puntos medios con la herramienta, ¿sí? e hicieron la medición de los ángulos. ¿Puedes señalar ahí cuáles son los ángulos correspondientes que vamos a comparar?

**[L2] Estudiante**: Vamos a comparar el $< ADE$ y el $< ABC$ Y pues el $< ACB$ y el $< AED$.




En [L2] se observa que el estudiante identificó los ángulos correspondientes que debe comparar, lo que indica que analizó la figura a partir de sus elementos internos como se espera en el nivel 2 y no únicamente desde su forma global, como ocurría en el nivel anterior.

**[L3] Investigador**: ¿Y qué puedes concluir al comparar los ángulos correspondientes?

**[L4] Estudiante 1**: Que no son congruentes, ¿no?

**[L5] Investigador**: Que no son congruentes, cierto. ¿Y ocurre eso en la geometría euclidiana?

**[L6] Estudiante 1**: No, no. En la geometría euclidiana sí serían congruentes.

La conclusión del estudiante en [L4] se derivó de la validación numérica realizada en el software. A partir de ello, en [L6] contrastó su hallazgo con lo que conoce de la geometría euclidiana, en la cual los ángulos sí serían congruentes.

**[L7] Investigador**: Entonces, ¿qué podemos pensar del criterio lado-ángulo-lado aquí?

**[L8] Estudiante 1**: Que... No se cumple,

**[L9] Estudiante 2:** Que para los ángulos no se cumple.

**[L10] Investigador**: entonces, ¿eso qué implica respecto a los triángulos?

**[L11] Estudiante 1:** Que no son congruentes.

**[L12] Investigador**: ¿Que no son congruentes?

**[L13] Estudiantes**: Que esos dos... no, que esos dos triángulos no son...no son…

**[L14] Investigador**: La otra palabra que no es congruentes.

**[L15] Estudiante 1:** Semejantes.

**[L16] Investigador**: Semejantes.

**[L17] Estudiante 1**: Eso era.

Cabe resaltar que, el estudiante asumió implícitamente que se cumplían las condiciones del criterio lado-ángulo-lado y que, al no verificarse la congruencia de los ángulos, entonces el criterio no garantiza congruencia de los triángulos. En general, frente a este criterio, los estudiantes concluyeron que:

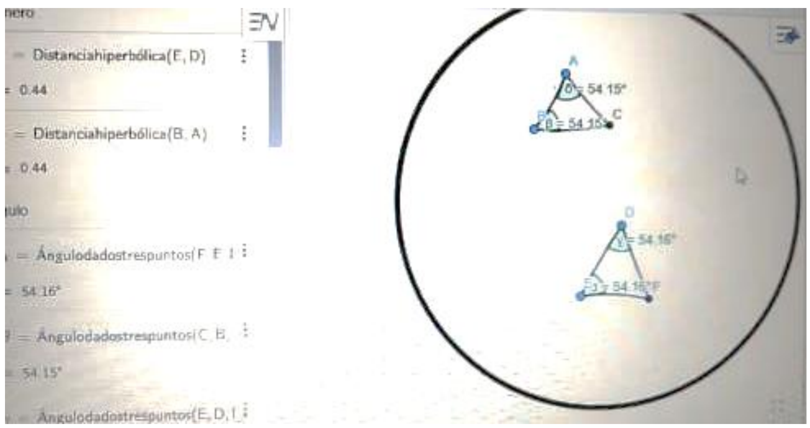
**9.2.4** ¿Qué puede decir del criterio Lado- Ángulo- Lado para la semejanza? ¿Qué respuestas obtendríamos en esta actividad si los triángulos fueran euclidianos?

**Respuesta**

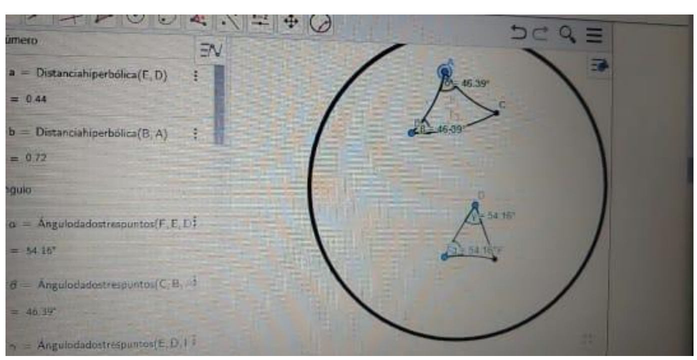
El criterio de lado ángulo lado no esta cumpliendo con la definición de semejanza, luego no garantiza este criterio la semejanza en la geometría hiperbólica. para el caso de la geometría euclidiana tendríamos que la razón de proporción entre los lados correspondientes del triangulo seria de 2:1 y sus ángulos serian congruentes, pero aquí no se esta cumpliendo ni proporcionalidad ni congruencia.

Finalmente, con la actividad 9.3 del taller 9 se exploró el criterio Lado-Lado-Lado. A continuación, se presenta la respuesta del siguiente estudiante:

**[L1] Estudiante**: utilizamos la herramienta para hacer los triángulos equiláteros y luego movemos los vértices de tal manera que los ángulos correspondientes fueran similares. Entonces trazamos [Calculamos] la medida del segmento ED y el segmento AB que son los lados correspondientes y pues podemos observar que son semejantes.




**[L2] Investigador**: Ahora arrastra un vértice de un triángulo. Entonces, ¿qué ocurre con los ángulos?



**[L3] Estudiante**: Los ángulos, pues al ser equiláteros permanecen.

**[L4] Investigador**: Permanecen en él, pero, ¿en relación con el otro triángulo?

**[L5] Estudiante**: No van a tener una proporción similar.

**[L6] Investigador**: Ajá, no van a ser congruentes, pero los lados...

**[L7] Estudiante**: tampoco

**[L8] Investigador**: ¿Siguen siendo proporcionales los lados o no?

**[L9] Estudiante**: no, porque varía

**[L10] Investigador:** a es la distancia entre E y D, ¿sí? Y b es la distancia entre B y A. Ahora... Ah, y por ejemplo...Halla la distancia entre A y C y la distancia entre D y F. ¿Cómo son esas distancias?

**[L11] Estudiante**: iguales

**[L12] Investigador**: Naturalmente pues son 0,44 en uno y 0,72 en otro porque son congruentes. Son equiláteros, perdón, equiláteros, equiláteros. Entonces, ¿cómo hayas tú la razón de semejanza entre dos triángulos?

**[L13] Estudiante:** Pues haciendo lo mismo que usted hizo, ¿no? Lo de dividir a por b

**[L14] Investigador:** Eso, entonces se divide a por b y en el otro se divide j entre i. Entonces, ¿qué va a ocurrir con esas divisiones?

**[L15] Estudiante**: nos va a dar la regla de correspondencia que tienen los segmentos de los triángulos.

**[L16] Investigador**: Ajá, O sea que los lados van a ser, ¿cómo?

**[L17] Estudiante**: Proporcionales

**[L18] Investigador**: Y si tú divides otro, pues como son los mismos valores, va a dar igual.

**[L19] Estudiante**: si porque los triángulos son equiláteros

**[L20] Investigador**: O sea que tenemos lados, ¿qué?

**[L21] Estudiante**: Correspondientes proporcionales.

**[L22] Investigador**: Pero los ángulos...

**[L23] Estudiante**: también

**[L24] Profesor**: ¿Los ángulos son congruentes?

**[L25] Estudiante**: No, no son congruentes.

En [L1] el estudiante recurrió a las partes que componen el triángulo al comparar lados.

En [L3] mencionó el hecho de que los triángulos hiperbólicos equiláteros son equiángulos, establecido en actividades previas, pero para efectos de analizar semejanza de triángulos, se requiere es comparar no los ángulos dentro del mismo triángulo sino ángulos entre dos triángulos. Cuando el investigador enfocó la pregunta en ese sentido en [L4], el estudiante respondió acertadamente en [L5] que no conservan la "proporción similar". Es importante ver que, aunque en el nivel 2 los estudiantes comienzan a utilizar un lenguaje más técnico, aún les falta precisión para definir términos, por ejemplo, utiliza la expresión "proporción similar" para referirse a la congruencia de ángulos.

En [L17], el estudiante concluyó que los lados son proporcionales y en [L25] mencionó que los ángulos no son congruentes. Con estas dos condiciones el estudiante pudo concluir que los triángulos no eran congruentes. En general, los estudiantes llegaron a esta conclusión:

**9.3.2** ¿Son semejantes en el sentido euclidiano? Justifique su respuesta

**Respuesta**

no, aunque la proporcionalidad de los lados esta garantizada por ser triángulos con lados iguales (equilateros), como los ángulos varían entre 0 y 180 grados existe el caso en que estos ángulos correspondientes no sean congruentes y no cumpliría la definición de semejanza, así el criterio lado lado lado, tampoco garantiza la semejanza en triángulos de la geometría hiperbólica.

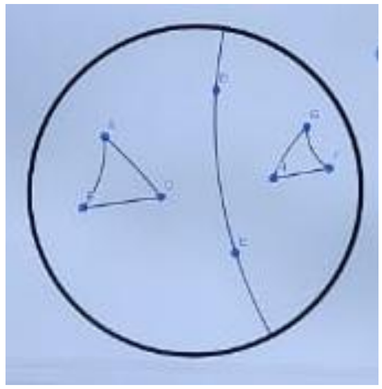
Este descriptor evidencia que los estudiantes, al explorar los criterios de semejanza en el contexto hiperbólico, se enfrentan a un conflicto que los obliga a revisar sus concepciones previas. Aunque persiste la influencia de la percepción visual, comienzan a utilizar mediciones y propiedades para validar sus conclusiones, mostrando así una transición del nivel 1 al nivel 2 del modelo de Van Hiele. El uso del entorno dinámico fue esencial para propiciar esta reflexión, ya que permitió observar empíricamente las variaciones métricas y angulares que diferencian ambas geometrías.

**Descriptor 15:** reconoce y establece, a partir de la experimentación, los criterios de congruencia de triángulos hiperbólicos.

En la actividad 9.4 del taller 9 se les pidió a los estudiantes reflejar un triángulo respecto a una recta con el objetivo de que vieran que el triángulo reflejado es congruente con el triángulo original y que, a diferencia de la semejanza, la congruencia sí se puede garantizar en el contexto hiperbólico. A continuación, se presenta la respuesta de un estudiante a la actividad:

**[L1] Investigador**: ve explicándonos lo que vas haciendo.

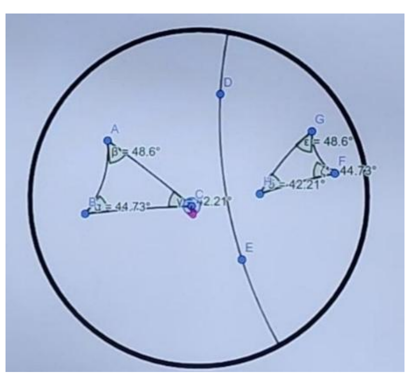
**[L2] Estudiante**: voy a construir primero un triángulo cualquiera [ABC] y ahora vamos a hacer una recta hiperbólica y reflejo estos puntos [los vértices A, B, C del triángulo] respecto a esta recta hiperbólica y uno esos tres puntos y midamos los ángulos.



**[L3] Investigador:** una pregunta, ahorita un compañero dijo que esos triángulos no podían ser congruentes porque no tenían la misma forma. ¿Qué opinas tú?

**[L4] Estudiante**: Visualmente no, pero vamos a medir los ángulos.

En [L4] se observa que el elemento de convicción ya no es solamente lo que el estudiante percibe visualmente en la pantalla, sino que recurre a la medición, es decir, a la validación numérica para establecer conclusiones sobre la congruencia de los triángulos. Este hecho muestra una clara transición del nivel 1 al nivel 2 en el razonamiento del estudiante.



**[L5] Investigador**: ¿Qué conclusión tienes ahí de los ángulos?

**[L6] Estudiante**: Que son congruentes con respecto a ese.

**[L7] Investigador**: ¿Eso es suficiente ya a estas alturas con lo que hemos hecho para decir que son congruentes o debemos mirar algo más?

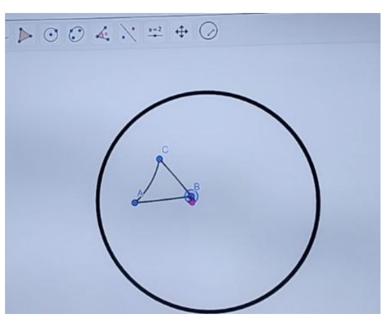
**[L8] Estudiante**: son congruentes por el criterio ángulo, ángulo, ángulo.

En [L8] el estudiante utilizó el criterio de congruencia Ángulo-Ángulo-Ángulo establecido previamente para garantizar que el triángulo reflejado es congruente con el triángulo original. Este hecho evidencia que el estudiante está transitando del nivel 2 al nivel 3 al utilizar propiedades ya establecidas para justificar o deducir otras propiedades.

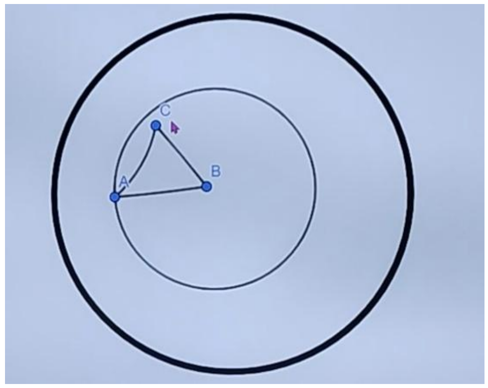
La siguiente intervención corresponde a las respuestas de un estudiante a la actividad 9.5 del taller 9. El estudiante construyó dos triángulos cuyos lados correspondientes son congruentes con el fin de verificar si el criterio Lado-Lado-Lado garantiza o no, congruencia de triángulos hiperbólicos:

**[L1] Investigador**: te escuchamos.

**[L2] Estudiante**: Bueno, en primer lugar, pues vamos a construir el triángulo ABC

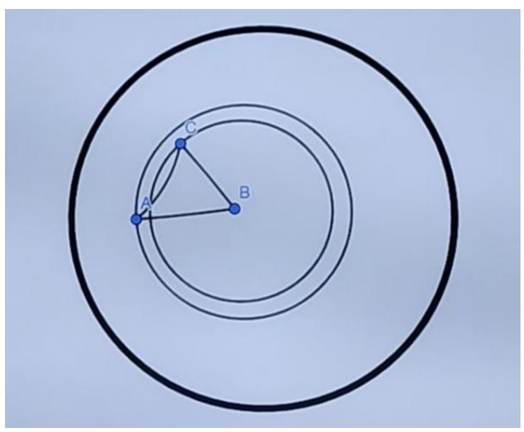


**[L3] Estudiante**: listo, qué hicimos. Como deben ser congruentes los lados de los triángulos entonces lo primero que hicimos fue construir un círculo con centro en B que pase por A.




**[L4] Estudiante:** Listo. Y, pues, cualquier punto de esa circunferencia va a cumplir esa propiedad, bueno, esa condición.

**[L5] Estudiante:** Ahora, ¿qué hicimos? Trazamos un círculo con centro en B, que pase por C, para que tenga la misma distancia de B a C.




**[L6] Estudiante:** Entonces, ese círculo, cualquier punto del círculo, pues, también va a cumplir esa propiedad.

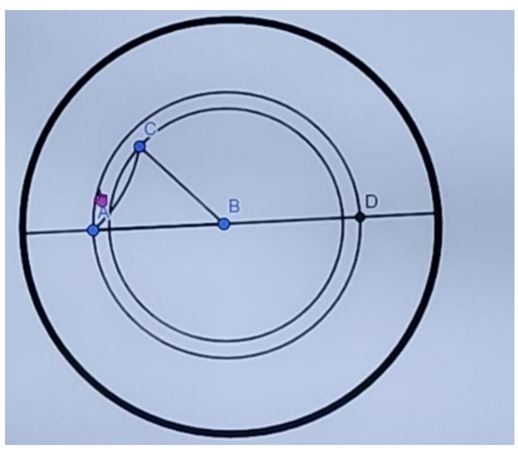
De [L2] a [L4] se evidencia que el estudiante transfirió el concepto de circunferencia euclidiana al contexto hiperbólico, pues cuando afirma que “cualquier punto de esa circunferencia va a cumplir esa propiedad", está haciendo referencia a que un segmento del nuevo triángulo es un radio de la circunferencia.  Lo mismo ocurre en [L5] y [L6].

**[L7] Estudiante:** Ahora, ¿qué hicimos? Primero, pues, hay que marcar lo que es la distancia hiperbólica entre A y C [distancia a] que sería la distancia que nos falta ubicar para el otro lado del triángulo. Entonces, ¿qué hicimos? Después de haber marcado ya la distancia hiperbólica entre A y C [a], pues, hicimos el círculo con centro y radio, y el radio, pues, va a ser a.

**[L8] Estudiante:** Hay no, porque acá tiene que pasar es por... Acá lo que hicimos es trazar una recta hiperbólica de B a C.

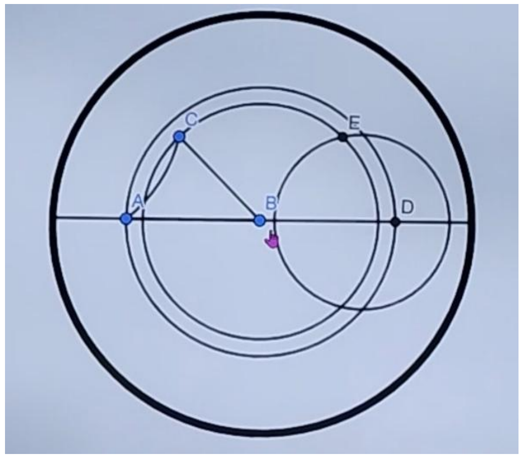
**[L9] Investigador:** Ahí la trazaste de B a A, ¿no importa?

**[L10] Estudiante:** sí, La idea es que tenga la misma distancia que…  ahora, pues, vamos a trazar la intersección entre esa recta y el círculo que habíamos mandado con radio BA.  Entonces, en este caso, sería el punto que está acá [Punto D]



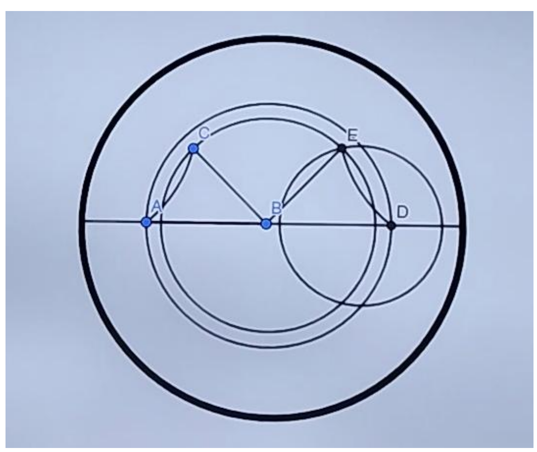

**[L11] Estudiante**: Ese punto, pues, tiene la condición de que, pues, tiene la misma distancia que hay de A a B

**[L12] Estudiante:** Ahora, ¿qué hacemos? Ahora utilizamos la condición de circunferencia con centro y radio, y pues, va a estar con centro en D, radio, el a que llamamos AC, y que la intersección entre ese círculo que trazamos con radio AC y el círculo con radio BC, entonces ese va a ser nuestro punto del último vértice que nos falta para el triángulo.

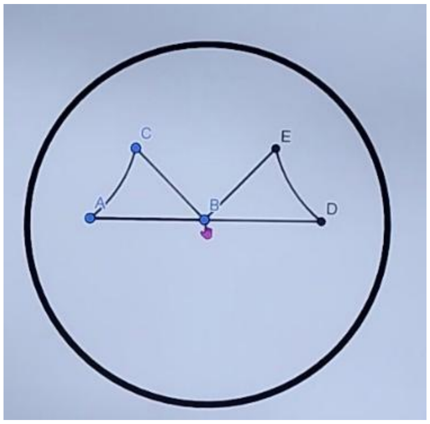



**[L13]: Estudiante:** Haciendo un recorderis, la distancia de B a A, la tenemos de B a D, ¿cierto? A ese punto.

**[L14] Estudiante:** Ahora, la distancia de A a C la tenemos con el círculo en centro en D, con el círculo con centro en D, que es el radio, yo lo llamé punto E el círculo. Entonces, el vértice que tomé fue E, ¿por qué? Porque esa distancia de B a E va a garantizar también que tenga la misma distancia de B a C. Y ahí, pues, unimos lo que es B con E y E con D y pues vamos a la congruencia



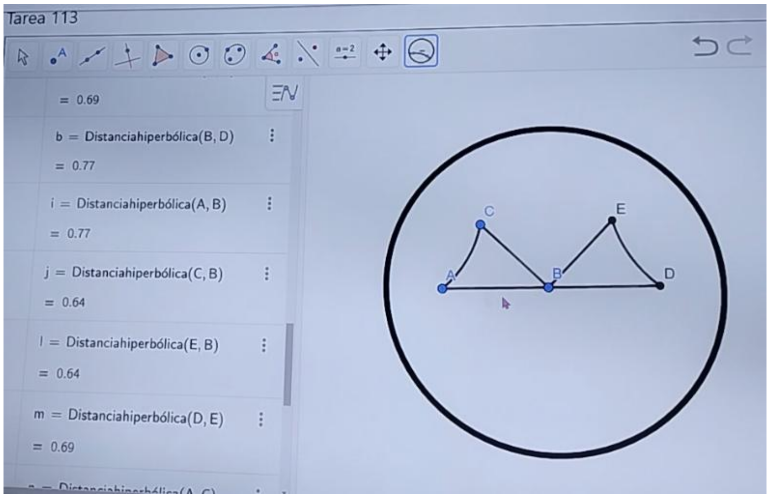

**[L15] Estudiante:** En teoría, pues, nuestra congruencia sería entre AB con BD, este AC con DE y CB con BE




En todas las anteriores líneas, se evidencia:

- Que el estudiante ya superó la predominancia visual propia del primer nivel. No importa que los triángulos no parezcan congruentes, la construcción que realizó garantiza que son congruentes.
- Utilizó propiedades geométricas para garantizar que los lados correspondientes de ambos triángulos sean congruentes.
- Los conocimientos previos del estudiante promueven una transición rápida del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento.

**[L16] Estudiante:** acá podemos ver vista algebraica y lo vamos a tratar de comprobar. Estudiante: [señalando las distancias que aparecen en la vista algebraica] Entonces podemos ver que BD, esta distancia, es congruente con AB, CB y BE pues también son congruentes y DE con AC.




**[L17] Investigador:** Perfecto, sí. Perfecto, muy bien. Ahora defórmalos. Arrastra.

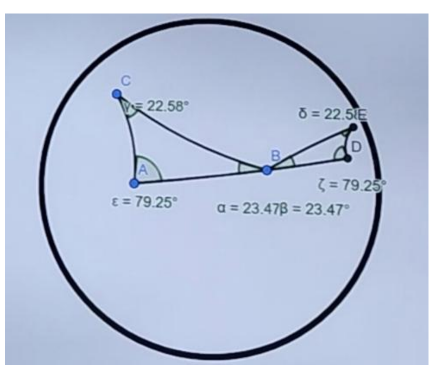
**[L18] Estudiante:** podemos ver que siempre van a tener esta [congruencia]

**[L19] Investigador:** Este mueve el punto B, de modo que el vértice E se acerque bastante al borde del círculo. Eso, así. Listo, muy bien. ¿Y ahí se sigue manteniendo [La congruencia de los lados]?

**[L20] Estudiante:** sí

En las líneas [L16] a [L20] el estudiante verifica que se tiene la congruencia de los lados correspondientes de los triángulos a partir de la validación numérica. Estas acciones lo sitúan en el nivel 2 según Fuys et al. (1986, p. 62) ya que utiliza la validación empírica como elemento de convicción.

**[L21] Investigador**: se sigue manteniendo. Entonces, ahora mide los ángulos.



**[L22] Investigador:** Ahora mueve un vértice. Bueno, en esta construcción se mantienen. O sea que, por ejemplo, tú con base en esta conclusión, ¿qué podrías decir del criterio Lado-Lado-Lado?

**[L23] Estudiante:** lado-lado-lado

**[L24] Investigador:** Sí, porque lo que estamos usando es Lado-Lado-Lado ¿no?

**[L25] Estudiante:** Pues que los triángulos son congruentes también

Al medir los ángulos y arrastrar los vértices, los ángulos correspondientes son congruentes y, por tanto, el criterio Lado-Lado-Lado garantiza congruencia de triángulos, como lo afirmó el estudiante en [L25]. En general, los estudiantes concluyeron:

**9.5.2** ¿Son congruentes los ángulos? ¿Qué ocurre con el criterio L-L-L?

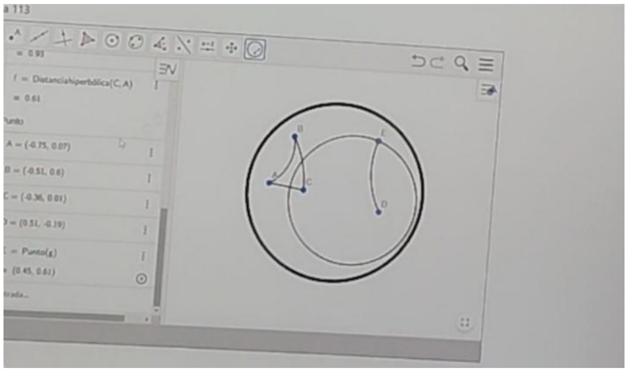
**Respuesta**

los ángulos son congruentes cuando se garantiza que los lados sean iguales y el criterio lado lado lado cumple con la definición de congruencia

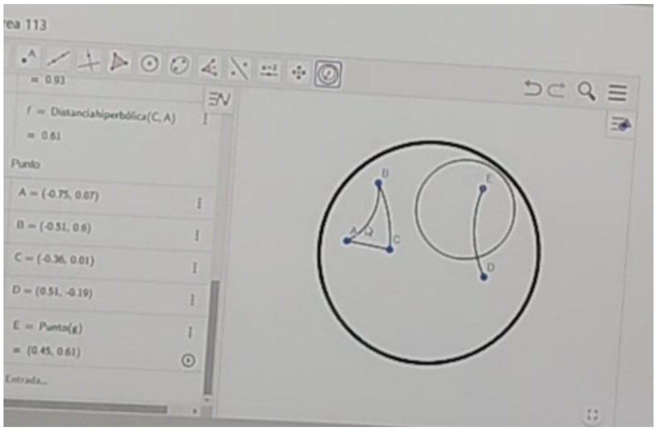
A continuación, se presenta la respuesta de otro estudiante que, aunque recurrió a la misma construcción del estudiante anterior, no garantizó adecuadamente las propiedades y, por tanto, no pudo establecer de manera acertada el criterio Lado-Lado-Lado.

**[L1] Estudiante**: Bueno, entonces lo que nosotros hicimos fue lo siguiente. Primero que nada, tenemos que ir a la vista algebraica para ver las medidas de estos lados ¿cierto?

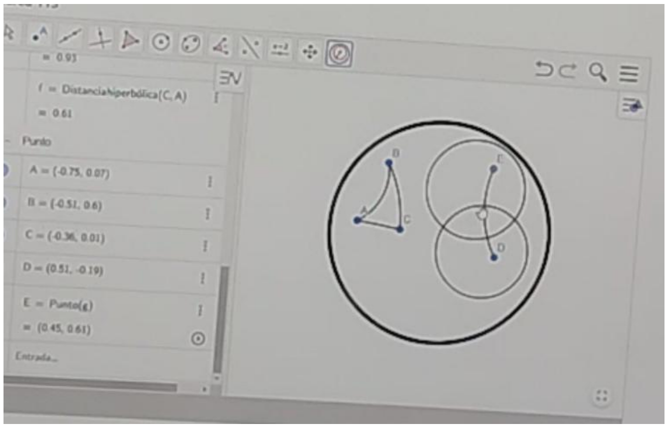
**[L2] Estudiante:** Vamos a copiar uno de los lados. Cualquiera de estos tres lados lo podemos copiar, ¿cierto? Copiamos esto. 1.18, ¿cierto? Ahora creamos simplemente un segmento hiperbólico.



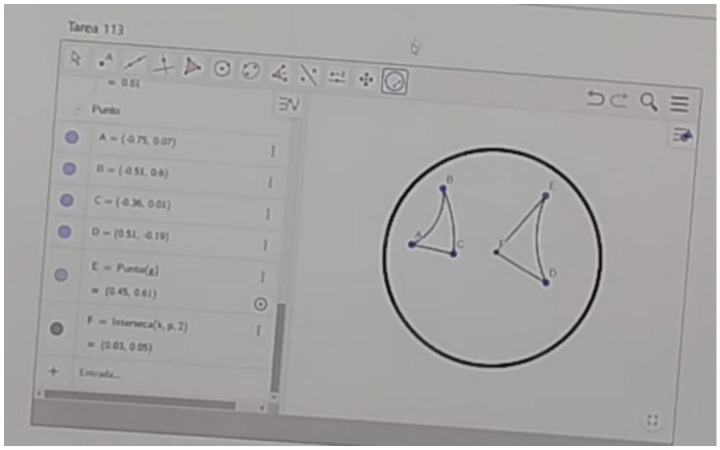

**[L3] Estudiante**: Ahora aquí hacemos lo siguiente. Ya copiamos el de 1.18, ¿cierto? Ahora podemos ocultar este [El círculo]. Y copiamos el de 0.93, ¿cierto? Acá lo copiamos. 0.93.



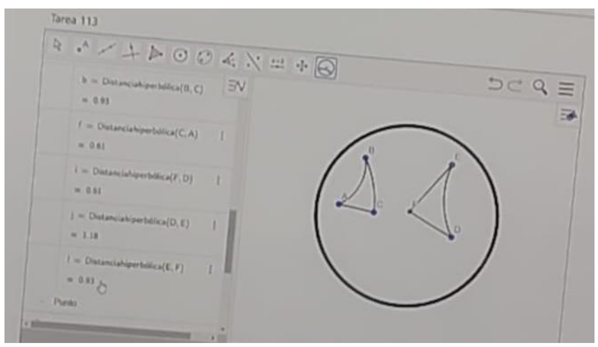

**[L4] Estudiante:** Y ahora copiamos el otro, ¿qué es de cuánto? 0.61, ¿cierto? Lo copiamos acá también. 0.61. Bien



**[L5] Estudiante:** Y en la intersección de estos dos podemos crear un punto, ¿cierto? Un punto. Bien, ahí lo unimos. Ocultemos este círculo. Y aquí creamos el segmento hiperbólico. El otro segmento hiperbólico.

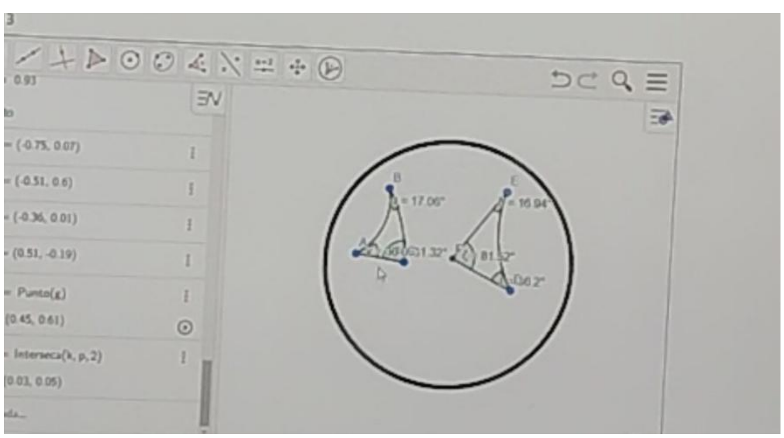



**[L6] Estudiante:** Y vamos a comprobar que estas medidas son iguales ¿Cierto? Entonces, distancia hiperbólica. Listo. Tenemos que son iguales, ¿cierto?




**[L7] Investigador**: Ajá.

**[L8] Estudiante:** Ahora miramos ángulos a ver si es correcto.



**[L9] Estudiante:** Bien. Pues, no sé por qué, pero... Bueno, me dio un poquitito menos, pero...

**[L10] Investigador:** Yo sí sé por qué. Mueve, por ejemplo, un punto de este triángulo.

**[L11] Estudiante:** Ah, ok porque no están bien enlazados.

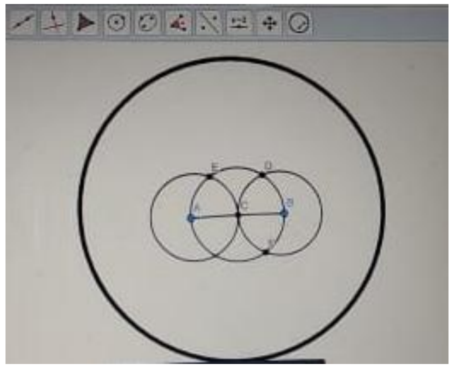
**[L12] Investigador**: Exactamente, esa es la cuestión.

A diferencia del ejemplo anterior, este estudiante no tomó las medidas de manera general, sino que utilizó valores específicos de los lados del triángulo inicial. Al calcular los ángulos, observó que no resultaban congruentes, ya que los lados no eran exactamente iguales: una mínima diferencia decimal alteró la medida de los ángulos. Además, al realizar la prueba del arrastre, se perdió la congruencia de los lados. Con la acción sugerida por el investigador en [L10], el estudiante reconoció que la prueba fallaba y en [L11] explicó la razón, al afirmar que los lados "no están bien enlazados", es decir, que no dependen realmente del triángulo inicial, como esperaba.

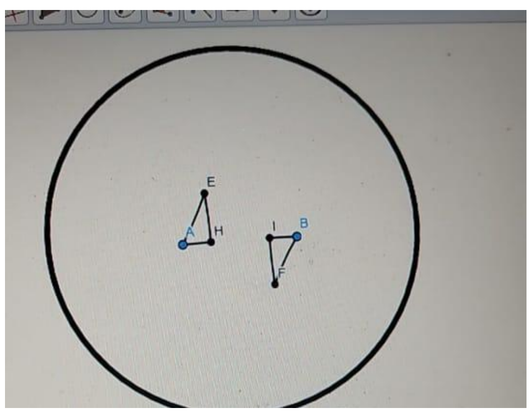
Mientras el estudiante anterior mostró un comportamiento correspondiente al nivel 3 de Van Hiele, al utilizar propiedades geométricas para garantizar la validez de su construcción, este estudiante se ubica claramente en el nivel 2, ya que, aunque emplea las herramientas adecuadas, no generaliza la propiedad del lado ni establece una relación que le permita explorar todos los triángulos posibles. Su razonamiento se centra en casos particulares y en la observación empírica, sin alcanzar aún una comprensión entre las propiedades geométricas involucradas.

Finalmente, en la actividad 9.6 del taller 9, los estudiantes exploraron el criterio Lado-Ángulo-Lado. A continuación, se presenta la respuesta de un estudiante a la actividad:

**[L1] Estudiante**: Bueno primero comenzamos marcando los dos puntos [A, B], trazamos el segmento y utilizamos la herramienta del punto medio en un segmento hiperbólico [C]. Seguido de eso trazamos la circunferencia con centro en C, radio en A y realizamos la misma operación, pero ahora con B y A [Centro en B que pasa por C y centro en A que pasa por C]



**[L2] Estudiante:** Marcamos las intersecciones en la circunferencia [E, G, D, F] y marcamos el segmento que nos une el punto E con el G y el D con el F. Y después marcamos, después de trazar los segmentos, marcamos las intersecciones en el primer segmento que teníamos y ya podemos trazar los triángulos [EAH, BIF]. Y borramos para que sea más bonito.




En [L1] y [L2], el estudiante aplica propiedades geométricas para construir dos triángulos que cumplan la relación de correspondencia Lado-Ángulo-Lado. Este comportamiento corresponde al nivel 2 de razonamiento, ya que el estudiante no se limita a ajustar visualmente las figuras para garantizar la relación, sino que se apoya en propiedades geométricas. Sin embargo, no alcanza el nivel 3, pues la construcción se restringe a un caso particular utilizado para analizar la congruencia.

**[L3] Investigador**: Listo, bueno esos son los dos triángulos. ¿Cuáles son los lados que son congruentes?

**[L4] Estudiante**: El segmento IB y el segmento, bueno en realidad todos los lados van a ser iguales.

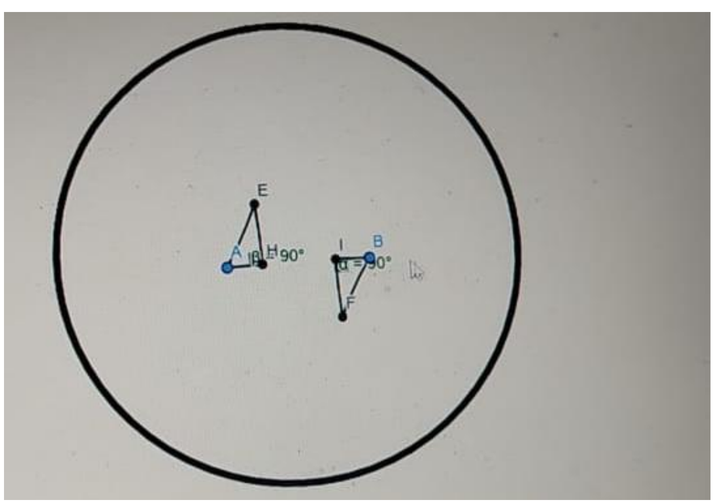
La afirmación de [L4] revela otro aspecto importante del nivel 2: el lenguaje, aunque es matemático, resulta ser en ocasiones impreciso, como en este caso.

**[L5] Investigador**: ¿O sea, hiciste un triángulo equilátero?

**[L6] Estudiante**: No, O sea, iguales de este con este, este con este y este con este [AH con IB, EH con IF y AE con BD]. Porque todos son, por ejemplo, tienen el mismo radio.

**[L7] Investigador**: O sea, los correspondientes son congruentes. ¿Y cuál es el ángulo que garantizaste que fuera congruente?

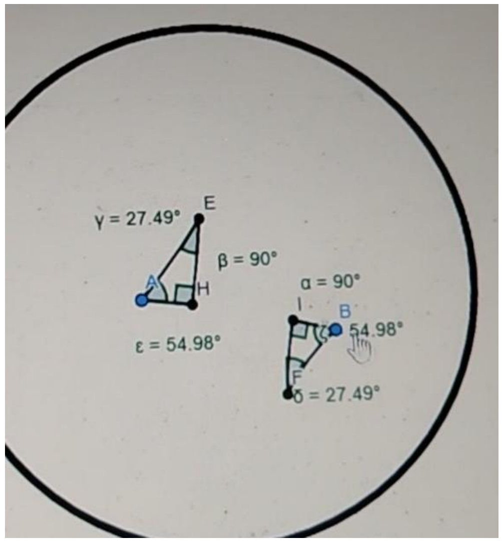
**[L8] Estudiante**: Cualquiera. [Señaló el ángulo de 90°]



**[L9] Investigador:** Ahora mide los otros ángulos y mira si son congruentes o no.

**[L10] Estudiante**: sí, [probó con uno] Ya pero el otro también por descarte.

**[L11] Investigador**: No, porque en la geometría euclidiana uno sí puede concluir que son iguales porque miden 180 la suma. Pero aquí no puede hacerlo.




**[L12] Estudiante**: sí, se cumple para los tres.

Finalmente, el estudiante en [L12] verifica, a partir de la medición que hizo de los ángulos y de los lados, que los triángulos son congruentes.

En general, los estudiantes concluyeron que el criterio Lado-Ángulo-Lado garantiza congruencia de triángulos hiperbólicos como lo afirma, por ejemplo, el siguiente estudiante:

**9.6.2** ¿son congruentes los triángulos? Justifique su respuesta.

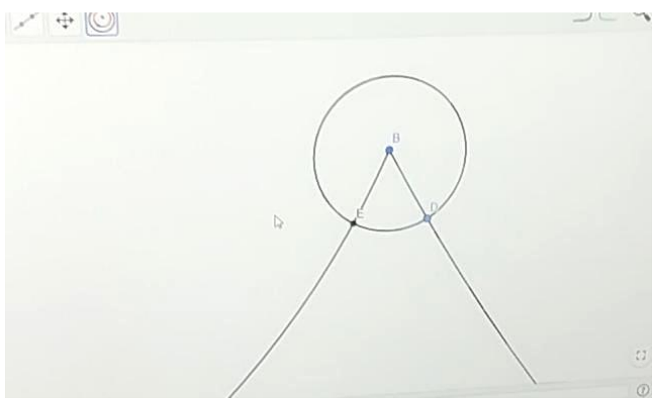
**Respuesta**

Si son congruentes es decir lado angulo lado también es un criterio de congruencia

**Descriptor 16:** Construye líneas notables de un triángulo hiperbólico como alturas, medianas, bisectrices y mediatrices, pero no establece criterios claros sobre su concurrencia ni identifica correctamente la ubicación de los puntos de concurrencia como ortocentro, centroide, incentro, circuncentro.

En el taller 7, los estudiantes construyeron las líneas notables y exploraron su concurrencia en el contexto hiperbólico. A continuación, se presenta la respuesta de un estudiante a la actividad 7.2 del taller 7 en donde se les pide construir la bisectriz:

**[L1] Estudiante**: Esto es basado en la misma demostración que se hace en la geometría Euclidiana, O sea, porque como la base los... O sea, solo se utilizan circunferencias Y pues, aparentemente funcionan de la misma manera en ambas Entonces pues, creo yo que...

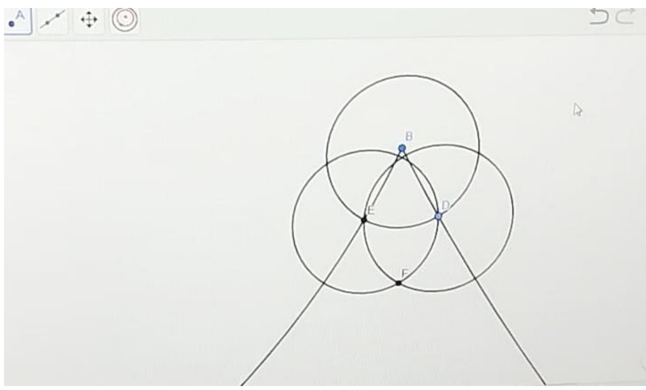


En [L1], el estudiante establece una correspondencia conceptual, a partir de la experimentación, entre las dos geometrías al replicar la construcción de las bisectrices de un triángulo euclidiano en el contexto hiperbólico y asumir, por ejemplo, que las circunferencias se definen igual que en geometría hiperbólica, aunque visualmente parezca contradictorio. Este comportamiento es característico del nivel 2 ya que según Hoffer (1981, p. 15), en este nivel el estudiante “Usa las propiedades dadas de las figuras para dibujarlas o construirlas", como en este caso, que utiliza las propiedades euclidianas que conoce de la bisectriz y de los elementos geométricos auxiliares de la construcción para replicarla en el contexto euclidiano.

**[L2] Investigador**: Ese punto D y ese punto E

**[L3] Estudiante**: están a la misma distancia de B

**[L4] Estudiante**: Al trazarse dos circunferencias va a estar acá el punto medio de este segmento [ED] que es la apertura del ángulo al que se le quiere sacar la bisectriz



**[L5] Investigador**: Y ese punto F, ¿qué representa?

**[L6] Estudiante**: Esto... O sea, este punto F va a estar... En la bisectriz. Entonces, es como que una guía para poder trazar la semirrecta porque este segmento acá que es la apertura, pues, este punto F está a la misma distancia de ambos, entonces pues en la mitad de la apertura que es lo que queremos

**[L7]: Investigador**: Bueno, ¿y por qué eso te garantiza que esos dos ángulos que construiste ahí miden lo mismo?

**[L8] Estudiante**: Pues es lo que decía, como no se usa nada... Que aparentemente no se cumple con la geometría euclidiana Pues se puede usar la misma demostración.

**[L9] Investigador**: Y entonces, ¿cuál es la propiedad de la geometría euclidiana? ¿O de la bisectriz de la geometría euclidiana que te garantiza que esos dos ángulos van a medir lo mismo?

**[L10] Estudiante**: No me acuerdo

**[L11] Investigador**: ¿No te acuerdas?

**[L12] Estudiante**: No me acuerdo

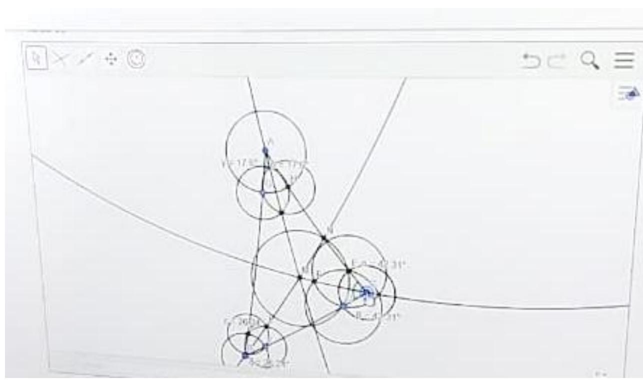
Un comportamiento propio del nivel 2 sería que el estudiante garantice que esa línea que construyó efectivamente divide el ángulo en otros dos ángulos iguales, midiendo y estableciendo la congruencia. Sin embargo, este estudiante afirma en [L8] que, al ser válidas las propiedades que utilizó en la construcción en el contexto hiperbólico, la recta debe ser la bisectriz. Esto muestra cómo el conocimiento geométrico previo del estudiante promueve la transición del nivel 2 al nivel 3 a partir de un razonamiento que supera la validación empírica y transita hacia la deducción lógica. Sin embargo, sigue estando en nivel 2 porque no comprende del todo la demostración pues no es consciente de cómo las propiedades que utilizó garantizan que la recta sea la bisectriz al mencionar en [L10] o [L12] que no recuerda la propiedad, sino que replica la construcción euclidiana que conoce. En este tipo de construcciones heredadas de la geometría euclidiana, resulta fundamental identificar si el estudiante realmente comprende la construcción o si solo la replica de memoria, para evitar suponer que está en un nivel superior del que realmente está. En términos de Jaime y Gutiérrez (1990, p. 15), “un estudiante puede aparentar un nivel de razonamiento determinado, superior al que realmente posee, porque ha aprendido a realizar rutinariamente procedimientos propios del nivel superior, aunque realmente no los comprende”.

Una vez construidas las bisectrices, a los estudiantes se les pidió a los estudiantes construir el círculo inscrito. El siguiente es un ejemplo de la construcción de una pareja de estudiantes:

**[L1] Estudiante**: Bueno, nuestra pregunta es, al hacer el círculo inscrito, nosotros nos centramos en, hicimos un punto de intersección en la mediatriz de cada uno, en la bisectriz, perdón, de cada uno de los... [ángulos]

**[L2] Investigador**: Y ese punto de intersección es el incentro.

**[L3] Estudiante**: Sí, entonces nuestra pregunta es, cuando nosotras movemos esto, el círculo como que se sale un poquito, entonces no sé si...



El círculo inscrito de un triángulo es aquel que es tangente a sus tres lados. La estudiante comprende que el círculo debe ubicarse dentro del triángulo, pero duda cuando observa que una pequeña porción del círculo parece sobresalir ligeramente de la figura.

**[L4] Investigador**: ¿Y cómo encontraste el punto N [Punto de tangencia del círculo con uno de los lados]?

**[L5] Estudiante**: Pues esta es la bisectriz del vértice. Entonces... no sé.

**[L6] Investigador**: Listo, perfecto, no hay problema, ahora te voy a hacer una pregunta. Sabemos que M es el centro del círculo, que es la intersección de las bisectrices, es el incentro.

**[L7] Estudiante**: Sí.

**[L8] Investigador**: Ahora, cuando hablamos de círculo inscrito, ¿qué relación debe haber entre este lado [AB] y este círculo?

**[L9] Investigador**: O sea, ¿cómo es este lado [AB] a este círculo en este punto? ¿Cómo deben ser?

**[L10] Estudiante**: Pues, no sé.

**[L11] Investigador**: O sea, el problema es que, si tú lo mueves, se sale. Sí. Pero, tú lo quieres así. [El profesor mueve el vértice B de modo que el círculo parezca tangente al lado AB]. ¿Por qué lo quieres así?

**[L12] Estudiante**: Para que esté en el centro, para...Para que no se salga.

**[L13] Investigador**: Pero, ¿qué significa que no se salga?

**[L14] Estudiante**: pues que se quede Inscrito.

**[L15] Investigador**: ¿y cómo debe ser ese lado respecto al círculo?

**[L16] Estudiante**: Ah... Obvio, recto.

**[L17] Investigador**: Bueno, ¿en cuántos puntos está tocando el lado al círculo?

**[L18] Estudiante**: En dos.

**[L19] Investigador**: ¿En dos?

**[L20] Estudiante**: En el caso ideal: En uno.

**[L21] Investigador**: En el caso ideal, ¿en cuántos?

**[L22] Estudiante**: En uno.

**[L23] Investigador**: Entonces, ¿qué significa que cómo debe ser ese lado respecto al círculo? Si solo lo toca en uno. Cuando una recta toca en un solo punto a otro objeto, ¿esa recta cómo se llama?

**[L24] Estudiante**: perpendicular

**[L25] Investigador**: Cuando una recta toca a un objeto en un solo punto, ¿esa recta como se llama?

**[L26] Investigador**: Se llama tangente. Entonces, lo que queremos es que ese círculo sea tangente a esa curva.

En las líneas [L4] a [L26] se evidencia que la estudiante no está familiarizada con la noción de tangencia ni con las propiedades asociadas a ella, por lo que no logra verbalizar adecuadamente esta relación. Al desconocer el significado de ser tangentes, ubicó el punto de intersección de la bisectriz con el triángulo, probablemente porque le pareció el lugar más natural por el que debía pasar el círculo, sin tener en cuenta las propiedades geométricas de la tangente, como su perpendicularidad con el radio en el punto de tangencia.

La estudiante muestra una transición del nivel 1 al nivel 2, ya que, aunque empleó propiedades geométricas para construir el círculo inscrito, verificó la invalidez de su construcción mediante la visualización, y no a partir de las propiedades utilizadas.

**[L27] Investigador**: Ahora, ¿qué propiedades sabemos de la tangente? ¿Cómo es el radio del círculo respecto a la tangente? Por ejemplo, en ese caso que está como queremos, ¿qué relación encuentras entre el radio y esta tangente?

**[L28] Estudiantes**: que se tocan en un punto

**[L29] Investigador**: Bueno, ya sabemos que le tocan un punto, pero visualmente, ¿cómo ves tú esas dos líneas?

**[L30] Estudiante**: Pues que son perpendiculares.

**[L31] Investigador**: Que son perpendiculares. Pero, ¿será que esa línea que tú tienes ahí, esta línea, es la perpendicular que queremos?

**[L32] Estudiante**: No,

**[L33] Investigador**: no, y por eso no se garantiza la construcción. Ahora, traza la perpendicular y mira a ver si coincide con este punto N o no.

**[L34] Investigador**: Mira el punto. ¿coinciden o no?

**[L35] Estudiantes**: no

**[L36] Investigador**: ¿Sí ves el punto donde es perpendicular?

**[L37] Estudiante**: Casi. Ahí, casi.

**[L38] Investigador**: Ese es el punto. Y por eso no, ahora háganlo con ese.

Finalmente, bajo la orientación del investigador, la estudiante reconoció que no estaba construyendo adecuadamente el punto N porque no estaba garantizando la tangencia.

Frente a las bisectrices, los estudiantes concluyeron que siempre concurren, como expresa el siguiente estudiante:

**7.2.2** ¿Las bisectrices hiperbólicas de los ángulos del triángulo son concurrentes? Si concurren, ¿dónde se ubica este punto?

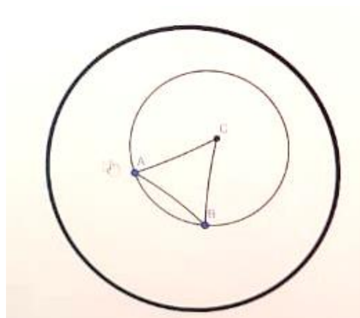
**Respuesta**

Si concurren, este punto se ubica visualmente en donde se intersecan las tres bisectrices dentro del triangulo.

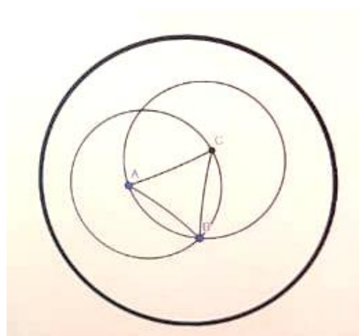
Ahora bien, cuando se les pidió la construcción de la mediatriz, en general, los estudiantes replicaron la construcción que realizan en geometría euclidiana indistintamente del tipo de triángulo, como, por ejemplo, el siguiente estudiante:

**[L1] Investigador**: explícanos cómo encontró la Mediatriz

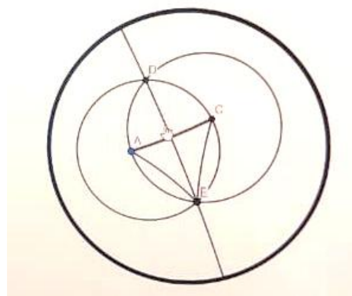
**[L2] Estudiante**: Bueno, para encontrar la Mediatriz, primero hice un círculo que va desde vértices... que tiene centro en el vértice C y radio en A.




**[L3] Estudiante**: Luego hice otro círculo con centro en A y radio en C.

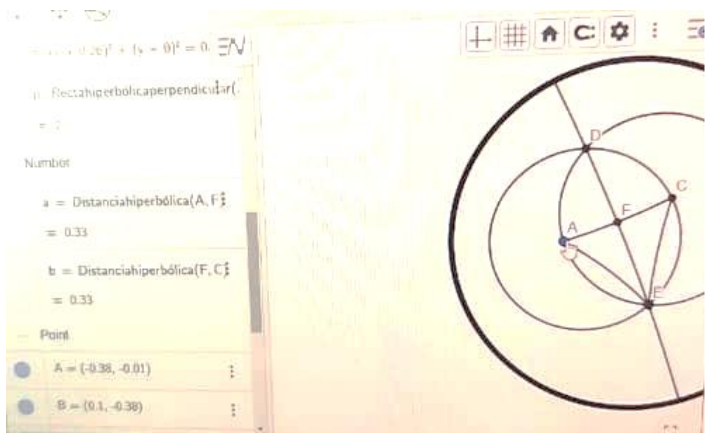



**[L4] Estudiante**: Luego, marqué la intersección entre estos dos círculos para trazar una recta hiperbólica perpendicular a este segmento [AC] que pase por este punto [B] y aquí ya tengo el punto medio.

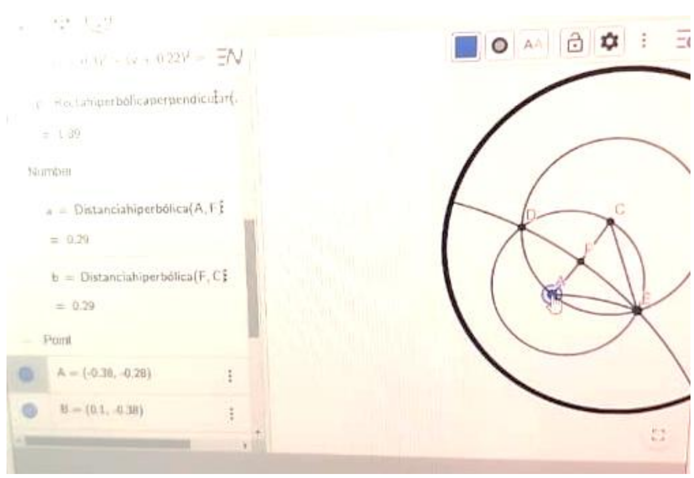


**[L5] Investigador**: ¿Y cómo sabes tú que ese es el punto medio?

**[L6] Estudiante**: Tendría que verificar... Verificar que la medida de aquí a acá [AF] es la misma que de acá a acá [FC] ¿Se puede ver la distancia?




**[L7] Estudiante**: sí es la misma distancia y arrastramos por si hay coincidencias o algo así. Y no, sigue la misma distancia.



De [L1] a [L4] el estudiante replicó la construcción de las mediatrices en la geometría euclidiana. En [L6] a [L7] el estudiante justificó su construcción a partir de la verificación de la congruencia de las distancias del punto medio del segmento AC a los extremos. . Ambos comportamientos son característicos del nivel 2 pues el estudiante construye a partir de propiedades que conoce y/o ha memorizado, pero no garantiza su validez a partir de dichas propiedades sino mediante la medición.

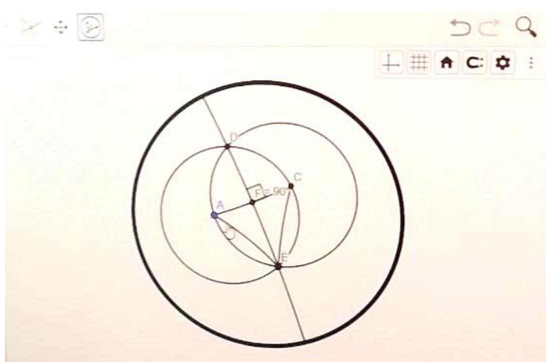
**[L8] Investigador**: Y ahora sin utilizar la variación numérica, ¿se te ocurre alguna propiedad con la que pudiéramos justificar si ese punto es el punto medio?

**[L9] Estudiante:** No, la verdad no sé.

**[L10] Profesor**: Vamos a eliminar, Eric, la recta perpendicular. Ahora, traza la recta que une los dos puntos de intersección. Esa recta, ¿qué ángulo forma con el lado AC?

**[L11] Estudiante**: Con el lado AC, creo que 90 grados.

**[L12] Investigador**: si quieres, mídelo.




**[L13] Estudiante**: 90°

**[L14] Investigador**: Bueno, forma un ángulo de 90 grados. Entonces es perpendicular.

**[L15] Estudiante**: Sí.

**[L16] Investigador**: O sea que, bueno, no había necesidad de trazar la que fuera perpendicular.

**[L17] Estudiante**: Sí.

**[L18] Investigador**: Ahora, ¿por qué?

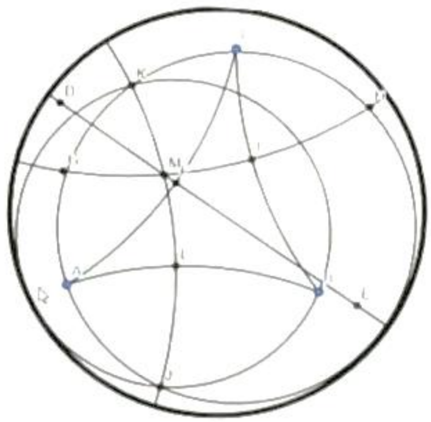
**[L19] Estudiante**: No, no sé cómo explicarlo.

En [L4], el estudiante trazó una recta perpendicular sin reconocer que, debido a la forma en que realizó la construcción, dicha condición de la definición de mediatriz ya estaba garantizada. Este comportamiento es característico del nivel 2 de razonamiento, en el cual, según Fuys et al. (1988, p. 63), el estudiante "no explica cómo ciertas propiedades de una figura están interrelacionadas".

En [L10], el investigador le sugiere eliminar la recta perpendicular y trazar una nueva que conecte los dos puntos de intersección de la circunferencia. A partir de esta indicación y mediante la medición de los ángulos, el estudiante concluyó que la recta era perpendicular.

En general, los estudiantes utilizaron el mismo método del estudiante anterior para construir las mediatrices, indistintamente del tipo de triángulo.

En los diferentes tipos de triángulos, los estudiantes exploraron la concurrencia de las mediatrices, observando que, en algunos casos, estas concurren dentro del triángulo, en otros fuera de él, y en ciertos casos no concurren, aunque sin ser capaces de establecer criterios claros que expliquen dichas diferencias. A continuación, se presenta la respuesta de un estudiante que construyó un triángulo escaleno y trazó sus mediatrices:



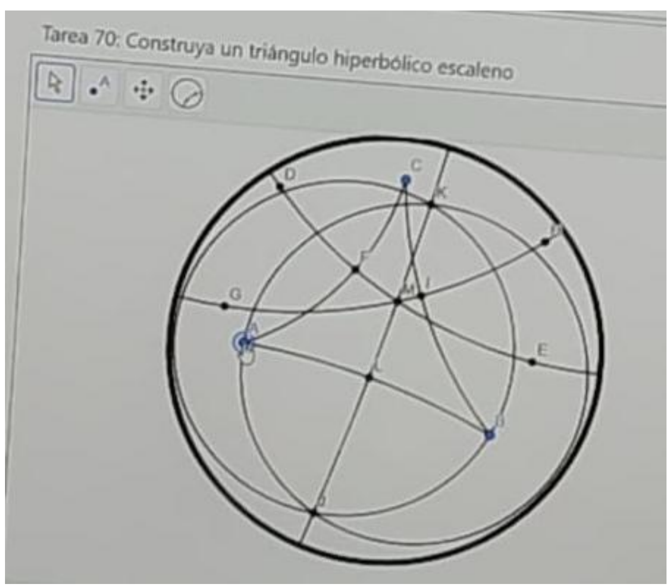
**[L1] Estudiante:** ahí tenemos la concurrencia

**[L2] Investigador:** exacto. Marca la concurrencia [Punto M] Bueno, mire que por ejemplo ahí ya pasó algo, ¿no? ¿El punto dónde quedó?

**[L3] Estudiante:** Afuera

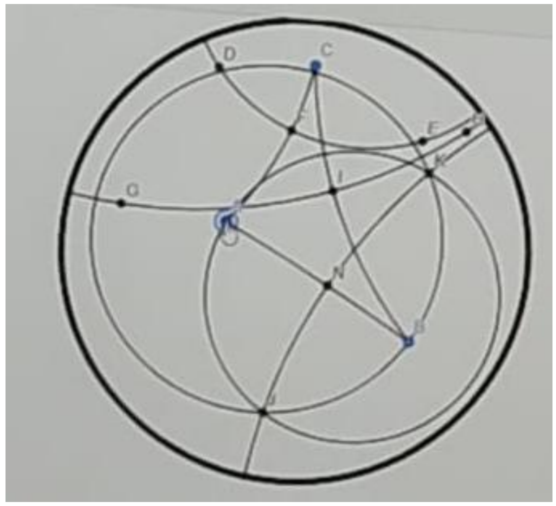
**[L4] Investigador:** ¿Y por qué? Mueve los vértices.

**[L5] Estudiante**: Ahí queda adentro.




**[L6] Investigador:** ¿Y será que siempre concurre?

Los estudiantes mueven los vértices.



**[L10] Investigador**: Y ahí divergen, no concurren

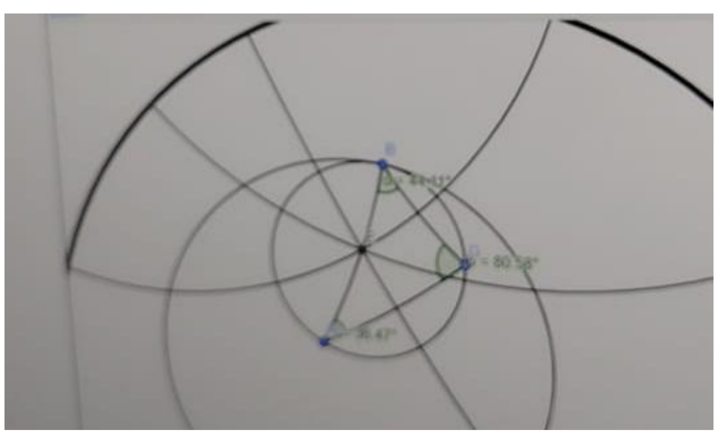
**[L11] Estudiantes**:  Igual que el caso anterior

En el siguiente caso, un estudiante construyó un triángulo acutángulo y encontró que el punto de concurrencia siempre estaba sobre uno de los lados.

**[L1] Estudiante:** usted me dice que trazar las mediatrices con ayuda de la herramienta esta vez, ¿no?

**[L2] Investigador**: Sí.

**[L3] Estudiante**: Ahora, esta es la mediatriz de AB, la mediatriz de B a G y de G a A.  Entonces, ¿qué podemos ver? Que si se cumple que siempre sea acutángulo, sin importar que yo lo mueva, las mediatrices concurren siempre en un mismo lado. Bueno, en un mismo lado.



**[L4] Investigador**: Acerca un vértice bien al borde.

**[L5] Estudiante**: ¿Al borde? Siguen concurriendo en un lado.

**[L6] Investigador**: ¿Y sabes por qué puede ocurrir eso?

**[L7] Estudiante**: la verdad no. Pero fue como por curiosidad.

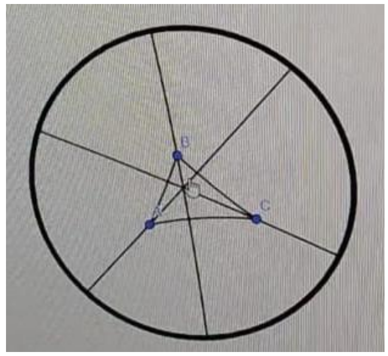
El estudiante construyó un triángulo en el que las mediatrices presentan precisamente esa particularidad y la asumió como una característica general. Sin embargo, esto no constituye un criterio válido de concurrencia de líneas notables en los triángulos hiperbólicos, ya que no recurre a ningún elemento adicional de justificación o convicción.

Así, los estudiantes probaron con distintos triángulos y llegaron a conclusiones, como la siguiente:

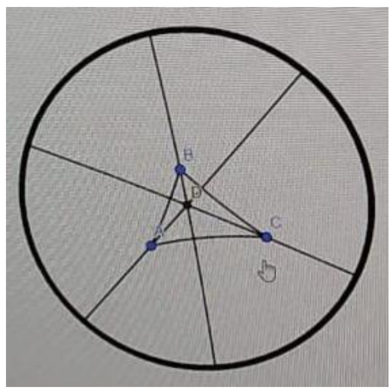
> **7.4.5** ¿Concurren las mediatrices hiperbólicas cuando el triángulo es isósceles? Si es así, dónde se ubica el punto. Justifique su respuesta.
>
> **Respuesta**
>
> A veces concurren otras veces no y el punto se ubica dentro y fuera del triángulo. Cuando los vértices están cerca al disco no hay intersección.

En general, los estudiantes no pudieron encontrar criterios de concurrencia para la mediatriz, como indica el descriptor. La misma conclusión se tiene para la altura, los estudiantes fueron capaces de construir las alturas del triángulo hiperbólico, pero no lograron establecer criterios de congruencia como lo muestra el siguiente estudiante:

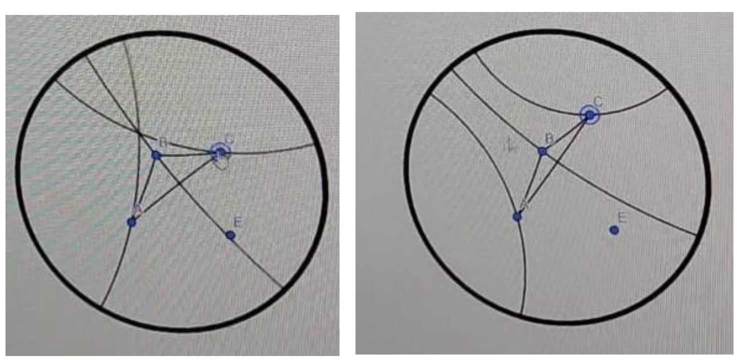
**[L1] Estudiante:** Bueno, pues, tenemos el triángulo, ¿no? Y como tenemos la definición de la altura hiperbólica, que es la perpendicular, desde un vértice al lado opuesto, entonces lo que hacemos es buscarle aquí la herramienta de recta perpendicular. La trazamos desde el lado opuesto, y como es al vértice opuesto, entonces acá, y así con cada uno de los lados




**[L2] Estudiante:** Y aquí sería el punto que es el ortocentro




**[L3] Estudiante:** Sabemos que estas concurren tanto dentro como fuera y también, pues, existen puntos donde no concurren




**[L4] Investigador**: Listo, y puedes establecer condiciones de concurrencia ¿Cuándo si van a concurrir? ¿Cuándo no? ¿Cuándo dentro? ¿Cuándo fuera?

**[L5] Estudiante:** Pues, podemos mirar los ángulos.

Las construcciones realizadas por los estudiantes, a partir de su conocimiento previo de la geometría junto con la exploración paras validar o descartar criterios de concurrencia representan comportamientos característicos del nivel 2.

| |
|---|
| **Descriptor 17:** Reconoce, a partir de la experimentación, qué propiedades de los triángulos euclidianos se mantienen y cuáles se modifican en el contexto de la geometría hiperbólica. |

A lo largo del análisis de los descriptores, se evidencia cómo los estudiantes contrastaron todo el tiempo las propiedades de los triángulos hiperbólicos que descubren en el software con las propiedades que conocen de los triángulos euclidianos. Así, por ejemplo:

- Como se argumentó en el descriptor 10, los estudiantes reconocieron que la suma de los ángulos internos del triángulo cambia en la geometría hiperbólica respecto a la euclidiana.
- En el análisis del descriptor 11 se estableció que los estudiantes reconocieron que, en esta geometría, se mantiene la misma clasificación euclidiana de los triángulos.
- En el descriptor 12 se evidenció que los estudiantes reconocieron que algunas propiedades de los tipos de triángulos se mantienen y otras se modifican. Por ejemplo, reconocieron que los triángulos hiperbólicos equiláteros son equiángulos

(al igual que los euclidianos) pero que dichos ángulos miden menos de 60° (diferente a los euclidianos).

- De acuerdo al descriptor 12, los estudiantes establecieron la desigualdad triangular hiperbólica equivalentemente a la desigualdad euclidiana.
- En el descriptor 14, se muestra que los estudiantes reconocieron que la semejanza cambia del contexto euclidiano al hiperbólico, mientras que, como sea argumentó en el descriptor 15, los criterios de congruencia de triángulos son válidos en ambas geometrías.
- En el descriptor 21 se evidencia que los estudiantes reconocieron que el teorema de Pitágoras euclidiano no se cumple en la geometría hiperbólica.

Así, a partir de la experimentación (exploración en el software, validación numérica, observación, entre otras), los estudiantes reconocieron que algunas propiedades de la geometría euclidiana se mantienen y otras no.

Considere el siguiente ejemplo de un estudiante que está explorando la desigualdad triangular hiperbólica:

**[L1] Investigador**: Vamos a escuchar a su compañero.

**[L2] Estudiante 1**: si nos ponemos a arrastrar los puntos observamos que en esta geometría como en la euclidiana se cumple que la suma de dos de sus lados siempre va a ser mayor a la del lado restante esto a pesar de que cuando nos acercamos al borde los lados parecen ser más cortos, pero igual se cumple.

En [L2] se observa que, desde el inicio de su justificación, el estudiante contrasta lo que ocurre en la geometría hiperbólica con lo que ocurre en la geometría euclidiana. El estudiante exhibe dos comportamientos propios del nivel 2:

- Por un lado, recurrió al arrastre para la verificación de la propiedad.
- Por otro lado, no se limita a lo que observa (los lados parecen más cortos) sino que ya se convence con la validación numérica.

El uso de GeoGebra facilitó que los estudiantes descubrieran estas propiedades y establecieran relaciones entre sus presaberes y su nuevo conocimiento, favoreciendo una transición adecuada del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento ya que las redes mentales de los estudiantes se van robusteciendo al establecer más conexiones entre los objetos, a partir de las propiedades descubiertas, como seña Jaime y Gutiérrez (1990).

**Descriptor 18:** utiliza un vocabulario adecuado para describir los objetos hiperbólicos.

**Descriptor 19:** Relaciona las definiciones que se le plantean en el contexto hiperbólico con sus equivalentes euclidianos para definir objetos hiperbólicos.

En los niveles 1 y 2 no se introdujeron conceptos de la geometría hiperbólica que fueran completamente nuevos para los estudiantes o que no guardaran relación con algún objeto o propiedad de la geometría euclidiana. En este sentido, los estudiantes transfirieron sin dificultad las definiciones euclidianas al contexto hiperbólico, utilizándolas para definir y construir los objetos equivalentes en esta nueva geometría, como se esperaba de acuerdo al descriptor 19.

Así, por ejemplo, trasladaron las definiciones de triángulo equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, rectángulo y obtusángulo, aplicándolas de manera implícita para reconocer y construir sus equivalente hiperbólicos, tal como se evidencia en los descriptores 11 y 12. De manera similar, ocurrió con las líneas y puntos notables del triángulo: los estudiantes transfirieron las definiciones conocidas en el contexto euclidiano para definir y construir las correspondientes líneas notables en el modelo hiperbólico, como se observó en el descriptor 17.

El uso del software GeoGebra facilitó este proceso, pues les permitió verificar experimentalmente la validez de las definiciones en ambos contextos y, en consecuencia, establecer la relación conceptual que plantea el descriptor.

Respecto al descriptor 18, los estudiantes refinaron su vocabulario geométrico en comparación con el nivel 1. Mientras que en el nivel anterior describían las figuras principalmente a partir de características perceptivas o físicas, en este nivel comenzaron a emplear términos geométricos formales para definir o caracterizar los triángulos y sus propiedades. Sin embargo, se observó que algunos aún no diferenciaban claramente cuándo se referían a un objeto euclidiano y cuándo a uno hiperbólico, lo que evidencia aún no logran un lenguaje plenamente contextualizado en la geometría hiperbólica.

**Descriptor 20:** Utiliza argumentos empíricos (basados en la percepción visual, la experimentación, el uso de ejemplos o en cálculos numéricos) para justificar la validez o invalidez de algunas propiedades euclidianas en el contexto de los triángulos hiperbólicos.

Este descriptor, es un complemento del descriptor 17. En ese descriptor, se establece que los estudiantes reconocieron diferencias en la validez de propiedades en ambas geometrías a partir de la experimentación. En este descriptor, además de que los estudiantes las reconocen, se establece que las justifican a partir de la experimentación.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente caso en el que los estudiantes, en la fase de explicitación, comparten sus resultados sobre la concurrencia de las bisectrices.

**[L1] Investigador**: lee la tarea 57, ¿puedes leerla por favor?

**[L2] Estudiante 2**: ¿La concurrencia de las bisectrices hiperbólicas depende del tipo de triángulo? Justifique su respuesta.

**[L3] Estudiante 2:** pues ahí puedo construir otro tipo de triángulo.

**[L4] Investigador**: yo creo que tú ahí puedes moverlo. ¿Qué opinan? ¿Qué opinan de la tarea 57? ¿La concurrencia de las bisectrices hiperbólicas depende del tipo de triángulo?

**[L5] Estudiantes**: No.

**[L6] Investigador**: ¿No? O sea, ¿indistintamente del triángulo, no importa si es equilátero, isósceles, si tiene ángulos rectos o agudos, siempre van a concurrir?

**[L7] Estudiantes**: si

**[L8] Investigador**: ¿sí? Y ese punto siempre va a estar dentro del triángulo,

**[L9] Estudiantes:** Si

**[L10] Investigador:** ¿sí? ¿Y cómo lo saben?

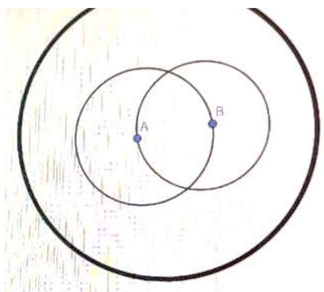
**[L11] Estudiantes:** Comprobándolo en el software.

**[L12] Investigador:** Listo, verificando con el software, ustedes hicieron la construcción.

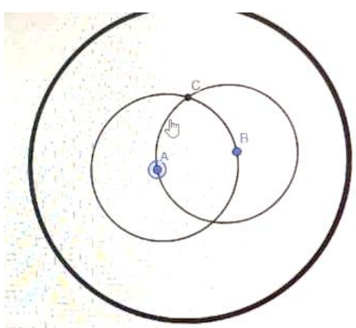
En [L11] se observa que el mecanismo de convicción de los estudiantes es la comprobación en el software. En el siguiente caso, por ejemplo, en [L5] se observa que la estudiante valida la propiedad a partir de la experimentación en el software.

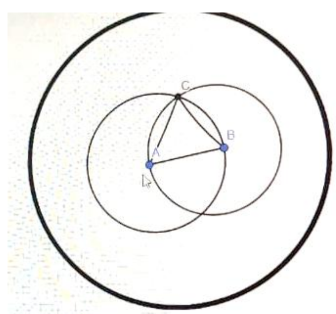
**[L1] Investigador**: explícanos lo que estás haciendo en la pantalla.

**[L2] Estudiante**: voy a construir un triángulo equilátero.




**[L3] Estudiante**: Aquí, en la intersección de los dos círculos, se pone un punto y ahí quedaría un triángulo equilátero.




**[L4] Investigador**: ¿Y qué te garantiza que ese triángulo que tienes ahí es equilátero?

**[L5] Estudiante**: Pues tiene todos los lados igual, ¿no? Y nunca se... Uno lo mueve y no se deforma. Mantiene sus medidas.

En general, los estudiantes verificaron las propiedades que encontraron, a partir de la experimentación, comprobando el descriptor y complementando el descriptor 17.

**Descriptor 21:** Justifica, mediante comprobaciones numéricas, que el teorema de Pitágoras (en el sentido euclidiano de relacionar los catetos con la hipotenusa) no se cumple en los triángulos hiperbólicos.

Al explorar en el applet las medidas del triángulo rectángulo propuesto mediante el arrastre de los vértices y comparar la suma de los cuadrados de los catetos con el cuadrado de la hipotenusa, los estudiantes concluyeron que no se tiene la igualdad entre estos dos valores y, por tanto, no se cumple el teorema de Pitágoras en la geometría hiperbólica.  En esta actividad, que fue la última antes de avanzar al nivel 3 se presentan argumentos que evidencian una transición del nivel 2 al nivel 3.

Por ejemplo, el siguiente estudiante comenzó a superar la validación empírica e intentó justificar la invalidez del teorema de Pitágoras a partir de las diferencias que ha encontrado entre la geometría euclidiana y la geometría hiperbólica.

9.8.2 **¿Se cumple el teorema de** Pitágoras en el sentido eclidiana?

**Respuesta**

No se cumple por el comportamiento diferente de las líneas y los ángulos, las distancias se miden de manera diferentes en la geometría hiperbólica, además la suma de los ángulos siempre mide menos de 180°

En la siguiente estudiante se ve aún más clara la transición del nivel 2 al nivel 3:

> 9.8.2 **¿Se cumple el teorema de** Pitágoras en el sentido eclidiana?
>
> **Respuesta**
>
> Ño, pues al momento de calcular los cuadrados de cada lado, nos damos cuenta de que, realmente no podemos construir un cuadrado, es decir, la medida del segmento al cuadrado, no sería realmente la medida del área de la figura construida, pues al tener 2 ángulos diferentes de 90° la altura del cuadrado será diferente a la medida del lado.

Esta estudiante hace referencia a la interpretación del teorema de Pitágoras como la relación que existe de las áreas de los cuadrados que se pueden construir con los lados del triángulo rectángulo. La estudiante ha concluido que:

- No es posible construir dichos cuadrados (porque la suma de los ángulos de un cuadrilátero es menor que 360° pues dos ángulos son diferentes de 90°)
- Como no es posible construir esos cuadrados entonces el cuadrado de la longitud del lado no se puede interpretar como el área del cuadrado formado a partir de dicho lado.
- Argumenta la afirmación anterior de que el área no es igual porque el área del cuadrado es base por altura y en este caso, serían diferentes el valor de la base (que sería el lado del triángulo) y el valor de la altura, que sería otro de los lados del "cuadrado".

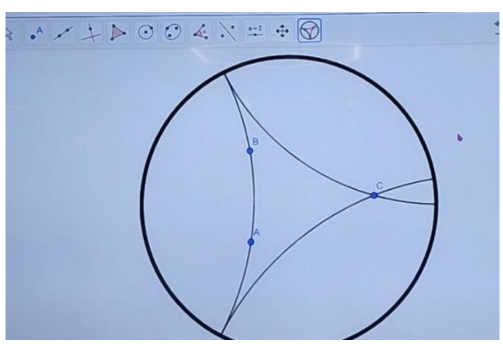
Este razonamiento muestra un tránsito importante del nivel 2 al nivel 3. Ya no utiliza únicamente la validación numérica para justificar que no se cumple el teorema de Pitágoras, sino que recurre a propiedades y a un intento de deducción lógica a partir de ellas.

## 4.3 Análisis de resultados nivel 3

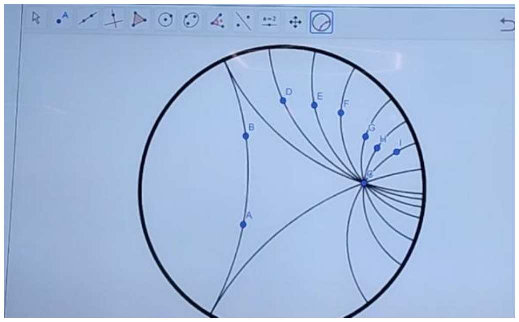
| |
|---|
| **Descriptor 22:** Comprende las definiciones de objetos de la geometría hiperbólica, tales como puntos ideales, rectas ultraparalelas o asintóticamente paralelas y las utiliza para realizar construcciones, demostraciones, establecer nuevas propiedades o definiciones. |

En el nivel 2 se estableció que los estudiantes son capaces de transferir las definiciones de los objetos geométricos del contexto euclidiano al contexto hiperbólico. En este nivel, los estudiantes comprendieron las definiciones de objetos geométricos nuevos como las rectas ultraparalelas y asintóticamente paralelas, como, por ejemplo, el siguiente estudiante:

**[L1] Estudiante:** utilizamos la herramienta de recta paralela, seleccionamos el punto y luego la recta y ahí ya tenemos lo primero que se pedía, la recta asintótica.



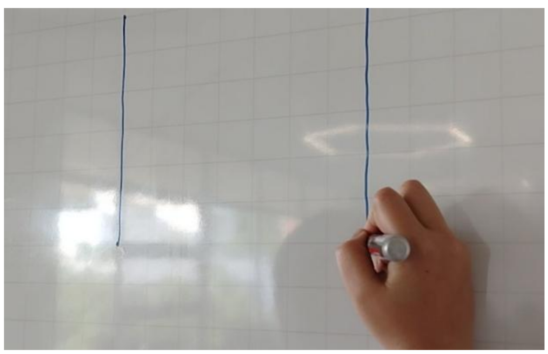

**[L2] Estudiante:** Y para construir las rectas ultraparalelas ponemos un punto y luego cualquier otro punto después de la recta asintótica.



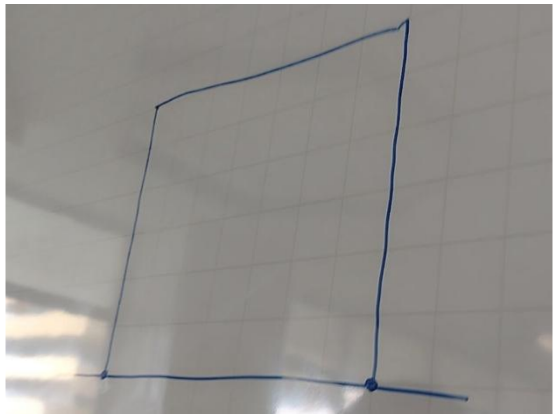
A partir de la construcción, se observa que los estudiantes comprendieron la definición de este nuevo tipo de rectas.

Otro ejemplo, es el del cuadrilátero de Saccheri, que si bien, se define en general para cualquier geometría, en cada una de estas cumple propiedades diferentes. Inicialmente, los estudiantes construyeron un cuadrilátero que cumpliera la definición desde la geometría euclidiana. Aquí, tenemos, por ejemplo, la construcción de una estudiante:

**[L1] Estudiante:** Un lado, Otro lado.



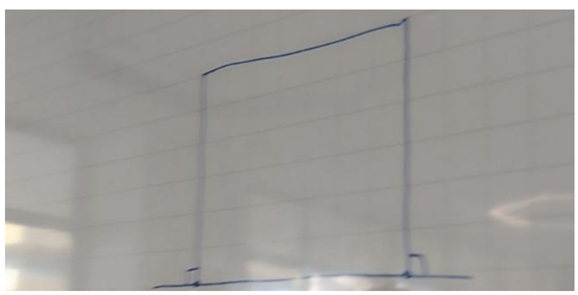
**[L2] Estudiante:** Y luego dice que tiene que pasar una perpendicular, una perpendicular común. Y ya al otro lado.



**[L3] Investigador:** Como es una perpendicular común, entonces, ¿qué relación hay entre este lado y este lado?

**[L4] Estudiante:** Son paralelos.

**[L5] Investigador:** son paralelos. Señala, por favor, eso.

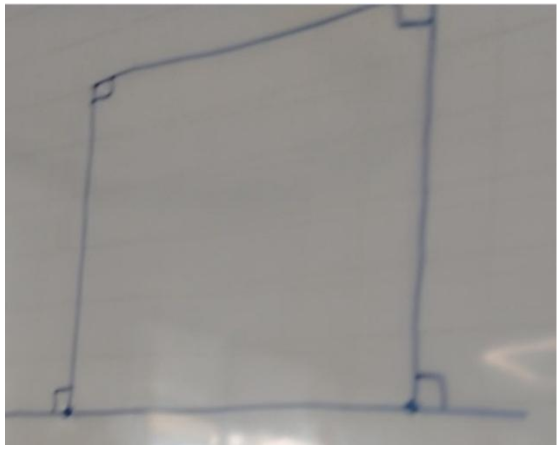


**[L6] Investigador:** Listo. ¿Y esta línea, guarda alguna relación con esta línea acá?

**[L7] Estudiante:** Sí, son paralelas.

**[L8] Investigador:** Son paralelas también. Entonces, ¿cómo tienen que ser estos ángulos?

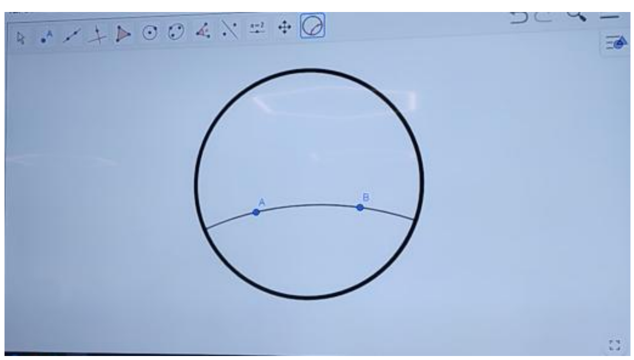
**[L9] Estudiante:** También deben ser de 90°.



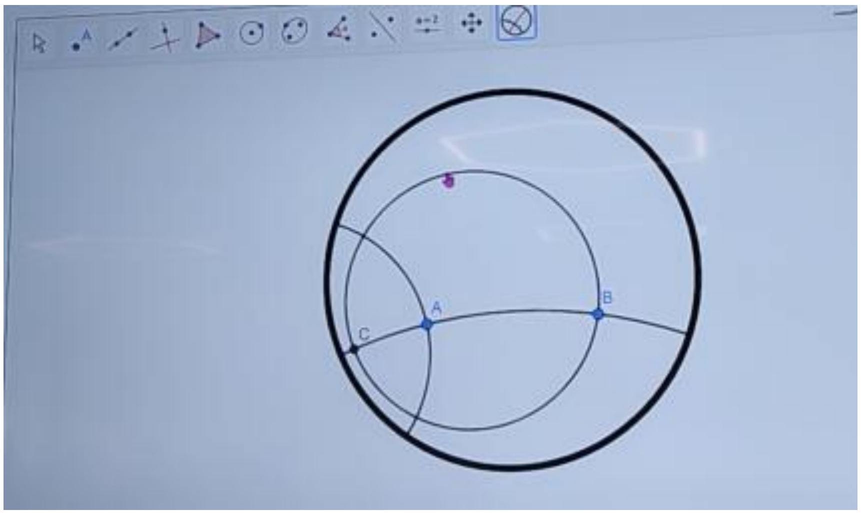
A partir de esta actividad, los estudiantes concluyeron que el cuadrilátero de Saccheri en la geometría euclidiana implica un rectángulo. En la geometría hiperbólica se presenta un cambio fundamental: los ángulos de la cumbre no son rectos, son agudos. Esta propiedad permitió a los estudiantes realizar algunas demostraciones.

En general, los estudiantes construyeron el cuadrilátero de Saccheri utilizando diferentes estrategias. A continuación, se presenta una de ellas:

**[L1] Estudiante:** vamos haciendo la base que pues es una recta [AB]

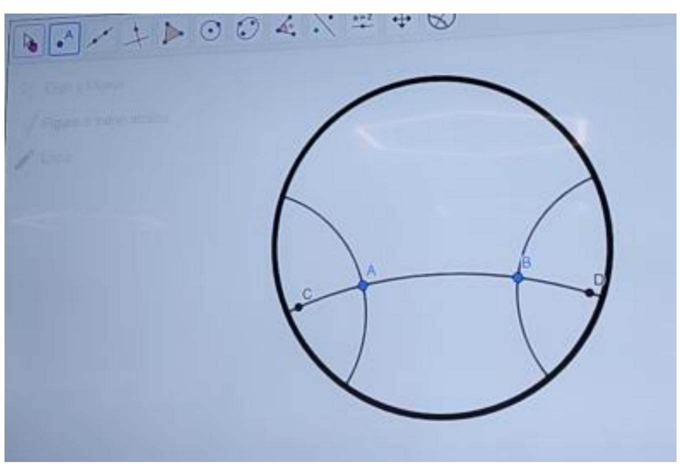



**[L2] Estudiante:** Para garantizar la perpendicularidad de los lados opuestos, nosotros utilizamos la mediatriz hiperbólica porque eee… corta en el punto medio, perpendicular. Entonces, para hacer que uno de esos puntos sea punto medio [A] utilizamos la herramienta circunferencia dado su centro un círculo con centro un uno de los vértices [A] que pase por el otro [B] y este punto de acá [C: intersección de la circunferencia con la recta AB] es el que me va a servir para hacer la mediatriz hiperbólica [Traza la mediatriz del segmento BC]



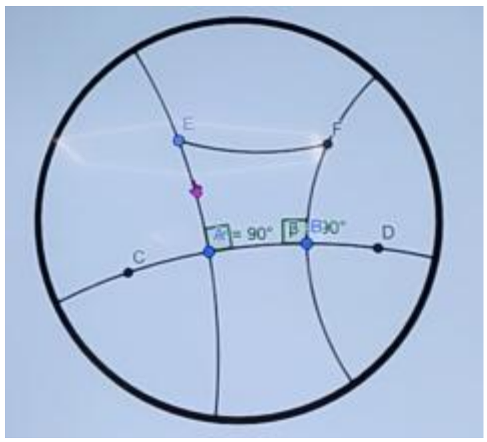

**[L3] Investigador:** Esta es una idea muy interesante, ¿no?  Pero no es la única idea. Hay muchas otras formas de construirlo.  Me refiero a que para que no vayan a replicar ese, todos queden con la mediatriz. Pero está muy buena esta idea, Jonathan.

[Ahora realiza el mismo procedimiento creando el punto D y haciendo que la mediatriz pase por B]



**[L4] Estudiante**: entonces acá tenemos las dos rectas que son perpendiculares a la base. Entonces, sólo nos queda cumplir la otra definición del cuadrilátero, que los dos lados opuestos deben medir lo mismo. Entonces, construimos un punto arbitrario y utilizamos la herramienta de circunferencia dado su centro y su radio. Aquí donde corta garantiza que esta distancia [AE] va a ser igual a esta [BF]

Luego de esto, el estudiante trazó el segmento [EF] y comprobó los ángulos de la base



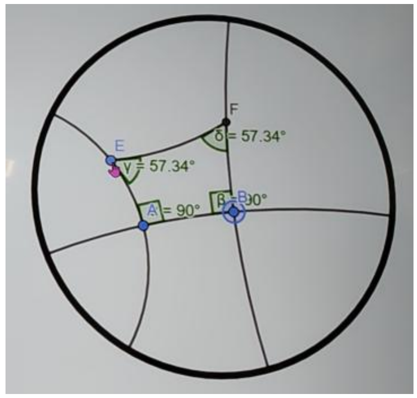

**[L5] Investigador:** En la geometría euclidiana, ¿cómo son los ángulos de la cumbre?

**[L6] Estudiante:** son rectos

**[L7] Investigador:** Son ángulos rectos todos. Aquí, en la geometría hiperbólica, ¿qué pasa?

**[L8] Estudiante:** No van a ser perpendiculares

**[L9]** Investigador: no van a ser perpendiculares, pero...




**[L10] Estudiantes:** pero los dos ángulos adyacentes a la cumbre van a ser iguales.

A lo largo de toda la construcción se observa cómo el estudiante moviliza distintas propiedades y herramientas y las relaciona para garantizar las condiciones del cuadrilátero de Saccheri. Este es un comportamiento propio del nivel 3 ya que según Crowley (1987, p. 3) "en este nivel, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones entre las propiedades tanto dentro de las figuras como entre diferentes figuras" y así utilizarlas para realizar, por ejemplo, construcciones.

**Observación**: por cuestiones de tiempo, no se alcanzaron a diseñar e implementar talleres orientados a promover los descriptores del 23 al 28.

| |
|---|
| **Descriptor 29:** Realiza demostraciones informales a partir de propiedades previamente establecidas; por ejemplo, utiliza las propiedades del cuadrilátero de Saccheri para justificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180° y a su vez, deduce que no existen cuadriláteros hiperbólicos rectángulos. |

Antes de abordar la demostración de la suma de los ángulos internos de los triángulos hiperbólicos, se les solicitó a los estudiantes demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo euclidiano es 180°. A continuación, se presenta la demostración que realiza un estudiante:

**[L1] Estudiante:** Primero construimos un triángulo cualquiera ABC y luego construimos una paralela, bueno primero una recta BC y luego le construimos una paralela que pase por el punto A.

**[L2] Investigador:** ¿Qué te garantiza a ti que puedes construir esa paralela BC, perdón, esa recta BC?

**[L3] Estudiante:** Porque por el postulado, ¿es el segundo?

**[L4] Investigador**: ¿El segundo postulado?

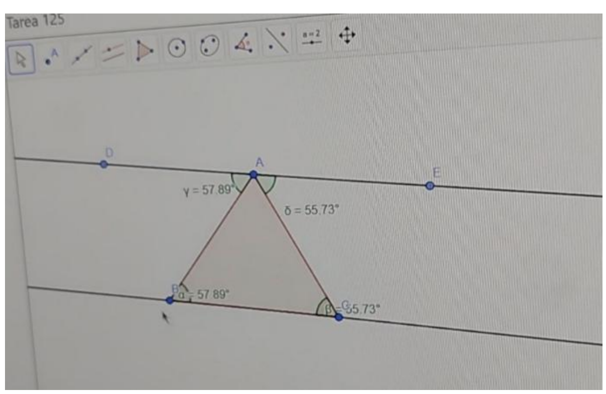
**[L5] Estudiante:** No me acuerdo como dice exactamente, pero pues unimos dos puntos con la recta.

**[L6] Investigador:** ¿Y qué te garantiza que puedes construir esa recta paralela?

**[L7] Estudiante:** Por el quinto postulado.

**[L8] Investigador:** Bueno, creo que hay un teorema, si quieres sube, el teorema 31. A través de un punto dado, trazar una línea recta paralela a una línea recta dada. Eso es lo que me garantiza que yo puedo construir esa paralela. Sigue.

**[L9] Estudiante:** Luego de eso pues ya se puede hacer la demostración. Yo aquí marqué los ángulos para hacer la demostración.



**[L10] Estudiante:** entonces tenemos que el ángulo DAB es igual al ángulo ABC por el teorema de las paralelas, los ángulos alternos internos tienen que ser iguales. Y lo mismo pasa con el ángulo EAC y el ángulo ACB, tienen que ser iguales por ángulos alternos internos. Entonces tenemos que este ángulo es igual a este $[\gamma = \beta]$ y este ángulo es igual a este $[\delta = \alpha]$, y la suma de esto $[\gamma + < BAC + \delta]$ tiene que ser 180 porque es una línea recta, entonces la suma de los ángulos internos $[\beta + < BAC + \alpha]$ también es 180.

El estudiante demostró que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° a partir del uso de propiedades relacionadas con las rectas paralelas y los ángulos alternos e internos. En la demostración se evidencia, por ejemplo, un nivel 3 de razonamiento en este contexto euclidiano ya que, en términos de Burger y Shaughnessy (1986, p. 10), este estudiante tiene la "habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales, usando implícitamente formas lógicas".

En este mismo sentido, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309) señalan que en el nivel 3 los estudiantes ya son capaces de "reconocer que unas propiedades se deducen de otras y descubrir esas implicaciones". Por ejemplo, el siguiente estudiante demostró que los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri con congruentes a partir de la propiedad 1 y de la definición de este cuadrilátero:

**Propiedad 1:** si los vértices de un cuadrilátero son consecutivamente $A, B, C, D$, con ángulos rectos en $A$ y $B$, entonces $DA$ es mayor que, igual a o menor que $CB$ si y solo si, respectivamente, $\angle CDA$ es menor que, igual a o mayor que $\angle DCB$.

**Propiedad 2** :Los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.

**10.3.2** Demuestre la propiedad 2.

**Respuesta**

Si consideramos un cuadrilátero de Saccheri de lados ABCD, donde AB es la base y la CD es la cumbre, entonces de este cuadrilátero, tenemos que AD = CB además, de la propiedad 1 tenemos que un cuadrilátero con ángulo recto en AB(también garantizado en el cuadrilátero de Saccheri) entonces en este caso DA = CB, lo que implica que el ángulo CDA = DCB, por lo tanto los ángulos de la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri son iguales.

De igual forma, a partir de la propiedad de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 180°, concluyeron que no existen cuadriláteros rectángulos. Por ejemplo:

**[L1] Estudiante**: Entonces, lo que nos surgió es tratar de demostrar esto por contradicción, o sea, suponer que sí existen los cuadriláteros rectángulos. Entonces, por definición, un cuadrilátero rectángulo es el que tiene la suma de todos los ángulos internos igual a 360.
**[L2] Estudiante**: listo, entonces, también sabemos por propiedades de los cuadriláteros rectángulos que, al trazar su diagonal, me convierte eso en dos triángulos congruentes rectángulos.
**[L3] Estudiante**: pero por definición, nosotros sabemos que los triángulos hiperbólicos nunca tienen la suma de los ángulos internos igual a 180. Y si sumamos los ángulos internos de ambos triángulos, pues nunca me va a dar 180 porque... 360, porque por definición de los triángulos hiperbólicos.
**[L4] Estudiante:** La cuestión es que debemos demostrar que esos dos triángulos son congruentes para poder hacer uso de la demostración.

En [L1], la estudiante declaró el método de demostración que utilizó: el de contradicción o reducción al absurdo y formuló la negación de la propiedad correspondiente. En [L2] utilizó una propiedad de los rectángulos y en [L3] llegó a la contradicción. Esta estudiante se encuentra en el nivel 3 de razonamiento ya que utiliza las propiedades de manera lógica para deducir otras. Además, evidencia un tránsito hacia el nivel 4, al reconocer la necesidad de demostrar todas las propiedades implicadas en su argumentación.

Esta misma estrategia fue utilizada por varios estudiantes, por ejemplo:

Tarea 132

**10.4.3** Demuestre que no existen cuadriláteros rectángulos.

**Respuesta**

si partimos un cuadrilatero en 2 triangulos y sabemos que la suma de los angulos internos de un triangulo es menor a 180 eso hace que la suma de los angulos internos de un cuadrilatero sea menor a 360, esto hace imposible tener un cuadrilatero con angulos rectangulos

Este estudiante, asume la contradicción en otro sentido, pero igual utiliza una deducción lógica informal para llegar a la misma conclusión:

## Tarea 132

**10.4.3** Demuestre que no existen cuadriláteros rectángulos.

**Respuesta**

Suponga que existe un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos, entonces los lados correspondientes de este cuadrilátero serán congruentes, y así los lados correspondientes deberán ser paralelos . Sin embargo en la geometría hiperbólica hay infinitas rectas paralelas que pasan por un punto, entonces el ángulo entre la recta y el segmento adyacente tendrá infinitas posibilidades al mismo tiempo, y luego no se garantiza que el ángulo sea recto.

En los siguientes ejemplos, los estudiantes utilizan las propiedades que conocen para justificar los pasos de una demostración. Este comportamiento va en línea con el descriptor y es propio del nivel 3 ya que en este nivel los estudiantes comprenden los pasos de una demostración. En particular, el siguiente ejemplo ilustra este comportamiento para validar que no se cumple el teorema de Pitágoras en los triángulos hiperbólicos rectángulos.

## Tarea 136

Asuma que el teorema de Pitágoras se cumple y justifique cada paso. Escriba la conclusión.

**Paso 1.** $AB^2 + AC^2 = BC^2$
**Paso 2.** $AE^2 + AD^2 = ED^2$
**Paso 3.** $AD = \frac{1}{2}AB$
**Paso 4.** $AE = \frac{1}{2}AC$
**Paso 5.** $DE^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2\right)$
**Paso 6.** $DE^2 = \frac{1}{4}BC^2$
**Paso 7.** $DE = \frac{1}{2}BC$
**Paso 8.** $DE = \frac{1}{2}FG$
**Paso 9.** $BC = FG$
**Paso 10.** Contradicción.

**Respuesta**

paso 1. Suposición de que se cumple teorema de Pitágoras
paso2. Suposición de que se cumple teorema de Pitágoras
paso3. Hipótesis D es punto medio de AC, entonces AC = 2AD, entonces por propiedades algebraicas AD = AC/2
paso4. Hipótesis E es punto medio de AB, entonces AB = 2AE, entonces por propiedades algebraicas AE = AB/2
paso5. Por propiedades algebraicas en paso 1, 2, 3 y 4
paso6. Por paso 1 y paso 5 (Propiedades algebraicas)
paso7. propiedades algebraicas
paso8. FALSO. si bien FG y CB se cortan por dos ángulos de 90 no se puede asumir que ambos segmentos sean congruentes, además el cuadrilátero formado es un cuadrilátero de sacheri, la base y la cumbre no son congruentes, pero aquí llagamos a que si lo son, luego esta es la contradicción

**Descriptor 30:** Utiliza la negación del quinto postulado o de sus formulaciones equivalentes para explicar o justificar por qué algunas propiedades de la geometría euclidiana no se cumplen en la geometría hiperbólica como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo-Ángulo.

Al comienzo del taller 10, se les pidió a los estudiantes establecer las dos negaciones del quinto postulado, en particular, se obtuvieron respuestas como la siguiente:

**10.1.1** Escriba las dos posibles negaciones del quinto postulado de Euclides e identifique cuál corresponde a la geometría euclidiana y cuál corresponde a la geometría hiperbólica.

**Respuesta**

por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas paralelas a la recta dada y por un punto exterior a la recta no se puede trazar ninguna paralela a la recta dada

Luego, los estudiantes utilizaron esta negación para justificar por qué ciertas propiedades no se cumplen en la geometría hiperbólica. En particular, comprendieron que todos los teoremas que se deriven del quinto postulado tampoco son válidos en este contexto, principalmente porque la paralela a una recta por un punto exterior dado ya no es única. En consecuencia, todos los resultados que dependan de la unicidad de las paralelas dejan de cumplirse.

Por ejemplo, al analizar la suma de los ángulos internos de un triángulo, los estudiantes concluyeron que, a partir de la demostración realizada en la geometría euclidiana, dicha propiedad no se mantiene en la geometría hiperbólica, pues no se cumple la propiedad de los ángulos alternos internos entre paralelas; en consecuencia, ya no es posible demostrar que la suma de los ángulos internos sea igual a 180°. Así lo argumenta el siguiente estudiante:

Tarea 126

**10.2.2** ¿Qué propiedad de la demostración anterior no se cumple en la geometría hiperbólica y que, por tanto, no garantiza que la suma de los ángulos internos sea 180°? ¿Por qué cree que es menor que 180° y no mayor que 180°?

**Respuesta**

el quinto postulado de elucides no se cumple en la geometría hiperbólica, por tanto existen infinitas rectas paralelas a una recta dada que pasan por un punto externo a dicha recta, dado esto no podemos asegurar la propiedad de ángulos alternos internos.

El estudiante utiliza un razonamiento propio del nivel 3 en donde interrelaciona propiedades para establecer otras nuevas.

| |
|---|
| **Descriptor 31:** Comprende las demostraciones que se le presentan sobre las propiedades del triángulo hiperbólico, aunque no es capaz de elaborarlas de manera deductiva por su propia cuenta. |

En este nivel, en general, los estudiantes fueron capaces de justificar los pasos de demostraciones de teoremas, a partir de los postulados, las definiciones y las propiedades previamente establecidas. Por ejemplo, el siguiente estudiante justifica adecuadamente cada una de las afirmaciones que se utilizan para demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico es menor que 180°:

**10.4.2** Escriba las justificaciones para cada una de las siguientes afirmaciones, que demuestran que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180°.
**Paso 1**: sea $ABC$ cualquier triángulo.
**Paso 2**: Sean $D$ y $E$ los puntos medios de los segmentos $AB$ y $AC$.
**Paso 3**: Sea $DE$ una recta hiperbólica.
**Paso 4**: Sean $BF$ y $CG$ perpendiculares a $DE$.
**Paso 5:** $GFBC$ es un cuadrilátero de Saccheri y $\angle FBC + \angle GCB = \angle A + \angle B + \angle C$.
**Paso 6**: $\angle FBC < 90^\circ$ y $\angle GCB < 90^\circ$.
**Paso 7**: $\angle FBC + \angle GCB < 180^\circ$
**Paso 8**: la suma de los ángulos internos del triángulo $ABC$ es menor que $180^\circ$

**Propiedad 7:** la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que $180^\circ$

**Respuesta**

paso 1: Construcción del triángulo ABC (dado)
paso 2: D y E puntos medios de los segmentos AB y AC respectivamente (teorema 10)
paso 3: Por dos puntos distintos pasa una única recta (primer postulado)
paso 4: A una línea recta dada, desde un punto dado que no está en ella, es posible trazar una línea recta perpendicular (teorema 12)
paso 5: La suma de los dos ángulos de la cumbre es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo. (propiedad 5)
paso 6: Los ángulos de la cumbre del cuadrilátero de Saccheri son agudos. (propiedad 6)
paso 7: Como <FGB y <GCB son ambos agudos, la suma de estos dos es menor que 180 grados (noción común)
paso 8: Transitividad (noción común)

Este comportamiento está en sintonía con lo propuesto por Jaime y Gutiérrez (1990, p. 309) quienes señalan que, en este nivel, los estudiantes “pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en los libros de texto”. Justificar cada afirmación significa que el estudiante entiende la demostración que se le presenta.

# 5 Versión refinada de los productos de la investigación

## 5.1 Versión refinada de la caracterización de niveles

La siguiente es la caracterización refinada de los tres primeros niveles de razonamiento:

Tabla 2

*Versión refinada de la caracterización del primer nivel*

| Caracterización del primer nivel | |
|---|---|
| **Proceso** | **Descriptor** |
| **Descripción** | 1. Reconoce el disco de Poincaré como un modelo de representación de la geometría hiperbólica, donde los objetos existen y adoptan formas distintas a las del plano euclidiano. Sin embargo, no comprende las implicaciones métricas y topológicas del modelo. |
| | 2. Describe los segmentos hiperbólicos a partir de su forma curva o arqueada y los relaciona con formas de la geometría euclidiana o del mundo físico. |
| | 3. Identifica los puntos del borde del disco de Poincaré como extremos o límites de las rectas hiperbólicas y no como puntos ideales (en el infinito) del modelo. |
| | 4. Reconoce que las rectas hiperbólicas en el modelo del disco de Poincaré corresponden a arcos de circunferencia, |

aunque aún no comprende que dichos arcos son ortogonales al borde del disco.

5. Reconoce visualmente los segmentos, semirrectas y rectas euclidianas de los segmentos, semirrectas y rectas hiperbólicas.
6. Reconoce el triángulo hiperbólico como una figura cerrada con tres lados curvos y utiliza expresiones como triángulo curvado, triángulo con lados curvos, triángulo con arcos, triángulo con curvas hacia adentro o hacia afuera para referirse a la forma del triángulo.
7. Compara perceptivamente el tamaño de los ángulos y los lados del triángulo hiperbólico con los del triángulo euclidiano. (Por ejemplo, los ángulos de los triángulos hiperbólicos se ven más pequeños que los ángulos en los triángulos euclidianos y cuánto más grande es el triángulo hiperbólico, más pequeños son los ángulos).
8. Reproduce construcciones de la geometría euclidiana, como la del triángulo equilátero, para la construcción de objetos hiperbólicos y reconoce las propiedades físicas y geométricas que se heredan de un contexto a otro.
9. Explora casos particulares, observando cómo las figuras se modifican al aproximarse al borde o al centro del disco, sin atribuir todavía un significado métrico o topológico a dichos comportamientos.

Tabla 3

*Versión refinada de la caracterización del segundo nivel*

| Descriptores del segundo nivel | |
|---|---|
| **Proceso** | **Descriptor** |
| **Descripción** | 10. Reconoce que la suma de los ángulos internos del triángulo hiperbólico es no constante y menor que 180° y lo justifica a partir de ejemplos. |
| | 11. Clasifica los triángulos hiperbólicos de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos. |
| | 12. Establece propiedades de los triángulos hiperbólicos según su clasificación, a partir de la observación y la experimentación; por ejemplo, reconoce que todos los triángulos equiláteros son equiángulos pero dichos ángulos no miden necesariamente 60°. |
| | 13. Identifica, a partir de ejemplos y validación numérica, relaciones entre los lados de los triángulos hiperbólicos para establecer propiedades como la desigualdad triangular. |
| | 14. Descubre experimentalmente que en geometría hiperbólica los criterios Lado-Lado-Lado y Lado-Ángulo-Lado no garantizan semejanza (triángulos con lados proporcionales |

| | |
|---|---|
| | tienen ángulos diferentes), mientras que el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo produce semejanza trivial: la congruencia. |
| | 15. Reconoce y establece, a partir de la experimentación, los criterios de congruencia de triángulos hiperbólicos. |
| | 16. Construye líneas notables de un triángulo hiperbólico como alturas, medianas, bisectrices y mediatrices, pero no establece criterios claros sobre su concurrencia ni identifica correctamente la ubicación de los puntos de concurrencia como ortocentro, centroide, incentro, circuncentro. |
| | 17. Reconoce, a partir de la experimentación, qué propiedades de los triángulos euclidianos se mantienen y cuáles se modifican en el contexto de la geometría hiperbólica. |
| | 18. Utiliza un vocabulario adecuado para describir los objetos hiperbólicos. |
| **Definición** | 19. Relaciona las definiciones que se le plantean en el contexto hiperbólico con sus equivalentes euclidianos para definir objetos hiperbólicos. |
| **Demostración** | 20. Utiliza argumentos empíricos (basados en la percepción visual, la experimentación, el uso de ejemplos o en cálculos numéricos) para justificar la validez o invalidez de algunas propiedades euclidianas en el contexto de los triángulos hiperbólicos. |
| | 21. Justifica, mediante comprobaciones numéricas, que el teorema de Pitágoras (en el sentido euclidiano de relacionar |

| | |
|---|---|
| | los catetos con la hipotenusa) no se cumple en los triángulos hiperbólicos. |

Tabla 4

*Versión refinada de la caracterización del tercer nivel*

| **Caracterización del tercer nivel** | |
|---|---|
| **Proceso** | **Descriptor** |
| **Definición** | 22. Comprende las definiciones de objetos de la geometría hiperbólica, tales como puntos ideales, rectas ultraparalelas o asintóticamente paralelas y las utiliza para realizar construcciones, demostraciones, establecer nuevas propiedades o definiciones. |
| **Demostración** | 23. Realiza demostraciones informales a partir de propiedades previamente establecidas; por ejemplo, utiliza las propiedades del cuadrilátero de Saccheri para justificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180° y a su vez, deduce que no existen cuadriláteros hiperbólicos rectángulos. |
| | 24. Utiliza la negación del quinto postulado o de sus formulaciones equivalentes para explicar o justificar por qué algunas propiedades de la geometría euclidiana no se cumplen en la geometría hiperbólica como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo-Ángulo. |

| | |
|---|---|
| | 25. Comprende las demostraciones que se le presentan sobre las propiedades del triángulo hiperbólico, aunque no es capaz de elaborarlas de manera deductiva por su propia cuenta. |

## 5.2 Versión refinada de la secuencia de enseñanza

A continuación, se presenta la refinación de los talleres que conforman la secuencia de enseñanza. Para ver la secuencia completa refinada dar click en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/jhtx36qp

**Refinación del taller 1**

Durante la implementación del taller, en la pregunta 1.1.2, algunos estudiantes afirmaron que, al arrastrar un punto del segmento fuera del círculo, el segmento sigue existiendo, pero está oculto. Esta afirmación es incorrecta, ya que el segmento desaparece al salir del círculo porque no puede existir fuera de este. Ante esta situación, el profesor debe dirigir la reflexión hacia la existencia del segmento dentro y fuera del círculo. Para esto, la pregunta 1.1.2 se reformula así:

**Pregunta 1.1.2**

Arrastre uno de los dos puntos fuera del círculo. ¿Qué ocurre con el segmento hiperbólico? ¿El segmento se oculta o deja de existir? Explique su respuesta.

**Refinación del taller 2**

De acuerdo a la refinación del descriptor 3, se reformula la pregunta 2.2.1 así:

**Pregunta 2.2.1**

a. ¿Una recta euclidiana tiene un punto de inicio y un punto final?
b. ¿Una recta hiperbólica tiene un punto de inicio y un punto de fin?
c. Si las respuestas anteriores son diferentes, ¿Cómo se podrían conciliar desde el modelo estas dos posturas si las rectas deben tener las mismas características en ambas geometrías?

Las preguntas a y b son más apropiadas ya que los estudiantes las pueden responder a partir de lo que observan en la pantalla, tal y como se espera en el nivel 1. La pregunta c invita a los estudiantes a reflexionar sobre lo que observaron para comenzar una transición hacia el siguiente nivel. De acuerdo a la refinación del descriptor 4, se reformulan las preguntas 2.2.3 y 2.2.4 así:

**Pregunta 2.2.3**

¿Qué forma tiene la recta hiperbólica?

**Pregunta 2.2.4**

¿Cualquier curva puede ser una recta hiperbólica o esta debe tener alguna característica especial?

Con esta reformulación, las dos preguntas se sitúan adecuadamente en el nivel 1. La primera, indaga por la forma de la recta hiperbólica y la segunda, por algunas propiedades de la curva en la que los estudiantes pueden poner en juego tanto las propiedades físicas como las propiedades geométricas que conocen.

La pregunta 2.2.5 se puede mantener en el taller para indagar sobre qué piensan los estudiantes frente a la unicidad de la recta hiperbólica en este nivel, sin haber establecido aún la ortogonalidad del arco que define la recta hiperbólica respecto al borde del disco.

**Refinación del taller 3**

El descriptor 6 hace referencia a la caracterización de los triángulos hiperbólicos. En la actividad 3.4, los estudiantes deben construir un triángulo hiperbólico y se les pregunta por el nombre que le darían a la pregunta, los elementos que lo conforman y las diferencias que percibe respecto a su equivalente en la geometría euclidiana. Se reformula la pregunta 3.4.1 con el objetivo de mostrar explícitamente la evidencia que pide el descriptor:

**Pregunta 3.4.1**

a. ¿Cómo llamaría a esta figura?
b. Describa la forma de esa figura.

De igual forma, con el objetivo de comenzar a analizar la manera en la que los estudiantes pueden definir en el nivel 1 a partir de la observación y de su conocimiento previo en geometría, se modifica la pregunta 3.4.2 así:

**Pregunta 3.4.2**

a. ¿Qué elementos puede identificar en esta figura?
b. Dé una definición de la figura.

**Refinación del taller 4**

Con el objetivo de indagar sobre las razones por las que los estudiantes consideran que pueden ocurrir las relaciones que han descubierto, se refinan las preguntas 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3 agregando a cada una de ellas, la pregunta: **¿por qué cree que ocurre esta relación?** A partir de esto, también se puede comenzar a analizar la manera en que se desarrolla el proceso de demostración en el nivel 1, observando cómo los estudiantes formulan sus primeras justificaciones a partir de la exploración en el software.

**Refinación del taller 6**

Con el objetivo de hacer más explícita la clasificación de los triángulos hiperbólicos, se incluye la siguiente actividad:

**Actividad 6.2**

**Pregunta 6.2.1**

¿Cómo se clasifican los triángulos según sus ángulos y según sus lados en la geometría euclidiana?

**Pregunta 6.2.2**

Explore en el applet la clasificación anterior ahora en el contexto euclidiano y responda: ¿es posible clasificar los triángulos hiperbólicos de esta misma forma? Justifique su respuesta.

**Pregunta 6.2.3**

Defina los posibles tipos de triángulos hiperbólicos que encontró.

La pregunta 6.3.3 se incluye para indagar sobre el proceso de definición de los estudiantes en el nivel 2.

Asimismo, se corrigió la numeración del taller original.

**Refinación del taller 7**

Con el propósito de introducir la idea de que las líneas notables pueden concurrir en el infinito o fuera del disco, y de esta manera favorecer el tránsito hacia el nivel 3, pueden plantearse las siguientes preguntas:

**Actividad 7.6**

De acuerdo a la exploración en el applet realizada en las actividades anteriores, conteste:

**Pregunta 7.6.1**

¿Pueden concurrir las rectas en un punto en el borde del disco? ¿Cómo interpretaría esta intersección?

**Pregunta 7.6.2**

¿Pueden concurrir las rectas en un punto fuera del disco? ¿Cómo interpretaría esta intersección?

De igual forma, se agregó la fase de integración que, aunque se realizó en la implementación, no aparecía en la secuencia de enseñanza.

**Refinación del taller 9**

En geometría euclidiana, el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo para la semejanza de triángulos se puede reducir al criterio Ángulo-Ángulo porque al ser la suma de los ángulos internos del triángulo constante, necesariamente el otro par de ángulos debe ser congruente. En geometría hiperbólica no ocurre así.

En la fase de información, al indagar por los criterios de semejanza, la mayoría de estudiantes escribió criterio Ángulo-Ángulo. Sin embargo, en el taller se explora solo el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo. Por la observación anterior, resulta pertinente realizar una reflexión sobre el criterio Ángulo-Ángulo. Así, se agregan las siguientes preguntas:

**Pregunta 9.1.7**

¿Si dos triángulos hiperbólicos tienen dos pares de ángulos congruentes, el tercer par de ángulos será congruente también?

**Pregunta 9.1.8**

Con base en la respuesta anterior, ¿el criterio Ángulo-Ángulo garantiza semejanza de triángulos hiperbólicos?

De igual forma, se agregó la fase de integración que, aunque se realizó en la implementación, no aparecía en la secuencia de enseñanza.

**Refinación del taller 10 y taller 11**

Por cuestiones de tiempo, se asumieron muchas propiedades como ciertas en ambos talleres para que los estudiantes las pudieran utilizar y comenzaran a deducir propiedades. La refinación para estos talleres consiste en la exploración y deducción de dichas propiedades.

# 6 El modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría hiperbólica

A partir de su experiencia como profesores de matemáticas, los esposos Van Hiele plantearon un modelo que permitiera mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría euclidiana.

En esta investigación, dicho modelo se aplicó en un contexto distinto: la geometría no euclidiana, específicamente la geometría hiperbólica. Los resultados permiten concluir que el modelo de Van Hiele mantiene su validez para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje en este nuevo marco geométrico; sin embargo, requiere ajustes conceptuales y metodológicos que favorezcan su adaptación a las particularidades de la geometría hiperbólica.

La propuesta desarrollada en este trabajo está dirigida al aprendizaje de la geometría hiperbólica en el nivel universitario, y busca contribuir a la comprensión del modelo en contextos geométricos diferentes al euclidiano.

Las ideas fundamentales del modelo, propuestas en Jaime y Gutiérrez (1990, pp. 304-305), siguen siendo válidas en la geometría hiperbólica:

1. Se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes en geometría hiperbólica.

2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de la geometría que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma.

Una diferencia fundamental entre la aplicación del modelo en la geometría hiperbólica respecto a la geometría euclidiana, radica en el tipo de razonamiento del nivel inicial. Mientras en el modelo original se propone que en el primer nivel no hay razonamiento matemático, en el caso de la geometría hiperbólica si existe dicho razonamiento desde el comienzo. Esto se debe a que los estudiantes que se aproximan a la geometría hiperbólica ya han tenido un amplio contacto con las matemáticas, que abarca toda su formación escolar y, como mínimo, el curso de geometría euclidiana.

En consecuencia, los estudiantes tienen un razonamiento matemático previo que les permite aproximarse a los objetos de una forma más compleja que cuando se enfrentaron por primera vez a los objetos de la geometría euclidiana. Esta diferencia resulta fundamental, por varias razones:

1. **Modifica las características del nivel 1:** En la geometría euclidiana, cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a los objetos geométricos, su razonamiento se basa principalmente en la visualización de modo que la caracterización que realizan se limita a propiedades físicas y perceptibles como la forma o el tamaño. En cambio, en la geometría hiperbólica, aunque los estudiantes también recurren a la visualización y reconocen las propiedades físicas de las figuras, incorporan además las propiedades geométricas que conocen de los objetos euclidianos equivalentes.

   Así, las descripciones que elaboran no se reducen solamente a comparaciones con objetos del mundo real, sino que establecen analogías con otras figuras geométricas. De igual manera, las propiedades que identifican no se limitan a la forma o al tamaño, sino que incluyen características heredadas de los objetos euclidianos trasladadas al contexto hiperbólico. Esta diferencia se refleja también en un uso más refinado del lenguaje geométrico, ya que los estudiantes emplean términos técnicos propios de la disciplina, lo que evidencia un nivel de razonamiento más elaborado que el esperado en el nivel inicial del modelo original.

   Finalmente, si se le pide a un estudiante dibujar una figura en geometría hiperbólica a partir de unas características dadas, podrá recurrir a las reglas teóricas que conoce (bien sea porque las comprende o porque las ha memorizado) de la geometría euclidiana para realizar no solamente un dibujo que represente dichas características sino una construcción que garantice propiedades.

2. **El razonamiento matemático que ya tienen los estudiantes, facilita la transición entre niveles:** los estudiantes transitan con mayor rapidez del nivel 1 al nivel 2, ya que reconocen los objetos geométricos hiperbólicos a partir de sus equivalentes euclidianos. Si bien el cambio en la representación puede generar inicialmente cierta confusión, los estudiantes terminan aceptando implícitamente la consistencia del nuevo modelo geométrico. Esta aceptación favorece que asimilen con cierta facilidad las diferencias entre ambos sistemas y, gracias al carácter dinámico del entorno de trabajo, comiencen a explorar y analizar las propiedades geométricas de los objetos, superando la simple visualización característica del nivel inicial.

Lo mismo ocurre en el paso del nivel 2 al nivel 3. En su experiencia previa, los estudiantes ya han desarrollado formas de razonamiento tanto inductivas como deductivas: han explorado casos empíricamente para identificar patrones, han validado propiedades mediante la observación, la experimentación o la comprobación numérica, y también han establecido relaciones lógicas entre propiedades conocidas.

En la geometría hiperbólica, los estudiantes inician de manera similar: primero establecen propiedades a partir de la exploración y la experimentación, y posteriormente comienzan a deducir unas propiedades a partir de otras, transitando así hacia el nivel 3. Aunque este proceso también se presenta en la geometría euclidiana, en el contexto hiperbólico el avance es más rápido, pues los estudiantes ya comprenden la estructura lógica de la argumentación geométrica, la conexión entre postulados, teoremas y definiciones, lo que facilita el paso del razonamiento analítico al deductivo.

A partir de las anteriores reflexiones y de los resultados de esta investigación que pueden ser extrapolables a otros objetos de la geometría hiperbólica, se proponen algunos descriptores generales para los tres primeros niveles de razonamiento geométrico en el contexto hiperbólico:

**Nivel 1**

En este nivel los estudiantes:

1. Reconocen el modelo de representación de la geometría hiperbólica en el que trabajan, por ejemplo, el disco de Poincaré.
2. Reconocen que los objetos hiperbólicos adoptan formas distintas a las de sus equivalentes euclidianos dentro del modelo, y los describen a partir de comparaciones con objetos del mundo real o de la geometría euclidiana.
3. Comparan perceptivamente las figuras de la geometría hiperbólica con la geometría euclidiana, estableciendo semejanzas y diferencias en cuanto a sus propiedades físicas como forma o tamaño.
4. Reproduce construcciones de la geometría euclidiana en la geometría hiperbólica, apoyándose en la observación y las definiciones y propiedades que ya conoce de los objetos.

**Nivel 2**

1. Establece, a partir de la experimentación, propiedades geométricas de los objetos hiperbólicos.

2. Reconoce, a partir de la experimentación, cuáles propiedades de la geometría euclidiana se mantienen en el contexto hiperbólico y cuáles no.
3. Utiliza un vocabulario adecuado para describir objetos hiperbólicos.
4. Relaciona las definiciones que se le plantean en el contexto hiperbólico con sus equivalentes euclidianos para definir objetos hiperbólicos.
5. Utiliza argumentos empíricos (basados en la percepción visual, la experimentación, el uso de ejemplos o en cálculos numéricos) para justificar la validez o invalidez de algunas propiedades euclidianas de objetos geométricos en el contexto hiperbólico.

**Nivel 3**

1. Comprende las definiciones de objetos de la geometría hiperbólica, tales como puntos ideales, rectas ultraparalelas o asintóticamente paralelas y las utiliza para realizar construcciones, demostraciones, establecer nuevas propiedades o definiciones.
2. Realiza demostraciones informales a partir de propiedades previamente establecidas.
3. Utiliza la negación del quinto postulado o de sus formulaciones equivalentes para explicar o justificar por qué algunas propiedades de la geometría euclidiana no se cumplen en la geometría hiperbólica.
4. Comprende las demostraciones que se le presentan sobre las propiedades del triángulo hiperbólico, aunque no es capaz de elaborarlas de manera deductiva por su propia cuenta.

# 7 Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en la implementación, se concluye que la caracterización refinada propuesta como conjetura en el experimento de enseñanza refleja adecuadamente el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes en el contexto de los triángulos hiperbólicos.

La secuencia de enseñanza diseñada en el aula virtual de GeoGebra, fundamentada en la caracterización a priori, favoreció el avance de los estudiantes desde el nivel 1 hacia el nivel 2, y de este hacia el nivel 3 de razonamiento. Aunque todos los participantes alcanzaron el nivel 2, y algunos mostraron comportamientos propios de la transición al nivel 3, no es posible afirmar que todos lograron consolidar dicho nivel, pues varios aspectos del tercer nivel no se abordaron completamente.

Precisamente, el tiempo constituyó una limitación en esta investigación, ya que, al implementarse dentro de un curso regular, se dispuso únicamente de un mes para el desarrollo de las actividades, periodo que resultó insuficiente para abordar todas las actividades correspondientes a los tres niveles.

Los resultados evidencian que la estructura del modelo de Van Hiele, tanto en su dimensión descriptiva como metodológica, mantiene su validez para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría hiperbólica. Sin embargo, requiere ajustes conceptuales, especialmente en lo referente al razonamiento matemático previo de los estudiantes, que les permite razonar de forma más compleja desde el nivel 1 y transitar con mayor rapidez entre niveles.

En términos del desarrollo del razonamiento, se identificó que en el nivel 1, los estudiantes recurren a la visualización y la exploración dinámica para identificar propiedades físicas de los objetos hiperbólicos y algunas propiedades geométricas derivadas de sus conocimientos previos. En el nivel 2, integran la observación empírica y sus saberes previos con la formulación de propiedades geométricas surgidas de la experimentación, la validación numérica y el uso de herramientas como la prueba del arrastre. En el nivel 3, utilizan propiedades geométricas previamente establecidas para deducir otras de manera informal, evidenciando un razonamiento más estructurado.

Tal como se ha documentado en otras investigaciones, el uso de software de geometría dinámica favorece el desarrollo del razonamiento geométrico. En esta investigación, se confirma que, cuando dicho software se integra con el modelo de Van Hiele como marco teórico, favorece la transición entre niveles de razonamiento aun tratándose de la geometría hiperbólica. En el caso especial de esta geometría, de acuerdo a los resultados obtenidos en esta investigación, se concluye lo siguiente:

1. El uso del software facilita la comprensión del modelo: permite que los estudiantes se familiaricen con las propiedades del disco de Poincaré al descubrirlas por sí mismos mediante la exploración, lo que fortalece su comprensión y su capacidad para anticipar propiedades geométricas.
2. El software favorece la transición entre los niveles:
    a. La exploración de múltiples casos, la validación numérica, el uso de la prueba del arrastre, entre otras estrategias que los estudiantes ya conocen y que les facilita el software les permite a los estudiantes descubrir nuevas propiedades geométricas de los objetos lo que les permite un avance más rápido del nivel 1 al nivel 2 pues el

software les permite superar integrar la visualización con las anteriores estrategias para avanzar hacia un razonamiento más analítico a partir del establecimiento de propiedades geométricas.

b. Las construcciones realizadas en el aula virtual de GeoGebra, basadas en reglas teóricas conocidas de la geometría euclidiana y aplicadas en el contexto hiperbólico permiten identificar qué propiedades se conservan y cuáles no, facilitando así la transición del nivel 2 al nivel 3.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos en este trabajo, se pueden considerar diversas líneas de investigación que pueden contribuir a la profundización del estudio del razonamiento geométrico en contextos no euclidianos. En particular, futuras investigaciones podrían orientarse a:

- Avanzar hacia los niveles 4 y 5 del razonamiento geométrico en relación con el triángulo hiperbólico.
- Explorar otras propiedades del triángulo hiperbólico que no fueron abordadas en esta investigación, ampliando así la comprensión de las propiedades de este objeto.
- Extender los resultados presentados en este trabajo respecto a la aplicación del modelo de Van Hiele en geometrías no euclidianas, contrastando su pertinencia y alcance en distintos contextos de enseñanza.
- Caracterizar otros objetos geométricos propios de la geometría hiperbólica, además del triángulo, para identificar patrones de razonamiento y posibles progresiones en los niveles de comprensión.
- Explorar ahora las propiedades del triángulo elíptico y establecer semejanzas y diferencias con el caso hiperbólico.

De igual forma, estos resultados pueden utilizarse para diseñar una propuesta curricular para una electiva en el pregrado de matemáticas o de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, relacionada con geometrías no euclidianas. Asimismo, la secuencia puede formar parte del Museo Virtual de las Matemáticas de la universidad.

# Referencias bibliográficas

Algarín, D., & Fiallo, J. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Revista Científica, 17*(2), 56-60.

Arcozzi, N. (2012). Beltrami's Models of Non-Euclidean Geometry. En *Mathematicians in Bologna 1861-1960* (pp. 1-30). Springer Science & Business Media.

Bonete, I. (2000). *As Geometrias Não-Euclidianas em cursos de licenciatura: Algumas experiências (Doctoral dissertation, Dissertação de mestrado).* Universidade Estadual do Centro-Oeste.

Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development.* Courier Corporation.

Burger, W., & Shaughnessy, J. (1986). *Characterizing the Van Hiele Levels of development in geometry* (Vol. 17). Jorunal for research in mathematics education.

Camargo, L. (2021). Estrategia investigativa: experimento de enseñanza. En 86-91, *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.* Universidad de Antioquia.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Corberán, R. M. (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo de Van Hiele.* Universitat de Valencia.

Corberán, R. M. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* . Ministerio de Educación.

Coxeter, H. (1998). *Non-euclidean geometry.* Cambridge University Press.

Crowly, M. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. *Learning and teaching geometry*.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. En *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 3).

Gans, D. (1973). *An introduction to non-Euclidean geometry.* Academic Press.

Gawlick, T. (2005). Connecting arguments to actions—Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *ZDM, 37*(5), 361-370.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. Educación matemática. *Educación Matemática, 3*(2), 49-65.

Gutiérrez, A. (2007). *Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría.* Conferencia llevada a cabo en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas, Medellín, Colombia.

Hitt, F., Aldon , G., Bazzini, L., & Gellert, U. (2017). *Mathematics and Technology: A CIEAEM Sourcebook.* Springer.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares , & M. Sánchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Kelly, A. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 115-128.

Kotarinou, P., & Stathopoulou, C. (2017). ICT and liminal performative space for hyperbolic geometry's teaching. *Mathematics and Technology: A CIEAEM Sourcebook*, 75-98.

Lugo, Ó., & Rojas, O. (2021). From Euclidean Geometry To Non-Euclidean Geometry, In Particular Hyperbolic Geometry, In Secondary Education Through Dynamic Geometry. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12*(12), 1195-1221.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 225-245.

Moreno, L., Brady, C., & Elizondo, R. (2018). Dynamic hyperbolic geometry: building intuition and understanding mediated by a Euclidean model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(4), 594-612.

Palacios, A. (2024). *Caracterización de los niveles de razonamiento de van hiele en el aprendizaje de algunos conceptos básicos de la geometría hiperbólica con la mediación de geogebra.* Tesis de grado.

Patsiomitou, S. (2008). The Development of Students Geometrical Thinking through Transformational Processes and Interaction Techniques in a Dynamic Geometry Environment. *Issues in Informing Science and Information Technology*.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo Leonor, & Echeverry Armando. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon- Revista de Educación Matemática*, 41-56.

Restrepo, J., Gualdrón, E., & Ávila, L. (2023). Improving the learning of geometric proportionality using van Hiele's model, mathematical visualization, and GeoGebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(9).

Rodríguez, U. (2012). *Herramientas hiperbólicas y proyectivas en Geogebra.*

Samper, C., & Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentacıón en un ambıente de geometría dınámıca. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 50*, 367-382.

Silva, R. (2013). *Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica.*

Steffe, L., & Thompson, P. (2012). Teaching experiment methodology underlying principles and essential elements. *Research design in mathematics and science education*, 267-306.

Trudeau, J. (2008). *The non-Euclidean revolution.* Springer Science and Business Media.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). *La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele* (Vol. 27). Uniciencia.

Venema, G. A. (2013). *Exploring advanced Euclidean geometry with GeoGebra* (Vol. 44). .American Mathematical Society.

Wolfe, H. E. (2012). *Introduction to non-Euclidean geometry*. Courier Corporation.