
MODELADO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDA
ACÚSTICA TENIENDO EN CUENTA
CONDICIONES DE FRONTERA FINITAS
BASADO EN ESQUEMAS DE DIFERENCIAS
FINITAS DOMINIO TEMPORALES
PARALELIZADOS



ALBERTO LUIS SILVA LORA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012

MODELADO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDA
ACÚSTICA TENIENDO EN CUENTA
CONDICIONES DE FRONTERA FINITAS
BASADO EN ESQUEMAS DE DIFERENCIAS
FINITAS DOMINIO TEMPORALES
PARALELIZADOS

ALBERTO LUIS SILVA LORA

Trabajo de Grado para optar al título de
Físico

Director
RAFAEL A. TORRES A.
Físico, PhD

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2012

A mis padres quienes con su
paciencia y apoyo me ayudaron a
culminar con éxito esta etapa en mi vida.

Agradecimientos

Principalmente a Dios quien permitió que todo esto fuese posible.

Al profesor Herling Gonzalez que me guió durante todo el proceso, brindándome las bases computacionales y teóricas del trabajo.

Al profesor Rafael torres quien me orientó en la parte matemática y en la revisión de la redacción.

A todo el cuerpo docente de la escuela de física que de alguna u otra forma me colaboraron en toda mi formación como estudiante universitario.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	14
1 ECUACIÓN DE ONDA	16
1.1. Ecuación de onda acústica	16
2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	20
2.1. Propiedades del método de diferencias finitas	21
2.2. Tipos de esquemas de Diferencias finitas	22
3 SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE ONDA HO- MOGÉNEA	25
3.1. Ecuación de onda homogénea 1D	25
3.2. Ecuación de onda homogénea 2D	31
4 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDA	35
4.1. Sistema coordinado y cantidades básicas	35
4.2. Esquema de diferencias finitas	35
4.3. Estabilidad del método	35
4.4. Problema acústico 1D	36
4.5. Problema acústico 2D	40
5 MODELADO PARALELIZADO PARA EL MODELO DE MAR- MOUSI	43
5.1. Esquema Numérico	43
5.2. Cálculos con MPI	45
5.3. Modelado	45
6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	50
REFERENCIAS	50
BIBLIOGRAFÍA	51
APÉNDICE	53

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1.	Función impar y periódica $\hat{f}(x)$	28
3.2.	Ondícula usada para el perfil inicial de nuestro problema.	29
3.3.	Solución analítica para la ecuación de onda homogénea 1D. a) $t = 1s$, b) $t = 2s$ y c) $t = 4s$ respectivamente, con velocidad $c = 40cm/s$	30
3.4.	Función del perfil inicial para $\alpha = 0,15$, $x_0 = 200$, $y_0 = 200$ y $b = 10$	33
3.5.	Gráfica del campo de onda de la solución de la ecuación de onda 2D para un medio homogéneo.	34
4.1.	Esquema de diferencias finitas centrada para operadores diferenciales en 1D.	36
4.2.	Solución numérica para la ecuación de onda homogénea 1D, con una aproximación de segundo orden tanto para el tiempo como para el espacio, con tamaño de malla $Lx = 1000$, con una velocidad $c = 3m/s$ con un espaciado de malla $\Delta x = 0,5$ y con un paso de tiempo $\Delta t = 0,1$, para una iteración en el tiempo $it = 1500$	37
4.3.	Solución obtenida teniendo que $L = 500cm$, $\Delta t = 0,005s$, $\Delta x = 0,2cm$ y $t = 2s$; para (a) $G = 1/2$, (b) $G = 3/4$ y (c) $G = 9/10$	38
4.4.	Comparación entre las soluciones de la ecuación de onda analítica y numérica.	38
4.5.	Error absoluto obtenido teniendo que $L = 500cm$, $\Delta t = 0,005s$, $\Delta x = 0,2cm$ y $t = 2s$; para (a) $G = 1/2$, (b) $G = 3/4$ y (c) $G = 9/10$	39
4.6.	Error absoluto del método usando distintos valores para Δx y Δt para un tiempo $t = 5s$	39
4.7.	Esquema de diferencias finitas centrada para operadores diferenciales en 2D.	41
4.8.	Visualización del campo de onda de la ecuación de onda 2D, $h = 0,5$, $dt = 0,1178$, $Lx = Ly = 1000$	41
4.9.	Solución numérica teniendo que $Lx = Ly = 500cm$, $h = 0,2cm$, $\Delta t = 0,00353s$ y $G = 1/\sqrt{2}$; para a) $t = 0,353s$, b) $t = 1,0606s$, c) $t = 2,1213s$, d) $t = 3,535s$	42
5.1.	Esquema de malla intercalada, para la solución de los campos.	44
5.2.	Esquema de paso de mensajes (comunicación) entre procesos vecinos.	46
5.3.	Valores de velocidad del campo onda acústico, en el modelo de Marmousi con 575x1625 nodos equivalentes en profundidad a 3.74 Km y 10.6 Km en longitud ($dh = 6,5m$).	47

5.4.	Valores de densidad [Kg/m^3] del modelo de Marmousi con 575x1625 nodos equivalentes en profundidad a 3.74 Km y 10.6 Km en longitud ($dh = 6,5 m$).	47
5.5.	Propagación en el tiempo del campo de presión para el modelo de Marmousi.	48
5.6.	Captura de pantalla de la propagación de la onda sísmica entre procesos vecinos con 2000 pasos de tiempo, simulando 1,96 segundos; donde cada proceso calcula la solución en una malla de 575x325 nodos, para un total de 575x1625 nodos en cinco procesos.	48
5.7.	Modelo del suelo	49
5.8.	Registros obtenidos por los receptores al simular un disparo.	49
C.1.	Cuerpo de un programa paralelizado con la biblioteca <i>MPI</i>	60
C.2.	Comunicador entre nodos en <i>MPI</i>	61
C.3.	Comunicación entre nodos	63
C.4.	Modelo para la comunicación entre nodos en 1D.	63
C.5.	Código para asignar los nodos que envían y reciben información.	63

LISTA DE APÉNDICES

ANÁLISIS DE FOURIER	54
Series de Fourier	54
Transformada de Fourier	54
ESTABILIDAD L^2: ANÁLISIS DE VON NEUMANN	55
LIBRERÍAS DE PASO DE MENSAJERÍA	57
Conceptos básicos	58
Introducción a la programación en paralelo	59
Problema de frontera	62
PARTICIPACIÓN EN CONGRESO DE LA ENIEF	63

RESUMEN

TITULO: MODELADO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDA ACÚSTICA TENIENDO EN CUENTA CONDICIONES DE FRONTERA FINITAS BASADO EN ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS DOMINIO TEMPORALES PARALELIZADOS¹.

AUTOR: SILVA LORA, Alberto Luis².

PALABRAS CLAVES: Diferencias Finitas, Ecuación de Onda, Onda Acústica, Procesamiento Sísmico, Transformación de Fourier.

CONTENIDO: Los fenómenos ondulatorios, son fenómenos de gran importancia presentes en casi toda la naturaleza, como la luz, el sonido, etc., los cuales se caracterizan por transmitir algún tipo vibración. Este tipo de fenómeno fue descrito en su inicio por *Jean le Rond d'Alembert* y es expresado por medio de las *ecuaciones diferenciales parciales*. Aquí se analizó el comportamiento de este tipo de fenómeno por medio de una ecuación diferencial parcial conocida como la ecuación de onda.

Existen muchos tipos de fenómenos ondulatorios presentes en nuestro diario vivir, uno de ellos son las ondas generadas en el interior de la tierra debido al movimiento de las placas terrestres, los cuales son estudiados por la sismología. Una parte muy importante de la sismología es la exploración sísmológica, la cual estudia el comportamiento de las ondas en el interior de la tierra para la caracterización de yacimientos. Nuestro problema se basó en el estudio del comportamiento de las ondas en un medio acústico, considerando este medio como homogéneo e isótropo, para la reconstrucción del campo de onda usando el método de diferencias finitas dominio temporales. Los cálculos fueron hechos usando dos tipos de resultados, uno analítico y uno numérico para las ecuaciones de onda en una y dos dimensiones.

Durante el proceso se usaron los métodos por *transformación de Fourier* y *separación de variables* para hallar el resultado analítico, y el método de *diferencias finitas* para hallar el resultado numérico. Nuestros resultados fueron comparados de tal manera que por medio de dicha comparación se validó el método numérico usado, observando cuan aproximada es nuestra solución numérica comparada con nuestra solución analítica. Adicionalmente se observó la propagación del campo de onda para un medio complejo, haciendo uso de un modelo sintético conocido como modelo de *Marmousi*.

Finalmente se obtuvo como resultado la solución analítica para la ecuación de onda acústica usando

¹Proyecto de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Rafael Torres A (Director). Herling Gonzalez A (Co-director).

un perfil inicial representado por una función conocida como función *Ricker* y se obtuvo un modelo computacional del campo de onda para un medio acústico, el cual se aproximó bastante bien a la solución obtenida de manera analítica.

ABSTRACT

TITLE: PARALLEL FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN MODELING OF ACOUSTIC WAVE PROPAGATION WITH FINITE VALUE BOUNDARY CONDITIONS¹.

AUTHOR: SILVA LORA, Alberto Luis².

KEYWORDS: Acoustic Wave, Finite Difference, Fourier Transformation, Seismic Processing, Wave Equation.

CONTENT: Wave phenomena are very important and they are present in almost all nature, like in the light, sound, etc. They are characterized by transmitting some type of vibration. This type of phenomenon was described initially by Jean le Rond d'Alembert and it is expressed through *partial differential equations*. Here we examined the behavior of this type of phenomenon through a partial differential equation known as the wave equation.

There are many types of wave phenomena present in our daily lives, one of them are the waves generated inside the earth due to the movement of the earth's plates, which are studied by seismology. A very important part of seismology is seismic exploration, which studies the behavior of waves in the earth's subsurface for reservoir characterization. Our problem was based on the study of wave propagation in acoustic media, an isotropic and homogeneous medium was considered, for the wave field reconstruction reconstruction using *finite difference time domain method*. The calculations were made using two types of results, analytic result and numerical result both for the one-dimensional and two-dimensional wave equation.

In the process were used the *Fourier transformation* and the *separation of variables* methods to find the analytical result and the *finite difference* method to find the numerical result. The results were compared to validated the numerical method used, by observing how our numerical solution is approximated to the analytical solution. Additionally, we observed the wavefield propagation for a complex medium, using a synthetic model known as *Marmousi* model.

Finally, we obtained the analytical solution of the wave equation using an initial profile represented by a function known as Ricker function, and we obtained a wavefield computational model for an acoustic medium, which was closely approximated to the analytical solution.

¹Degree Project

²Faculty of Science. School of Physics. Rafael Torres A (Director). Herling Gonzalez A (Co-director).

INTRODUCCIÓN

La sismología es una rama de la geofísica, la cual se encarga de hacer estudios acerca de la propagación de las ondas mecánicas que se generan en el interior de la tierra. Una parte muy importante de la sismología es la exploración sismológica, la cual, por medio de algunos métodos, (sismología de reflexión y sismología de refracción) es posible encontrar rasgos en el subsuelo usando una fuente generadora de ondas sísmicas y una serie de sensores cuya función es grabar los movimientos provenientes del subsuelo. Con este tipo de estudios llegamos a la generación de sismogramas, los cuales son usados para estudiar el interior de la tierra. Esto le permite a la industria de los hidrocarburos la caracterización de yacimientos. Para una buena caracterización de estos yacimientos es muy importante el tipo de herramientas que se utilizan durante el procesamiento de los datos, entre mejor sean las herramientas, más aproximados serán los resultados a la realidad.

El modelado sísmico es una herramienta muy importante para su uso en interpretación sísmica y en exploración sismológica. Este nos permite sintetizar sismogramas y capturas de pantalla del campo de onda en el espacio y tiempo. Estos cálculos son llevados a cabo con base a la ecuación de onda acústica, la cual nos permite modelar la propagación de las ondas en el subsuelo. Este tipo de fenómeno es representado por medio de *EDPs* (*Ecuaciones Diferenciales Parciales*), para las cuales hay dos tipos de soluciones: Una solución analítica y una solución numérica. Debido a que una solución analítica para este tipo de *EDP* es muy complicada e incluso algunas veces no existe dicha solución, se ha optado por el uso de los computadores en donde se modela muy bien el fenómeno haciendo uso de una solución numérica. En vista de que los cómputos no pueden ser representados de manera continua, un método de discretización debe ser utilizado para asignar un valor finito a la *EDP* que describe el fenómeno físico.

Para la solución de *EDP* existen muchos tipos de métodos entre los cuales encontramos el método *FDTD* (*Finite-Difference Time-Domain*), cuyo nombre fue asignado por A. Taflov y M. E. Brodwin [1]. *FDTD* es una técnica de modelado computacional tradicional en electrodinámica, la cual es considerada fácil de entender y fácil para implementar en software. El algoritmo básico de espaciado de malla y paso del tiempo *FDTD* se remonta a un influyente artículo publicado por K. S. Yee [9]. Para una computadora resolver el sistema de ecuaciones discretizadas y procesar cierta cantidad de datos (datos masivos) usando el método *FDTD* le toma cierto tiempo, lo cual ha sido

un inconveniente que ha venido disminuyendo al pasar de los años. Podemos ver en trabajos anteriores que el costo computacional junto con la aproximación de los resultados a la realidad es algo muy valioso y es tenido mucho en cuenta al momento de procesar datos. También se han modificado los métodos y se han obtenido buenos resultados en cuanto a estos factores [10][7].

Para probar la efectividad de los métodos, estos han sido comparados con resultados analíticos obtenidos al comparar los campos de onda para ambos métodos. Diferentes autores muestran que el método de diferencias finitas se aproxima muy bien a la solución analítica [8].

En algunos casos es posible obtener resultados aun más rápidos en los algoritmos desarrollados en cualquier tipo de lenguaje de programación. Para simplificar y acelerar los algoritmos, se usan distintos tipos de librerías que paralelizan las tareas [2]. Una de las librerías más usadas para este tipo de tareas es las librerías de *MPI (Message Passing Interface)* [17], la cual nos permite disminuir considerablemente el tiempo de cómputo. A lo largo de la historia se ha querido siempre, junto con la ayuda de la tecnología, hacer las cosas más reales y rápidas posibles para disminuir los errores en los cálculos.

El siguiente trabajo consta de la construcción de una solución analítica para la ecuación de onda acústica con base a la cual se validará una solución numérica. Ambas soluciones serán llevadas a un lenguaje máquina para luego visualizar los distintos campos de onda y hacer sus respectivas comparaciones.

CAPÍTULO 1

ECUACIÓN DE ONDA

1.1. Ecuación de onda acústica

La ecuación de onda acústica es una ecuación diferencial parcial (EDP) lineal de segundo orden, la cual relaciona derivadas de segundo orden tanto temporal como espacial de la propagación de perturbaciones ondulatorias de una manera simple. Esta ecuación pertenece al tipo de ecuación diferencial parcial conocido como hiperbólicas. Esta ecuación describe una gran variedad de procesos vibratorios en física, como por ejemplo las vibraciones en una cuerda o una membrana. Para un sistema no dispersivo, donde todas las frecuencias de excitación se propagan con la misma velocidad, la fórmula para la propagación de ondas armónicas en una dimensión, con amplitud A , como una función del espacio y tiempo es

$$u_x(x, t) = A \sin(kx - wt) = A \sin(kx - kct), \quad (1.1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda = w/c$ es el número de onda para una perturbación de longitud de onda λ , $w = 2\pi f$ es la frecuencial angular, y c es la velocidad de fase. Notando que

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - kct) \quad (1.2)$$

y

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -k^2 c^2 A \sin(kx - kct), \quad (1.3)$$

podemos llegar a una expresión para la ecuación de onda homogénea en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

Esta ecuación para 2 dimensiones queda expresada como

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

y en 3 dimensiones

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

donde el operador ∇^2 es conocido como el *Laplaciano*.

Para un fluido incompresible (ideal), la ecuación de onda puede ser derivada de la hidrodinámica y de la relación adiabática entre la presión y la densidad. Considerando la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de Euler (Segunda ley de Newton), y la ecuación adiabática de estado [12]

- *Conservación de la masa*

Teniendo que la masa en un volumen cualquiera no varía con el tiempo, podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f} \rho dV = 0, \quad (1.7)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad (1.8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS, \quad (1.9)$$

donde V es cualquier volumen fijo y V_f es el volumen del fluido. Aplicando el teorema de Gauss obtenemos la siguiente expresión

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \nabla(\rho \vec{u}) dV. \quad (1.10)$$

Como el volumen de integración es arbitrario, podemos expresar

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla(\rho \vec{u}), \quad (1.11)$$

la cual es la expresión de la *Ley de la conservación de la masa* en forma diferencial.

- *Ecuación de Euler*

Haciendo uso de la segunda ley de Newton en un volumen de un gas arbitrario, en el cual se considera la velocidad de las partículas del gas constante, tenemos

$$\int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = - \int_S P \cdot \vec{u} dS. \quad (1.12)$$

debido a que \vec{u} depende de la posición y el tiempo, podemos escribir que

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (1.13)$$

Remplazando esta ecuación en la ecuación 1.12 y aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) dV = - \int_V \nabla P dV. \quad (1.14)$$

Como el volumen de integración es arbitrario, podemos expresar

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P, \quad (1.15)$$

cuya ecuación es denominada como *Ecuación de Euler del movimiento en un fluido*.

■ *Relación entre presión y densidad*

Teniendo que la Ley de los gases está dada por la expresión

$$P = \rho RT, \quad (1.16)$$

donde R es la constante de los gases ideales y T es la temperatura absoluta del gas. En una onda sonora, el cambio de presión es adiabático debido a que el periodo de oscilación es muy corto y no hay tiempo para intercambiar calor. Según la ley de los gases tenemos

$$P = K \rho^\gamma, \quad (1.17)$$

donde K es una constante y γ es el coeficiente adiabático.

Para una onda sonora tenemos que

$$P = P_0 + p, \quad p \ll P_0 \quad (1.18)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho' \ll \rho_0 \quad (1.19)$$

$$\vec{u} = \vec{u}, \quad \vec{u}_0 = 0. \quad (1.20)$$

Considerando las expresiones anteriores tenemos que

$$-\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \nabla \cdot (\rho \vec{u}), \quad \text{Ecuación linealizada de conservación de la masa,} \quad (1.21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \text{Ecuación linealizada de Euler,} \quad (1.22)$$

$$p = c^2 \rho', \quad \text{Ecuación linealizada de Estado,} \quad (1.23)$$

donde $c^2 = \gamma RT$. De estas ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones representado de la siguiente manera

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \nabla \cdot \vec{v}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.25)$$

el cual se conoce como ecuación de onda linealizada.

Derivando las ecuaciones 1.21 y 1.22 obtenemos

$$-\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho \vec{u}), \quad (1.26)$$

$$\rho_0 \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla^2 p. \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

Combinando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\nabla^2 p - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0, \quad (1.29)$$

y aplicando a esta la ecuación 1.23 obtenemos

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1.30)$$

la cual es la ecuación de onda homogénea de presiones para un medio acústico.

Para encontrar una solución a la ecuación de onda homogénea primero debemos definir las condiciones iniciales de nuestro problema y segundo definir las condiciones de contorno. Luego de esto aplicamos cualquiera de los métodos que nos facilite su solución.

A continuación presentaremos una explicación acerca del método numérico usado para encontrar la solución aproximada de la ecuación diferencial 1.30 y el sistema de ecuaciones diferenciales 1.24 y 1.25 para una y dos dimensiones.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El objetivo del método de *diferencias finitas*, para resolver una ecuación diferencial ordinaria o una ecuación diferencial parcial, es transformar la ecuación diferencial ordinaria o la ecuación diferencial parcial en una ecuación de diferencias finitas o un sistema de ecuaciones en diferencias finitas.

Para transformar una ecuación diferencial en una ecuación en diferencias finitas hacemos uso de las series de Taylor, de las cuales mientras más términos tomemos de la serie más aproximada será la ecuación en diferencias finitas.

La expresión matemática para las series de Taylor está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}, \quad (2.1)$$

en donde x_0 es el punto al rededor del cual se aproxima la función $f(x)$.

Para aproximar la función $f(x)$ a un polinomio de segundo orden al rededor de x_0 se trunca la expresión hasta el término cuadrático

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + O(h^3). \quad (2.2)$$

Si hacemos un cambio de variable, $x = x_0 + h$ tenemos que

$$f(x) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (2.3)$$

Y si hacemos otro cambio de variable sobre la ecuación 2.2, $x = x_0 - h$ tenemos

$$f(x) = f(x_0 - h) \approx f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (2.4)$$

Restando las ecuaciones 2.3 y 2.4 se obtiene

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2), \quad (2.5)$$

la cual es la expresión para obtener la aproximación al segundo orden del valor finito de la primera derivada de una función $f(x)$. De esta manera podemos obtener las ecuaciones discretizadas para un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales u ordinarias.

2.1. Propiedades del método de diferencias finitas

Las propiedades más importantes de las ecuaciones en diferencias finitas son la consistencia, la estabilidad y la convergencia [4]. Estas nociones cubren diferentes aspectos de la relación entre la ecuación diferencial parcial y la ecuación en diferencias finitas, y las soluciones exacta y numérica de la ecuación en derivadas parciales.

Consistencia

*Una ecuación en diferencias finitas es **consistente** con una ecuación en derivadas parciales si la diferencia entre la ecuación en diferencias finitas y la ecuación en derivadas parciales desaparece a medida que el paso del tiempo y el espaciado de la malla van a cero independientemente [4].*

$$| EDP - EDF | \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Ninguna condición sobre el espaciado del tiempo y el espaciado de malla son requeridas. Puede suceder que la condición de arriba es cumplida solo cuando cierta relación entre el tamaño del paso del tiempo y el espaciado de malla es satisfecha. Diremos que este es un caso tal que la ecuación en diferencias finitas es **condicionalmente consistente**. Si los errores de truncamiento de la aproximación del esquema en diferencias finitas a las derivadas exactas en la ecuación en derivadas parciales son conocidos, luego la prueba de consistencia es sencilla.

Estabilidad

Si la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales es ilimitada, luego la solución numérica debe ser ilimitada también. Si la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales es limitada, es razonable requerir que la solución numérica sera limitada también. Por lo tanto, el concepto de la estabilidad puede ser definido como sigue.

*Una ecuación en diferencias finitas es **estable** si esta produce una solución limitada cuando la solución exacta es limitada, y es **inestable** si esta produce una solución ilimitada cuando la solución exacta es limitada [4].*

Brevemente hablando, sabemos que las soluciones de la mayoría de los problemas físicos es limitada. Esto puede ser probado analíticamente. Por lo tanto, en tal caso la solución de la ecuación en diferencias finitas también debe ser limitada. Si la solución de la ecuación en diferencias finitas es limitada para todos los valores de el espaciado de malla, entonces la ecuación en diferencias finitas es **incondicionalmente estable**. Si

la solución de la ecuación en diferencias finitas es limitada solo para ciertos valores del espaciamiento de malla, luego la ecuación en diferencias finitas es **condicionalmente estable**. El peor de los caso es la ultima posibilidad: si la solución de la ecuación en diferencias finitas es ilimitada para todos los valores del espaciamiento de malla, luego la ecuación en diferencias finitas es **incondicionalmente inestable**. El método mayormente usado para el análisis de estabilidad es el método de Von Neumann, el cual es descrito por Press William H. [13] (pág. 1033-1034).

Convergencia

*Una ecuación en diferencias finitas es **convergente** si la solución de la ecuación en diferencias finitas se aproxima a la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales conforme los tamaños del paso del tiempo y el espaciado de malla van a cero independientemente [4].*

Denotemos la solución obtenida por la ecuación en derivadas parciales y la ecuación en diferencias finitas como u_{EDP} y u_{EDF} , respectivamente. Luego la propiedad de convergencia puede ser expresada como

$$|u_{EDP} - u_{EDF}| \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Note que la consistencia es propiedad de la ecuación en diferencias finitas. Esta relaciona la ecuación en diferencias finitas con la ecuación en derivadas parciales. La estabilidad y convergencia son propiedades de la solución numérica de la ecuación en diferencias finitas. Ellas se refieren a el método (esquema, algoritmo) usado para obtener la solución numérica. Esta es una diferencia importante entre la consistencia por un lado, y la estabilidad y convergencia por el otro lado.

La prueba de la convergencia de una solución de la ecuación en diferencias finitas no es un problema trivial, en general. Afortunadamente, la convergencia esta relacionada a la consistencia y la estabilidad. Esto sigue del **teorema de equivalencia de Lax** [13] (pág. 1034-1036) que si la ecuación en diferencias finitas es consistente y estable, luego, el método de diferencia finita es convergente. Así, la prueba de la consistencia y la estabilidad es una condición suficiente para la convergencia de la solución de una ecuación en diferencias finitas [4].

2.2. Tipos de esquemas de Diferencias finitas

El método de diferencias finitas posee una variedad de esquemas que pueden ser usados para la solución de ecuaciones diferenciales, a continuación se mencionan algunos

- Esquema de diferencias finitas hacia atrás.
- Esquema de diferencias finitas hacia delante.
- Esquema de diferencias finitas centrado.

- Esquema de diferencias finitas de malla intercalada.

Estos diferentes esquemas se obtienen a partir de la aproximación, según el orden, de la función a una serie de Taylor. Las ecuaciones discretizadas se consiguen según el orden del operador diferencial.

Diferencias finitas para la primera derivada

Para el esquema de diferencias finitas hacia atrás para el primer orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.8)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia atrás para el segundo orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.9)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia delante para el primer orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.10)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia delante para el segundo orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.11)$$

Para el esquema de diferencias finitas centrado para el segundo orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.12)$$

Para el esquema de diferencias finitas centrado para el cuarto orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (2.13)$$

Diferencias finitas para la segunda derivada

Para el esquema de diferencias finitas hacia atrás para el primer orden

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x). \quad (2.14)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia atrás para el segundo orden

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{2u_i - 5u_{i-1} + 4u_{i-2} - u_{i-3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.15)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia delante para el primer orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x). \quad (2.16)$$

Para el esquema de diferencias finitas hacia delante para el segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} = \frac{2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.17)$$

Para el esquema de diferencias finitas centrado para el segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.18)$$

Para el esquema de diferencias finitas centrado para el cuarto orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4). \quad (2.19)$$

De estos esquemas estudiados, se utilizaran para las pruebas realizadas los esquemas de diferencias finitas centrada y de malla intercalada, representados ambos por las ecuaciones 2.12 y 2.13 para la aproximación de la primera derivada tanto para una aproximación de segundo orden como de cuarto orden; y por las ecuaciones 2.18 y 2.19, para la aproximación de la segunda derivada tanto para una aproximación de segundo orden como para una aproximación de cuarto orden.

A continuación se mostraran los resultados obtenidos analíticamente de la solución de la ecuación de onda para una y dos dimensiones considerando condiciones de fronteras finitas.

CAPÍTULO 3

SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA ECUACIÓN DE ONDA HOMOGÉNEA

3.1. Ecuación de onda homogénea 1D

La ecuación de onda homogénea 1D o ecuación 1.4, es usada en física, como por ejemplo, para describir el fenómeno de las vibraciones de una cuerda tensionada. Para solucionar esta ecuación lo primero que debemos hacer es definir las condiciones iniciales del problema, las cuales están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (3.2)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son la posición inicial y la velocidad inicial de la cuerda. Luego de que tenemos las condiciones iniciales, procedemos a aplicar un método de solución de ecuaciones diferenciales para encontrar la solución del problema. Para este caso decidimos usar el método por transformación de Fourier [11].

Lo primero que debemos hacer es definir la transformación de Fourier para el desplazamiento $u(x, t)$, que está definida como

$$U(k, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (3.3)$$

Luego con base a esta definición encontramos la transformación de Fourier de cada uno de los términos de la ecuación de onda. Empezando con la segunda derivada con respecto al espacio sobre los desplazamientos $u(x, t)$, se tiene que su transformada está dada por

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx, \quad (3.4)$$

la cual aplicándole integración por partes se llega a

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right] = -k^2 U(k, t). \quad (3.5)$$

Ahora tenemos que para la segunda derivada de los desplazamientos $u(x, t)$ con respecto al tiempo, su transformada es

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx \right], \quad (3.6)$$

de donde llegamos a

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(k, t). \quad (3.7)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.5 y 3.7 en la ecuación 1.4 obtenemos una expresión conocida como la ecuación del oscilador armónico

$$\frac{\partial^2 U(k, t)}{\partial t^2} + k^2 c^2 U(k, t) = 0, \quad (3.8)$$

la cual es una ecuación diferencial más sencilla. La solución general para esta ecuación está dada por la ecuación de onda plana

$$U(k, t) = A(k) e^{ickt} + B(k) e^{-ickt}. \quad (3.9)$$

Aplicando la transformación de Fourier a la condición inicial 3.1, se tiene que

$$U(k, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx, \quad (3.10)$$

en donde sabiendo que $u(x, 0) = f(x)$, se llega a la expresión

$$U(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k). \quad (3.11)$$

Igualmente para la velocidad inicial se tiene

$$\left. \frac{\partial U(k, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathcal{F} \left[\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \right] e^{-ikx} dx, \quad (3.12)$$

con lo cual, sabiendo que $(\partial u(x, t)/\partial t)|_{t=0} = g(x)$, se llega a la siguiente expresión

$$\left. \frac{\partial U(k, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx = G(k). \quad (3.13)$$

Ya teniendo todas las expresiones anteriores en el espacio de Fourier, aplicamos las condiciones iniciales del sistema, las cuales están dadas por las ecuaciones 3.1 y 3.2; con base a ellas se obtienen expresiones para los coeficientes $A(k)$ y $B(k)$ en función de $F(k)$ y $G(k)$

$$A(k) = \frac{1}{2} F(k) + \frac{1}{i2kc} G(k), \quad (3.14)$$

$$B(k) = \frac{1}{2} F(k) - \frac{1}{i2kc} G(k). \quad (3.15)$$

Reemplazando estos valores en la ecuación 3.9 llegamos a la siguiente expresión

$$U(k, t) = \frac{1}{2} (F(k)e^{ikt} + F(k)e^{-ikt}) + \frac{1}{2} \left(G(k) \frac{e^{ikt}}{ikc} - G(k) \frac{e^{-ikt}}{ikc} \right), \quad (3.16)$$

la cual podemos escribir también de la siguiente manera

$$U(k, t) = \frac{1}{2} (F(k)e^{ikt} + F(k)e^{-ikt}) + \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^t G(k)e^{ikc\tau} d\tau + \int_t^{\infty} G(k)e^{-ikc\tau} d\tau \right). \quad (3.17)$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa de la expresión 3.17 tenemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^t g(x + c\tau) d\tau - \int_t^{\infty} g(x - c\tau) d\tau \right], \quad (3.18)$$

en la cual, haciendo un cambio de variable tanto para $x + c\tau$ como para $x - c\tau$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^t g(x + c\tau) d\tau - \int_t^{\infty} g(x - c\tau) d\tau = \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy, \quad (3.19)$$

reemplazando en la expresión 3.18 llegamos a la expresión

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy, \quad (3.20)$$

la cual es, finalmente, la solución general de la ecuación de onda homogénea en 1D.

Problema con valor en la frontera

Debido a que nuestro problema a resolver es un problema con valor en la frontera, debemos definir nuestras condiciones de contorno. Para este problema hemos decidido considerar una cuerda de longitud L , cuyos extremos están fijos (condiciones de contorno son de tipo Dirichlet), por lo que las definimos de la siguiente manera

$$u(0, t) = 0, \quad (3.21)$$

$$u(L, t) = 0. \quad (3.22)$$

Aplicando estas condiciones de contorno a la expresión 3.20, y teniendo en cuenta que para nuestro problema $g(x) = 0$ tenemos que

$$f(ct) = -f(-ct), \quad (3.23)$$

$$f(L + ct) = -f(L - ct), \quad (3.24)$$

lo cual nos indica que la función $f(x)$ tiene que ser impar para que las condiciones de contorno sean validas.

Podemos construir con base a la función $f(x)$ una función nueva, periódica, la cual tiene el mismo comportamiento de $f(x)$ en la región $[0, L]$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ -f(x) & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Esta función tiene un periodo de $2L$ y se muestra su bosquejo en la figura 3.1¹.

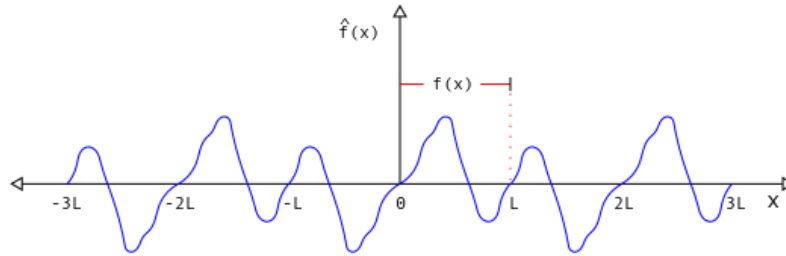


Figura 3.1: Función impar y periódica $\hat{f}(x)$.

Con base a esta función podemos expresar la solución a nuestro problema de la siguiente manera

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(x + ct) + \hat{f}(x - ct) \right). \quad (3.25)$$

La función $\hat{f}(x)$ podemos expresarla en función de una serie de senos, por medio de una serie de Fourier de la siguiente manera

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.26)$$

donde a_n son coeficientes de la sumatoria, los cuales están dados por la siguiente expresión

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.27)$$

El valor de la función $f(x)$ para nuestro problema está dado por la siguiente función

$$f(x) = \left(1 - 2\alpha \left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2 \right) e^{-\alpha \left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2}, \quad (3.28)$$

¹Imagen creada usando **GIMP**

donde α , x_0 y b son constantes. Esta función se conoce como ondícula de Ricker, la cual es un intento de cuantificar la forma de una wavelet sísmica, y está dada por la segunda derivada de una función gaussiana

$$f(x) = -\frac{b^2}{2\alpha} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-\alpha \left(\frac{x-x_0}{b} \right)^2} \right) \quad (3.29)$$

La gráfica para esta función se muestra en la figura 3.2².

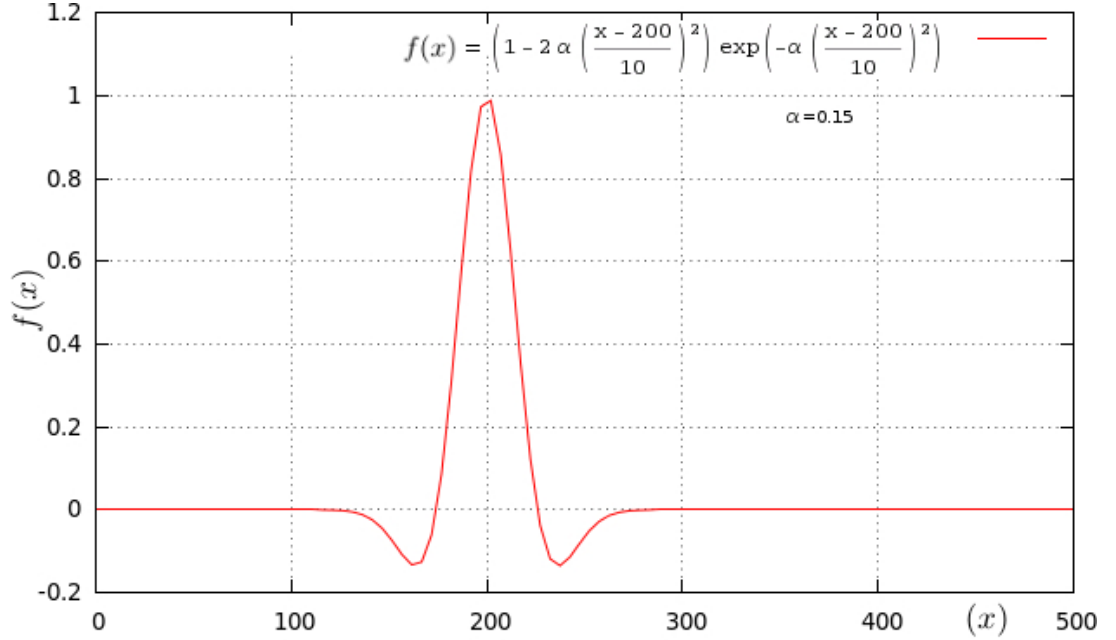


Figura 3.2: Ondícula usada para el perfil inicial de nuestro problema.

Para obtener los coeficientes a_n de la ecuación 3.27, lo hacemos resolviendo la integral. La cual al reemplazar la ecuación 3.28 en 3.27, e integrando se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{n\pi b^2}{\alpha L^2} \left[(-1)^n e^{-\alpha \left(\frac{L-x_0}{b} \right)^2} - e^{-\alpha \left(\frac{x_0}{b} \right)^2} \right. \\ & + \frac{\pi^{3/2} bn}{i4\sqrt{\alpha}L} e^{-\frac{b^2 n^2 \pi^2}{4\alpha L^2}} \left(e^{\frac{in\pi x_0}{L}} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L-x_0}{b} \right) - \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha}L} \right) - \operatorname{erf} \left(-\frac{\sqrt{\alpha}x_0}{b} - \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha}L} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. - e^{-\frac{in\pi x_0}{L}} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L-x_0}{b} \right) + \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha}L} \right) - \operatorname{erf} \left(-\frac{\sqrt{\alpha}x_0}{b} + \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha}L} \right) \right] \right) \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde erf es la función error. Por medio de esta ecuación damos solución a nuestro problema en particular. La solución $u(x, t)$ se obtiene al reemplazar la expresión 3.30 en la ecuación 3.26 y el resultado en la ecuación 3.25. Esta expresión es una expresión compleja, por lo cual consta de una parte real y otra imaginaria. La parte real domina

²Imagen obtenida usando **gnuplot**

sobre la imaginaria, ya que la contribución de esta última es muy poca, la cual es casi a cero. Por lo tanto nuestra solución va a estar dada en función de la parte real de la ecuación 3.30.

La solución para nuestro problema se obtiene al remplazar la ecuación 3.26 en la ecuación 3.25, lo cual nos da como resultado la siguiente expresión

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sin \left(\frac{n\pi(x + ct)}{L} \right) + \sin \left(\frac{n\pi(x - ct)}{L} \right) \right). \quad (3.31)$$

La figura 3.3³ muestra la captura de pantalla de la solución analítica para este problema. Se tuvieron en cuenta los valores $L = 500\text{cm}$, $x_0 = 200\text{cm}$, $b = 10$ y $\alpha = 0,15$ para originar la gráfica resultante.

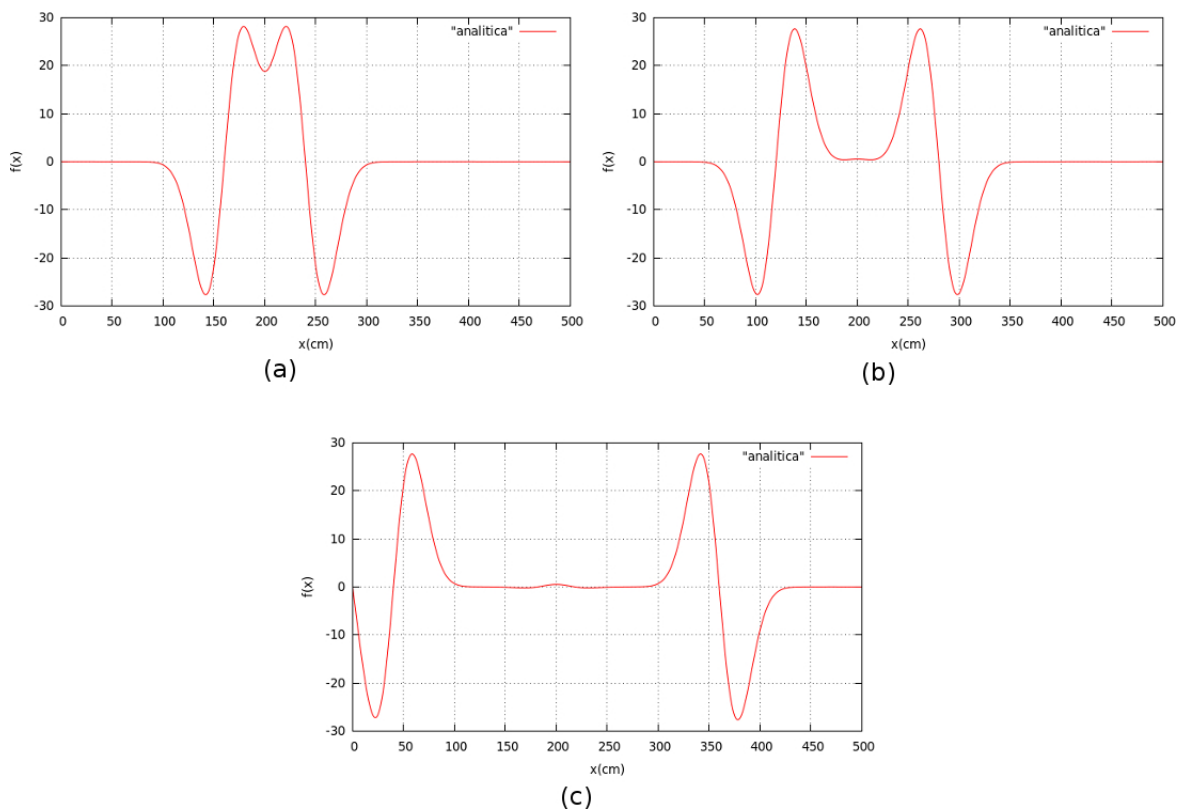


Figura 3.3: Solución analítica para la ecuación de onda homogénea 1D. a) $t = 1\text{s}$, b) $t = 2\text{s}$ y c) $t = 4\text{s}$ respectivamente, con velocidad $c = 40\text{cm/s}$.

De esta manera podemos obtener una solución analítica particular de la ecuación de onda acústica en una dimensión, la cual quedó representada por la ecuación 3.31. A continuación presentamos una solución analítica pero ahora extendiendo nuestro dominio a dos dimensiones.

³Imagen obtenida usando **gnuplot**

3.2. Ecuación de onda homogénea 2D

A continuación consideremos una membrana rectangular de lados L_x y L_y . Analizaremos su comportamiento y encontraremos una solución analítica a dicho fenómeno.

Partiendo de la ecuación diferencial 1.5, ecuación de onda en 2D, definimos un dominio acotado por $0 \leq x \leq L_x$ y $0 \leq y \leq L_y$. La solución para este caso viene siendo una membrana definida por los desplazamientos verticales de $u(x, y, t)$.

Consideremos el problema de una membrana vibrante con sus lados fijos, cuyas condiciones iniciales están dadas por

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad (3.33)$$

y cuyas condiciones de contorno están dadas por

$$u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = 0, \quad (3.34)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0. \quad (3.35)$$

Considerando el caso para cuando $g(x, y) = 0$, que es el caso para el que velocidad inicial es cero, aplicamos el método de separación de variables para resolver el problema [11]. Consideramos la solución de la forma $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, la cual reemplazando en la ecuación 1.5 llegamos a la expresión

$$\frac{T''}{c^2 T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}. \quad (3.36)$$

Como el lado derecho de la expresión está en función solo de x y el lado izquierdo solo de y y t , y como estas tres variables son independientes, podemos decir que para alguna constante λ se cumple

$$\frac{T''}{c^2 T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (3.37)$$

De aquí obtenemos dos expresiones

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{T''}{c^2 T} + \lambda = \frac{Y''}{Y}. \quad (3.39)$$

Como en esta última ecuación ambos lados dependen de variables distintas, entonces, para una constante μ

$$\frac{T''}{c^2 T} + \lambda = \frac{Y''}{Y} = -\mu, \quad (3.40)$$

resultando así en las ecuaciones

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad (3.41)$$

$$T'' + c^2(\lambda + \mu)T = 0. \quad (3.42)$$

Con base a estas ecuaciones se obtiene la solución general para una membrana rectangular, cuya expresión está dada por

$$u(x, y, t) = XYT = \left(A e^{i\sqrt{\lambda}x} + B e^{-i\sqrt{\lambda}x} \right) \left(C e^{i\sqrt{\mu}y} + D e^{-i\sqrt{\mu}y} \right) \left(E e^{i c \sqrt{\lambda + \mu} t} + F e^{-i c \sqrt{\lambda + \mu} t} \right). \quad (3.43)$$

Ahora considerando las condiciones de frontera 3.34 y 3.35, y la condición inicial 3.33, llegamos a la solución particular de este problema

$$u_{nm}(x, y, t) = a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}} \pi c t\right), \quad (3.44)$$

la cual satisface todas las condiciones del problema excepto la condición inicial $u(x, y, 0) = f(x, y)$, por lo que se usa una superposición

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}} \pi c t\right), \quad (3.45)$$

en donde las constantes a_{nm} que satisface

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right), \quad (3.46)$$

está dada por

$$a_{nm} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy dx. \quad (3.47)$$

La función para el perfil inicial para nuestro problema en particular es es una función Ricker parecida a la usada en el problema 1D, ecuación 3.28, y está dada por

$$f(x, y) = \left(1 - \alpha \left(\left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right) \right) e^{-\alpha \left(\left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right)}, \quad (3.48)$$

done x_0 , y_0 , α y b son constantes. Esta función del perfil inicial también puede ser escrita como la derivada de una función gaussiana, tal que

$$f(x, y) = -\frac{b^2}{4\alpha} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-\alpha \left(\left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right)} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(e^{-\alpha \left(\left(\frac{x - x_0}{b} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right)} \right) \right]. \quad (3.49)$$

La gráfica 3.4⁴ muestra la forma gráfica de el perfil inicial usado en este problema.

⁴Gráfica obtenida de www.wolframalpha.com

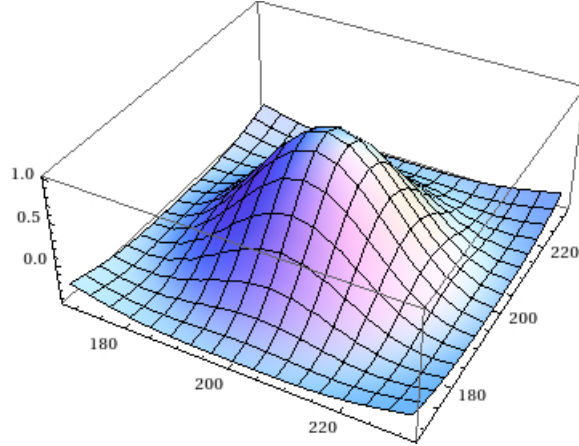


Figura 3.4: Función del perfil inicial para $\alpha = 0,15$, $x_0 = 200$, $y_0 = 200$ y $b = 10$.

Los valores de los coeficientes a_{nm} se obtienen al reemplazar la ecuación 3.49 en la ecuación 3.47. Al resolver esta integral se obtiene la siguiente expresión

$$a_{nm} = \frac{b^2}{\alpha L_x L_y} \left[\frac{n\pi}{i2L_x} (I_{1y} - I_{2y}) \left((-1)^n e^{-\alpha \left(\frac{L_x - x_0}{b}\right)^2} - e^{-\alpha \left(\frac{x_0}{b}\right)^2} + \frac{n\pi}{i2L_x} (I_{1x} - I_{2x}) \right) \right. \\ \left. + \frac{m\pi}{i2L_y} (I_{1x} - I_{2x}) \left((-1)^n e^{-\alpha \left(\frac{L_y - y_0}{b}\right)^2} - e^{-\alpha \left(\frac{y_0}{b}\right)^2} + \frac{m\pi}{i2L_y} (I_{1y} - I_{2y}) \right) \right], \quad (3.50)$$

donde

$$I_{1x} = \int_0^{L_x} e^{-\alpha \left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2} e^{\frac{in\pi x}{L_x}} dx \\ = e^{\frac{-b^2 n^2 \pi^2}{4\alpha L_x}} e^{i \frac{n\pi x_0}{L_x}} \frac{\sqrt{\pi} b}{2\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L_x - x_0}{b} \right) - \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha} L_x} \right) - \operatorname{erf} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{x_0}{b} - \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha} L_x} \right) \right), \\ I_{2x} = \int_0^{L_x} e^{-\alpha \left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2} e^{-\frac{in\pi x}{L_x}} dx \\ = e^{\frac{-b^2 n^2 \pi^2}{4\alpha L_x}} e^{-i \frac{n\pi x_0}{L_x}} \frac{\sqrt{\pi} b}{2\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L_x - x_0}{b} \right) + \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha} L_x} \right) - \operatorname{erf} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{x_0}{b} + \frac{ibn\pi}{2\sqrt{\alpha} L_x} \right) \right), \\ I_{1y} = \int_0^{L_y} e^{-\alpha \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2} e^{\frac{im\pi y}{L_y}} dy \\ = e^{\frac{-b^2 m^2 \pi^2}{4\alpha L_y}} e^{i \frac{m\pi y_0}{L_y}} \frac{\sqrt{\pi} b}{2\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L_y - y_0}{b} \right) - \frac{ibm\pi}{2\sqrt{\alpha} L_y} \right) - \operatorname{erf} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{y_0}{b} - \frac{ibm\pi}{2\sqrt{\alpha} L_y} \right) \right) \\ I_{2y} = \int_0^{L_y} e^{-\alpha \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2} e^{-\frac{im\pi y}{L_y}} dy \\ = e^{\frac{-b^2 m^2 \pi^2}{4\alpha L_y}} e^{-i \frac{m\pi y_0}{L_y}} \frac{\sqrt{\pi} b}{2\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\alpha} \left(\frac{L_y - y_0}{b} \right) + \frac{ibm\pi}{2\sqrt{\alpha} L_y} \right) - \operatorname{erf} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{y_0}{b} + \frac{ibm\pi}{2\sqrt{\alpha} L_y} \right) \right)$$

La figura 3.5⁵ muestra el campo de onda de la solución analítica para una membrana rectangular. Esta solución es un poco costosa computacionalmente, debido a que la expresión de la solución esta dada como una sumatoria doble que va desde uno hasta infinito.

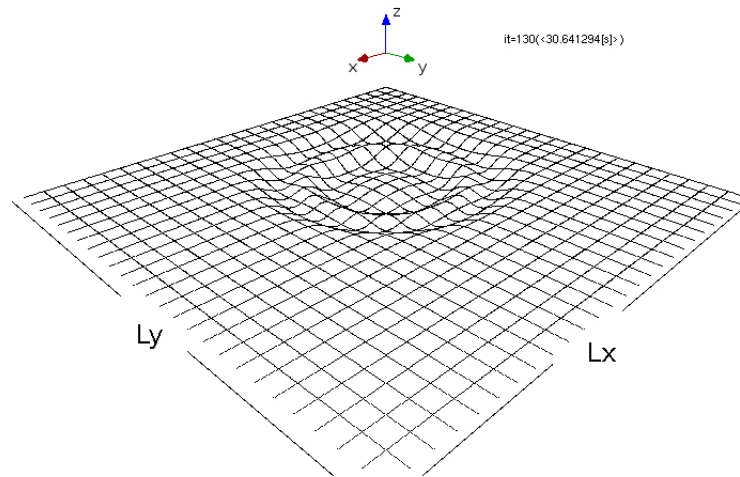


Figura 3.5: Gráfica del campo de onda de la solución de la ecuación de onda 2D para un medio homogéneo.

Podemos ver que se puede obtener una solución analítica para la ecuación de onda para un medio acústico para un dominio en dos dimensiones. A continuación se obtendrá la solución numérica para la ecuación de onda en una dimensión y se harán las respectivas comparaciones con la solución obtenida anteriormente. Estas comparaciones nos permitirán conocer que tan efectivo es el método numérico usado.

⁵Imagen resultado del algoritmo creado en C++

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDA

4.1. Sistema coordenado y cantidades básicas

Aunque empezamos aquí con el problema 1D, podemos especificar un sistema de coordenadas 3D. En la mayoría de los casos un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) es usado, con el eje x horizontal y positivo hacia la derecha, y el eje y positivo hacia abajo. Denotemos c como la velocidad de la onda, $u(x, y, z, t)$ como el desplazamiento y t el tiempo.

4.2. Esquema de diferencias finitas

La solución en diferencias finitas para la ecuación de onda es muy importante en el modelado de la propagación de ondas sísmicas y en imagen sísmica. Esta herramienta es muy usada en modelado y en migración sísmica.

En cuanto a soluciones computacionales para la ecuación de onda, es necesario tener en cuenta las condiciones para la estabilidad numérica. El análisis de estabilidad para soluciones por diferencias finitas de ecuaciones diferenciales parciales es llevado a cabo usando un método desarrollado originalmente por Von Neumann [13] (pág. 1033-1034)(ver apéndices).

4.3. Estabilidad del método

El método de diferencias finitas requiere que se determine ciertos criterios de muestreo espacial y temporal. Como es señalado por algunos autores, generalmente se escoge el muestreo espacial para evitar la dispersión de la malla en la solución. Luego de escoger el muestreo espacial, se escoge el muestreo temporal para evitar inestabilidad numérica. Según algunos artículos, Mufti (1990) y Wu et. al (1996), se derivó un criterio de estabilidad para soluciones en 3D por medio del método de diferencias finitas para la

ecuación de onda para sistemas de segundo y cuarto orden. Existe también una receta general para el criterio de estabilidad [14], que es generalmente aplicable para orden y dimensiones espaciales arbitrarios, este criterio es conocido como la ‘conjetura de Bording’ y se formula de la siguiente manera

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad (4.1)$$

donde h es el tamaño de malla, Δt es el intervalo de muestreo en el tiempo, c es la velocidad sísmica, a_1 es la suma de los valores absolutos de los pesos del operador en diferencias finitas para $\partial^2 u / \partial t^2$, y a_2 es la suma de los valores absolutos de los pesos de la aproximación en diferencias finitas para $\nabla^2 u$.

4.4. Problema acústico 1D

Considerando un medio homogéneo isótropo 1D representado por la ecuación 1.4, tenemos que la ecuación discretizada por medio del método de diferencias finitas centrado de segundo orden (ecuación 2.18), queda de la siguiente manera

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (4.2)$$

despejando u_i^{n+1} se obtiene la ecuación de movimiento discretizada

$$u_i^{n+1} = G^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1}, \quad (4.3)$$

donde Δx es el espaciamiento de malla, Δt es el intervalo de tiempo, $G = c\Delta t / \Delta x$, el superíndice n indica la posición temporal y el subíndice i indica la posición espacial. En la figura 4.1¹ podemos observar en que consiste el método, el cual obtiene la aproximación de la derivada teniendo en cuenta los valores de ciertos puntos de la malla.

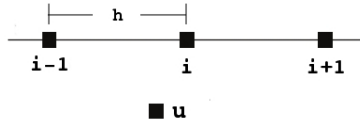


Figura 4.1: Esquema de diferencias finitas centrada para operadores diferenciales en 1D.

Según la ecuación 4.1, para el caso 1D, tenemos que para que la ecuación 4.3 el valor de G está definido por los valores de $a_1 = 1 + 2 + 1 = 4$ y $a_2 = 1 + 2 + 1 = 4$, quedando

¹Imagen creada usando **GIMP**

así la condición de estabilidad para el esquema de diferencias finita de segundo orden 1D

$$G = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.4)$$

En la figura 4.2² se muestra una gráfica de la solución numérica obtenida por medio del algoritmo usado.

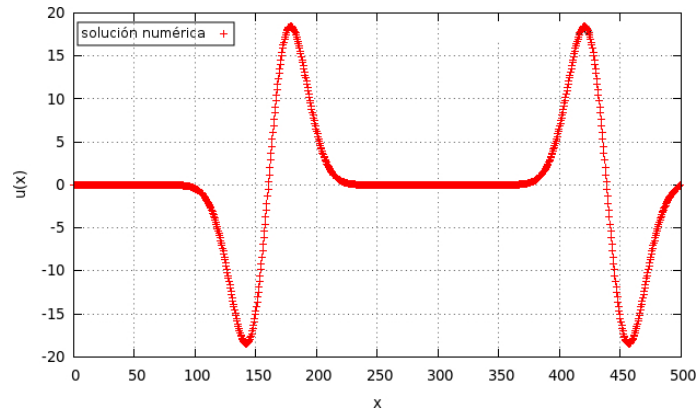


Figura 4.2: Solución numérica para la ecuación de onda homogénea 1D, con una aproximación de segundo orden tanto para el tiempo como para el espacio, con tamaño de malla $Lx = 1000$, con una velocidad $c = 3m/s$ con un espaciado de malla $\Delta x = 0,5$ y con un paso de tiempo $\Delta t = 0,1$, para una iteración en el tiempo $it = 1500$

Cambiando el valor de la velocidad, $c = 40cm/s$, se obtuvo el resultado mostrado en la figura 4.3; el cual es una comparación de la solución analítica con la solución numérica cambiando el parámetro G , en donde se ve que mientras más se acerca el valor de G al límite de la condición de estabilidad más se va a aproximar la solución numérica a la solución analítica.

Comparando ambas soluciones, tanto analítica como numérica, se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 4.4, que nos dicen cuanto se aproxima la solución numérica a la solución exacta.

Ahora realizando un análisis de error, el cual nos permite verificar la consistencia del esquema de diferencias finitas, teniendo en cuenta que

$$E_{absoluto} = |Sol_{analitica} - Sol_{numerica}|,$$

verificamos que el error absoluto tiende a cero a medida que el parámetro G tiende al límite superior, esto lo podemos ver en la figura 4.5. Además, se verifica que el esquema es consistente debido a que la diferencia entre la solución analítica y numérica tiende a cero mientras el espaciado de malla y el muestreo en el tiempo tienden a cero. Esto es mostrado en la figura 4.6.

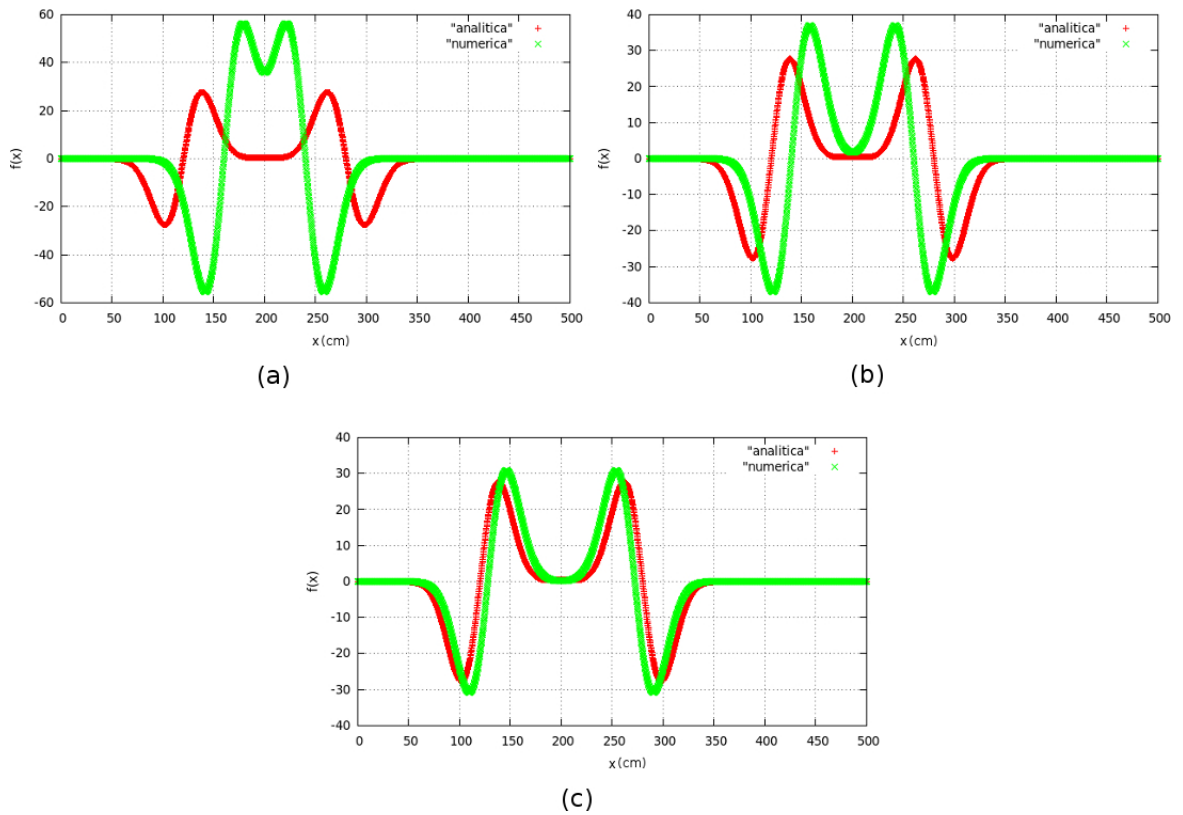


Figura 4.3: Solución obtenida teniendo que $L = 500\text{cm}$, $\Delta t = 0,005\text{s}$, $\Delta x = 0,2\text{cm}$ y $t = 2\text{s}$; para (a) $G = 1/2$, (b) $G = 3/4$ y (c) $G = 9/10$.

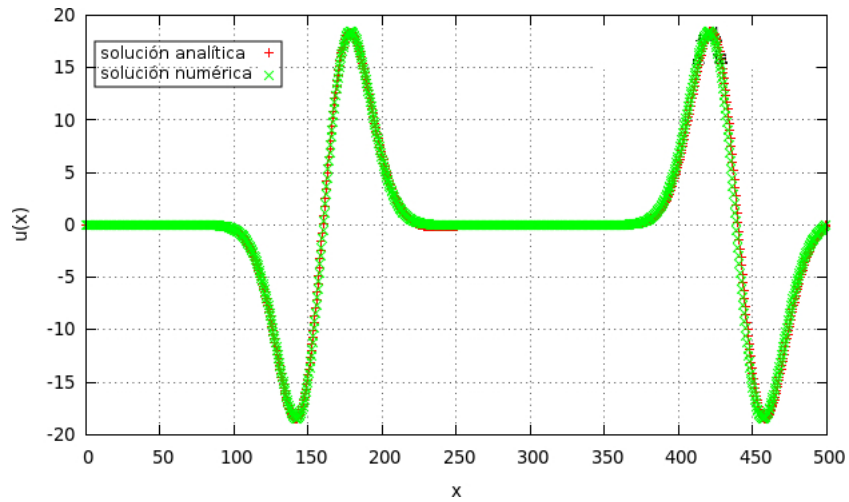


Figura 4.4: Comparación entre las soluciones de la ecuación de onda analítica y numérica.

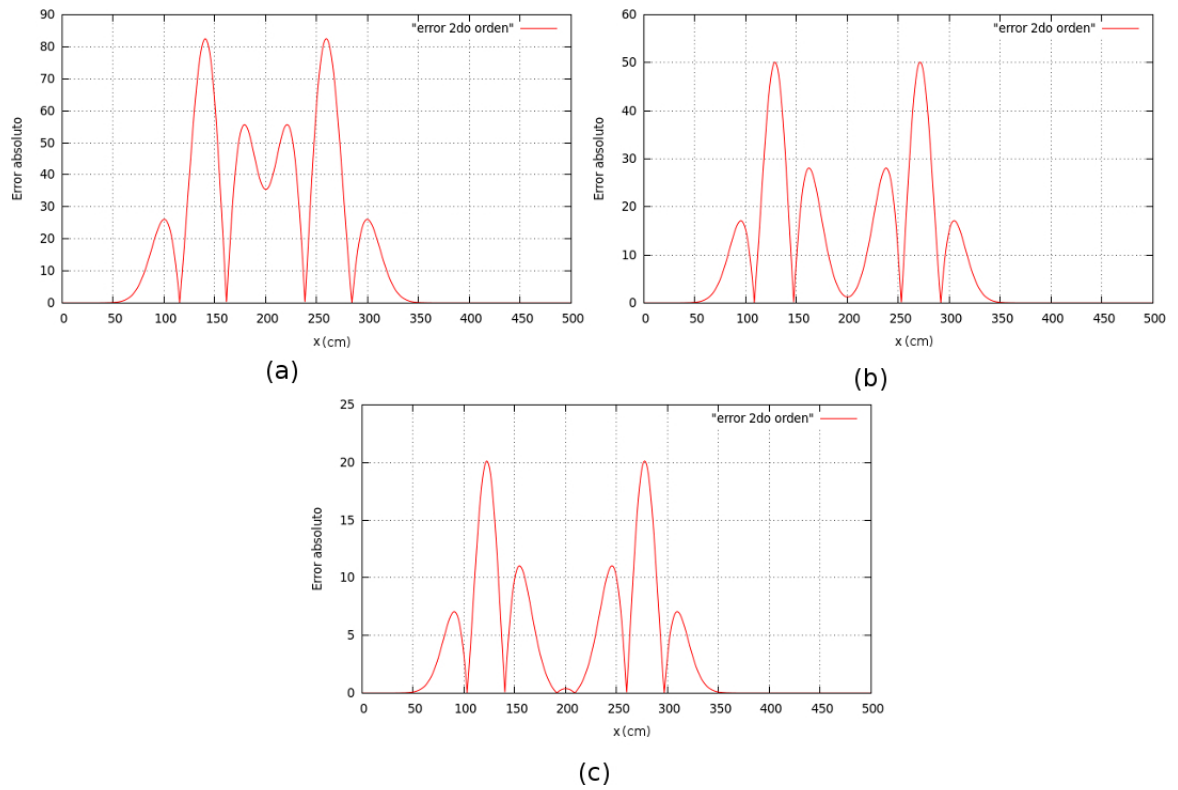


Figura 4.5: Error absoluto obtenido teniendo que $L = 500\text{cm}$, $\Delta t = 0,005\text{s}$, $\Delta x = 0,2\text{cm}$ y $t = 2\text{s}$; para (a) $G = 1/2$, (b) $G = 3/4$ y (c) $G = 9/10$.

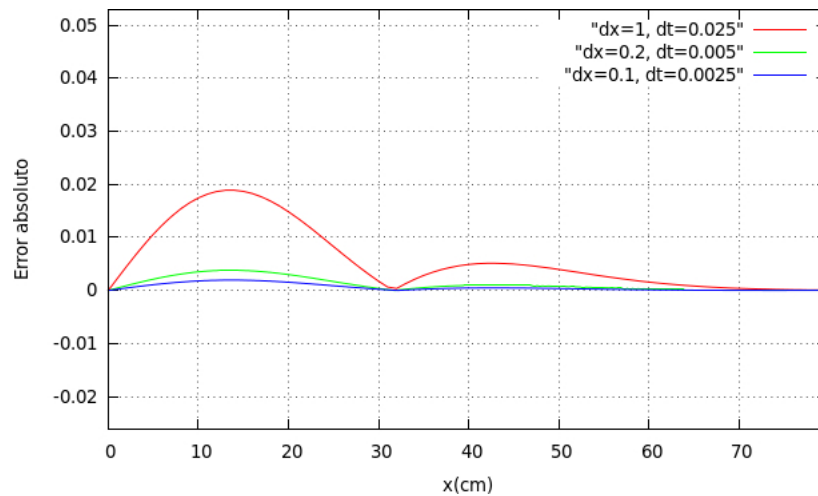


Figura 4.6: Error absoluto del método usando distintos valores para Δx y Δt para un tiempo $t = 5\text{s}$.

x_i	$u(x_i) - u_i$
0	0
50	0.000357
100	0.000046
150	0.076458
200	0.500001
250	0.076453
300	0.000029
350	0.114416
400	0.749973
450	0.114768
500	0

Cuadro 4.1: Error de truncamiento para un muestreo espacial $\Delta x = 0,1$, un muestreo temporal $\Delta t = 0,0025$ y para un tiempo $t = 5s$.

La convergencia es fácil de probar ya que si tenemos un esquema numérico que es consistente y que es estable (condicionalmente estable para este caso), automáticamente también es convergente [4].

4.5. Problema acústico 2D

Se considera la ecuación 1.5, la cual al discretizarla mediante el método de diferencias finitas nos queda de la siguiente manera

$$\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.5)$$

donde Δx es el muestreo espacial en x y Δy es el muestreo espacial en y . Si consideramos el mismo muestreo espacial en ambas coordenadas ($\Delta x = \Delta y = h$), y despejamos $u_{i,j}^{n+1}$ obtenemos la ecuación

$$u_{i,j}^{n+1} = G^2(u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}, \quad (4.6)$$

la cual es la expresión en diferencias finitas para la ecuación de onda 2D en un medio acústico, donde $G = c\Delta t/h$.

Para este caso, según la ecuación 4.1, teniendo que $a_1 = 1 + 2 + 1 = 4$ y $a_2 = 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 8$, llegamos a la expresión para la condición de estabilidad

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

A continuación se muestra la visualización del campo de onda de la ecuación de onda 2D para un medio acústico

²Imagen obtenida usando **gnuplot**

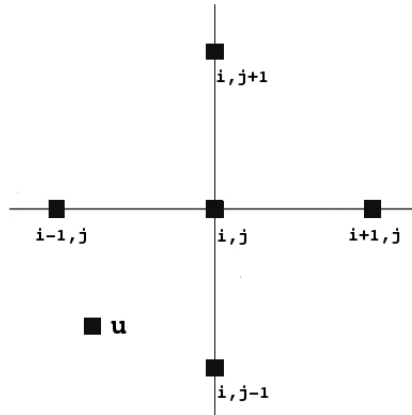


Figura 4.7: Esquema de diferencias finitas centrada para operadores diferenciales en 2D.

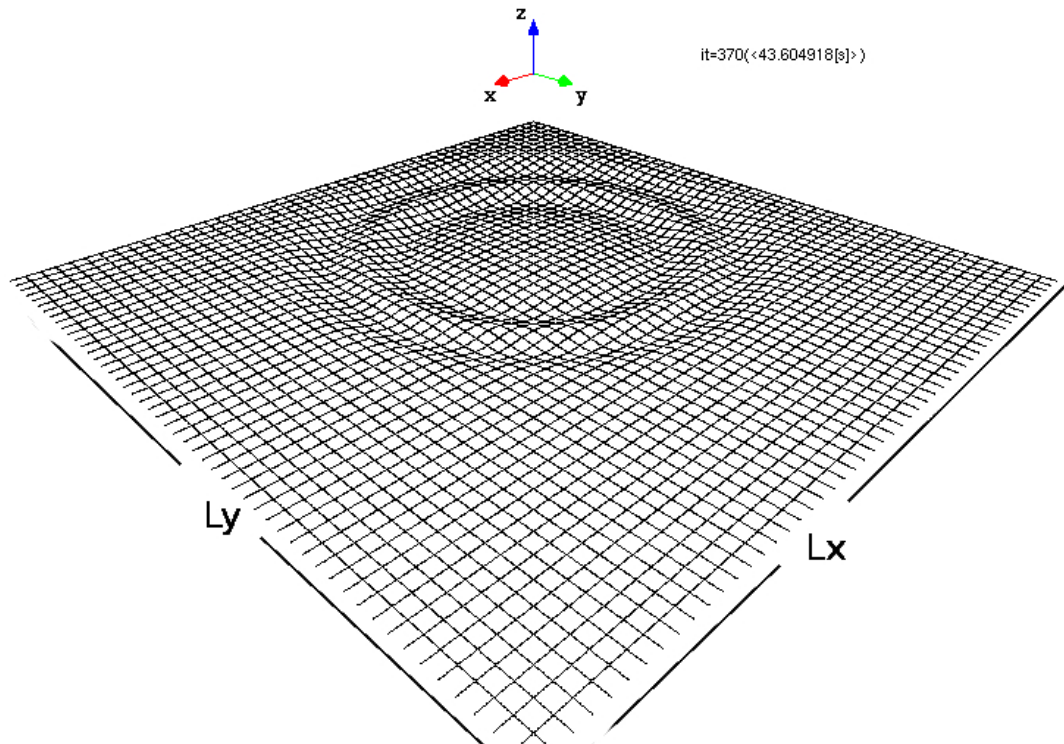


Figura 4.8: Visualización del campo de onda de la ecuación de onda 2D, $h = 0,5$, $dt = 0,1178$, $Lx = Ly = 1000$

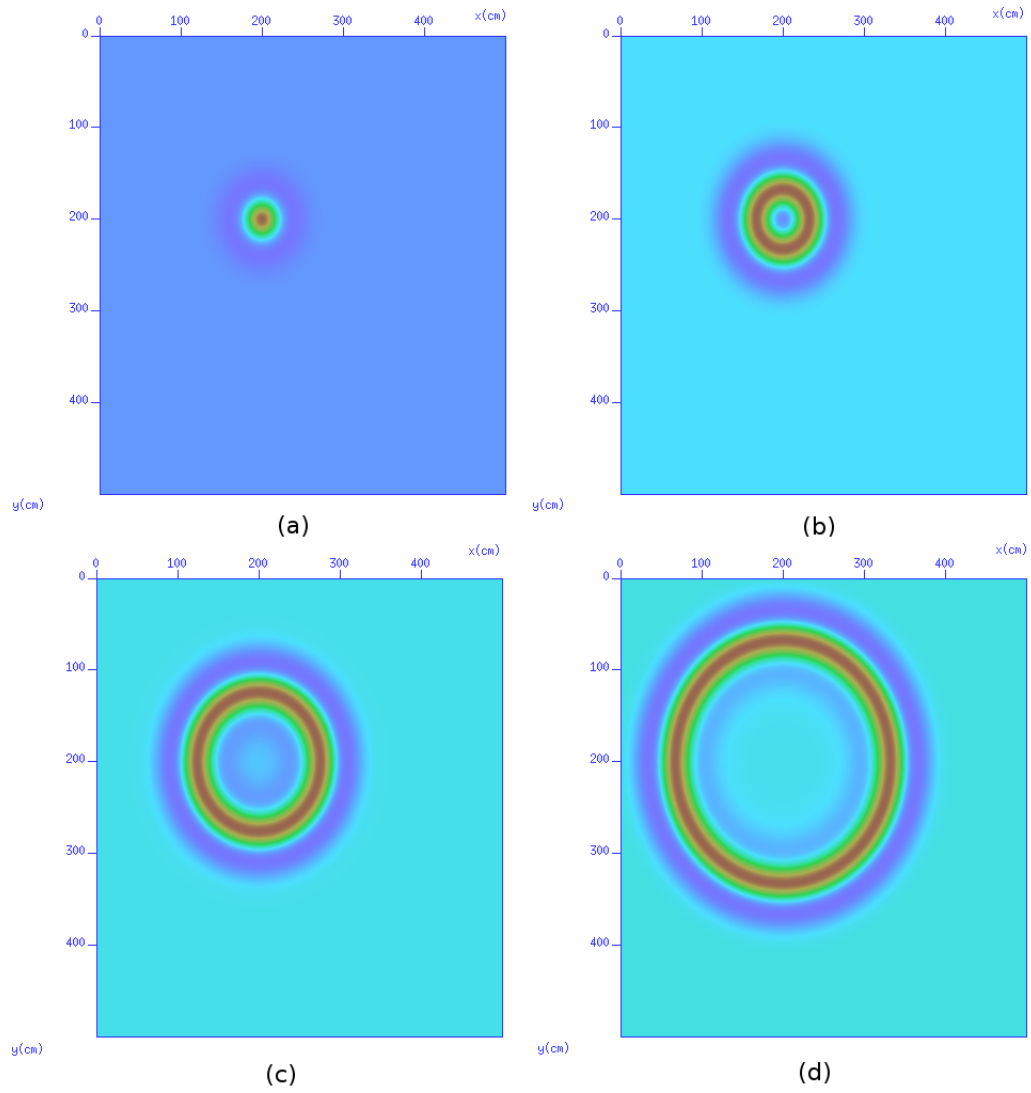


Figura 4.9: Solución numérica teniendo que $Lx = Ly = 500cm$, $h = 0,2cm$, $\Delta t = 0,00353s$ y $G = 1/\sqrt{2}$; para a) $t = 0,353s$, b) $t = 1,0606s$, c) $t = 2,1213s$, d) $t = 3,535s$.

CAPÍTULO 5

MODELADO PARALELIZADO PARA EL MODELO DE MARMOUSI

5.1. Esquema Numérico

K. S. Yee [9] y, A. Taflove y M. E. Brodwin [1] desarrollaron el método FDTD para solucionar las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell en el vacío. Este método ha sido usado como un estándar para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de manera general. El esquema FDTD está basado en la aproximación de diferencias finitas de los operadores diferenciales tanto en el espacio como el tiempo de la ecuación de onda.

Nuestro fenómeno físico es descrito por tres ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones 1.24 y 1.25, donde la derivada temporal de un campo esta relacionada con la derivada espacial de los otros dos. Para nuestro propósito consideraremos únicamente la propagación acústica, específicamente pequeñas variaciones las cuales pueden ser descritas en términos del campo escalar de presión $p(x, z, t)$ y el campo de velocidades $v(x, z, t)$. Las propiedades del medio sobre el que se propaga la onda acústica son tanto la velocidad c como la densidad ρ . Podemos considerar que estas propiedades varían respecto de la posición caracterizando un medio heterogéneo.

Considerando las ecuaciones 1.24 y 1.25, y expandiendo los términos en 2D tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\rho c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (5.3)$$

donde P es el campo escalar de presión, y $\mathbf{v} = \{v_x, v_z\}$, son los campos de velocidad.

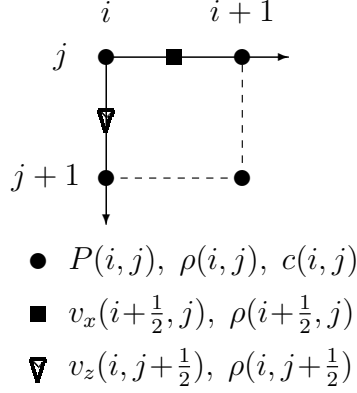


Figura 5.1: Esquema de malla intercalada, para la solución de los campos.

Para obtener un algoritmo FDTD con aproximación acústica, el campo de presión y las componentes de velocidad son discretizados tanto en el tiempo como el espacio. De manera tal que tenemos un campo escalar y un campo vectorial arreglados en el espacio-tiempo. Para el esquema acústico de FDTD los nodos deben ser acomodados de acuerdo a la figura 5.1 y a las ecuaciones discretas 5.4, 5.5, 5.6.

$$\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - P^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta t} = -\rho c^2 \left[\frac{v_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - v_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{v_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right] \quad (5.4)$$

$$\frac{v_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - v_x^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j) - P^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta x} \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{v_z^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j + \frac{1}{2})}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) - P^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta z} \right] \quad (5.6)$$

Un importante criterio es la estabilidad del algoritmo. Asumiendo una solución de onda plana propagándose a través del dominio, la estabilidad es conservada con la ecuación 5.7 :

$$c \delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta z)^2}}} \quad (5.7)$$

la precisión de la solución numérica esta asociada con la representación de la longitud de onda sísmica en seis punto de malla

$$\delta x = \delta z = \delta h = \frac{\lambda_{min}}{c} = \frac{c_{min}}{6 \cdot \pi f_0} \quad (5.8)$$

5.2. Cálculos con MPI

Este trabajo hace uso de la interfaz de paso de mensajes (MPI) para los cálculos en paralelo dentro de una división del dominio de manera eficiente. La figura 5.2¹ muestra el esquema de paralelización de la malla FDTD. Hemos descompuesto el espacio a simular dentro de subdominios y asignamos a cada uno una unidad de procesamiento, el número total de procesos puede depender del número de núcleos en el procesador o el número de hebras simultáneas a ejecutar [16]. Separamos el dominio a lo largo de la dirección x donde los respectivos subdominios vecinos intercambian la actualización de los campos en cada paso de tiempo [17].

La figura 5.2 está basada en la implementación del algoritmo paralelo resumido de la siguiente manera:

1. Inicialización MPI.
2. Lectura de parámetros para la simulación.
3. Cálculo dh , dt basado en la velocidad del medio y el criterio de las ecuaciones 5.7 y 5.8.
4. Descomposición del dominio computacional en subdominios.
5. Para cada paso de tiempo:
 - a) Calcula el campo $P(i, j)$.
 - b) Comunica $P(i, j)$ en las fronteras del subdominio.
 - c) Calcula los campos $v_x(i + \frac{1}{2}, j)$, $v_z(i, j + \frac{1}{2})$.
 - d) Comunica $v_x(i + \frac{1}{2}, j)$, $v_z(i, j + \frac{1}{2})$ en las fronteras del subdominio.
6. Finaliza MPI.

5.3. Modelado

El modelo de *Marmousi*, fue creado inicialmente por el Instituto Francés del Petróleo (IFP), es usado para aspectos prácticos en procesamiento de datos sísmicos como migración e inversión. Los datos utilizados en este trabajo para crear los modelos de velocidad y densidad se basan en una segunda versión del modelo conocido como *Marmousi2* [3]. Ver figuras 5.3 y 5.4². Los parámetros que se tuvieron en cuenta durante la simulación se encuentran resumidos en la tabla 5.1.

¹Imagen creada usando **inkscape**

²Imagen obtenida usando **seismic unix**

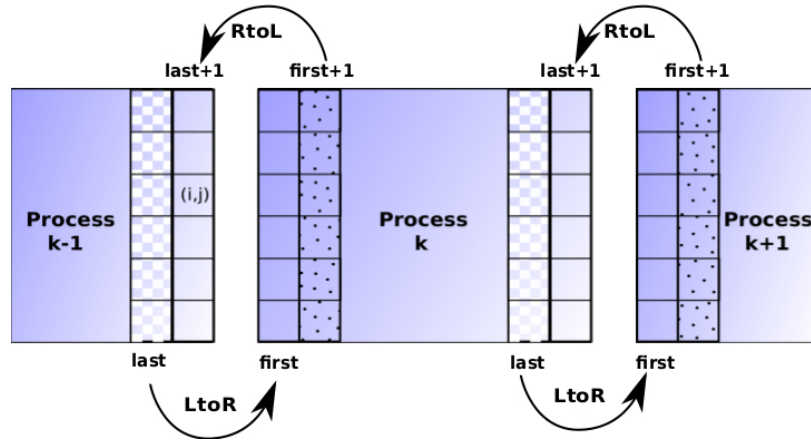


Figura 5.2: Esquema de paso de mensajes (comunicación) entre procesos vecinos.

Tamaño del paso de tiempo dt	0.000978 [s]
Numero de pasos T_{out}	2000
Tiempo simulado T	1.95608 [s]
Tamaño de malla dh	6.5 [m]
Longitud Lx	10563.9 [m]
Profundidad Lz	3737.98 [m]
Velocidad min c_{min}	1560.2 [m/s]
Velocidad max c_{max}	4700 [m/s]
Frecuencia de la Ondicula f_0	20 [Hz]

Cuadro 5.1: Parámetros que se tuvieron en cuenta durante la simulación.

numero de nodos	tiempo de cómputo (seg)
1	168,123
2	91,039
4	82,540

Cuadro 5.2: Tiempo de cálculo para 3000 pasos de tiempo

Este es el principio básico para generar un sismograma sintético, los cuales se obtiene después de simular cierta cantidad de disparos a través de la fuente sísmica. Los registros son obtenidos por medio de unos dispositivos receptores llamados geofonos (ver figura 5.7). La imagen 5.8³ muestra los registros obtenidos por los geofonos durante uno de los disparos.

³Imagen obtenida usando **seismic unix**

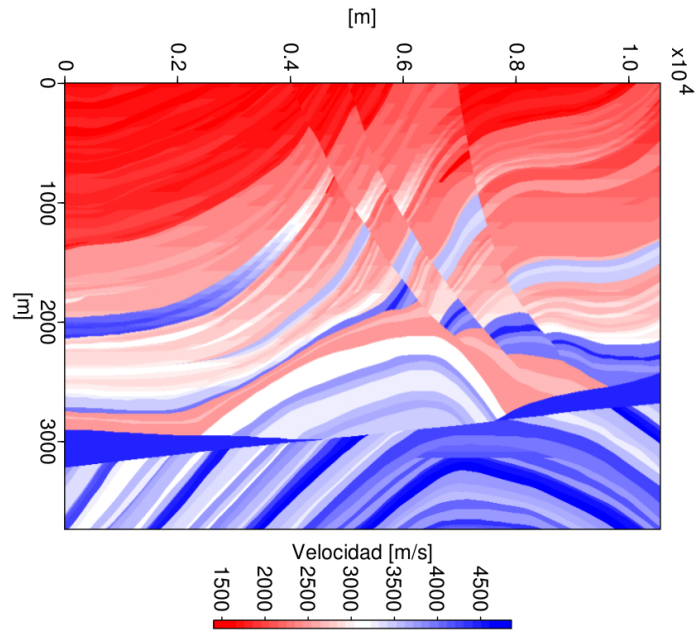


Figura 5.3: Valores de velocidad del campo onda acústico, en el modelo de Marmousi con 575x1625 nodos equivalentes en profundidad a 3.74 Km y 10.6 Km en longitud ($dh = 6,5 m$).

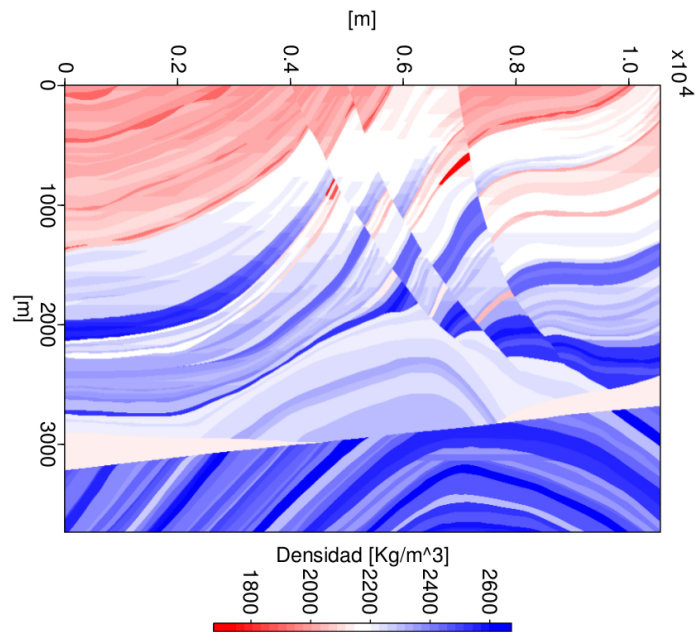


Figura 5.4: Valores de densidad [Kg/m^3] del modelo de Marmousi con 575x1625 nodos equivalentes en profundidad a 3.74 Km y 10.6 Km en longitud ($dh = 6,5 m$).

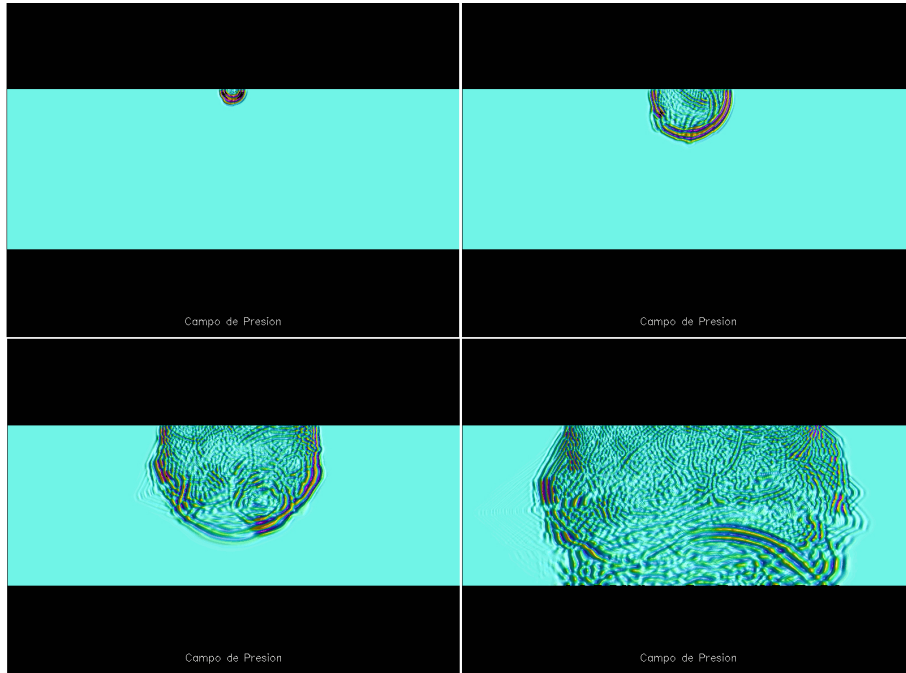


Figura 5.5: Propagación en el tiempo del campo de presión para el modelo de Marmousi.

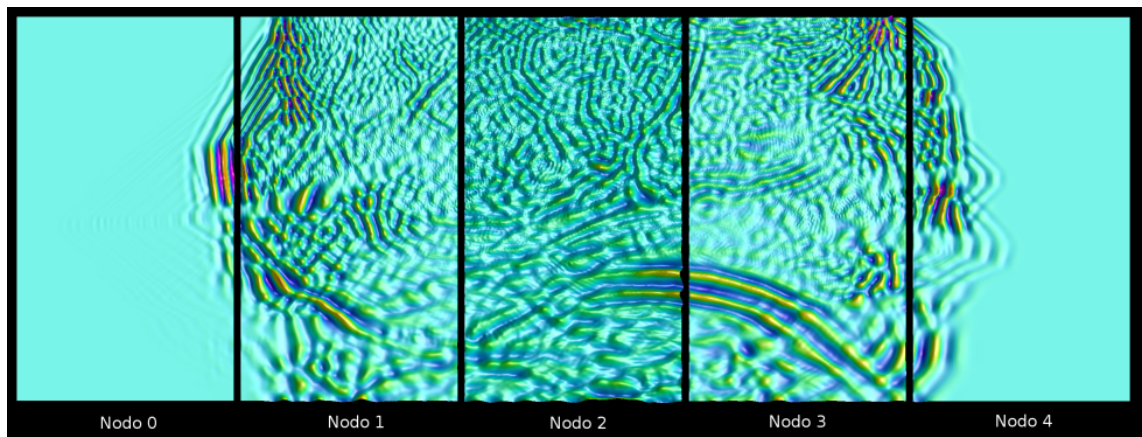


Figura 5.6: Captura de pantalla de la propagación de la onda sísmica entre procesos vecinos con 2000 pasos de tiempo, simulando 1,96 segundos; donde cada proceso calcula la solución en una malla de 575x325 nodos, para un total de 575x1625 nodos en cinco procesos.

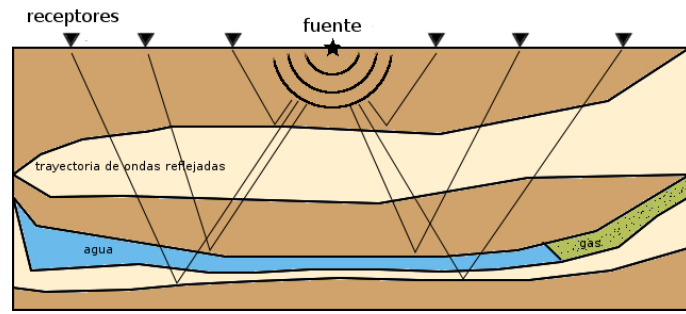


Figura 5.7: Modelo del suelo

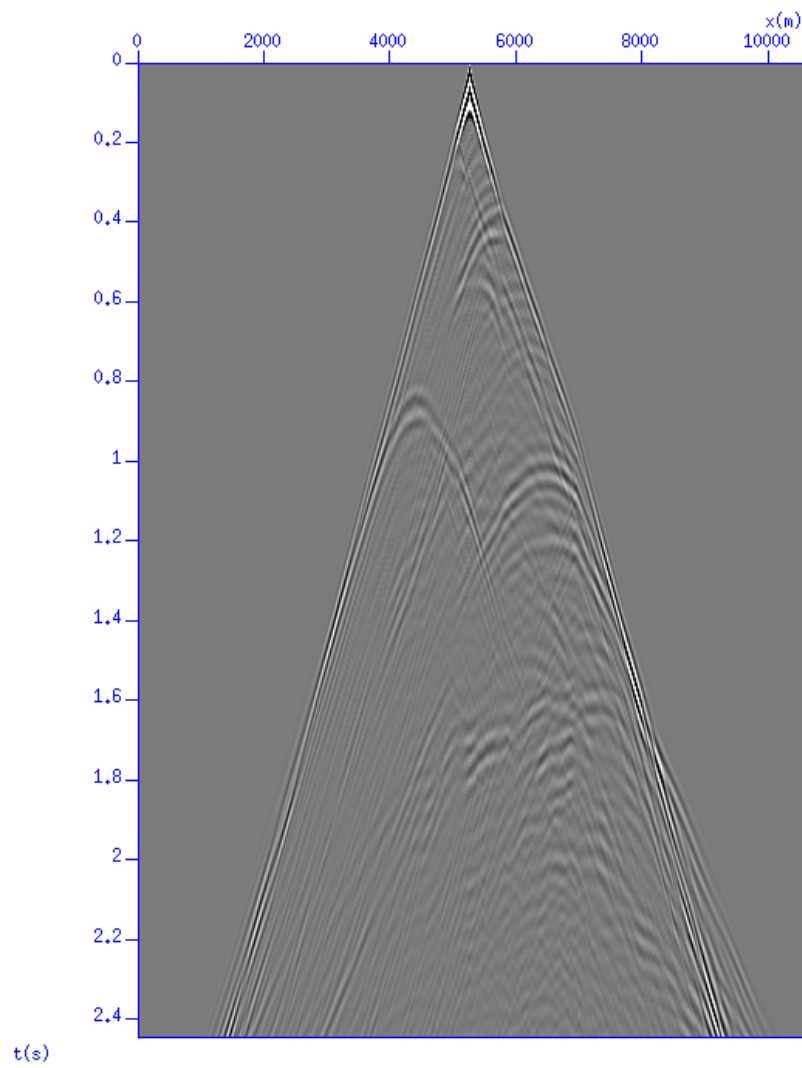


Figura 5.8: Registros obtenidos por los receptores al simular un disparo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Fue posible obtener una solución exacta a un fenómeno físico cuyo comportamiento está descrito por medio de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, la ecuación de onda, usando el método por transformada de Fourier; y una solución numérica condicionalmente estable por medio del método de diferencias finitas dominio temporales centradas y de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo. Todo esto para una y dos dimensiones en un medio homogéneo e isotrópico. Al trabajar la solución analítica pudimos darnos cuenta que era muy difícil obtener los resultados en comparación con la solución numérica; y esta se complicaba a medida que aumentaba el número de dimensiones espaciales.

También se llevó a cabo la construcción de un modelo computacional, usando el método diferencias finitas dominio temporales, para simular la propagación en el subsuelo, del campo de onda para un medio acústico. Este algoritmo se paralelizó con éxito reconstruyendo el campo de onda en un dominio repartido entre un máximo de cinco nodos o procesos.

El método *FDTD* es eficiente para estimar el valor del campo de onda tanto para medios homogéneos como también heterogéneos, mientras se cumpla la condición de estabilidad para este método. Los efectos de impedancia acústica del modelo de *Marmosi* tiene un grado significativo en el patrón *tiempo-profundidad* del frente de onda. Para la mayoría de nuestras simulaciones *FDTD* en paralelo, el tiempo de cálculo se redujo la mitad que el empleado por algoritmos lineales. Hemos observado que la solución de la ecuación de onda usando el método *FDTD* en paralelo es eficiente mientras existan pocas interrupciones por comunicación entre nodos o procesos, esto gracias a que dividimos el dominio en una única dimensión, ver figura 5.6.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Taflove and M. E. Brodwin. *Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent maxwell's equations*. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 23:623–630, 1975.
- [2] C. Guiffaut y K. Mahdjoubi. *A parallel fdtd algorithm using the mpi library*. IEEE Trans. Antennas Propagat., 43:94–103, 2001.
- [3] G. Martin, S. Larsen y K. Marfurt. *Marmousi2: An elastic upgrade for marmousi*. The Leading Edge, 25:156–166, 2006.
- [4] Halada Ladislav, Moczo Peter and Kristek Jozef. *The finite-difference method for seismologists : an introduction*. Comenius University, Bratislava, 2004. Textes présentés au Spice Research and Training Workshop, Venice, Italy, Sept. 25 - Oct. 2, 2004.
- [5] Hwei P. Hsu. *Análisis de Fourier*. Department of Electrical Engineering, Wayne State University. Michigan. Prentice Hall. 1998.
- [6] I-Liang Chern. *Finite difference methods for solving differential equations*. Department of Mathematics, National Taiwan University. 2009.
- [7] Johan O. A. Robertsson and Chris H. Chapman. *An efficient method for calculating finite-difference seismograms after model alterations*. Geophysics, 65:907–918, 2000.
- [8] K. R. Kelly R. M. Alford and D. M. Boore. *Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation*. Geophysics, 39:834–842, 1974.
- [9] K. S. Yee. *Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media*. IEEE Trans. Antennas Propagat., 14:302–307, 1966.
- [10] M. A. Dablain, *The application of high-order differencing to the scalar wave equation*, Geophysics, 51:54–66, 1986.
- [11] Peter V. O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingenieros*, 5ta edición. Universidad de Alabama, Birmingham, Thomson, 2003.

- [12] Porter M. B., Jensen F. B., Kuperman W. A. and Schmidt H., *Computational ocean acoustics*. Springer-Verlag, New York, NY (USA), 2000.
- [13] Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T. y Flannery Brian P., *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3rd edition, 2007.
- [14] Slawinski Raphael, Lines Larry R. and Bording R. Phillip. A., *Recipe for stability of finite-difference wave-equation computations*. Geophysics, 64(3):967–969, 1999.
- [15] Vetterling William T., Press William H., Teukolsky Saul A. and Flannery Brian P. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3rd edition, 2007.
- [16] William Gropp y Ewing Lusk. *Installation and user's guide to mpich, a portable implementation of mpi version 1.2.7*. Technical report, Argonne National Laboratory, 2008.
- [17] Yukiya Aoyama y Jun Nakano. *Practical mpi programming* , Technical report, IBM, International Technical Support Organization, 1999.

APÉNDICES

ANÁLISIS DE FOURIER

Series de Fourier

Una *función periódica* está definida como una función tal que

$$f(t) = f(t + T) \quad (\text{A.1})$$

para todo valor de t , donde la constante T es conocida como el *periodo* de la función. Mediante repeticiones de la ecuación A.1 tenemos

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.2})$$

Este tipo de funciones periódicas pueden ser representadas por medio de la serie trigonométrica [5]

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + \dots + b_1 \sin w_0 t + b_2 \sin 2w_0 t + \dots \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_0 t + b_n \sin nw_0 t), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $w_0 = 2\pi/T$.

Una serie como la representada en la ecuación A.3 se conoce como *serie trigonométrica de Fourier*.

En la ecuación A.3 los valores a_n y b_n se conocen como los *coeficientes de Fourier*, los cuales están dados por las siguientes expresiones

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (\text{A.4})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.5})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.6})$$

Transformada de Fourier

Sea $f(t)$ una señal continua. Se define la transformada de Fourier de t , denotada con $F(w)$, como la función

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt, \quad (\text{A.7})$$

y la transformada inversa como la función

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dt. \quad (\text{A.8})$$

aquí $f(t)$ se denomina la transformada inversa de $F(w)$. Las ecuaciones [A.7](#) y [A.8](#) se conocen como *par de transformadas de Fourier*. La función $F(w)$, por lo general es compleja,

$$F(w) = R(w) + iX(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}, \quad (\text{A.9})$$

donde $|F(w)|$ se denomina *espectro de magnitud* de $f(t)$, y $\phi(w)$, *espectro de fase* de $f(t)$.

Las condiciones para que la transformada de Fourier exista se conocen como condiciones de Dirichlet, cuyos enunciados son:

1. la integral del valor absoluto de $f(t)$ debe ser finita.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.10})$$

Esta condición es suficiente pero no necesaria, ya que las funciones que no satisfacen [A.10](#) pueden tener transformada de Fourier.

2. $f(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo.

ESTABILIDAD L^2 : ANÁLISIS DE VON NEUMANN

Esta es una norma apropiada para nuestro análisis de estabilidad. Para coeficientes constantes y para el caso escalar, el análisis de estabilidad de Von Neumann nos da una condición necesaria para la estabilidad. Para este análisis se usa el método de Fourier [6]. Dado $\{U_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ se define

$$\|U\|^2 = \sum_j |U_j|^2 \quad (\text{B.11})$$

y su transformación de Fourier

$$\hat{U}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_j U_j e^{-ij\xi}. \quad (\text{B.12})$$

Las ventajas de analizar el esquema de diferencias finitas por medio del método de Fourier son

- El operador desplazamiento es transformado en un multiplicador:

$$T\hat{U}(\xi) = e^{i\xi}\hat{U}(\xi), \quad (\text{B.13})$$

donde $(TU)_j = U_{j+1}$;

- La igualdad de Parseval

$$\|U\|^2 = \|\hat{U}\|^2 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{U}(\xi)|^2 d\xi. \quad (\text{B.14})$$

Si un esquema en diferencias finitas es expresado como

$$U_j^{n+1} = (GU^n)_j = \sum_{i=-l}^m a_i (T^i U^n)_j, \quad (\text{B.15})$$

Luego

$$\hat{U}^{n+1} = \hat{G}(\xi)\hat{U}^n(\xi). \quad (\text{B.16})$$

De la igualdad de Parseval,

$$\begin{aligned}\|U^{n+1}\|^2 &= \|\hat{U}^{n+1}\|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{G}(\xi)|^2 |\hat{U}^n(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \max_{-\pi}^{\pi} |\hat{G}(\xi)|^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{U}^n(\xi)|^2 d\xi \\ &= |\hat{G}|_{\infty}^2 \|U\|^2.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Así, la condición suficiente para la estabilidad es

$$|\hat{G}|_{\infty} \leq 1.\tag{B.18}$$

LIBRERÍAS DE PASO DE MENSAJERÍA

MPI (*Message-Passing interface* o *Librerías de paso de mensajería*) es una interfaz de un conjunto de bibliotecas de paso de mensajes las cuales nos permiten compartir información entre procesos. Cuando definimos un dominio en cualquier tipo de problema estamos definiendo lo que es para nosotros nuestra área de trabajo.

MPI se basa principalmente en el modelo de paso de mensaje de la programación en paralelo, en la cual los datos se mueven del espacio de memoria de un proceso al de otro proceso a través de operaciones en cada proceso. *MPI* es una especificación y no una implementación, existen muchas implementaciones de *MPI* como lo son *MPICH2* [16] y *Open-MPI*, las cuales nos permiten soportar diferentes cálculos y plataformas, incluyendo sistemas *clusters*.

Conceptos básicos

Rutinas

En muchos casos tenemos que los nombres de las funciones de *MPI* en *C* están dados de la siguiente manera

`MPI_Class_action_subset`

Y si no existe una subrutina

`MPI_Class_action`

Ciertas acciones han sido estandarizadas en las bibliotecas de *MPI*. Algunas de esas acciones son:

- **Create:** Crea un nuevo objeto.
- **Get:** Recupera información acerca de un objeto.
- **Set:** Establece información en un objeto.

- **Delete:** Borra la información.
- **Is:** Pregunta si un objeto tiene o no cierta propiedad.

Argumentos de funciones

Los argumentos de las funciones usadas en *MPI* están marcados como:

- **IN:** Esta función usa el valor del argumento de entrada pero no lo actualiza.
- **OUT:** Esta función actualiza el valor del argumento de entrada pero no lo utiliza.
- **INOUT:** Esta función puede actualizar tanto como usar el valor del argumento de entrada.

Procedimientos y variables

Los procedimientos que realizan las funciones en *MPI* son caracterizados por ciertos términos

- **no-bloqueo:** Si el procedimiento puede retornar antes de que la operación se complete, y antes de que el usuario pueda reusar los recursos especificados en la llamada de dicha función.
- **bloqueo:** Si lo que retorna el procedimiento indica al usuario que se le permite reusar los recursos especificados en la llamada de dicha función.
- **local:** Si la finalización de un procedimiento depende únicamente de la ejecución local de dicho procedimiento.
- **no-local:** Si la finalización de un procedimiento requiere de la ejecución de un procedimiento de MPI en otro proceso.
- **colectivo:** Si todos los procesos de un grupo de procesos necesita invocar el mismo procedimiento.

Tipos de datos

Algunos términos que caracterizan los tipos de datos en *MPI* son

- **predefinido:** Son aquellos que tienen un nombre predefinido.
- **derivado:** Son aquellos que no están definidos.
- **portátil:** Es un tipo de dato predefinido o es un tipo de dato derivado que se crea usando ciertos tipos de constructores.
- **equivalentes:** Son aquellos que son creados con la misma secuencia de llamadas.

Introducción a la programación en paralelo

Archivos de cabecera

Para hacer uso de las bibliotecas de *MPI* es necesario hacer el llamado de dicha biblioteca en el encabezado del código

```
#include <mpi.h> /* Para C ... */  
#include <mpicxx.h> /* Para C++ */  
#include <mpif.h> /* Para Fortran */
```

Además es necesario incluir cada biblioteca necesaria en lo que vallamos a hacer

```
/* Librería estándar de entrada y salida */  
#include <stdio.h>  
/* Librería para el uso de herramientas matemáticas */  
#include <math.h>
```

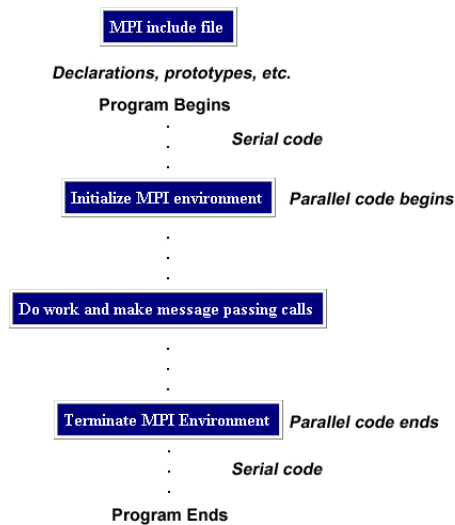


Figura C.1: Cuerpo de un programa paralelizado con la biblioteca *MPI*¹.

Comunicadores

MPI usa objetos llamados comunicadores y grupos para definir que conjunto de procesos pueden comunicarse con cada uno de los otros.

El Rango \Rightarrow Junto con el comunicador cada proceso tiene un identificador, conocido

¹Imagen obtenida de <https://computing.llnl.gov/tutorials/mpi/>

con el nombre de ‘rango’, que es asignado por el sistema al momento de inicializar los procesos. Este también es usado para especificar la fuente y el destino de los mensajes. Este es usado para controlar la ejecución del programa (`if rank=i do this or that`).

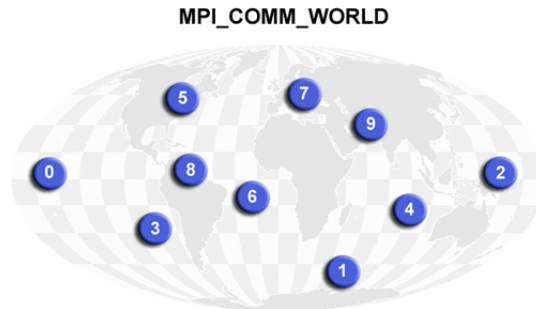


Figura C.2: Comunicador entre nodos en *MPI*².

Rutinas para el manejo del entorno MPI

Las rutinas para el manejo del entorno *MPI* son usadas para una serie de procesos tales como inicializar y terminar el entorno *MPI*, consulta el entorno y la identidad, etc. Algunas de ellas son

- MPI_Init
Inicializa la ejecución del entorno MPI.
`MPI_Init(&argc, &argv)`
- MPI_Comm_size
Determina el numero de procesos en el grupo asociado con un comunicador.
`MPI_Comm_size(comm, &size)`
- MPI_Comm_rank
Determina el rango del proceso llamado en el comunicador.
`MPI_Comm_rank(comm, &rank)`
- MPI_Abort
Termina todos los procesos MPI asociados con el comunicador.
`MPI_Abort(comm, errorcode)`
- MPI_Abort
Termina todos los procesos MPI asociados con el comunicador.
`MPI_Abort(comm, errorcode)`

²Imagen obtenida de <https://computing.llnl.gov/tutorials/mpi/>

- MPI_Wtime
Devuelve el tiempo transcurrido por el proceso llamado en segundos.
MPI_Wtime()
- MPI_Wtick
Devuelve la resolución en segundos de MPI Wtime.
MPI_Wtick()
- MPI_Finalize
Termina la ejecución del ambiente MPI.
MPI_Finalize()

Mi primer código con MPI

Código "Hello World" paralelizado

```
#include <mpi.h>
#include <stdio.h>
int main(argc,argv)
int argc;
char *argv[]; {
    int numtasks, rank, rc;
    rc = MPI_Init(&argc,&argv);
    if (rc != MPI_SUCCESS) {
        printf ("Error starting MPI program. Terminating.\n");
        MPI_Abort(MPI_COMM_WORLD, rc);
    }
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD,&numtasks);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD,&rank);
    printf ("Number of tasks= %d My rank= %d\n", numtasks,rank);
    /***** do some work *****/
    MPI_Finalize();
}
```

Problema de frontera

Lo que primero se tienen en cuenta para resolver un problema físico es el tipo de geometría que tendremos en cuenta en nuestro problema, sus condiciones de frontera y sus condiciones iniciales. En el caso de la programación en paralelo se debe tener en cuenta la geometría del dominio y como va a ser la comunicación entre los nodos

Fronteras entre nodos en un dominio 1D

Cuando consideramos un arreglo de nodos en una dimensión es muy sencillo saber que nodos se comunican entre si. En un arreglo unidimensional de nodos, estos pueden

tener de uno a dos nodos vecinos. Los nodos primero y ultimo tienen solo un vecino mientras los nodos intermedios tienen dos.

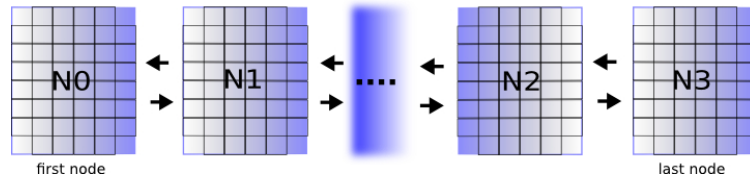


Figura C.3: Comunicación entre nodos, 1D³.

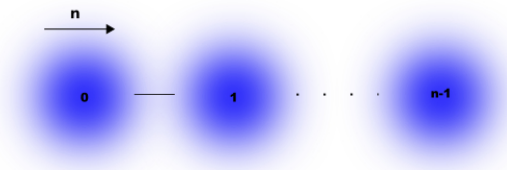


Figura C.4: Modelo para la comunicación entre nodos en 1D.

```
if(taskid == nproc-1)
    right = MPI_PROC_NULL;
else
    right = taskid + 1;

if(taskid == 0)
    left = MPI_PROC_NULL;
else
    left = taskid - 1;
```

Figura C.5: Código para asignar los nodos que envían y reciben información.

³Imagen creada con Inkscape.

PARTICIPACIÓN EN CONGRESO DE LA ENIEF

Asociación Argentina
de Mecánica Computacional



Mecánica Computacional Vol XXVIII, págs. 287-293 (artículo completo)
Cristian García Bauza, Pablo Lotito, Lisandro Parente, Marcelo Vénere (Eds.)
Tandil, Argentina, 3-6 Noviembre 2009

MODELADO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS BASADO EN ALGORITMO FDTD EN PARALELO

Alberto Silva L.^a, Herling Gonzalez A.^b and William Agudelo^c

^a*Escuela de Física y Grupo de Petrosísmica, Universidad Industrial de Santander, Cra 27 Calle 9
Ciudad Universitaria, Bucaramanga (Santander), Colombia, silva.l.a.l@gmail.com,
<http://www.xiccg.uis.edu.co/petrosismica>*

^b*Grupo de Geofísica, Instituto Colombiano de Petróleo, Piedecuesta, Santander, Colombia.
herling@tux.uis.edu.co*

^c*Grupo de Geofísica, Instituto Colombiano de Petróleo, Piedecuesta, Santander, Colombia.
william.agudelo@ecopetrol.com.co*

Keywords: FDTD, MPI, Ecuación de Onda Acústica, Geofísica Computacional.

Abstract. Los algoritmos de malla intercalada fueron creados para guardar una mejor estabilidad y eficiencia en diferencias finitas dominio temporales (FDTD), en nuestro caso esta técnica es usada para modelar las propagaciones de ondas sísmicas, esquema que permite reproducir la fenomenología de la dinámica sísmica en medios heterogéneos. Como la solución de las ecuaciones de ondas son computacionalmente costosas, presentamos una propuesta general para paralelizar y acelerar la solución.