

ACERCA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPIŃSKI

Alvaro Jesus Campo Romero

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2015

ACERCA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPIŃSKI

Alvaro Jesus Campo Romero

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Directora

Sonia Marleni Sabogal Pedraza
Doctora en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Matemáticas

Bucaramanga

2015

*“Si quisierais saber Matemáticas,
no tengáis prisa, no deseéis dinero,
aunque fuereis rey o reina.” -Jonathan-*
(El teorema del loro, Denis Guedj)

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	11
1. PRELIMINARES	12
1.1. Espacios métricos	12
1.2. Sucesiones	14
1.3. Conjuntos abiertos y cerrados	17
1.4. Compacidad y completez	22
1.5. El espacio donde viven los fractales	23
1.6. Contracciones	25
2. GÉNESIS	27
2.1. Algunos conceptos preliminares	27
2.2. La construcción original de W. Sierpiński	29
2.3. El conjunto \mathcal{T} como una curva jordaniana	32
2.4. Puntos de ramificación	38
3. PLATO FUERTE	44
3.1. Sistemas iterados de funciones	44

3.2. La función de direccionamiento	46
3.3. El triángulo de Sierpiński	47
3.3.1. El triángulo de Sierpiński como el atractor de un SIF	48
3.3.2. Otra manera de construir el triángulo de Sierpiński	50
4. CONCLUSIONES	59
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
BIBLIOGRAFÍA	61

LISTA DE FIGURAS

2.1. Construcción geométrica del conjunto \mathcal{T}	30
2.2. Perímetro de cada término de la sucesión $\langle L_n \rangle$	31
2.3. Construcción geométrica del conjunto \mathfrak{R}	33
2.4. P_n , para $n = 6$	39
2.5. Aproximación visual de los subcontinuos P, Q y R	41
2.6. A, B, C identificados.	42
3.1. Construcción geométrica del triángulo de Sierpiński.	48
3.2. La sucesión $\langle L_n \rangle$	51
3.3. Los segmentos L_{pq}, L_{qr} y L_{pr}	53
3.4. x_0	54
3.5. $L_1 - L_0$	56

RESUMEN

TITULO: ACERCA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPIŃSKI*

AUTOR: Alvaro Jesus Campo Romero**

PALABRAS CLAVES: Triángulo de Sierpiński, punto de ramificación, función de direccionamiento, atractor de un SIF, espacio métrico, fractal.

DESCRIPCIÓN:

En pocas palabras, este trabajo de grado es, principalmente, el análisis de los artículos: “*Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*”, [1], y “*Acerca del triángulo de Sierpiński*”, [2]. Profundizando más, consta de tres capítulos llamados “Preliminares”, “Génesis” y “Plato Fuerte”.

Primero, abordamos los conceptos previos con los que el lector debe estar familiarizado para tener un mejor entendimiento de lo que sigue. Se trata, de una forma concisa y sustanciosa, sobre espacios métricos, sucesiones, compacidad, conexidad, contracciones, entre otros.

El segundo capítulo, basado en [1], es la presentación del triángulo de Sierpiński visto bajo la lupa del gran matemático polaco Waclaw Sierpiński, o sea, como una curva que es simultáneamente “cantoriana”, “jordaniana” y en la que cada uno de sus puntos, salvo tres, es de ramificación.

Finalmente, en el último capítulo, hacemos un tratamiento moderno del triángulo de Sierpiński, enmarcados en el artículo [2]. Esto es, mediante las ideas de sistema iterado de funciones y función de direccionamiento. Para esto, en las dos primeras secciones de este capítulo, proporcionamos los fundamentos de estos conceptos, y posteriormente demostramos algunos resultados importantes concernientes a nuestro fractal, no sin antes definirlo formalmente. Además, usando una caracterización a través de códigos de ciertos puntos del triángulo de Sierpiński, establecemos una propiedad de este fractal que resulta, en cierta forma, contraintuitiva.

* Tesis.

** FACULTAD DE CIENCIAS, MATEMÁTICAS.
DIRECTORA Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

ABSTRACT

TITLE: ABOUT THE CONSTRUCTION OF THE SIERPIŃSKI TRIANGLE*

AUTHOR: Alvaro Jesus Campo Romero**

KEY WORDS: Sierpiński triangle, ramification point, addressing function, SIF's attractor, metric space, fractal.

DESCRIPTION:

In short, this thesis is primarily an analysis of the articles: "*Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*", [1], and "*Acerca del triángulo de Sierpiński*", [2]. Going further, it consists of three chapters called "Preliminares", "Génesis" and "Plato Fuerte".

First, we deal with the previous concepts which the reader should be familiar to have a better understanding of what follows. It is, in a concise and substantial manner, about metric spaces, sequences, compactness, connectedness, contractions, among others.

The second chapter, based on [1], is the presentation of the Sierpiński triangle, seen under the microscope of the great Polish mathematician Waclaw Sierpiński, that is, as a curve that is simultaneously "cantoriana", "jordanaiana" and in which each of its points, but three, is a ramification point.

Finally, in the last chapter, we make a modern treatment of the Sierpiński triangle, framed in article [2]. That is, by the ideas of iterated function system and addressing function. For this, in the first two sections, we provide the basis for these concepts, and then demonstrate some important results concerning our fractal, not before formally defining it. Furthermore, using a characterization through codes of certain points of the Sierpiński triangle, we establish a property of this fractal that is, in some way, "counterintuitive".

* Thesis.

** FACULTAD DE CIENCIAS, MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

INTRODUCCIÓN

Hace poco (2010), murió Benoît Mandelbrot, matemático polaco considerado el padre de los fractales y conocido también por el conjunto que lleva su apellido. Pero, ¿por qué son importantes los fractales? Una respuesta contundente es que estos objetos son más parecidos a las formas que se presentan en la naturaleza, que las figuras que se estudian en la geometría euclidiana. Además, son visualmente atractivos, tienen aplicaciones en numerosas ramas de la ciencia e implican variados problemas abiertos que hacen de la geometría fractal, campo de estudio de los fractales, una interesante opción para los aficionados y estudiosos de las matemáticas.

Y ¿qué es un fractal? Aunque no hay una definición matemática universal de este término, sí existen dos propiedades fundamentales que lo identifican; estas son: la autosemejanza y la dimensión extraña. Brevemente intentaremos dar una explicación de cada una. La autosemejanza se refiere a que un fractal está formado por infinitas copias de sí mismo, solo que reducidas y colocadas en diferente posición. Y la segunda, indica que su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica (para figuras comunes, como un segmento o un cuadrado, estas dimensiones coinciden)^{***}.

Se espera, con este trabajo, acercar a los estudiantes de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas y carreras afines, a una llamativa rama de estudio, la geometría fractal, y motivarlos a estudiarla con más profundidad.

^{***} Puede conocer más al respecto en [3, introducción del capítulo 1].

Capítulo 1

PRELIMINARES

Como el título indica, las definiciones, resultados y ejemplos que se presentan en este capítulo, tomados en su mayoría de [3] y [5], son para precisar los conceptos que se usarán más adelante, en Génesis y Plato Fuerte. Se procuró incluir, entre lo más importante, lo más posible para tratar de evitar que el lector, con conocimientos de fundamentos de matemáticas, tenga que recurrir a otras fuentes para lograr un entendimiento más que básico de esta lectura que, técnicamente, comienza ahora.

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1.1. Un **espacio métrico** es un par ordenado (X, d) , donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple lo siguiente, $\forall x, y, z \in X$:

$$\text{(EM1)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{(EM2)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

d se llama **métrica** sobre X .

Ejemplo 1.1.1. Los siguientes pares ordenados son espacios métricos:

- (\mathbb{R}, d_u) , donde $d_u(x, y) = |x - y|$.

- (\mathbb{R}^n, d_n) , donde $d_n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

d_u y d_n se llaman *la métrica usual o euclidiana sobre \mathbb{R} y \mathbb{R}^n* , respectivamente.

- (X, d_δ) , donde X es un conjunto no vacío, y d_δ se define así: $\forall x, y \in X$,

$$d_\delta(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

d_δ se llama *la métrica discreta*.

Cuando se habla de \mathbb{R} o \mathbb{R}^n , como espacio métrico, pero sin especificar la métrica, se asume que es la usual. Frecuentemente, al valor $d(x, y)$ se le llama “distancia de x a y ”. En ocasiones, para simplificar el lenguaje, en lugar de hacer referencia al espacio métrico como par ordenado, se nombra solo al conjunto; de acuerdo al contexto, uno debería entenderlo.

Proposición 1.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x, y, z \in X$, se tiene:*

- (a) $d(x, y) \geq 0$.
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Demostración. (a) Por (EM1) y (EM2), $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$. Entonces, $0 \leq 2d(x, y)$. Luego, $d(x, y) \geq 0$.

(b) Por (EM2), $d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x)$. Pero por (EM1), $d(x, x) = 0$. De ahí que

$$d(x, y) \leq d(y, x). \quad (\text{i})$$

Análogamente, por (EM2), $d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y)$. Pero por (EM1), $d(y, y) = 0$. Así,

$$d(y, x) \leq d(x, y). \quad (\text{ii})$$

De (i) y (ii), se deduce que $d(x, y) = d(y, x)$.

(c) De (EM2) y (b), la prueba es inmediata. ■

Proposición 1.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico, y $S \subseteq X$. Entonces, $(S, d|_S)$ es un espacio métrico, donde $d|_S$ es d restringida a $S \times S$.

La demostración es inmediata, pues si d cumple (EM1) y (EM2) en X , también los cumple en $S \subseteq X$.

$(S, d|_S)$ se llama **subespacio métrico** de (X, d) .

Ejemplo 1.1.2. $([0, 1], d_u)$ y $((0, 1], d_u)$ son subespacios métricos de (\mathbb{R}, d_u) .

1.2. Sucesiones

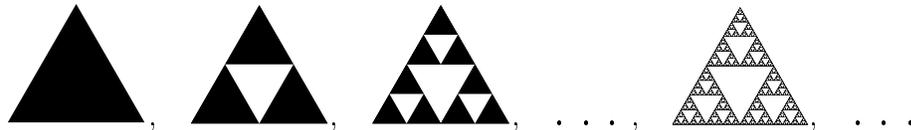
Definición 1.2.1. Una **sucesión** en un conjunto X es una función $x : \mathbb{N} \rightarrow X$.

El valor de x en $n \in \mathbb{N}$ es representado por x_n , en lugar de $x(n)$; y la función x , por:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \langle x_n \rangle, \text{ ó, } (x_1, x_2, \dots).$$

Ejemplo 1.2.1. ■ Son sucesiones en \mathbb{R} : $x_n = 1$, $y_n = \frac{1}{2^n}$, $z_n = \frac{n}{(n+1)}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

- Dado un conjunto A , el conjunto partes de A , $\mathcal{P}(A)$, es la colección de todos los subconjuntos de A . Es una sucesión en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$:



Definición 1.2.2. Sean $\langle x_n \rangle$ una sucesión en X , y $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una sucesión tal que $k_{n+1} > k_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\langle (x \circ k)_n \rangle$, representada por $\langle x_{k_n} \rangle$, es una **subsucesión** de $\langle x_n \rangle$.

Definición 1.2.3. Sean (X, d) un espacio métrico, y $\langle x_n \rangle$ una sucesión en X . Se dice que $\langle x_n \rangle$ es **convergente** en (X, d) , si $\exists \ell \in X$ tal que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(x_n, \ell) < \varepsilon$.

En tal caso, ℓ se llama “*límite de la sucesión*”. Esto se representa así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell, \text{ ó, } \langle x_n \rangle \rightarrow \ell,$$

y se lee “*la sucesión $\langle x_n \rangle$ converge a ℓ* ”.

Proposición 1.2.1. Sea $\langle x_n \rangle$ una sucesión en un espacio métrico. Entonces,

$$\langle x_n \rangle \longrightarrow L \iff \text{ toda subsucesión de } \langle x_n \rangle \text{ también converge a } L.$$

La demostración está en [3, Proposición 2.2.7].

Además de las sucesiones convergentes, nos interesan especialmente otro tipo de sucesiones que se presentan a continuación.

Definición 1.2.4. Sean (X, d) un espacio métrico, y $\langle x_n \rangle$ una sucesión en X . Decimos que $\langle x_n \rangle$ es una **sucesión de Cauchy** en (X, d) , si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq N$, se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Veamos qué relación existe entre los conceptos de sucesión convergente y de Cauchy.

Proposición 1.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico.

Si $\langle s_n \rangle$ es una sucesión convergente en (X, d) , entonces es de Cauchy en (X, d) .

La demostración está en [3, Proposición 2.3.3].

Ejemplo 1.2.2. ■ $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ es convergente en $([0, 1], d_u)$.

■ $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ no es convergente, pero es de Cauchy en $((0, 1], d_u)$.

Lo que sigue sobre convergencia uniforme, que se necesitará en el capítulo 2, fue tomado de [4]. Las definiciones y afirmaciones que involucra este concepto pueden enunciarse en un contexto más general, pero para los fines de este trabajo, es suficiente no salirse de \mathbb{R} .

Definición 1.2.5. Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Para cada $x \in A$, se puede formar la sucesión de números reales $\langle f_n(x) \rangle$. Sea S el conjunto de los x para los que la segunda sucesión converge. f , definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in S,$$

es la **función límite** de la sucesión $\langle f_n \rangle$. En tal caso, se dice que $\langle f_n \rangle$ **converge puntualmente** a f en S .

Definición 1.2.6. Una sucesión de funciones de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , $\langle f_n \rangle$, **converge uniformemente** a f en S , si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ (que depende solo de ε) tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S \text{ y con } n \in \mathbb{N}.$$

En símbolos: $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en S .

En otras palabras, cuando la convergencia es puntual y el mismo N sirve para todos los x , se tiene la convergencia uniforme.

Ejemplo 1.2.3. Sea $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, con $x \in (0, 1)$ y $n = 1, 2, \dots$. La sucesión $\langle f_n \rangle$ converge puntualmente, pero no converge uniformemente en $(0, 1)$. En cambio, la sucesión $\langle g_n \rangle$, con $g_n(x) = xf_n(x)$, sí converge uniformemente en $(0, 1)$.

Recordemos la noción de función continua (versión espacios métricos).

Definición 1.2.7. Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos, y sea una función $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es **continua** en $p \in X$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$d_x(x, p) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Si f es continua en todos los puntos de un subconjunto A de X , se dice que f es continua en A .

Proposición 1.2.3. Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos, $f : (X, d_x) \longrightarrow (Y, d_y)$ una función, y $a \in X$. f es continua en a si y sólo si

$$\langle x_n \rangle \longrightarrow a \Rightarrow \langle f(x_n) \rangle \longrightarrow f(a), \quad \forall \langle x_n \rangle \text{ sucesión en } X.$$

La demostración está en [3, Proposición 2.6.4].

Proposición 1.2.4. Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en un conjunto S . Si cada f_n es continua en un punto c de S , entonces la función límite f también es continua en c .

La demostración está en [4, Teorema 9.2].

Proposición 1.2.5 (Condición de Cauchy). Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Entonces,

Existe una función f tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en S

\iff

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m > N \\ \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ para cada } x \text{ de } S).$$

La demostración está en [4, Teorema 9.3].

El siguiente resultado puede encontrarse en [6, problema 7F].

Proposición 1.2.6. Sean (X, d) un espacio métrico, g_1, g_2 funciones de X en \mathbb{R} , y $G : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función tal que $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$.

G es continua $\iff g_1$ y g_2 son continuas.

1.3. Conjuntos abiertos y cerrados

En esta sección presentaremos varios conceptos y resultados que corresponden a lo que se podría llamar “la topología* de espacios métricos”.

Definición 1.3.1. Sean (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$, $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

(a) $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ es una **bola** centrada en x y de radio ε .

(b) x es un **punto de acumulación** de S si

$$\forall \varepsilon > 0, (B_d(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de S se llama el **derivado** de S y se denota S' .

*Para un tratamiento formal de esta teoría, puede remitirse a [5] o [6].

(c) x es un **punto frontera** de S si

$$\forall \varepsilon > 0, (B_d(x, \varepsilon) \cap S) \neq \emptyset \text{ y } (B_d(x, \varepsilon) \cap S^c) \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de S se llama la **frontera** de S y se denota ∂S , o $Fr(S)$.

Cuando es claro cuál es la métrica que se está usando, una bola también se puede representar simplemente por: $B(x, \varepsilon)$.

El siguiente resultado está planteado como ejercicio en [4, Ejercicio 3.12, b y c] y también se cumple en el ámbito general de espacios métricos.

Proposición 1.3.1. $\forall S, T \subseteq \mathbb{R}^n, (S \cup T)' = S' \cup T'$, y, si $S \subseteq T$, entonces $S' \subseteq T'$.

Definición 1.3.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$.

S está **acotado**, si existen $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $S \subseteq B_d(a, r)$.

En palabras simples, un conjunto está acotado si se puede “encerrar” en una bola.

Definición 1.3.3. Sean un espacio métrico (X, d) , y $U \subseteq X$.

(a) $x \in U$ es un **punto interior** de U , si existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$.

(b) El **interior** de U , denotado por $int(U)$, es el conjunto de todos los puntos interiores de U .

(c) U es **abierto**, si todos sus elementos son puntos interiores de U .

En otras palabras, un conjunto es abierto, si es igual a su interior.

Proposición 1.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico.

$$\forall S \subseteq X, int(S) \subseteq S.$$

Demostración. Sea $S \subseteq X$. Si $int(S) = \emptyset$, ya está, pues \emptyset es subconjunto de cualquier conjunto. Si $int(S) \neq \emptyset$, sea $z \in int(S)$. Entonces, existe una bola abierta, $B_d(z, \varepsilon)$, tal que $B_d(z, \varepsilon) \subseteq S$. Pero $z \in B_d(z, \varepsilon)$, pues $d(z, z) = 0$. Luego, $z \in S$. ■

Así, una manera de demostrar que un conjunto es abierto, es probando que el conjunto está contenido en su interior.

A continuación, una definición tomada de [4] que se usará en el capítulo 2.

Definición 1.3.4. Un espacio métrico (X, d) es **conexo** si no existen A y B , subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X , tales que $X = A \cup B$.

Si un espacio métrico no es conexo, se le llama **disconexo**.

Un subconjunto S de un espacio métrico X se dice conexo si, considerado como subespacio métrico de X , es un espacio métrico conexo.

En términos intuitivos, se podría decir que un conjunto es conexo si no está “fraccionado” o si consta de una sola “pieza”.

La proposición que sigue es un pequeño compendio de resultados sobre conexidad extraídos de [4] y [6].

Proposición 1.3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico.*

- (a) $\forall p \in X, \{p\}$ es conexo.
- (b) Los únicos subconjuntos conexos de \mathbb{R} son vacío, los unipuntuales y los intervalos (cerrados, abiertos, semiabiertos e infinitos).
- (c) Sea F una colección de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset$. Entonces, $\bigcup_{A \in F} A$ es conexo.
- (d) Sea $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ tal que cada B_n es conexo y $B_{n-1} \cap B_n \neq \emptyset, \forall n \geq 2$. Entonces G es conexo.
- (e) La imagen continua de un conexo es conexo.
- (f) Si E es un subconjunto conexo de X y $\exists A \subseteq X$ tal que $E \subseteq A \subseteq \overline{E}$, entonces A es conexo.

Los incisos (a), (b) y (c) se presentan en [4, Ejemplo 4 (pág. 104), Ejercicio 4.38 y Teorema 4.39], respectivamente.

Las demostraciones de (d), (e) y (f) se pueden consultar en [6, Teorema 26.7 (c), Teorema 26.3 y Teorema 26.8], respectivamente.

De la parte (d) se puede deducir lo siguiente:

Proposición 1.3.4.

$$A, B \text{ conexos, } A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \text{ conexo.}$$

Definición 1.3.5. Sean un espacio métrico (X, d) , $S \subseteq X$, y $x \in X$.

- (a) x es un **punto de adherencia** de S , si $\exists \langle s_n \rangle$ en S tal que $\langle s_n \rangle \rightarrow x$.
- (b) El conjunto de todos los puntos de adherencia de S se nota \overline{S} y se llama la **clausura** (o **adherencia**) de S .

Proposición 1.3.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$, y $x \in X$.

$$x \in \overline{S} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset.$$

La demostración está en [3, Proposición 2.3.12].

Proposición 1.3.6. Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Entonces

$$S \subseteq \overline{S}, \quad \text{y} \quad \overline{S} = S \cup S'.$$

Demostración. Sean $S \subseteq X$, $\varepsilon > 0$, y $x \in S$. Se tiene que $x \in B_d(x, \varepsilon)$, pues $d(x, x) = 0 < \varepsilon$. Luego, $B_d(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$. Por lo tanto, por Proposición 1.3.5, $x \in \overline{S}$.

La parte restante de la demostración está en [3, Proposición 2.5.18]. ■

Proposición 1.3.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demostración. Sea $z \in \overline{A \cup B}$ y supongamos que $z \notin \overline{A}$. Veamos que $z \in \overline{B}$:
 Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $B_d(z, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Como $z \notin \overline{A}$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_d(z, r) \cap A = \emptyset$. Sea $t := \min\{\varepsilon, r\}$. De ahí que $B_d(z, t) = B_d(z, \varepsilon) \cap B_d(z, r)$. Como $z \in \overline{A \cup B}$, se tiene que $B_d(z, t) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Esto es, existe x en $B_d(z, t)$ y en $(A \cup B)$. Luego,

$x \in B_d(z, \varepsilon) \cap B_d(z, r)$ y, como $B_d(z, r) \cap A = \emptyset$, $x \notin A$. Así, $x \in B_d(z, \varepsilon) \cap B$. Por lo tanto, $z \in \overline{B}$ y, de inmediato, se deduce que $z \in \overline{A \cup B}$.

Recíprocamente, sea $z \in \overline{A \cup B}$. Entonces, $z \in \overline{A}$ o $z \in \overline{B}$. Luego, $\exists \langle s_n \rangle$ en A o en B tal que $\langle s_n \rangle \rightarrow z$. De ahí que $\langle s_n \rangle$ está en $A \cup B$. Por lo tanto, $z \in \overline{A \cup B}$. ■

Definición 1.3.6. Sean un espacio métrico (X, d) , y $C \subseteq X$. C es **cerrado** en (X, d) , si $C = \overline{C}$.

Usualmente no se especifica en cuál espacio métrico un conjunto es cerrado, porque es fácil deducirlo. Por ejemplo, en la definición anterior, pudo escribirse simplemente “ C es cerrado, si...”; puede entenderse claramente que es en (X, d) , sin necesidad de hacer la anotación. Lo mismo podría decirse para los conjuntos abiertos. En general, es algo frecuente en matemáticas omitir detalles que pueden ser deducidos con facilidad; claro está, sin menoscabo de la rigurosidad.

Proposición 1.3.8. *La unión de dos conjuntos cerrados es, también, un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean A, B conjuntos cerrados. Por la definición de conjunto cerrado (Definición 1.3.6), se tiene que $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$. Por Proposición 1.3.7, $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$. Luego, $\overline{A \cup B} = A \cup B$. ■

Como la unión de dos cerrados es cerrado, se deduce que la unión finita de cerrados es, también, un conjunto de cerrado.

Proposición 1.3.9 (Teorema del encaje de Cantor). *Sea $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ una colección numerable de conjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n tales que:*

- (i) $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ (con $k = 1, 2, 3, \dots$).
- (ii) Q_1 está acotado y $\forall k \in \mathbb{N}$, Q_k es cerrado.

Entonces,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ es no vacío y cerrado.}$$

La demostración está en [4, Teorema 3.25].

1.4. Compacidad y completez

Los conceptos y resultados que presentamos en esta sección y en las dos siguientes, los usaremos principalmente en el capítulo 3.

Definición 1.4.1. Sean un espacio métrico (X, d) , y $S \subseteq X$. S es **compacto**, si toda sucesión en S contiene, al menos, una subsucesión convergente en $(S, d|_S)$.

Proposición 1.4.1. Sean un espacio métrico (X, d) , y $S \subseteq X$.

Si S es compacto, entonces S es cerrado y acotado.

La demostración está en [3, Proposición 2.5.8].

Proposición 1.4.2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces,

S es compacto $\Leftrightarrow S$ es cerrado y acotado.

La demostración está en [4, Teorema 3.31].

Ejemplo 1.4.1. Los siguientes conjuntos son compactos:

- $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}, b \geq a$.
- En \mathbb{R}^2 , cualquier triángulo, rectángulo o círculo (incluyendo, o no, sus interiores).
- $S \subseteq X$, con S finito y (X, d) un espacio métrico.

Definición 1.4.2. Un espacio métrico (X, d) es **completo**, si toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge en (X, d) .

Ejemplo 1.4.2. ■ Son espacios métricos completos:

(\mathbb{R}, d_u) ; (\mathbb{R}^n, d_n) ; $([a, b], d_u)$, con $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- No son espacios métricos completos:

$((0, 1], d_u)$; $((0, \infty), d_u)$; $(\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}, d_u)$; (\mathbb{Q}, d_u) .

La definición siguiente será utilizada en el segundo capítulo y su fuente es [9, pág. 3].

Definición 1.4.3. Un **continuo** es un espacio métrico compacto y conexo.

En [9] se exige, además, que el espacio métrico sea diferente de vacío. Aquí se omite esta condición porque en la definición de espacio métrico (Definición 1.1.1) se incluye.

Proposición 1.4.3. Sea $\langle X_n \rangle$ una sucesión de continuos tal que $X_i \supset X_{i+1}$, para cada $i = 1, 2, 3, \dots$. Entonces,

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{es un continuo.}$$

La demostración está en [9, Theorem 1.8].

Las dos últimas secciones de este capítulo se incluyen con miras a establecer una definición formal, desde el punto de vista matemático, de la noción de autosemejanza (Definición 3.1.2).

1.5. El espacio donde viven los fractales

Definición 1.5.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se definen:

- (a) $\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}$.
- (b) Sean $a \in X$, $K \in \mathcal{H}(X)$. $\hat{d}(a, K) := \text{mín} \{d(a, x) \mid x \in K\}$.
- (c) Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. $\tilde{d}(A, B) := \text{máx} \{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\}$.
- (d) Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. $\mathbf{h}(A, B) := \text{máx} \{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$.

Lema 1.5.1. El mínimo y el máximo de las definiciones de $\hat{d}(a, K)$ y $\tilde{d}(A, B)$ (Definición 1.5.1), respectivamente, siempre existen.

La demostración está en [3, Proposición 3.1.5 y Proposición 3.1.8].

Lema 1.5.2. Si $A, B \in \mathcal{H}(X)$, y $A \subseteq B$, entonces $\tilde{d}(A, B) := 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\tilde{d}(A, B) &= \text{máx} \{ \hat{d}(a, B) \mid a \in A \} \\ &= \hat{d}(a_0, B), \text{ para algún } a_0 \in A \subseteq B \\ &= \text{mín} \{ d(a_0, b) \mid b \in B \};\end{aligned}$$

pero $a_0 \in B$, luego $\text{mín}\{d(a_0, b) \mid b \in B\} = 0$. ■

Proposición 1.5.1. \mathbf{h} es una métrica sobre $\mathcal{H}(X)$.

La demostración está en [3, Proposición 3.1.16].

M. Barnsley en [7], “bautiza” el espacio $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ como “el espacio donde viven los fractales”. Así, tenemos:

Definición 1.5.2. Sea (X, d) un espacio métrico. \mathbf{h} se llama la **métrica de Hausdorff** y el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ se llama **el espacio donde viven los fractales**.

Teorema 1.5.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\langle A_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, entonces

$$A := \{x \in X \mid \exists \langle x_n \rangle \text{ en } X, \text{ con } \langle x_n \rangle \rightarrow x, y, x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \rangle \in \mathcal{H}(X).$$

La demostración está en [7, Sección 2.7, Theorem 1].

Lo más destacable del anterior teorema es que establece que si (X, d) es completo, entonces $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ también es completo.

Lema 1.5.3. Sean (X, d) un espacio métrico completo, y $\langle A_n \rangle$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ tal que

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración. Por el Teorema 1.5.1, tenemos que $A := \{x \in X \mid \exists \langle x_n \rangle \text{ en } X, \text{ con } \langle x_n \rangle \rightarrow x, y, x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \rangle$. Sea $x \in A$. Entonces, $\exists \langle x_n \rangle$ en X , con

$\langle x_n \rangle \rightarrow x$, $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Esto es, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_M$. Como A_M es compacto, también es cerrado, por Proposición 1.4.1. Luego, $A_M = \overline{A_M}$. Así, $x \notin \overline{A_M}$. Entonces, por Proposición 1.3.5, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$. Ahora, como $\langle x_n \rangle \rightarrow x, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Sea $T = \max\{M, N\}$. Entonces, $d(x_T, x) < \varepsilon$. De ahí que $x_T \in B_d(x, \varepsilon)$. Como $T \geq M, A_T \subseteq A_M$, y $x_T \in A_T$, se infiere que $x_T \in A_M$. Por lo tanto, $x_T \in B_d(x, \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$. ¡Contradicción!

Recíprocamente, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces, $x \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $(x, x, \dots) \rightarrow x$, se tiene que $x \in A = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \rangle$. ■

1.6. Contracciones

Para construir conjuntos fractales, usando el método, ya clásico, de los llamados “sistemas iterados de funciones”, tal y como veremos en el capítulo 3, es indispensable contar con un número finito de contracciones, concepto que se define a continuación:

Definición 1.6.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función. Diremos que f es una **contracción** en (X, d) , si $\exists r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1$, tal que $\forall x, y \in X$, se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$. r se llama “factor de contracción” de f .

Ejemplo 1.6.1. Las siguientes funciones son contracciones:

- $f : X \rightarrow X; \forall x \in X, f(x) = a$, con $a \in X$ constante.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Proposición 1.6.1. *Toda contracción es continua.*

La demostración está en [3, Proposición 2.7.3].

Definición 1.6.2. Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Un punto $x_0 \in X$ es un **punto fijo** de f , si $f(x_0) = x_0$.

Proposición 1.6.2. *La composición de dos contracciones es, nuevamente, una contracción.*

Demostración. Sean f_1, f_2 contracciones en un espacio métrico (X, d) . Veamos que $f_2 \circ f_1$ es, también, una contracción en ese espacio:

$\exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, con $0 \leq r_1, r_2 < 1$, tales que $\forall x, y \in X$, se cumple que

$$d(f_1(x), f_1(y)) \leq r_1 \cdot d(x, y), \quad y, \quad d(f_2(x), f_2(y)) \leq r_2 \cdot d(x, y).$$

Entonces,

$$d(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(y))) \leq r_2 \cdot d(f_1(x), f_1(y)) \leq r_2 \cdot r_1 \cdot d(x, y).$$

Como $0 \leq r_2 \cdot r_1 < 1$, se tiene lo que se quería. ■

El siguiente teorema, conocido también como “Teorema de contracción de Banach”, es de fundamental importancia en este trabajo, ya que garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos, en el capítulo 3, el atractor de un sistema iterado de funciones. Además, este teorema implica una forma de construir dicho atractor.

Teorema 1.6.1 (Teorema del punto fijo para espacios métricos completos). *Sean (X, d) un espacio métrico completo, y $f : X \rightarrow X$ una contracción en (X, d) . Entonces, f tiene un único punto fijo p . Además,*

$$\forall x \in X, \text{ se tiene que } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x) = p.$$

La demostración está en [3, Teorema 2.8.1].

Capítulo 2

GÉNESIS

“No comprenderéis cómo se ha llegado a donde hemos llegado si prescindís del trabajo a través del tiempo.” -Pierre Ruche-
(El teorema del loro, Denis Guedj)

Conocer la historia de algo, nos ayuda a comprender su esencia y a darle un justo valor. Por ello, este capítulo consta del análisis del artículo *“Sur une courbe dont tout point est un point de ramification”*, del matemático polaco Waclaw Sierpiński, referenciado como [1]*. Su trabajo, publicado por primera vez en la segunda década del siglo pasado, se puede considerar como el descubrimiento oficial de la figura que es centro de interés en esta monografía.

2.1. Algunos conceptos preliminares

En la geometría euclidiana, un triángulo es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales. La definición que Sierpiński utilizó en su artículo incluía, además, la región interior o delimitada por sus lados. Por esa razón y por comodidad (escribir “triángulo” en lugar de “interior de región triangular”, por ejemplo, resulta más cómodo, incluso de leer), en este capítulo, y en el resto de este escrito, se manejará la segunda connotación, o sea, el concepto modificado que usó Sierpiński.

*Esta es una traducción al francés; el artículo original está en polaco.

El objetivo del trabajo de Sierpiński fue dar un ejemplo de una curva que fuera a la vez cantoriana y jordaniana, y en la que cada punto fuera un punto de ramificación. Estos conceptos se definen a continuación.

Definición 2.1.1. Una **curva cantoriana** es un conjunto en el plano, cerrado, conexo, que consta de más de un punto, y en el cual cada punto es un punto frontera.

Definición 2.1.2. Una **curva jordaniana** es cualquier imagen unívoca y continua de un segmento (finito) de la recta.

A modo de referencia se exponen, rápidamente, otras definiciones de curva de Jordan (o curva jordaniana, como se tradujo del artículo). En [4], Apostol establece que un **camino** en el plano es una función γ continua definida en un intervalo compacto $[a, b]$ de \mathbb{R} y con valores en \mathbb{R}^2 . A la imagen de $[a, b]$ por γ la llama **curva** descrita por γ . Si $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, a la curva la llama **arco**. Si γ es uno a uno en $[a, b]$, a la curva la llama **arco simple** o **arco de Jordan**. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, a la curva la llama **curva cerrada**. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y si γ es uno a uno en $[a, b]$, a la curva la llama **curva cerrada simple** o **curva de Jordan**. En [8], Falconer define una curva de Jordan como la imagen de un intervalo $[a, b]$ bajo una biyección continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como se puede evidenciar, el concepto de curva de Jordan, varía de un autor a otro. De ahí la importancia de las definiciones en un trabajo de este tipo y, en general, en matemáticas.

Continuando con el hilo de este capítulo, presentamos la definición del concepto que es parte del título del artículo [1].

Definición 2.1.3. Un **punto de ramificación** de un continuo es un punto p del continuo tal que existen tres subcontinuos que tienen dos a dos al punto p , y sólo a él, en común.

La noción de continuo se definió en el capítulo anterior (Definición 1.4.3). Un subcontinuo, como su nombre lo hace suponer, es un subconjunto de un continuo que también es un continuo. Cabe aclarar que si se está hablando de un continuo y de un subcontinuo, sin dar especificaciones, se asume, naturalmente, que el subcontinuo es subconjunto precisamente de ese continuo.

2.2. La construcción original de W. Sierpiński

En este punto comienza una de las dos construcciones importantes que hace Sierpiński en su artículo, en cumplimiento del objetivo que planteó. Quizás, la notación que utiliza en ambas parezca un poco complicada, pero es rigurosa, dejando fuera de lugar a ambigüedades, como debe ser.

Como se verá en el tercer capítulo, esta construcción es la misma que se hace en la Definición 3.3.1 (El triángulo de Sierpiński), salvo la notación y la descripción del proceso.

Sea T un triángulo equilátero con vértices A, B y C (ver Figura 2.1**, a). Uniendo los puntos medios de sus lados, el triángulo T se divide en cuatro triángulos equiláteros más pequeños. Sean T_0, T_1 y T_2 los que contienen los vértices A, B y C , respectivamente, y son paralelos a T . Sea U el triángulo restante. Eliminamos el interior de U . Los vértices de los triángulos T_0, T_1 y T_2 se designan, respectivamente: los de la izquierda, A_0, A_1 y A_2 ; los de arriba, B_0, B_1 y B_2 ; y los de la derecha, C_0, C_1 y C_2 (ver Figura 2.1, b). Procedemos con T_0, T_1 y T_2 como lo hicimos con T . Tendremos 9 triángulos paralelos a T que designaremos por $T_{\lambda_1\lambda_2}$, con $\lambda_1 \in \{0, 1, 2\}$ y $\lambda_2 \in \{0, 1, 2\}$; y a sus vértices por $A_{\lambda_1\lambda_2}, B_{\lambda_1\lambda_2}$ y $C_{\lambda_1\lambda_2}$. Los tres triángulos paralelos a U serán U_0, U_1 y U_2 , y suprimimos sus interiores (ver Figura 2.1, c).

En general, para el triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, sus vértices son: izquierda, $A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$; arriba, $B_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$; y derecha, $C_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$; donde cada uno de los n índices toma los valores 0, 1 o 2. Sometiéndolo a la misma operación que al triángulo T , obtendremos tres nuevos triángulos, $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n 0}, T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n 1}$ y $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n 2}$, conteniendo los vértices $A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}, B_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ y $C_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, respectivamente, y paralelos al triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$; y un cuarto triángulo, $U_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, en posición invertida y del que se elimina su interior.

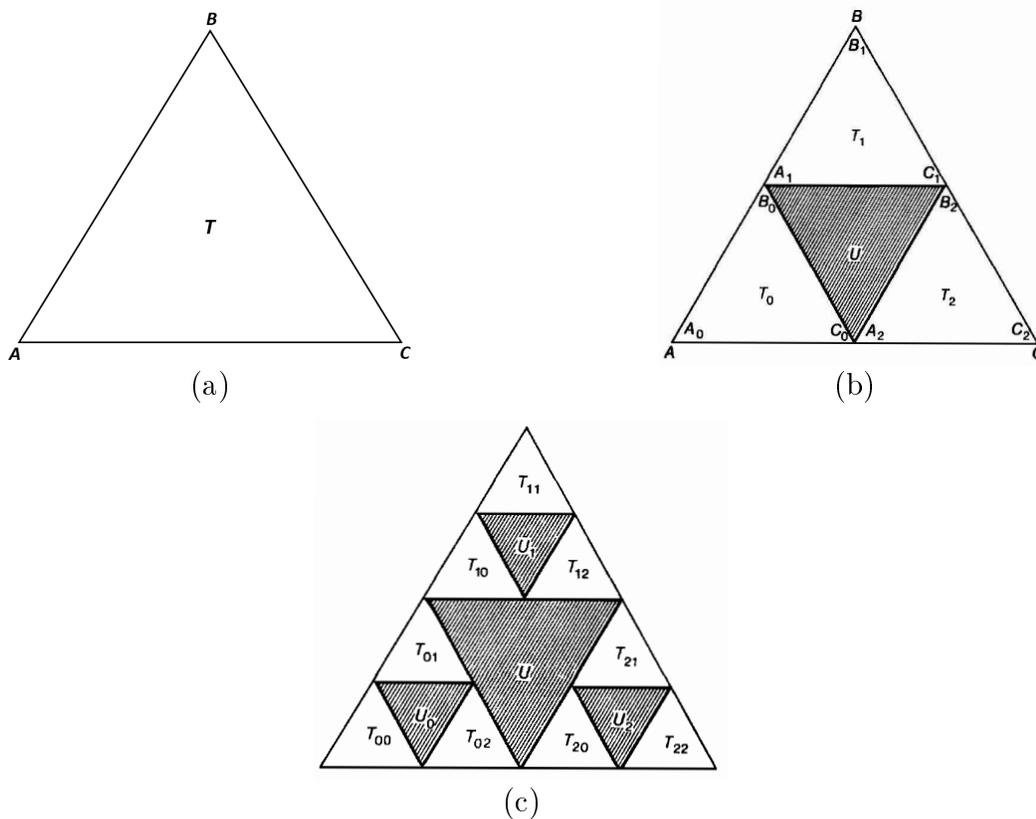
Sea \mathcal{T} el conjunto de todos los puntos del triángulo T que no pertenecen al interior de ninguno de los triángulos $U, U_0, U_1, U_2, U_{00}, U_{01}, U_{02}, U_{10}, \dots, U_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}, \dots$

A continuación, dos propiedades interesantes de \mathcal{T} :

Afirmación 2.2.1. *La medida de la superficie del conjunto \mathcal{T} es nula y su perímetro es infinito.*

**Tomada de [1].

Figura 2.1: Construcción geométrica del conjunto \mathcal{T} .



Fuente: [1].

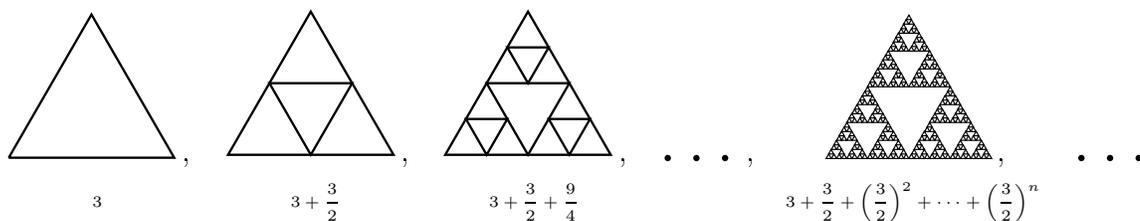
Demostración. El perímetro de \mathcal{T} es la suma del perímetro del triángulo T más el perímetro de cada triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, con $\lambda_i = 0, 1, 2$ e $i = 1, 2, \dots, n$. En la figura 2.2 se dan los perímetros de las figuras que intervienen en la construcción de \mathcal{T} , para lo cual asumimos, sin pérdida de generalidad, que el lado del triángulo inicial mide 1.

$$3 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

Para la otra parte, probaremos que la suma de las áreas de los triángulos $U, U_0, U_1, U_2, U_{00}, U_{01}, U_{02}, U_{10}, \dots, U_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}, \dots$ es igual al área del triángulo T ; con eso se demuestra que la medida de la superficie de \mathcal{T} es nula.

El área de U es $\frac{1}{4}$ del área de T . El área de U_{λ_1} es $\frac{1}{16}$ del área de T . El área de $U_{\lambda_1\lambda_2}$ es

Figura 2.2: Perímetro de cada término de la sucesión $\langle L_n \rangle$.



Fuente: [2].

$\frac{1}{64}$ del área de T . En general, el área de $U_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ es $\frac{1}{4^{n+1}}$ del área de T . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el área de T es 1. De este modo, la suma de las áreas de $U, U_0, U_1, U_2, U_{00}, U_{01}, U_{02}, U_{10}, \dots, U_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}, \dots$, es

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4} + 3 \left(\frac{1}{16} \right) + 9 \left(\frac{1}{64} \right) + \dots + 3^{n-1} \left(\frac{1}{4^n} \right) + 3^n \left(\frac{1}{4^{n+1}} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(\frac{1}{4} \right) + 3^2 \left(\frac{1}{4^2} \right) + \dots + 3^{n-1} \left(\frac{1}{4^{n-1}} \right) + 3^n \left(\frac{1}{4^n} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Como $|r| < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}$, tenemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^i = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \right) = \frac{1}{4}(4) = 1. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.2.1. \mathcal{T} es compacto.

Demostración. Es claro que T está acotado (y, por ende, \mathcal{T} también) y es fácil verificar que el triángulo T y cada triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, son conjuntos cerrados. Por Proposición 1.3.8, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}, (\bigcup T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n})$, con λ_i variando en $\{0, 1, 2\}$, es un conjunto cerrado. Por definición, \mathcal{T} es la intersección de todos los conjuntos $(\bigcup T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n})$. Además, $(\bigcup T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\lambda_{n+1}}) \subseteq (\bigcup T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}), \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema del encaje de Cantor (Proposición 1.3.9), \mathcal{T} es cerrado. Finalmente, en virtud de la Proposición 1.4.2, \mathcal{T} es compacto. \blacksquare

Proposición 2.2.2. \mathcal{T} es un conjunto conexo.

Demostración. Aplicando las Proposiciones 1.3.4 y 1.4.3, se tiene el resultado. ■

Proposición 2.2.3. Todos los puntos del conjunto \mathcal{T} son puntos frontera.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{T}$. Entonces, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^M < \varepsilon$ y existen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ en $\{0, 1, 2\}$ tales que x pertenece al triángulo $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_M}$. De ahí que $T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_M} \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$. Luego, el interior del triángulo $U_{\beta_1\beta_2\dots\beta_M}$, que no está contenido en \mathcal{T} , está contenido en $B_{d_2}(x, \varepsilon)$. ■

Teorema 2.2.1. \mathcal{T} es una curva cantoriana.

Demostración. Es claro que \mathcal{T} está en el plano y que tiene más de un punto. Por eso y por las proposiciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3, se concluye lo que se quería. ■

2.3. El conjunto τ como una curva jordaniana

La segunda construcción de Sierpiński toma como base a la primera y es como sigue:

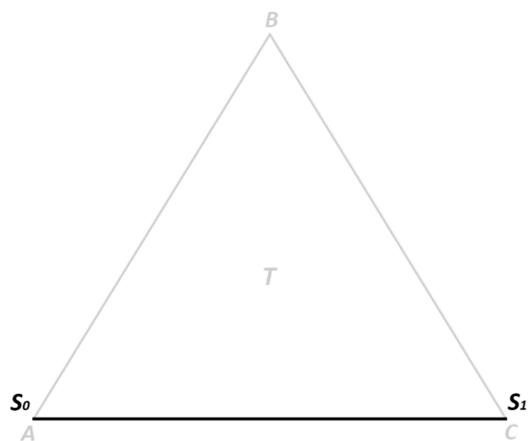
Sea $L^{(0)}$ la base AC del triángulo T . Sean S_0 y S_1 los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, de $L^{(0)}$ (ver Figura 2.3^{***}, a).

Sean $S'_0 = S_0$ y $S'_3 = S_1$. Sea S'_1 el tercer vértice del triángulo T_{λ_1} , con $\lambda_1 = 0, 1$ o 2 , cuyos otros dos vértices son S_0 y el punto medio del segmento S_0S_1 . Y sea S'_2 el tercer vértice del triángulo T_{λ_1} cuyos otros dos vértices son S_1 y el punto medio del segmento S_0S_1 . L' se define como la línea quebrada (curva compuesta exclusivamente de segmentos de recta) $S'_0S'_1S'_2S'_3$, que contiene exactamente un lado de cada triángulo T_{λ_1} , con $\lambda_1 = 0, 1$ y 2 (ver Figura 2.3, b).

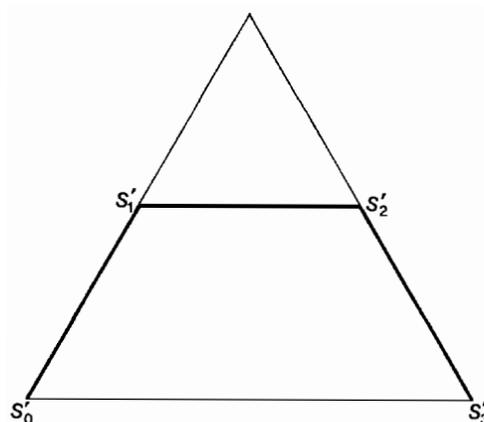
Los siguientes cuatro pasos ($L'', L''', L^{(4)}$ y $L^{(5)}$) no se describen con palabras, pero sí están representados en la Figura 2.3, (c) - (f).

^{***}Tomada de [1].

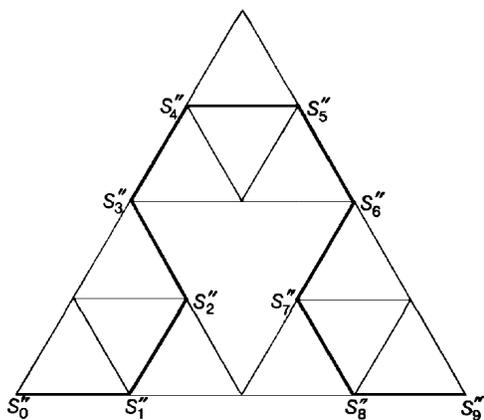
Figura 2.3: Construcción geométrica del conjunto \mathfrak{R} .



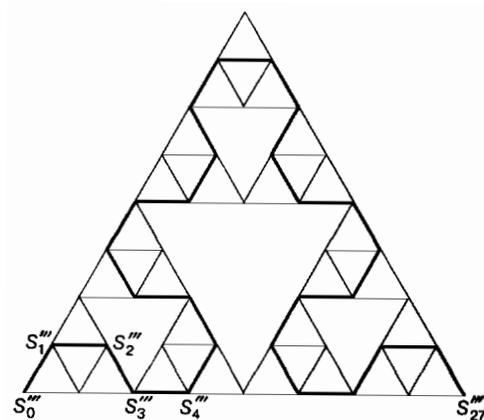
(a)



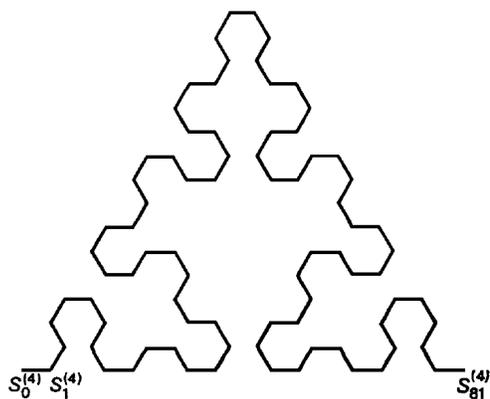
(b)



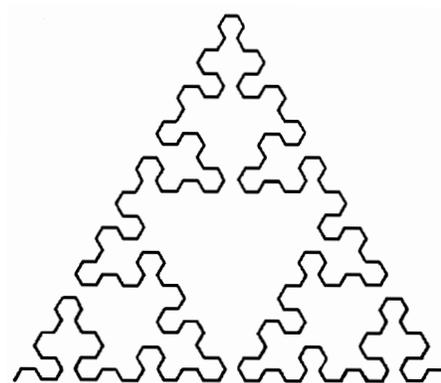
(c)



(d)



(e)



(f)

Fuente: [1].

En general, si $L^{(n)}$ es la línea quebrada de vértices $S_0^{(n)}, S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_{3^n}^{(n)}$, que contiene exactamente uno de los lados de cada uno de los 3^n triángulos $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, entonces la línea quebrada $L^{(n+1)}$ se formará sustituyendo el segmento $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$, con $i = 1, 2, \dots, 3^n$, de $L^{(n)}$ por la línea quebrada $S_{3i-3}^{(n+1)} S_{3i-2}^{(n+1)} S_{3i-1}^{(n+1)} S_{3i}^{(n+1)}$, con $S_{3i-3}^{(n+1)} = S_{i-1}^{(n)}$, y $S_{3i}^{(n+1)} = S_i^{(n)}$; $S_{3i-2}^{(n+1)}$ es el tercer vértice del triángulo $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}$, cuyos otros dos vértices son $S_{i-1}^{(n)}$ y el punto medio del segmento $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$; y $S_{3i-1}^{(n+1)}$ es el tercer vértice del triángulo $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}$, cuyos otros dos vértices son $S_i^{(n)}$ y el punto medio del segmento $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$. $L^{(n+1)} = S_0^{(n)} S_1^{(n)} S_2^{(n)} \dots S_{3^n}^{(n)} S_{3^{n+1}}^{(n+1)}$ contiene exactamente un lado de cada uno de los 3^{n+1} triángulos $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}$. Al “final” de este proceso obtendremos una curva que, como veremos más adelante, llamaremos \mathfrak{R} .

Consideremos ahora el punto A como el origen de coordenadas cartesianas, la dirección AC como el eje positivo x y el segmento AC como la unidad de longitud. La ecuación de la línea $L^{(n)}$ se puede escribir de la forma

$$x = \varphi_n(t), \quad y = \psi_n(t), \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1,$$

de manera que los valores $0, \frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, \dots, 1$ de t tengan correspondencia con los puntos $S_0^{(n)}, S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_{3^n}^{(n)}$ de $L^{(n)}$, respectivamente, y que las funciones φ_n y ψ_n sean lineales en cada intervalo $[\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}]$, con $i = 1, 2, \dots, 3^n$.

Considere dos líneas quebradas consecutivas, $L^{(n)}$ y $L^{(n+1)}$, y sus respectivas ecuaciones, con $0 \leq t \leq 1$:

$$x = \varphi_n(t), \quad y = \psi_n(t), \quad \text{y,} \quad x = \varphi_{n+1}(t), \quad y = \psi_{n+1}(t).$$

Para un $i = 1, 2, \dots, 3^{n-1}, 3^n$, fijo, la parte de la línea $L^{(n)}$ en $\frac{i-1}{3^n} \leq t \leq \frac{i}{3^n}$ es el lado de uno de los triángulos $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, digamos del triángulo $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$, para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ en $\{0, 1, 2\}$; mientras que la parte de la línea $L^{(n+1)}$ en $\frac{i-1}{3^n} \leq t \leq \frac{i}{3^n}$, es la línea quebrada $S_{3i-3}^{(n+1)} S_{3i-2}^{(n+1)} S_{3i-1}^{(n+1)} S_{3i}^{(n+1)}$, contenida en el triángulo $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$, cuyos lados, como se puede mostrar fácilmente por inducción, miden $\frac{1}{2^n}$. Entonces, se tiene que para todo punto t del intervalo $[\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}]$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{y,} \quad |\psi_n(t) - \psi_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{2^n}. \quad (2.1)$$

Los puntos $(\varphi_n(t), \psi_n(t))$, y, $(\varphi_{n+1}(t), \psi_{n+1}(t))$ pertenecen al mismo triángulo $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$.

Cabe anotar que en el artículo de Sierpiński, el valor del lado derecho de estas desigualdades es $\frac{1}{3^n}$, en lugar de $\frac{1}{2^n}$. Quizás no sea incorrecto, pero no logramos llegar a esa deducción. De todas formas, lo que importa en este caso, como se verá luego, es que

este valor esté determinado y se haga tan pequeño como se quiera, como efectivamente sucede con $\frac{1}{2^n}$.

Como las ecuaciones (2.1) son válidas en cada uno de los intervalos $[0, \frac{1}{3^n}]$, $[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}]$, \dots , $[\frac{3^n-1}{3^n}, 1]$, lo son para todo t en el intervalo $[0, 1]$. Además, lo son para cada número natural n . Luego, para todo n y k naturales,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)| &\leq |\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)| + |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_{n+2}(t)| \\
&\quad + \dots + |\varphi_{n+k-1}(t) - \varphi_{n+k}(t)| \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k-1}} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^n} (2) = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)| < \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2.2)$$

Similarmente,

$$|\psi_n(t) - \psi_{n+k}(t)| < \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2.3)$$

Ambas ecuaciones son válidas para todo punto t del intervalo $[0, 1]$.

Afirmación 2.3.1. *Las sucesiones de funciones $\langle \varphi_n \rangle$ y $\langle \psi_n \rangle$ convergen uniformemente en $[0, 1]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Por la desigualdad (2.2), se tiene, $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall t \in [0, 1]$, que

$$|\varphi_N(t) - \varphi_{N+k}(t)| < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.$$

Sean $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m_1, m_2 > N$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m_2 > m_1$. Luego,

$$|\varphi_{m_1}(t) - \varphi_{m_2}(t)| < \frac{1}{2^{m_1-1}}.$$

Como $m_1 > N$, es cierto que $\frac{1}{2^{m_1-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$|\varphi_{m_1}(t) - \varphi_{m_2}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Se satisface, así, la condición de Cauchy (Proposición 1.2.5). Se concluye que $\langle \varphi_n \rangle$ y, análogamente, $\langle \psi_n \rangle$ convergen uniformemente en $[0, 1]$. ■

Afirmación 2.3.2. *Las funciones límite*

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t), \quad y, \quad \psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$$

son continuas en $[0, 1]$.

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N}$, las funciones φ_n y ψ_n son, por definición, continuas en $[0, 1]$. Luego, por Proposición 1.2.4, se tiene el resultado. ■

Teorema 2.3.1. *La curva \mathfrak{R} , definida por las ecuaciones*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1,$$

es una curva jordaniana.

Demostración. \mathfrak{R} es el conjunto de puntos en el plano $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [0, 1]\}$. Como φ y ψ son continuas en $[0, 1]$, la función $G : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $G(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, es continua, por Proposición 1.2.6. Luego, $\mathfrak{R} = G([0, 1])$, o sea, es una imagen unívoca y continua de $[0, 1]$. ■

Veamos, a continuación, que \mathcal{T} y \mathfrak{R} resultan ser el mismo conjunto.

Teorema 2.3.2. *El conjunto \mathcal{T} y la curva \mathfrak{R} son iguales.*

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{R}$. Entonces, $x = (\varphi(t), \psi(t)) = (\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t), \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(t), \psi_n(t))$, para algún $t \in [0, 1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\varphi_n(t), \psi_n(t)) \in \mathcal{T}$, pues cualquier segmento de la línea quebrada $L^{(n)}$ es un lado de un triángulo $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, y por ende, todos los puntos de esta línea son puntos del conjunto \mathcal{T} . Así, $x \in \overline{\mathcal{T}}$. Como \mathcal{T} es cerrado (Proposición 2.2.1), se concluye que $x \in \mathcal{T}$.

Por otra parte, para todo n en los naturales, la línea quebrada $L^{(n)}$, como ya se dijo, contiene exactamente un lado de cada uno de los 3^n triángulos $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$. Las líneas $L^{(n+1)}, L^{(n+2)}, L^{(n+3)}, \dots$, por construcción, y \mathfrak{R} , por ser la curva límite de la sucesión de líneas quebradas $\langle L^{(n)} \rangle$, están totalmente contenidas en la unión de estos triángulos y cada uno de ellos contiene puntos de cada una de estas líneas. Sea $p \in \mathcal{T}$. Entonces existe un punto de \mathfrak{R} que está a una distancia de p menor que $1/2^n$. Luego, p es un punto de acumulación de \mathfrak{R} . Veamos que $p = (a, b)$, para algunos a, b en \mathbb{R} , pertenece a \mathfrak{R} :

$p = (a, b) \in \mathfrak{R}'$. Entonces, existe una sucesión $\langle (\varphi(t_m), \psi(t_m)) \rangle$ de puntos de $\mathfrak{R} - \{p\}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi(t_m), \psi(t_m)) = (a, b)$. De ahí que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = a, \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \psi(t_m) = b.$$

$\langle t_m \rangle$ es una sucesión en $[0, 1]$, que es compacto. Luego, existe $\langle t_{k_m} \rangle$, subsucesión de $\langle t_m \rangle$, tal que $\langle t_{k_m} \rangle \rightarrow c \in [0, 1]$. Como φ y ψ son continuas, se tiene, por Proposición 1.2.3, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_{k_m}) = \varphi(c), \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \psi(t_{k_m}) = \psi(c).$$

Por Proposición 1.2.1,

$$\varphi(c) = a, \quad \text{y} \quad \psi(c) = b.$$

Por lo tanto,

$$p = (a, b) = (\varphi(c), \psi(c)) \in \mathfrak{R}.$$

■

Que \mathcal{T} y \mathfrak{R} sean la misma cosa no solo sirve para mostrar una curva que es cantoriana y jordaniana simultáneamente, también implica dos maneras de obtener el triángulo de Sierpiński, que aún no se ha definido, pero se hará en el capítulo 3. Además, dado que \mathcal{T} es en realidad una curva, varios autores no lo llaman triángulo de Sierpiński, sino más exactamente, “curva triangular de Sierpiński”.

2.4. Puntos de ramificación

Afirmación 2.4.1. *Hay infinitos puntos del conjunto \mathcal{T} que no son vértice de ningún triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, para todo n en los naturales.*

Demostración. Por construcción, $\forall n \in \mathbb{N}$, un vértice de cualquier triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\lambda_{n+1}}$ es un vértice o el punto medio de alguno de los lados de uno de los triángulos $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$. Entonces, en la base AC del triángulo T , que pertenece a \mathcal{T} , aparte de los extremos, los puntos que son vértice son exactamente los puntos medios de las bases de los triángulos $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ que están contenidas en AC . Sea V el conjunto de estos puntos. Haciendo corresponder a AC con el intervalo $[0, 1]$, se tendría que $V \subseteq \mathbb{Q}$. Como \mathbb{Q} es un conjunto numerable y $[0, 1]$ es no numerable, se tiene que en AC hay infinitos puntos que no están en V . Análogamente, se puede afirmar que en cada lado de cualquier triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, hay infinitos puntos que no son vértice. ■

Sea ahora p un punto arbitrario del conjunto \mathcal{T} que no es un vértice de T , ni de ningún triángulo $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$, para $n = 1, 2, \dots$. Es fácil ver que existe una sucesión de índices determinada por el punto p , $\langle a_n \rangle$, que toma valores en $\{0, 1, 2\}$, y tal que el punto p pertenece a cada uno de los triángulos $T_{a_1}, T_{a_1a_2}, T_{a_1a_2a_3}, \dots$

Consideremos la sucesión de vértices $(A_{a_1}, A_{a_1a_2}, A_{a_1a_2a_3}, \dots)$ (recordar que los A_i son los vértices inferiores izquierdos de los triángulos $T_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$) y designemos por P el conjunto que consta de p y de todos los puntos de los segmentos $A_{a_1a_2\dots a_i}A_{a_1a_2\dots a_{i+1}}$, con $i = 1, 2, \dots$. Algunos de estos segmentos podrían ser solo un punto (cuando los vértices $A_{a_1a_2\dots a_i}$ y $A_{a_1a_2\dots a_{i+1}}$ coinciden). Sin embargo, hay muchos que no lo son.

Afirmación 2.4.2. *Hay infinitos segmentos $A_{a_1a_2\dots a_i}A_{a_1a_2\dots a_{i+1}}$ que no se reducen a un solo punto.*

Demostración. Supongamos que hay exactamente un número finito de segmentos que tienen más de un punto (o sea, infinitos puntos). Esto es, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geq k, A_{a_1a_2\dots a_i} = A_{a_1a_2\dots a_{i+1}}$. Entonces, el punto $A_{a_1a_2\dots a_k}$ es un punto común de los triángulos $T_{a_1}, T_{a_1a_2}, T_{a_1a_2a_3}, \dots$. Supongamos ahora que $\exists p' \neq p$ tal que p' es un punto común de los triángulos $T_{a_1}, T_{a_1a_2}, T_{a_1a_2a_3}, \dots$. De ahí que el segmento pp' está contenido en cada uno de estos triángulos, pues si dos puntos pertenecen al mismo triángulo, el segmento que los une también. Sea b la distancia de p a p' y sea $M \in \mathbb{N}$ tal que la medida de

los lados de $T_{a_1 a_2 a_3 \dots a_M}$ es menor que b . Entonces, $p' \notin T_{a_1 a_2 a_3 \dots a_M}, T_{a_1 a_2 a_3 \dots a_M a_{M+1}}, \dots$. Luego, p' no es un punto común de los triángulos $T_{a_1}, T_{a_1 a_2}, T_{a_1 a_2 a_3}, \dots$. Así, se tiene que p es el único punto común de estos triángulos. Lo que implica que $A_{a_1 a_2 \dots a_k} = p$. Pero p no es vértice ni de ningún triángulo $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ y $A_{a_1 a_2 \dots a_k}$ sí lo es. Se presenta una contradicción. Por lo tanto, la suposición inicial es incorrecta y esto completa la prueba. ■

Proposición 2.4.1. *El conjunto P es un subcontinuo de \mathcal{T} .*

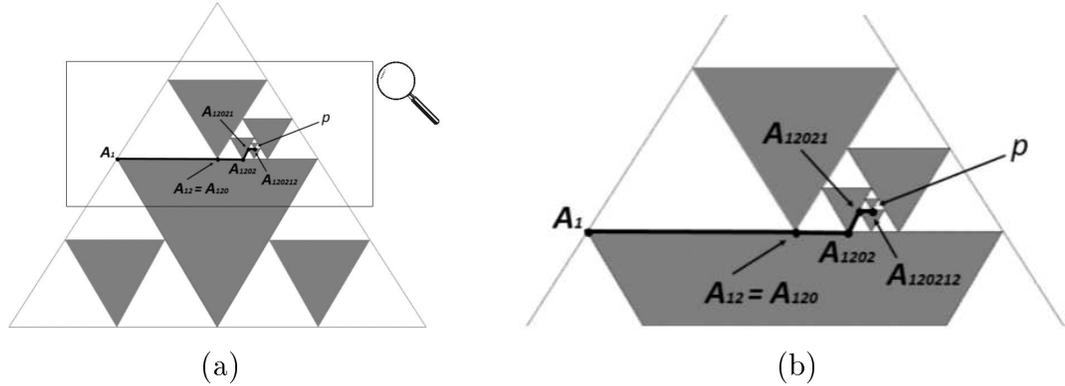
Demostración. Veamos que P es cerrado:

Supongamos que P no es cerrado. Entonces, $\exists q \in \overline{P} = P \cup P'$ tal que $q \notin P$. Luego, $q \in P'$. $\forall n \in \mathbb{N}$, el conjunto P se puede ver como

$$P = P_n \cup Q_n, \quad \text{con: } \begin{cases} P_n = A_{a_1} A_{a_1 a_2} \dots A_{a_1 a_2 \dots a_n} \\ Q_n = P - P_n. \end{cases}$$

P_n , para $n = 6$, se ilustra aquí:

Figura 2.4: P_n , para $n = 6$.



P_n es, claramente, cerrado. Por la Proposición 1.3.1, el punto q es un punto de acumulación del conjunto Q_n , que está contenido en el triángulo $T_{a_1 a_2 \dots a_n}$. Por el mismo resultado, q pertenece al derivado de este triángulo. Como cualquier triángulo (incluya o no incluya su interior) es cerrado, $q \in T_{a_1 a_2 \dots a_n}$ y, como esto se cumple para todo n natural, tenemos que $q \in T_{a_1}, T_{a_1 a_2}, T_{a_1 a_2 a_3}, \dots$. De ahí que $q = p$. Esto es una contradicción, pues $q \notin P$. Por lo tanto, P es cerrado.

Por otro lado, es claro que P está acotado. Así, por la Proposición 1.4.2, P es compacto.

Ahora veamos que P es conexo (la justificación de casi todas estas afirmaciones, es la proposición 1.3.3):

Todos los segmentos $A_{a_1 a_2 \dots a_i} A_{a_1 a_2 \dots a_{i+1}}$ son conexos. También lo es el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{a_1 a_2 \dots a_n} A_{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Luego, $A_{a_1 a_2 \dots a_m} \in B_d(p, \varepsilon)$ y, así, $p \in \overline{E}$. Entonces, como $P = \{p\} \cup E$, se tiene que $E \subseteq P \subseteq \overline{E}$. Por lo tanto, P es conexo, que era lo que se quería probar.

Por último, como cada $A_{a_1 a_2 \dots a_i} A_{a_1 a_2 \dots a_{i+1}}$ es un vértice o un lado del triángulo $T_{a_1 a_2 \dots a_i 0}$, $P = \{p\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{a_1 a_2 \dots a_n} A_{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$ es subconjunto de \mathcal{T} .

Entonces, P es un espacio métrico compacto y conexo, y además es subconjunto de \mathcal{T} . ■

De manera análoga, para el mismo punto p y partiendo de las sucesiones

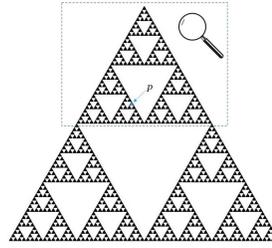
$$(B_{a_1}, B_{a_1 a_2}, B_{a_1 a_2 a_3}, \dots), \quad \text{y} \quad (C_{a_1}, C_{a_1 a_2}, C_{a_1 a_2 a_3}, \dots),$$

se obtienen otros subcontinuos de \mathcal{T} , digamos Q y R , respectivamente.

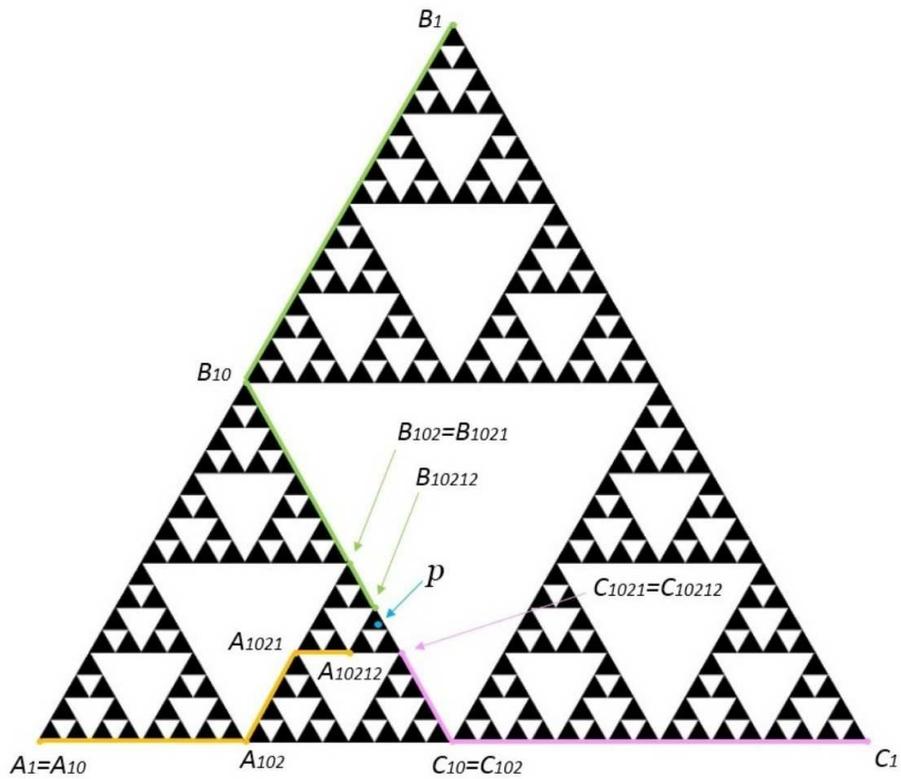
Teorema 2.4.1. *Todo punto de \mathcal{T} , excepto los vértices A, B y C del triángulo T , es punto de ramificación.*

Demostración. Supongamos que, por ejemplo, P y Q tienen, además de p , a p' como punto común. De la definición del conjunto P , se tiene que el punto p' , que es diferente a p , será necesariamente punto inicial o interior de uno de los segmentos $A_{a_1 a_2 \dots a_i} A_{a_1 a_2 \dots a_{i+1}}$, con $i = 1, 2, \dots$; digamos del segmento $A_{a_1 a_2 \dots a_k} A_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$ (si fuera punto final de un segmento, sería punto inicial del siguiente). Asimismo, para un j , el punto p' , como también pertenece a Q , será punto inicial o interior del segmento $B_{a_1 a_2 \dots a_j} B_{a_1 a_2 \dots a_{j+1}}$. Se ve, al considerar por separado los tres casos $a_{k+1} = 0$, $a_{k+1} = 1$ y $a_{k+1} = 2$, que si $k = j$, los segmentos $A_{a_1 a_2 \dots a_k} A_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$ y $B_{a_1 a_2 \dots a_j} B_{a_1 a_2 \dots a_{j+1}}$ no tendrían puntos comunes. Luego, $k \neq j$. Digamos que $k < j$ (no se pierde generalidad). Entonces, el segmento $B_{a_1 a_2 \dots a_j} B_{a_1 a_2 \dots a_{j+1}}$ estaría situado en el triángulo $T_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$; mientras que todos los puntos del segmento $A_{a_1 a_2 \dots a_k} A_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$, salvo el punto $A_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$, estarían fuera de este triángulo. Así, el punto p' no puede ser punto inicial o punto interior de los segmentos $A_{a_1 a_2 \dots a_k} A_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$ y $B_{a_1 a_2 \dots a_j} B_{a_1 a_2 \dots a_{j+1}}$ simultáneamente. Esto es una contradicción. Por lo tanto, los continuos P y Q no tienen más puntos en común que el punto p .

Figura 2.5: Aproximación visual de los subcontinuos P, Q y R .



(a)



(b)

Por un razonamiento análogo, se demuestra también para los continuos P y R , así como para los continuos Q y R . Entonces, los subcontinuos P, Q y R de la curva \mathcal{T} tienen, dos a dos, solo a p como punto común. Luego p es un punto de ramificación.

Todo punto de la curva \mathcal{T} que no es vértice de ningún triángulo $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ es, como se acaba de mostrar, un punto de ramificación de esta curva. En cuanto a los vértices de

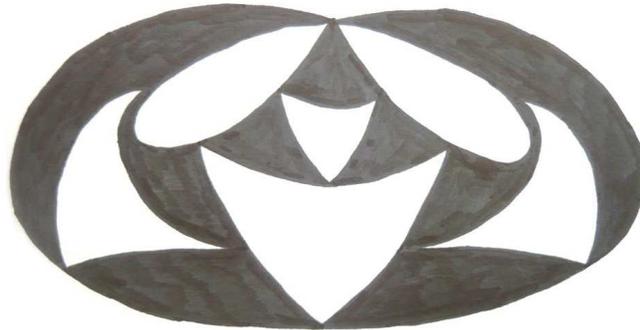
estos triángulos, en cada uno de ellos (excepto los que son vértices del triángulo T), se intersecan cuatro segmentos diferentes situados sobre \mathcal{T} . En consecuencia, todos los puntos de esta curva, excepto los puntos A, B y C , son puntos de ramificación. ■

En resumen, para cada punto v de \mathcal{T} que es vértice (excepto los vértices del triángulo inicial T), hay cuatro subcontinuos que tienen dos a dos solo a v como punto común. Por otra parte, para cada punto de \mathcal{T} que no es vértice, hay tres subcontinuos que cumplen la misma condición. Uno podría preguntarse: ¿hay más o esas cantidades son máximas?

Para tener una curva cuyos puntos, sin excepción, sean puntos de ramificación, basta dividir un hexágono regular en seis triángulos equiláteros (uniendo sus vértices a su centro) e incluir la curva \mathcal{T} en cada uno de ellos. La unión de estas seis figuras es la curva en cuestión.

También, para “arreglar el problema” de los tres únicos puntos de la curva \mathcal{T} que no son puntos de ramificación, podrían “pegarse” esos puntos de tal manera que la figura, aunque deformada, siga siendo planar. Una aproximación visual de T_2 (Sección 2.2), con los vértices A, B y C siendo un mismo punto, se muestra en la Figura 2.6. No es el resultado de ningún experimento (como la ejecución de un programa gráfico); simplemente es consecuencia de la imaginación, apoyada en el sentido común. ¿La curva obtenida de esta manera seguiría siendo cantoriana y jordaniana?

Figura 2.6: A, B, C identificados.



Finaliza este capítulo con un comentario que Sierpiński hace en la parte final de su artículo. Hay puntos de la curva \mathfrak{A} que se llaman puntos doble porque la curva pasa exactamente dos veces por cada uno de ellos. Esto significa que la función G , definida en la demostración del Teorema 2.3.1, no es inyectiva. Los otros puntos de esta curva son simples, es decir, ella pasa una sola vez por cada uno de ellos.

Capítulo 3

PLATO FUERTE

“Cuanto más sé, más descubro, más inmenso e inexplorado me parece el terreno que se abre ante mí.”

Evariste Galois

Iniciamos este capítulo describiendo un método actualmente muy utilizado para construir conjuntos de tipo fractal; esto es, mediante la llamada teoría de los sistemas iterados de funciones. Por supuesto que la aplicaremos para obtener el triángulo de Sierpiński, \mathcal{S} . Luego, usando la codificación proporcionada por la función de direccionamiento (Definición 3.2.1), caracterizamos ciertos puntos de \mathcal{S} (Teorema 3.3.3), lo cual permite deducir una propiedad, en cierta forma inesperada, de nuestro conjunto \mathcal{S} .

3.1. Sistemas iterados de funciones

Definición 3.1.1. Un **sistema iterado de funciones (SIF)** es una estructura de la forma $\{(X, d); f_1, f_2, \dots, f_N\}$, en la que (X, d) es un espacio métrico completo, y cada $f_i : X \rightarrow X$, con $i = 1, 2, \dots, N$, es una contracción en (X, d) .

Lema 3.1.1. Sean un espacio métrico (X, d) , y f_1, f_2, \dots, f_N contracciones en (X, d) .

Entonces,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ K &\longmapsto F(K) := \bigcup_{i=1}^N f_i(K) \end{aligned}$$

es una contracción en $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$.

Teorema 3.1.1. Sean $\{(X, d); f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF, y F definida en Lema 3.1.1 correspondiente al SIF. Entonces,

$$\text{existe un \u00fanico } A \in \mathcal{H}(X) \text{ tal que } F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A) = A.$$

Adem\u00e1s,

$$\forall K \in \mathcal{H}(X), \text{ se tiene que } \lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(K) = A.$$

El conjunto A se llama el **atractor** del SIF y es independiente del compacto inicial que se escoja.

La demostraci\u00f3n de este teorema es consecuencia inmediata de la aplicaci\u00f3n del Teorema del punto fijo (Teorema 1.6.1), teniendo en cuenta que $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ es un espacio m\u00e9trico completo (Teorema 1.5.1) y que $F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ es una contracci\u00f3n (Lema 3.1.1).

Definici\u00f3n 3.1.2. Diremos que un conjunto A es **autosemejante**, si es el atractor de un SIF.

Proposici\u00f3n 3.1.1. Sean $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$$\Sigma := \{1, 2, \dots, m\}, \quad \text{y} \quad \Sigma^{\mathbb{N}} := \{\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \dots \mid x_i \in \Sigma, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces,

$$d_{\text{c\u00f3d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(m+1)^i}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma^{\mathbb{N}},$$

es una m\u00e9trica sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

La demostraci\u00f3n est\u00e1 en [3, p\u00e1g. 29]

El **espacio de los c\u00f3digos**, correspondiente a m , es el espacio m\u00e9trico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_{\text{c\u00f3d}})$.

Los elementos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ se llaman **c\u00f3digos**, \u00f3 **palabras semi-infinitas**.

Definici\u00f3n 3.1.3. Sea un SIF $\{(X, d); f_1, f_2, \dots, f_N\}$. Su **espacio de c\u00f3digos asociado** es el espacio m\u00e9trico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_{\text{c\u00f3d}})$, con $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$.

3.2. La función de direccionamiento

Teorema 3.2.1. Sean $\{(X, d); w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un SIF, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado, y A su atractor.

Para cada $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, y $x \in X$, sea

$$\varphi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x).$$

Entonces, $\varphi(\alpha)$ siempre existe, pertenece a A , es independiente de x , y la función

$$\begin{aligned} \varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} &\longrightarrow A \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha), \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva.

La demostración está en [3, Teorema 4.3.5]

Definición 3.2.1. Sean $\{(X, d); w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un SIF, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado, A su atractor, $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ la función definida en el Teorema 3.2.1, y $a \in A$. Una **dirección** de a es cualquier elemento del conjunto

$$\varphi^{-1}(a) := \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a\}.$$

El conjunto $\varphi^{-1}(a)$ se llama el **conjunto de las direcciones de a** ; y la función φ la **función de direccionamiento** del atractor del SIF.

Lema 3.2.1. Sean $\{(X, d); f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF, y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ la correspondiente función de direccionamiento.

Entonces, $\forall \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ se cumple que

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots) = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3\cdots)).$$

Demostración. Por definición, $\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x), \forall x \in X$. f_{α_1} es una contracción, luego es continua (Proposición 1.6.1). Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x) = f_{\alpha_1}(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3\cdots))$. ■

Lema 3.2.2. Sean $\{(X, d); f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF cuyas contracciones son inyectivas, y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ la correspondiente función de direccionamiento.

Entonces, $\forall \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots, \beta = \alpha_1\beta_2\beta_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, se tiene:

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3\cdots) \Leftrightarrow \varphi(\alpha_2\alpha_3\cdots) = \varphi(\beta_2\beta_3\cdots).$$

Demostración.

$\Rightarrow \varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3\dots) \Rightarrow f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3\dots)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\beta_2\beta_3\dots))$, por el Lema 3.2.1. Como f_{α_1} es inyectiva, se concluye que $\varphi(\alpha_2\alpha_3\dots) = \varphi(\beta_2\beta_3\dots)$.

$\Leftarrow \varphi(\alpha_2\alpha_3\dots) = \varphi(\beta_2\beta_3\dots) \Rightarrow f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3\dots)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\beta_2\beta_3\dots))$. Luego, por el Lema 3.2.1, se tiene que $\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3\dots)$. ■

3.3. El triángulo de Sierpiński

Cabe recordar que en esta sección el significado de triángulo será el mismo que el utilizado en el segundo capítulo, o sea, interior más frontera (para mayor detalle, remitirse al preámbulo del capítulo 2).

En la siguiente definición (la principal de este trabajo, probablemente), se usa una notación diferente a la de Sierpiński para nombrar a los triángulos de cada figura de la sucesión generada; pero la esencia es la misma. La finalidad del cambio es didáctica.

Definición 3.3.1 (El triángulo de Sierpiński). Sea S_0 un triángulo equilátero de lado 1. Eliminando el interior del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de S_0 , quedan 3 triángulos, $T_{1(1)}$, $T_{1(2)}$, y $T_{1(3)}$, de lado $\frac{1}{2}$. Sea

$$S_1 := \bigcup_{i=1}^3 T_{1(i)}.$$

Eliminando el interior del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $T_{1(i)}$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, quedan 9 triángulos, $T_{2(1)}$, $T_{2(2)}$, \dots , y $T_{2(9)}$, de lado $\frac{1}{4}$. Sea

$$S_2 := \bigcup_{i=1}^9 T_{2(i)}.$$

Eliminando el interior del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $T_{2(i)}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, quedan 27 triángulos, $T_{3(1)}$, $T_{3(2)}$, \dots , y $T_{3(27)}$, de lado $\frac{1}{8}$. Sea

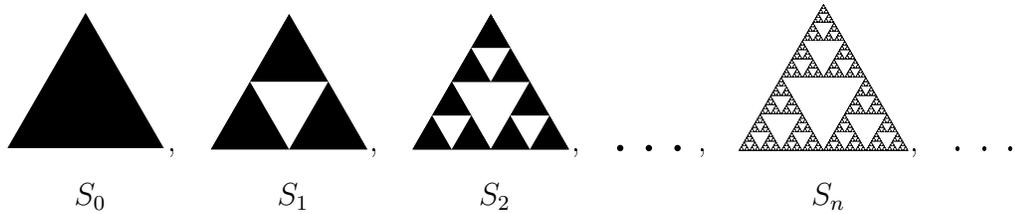
$$S_3 := \bigcup_{i=1}^{27} T_{3(i)}.$$

El proceso continúa, obteniendo así una sucesión de conjuntos $(S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots)$, en la que

$$S_n := \bigcup_{i=1}^{3^n} T_{n(i)},$$

y el lado de $T_{n(i)}, \forall i \in \{1, 2, \dots, 3^n\}$, es $\frac{1}{2^n}$.

Figura 3.1: Construcción geométrica del triángulo de Sierpiński.



Fuente: [2].

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

se llama **el triángulo de Sierpiński**.

3.3.1. El triángulo de Sierpiński como el atractor de un SIF

Teorema 3.3.1. Sea el SIF $\mathcal{J} := \{(\mathbb{R}^2, d_2); f_1, f_2, f_3\}$, con

$$f_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{i} \quad (\mathbf{i} = (0, 1));$$

Entonces,

El atractor de \mathcal{J} es el triángulo de Sierpiński.

Demostración. Sean S_0 el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; y F correspondiente a \mathcal{J} , definida en el Lema 3.1.1.

(i) Calculando las imágenes bajo f_1, f_2 y f_3 de los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, y considerando que las funciones f_1, f_2 y f_3 son similitudes directas (conservan ángulos)*, se puede aceptar, sin necesidad de mayor rigurosidad (algo más formal implicaría el uso de inducción matemática), que la sucesión $\langle F^{on}(S_0) \rangle$ es la misma sucesión $\langle S_n \rangle$ obtenida en la Definición 3.3.1. Esto es, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F^{on}(S_0) = S_n$.

(2i) Es claro que cada S_n es no vacío. Además, por Proposición 1.4.1, cada S_n es compacto, pues, como es fácil de verificar, es cerrado y acotado.

(3i) Por construcción de la sucesión, se tiene que

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$$

(4i) Veamos que $\langle S_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), \mathbf{h})$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) = \max\{\tilde{d}(S_n, S_{n+1}), \tilde{d}(S_{n+1}, S_n)\} = \tilde{d}(S_n, S_{n+1}),$$

pues $\tilde{d}(S_{n+1}, S_n) = 0$, por Lema 1.5.2.

$$\tilde{d}(S_n, S_{n+1}) = \max\left\{\hat{d}(a, S_{n+1}) \mid a \in S_n\right\} = \max\left\{\min\{d(a, x) \mid x \in S_{n+1}\} \mid a \in S_n\right\}.$$

Cuando $a \in S_{n+1}$, $\min\{d(a, x) \mid x \in S_{n+1}\} = 0$, pues si $x = a$, $d(a, x) = d(a, a) = 0$. Cuando $a \notin S_{n+1}$, significa que está en uno de los interiores triangulares eliminados de S_n . $a \in T_{n(k)}$, para algún k entre 1 y 3^n (ver Definición 3.3.1). Luego, $\min\{d(a, x) \mid x \in S_{n+1}\}$ es igual a la mínima de las distancias del punto a a los puntos de $T_{n+1(j_1)}, T_{n+1(j_2)}$ y $T_{n+1(j_3)}$, para algunos j_1, j_2 y j_3 entre 1 y 3^{n+1} , tales que

$$\bigcup_{i=1}^3 T_{n+1(j_i)} \subset T_{n(k)}.$$

De esos puntos, claramente el más cercano a a está en la frontera del triángulo \overline{W} , con $W = T_{n(k)} - \bigcup_{i=1}^3 T_{n+1(j_i)}$. Y se sabe, de la geometría euclidiana, que el punto del interior de un triángulo equilátero que está a mayor distancia de su frontera es su ortocentro, o sea, el punto donde se cortan las alturas del triángulo que, también, es su baricentro, o punto donde se cortan sus medianas; además, este punto equidista de sus lados. De ahí que $\mathbf{h}(S_n, S_{n+1})$ es igual a la distancia del ortocentro de \overline{W} a cualquiera de sus lados. Haciendo algunos cálculos geométricos, se llega a que

$$\mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n}.$$

*Puede consultar sobre este tema en [3, Taller 4]

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(S_n, S_{n+2}) &\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) + \mathbf{h}(S_{n+1}, S_{n+2}). \\
\mathbf{h}(S_n, S_{n+3}) &\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+2}) + \mathbf{h}(S_{n+2}, S_{n+3}) \\
&\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) + \mathbf{h}(S_{n+1}, S_{n+2}) + \mathbf{h}(S_{n+2}, S_{n+3}). \\
\mathbf{h}(S_n, S_{n+4}) &\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+3}) + \mathbf{h}(S_{n+3}, S_{n+4}) \\
&\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) + \mathbf{h}(S_{n+1}, S_{n+2}) + \mathbf{h}(S_{n+2}, S_{n+3}) + \mathbf{h}(S_{n+3}, S_{n+4}). \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Así, si $m \geq n, \forall m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(S_n, S_m) &\leq \mathbf{h}(S_n, S_{n+1}) + \mathbf{h}(S_{n+1}, S_{n+2}) \cdots + \mathbf{h}(S_{m-1}, S_m) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{m-1}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right).
\end{aligned}$$

Luego, cuando $m, n \rightarrow \infty$, $\mathbf{h}(S_n, S_m) \rightarrow 0$.

Entonces, por (i), (2i), (3i) y (4i), como (\mathbb{R}^2, d_2) es completo, y utilizando el Lema 1.5.3, se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(S_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = \mathcal{S}.$$

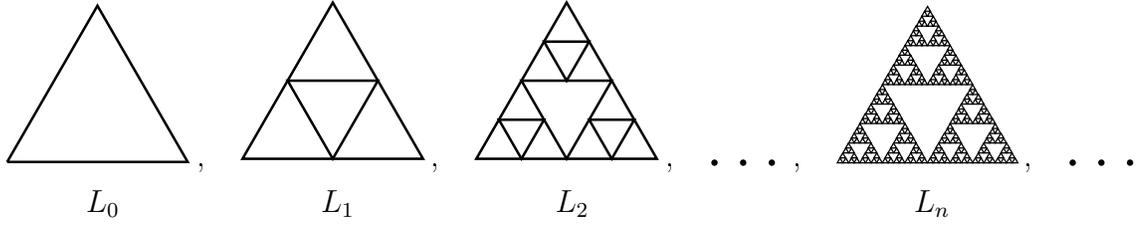
Por Teorema 3.1.1, se concluye que el atractor de \mathcal{J} es \mathcal{S} . ■

3.3.2. Otra manera de construir el triángulo de Sierpiński

Sea L_0 el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, sin su interior (i.e., solo sus lados). Y sean \mathcal{J} definido en Teorema 3.3.1 y F definida en Lema 3.1.1 correspondiente a \mathcal{J} . La sucesión $\langle L_n \rangle = \langle F^{on}(L_0) \rangle$ se ilustra en la Figura 3.2

Sea $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Observando las sucesiones de conjuntos $\langle S_n \rangle$ y $\langle L_n \rangle$, se podría pensar que el triángulo de Sierpiński se puede construir de una manera dual, tomando la unión de los L_n , en lugar de la intersección de los S_n ; esto es, uno puede sentirse inclinado a asegurar que $\mathcal{S} = L$, pero esto no es cierto. Sorprendentemente hay puntos en \mathcal{S} (de

Figura 3.2: La sucesión $\langle L_n \rangle$.



Fuente: [2].

hecho, infinitos puntos) que no están en L ; eso se probará luego. Ahora veamos que el triángulo de Sierpiński es, en realidad, la clausura de esta unión.

Teorema 3.3.2.

$$\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$$

Demostración. Sean $r \in \mathcal{S}$ y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$ la función de direccionamiento correspondiente al SIF \mathcal{J} . Entonces, $\exists \alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = r$, pues φ es sobreyectiva (Teorema 3.2.1). Luego, por definición de φ ,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) = r, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} F(L_0) &= \{f_i(x) \mid x \in L_0, y, i \in \{1, 2, 3\}\}, \\ F^{\circ 2}(L_0) &= \{f_{i_1} \circ f_{i_2}(x) \mid x \in L_0, y, i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}\}, \\ &\vdots \\ F^{\circ n}(L_0) &= \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(x) \mid x \in L_0, y, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Sean $x_0 \in L_0$ y $\varepsilon > 0$. Por la ecuación 3.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_0) \in B(r, \varepsilon)$. Así, $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_0) &\in B(r, \varepsilon) \cap F^{\circ n}(L_0) = B(r, \varepsilon) \cap L_n \\ &\subseteq B(r, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{n=\infty}^{\infty} L_n \right). \end{aligned}$$

Luego, $r \in \overline{\left(\bigcup_{n=\infty}^{\infty} L_n \right)}$.

Para demostrar la otra contención, tendremos en cuenta los siguientes hechos (los conjuntos S_n son los mismos de la Definición 3.3.1):

- (i) $L_n \subseteq S_n$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (ii) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$
- (iii) $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$

Sea $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. De ahí que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_m$. Por (iii) se tiene que $x \in L_n$, para todo $n \geq m$. Por (i) se tiene que $x \in S_n$, para todo $n \geq m$. Y por (ii) se tiene que $x \in S_n$, para todo $n \leq m$. Así, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$. Entonces, $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S}$. Como \mathcal{S} es cerrado y puesto que la adherencia de un conjunto es el “menor” cerrado que lo contiene ([3, Ejercicio 2.9.12]), se concluye que $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n} \subseteq \mathcal{S}$. ■

Sean $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$ y $r = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Estos son los puntos fijos de las contracciones f_1, f_2 y f_3 , respectivamente, del SIF \mathcal{J} . Veamos:

$$f_1(0, 0) = \frac{1}{2}(0, 0) = (0, 0).$$

$$f_2(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 0) + (\frac{1}{2}, 0) = (1, 0).$$

$$f_3(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}(0, 1) = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}) + (\frac{1}{4}, 0) + (0, \frac{\sqrt{3}}{4}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Sea L_{pq} el segmento que une p y q . L_{qr} y L_{pr} se definen de manera análoga (Figura 3.3).

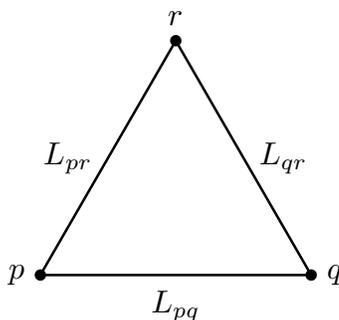
Lema 3.3.1. $\varphi(\Sigma_{13}) = L_{pr}$, donde $\Sigma_{13} := \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i \in \{1, 3\}, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Sea $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \in \Sigma_{13}$. Como $f_1(L_{pr}) \cup f_3(L_{pr}) = L_{pr}$, se tiene, por Teorema 3.1.1, que L_{pr} es el atractor del SIF $\{(\mathbb{R}^2, d_2); f_1, f_3\}$. Esto implica que $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) \in L_{pr},$$

Luego, $\varphi(\Sigma_{13}) \subseteq L_{pr}$.

Figura 3.3: Los segmentos L_{pq} , L_{qr} y L_{pr} .



Fuente: [2].

Para la otra contención, primero demostramos que

$$\vartheta \notin \Sigma_{13} \Rightarrow \varphi(\vartheta) \notin L_{pr} \quad (3.2)$$

Es decir, que cada dígito del código asociado (dirección) de cualquier punto de L_{pr} es únicamente 1 o 3. Veamos:

Si $\vartheta = \vartheta_1\vartheta_2\dots \notin \Sigma_{13}$ es porque existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\vartheta_k = 2$ (asumiremos que k es el menor entero positivo tal que $\vartheta_k = 2$). De modo que, por Lema 3.2.1,

$$\varphi(\vartheta_k\vartheta_{k+1}\dots) = f_2(\varphi(\vartheta_{k+1}\vartheta_{k+2}\dots)) \in f_2(\mathcal{S}).$$

De ahí que $\varphi(\vartheta_k\vartheta_{k+1}\dots) \notin L_{pr}$, pues $L_{pr} \cap f_2(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Veamos que para cualquier punto fuera de L_{pr} , sus imágenes por f_1 y f_3 tampoco pertenecen a L_{pr} :

Sea $u \in \mathcal{S}$ tal que $u \notin L_{pr}$ y supongamos que $f_1(u) \in L_{pr}$. Entonces, $f_1(u) \in f_1(L_{pr}) \cup f_3(L_{pr})$.

(i) $f_1(u) \in f_1(L_{pr})$: $f_1(u) = f_1(v)$, con $v \in L_{pr}$. Como f_1 es inyectiva, se tiene que $u = v$. ¡Contradicción!

(ii) $f_1(u) \in f_3(L_{pr})$: $f_1(u) = f_3(w)$, con $w \in L_{pr}$. $f_1(u) \in f_1(\mathcal{S})$ y $f_1(u) \in f_3(\mathcal{S})$.

De ahí que $f_1(u) \in f_1(\mathcal{S}) \cap f_3(\mathcal{S})$. Como el único punto que está en $f_1(\mathcal{S}) \cap f_3(\mathcal{S})$ es $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, se deduce que $f_1(u) = \frac{1}{2}u = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. u es de la forma (u_1, u_2) , luego $u_1 = \frac{1}{2}$ y $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Así, $u \in L_{pr}$. ¡Contradicción!

Aplicando un razonamiento análogo, se concluye que $f_3(u) \notin L_{pr}$.

Por tanto,

$$\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta_1\vartheta_2\dots\vartheta_k\vartheta_{k+1}\dots) \notin L_{pr}.$$

Sea $x \in L_{pr}$. Como φ es sobreyectiva, existe $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = x$. De modo que $\varphi(\alpha) \in L_{pr}$. Usando la implicación (3.2), se deduce que $\alpha \in \Sigma_{13}$, de donde $x = \varphi(\alpha) \in \varphi(\Sigma_{13})$. Así, se tiene la contención que faltaba. ■

De manera similar se puede demostrar el siguiente lema:

Lema 3.3.2. $\varphi(\Sigma_{12}) = L_{pq}$ y $\varphi(\Sigma_{23}) = L_{qr}$.

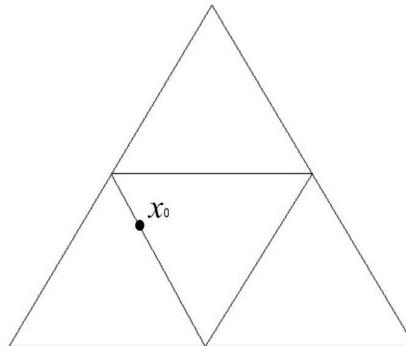
Los dos lemas anteriores permiten escribir el siguiente:

Lema 3.3.3. $L_0 = L_{pq} \cup L_{qr} \cup L_{pr} = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13})$.

En resumen, para cada punto de L_{qr} , cada dígito que forma su(s) dirección(es) es 2 o 3, y cualquier punto que no pertenezca a L_{qr} tiene el dígito 1 en alguna parte de su(s) código(s). Análogamente para L_{pr} y L_{pq} . También se puede observar que si los dígitos 1, 2 y 3 aparecen, simultáneamente, en el(los) código(s) asociado(s) de un punto de \mathcal{S} , entonces el punto no pertenece a L_0 . Además, las direcciones de p, q y r son $1111\dots, 2222\dots$ y $3333\dots$, respectivamente.

Sea ahora $x_0 \in L_1 - L_0$ y supongamos que es como se muestra en la figura.

Figura 3.4: x_0 .



Entonces, $x_0 \in f_1(\varphi(\Sigma_{23}))$. Luego, $\exists \beta \in \Sigma_{23}$ tal que $x_0 = f_1(\varphi(\beta))$. Por Lema 3.2.1, se tiene que $x_0 = \varphi(1\beta)$, con $\beta \in \Sigma_{23}$.

Si x_0 tuviera otro código que inicia también con 1, digamos 1δ , entonces:

$$x_0 = \varphi(1\beta) = \varphi(1\delta).$$

Puesto que f_1 es inyectiva, podemos aplicar el Lema 3.2.2 y escribir:

$$\varphi(\beta) = \varphi(\delta).$$

Es decir, β y δ son códigos del mismo punto. Como $\beta \in \Sigma_{23}$, entonces $\varphi(\beta) \in \varphi(\Sigma_{23})$, luego $\varphi(\delta) \in \varphi(\Sigma_{23})$. De ahí que $\delta \in \Sigma_{23}$.

Razonando de manera similar con x_0 en los otros dos segmentos, se deduce que un código para x_0 es de una de estas tres formas:

$$\alpha = 1\beta, \text{ donde } \beta \in \Sigma_{23}$$

$$\alpha = 2\beta, \text{ donde } \beta \in \Sigma_{13}$$

$$\alpha = 3\beta, \text{ donde } \beta \in \Sigma_{12}$$

Si x_0 es uno de los vértices del triángulo central, entonces tendría dos códigos, cada uno de una de las tres formas anteriores (diferentes); mientras que si no lo es, podría tener uno o dos códigos que son de una de esas tres formas (la misma, en el caso de dos códigos).

Denotemos por $1\Sigma_{23}$ el conjunto de los códigos de la forma 1β , donde $\beta \in \Sigma_{23}$; $2\Sigma_{13}$ el conjunto de códigos de la forma 2β , con $\beta \in \Sigma_{13}$; y $3\Sigma_{12}$ el conjunto de códigos de la forma 3β , $\beta \in \Sigma_{12}$. Lo que se ha probado es que si un código para x_0 (si no es vértice del triángulo central) es $\alpha = 1\beta$ ($\beta \in \Sigma_{23}$), $\alpha = 2\beta$ ($\beta \in \Sigma_{13}$) o $\alpha = 3\beta$ ($\beta \in \Sigma_{12}$), sus códigos o direcciones necesariamente pertenecen a $1\Sigma_{23}$, $2\Sigma_{13}$ o $3\Sigma_{12}$, respectivamente.

Por tanto, podemos concluir que

$$L_1 - L_0 = \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12}) - \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Los razonamientos anteriores, junto con el Lema 3.3.3, permiten afirmar lo siguiente:

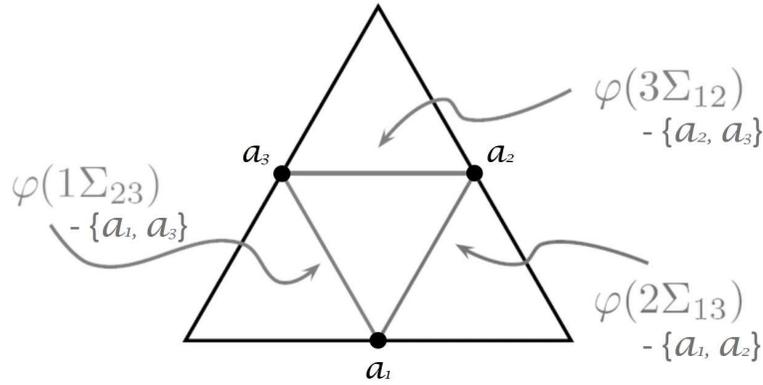
Lema 3.3.4. $L_1 = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13}) \cup \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12})$.

Procediendo inductivamente y con cuidado se concluye que si $x_0 \in L_n$ entonces los códigos de x_0 son de la forma:

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\beta, \tag{3.3}$$

donde $\beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{1, 2, 3\}$.

Figura 3.5: $L_1 - L_0$.



Fuente: [2], modificada.

Recíprocamente, si un código de x_0 es de la forma (3.3), se tendrá:

$$x_0 = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \beta) = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(\varphi(\beta)) \in F^{\circ n}(L_0) = L_n.$$

Expresándolo en palabras, lo que se ha demostrado es que los puntos de los conjuntos L_n son aquellos cuyos códigos inician con n cifras que están en $\{1, 2, 3\}$, y luego sigue una “cola” en la cual solamente aparecen dos dígitos (máximo) que también pertenecen a $\{1, 2, 3\}$.

Acabamos de establecer una caracterización de los puntos del conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ y la podemos formalizar así:

Teorema 3.3.3. $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, los códigos de x_0 son de la forma

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta, \quad \text{donde } \beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}, \quad \alpha_i \in \{1, 2, 3\}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.4)$$

En esta expresión, el código finito $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ puede ser el “código vacío”, es decir sin cifras. Este es el caso para los puntos de L_0 .

El anterior resultado nos permite afirmar que \mathcal{S} , el fractal que nos ha ocupado, contiene puntos que no están en dicha unión. Recordemos la función de direccionamiento

$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$. De ahí tenemos que para todo $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}$. Claramente existen elementos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ que no son de la forma (3.4). Como ejemplos, entre muchos otros, están los siguientes: $\overline{123}$, $112321\overline{321}$ y $333111213\overline{111213}$. Analicemos uno de estos:

$$\varphi(\overline{123}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Calculemos la composición $f_1 \circ f_2 \circ f_3$, que es nuevamente una contracción (Proposición 1.6.2):

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 \circ f_3(x) &= f_1 \left(f_2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{i} \right) \right) \\ &= f_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{i} \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &= f_1 \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\mathbf{i} \right) \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}\mathbf{i} \end{aligned}$$

Sea x_f el punto fijo de la contracción $f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Entonces,

$$x_f = \frac{1}{8}x_f + \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}\mathbf{i} \Rightarrow x_f = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}\mathbf{i}.$$

De modo que

$$\varphi(\overline{123}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3(x_f) = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}\mathbf{i}.$$

Por lo tanto, $x_f = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}\mathbf{i}$ es un punto del triángulo de Sierpiński que no pertenece a $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Las últimas dos proposiciones que enunciaremos y demostraremos en seguida, fueron planteadas en el artículo [2] como ejercicios para el lector.

Proposición 3.3.1. *Sea $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_f\})$. Entonces, la adherencia de D es el triángulo de Sierpiński.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
D &= F^{o0}(\{x_f\}) \cup F^{o1}(\{x_f\}) \cup F^{o2}(\{x_f\}) \cup \dots \cup F^{on}(\{x_f\}) \cup \dots \\
&= \{x_f\} \cup \{f_1(x_f), f_2(x_f), f_3(x_f)\} \cup \{f_1f_1(x_f), f_1f_2(x_f), f_1f_3(x_f), \\
&\quad f_2f_1(x_f), f_2f_2(x_f), \dots, f_3f_3(x_f)\} \cup \{f_1^{o3}(x_f), f_1^{o2}f_2(x_f), \dots\} \cup \dots \\
&= \{x_f\} \cup \{f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_k}(x_f) \mid \alpha_i \in \{1, 2, 3\}, k \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

\mathcal{S} es cerrado (Proposición 2.2.1) y claramente $D \subseteq \mathcal{S}$. De ahí que $\overline{D} \subseteq \mathcal{S}$ ([3, Ejercicio 2.9.12]).

Por otra parte, $\overline{D} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0, B(y, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\}$. Sea $z \in \mathcal{S}$. Entonces, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{m_0}(\mathcal{S}) = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{m_0}(\varphi(\Sigma^{\mathbb{N}})) \subseteq B(z, \varepsilon)$$

(el triángulo de Sierpiński es un conjunto autosemejante). Luego, $z \in \overline{D}$. De esta manera se tiene la otra contención, completando la prueba. ■

Proposición 3.3.2.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_f\}) \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_f\}) \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \neq \emptyset$. Entonces, existe $b \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_f\}) \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. En la demostración anterior, se mostró que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_f\}) = \{x_f\} \cup \{f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_k}(x_f) \mid \alpha_i \in \{1, 2, 3\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Por Teorema 3.3.3, $x_f = \varphi(\overline{123}) \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. De ahí que $b \neq x_f$. Por otro lado, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_{n_1}}(x_f) = \varphi(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n_1}\overline{123})$. Así, b tiene un código de la forma $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n_1}\overline{123}$ y pertenece a $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Esto contradice el Teorema 3.3.3. ■

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Así finaliza esta monografía, no sin antes, a modo de resumen, listar algunas propiedades de \mathcal{S} que fueron demostradas aquí.* El triángulo de Sierpiński cumple lo siguiente:

1. Tiene área nula y su perímetro es infinito.
2. Es un continuo.
3. Todos sus puntos son puntos frontera.
4. Es una imagen continua de $[0, 1]$.
5. Todos sus puntos son puntos de ramificación (salvo tres).
6. Es el atractor de un SIF.
7. Es igual a $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$, pero diferente a $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Se espera, sin ánimo arrogante, haber despertado o avivado la llama de interés del lector por este campo de las matemáticas, tan abierto y atractivo. Además, que haya quedado en él una sensación de vacío, no por falta de contenido, sino como efecto del final de una agradable experiencia.

*Otras propiedades se pueden consultar en [3, Apéndice C] y [10].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SIERPIŃSKI, WACŁAW; *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, Oeuvres Choisies, tome II: Théorie des Ensembles Et Ses Applications; Académie Polonaise Des Sciences, Institut Mathématique; PWN - Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1975, p. 99-106.
- [2] ARENAS, Gilberto & SABOGAL, Sonia; *Acerca del Triángulo de Sierpiński*; Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Vol. XXXIII, N. 128, 2009, p. 395-405.
- [3] SABOGAL, Sonia & ARENAS, Gilberto; *Una introducción a la geometría fractal*; Ediciones UIS, Bucaramanga, 2011.
- [4] APOSTOL, TOM M.; *Análisis Matemático*, segunda edición; Editorial Reverté, s.a., Barcelona, 1996.
- [5] PATTY, C. Wayne; *Foundations of Topology*, second edition; Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 2009.
- [6] WILLARD, STEPHEN; *General Topology*; Dover Publications, Inc., New York, 2004.
- [7] BARNSLEY, Michael; *Fractals Everywhere*; Academic Press, Inc., Atlanta, 1988.
- [8] FALCONER, Kenneth; *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, second edition; John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2003.
- [9] NADLER, Jr., Sam B.; *Continuum Theory: an introduction*; Marcel Dekker, New York, 1992.
- [10] MESA, Héber; *El Triángulo de Sierpiński*; Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, TOM M.; *Análisis Matemático*, segunda edición; Editorial Reverté, s.a., Barcelona, 1996.

ARENAS, Gilberto & SABOGAL, Sonia; *Acerca del Triángulo de Sierpiński*; Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Vol. XXXIII, N. 128, 2009, p. 395-405.

SABOGAL, Sonia & ARENAS, Gilberto; *Una introducción a la geometría fractal*; Ediciones UIS, Bucaramanga, 2011.

SIERPIŃSKI, WACŁAW; *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, Oeuvres Choisies, tome II: Théorie des Ensembles Et Ses Applications; Académie Polonaise Des Sciences, Institut Mathématique; PWN - Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa, 1975, p. 99-106.