

**EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIADO POR LA
REPRESENTACIÓN EJECUTABLE**

**MAYERLI HERNÁNDEZ RUEDA
LEINY VIVIANA PABÓN JAIMES**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

**EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIADO POR LA
REPRESENTACIÓN EJECUTABLE**

**MAYERLI HERNÁNDEZ RUEDA
LEINY VIVIANA PABÓN JAIMES**

**Trabajo de grado para obtener el título de:
Licenciado en Matemáticas**

**DIRECTORA
Ph.D. DIANA JARAMILLO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer de todo corazón a:

Nuestras familias, por su colaboración, paciencia y apoyo incondicional.

El curso 10-1 del Centro Educativo las Américas, por su colaboración y entusiasmo durante el proceso de esta experiencia.

Tatiana, Oscar, Yair, Mike y Yerson por permitirnos estar cerca de ellos.

La profesora Cruz Celina Balcucho, por abrirnos el espacio en su clase y brindarnos todo su apoyo incondicional y conocimiento.

La profesora Diana Jaramillo, por su orientación en la planeación y ejecución del proyecto, especialmente por sus consejos y enseñanzas durante nuestra formación docente.

El profesor Juan de Dios Urbina, por su constante colaboración y apoyo en la búsqueda de los medios necesarios para la elaboración de todas nuestras actividades.

DEDICATORIA

Este libro es dedicado a:

Papito Dios, por todas las lindas bendiciones recibidas. Mi Señor y Amigo.

Mi padre Enrique y mi madre Esperanza, por la confianza depositada y los consejos recibidos en los momentos críticos que hicieron esclarecer mi horizonte.

Mis hermanos Alexander, Robinson y Enrique, con quienes siempre pude contar.

Mi esposo Gustavo, el amor de mi vida, quien me ha hecho la mujer más amada, valorada y feliz.

Felipe, el tesoro más precioso que Dios me dio a cuidar, el ejemplo más vivo de su amor, para quien espero ser el mejor ejemplo que pueda tener. Te amo.

MAYERLI

DEDICATORIA

A Dios, por darme la vida cada día, mi familia y el amor.

A mis padres, en su memoria, quienes fueron ejemplo de vida por sus valores, sus enseñanzas y, sobre todo, su amor y servicio a Dios.

A mis queridas hermanas, a quienes amo, especialmente a Ruth y Martha, por su paciencia, colaboración y apoyo. Este triunfo también es de ustedes.

A ti Germán Darío, que me has brindado todo tu apoyo incondicional y has caminado a mi lado este sendero que hoy llega a su meta. Recorre conmigo muchos senderos más. Te amo.

LEINY VIVIANA

RESUMEN

TÍTULO: EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE.*

AUTORAS:

HERNÁNDEZ RUEDA MAYERLI

PABÓN JAIMES LEINY VIVIANA **

PALABRAS CLAVES:

1. Parábola. 2. Representación Ejecutable. 3. Representación Semiótica. 4. Construcción del concepto. 5. Calculadora TI-92.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO:

La pregunta que se pretende responder a través de esta investigación cualitativa es: **¿Cómo se construye el concepto de parábola mediado por la representación ejecutable, desde la calculadora gráfica?** Esta investigación tiene como objetivo: **Analizar el proceso de construcción del concepto de parábola, mediado por la representación ejecutable, desde la calculadora gráfica.** El trabajo de investigación fue realizado en el Centro Educativo las Américas, con estudiantes de grado décimo, ya que allí están desarrollando actualmente el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas y, además, dicha institución cuenta con las calculadoras TI-92, las cuales fueron necesarias para el desarrollo del presente trabajo.

Para hablar de representación ejecutable es necesario hablar primero de representación semiótica, la cual es el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otro individuo, llenando así una función de comunicación. Teniendo en cuenta esto, podemos decir que la representación ejecutable es una representación semiótica que una vez instalada en el lenguaje del medio ambiente computacional, la nueva representación es procesable y manipulable.

Esta investigación es de tipo cualitativo, por consiguiente, la recolección de datos es a través de tres talleres, un escrito, una carta, una entrevista, fotografías, nuestro diario de campo y una evaluación. Utilizamos categorías emergentes, partiendo de la triangulación de los datos; esta triangulación será de las voces de los estudiantes, los autores que sustentan el trabajo y nuestro punto de vista.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dra. Diana Jaramillo Quiceno

SUMMARY

TITLE: THE GEOMETRIC STUDY OF THE PARABLE, MEDIATED FOR THE EXECUTABLE REPRESENTATION.¹

AUTHORS:

HERNÁNDEZ RUEDA MAYERLI
PABÓN JAIMES LEINY VIVIANA²

KEY WORDS:

1. Parable. 2. Executable Representation. 3. Semiotic Representation. 4. Construction of the Concept. 5. Calculator TI-92.

DESCRIPTION OR CONTENT:

The question that is sought to respond through this qualitative investigation is: **How is the parable concept built, mediated by the executable representation, from the graphic calculator?** This investigation has as objective: **To analyze the process of construction of the parable concept, mediated by the executable representation, from the graphic calculator.** The investigation work was carried out in the Educational Center the America, with grade students tenth, since there they are developing the Project of Incorporation of New Technologies at the moment to the Curriculum of Mathematics and, also, this institution has the calculators TI-92, which were necessary for the development of the present work.

To speak of executable representation, it is necessary to speak first of semiotic representation, which is the means of expression of the mental representations to make them visible to another individual, filling this way a communication function. Keeping in mind this, we can say that the executable representation is a semiotic representation that once installed in the language of the computer environment, the new representation is processable and manipulated.

This investigation is of qualitative type, consequently, the gathering of data is through three workshops, writing, a letter, an interview, pictures, our field newspaper and an evaluation. We use emergent categories, leaving of the triangulation of the data; this triangulation will be of the voices of the students, the authors that sustain the work and our point of view.

¹ Graduation Project

² Sciences Faculty. Mathematics School. Dra. Diana Jaramillo Quiceno

CONTENIDO

1. NUESTROS PRIMEROS PASOS...	2
2. LOS PROTAGONISTAS	9
3. ...Y EMPEZÓ LA INVESTIGACIÓN	15
4. EL OBJETO MATEMÁTICO	30
5. LAS CATEGORÍAS	36
5.1. LA SEMILLA	36
5.2. PLANTANDO LA SEMILLA	41
5.3. FLORECE LA SEMILLA	49
6. CONCLUSIONES	69
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
FIGURA 1.	Sala de Tecnología.	2
FIGURA 1 A.	Edificio de los grados 8 a 11.	2
FIGURA 2.	Autorización firmada por padres de familia.	12
FIGURA 3.	Desprendibles de autorizaciones.	14
FIGURA 4.	Taller 1 – página 1.	21
FIGURA 5.	Taller 1 – página 2.	22
FIGURA 6.	Taller 1 – página 3.	23
FIGURA 7.	Parábola construida para el desarrollo del primer taller.	24
FIGURA 8.	Taller 2 – página 1.	25
FIGURA 9.	Taller 2 – página 2.	26
FIGURA 10.	Evaluación Número 1.	27
FIGURA 11.	Evaluación Número 2.	28
FIGURA 12.	Secciones Cónicas.	31
FIGURA 13.	Elementos de la parábola.	33
FIGURA 14.	Foto de la clase de octubre 2006.	36
FIGURA 15.	Escrito sobre parábola – octubre 2006.	38
FIGURA 16.	Escrito sobre parábola – octubre 2006.	39
FIGURA 17.	Taller 1 – 11 de octubre 2006.	42
FIGURA 18.	Parábola en la calculadora.	43
FIGURA 19.	Taller 1 – 11 de octubre 2006.	44
FIGURA 20.	Evaluación – 1 de noviembre 2006.	45
FIGURA 21.	Carta – 27 de noviembre 2006.	46
FIGURA 22.	Carta – 22 de noviembre 2006.	47
FIGURA 23.	Taller 1 – 11 de octubre 2006.	51
FIGURA 24.	Taller 1 – 11 de octubre 2006.	52
FIGURA 25.	Evaluación realizada por Yerson – 1 de noviembre 2006.	54
FIGURA 26.	Evaluación realizada por Mike – 1 de noviembre 2006.	54
FIGURA 27.	Evaluación realizada por Tatiana – 1 de noviembre 2006.	54
FIGURA 28.	Evaluación realizada por Yair – 1 de noviembre 2006.	56
FIGURA 29.	Evaluación realizada por Mike – 1 de noviembre 2006.	57
FIGURA 30.	Evaluación realizada por Yerson – 1 de noviembre 2006.	58
FIGURA 31.	Evaluación realizada por Oscar – 1 de noviembre 2006.	59
FIGURA 32.	Carta escrita por Mike.	60
FIGURA 33.	Carta escrita por Yair.	61
FIGURA 34.	Carta escrita por Yerson.	63
FIGURA 35.	Carta escrita por Oscar.	65
FIGURA 36.	Carta escrita por Tatiana.	66

1. NUESTROS PRIMEROS PASOS...

Esta investigación tiene su origen en nuestra práctica pedagógica correspondiente al Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I, la cual se realizó en el Centro Educativo las Américas con los estudiantes de los grados 10-1 y 10-2. Esta institución, de carácter oficial, se encuentra ubicada en la calle 33 con carrera 36 del barrio Álvarez en la ciudad de Bucaramanga. A continuación mostramos dos imágenes de este centro educativo:



FIGURA 1.
Sala de Tecnología.



FIGURA 1A.
Edificio de los grados 8 a 11.

En esta institución se desarrolla actualmente el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia³, dirigiéndolo hacia el uso de la calculadora en la

³ Este proyecto se desarrolló desde el año 2000, inicialmente desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN), luego fue liderado por el grupo de Educación Matemática (EDUMAT), de la Universidad Industrial de Santander y actualmente está a cargo de las respectivas instituciones educativas que participaron en él desde su comienzo.

enseñanza de las matemáticas. Por este motivo, en nuestra práctica pedagógica utilizamos la calculadora TI-92 como herramienta en el aula de clase, herramienta que era utilizada por la profesora Cruz Celina Balcucho, quien fue nuestra tutora de la práctica pedagógica y profesora encargada de estos cursos. La profesora Cruz Celina es una persona muy preparada, pues posee amplios conocimientos en Matemáticas, Química y Física; además, tiene veinticinco años de experiencia en la docencia.

Durante nuestra práctica pedagógica realizamos talleres y actividades, en las cuales los estudiantes contaron con las calculadoras TI-92 para su desarrollo. Los resultados y análisis de dichas actividades y la observación a los estudiantes nos llevaron a plantear ciertas preguntas que dejamos abiertas porque ameritaban una reflexión más profunda y en ese momento no contábamos con las herramientas suficientes para dar posibles respuestas. Algunas de esas preguntas fueron: ¿Será que la calculadora ayuda a desarrollar el pensamiento variacional?, ¿del tipo de actividad que se realice, depende que la calculadora desarrolle el pensamiento variacional? Además, intuimos que la calculadora ayudó y facilitó la construcción del concepto que se trabajó en ese momento, sin embargo, en otros momentos, como el de la evaluación, esa intuición no fue la misma.

Debido a esta experiencia en la práctica pedagógica, comenzamos a analizar con detenimiento las inquietudes sobre el uso de la calculadora y su aporte en el proceso cognitivo de los estudiantes; este análisis fue compartido con nuestra orientadora y directora de proyecto, la doctora Diana Jaramillo, y con la profesora Cruz Celina, quienes con sus aportes

nos ayudaron a esclarecer los criterios que nos llevaron al tema de investigación.

Es importante aclarar que para nuestro tema de investigación era necesario contar con un objeto matemático y por este motivo el tema seleccionado fue “la parábola”, ya que debíamos atender a la planeación escolar de la profesora Cruz Celina.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, planteamos la siguiente pregunta de investigación: **¿Cómo se construye el concepto de parábola mediado por la representación ejecutable, desde la calculadora gráfica?**

Por lo tanto, para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, planteamos como objetivo: **Analizar el proceso de construcción del concepto de parábola, mediado por la representación ejecutable, desde la calculadora gráfica⁴.**

Es importante aclarar que el objeto de estudio en esta investigación está centrado en la representación ejecutable como mediadora en la construcción del conocimiento matemático y en el desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

Cuando se habla de las representaciones hay que tener en cuenta que “en el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación” (Moreno, 2002a, p.58).

⁴ En nuestra investigación hacemos referencia a la calculadora TI-92, ya que el Centro Educativo las Américas cuenta con ellas.

Según Duval, citado por Guzmán (1998, p.2), los sistemas semióticos de representación se definen así: "las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico". Además, "para Duval, las representaciones semióticas son producciones constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación, que tiene sus propias restricciones de significado y función" (Walter, Castro, Hugo & Pardo, 1993).

Es decir, según Albergante, Gómez, Welti, Gei (2006), las representaciones semióticas, como conjuntos de signos, son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otro individuo, llenando así una función de comunicación.

Según De la Rosa (2001), la calculadora es un medio donde se pueden expresar y aprehender nociones matemáticas, donde también existe una relación estrecha entre los sistemas de representación, siendo ella el medio que proporciona la posibilidad de la ejecutabilidad de las representaciones.

Estamos comprendiendo la representación ejecutable como es concebida por Moreno (2002b, p.84):

Podemos imaginar los sistemas de representación como herramientas de mediación. En sus versiones informáticas, la forma general de representación tiene una característica central: es *ejecutable*. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras conservando relaciones estructurales de la misma, es una forma de manipulación, de ejecución

de representaciones informáticas, que contribuyen al realismo de estos objetos geométricos.

Para nuestra investigación, decidimos analizar la información recogida de cinco estudiantes del curso 10-1, cuyos nombres reales son: Tatiana, Oscar, Mike, Yair y Yerson, quienes juegan un papel importante al ser los sujetos de esta investigación.

Uno de los criterios que utilizamos para la selección de los cinco estudiantes, fue el hecho de que este grupo contaba en su horario de clases con dos bloques semanales de 110 minutos cada uno, por lo tanto, esto permitió un mejor aprovechamiento del tiempo, lo que no ocurría con el grupo 10-2, ya que su horario contaba con horas sencillas de 55 minutos. Además del factor tiempo, otro criterio que utilizamos para la selección de nuestros estudiantes, nos expresamos así porque eso significaron para nosotras, fue que tuvieran el manejo básico de las herramientas que la calculadora brinda, pero esto solo descartó muy pocos estudiantes, debido a que la mayoría de ellos manejaban dichas herramientas.

Queremos aclarar que para efecto de nuestra investigación era necesario que los estudiantes conocieran las opciones básicas del manejo de la calculadora, pues nuestro objetivo no era enseñar el manejo de ésta.

Por este motivo, pensamos en otro criterio de selección, éste fue el hecho de que los cinco estudiantes escogidos identificaran al grupo; es decir, que identificaran a aquellos estudiantes que les gusta participar en clase y que son muy activos, que identificaran a los estudiantes que no participan porque son tímidos o introvertidos, pero que responden a las actividades académicas, también a los estudiantes indiferentes en el aula de clase,

pero que cuando tienen una motivación cambian esa indiferencia; en fin, un grupo heterogéneo.

Lo anterior, es lo que nosotras consideramos para seleccionar a nuestros sujetos de investigación, pues queremos aclarar que no estamos generalizando estos criterios para todos los estudiantes en todas las instituciones educativas.

La información recogida para nuestra investigación fue por medio de la observación hecha a los estudiantes en el desarrollo de las actividades, dos talleres, un escrito, una carta, una entrevista, nuestro diario de campo y una evaluación.

Esta experiencia la relataremos así:

En nuestro primer capítulo haremos una breve descripción y presentación de los estudiantes sujetos de nuestra investigación para que usted como lector los conozca y sepa lo importante que fueron para nosotras, por este motivo decidimos darle a este capítulo el nombre de "Los Protagonistas", pues eso es lo que ellos fueron para nosotras, los protagonistas de esta experiencia de investigación.

En el segundo capítulo llamado "...Y Empezó La Investigación", narraremos la experiencia y la metodología que utilizamos para realizar la investigación.

En el tercer capítulo denominado "El Objeto Matemático", mostraremos brevemente el concepto matemático que se consideró para el desarrollo

de la investigación, el cual consistió fundamentalmente en la construcción del concepto de parábola como lugar geométrico.

En el cuarto capítulo llamado "Las Categorías", hablaremos de las tres categorías de análisis que surgieron de los datos recolectados en la investigación y en donde mostraremos lo expresado por nuestros estudiantes, lo que nosotras percibimos de dichos datos y lo expresado por los autores que sustentan nuestro trabajo.

Por último, en el quinto capítulo hablaremos de las conclusiones a las que llegamos con el trabajo realizado en nuestra investigación.

2. LOS PROTAGONISTAS

A continuación les presentamos a nuestros "Protagonistas", ya que por su colaboración y su compromiso, se pudo llevar a cabo nuestra investigación. Además, porque ellos se convirtieron en personas importantes en nuestra vida profesional y personal, por su cariño y respeto.



estudiar Ingeniería de Petróleos.

Ella es Leidy Tatiana Sánchez y tiene 15 años. Siempre se ha caracterizado por su colaboración y responsabilidad. Su asignatura favorita es Física y en sus ratos libres hace manualidades y le gusta bailar. Estudia en la institución desde quinto primaria y se ha relacionado con las calculadoras desde sexto grado. Al terminar la secundaria, Tatiana quiere

Él es Oscar Iván Alvarado y tiene 15 años.

Oscar Iván vive con su mamá y es hijo único, se ha caracterizado por sus buenas calificaciones y por su participación en clase. Su asignatura favorita es Química y toda su etapa escolar la ha vivido en el Centro Educativo las Américas. Se ha relacionado con las calculadoras desde

noveno grado y al terminar la secundaria, Oscar quiere estudiar Ingeniería Mecánica.



Él es Gerson Yair García y tiene 17 años. Es una persona calmada e introvertida y se ha caracterizado por sus excelentes calificaciones. Estudia en la institución desde sexto grado, su asignatura favorita es Informática y se ha relacionado con la calculadora desde octavo grado. Es el mayor de cuatro hermanos y vive con su mamá y sus hermanos; en su tiempo libre

le gusta dormir. Al terminar la secundaria, Yair quiere estudiar Ingeniería de Sistemas o Economía.

Él es Mike Edwin Monroy y tiene 17 años. Es el mayor de dos hermanos y vive con su papá, su mamá y su hermano. En su tiempo libre le gusta jugar fútbol y hablar con sus amigos. La asignatura que más le gusta es Química y se ha relacionado con las calculadoras desde octavo grado. Mike prefiere las clases con calculadoras y le gusta dibujar. Al terminar la secundaria, Mike quiere estudiar Arquitectura.



Él es Yerson Mauricio Méndez y tiene 15 años. Estudia en las Américas desde primero primaria, la asignatura que más le gusta es Química y desde octavo grado se ha relacionado con las calculadoras. Yerson es el mayor de tres hermanos y vive con sus papas y sus hermanos; en su tiempo libre le gusta ver televisión y hablar con sus amigos. Yerson es muy colaborador y mostró interés en todas las clases y actividades. Al terminar la secundaria, él quiere trabajar e ingresar a la Policía.

No podemos dejar de mencionar a los padres de familia de nuestros protagonistas, ya que gracias a su autorización fue posible en nuestra

investigación dar a conocer a nuestros estudiantes, con sus fotos, sus nombres reales, sus talleres y todos los datos que se recogieron para el análisis. Dicha autorización fue una carta como la siguiente:


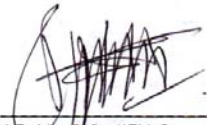
		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA DE MATEMÁTICAS
Bucaramanga, 14 de noviembre de 2006		
Señores Padres de Familia:		
<u>Sanchez Palomino Luis Enrique - Gamboa Duarte Luz Dary</u> E.S.M.		
Reciban un cordial saludo.		
En la clase de trigonometría se está desarrollando el proyecto de investigación denominado: "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"		
Queremos formalmente solicitar su autorización para que su hijo(a): <u>Sanchez Gamboa Leidy Tatiana</u> forme parte de nuestro grupo de investigación, como sujeto de la misma, e igualmente presentarlo en la publicación de los resultados.		
Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hijo(a) en forma de fotos, encuestas, entrevistas y actividades extraclase, que consisten en reuniones llevadas a cabo en la Institución Educativa las Américas.		
Agradecemos su atención y su colaboración,		
<u>Mayerli Hdez.</u> MAYERLI HERNÁNDEZ Estudiante investigadora Escuela de Matemáticas	<u>Leiny Pabón</u> LEINY PABÓN Estudiante investigadora Escuela de Matemáticas	 DIANA JARAMILLO Orientadora de la investigación Escuela de Matemáticas
<hr/> Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) <u>leidy Tatiana Sanchez Gamboa</u> en la investigación "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"		
<u>Luis Enrique Sanchez P.</u> Firma del Padre	<u>Luz Dary Gamboa D.</u> Firma de la Madre	
Ciudad universitaria - Cra. 27 Cl. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201 PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 - 2308, Fax: (097) 6 45 03 01 E-mail: matief@uis.edu.co		

FIGURA 2.
Autorización firmada por padres de familia.

La anterior fue la autorización firmada por los padres de Tatiana, y el mismo modelo de carta fue firmado por los padres de Mike, Yerson, Yair y Oscar, aunque a continuación sólo mostraremos el desprendible de dicha autorización:

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) Gerson Yair Garcia L
 en la investigación "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"

_____ Firma del Padre

Isleno LAGUADO CORZO
 Firma de la Madre

Ciudad universitaria – Cra. 27 Cll. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
 PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 – 2308, Fax: (097) 6 45 03 01
 E-mail: matief@uis.edu.co

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) Mike Edwin Monroy Zamora
 en la investigación "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"

Daniel Monroy
 Firma del Padre

Sandra E. Zamora R
 Firma de la Madre

Ciudad universitaria – Cra. 27 Cll. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
 PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 – 2308, Fax: (097) 6 45 03 01
 E-mail: matief@uis.edu.co

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) Yerson Mauricio Mendez
 en la investigación "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"

Carlos Alberto Andez L
 Firma del Padre

ANA Florez Villamizar
 Firma de la Madre

Ciudad universitaria – Cra. 27 Cll. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
 PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 – 2308, Fax: (097) 6 45 03 01
 E-mail: matief@uis.edu.co

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) Oscar Ivan Alvarado G.
en la investigación "EL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA MEDIDADO POR LA
REPRESENTACIÓN EJECUTABLE"

_____ Firma del Padre

_____ Firma de la Madre Loreida Gómez

Ciudad universitaria – Cra. 27 Cl. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 – 2308, Fax: (097) 6 45 03 01
E-mail: matief@uis.edu.co

FIGURA 3.
Desprendibles de autorizaciones.

3. ...Y EMPEZÓ LA INVESTIGACIÓN

Como fue dicho anteriormente, nuestra investigación surgió a partir de nuestra práctica pedagógica, ya que en ella realizamos talleres con el uso de la calculadora TI-92, la revisión de dichos talleres nos hizo sentir muchas inquietudes respecto al papel que jugó la calculadora en el aprendizaje de los estudiantes.

Además de esas inquietudes, nosotras queríamos realizar el trabajo de investigación en el Centro Educativo las Américas y continuar con nuestros estudiantes, ya que les habíamos tomado mucho cariño y se había creado un ambiente de confianza y respeto mutuo. Afortunadamente se pudo continuar en este Centro Educativo y fue posible realizar nuestra investigación.

En la actualidad, el interés, tanto de algunos docentes como de algunas instituciones educativas, por mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas, ha hecho que se piense más centradamente en los procesos de construcción del conocimiento y en el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos.

Dicho interés ha traído el uso de las tecnologías computacionales a la enseñanza de las matemáticas, y dentro de ellas, el uso de las calculadoras gráficas. El uso de esta tecnología viene generando cambios

en el currículo de matemáticas y generando también investigaciones respecto a su uso en la enseñanza de las matemáticas⁵.

Estas investigaciones han arrojado distintos resultados, pues cada autor tiene su propia interpretación acerca de las tecnologías y su uso en el aula de clase. En este sentido, Del puerto y Minnaard (2003, p.1) dicen:

El currículo de Matemática está cambiando lentamente, y la tendencia es gastar menos tiempo en métodos de lápiz y papel y más tiempo en aplicaciones, resolución de problemas, desarrollo de conceptos y temas nuevos. Los métodos de enseñanza también están cambiando hacia una aproximación investigativa y exploratoria, contando con la contribución de las nuevas tecnologías para el desarrollo de esta perspectiva. Dentro de estas nuevas tecnologías se destacan las calculadoras gráficas.

Además, Según Castiblanco, Camargo, Villarraga, Obando (1999), las calculadoras y los computadores permiten a los alumnos "la experimentación", logrando con esto que el aspecto experimental de las matemáticas se resalte y proporcione oportunidades de observar, hacer predicciones, lograr representaciones, validar hipótesis, controlar variables, etc. En este sentido, los autores argumentan:

Las herramientas tecnológicas permiten que de una manera rápida un alumno pueda realizar variaciones en el modelo sobre el cual trabaja, y de manera inmediata pueda constatar los resultados causados por dicha variación, al obtener la respuesta de la máquina. (Castiblanco, Camargo, Villarraga, Obando, 1999, p.31)

Por otro lado, un motivo más para que nuestra investigación fuera enfocada en este tema, fue el hecho de que la institución viene trabajando el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas. Según Castiblanco (2002), este proyecto

⁵ Algunas de estas investigaciones son: Moreno (2002), Castiblanco (2002), entre otros.

pretende mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y la capacidad de aprendizaje mediante los recursos expresivos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas.

Esta investigación se hizo bajo el enfoque de una investigación en el aula y se analizó de forma cualitativa a través de la triangulación de los datos, en donde consideramos la opinión de los autores que han trabajado el tema, el trabajo hecho por los estudiantes y nuestro punto de vista.

Según Arias (1995), la investigación en el aula es un intento de renovación de la práctica docente, ya que el aula de clase es un contexto natural de investigación, porque lo que ocurre en su interior adquiere un sentido propio y profundo para docentes, estudiantes y sociedad. Dicho de otra manera:

En el intento de construir saberes pedagógicos, diferentes autores asumen que la investigación en el salón de clase: se podría definir como un proceso sistemático, creativo y crítico fruto del análisis y la reflexión de los mismos profesores sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje tal como ocurre en el salón de clase con miras de resolver problemas que surgen de la misma práctica, a la luz de la experiencia y los conocimientos disponibles sobre dichos problemas. (Quintero, Munevar & Yepes y Bastidas, 2006)

Después de algunas charlas con nuestra orientadora, se definió el tema que se iba a tratar en nuestra investigación y para efectos del trabajo de campo, a mediados del mes de agosto fuimos a la institución a hablar con la profesora Cruz Celina sobre nuestra investigación, explicándole el tema que se iba a trabajar y solicitándole nuevamente permiso para estar en su clase y poder llevar a cabo el trabajo de campo necesario para la

investigación, ella muy amablemente aceptó y nos ofreció todo su apoyo y conocimiento respecto al tema.

Como la profesora Cruz Celina aceptó abrirnos el espacio en su clase, entonces acordamos que a mediados de septiembre empezaríamos nuestro trabajo de campo y que para esa fecha, siguiendo la planeación escolar de la profesora, el tema que se trabajaría sería Geometría Analítica. Pero como sabemos, el tema de Geometría Analítica es muy amplio, y por sugerencia de nuestra orientadora, decidimos trabajar “la parábola”, definiendo así el objeto matemático de estudio para nuestra investigación.

Después de definir el objeto matemático que se iba a trabajar en nuestra investigación y de contar con el permiso de la profesora Cruz Celina, el siguiente paso fue hacer la planeación del trabajo de campo; dicha planeación correspondió a las técnicas de recolección de datos que íbamos a utilizar.

Como la investigación fue de tipo cualitativo, la recolección de datos la hicimos mediante las siguientes técnicas:

- Un taller con conos hechos en plastilina, en donde los estudiantes hicieron los cortes a los conos para visualizar el origen de las secciones cónicas, entre ellas la parábola, y en donde se les habló un poco sobre la historia de la parábola.
- Dos talleres con el uso de la calculadora TI-92: estos talleres los aplicamos a todo el curso, ya que con ellos se desarrollaron las clases, pero para el análisis de la investigación solo se tuvo en cuenta los

talleres realizados por nuestros protagonistas. El objetivo de dichos talleres fue obtener información de los muchachos (sujetos de la investigación), y que esa información nos sirviera para realizar el análisis de los datos.

- ✦ Un escrito que los estudiantes elaboraron, con el objetivo de conocer lo que ellos entendían acerca de la parábola.
- ✦ Observaciones a nuestros protagonistas en el aula de clase durante el desarrollo del tema, con el objetivo de ver su interacción con la calculadora, las preguntas y respuestas verbales, la disposición ante la clase de matemáticas, entre otros.
- ✦ Fotografías: donde tomamos registro de las actividades realizadas.
- ✦ Una carta escrita por nuestros muchachos, dirigida a una persona a quien le tuvieran aprecio y confianza para que, en ella, le contaran cómo fue el proceso de aprendizaje del concepto de parábola y qué papel jugó la calculadora en dicho proceso.
- ✦ Una entrevista individual con nuestros protagonistas, con el fin de ampliar la idea que teníamos de ellos sobre la construcción del concepto de parábola.
- ✦ Nuestro diario de campo, en donde registramos todas las observaciones y reflexiones que realizamos durante el trabajo de campo.
- ✦ Una evaluación que fuera coherente con el proceso de enseñanza que estábamos llevando, y por esta razón tomamos en consideración dos aspectos: el concepto de parábola y el uso de la calculadora.

Para la elaboración de dichos talleres contamos con la colaboración y supervisión de la profesora Cruz Celina, ya que ella desde su experiencia, no solo como docente sino también en el uso de la calculadora en el aula


de clase, nos aclaró dudas, nos aportó ideas, nos corrigió errores y todo esto hizo que trabajáramos conjuntamente en la planeación de los talleres.

El taller con los conos en plastilina fue un taller que hicimos por sugerencia de la profesora Cruz Celina, ya que como íbamos a iniciar el tema de Geometría Analítica, ella quería que empezáramos el tema con algo que fuera significativo para los estudiantes, por esto, con ayuda de nuestra orientadora, pensamos en que podría ser importante que los muchachos conocieran un poco de historia de las cónicas y así, con ayuda de la historia, se hiciera una clase que les llamara la atención y que resultara significativa para ellos.

En la primera clase se les habló a los muchachos un poco de historia de las secciones cónicas, luego con unos conos en plastilina ellos hicieron los diferentes cortes de tal forma que pudieron ver cómo se iban formando las cónicas, como lo son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Esta experiencia les gustó mucho a los estudiantes porque evidenciaron que el nombre de secciones cónicas surge por los cortes a un cono, además les llamó la atención el hecho de que un concepto tan antiguo aun tenga aplicabilidad en nuestros tiempos.

Nosotras planeamos dos talleres. El primer taller que llamamos "La Parábola", consistió en que dada una parábola construida en Cabri Géomètre, los muchachos, de acuerdo a ella, contestaran unas preguntas, las cuales tenían el objetivo de que los estudiantes concluyeran características de la parábola que los llevaran a la construcción de su concepto.


A continuación mostramos el taller elaborado y la parábola construida en Cabri Geometry:




UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

TALLER 1
 NOMBRE: _____ GRADO: _____
 FECHA: _____ CENTRO EDUCATIVO LAS AMÉRICAS

OBJETIVO: Reconocer los elementos de la cónica llamada parábola.



LA PARÁBOLA



I. ACTIVIDAD: Reúnanse en grupos de dos estudiantes y con la calculadora realicen el siguiente taller:

➤ En la calculadora, vaya al programa Cabri Geometry, elija la opción Open y busque en variable el nombre taller1, ábralo oprimiendo dos veces Enter. Teniendo en cuenta la parábola que se encuentra construida en Cabri se tiene que: el punto **F** es el foco, el punto **V** es el vértice, **d** es la recta directriz, **A** el punto de intersección entre la rectas **d** y **s** y **P, Q, Q'** puntos cualesquiera de la parábola.

1. Calcule la distancia del punto **F** al punto **V** y la distancia más corta del punto **V** a la recta **d**. (Recuerde que la distancia más corta de un punto a una recta es, la medida del segmento perpendicular que se forma del punto a la recta, en este caso la menor distancia es del punto **V** al punto **A**.)
 - a) ¿Qué observa?
 - b) Utilice el Puntero para mover el punto **F**, ¿qué ocurre con las distancias cuando cambia la posición del punto **F**?

FIGURA 4.
Taller Número 1 – Página 1.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
 FACULTAD DE CIENCIAS
 LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
 SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

- c) Utilice el Puntero para mover la recta d , ¿qué ocurre con las distancias cuando cambia la posición de la recta d ?
- d) ¿Qué puede concluir acerca del punto V con respecto al punto F y a la recta d ?

Nota: Para que sea más cómodo el trabajo, cuando termine el punto 1 oculte las distancias que haya tomado.

2. Trace un segmento entre el punto Q y Q' . Ubique el punto de intersección entre el segmento y la recta s y llámelo G . Calcule la distancia del punto Q al punto G y del punto Q' al punto G .
- a) Utilice el puntero para mover el punto Q , ¿qué ocurre con el punto Q' ?
- b) Utilice el puntero para mover el punto Q hasta el punto V , ¿qué ocurre con las distancias? ¿qué ocurre con Q' ?
- c) ¿Qué puede decir de la recta s ?
- d) Teniendo en cuenta lo que ha realizado hasta el momento, ¿Qué características observa del punto V ?

FIGURA 5.
 Taller Número 1 – Página 2.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

- e) Otra característica del punto V es la pendiente. Para que determine la pendiente en éste punto debe trazar una recta que sea tangente al punto, la inclinación de dicha recta es la pendiente en el punto V . ¿Cuál es la pendiente en el punto V ?
3. Trace una recta perpendicular a la recta d que pase por P . Defina el punto de intersección entre la recta d y la recta perpendicular, llámelo B . Calcule la distancia entre el punto B y el punto P y entre el punto P y el punto F , ¿Cómo son estas distancias?
- a) Utilice el puntero para mover el punto F y la recta d , ¿qué ocurre con las distancias cuando cambia la posición del punto F y la recta d ?
- b) Haga lo mismo con otro punto cualquiera que pertenezca a la parábola. Para ello ubique un punto R sobre ella, trace la recta perpendicular a la recta d que pase por R . Defina el punto de intersección entre la recta d y la recta perpendicular, llámelo C . Calcule la distancia entre el punto C y el punto R y entre el punto R y el punto F , ¿Cómo son estas distancias?
4. De acuerdo con las observaciones realizadas en el numeral 3, ¿qué puede concluir acerca de la relación que existe entre el punto F , un punto cualquiera de la parábola y la recta d ?

II. SOCIALIZACIÓN DEL TALLER. Los estudiantes expondrán sus ideas y conclusiones, para llegar a una conclusión general.



FIGURA 6.
Taller Número 1 – Página 3.

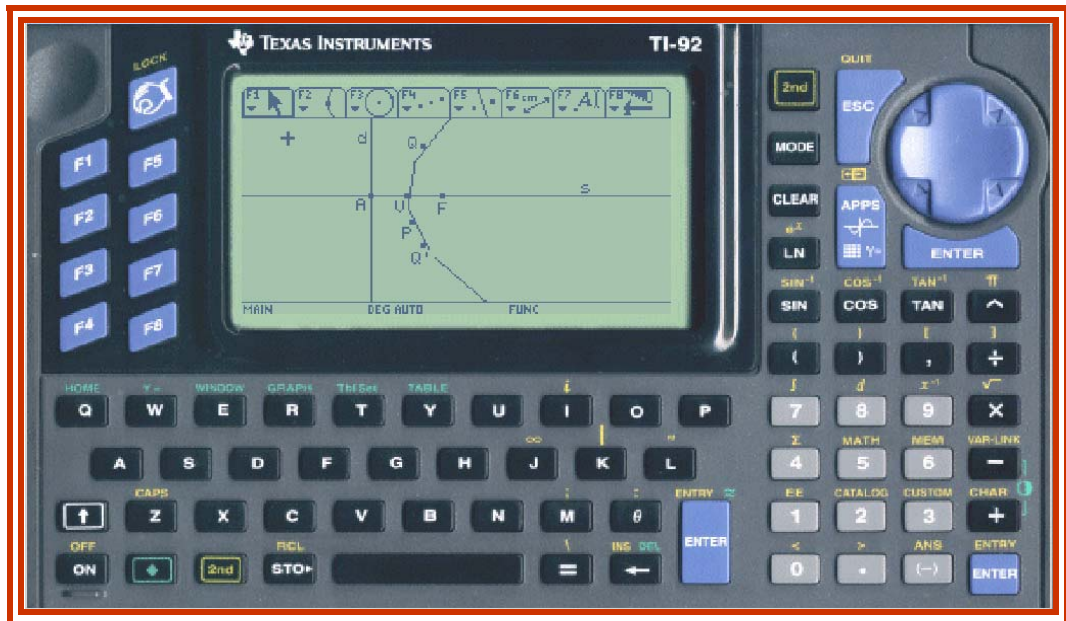
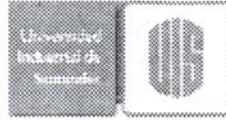


FIGURA 7.
Parábola construida para el desarrollo del primer taller.

El desarrollo de este taller fue realizado en dos momentos. En el primer momento los estudiantes trabajaron y respondieron las preguntas del taller, con la menor intervención posible por parte de nosotras; en el segundo momento se hizo una socialización, en donde los estudiantes fueron contestando una a una todas las preguntas planteadas en el taller y en donde entre ellos mismos se complementaban las respuestas y las generalizaban.

El segundo taller que llamamos "Piensa y Responde" consistió en que dadas dos ecuaciones cuadráticas, se les aplicaran unas transformaciones para que los muchachos, apoyados en la calculadora, intentaran generalizar lo que ocurre con cada una de las ecuaciones y sus transformaciones. Veámoslo:



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
 FACULTAD DE CIENCIAS
 LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
 SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

TALLER 2

NOMBRE: _____ GRADO: _____
 FECHA: _____ CENTRO EDUCATIVO LAS AMÉRICAS

OBJETIVO: Analizar el comportamiento de la cónica llamada parábola, cuando se le aplica una transformación y cuando llega a ser función.

PIENSA Y RESPONDE



INSTRUCCIONES: En cada numeral lea atentamente las preguntas y justifique sus respuestas.

1. $Y = X^2 - 2X$

➤ Sin hacer uso de la calculadora, responda:

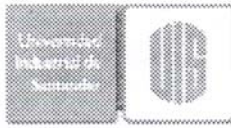
a) ¿La parábola es horizontal o vertical?

b) ¿Hacia donde abre la parábola?

c) Analice si la ecuación es una función, si lo es ¿cuál es el dominio y el recorrido?



FIGURA 8.
 Taller Número 2 – Página 1.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
 FACULTAD DE CIENCIAS
 LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
 SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

Con ayuda de la calculadora analice la parábola y responda las preguntas.

a) ¿Qué sucede con la parábola si a la ecuación se le agrega el término 6? ¿por qué?



b) ¿Qué sucede con la parábola si a cada x se le suma 10? Es decir, la ecuación ahora sería $y = (x + 10)^2 - 2(x + 10)$ ¿por qué?

c) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿por qué?

d) Si se multiplica la variable dependiente por 8, ¿Qué sucede con la parábola? ¿por qué?


e) ¿Cómo verifica usted que una relación entre dos variables es función?

f) Verifique si la parábola es función, si lo es determine su dominio y recorrido.

FIGURA 9.
 Taller Número 2 – Página 2.

En el desarrollo de este taller, los estudiantes con el uso de la calculadora fueron respondiendo una a una las preguntas, siempre observando y analizando cada uno de los cambios que sufría la parábola y sacando conclusiones respecto a su comportamiento cuando se le aplica una transformación.

En la evaluación, como se había dicho anteriormente, consideramos dos aspectos: el concepto de parábola y el uso de la calculadora, por lo tanto, se realizaron dos evaluaciones como se muestra a continuación:



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

NOMBRE: _____ GRADO: _____
FECHA: _____ CENTRO EDUCATIVO LAS AMÉRICAS


EVALUACIÓN

I. Trabajo Individual (45 minutos). Analice y responda:

- Defina qué es Parábola.
- Encierre en un círculo las ecuaciones cuya solución gráfica es una parábola.

a. $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$	c. $(y-9)^2 = 9(x-1)$
b. $x^2 - 4x - 3y + 1 = 0$	d. $9x^2 + 4y^2 - 54x - 40y + 145 = 0$
- Construya la parábola que tiene vértice $V:(4,2)$ y foco $F:(4,5)$.
- Resuelva la siguiente ecuación: $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

FIGURA 10.
Evaluación Número 1.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

NOMBRE: _____ GRADO: _____
FECHA: _____ CENTRO EDUCATIVO LAS AMÉRICAS

EVALUACIÓN

II. Trabajo con la Calculadora (20 minutos). Con ayuda de la calculadora analice y responda las siguientes preguntas:

1. Grafique en la calculadora la parábola cuya ecuación es $y = 5x^2 + 2$
 - a. ¿Qué sucede con la parábola si a la ecuación se le agrega el término 3? ¿Por qué?
 - b. ¿Qué sucede con la parábola cuando a la x se le resta 1? Es decir la ecuación ahora sería $y = 5(x - 1)^2 + 2$ ¿Por qué?
 - c. Si se multiplica la variable dependiente por 8 ¿Qué sucede con la parábola? ¿Por qué?

FIGURA 11.
Evaluación Número 2.

En el momento de aplicar la evaluación dividimos el curso en dos, una parte de los estudiantes se quedo en el salón de clase desarrollando la evaluación teórica y los otros estudiantes desarrollaron la evaluación con calculadora en la sala de tecnología y después se invirtieron los grupos.

Después de haber realizado el trabajo de campo hicimos lectura de los datos recolectados para que nos dieran luces acerca de las posibles categorías que nos permitieran analizar los datos y así poder dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. Esta etapa de la investigación la consideramos una de las más difíciles por su complejidad, ya que de unas buenas categorías de análisis depende el cumplimiento del objetivo. Por este motivo, establecimos tres categorías, las cuales las comparamos con el crecimiento de una semilla así:

- I. La Semilla: Porque partimos de las representaciones que los estudiantes tenían de la parábola, siendo estas la base para la construcción del concepto.
- II. Plantando la Semilla: Porque empezamos a abonar y a cuidar la semilla plantada brindándole todo lo necesario para que esta pueda crecer y transformarse.
- III. Florece la Semilla: Porque representa el desarrollo de las categorías anteriores, dando las condiciones necesarias para que la semilla continúe con su proceso de crecimiento en la construcción del concepto de parábola.

Antes de empezar a hablar de cada una de las categorías de análisis, queremos dedicar un capítulo al objeto matemático de estudio en nuestra investigación, la parábola, luego el capítulo posterior lo dedicaremos a las categorías.

4. EL OBJETO MATEMÁTICO

Recordemos que el objeto matemático de estudio en nuestra investigación es la parábola, por eso queremos empezar este capítulo mostrando un poco acerca de la historia que envuelve a esta cónica, y que fue relatada a los estudiantes como introducción al tema de Geometría Analítica.

El conocimiento matemático ha sido consecuencia de la búsqueda de soluciones a diferentes problemas planteados desde los orígenes de la humanidad, que han sido transmitidos por leyendas o escritos antiguos.

Según Martínez (1996), hay una leyenda transmitida por Eratóstenes (siglo III a.c.) en la cual se habla de una peste que asoló a Atenas en el año 429 a.c., causando probablemente la muerte de Pericles. Los atenienses por medio de una comisión enviada al oráculo de Apolo de Delos, obtuvieron como respuesta que era necesario duplicar el volumen del altar cúbico dedicado a Apolo sin variar su forma para conjurar la plaga. Este problema se conoce como el problema de Delos o el problema de la duplicación del cubo. El intento de hallar la solución a este problema condujo al descubrimiento de algunos lugares geométricos que contribuyeron eficazmente al desarrollo de las matemáticas y de la ciencia en general.

El astrónomo y geómetra Menecmo (siglo IV a.c.) descubrió que las secciones planas de un cono servían para resolver el problema de Delos, esto lo consiguió seccionando un cono rectangular con un plano perpendicular a una de sus generatrices, obteniendo como resultado una

curva de intersección, que hoy conocemos con el nombre de parábola. "Menecmo se dio cuenta de que geoméricamente, el problema consistía en encontrar el punto de corte de dos cónicas, que puede ser dos parábolas o, una parábola y una hipérbola." (Pérez, 2006, p.8)

Las cónicas hacen su primera aparición en la historia para resolver el problema de Delos, pero Menecmo no inventó los términos parábola, elipse e hipérbola; estos términos fueron usados, por primera vez, por Apolonio. Respecto a Apolonio de Perga, Martínez (1996, p.12) dice:

Apolonio de Perga (262-200 a.C.) fue matemático del periodo de Alejandría, su fama precede esencialmente del estudio de las secciones cónicas. Los predecesores de Apolonio obtenían las secciones cónicas, mediante secciones de conos circulares rectos de tres tipos diferentes, según el ángulo del vértice: agudo, recto y obtuso, siempre tomando secciones perpendiculares a la generatriz. Apolonio obtuvo las cónicas utilizando un cono circular cualquiera, variando la inclinación del plano secante. A partir de esta construcción descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones cónicas, es decir, la caracterización de estas curvas como lugares geoméricos planos.

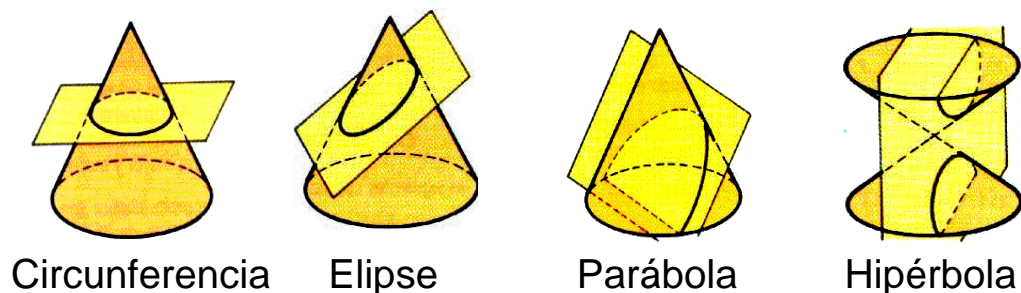


FIGURA 12.
Secciones Cónicas.

Según Chinea (2006), las secciones cónicas han evolucionado a lo largo de la historia hasta su utilidad en diferentes contextos. Su importancia se consagra a partir del siglo XVII con la demostración de Galileo de que la

trayectoria de un proyectil es una parábola y con la descripción del movimiento planetario de Kepler y Newton, en donde se concluía que las órbitas de los planetas eran elípticas.

A comienzos del siglo XVII Descartes vuelve a retomar el análisis de las cónicas. En este sentido, Rey & Babini (1951) dicen:

Descartes puede considerarse como el primer gran filósofo moderno y su geometría fue solo una mínima parte de una obra que estaba básicamente dedicada a la filosofía y a la ciencia en general, para Descartes "la geometría está siempre tan ligada a las consideraciones sobre las figuras que no pueden ejercitar el intelecto sin cansar mucho la imaginación y en el álgebra se está tan sujeto a ciertas reglas y letras que en lugar de ser una ciencia que eduque la mente se convierte en un arte oscuro y confuso que la turba" y también afirmaba que "a cada problema geométrico le correspondía una ecuación".

Otro conocedor de las obras de Apolonio fue Fermat, quien en su intento por reconstruir los lugares planos de Apolonio, demostró que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas y las de segundo grado una cónica o un par de rectas, dejando clara su idea de que la ecuación es la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico.

Con los trabajos de Descartes y Fermat se dio lugar a la nueva rama de la matemática denominada Geometría Analítica, cuya característica fundamental fue "la unificación o identificación entre dos mundos aparentemente distintos: el del álgebra y el de la geometría; el de los números y el de los puntos; el de las figuras y el de las ecuaciones" (Rey & Babini, 1951, p.204).

Ahora queremos hacer referencia al concepto de parábola. Se puede abordar desde diferentes enfoques⁶ y por este motivo estuvimos indagando y pensando cuál sería el enfoque apropiado para utilizar la calculadora como mediadora en la construcción de este concepto, por lo que decidimos trabajar el concepto de parábola tal como lo define Apóstol (1988), pero realizando su correspondiente transposición didáctica para estudiantes de grado décimo. Apóstol (1988, p.610) define la parábola como:

La parábola es el lugar de todos los puntos tales que la distancia a un punto fijo F (llamado el foco) es igual a la distancia a una recta fija llamada directriz (que no tiene ninguna relación con la directriz de un cilindro).

Además, también nos enfocamos en la importancia de los elementos que caracterizan la parábola, como lo son: el foco, el vértice, el eje de simetría y la directriz. Como se muestra a continuación:

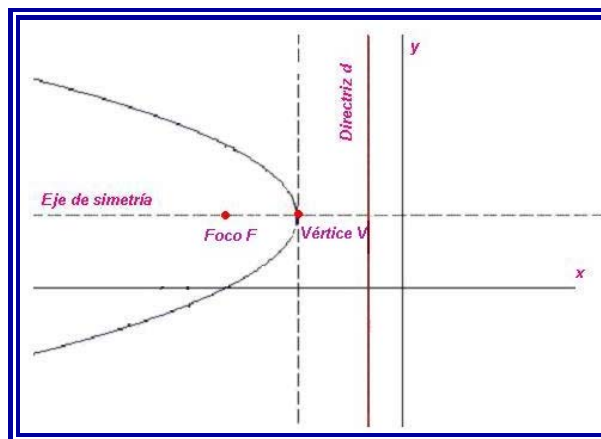


FIGURA 13.
Elementos de la Parábola.

⁶ Cuando decimos que la parábola se puede abordar desde diferentes enfoques nos estamos refiriendo a iniciar el tema de parábola desde una mirada histórica, desde el análisis de su ecuación canónica, desde su definición geométrica, como función, entre otras.

- ❖ Directriz: Recta d fija del plano
- ❖ Foco: Punto F fijo del plano, que no pertenece a la recta d ⁷
- ❖ Vértice: El vértice es el punto medio entre el foco y la recta directriz, y único punto asimétrico.
- ❖ Eje de Simetría: Es la recta perpendicular a la directriz que refleja una rama de la parábola sobre la otra; contiene el foco y el vértice.

Otro aspecto que tomamos en cuenta para el estudio del objeto matemático en el desarrollo de esta investigación fueron las transformaciones⁸, con el fin de que el estudiante analizara la gráfica de la parábola al momento de aplicarlas.

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de la parábola se pueden obtener gráficas relacionadas y, de este modo, reducir el trabajo al trazar esas gráficas. Las siguientes son las transformaciones más importantes:

Supóngase que $c > 0$, para obtener la gráfica de:

- ✓ $y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba.
- ✓ $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo.
- ✓ $y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha.
- ✓ $y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda.

⁷ La definición de los elementos de la parábola la tomamos de: Cálculo con Geometría Analítica de Purcell (1987, p.508)

⁸ La definición de las transformaciones la tomamos de: Cálculo con Geometría Analítica de Stewart (p. 32)

Supóngase que $c > 1$, para obtener la gráfica de:

- ✓ $y = cf(x)$ alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c .
- ✓ $y = (1/c)f(x)$ comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c .
- ✓ $y = f(cx)$ comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c .
- ✓ $y = f(x/c)$ alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c .

Con este capítulo pretendíamos enmarcar el enfoque de parábola que trabajamos con los estudiantes y que se centró en el concepto de ésta como lugar geométrico.

5. LAS CATEGORÍAS

En este capítulo hablaremos de cada una de las categorías de análisis, las cuales emergieron después de realizado el trabajo de campo y que elegimos en el momento en que íbamos a analizar los datos recolectados. Estas categorías fueron:

5.1. LA SEMILLA



FIGURA 14.
Foto de la clase del 4 de octubre de 2006.

En esta categoría de análisis mostramos las diferentes representaciones que tenían los muchachos de la parábola, que es el objeto matemático en nuestra investigación, cuando no hubo mediación de la calculadora en la formación de dichas representaciones.

Empecemos entendiendo la representación así: “en la terminología que ha generado la lingüística, las representaciones serían los significantes que están en lugar de los significados, es decir, los sistemas matemáticos de signos que se utilizan para representar los contenidos matemáticos”. (Font, 2006, p.11)

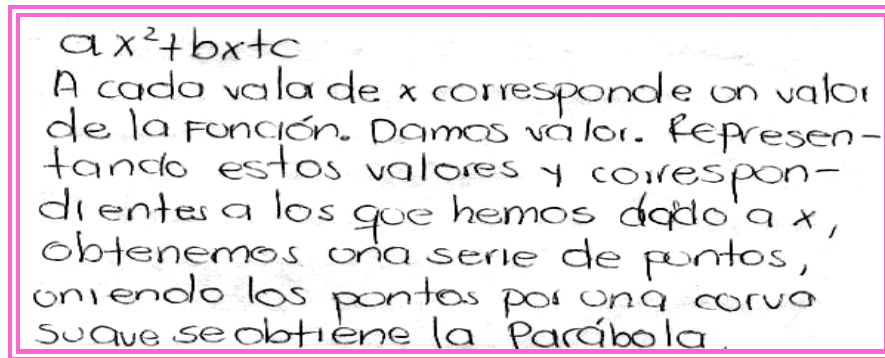
Además, en este sentido Gatica, Andino, Felizzia, Leporati citando a Duval (2006, p. 4), argumentan que:

Dado que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción... no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Por ejemplo: una escritura, una notación, un símbolo, un punto, una gráfica, etc. representan un objeto matemático.

Teniendo en cuenta las citas hechas anteriormente, mostraremos algunas representaciones que nuestros estudiantes tenían sobre la parábola, para esto, es necesario que mencionemos por qué nuestros estudiantes conocían este término.

La profesora Cruz Celina les había enseñado que la solución gráfica de una ecuación de segundo grado era una parábola, enfatizándolo siempre como función y no como lugar geométrico; por este motivo, los estudiantes generaron algunas representaciones de ésta.

¿Qué representaciones tenían nuestros estudiantes de la parábola? Los muchachos tuvieron un primer trabajo, que consistió en un escrito en donde ellos plasmaran todas las ideas que tuvieran de la parábola, y en ese trabajo pudimos ver diferentes representaciones que ellos tenían, como lo expresó Tatiana:



$ax^2 + bx + c$
 A cada valor de x corresponde un valor de la función. Damos valor. Representando estos valores y correspondientes a los que hemos dado a x , obtenemos una serie de puntos, uniendo los puntos por una curva suave se obtiene la Parábola.

FIGURA 15.
Escrito sobre parábola – 11/Oct/2006.

Esta parte del escrito de Tatiana nos llamó mucho la atención, ya que nos hizo ver que para ella la expresión $ax^2 + bx + c$ tiene sentido y representa una parábola; además, otra cosa que nos permitió evidenciar esta representación de Tatiana fue lo que nos respondió en una de las preguntas de la entrevista, que fue la siguiente:

Mayerli y Leiny (ML): Si en este momento le decimos “parábola”, ¿Qué representación mental tiene de ella?

Tatiana (T): Una curva sucesiva de puntos... Me imaginé una curva vertical negativa.

ML: ¿Qué le facilitó hacer dicha representación? ¿La calculadora, el tablero o el lápiz y papel?

T: La ecuación inicial de la parábola, porque en un ejercicio que hicimos con la profesora Cruz Celina, daba eso.

ML: Osea, ¿usted se imagina la curva vertical negativa por el ejercicio que hizo la profesora en el tablero?

T: Si

Podemos ver que para Tatiana, la representación que ella tenía de parábola estaba ligada al trabajo hecho por la profesora en el tablero, aunque no manifestó la construcción del concepto por lo que hubiera dicho la profesora sino que, expresó que formó una representación solo por lo que vio en el tablero durante la clase. Ella se apropió de ésta

representación dándole significado al trabajo hecho por la profesora en el tablero.

Otra de las representaciones que tuvieron nuestros estudiantes fue la expresada por Mike refiriéndose a la parábola:

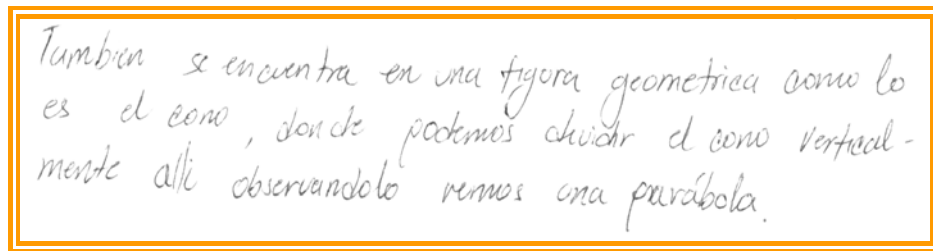


FIGURA 16.
Escrito de parábola 2 - 11/Oct/2006.

Esta representación también la observamos en los escritos de Oscar, Yair y Yerson; pues en sus escritos plasmaron la misma idea, aunque expresada de forma diferente. Creemos que la representación expresada por Mike surgió a partir de la primera clase, la clase con los conos en plastilina, ésta representación nos llamó la atención, porque pudimos evidenciar que con la historia y la manipulación de un objeto concreto (los conos en plastilina) se hizo la construcción de una representación de parábola.

En este sentido, en la entrevista hecha a Yerson, él deja ver lo que describimos anteriormente:

Mayerli y Leiny: De todos los talleres realizados en el estudio de la parábola, ¿Cuál(es) le gustó más? ¿Por qué?

Yerson: El taller que más me gustó fue al principio con la plastilina, porque en ese empezamos a ver de dónde salía la parábola que es de las secciones cónicas y eso era algo nuevo para todos.

También, en la entrevista hecha a Yair, y con una pregunta diferente, pudimos ver algo más de la representación de la parábola como sección cónica:

Mayerli y Leiny (ML): ¿Cómo le parecieron los talleres y las clases que se llevaron a cabo durante el proceso de estudio del concepto de parábola? ¿Por qué?

Yair (Y): Me parecieron excelentes, a uno le enseñan más cosas...

ML: ¿Y por qué cree que le enseñan más cosas?

Y: Porque yo no sabía sobre la parábola, que venía de una figura cónica, por ahí podía comenzar...

Consideramos que esta categoría de análisis fue importante hacerla, pues nos permitió conocer qué tipo de representaciones tenían los estudiantes sobre la parábola y a partir de estas reconocieran otras representaciones, pues en este sentido, Hitt (2003, p. 2) argumenta que:

Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación.

Teniendo en cuenta las representaciones que los estudiantes tenían y el punto de vista de Hitt, pudimos evidenciar que el concepto de parábola que los estudiantes manejaban era limitado, porque solo lo consideraban como función y aún no habían relacionado otras representaciones y propiedades que la parábola posee.

Para concluir esta categoría podemos decir que las representaciones que los estudiantes tenían sobre la parábola, fueron las bases para planear los talleres y las actividades que se realizaron siempre teniendo como objetivo

dar las herramientas necesarias para la construcción del concepto mediado por la representación ejecutable desde la calculadora gráfica.

A partir de lo expuesto anteriormente, se trabajó otro tipo de representación: la representación ejecutable, que es nuestra siguiente categoría de análisis.

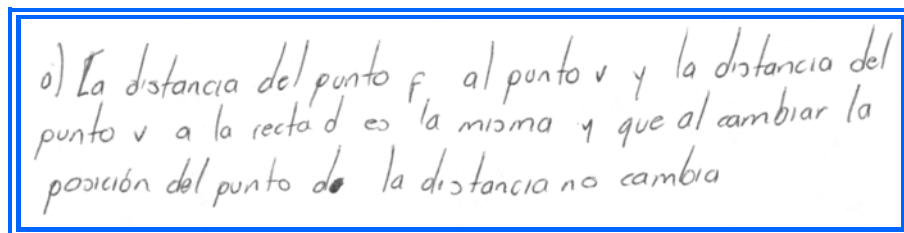
5.2. PLANTANDO LA SEMILLA



En esta categoría mostramos algunas de las representaciones ejecutables que los estudiantes formaron a partir del trabajo realizado en cada una de las actividades programadas para esta investigación, en donde siempre contaron con la calculadora TI-92 como mediadora en la construcción del concepto de parábola. Pero antes hablaremos bajo qué enfoque entendemos la representación ejecutable.

El concepto de sistema de representación ejecutable en el cual es posible verter no solo aspectos de nuestra memoria biológica, sino también algunas funciones cognitivas que hasta ahora habían sido privativas de nuestro intelecto [graficar una función, revisar ortografía de un texto, resolver una ecuación, factorizar un número, entre otras]. La tecnología informática proporciona un mejor soporte externo de la cognición, dado que provee mejores sistemas de representación, necesarios para la construcción de conocimiento. (Castiblanco, Urquina, Camargo & Moreno, 2004, p. 122)

Una de las representaciones ejecutables encontradas en nuestra investigación, fue la formada por Oscar, quien trabajando el taller uno con el uso de la calculadora, le permitió conjeturar:



o) La distancia del punto f al punto v y la distancia del punto v a la recta d es la misma y que al cambiar la posición del punto de la distancia no cambia

FIGURA 17.
Taller uno - 11/oct/2006.

Lo escrito por Oscar es la conclusión que él hizo a la pregunta del taller uno ¿Qué puede concluir del punto V con respecto al punto F y a la recta d ?, refiriéndose al punto V como el vértice de la parábola, al punto F como el foco y al punto d como la recta directriz.



FIGURA 18.
Parábola en la calculadora.

Es importante aclarar que cuando Oscar escribe “al cambiar la posición del punto d la distancia no cambia” se refiere a que la relación de igualdad permanece entre la distancia de la recta directriz al vértice y del vértice al foco, como lo confirma con una de las preguntas de la entrevista:

Mayerli y Leiny: En este momento, después del proceso de estudio de la parábola donde se utilizó la calculadora como mediador, ¿Qué significado tiene para usted el vértice?

Oscar: Que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz... el movimiento del vértice, que se movía de una forma constante con el foco, de tal forma que siempre hubiera una distancia igual.

En lo que acabamos de escribir, podemos ver que en Oscar el manejo de la calculadora lo ayudó a tener otra representación de parábola, llevándolo a comprobar y a concluir una característica de ella que no conocía. Pues la calculadora posee una herramienta que permite, con una adecuada construcción del objeto matemático, conservar su estructura y con un movimiento sencillo el estudiante puede observar

muchas parábolas que le dan la posibilidad de conjeturar los conceptos matemáticos involucrados y comprobar cada una de ellas.

En este momento cabe recordar las palabras de Moreno (2002b, p. 84) para sustentar lo que acabamos de mencionar de Oscar, y lo que mencionaremos de nuestros otros estudiantes. Estas fueron:

"...Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras conservando relaciones estructurales de la misma, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuyen al realismo de estos objetos geométricos."

Otra conclusión a la que llegó Mike y que fue dada por la representación ejecutable, fue la siguiente:

2. Trace un segmento entre el punto Q y Q' . Ubique el punto de intersección entre el segmento y la recta s y llámelo G . Calcule la distancia del punto Q al punto G y del punto Q' al punto G .

a) Utilice el puntero para mover el punto Q , ¿qué ocurre con el punto Q' ?

aumenta o disminuye (sus distancias no cambian a pesar de moverlas. su distancia son iguales)

b) Utilice el puntero para mover el punto Q hasta el punto V , ¿qué ocurre con las distancias? ¿qué ocurre con Q' ?

disminuyen a 0, Q' se oculta con Q en el punto V

FIGURA 19.
Taller uno – 11/Oct/2006.

Aunque en las respuestas dadas por Mike, en el taller uno, no se ve tan explícita la conclusión de que el vértice es el único punto de la parábola

que no tiene simétrico, esa idea sí le quedó a él, pues lo expresó en la entrevista:

Mayerli y Leiny: En este momento, después del proceso de estudio de la parábola donde se utilizó la calculadora como mediador, ¿Qué significado tiene para usted el vértice?

Mike: Pues que es el único punto que es asimétrico y que puede ser el mayor o menor valor.

En el taller dos pudimos evidenciar otras conjeturas hechas por los estudiantes, ya que el objetivo de este taller era que ellos analizaran el comportamiento de la parábola cuando se le aplica una transformación, y para mostrar este hecho, en la evaluación que presentaron nuestros protagonistas, esta fue una de las expresiones de Tatiana:

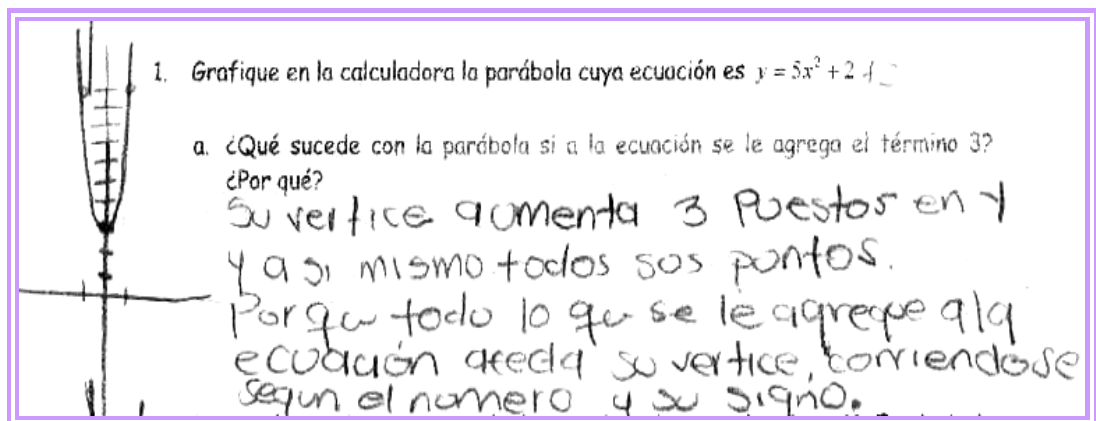


FIGURA 20.
Evaluación - 1/Nov/2006.

Ésta conjetura fue ampliada en la entrevista:

Mayerli y Leiny (ML): En su proceso de aprendizaje, frente al estudio de la parábola ¿en qué le contribuyó el uso de la calculadora, por qué?

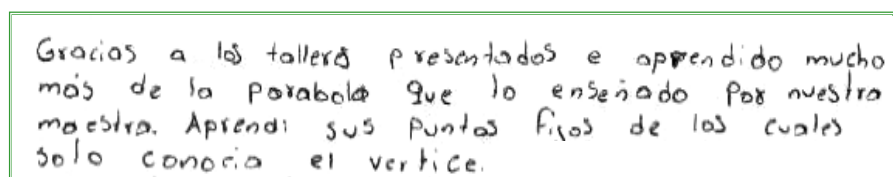
Tatiana (T): Porque nos daba gráficas casi precisas y nos daba muchos conceptos que podríamos tomar para dar significados de la parábola.

ML: ¿Como cuáles?

T: como cuando le sumábamos un número a la ecuación o cuando le restábamos, la diferencia que había.

Nosotras consideramos que el uso de las TI-92 posibilita el ahorro del tiempo en la realización de cálculos de las operaciones básicas, permitiendo que ese tiempo sea utilizado en la interpretación, reflexión y análisis de resultados. Además, las opciones gráficas que la calculadora presenta permiten aprovechar ese tiempo en una mejor comprensión de los conceptos.

En la carta que le pedimos a cada uno de nuestros protagonistas que escribieran, en donde expresaran cómo había sido el proceso de aprendizaje del concepto de parábola, se pudo evidenciar que la calculadora jugó un papel como amplificadora, permitiendo la interacción entre las representaciones que los estudiantes tenían y las nuevas representaciones formadas a través de la representación ejecutable. Una parte de la carta escrita por Yair muestra que hubo una ampliación en el concepto que él tenía de parábola, pues además de considerarla como representación gráfica de una ecuación de segundo grado, dio muestras de la construcción de éste concepto como lugar geométrico.



Gracias a los talleres presentados e aprendido mucho más de la parábola que lo enseñado por nuestra maestra. Aprendí sus puntos fijos de los cuales solo conocía el vértice.

FIGURA 21.
Carta - 27/Nov/2006.

En este fragmento de la carta escrita por Yair, él expresa que aprendió sobre otros puntos de la parábola, ya que solo conocía el vértice, y esto deja ver que para él hubo "algo más" que lo consideró importante en el estudio de ésta cónica. Y para sustentar que este hecho es posible en el

trabajo con las calculadoras, queremos citar nuevamente a Moreno (2002b, p. 85), quien considera que:

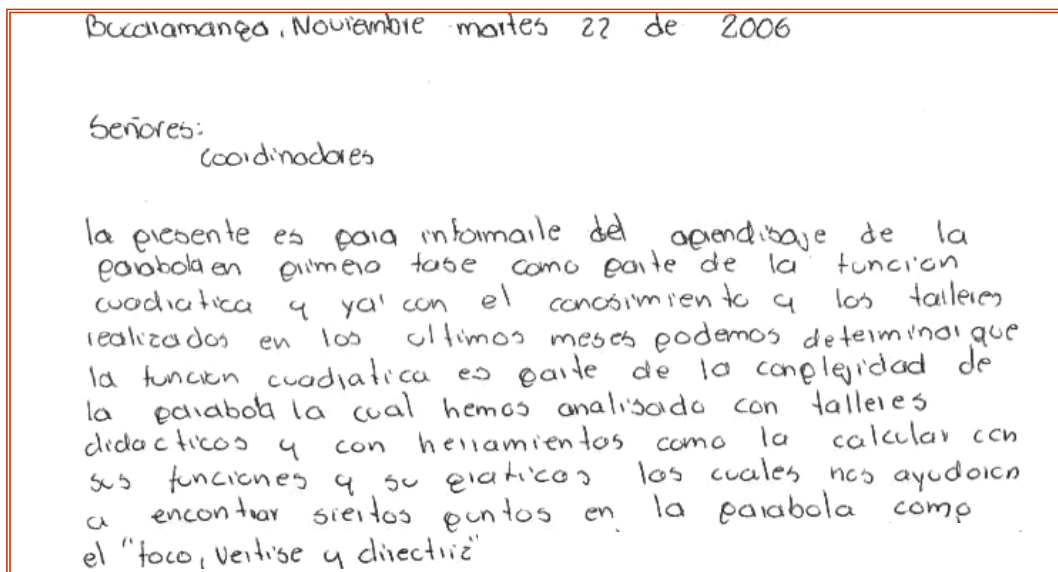
Frente a la calculadora, estamos ante dos posibilidades:

i. Entenderla como herramienta de amplificación

ii. Entenderla como herramienta de re-organización cognitiva

... La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificando, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de re-organización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta... Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo.

Otro caso en donde podemos observar lo dicho por Moreno, es lo expresado por Yerson en la carta:



Bucaramanga, Noviembre martes 22 de 2006

Señores:
coordinadores

la presente es para informarle del aprendizaje de la parábola en primer fase como parte de la función cuadrática y ya con el conocimiento y los talleres realizados en los últimos meses podemos determinar que la función cuadrática es parte de la complejidad de la parábola la cual hemos analizado con talleres didácticos y con herramientas como la calculadora con sus funciones y sus gráficos los cuales nos ayudan a encontrar ciertos puntos en la parábola como el "foco, vértice y directriz"

FIGURA 22.
Carta - 22/Nov/2006.

Tal como lo comenta Yerson, para él, los talleres le permitieron ver que la función cuadrática hace parte de la complejidad de la parábola, primero partiendo de la representación que él tenía de ésta como función

cuadrática y ahora, habiendo utilizado la calculadora, reorganizó su conocimiento, lo cual le permitió construir una nueva representación, donde hacen parte los elementos como el vértice, el foco y la directriz.

Queremos terminar esta categoría compartiendo una de las ideas que Moreno (2002c, p.46) expresó en una conferencia realizada en la ciudad de Bogotá, refiriéndose al papel de las herramientas informáticas en la didáctica de las matemáticas y relatando el ejemplo de una parábola construida en Cabri (la misma construcción que nosotras realizamos en el taller uno):

Una vez construida la cónica, su existencia ha dejado de ser virtual: el desarrollo constructivo no ha ocurrido en la imaginación del operador -que trata de imaginar las consecuencias de una definición--, sino sobre la pantalla y bajo el control del universo interno matemático que vive en el interior del instrumento informático. Lo que tenemos sobre las pantallas son, en consecuencia, *modelos manipulables de objetos matemáticos*. Tal vez lo que tengamos sean *nuevos objetos matemáticos que tienen como característica la manipulabilidad* (ejecutabilidad de sus representaciones).

En general, podemos concluir que la calculadora es un instrumento que permite la mediación de un objeto matemático desde lo concreto a lo abstracto a través de la ejecutabilidad de sus representaciones.

5.3. FLORECE LA SEMILLA



Esta categoría la consideramos la más importante de nuestra investigación, ya que analizaremos los aportes que la calculadora dio a los estudiantes para la construcción del concepto de parábola, es decir, estudiaremos con profundidad el objetivo que planteamos en esta investigación.

En nuestro objetivo hablamos de “construcción del concepto de parábola”, y por este motivo consideramos que en la enseñanza de las matemáticas se hace necesario que el estudiante participe activamente en este proceso, ya que tanto el profesor como el alumno son sujetos fundamentales en la educación. Por tal razón, hay que desechar por completo la idea de que la enseñanza sea:

Una narración, cuyo sujeto es el educador, que conduce a los educandos a la memorización de los contenidos narrados. Convirtiendo la educación en un acto de depositar, en el cual los educandos son los depositarios y el educador quien deposita. (Escobar, 1985, p.18)

Por lo anterior, nosotras decidimos elaborar los talleres (en donde se usó la calculadora TI-92) que aplicamos para la recolección de datos de tal forma que los estudiantes pudieran trabajarlos con la menor intervención posible de nuestra parte y así visualizar con mayor claridad cómo la calculadora ayudó en la construcción del concepto.

Consideramos que el uso de la calculadora TI-92 facilita la familiarización y relación de los contenidos de un nuevo tema, logrando en los estudiantes procesos mentales como el análisis, la comparación, la síntesis y la generalización (Cogollo, 2001), ya que esto lo observamos en nuestros protagonistas, no solo en sus escritos⁹ sino también en lo que percibimos de ellos en el tiempo compartido durante este proceso de investigación.

En el taller uno queríamos aprovechar una de las herramientas de la calculadora que consideramos importante, la cual posibilita el arrastre de los objetos, y por eso cada una de las preguntas allí planteadas tenían como fin que los estudiantes, al manipular la parábola construida, fueran analizando y concluyendo lo que ellos podían observar en dicha manipulación, como lo podemos ver en lo expresado por Tatiana en el taller:

⁹ Al decir escritos, nos estamos refiriendo a los talleres, a la carta y al trabajo sobre la parábola que ellos trabajaron.

1. Calcule la distancia del punto F al punto V y la distancia más corta del punto V a la recta d . (Recuerde que la distancia más corta de un punto a una recta es, la medida del segmento perpendicular que se forma del punto a la recta, en este caso la menor distancia es del punto V al punto A .)
- a) ¿Qué observa? *que las distancias de los puntos son iguales con*
- b) Utilice el Puntero para mover el punto F , ¿qué ocurre con las distancias cuando cambia la posición del punto F ?
que cuando mueves el punto F las demás medidas varían, pero siempre quedan iguales a pesar de que las distancias sean mayores o menores
- c) Utilice el Puntero para mover la recta d , ¿qué ocurre con las distancias cuando cambia la posición de la recta d ?
Cambia la dirección y posición de la recta, pero cambian las medidas pero todas iguales.
- d) ¿Qué puede concluir acerca del punto V con respecto al punto F y a la recta d ?
que cuando movamos la recta las medidas VF y V a la recta siempre van hacer igual. la distancia de ellos a la recta.

FIGURA 23.
Taller uno – 11/Oct/2006.

La calculadora le facilitó a Tatiana mover la parábola por medio de la opción de arrastre, permitiéndole observar el comportamiento de las distancias del vértice al foco y del vértice a la directriz, ya que ésta (la calculadora) le muestra un abanico de parábolas dándole la posibilidad de concluir que la relación de las distancias es igual, es decir, que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz; así el proceso realizado por Tatiana dio muestra de estar construyendo conocimiento.

En el taller uno trabajado por Oscar, observemos las ideas que le posibilitaron a él hacer otras conclusiones:

2. Trace un segmento entre el punto Q y Q' . Ubique el punto de intersección entre el segmento y la recta s y llámelo G . Calcule la distancia del punto Q al punto G y del punto Q' al punto G .

a) Utilice el puntero para mover el punto Q , ¿qué ocurre con el punto Q' ?

Se mueve de la misma manera que el punto Q
-El punto Q y Q' son 2 puntos simétricos

b) Utilice el puntero para mover el punto Q hasta el punto V , ¿qué ocurre con las distancias? ¿qué ocurre con Q' ?

Disminuye hasta cero y el punto Q' se encuentra con el punto Q y se vuelve un solo punto.

c) ¿Qué puede decir de la recta s ?

Contiene el F, G, A y el punto medio entre Q y Q'
Que no sufre ningún cambio
es el eje de simetría

d) Teniendo en cuenta lo que ha realizado hasta el momento, ¿Qué características observa del punto V ?

Que el punto V es la mitad entre el punto A y el foco.
Es la mitad de la parábola

FIGURA 24.
Taller uno – 11/Oct/2006.

Basándonos en el segundo punto del taller uno, también podemos ver en Oscar que la calculadora le ayudó a esclarecer el concepto que él tenía sobre el eje de simetría, pues paso a paso cada uno de los incisos lo fueron llevando a comprender la importancia de este elemento de la parábola; moviendo Q y Q' concluyó que eran simétricos y concluyó que esa recta s en la construcción hecha, era el eje de simetría.

Además, él también encontró la misma relación que Tatiana (nombrada anteriormente) y el desarrollo del primer y segundo punto del taller, lo llevó

a ampliar el concepto que él tenía de vértice, pues como se puede ver en el fragmento que mostramos de dicho taller, él escribe: "que el punto V es la mitad del punto A y el foco", siendo el punto A el punto de corte entre el eje de simetría y la recta directriz, y que el vértice "es la mitad de la parábola", lo que nos permite decir que Oscar estaba pasando de las conjeturaciones a la conclusión.

Con lo expresado por Tatiana y Oscar podemos concluir que para ellos el uso de la calculadora TI-92 y la ejecutabilidad que ella posee, les permitió a partir de un objeto concreto, observar, analizar y dar un paso de lo concreto a lo abstracto, al tratar de hacer generalizaciones.

En cuanto al taller dos, observamos que los estudiantes ampliaron lo que conocían de parábola y les permitió intuir sobre lo que ocurre con ella cuando se le aplica una transformación, y esa intuición los llevó a un intento de generalización, pues es importante tener en cuenta que "las matemáticas están constituidas por ideas e intuiciones fascinantes sobre los números, sobre la geometría y, *en última instancia, la intuición y la imaginación son tan valiosas como el rigor*" (Moreno, 2002c, p. 45). Además este proceso con la calculadora lo mostramos en la categoría de análisis anterior, aunque podemos complementarlo con lo escrito por Mike y Yerson:

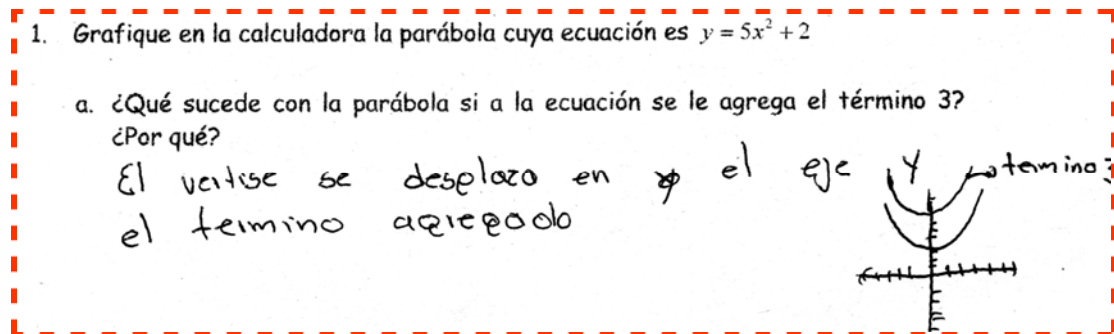


FIGURA 25.
Evaluación realizada por Yerson – 1/Nov/2006.

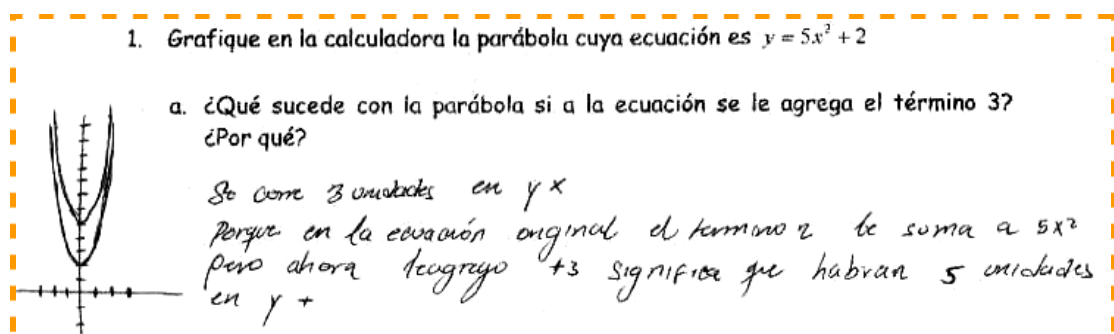


FIGURA 26.
Evaluación realizada por Mike – 1/Nov/2006.

Otro aspecto que consideramos para analizar si hubo construcción del concepto de parábola fue lo expresado por nuestros estudiantes en la evaluación realizada. Empezamos mostrándoles lo que Tatiana escribió en su evaluación:

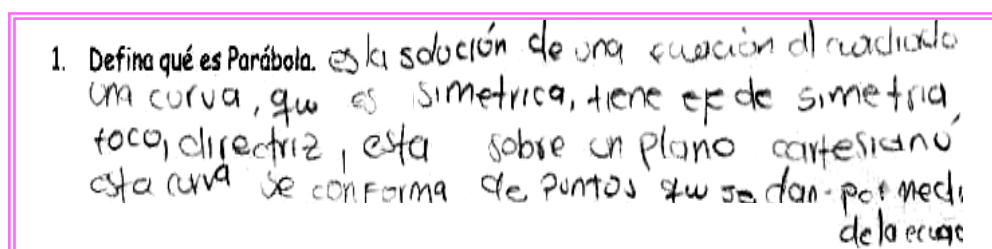


FIGURA 27.
Evaluación realizada por Tatiana – 1/Nov/2006.

Como se puede observar, Tatiana conserva la representación que ella había creado cuando la profesora les enseñó ecuaciones cuadráticas y le anexó a su representación lo que aprendió con los talleres con calculadora; pues para ella la parábola es la representación gráfica de una ecuación cuadrática y además, es una curva que tiene unos elementos como foco, eje de simetría y directriz. Por lo que podemos concluir que la calculadora como instrumento mediador, en Tatiana, ayudó a crear una nueva representación, interactuándola con la representación que tenía de parábola y por lo tanto amplió el concepto de ésta.

Además, cuando hablamos con Tatiana en la entrevista, ella reafirmó lo que para ella, en esos momentos, era parábola, así:

Mayerli y Leiny: Teniendo en cuenta todo el proceso de estudio de la parábola y su proceso de aprendizaje, para usted ¿qué es parábola?

Tatiana: Es la solución de una ecuación cuadrática, una curva de sucesivos puntos infinitos y que está compuesta de un foco, un vértice y una directriz.

Todo esto nos lleva a decir que la interacción de las representaciones formadas por los estudiantes, no se quedan solo en lo virtual sino que ellos se apropian de dichas representaciones, formando así el concepto matemático.

Miremos ahora el trabajo realizado por Yair en la evaluación:

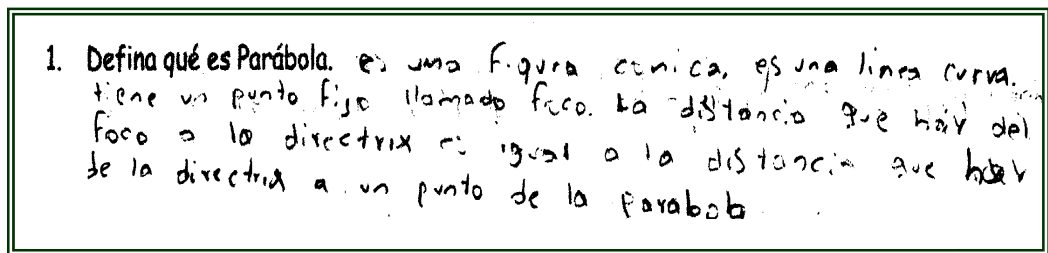


FIGURA 28.
Evaluación realizada por Yair - 1/Nov/2006.

Podemos ver que Yair tiene presente el trabajo realizado con nosotras, pues expresó que la parábola es una figura cónica, lo cual corresponde al taller realizado con plastilina, y aunque no escribió correctamente el concepto de parábola, pues escribió que es una curva en la cual “la distancia del foco a la directriz es igual a la distancia que hay de la directriz a un punto de la parábola”, podemos decir que sí tiene claro cuáles distancias deben ser iguales, pues nos lo expresó en la entrevista. Veámoslo:

Mayerli y Leiny: Teniendo en cuenta todo el proceso de estudio de la parábola y su proceso de aprendizaje, para usted ¿qué es parábola?

Yair: Es una curva que en el momento que se abre no va a tocar dos puntos principales, que cuando se parte por la mitad los dos lados que quedan van a ser exactamente iguales, tiene tres puntos principales por donde pasa una recta y que la distancia del foco a un punto de la parábola es igual que del punto de la parábola a la directriz.

Con lo anterior, podemos ver que los estudiantes algunas veces no expresan por escrito lo que tienen en mente, de la misma manera que cuando lo expresan con sus propias palabras, como lo vimos en Yair, que no escribió correctamente lo que para él era parábola pero en la entrevista si lo dijo. Por lo tanto, podemos decir que la mediación de la calculadora le ayudó a Yair, a través de la observación y la intuición a concluir el concepto de parábola como lugar geométrico.

Ahora hagamos el recorrido por lo escrito por Mike en su evaluación:

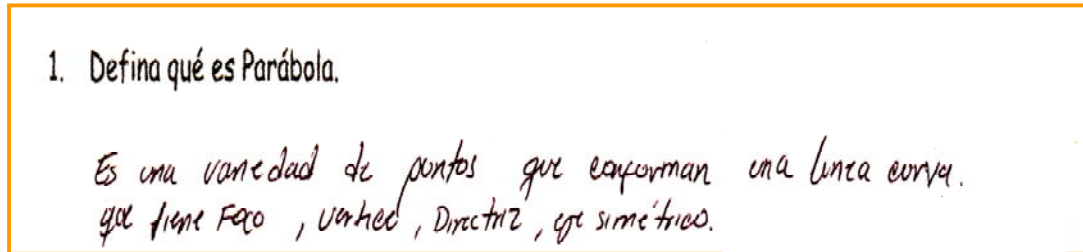


FIGURA 29.
Evaluación realizada por Mike – 1/Nov/2006.

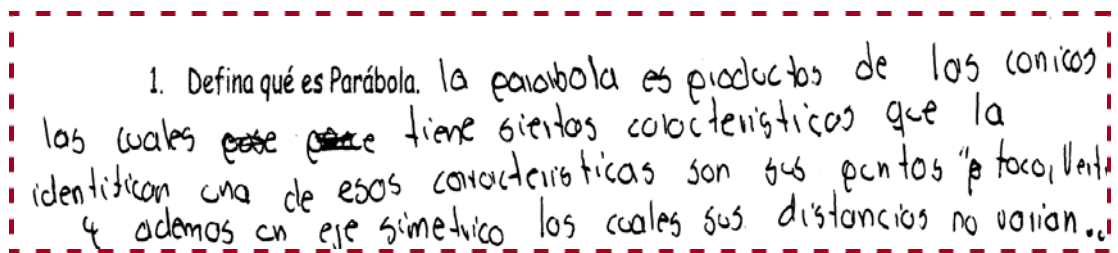
En Mike también podemos ver que tiene presente el trabajo realizado con nosotras, pues como lo expresó, la parábola es una curva que tiene unos elementos. A Mike también le ocurre lo mismo que a Yair, pues aunque en esta representación que él tiene de parábola no haya escrito el concepto como tal, queremos complementar la construcción hecha por Mike con un fragmento de la entrevista, además consideramos que esta situación es más un problema de lecto-escritura que de comprensión de los conceptos:

Mayerli y Leiny: Recuerde el taller uno, ¿qué importancia tuvo para usted el hecho de que el punto llamado foco tuviera movimiento?
¿Este hecho qué le permitió visualizar?

Mike: Que la parábola se ampliaba o se achicaba y que la distancia del foco a un punto de la parábola era igual que del punto de la parábola a la directriz.

Consideramos que en Mike, la calculadora como instrumento mediador le ayudó a construir propiedades de los elementos de la parábola, y dichas propiedades lo llevarán a construir el concepto de parábola como lugar geométrico.

En el caso de Yerson, aunque observamos que tiene la representación de parábola como cónica, no entendemos si tiene claro o no la relación de las distancias entre el foco, un punto de la parábola y la directriz, pues en lo plasmado en la evaluación y en la entrevista, no vemos claro que él haya construido el concepto de parábola como lugar geométrico, como lo mostramos a continuación:



1. Defina qué es Parábola. la parabolola es productos de los conicos los cuales ~~pose~~ ~~pose~~ tiene ciertos caracteristicas que la identifican una de esos caracteristicas son sus puntos "p foco, vert" y ademas en eje simetrico los cuales sus distancias no varian..

FIGURA 30.
Evaluación realizada por Yerson – 1/Nov/2006.

A continuación mostramos la entrevista:

Mayerli y Leiny: Teniendo en cuenta todo el proceso de estudio de la parábola y su proceso de aprendizaje, para usted ¿qué es parábola?

Yerson: Para mí, la parábola es el resultado de una cónica, la cual posee ciertos puntos importantes vértice, foco y directriz, y posee ciertas características y ciertas semejanzas y en total que nos da por solución de una ecuación cuadrática, que para cada uno de esos procesos se tiene que tener en cuenta una ecuación canónica, que tiene cierto proceso y así podemos decir que la parábola es una curva.

Pensamos que Yerson identifica términos que hacen parte del concepto de parábola, pero no vemos que la mediación de la calculadora le haya permitido una apropiación de los conceptos y propiedades que identifican a la parábola como lugar geométrico.

Para terminar con lo evidenciado en la evaluación, mostraremos lo expresado por Oscar:

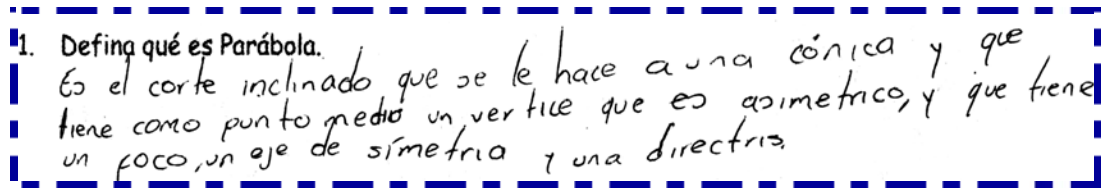


FIGURA 31.
Evaluación realizada por Oscar – 1/Nov/2006.

A Oscar también le quedó como representación lo vivido en el taller con los conos en plastilina, ya que, como lo expresa, ve la parábola como cónica; además, reconoce que la parábola tiene unos elementos, de los cuales le ve mucha importancia al vértice y expresa características de él, como lo menciona en la entrevista que le hicimos:

Mayerli y Leiny: Teniendo en cuenta todo el proceso de estudio de la parábola y su proceso de aprendizaje, para usted ¿qué es parábola?

Oscar: Es una línea curva que tiene como punto principal el vértice, que es asimétrico y que tiene un foco, una directriz y un eje de simetría.

Podemos decir que el trabajo con la calculadora le ayudó a Oscar a identificar propiedades de la parábola, pero no lo llevó a conjeturar o a concluir el concepto de parábola como lugar geométrico.

Para terminar con esta categoría, queremos mostrarles lo que los estudiantes expresaron sobre lo que significó para ellos la calculadora en el proceso vivido en la construcción del concepto de parábola. Esto lo haremos por medio de la carta que ellos escribieron al final de todo el proceso y con un fragmento de la entrevista realizada.

Veamos la carta escrita por Mike:

Señoritas: Mayuli Hernandez , Leiny Pabon

Gordal Salub

La presente es para mostrarles un tema donde yo lo considero muy importante, por eso lo tome como un consejo de mi vida.

La parábola esta conformada por una consecuencia de puntos formando una linea curva donde estan presentes el vertice, el foco, su eje de simetria y su directriz etc. una caracteristica de ella es donde podemos tomar una distancia de la directriz a cualquier punto de la parábola, y tomar otra distancia desde ese mismo punto de la parábola al Foco, esas 2 distancias son iguales. Un elemento donde para mi aporta mucho es la calculadora Grafica, pude ver que en ella los ejercicios se me facilitaban y ademas me mostraba muchas cosas interesantes. Por eso les dije que la parábola debe ser muy importante para ustedes, donde desarrollaran muchas cosas con ella, asi que no se vndan en trabajar en ella. Mi consejo les dejo, hastaluego.

ATENAMENTE;

MIKE MAUROZ ZAMORA.

FIGURA 32.
Carta escrita por Mike.

Lo que Mike nos expresa en la carta es que considera que la parábola es un modelo matemático importante en la vida, también, deja ver la representación que formó: "una línea curva donde están presentes el vértice, el foco, su eje de simetría, su directriz, etc.", además, hace referencia a la relación de igualdad entre las distancias de las que se

habla en el concepto de parábola. Por último, considera la calculadora como un facilitador en el desarrollo de ejercicios que le permite visualizar cosas que tal vez no son tan interesantes en el tablero, en el aula de clases, etc.

Veamos a continuación la carta escrita por Yair:

Bucaramanga, noviembre 20 de 2006

Señoritas
Mayerli Hernández
Leiny Pabón

Gracias a los talleres presentados e aprendido mucho más de la parábola que lo enseñado por nuestra maestra. Aprendí sus puntos fijos de los cuales solo conocía el vértice. También aprendí sus elementos y la construcción de una parábola solo conociendo dos de sus puntos fijos ubicados en el plano cartesiano. También aprendí a encontrar la amplitud de la parábola con tan solo conocer la distancia del foco a la directrix.

Gracias por su atención y colaboración

Atentamente
Gerson Yair García L

FIGURA 33.
Carta escrita por Yair.

En la carta escrita por Yair, él expresa que amplió más lo que conocía de parábola, como sus elementos, todo esto gracias a los talleres realizados; otro aspecto interesante es ver que dice que aprendió a encontrar la amplitud de la parábola conociendo la distancia del foco a la directriz, aunque esto no fue mediado por la calculadora, ya que éste concepto fue trabajado por la profesora Cruz Celina en el aula de clase.

Por otro lado, Yair no nos escribió nada respecto a la calculadora, lo que nos deja como interrogantes ¿la calculadora no es tan importante para él?, ¿para Yair no significó nada el uso de la calculadora en clase?, interrogantes que no pudimos contestar con nuestra investigación.

Ahora miremos la carta escrita por Yerson:

Bucaramanga, Noviembre martes 22 de 2006

Señores:
Coordinadores

la presente es para informarle del aprendizaje de la parábola en primer fase como parte de la función cuadrática y ya con el conocimiento y los talleres realizados en los últimos meses podemos determinar que la función cuadrática es parte de la complejidad de la parábola la cual hemos analizado con talleres didácticos y con herramientas como la calculadora con sus funciones y sus gráficos los cuales nos ayudan a encontrar ciertos puntos en la parábola como el "foco, vértice y directriz" los cuales poseen características de semejanza y además no importa cuanto cambie la parábola sus puntos siempre tendrán su semejanza y estas conclusiones las pudimos alcanzar gracias a las herramientas didácticas y a los talleres realizados en los aulas de matemáticas y no en el salón, al poder desarrollar estos talleres con la herramienta de precisión la cual no se encuentra en una hoja sino en un aparato de precisión como lo es la calculadora podemos también dar conclusiones precisas acerca de la parábola como lo es de los puntos de precisión

Atte:
Yerson Mauricio Mendez Florez

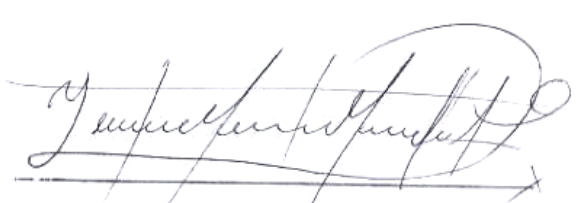


FIGURA 34.
Carta escrita por Yerson.

En la carta de Yerson, podemos entender que él ve su proceso de construcción del concepto de parábola en dos partes: lo visto con la profesora Cruz Celina y lo realizado con los talleres en esta experiencia de

investigación; Yerson expresa que los elementos de la parábola poseen características importantes y que la calculadora es una herramienta didáctica y de precisión, que le permite visualizar y sacar conclusiones de lo que realice con ella (la calculadora).

De la carta escrita por Oscar, podemos decir que él amplió el concepto que tenía de parábola y lo entendió mejor, ya que para él las clases fueron más productivas y el uso de la calculadora le ayudó a entender el tema; además, Oscar cambió la representación que tenía de parábola, pues pasó de ser una simple curva en el plano a ser una curva con elementos que tienen características especiales y también reconoce la parábola como modelo matemático de situaciones reales.

A continuación mostramos la carta escrita por Oscar:

Bucaramanga

20 de Noviembre de 2006

Profesores:

La clase en los últimos meses han sido más productivas, pues se han utilizado nuevos métodos para enseñar, explicando de una forma más sencilla y práctica el concepto de parábola que antes no tenía muy claro.

Ahora reconozco la parábola no como una curva en un plano cartesiano sino que he podido identificar el vértice como punto único y asimétrico además del eje de simetría, el foco, la directriz y los puntos de corte.

También me pareció muy buena la forma de hacer la clase pues hacen que las explicaciones las pueda ver en la vida cotidiana y no simplemente en la clase.

Pero además de esto, se deben nombrar las clases con las calculadoras pues me ayudaron a entender mejor y con exactitud el tema de la parábola.

FIGURA 35.
Carta escrita por Oscar.

Tatiana nos expresa que le gustó el proceso que se realizó en el estudio de la parábola, reconoce que el trabajo con la calculadora le ayudó para practicar lo que iba aprendiendo y para realizar más rápido los ejercicios; por esto nosotras pensamos que Tatiana ve la calculadora como verificadora, agilizadora y que refuerza los procesos aprendidos. Veamos la carta escrita por Tatiana:

Bucaramanga, Noviembre 24 de 2006

Señoritas:
 *Mayerli
 *Leiny

Fue un gusto trabajar con ustedes pues el proceso de aprendizaje sobre la parábola fue breve y claro. Desde la primera clase nos explicaron sobre esta, de donde venía y para que nos servía.

Este proceso fue muy bueno, nos supieron explicar, con ejercicios matemáticos y con problemas de la vida real, así poco a poco poder entenderla bien.

Los talleres fortalecieron el trabajo, practicábamos varias veces, socializábamos, opinábamos y al final despejábamos dudas.

La experiencia con calculadoras fue excelente aprendimos a obtenerla en ella, y así resolver ejercicios más rápido, fueron de verdad gran ayuda.

Todo esto fue bueno para nosotros, y para nuestro futuro como profesionales.

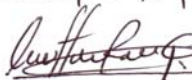
• GRACIAS •  - Leidy Sanchez.

FIGURA 36.
 Carta escrita por Tatiana.

De todas las cartas escritas por nuestros estudiantes, podemos decir que el uso de la calculadora TI-92 en el proceso de aprendizaje del concepto de parábola, significó para ellos algo importante porque los motivó a resolver los talleres propuestos, les facilitó el desarrollo de ejercicios, les permitió visualizar propiedades que no son tan visibles en el tablero y les ayudó a verificar las conjeturas.

Todo lo expresado por nuestros protagonistas fue para nosotras enriquecedor y de gran ayuda para el análisis de cada una de las categorías. Por último, queremos mostrar lo que nuestros estudiantes nos expresaron en la última pregunta que les hicimos en la entrevista, y queremos que usted como lector, de esta experiencia de investigación, saque sus propias conclusiones.

Mayerli y Leiny: ¿Para usted sería lo mismo una clase con calculadora a una clase sin ella? ¿Por qué?

Mike: No, la clase con calculadora sería más fácil, porque ella le ayuda a uno mucho, le grafica.

Yerson: No, porque la calculadora es una herramienta más rápida, es un mecanismo que a uno le ayuda a evitar tantos procesos, tanto trabajo, porque la calculadora nos puede ayudar a despejar más fácil las variables, en cambio manualmente le toca a uno trabajar y trabajar bastante y prácticamente eso lo demora a uno mucho en el proceso de aprendizaje.

Yair: No, porque me ayudaría más la calculadora.

Oscar: No, me parece que con la calculadora nos ayuda a comprobar mejor la posición de la parábola y en una clase no se puede comprobar bien porque no se tiene como una cuadrícula o algo así y no se puede confirmar.

Tatiana: No, pues para mí, una clase con calculadora se debe hacer si antes se ha hecho una clase normal, porque se tiene más o menos lo que es parábola, y en la calculadora se hacen experimentos y se observan otras cosas.

Nosotras consideramos que no es lo mismo una clase con calculadora a una clase sin ella, porque ambas deben complementarse, ya que una clase con solo calculadora el proceso cognitivo del estudiante no se daría completo, mientras que si ésta se utiliza en el aula de clase facilita muchos procesos cognitivos como el análisis, la verificación, el desarrollo de la intuición, entre otras; que sin su uso serían muy difícil trabajarlos.

6. CONCLUSIONES

- La mediación de la calculadora en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, posibilitó que ellos crearan nuevas representaciones de la parábola y que las integraran con las representaciones que ya tenían ayudando a la formación del objeto matemático.
- La calculadora jugó un papel como amplificadora, permitiendo la interacción entre las representaciones que los estudiantes tenían y las nuevas representaciones formadas a través de la representación ejecutable.
- Consideramos que la representación ejecutable permitió la mediación del objeto matemático (la parábola) partiendo de lo concreto hasta llegar a lo abstracto.
- La mediación de la representación ejecutable ayudó a que los estudiantes construyeran el concepto de los elementos y algunas propiedades de la parábola, pero no todos los estudiantes construyeron el concepto de parábola como lugar geométrico.
- El uso de la calculadora como instrumento mediador entre el conocimiento y el estudiante, en el aula de clase, permite en el estudiante el desarrollo de la observación, la intuición, el análisis y el planteamiento de conjeturas.

- El uso de la calculadora como instrumento mediador, permite en el aula de clase el ahorro del tiempo y esto hace que se profundice más en el análisis de los conceptos.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERGANTE, S. GÓMEZ, I. WELTI, M. GEI, C. *Descubriendo La Noción del Límite*. Recuperado el 17 de agosto de 2006 del sitio web: <http://www.fceco.uner.edu.ar/cpn/catedras/matem1/educmat/em02agwg.doc>

APÓSTOL, T. (1988), *Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Bogotá: Editorial Reverté Colombiana S.A.

ARIAS, G. (1995), *La Investigación en el Aula, Alternativa de Transformación en la Educación Hoy*. Tesis de especialización no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

CASTIBLANCO, A. (2002), *Tecnologías Computacionales en el currículo de matemáticas (pp. 16 - 29)*. El proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media y sus avances. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

CASTIBLANCO, A. CAMARGO, L. VILLARRAGA, M. OBANDO, G. (1999), *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

CASTIBLANCO, A. URQUINA, H. CAMARGO, L. MORENO, L. (2004), *Tecnología Informática: Innovación en el Currículo de Matemáticas de La Educación Básica Secundaria y Media*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

COGOLLO, C. (2001), *Propuesta metodológica fundamentada en el uso de las nuevas tecnologías y el enfoque de resolución de problemas para el aprendizaje del concepto de límite*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

CHINEA, D. (2006), *Sobre Geometría y Física*. Recuperado el 8 de septiembre de 2006 del sitio web: <http://webpages.ull.es/users/dchinae/geofis.pdf>

DEL PUERTO, S. MINNAARD, C. (2003), *El Uso de la Calculadora Gráfica en el Aprendizaje de la Matemática*. OEI- Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653), Febrero 24 de 2003, en www.rieoei.org/deloslectores/393Puerto.PDF

De La ROSA, A. (2001), *La Calculadora Como Instrumento de Mediación*. Correo del Maestro, Núm. 56, enero del 2001, en <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/1anteaula56.htm>

ESCOBAR, M. (1985), *Paulo Freire y la educación liberadora*. México: Ediciones El Caballito.

FONT, V. (2006), *Algunos Puntos De Vista Sobre Las Representaciones En Didáctica De Las Matemáticas*. Recuperado el 20 de octubre de 2006 de la página web: <http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf>

GATICA, S. ANDINO, G. FELIZZIA, D. LEPORATI, J. (2006). *Una nueva propuesta para la enseñanza de temas de Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería*. En el sitio Web: http://conedsup.unsl.edu.ar/Download_trabajos/Trabajos/Eje_5_Investigacion_y_Produccion_Conocimiento/Gatica%20y%20Otros.PDF

GUZMÁN, I. (1998), *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. Revista Oficial del Comité latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Vol. 1, Num. 1. Marzo de 1998, en la página web: <http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/1998-1-1/1.pdf>

HITT, F. (2003), *Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos En Ambientes con Tecnología*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2. En la página web: <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>

MARTÍNEZ, M. (1996), *Modelo Didáctico para graficar la parábola utilizando reflexiones y traslaciones*. Tesis de Especialización no publicada. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

MORENO, L. (2002)a, *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de

Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), (pp. 40 - 66). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MORENO, L. (2002)b, *Instrumentos Matemáticos Computacionales*. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), (pp. 81 - 86). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MORENO, L. (2002)c, *Argumentación y formalización Mediadas por Cabri-Géomètre*. Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), (pp. 44-51). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

PÉREZ, A. (2006), *Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores*. Recuperado el 8 de septiembre de 2006 del sitio web: http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/transparencias20052006/Curvas%20con%20historia.pdf

QUINTERO, J. MUNEVAR, R. YEPES, J. *Aula Investigativa: Un Saber para Construir un Saber Pedagógico*. Recuperado el 7 de agosto de 2006 del sitio web de la Universidad de Caldas: <http://www.xoc.uam.mx/~cuaree/no26/Aula/Aula.htm>

REY, J. BABINI, J. (1951), *Historia de la matemática*. Buenos Aires: Espasa-calpe S.A.

WALTER, F. CASTRO, G. HUGO, F. PARDO, P. *El computador en la clase de matemáticas un enfoque semiótico*. Recuperado el 17 de agosto de 2006

del sitio web:
http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/82_fernando_castro.doc