
**ESTUDIO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN
MECANOCUÁNTICA PARA FOTONES Y SU
RELACIÓN CON EL CAMPO DE VACÍO: UNA
TEORÍA PARA FOTONES LIBRES**

ELKIN ANDRÉS SANTOS SUÁREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES.
ESCUELA DE FÍSICA.
BUCARAMANGA, COLOMBIA.
21 DE FEBRERO DE 2018.

**ESTUDIO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN
MECANOCUÁNTICA PARA FOTONES Y SU
RELACIÓN CON EL CAMPO DE VACÍO: UNA
TEORÍA PARA FOTONES LIBRES**

ELKIN ANDRÉS SANTOS SUÁREZ

TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR: DR. RAFAEL TORRES AMARÍS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES.
ESCUELA DE FÍSICA.
BUCARAMANGA, COLOMBIA.
21 DE FEBRERO DE 2018.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis familiares y amigos, especialmente a mi padre y mi madre.

Agradecimientos

- Agradecimiento especial a mi director de trabajo de grado Rafael Torres Amarís por todas las valiosas enseñanzas transmitidas bajo su dirección.
- A COLCIENCIAS, por permitirme ser partícipe del programa Jóvenes Investigadores en el año 2015.
- A la Universidad Industrial de Santander, por permitirme llevar a cabo mi formación académica en pregrado y maestría.
- A la Facultad de Ciencias de la UIS, por haberme otorgado una beca estudiantil en el año 2016 para mis estudios de Maestría.
- A Mayra por compartir estos años junto a mí.

Resumen.

Título: Estudio de la Solución de la Ecuación Mecanocuántica para Fotones y su Relación con el Campo de Vacío: una Teoría para Fotones Libres. *

Autor: Elkin A. Santos Suárez †

Palabras Clave: Función de onda para fotones, Campo de vacío, Análisis de Fourier, Ecuaciones de Maxwell, Cinemática de Einstein.

El problema que pretendemos abordar en nuestro trabajo parte de la comprensión del fotón como un campo por excelencia monocromático y su localización espacio-temporal. Las contradicciones surgen a partir de que el modelo matemático para la descripción de la luz a nivel cuántico están basados en el análisis de Fourier, y desde este punto de vista un campo monocromático es representado como una onda armónica. A grandes rasgos, el análisis de Fourier establece que un campo monocromático es aquel que se extiende infinitamente y de forma homogénea en el tiempo y el espacio. De acuerdo al análisis de Fourier, solo una onda armónica cumple estas características, la cual tiene un espectro único, es decir una única frecuencia asociada. Sin embargo, experimentalmente la noción de fotón es un tanto diferente. Un fotón se encuentra localizado dentro de un rango temporal Δt , y solo puede ser detectado dentro de dicho rango temporal, es decir tiene cierto grado de localización. El inconveniente ocurre cuando se quiere tener un fotón parcialmente localizado que a su vez tenga una única frecuencia bien definida. Esto es inviable desde el análisis de Fourier, puesto que si se desea obtener un campo localizado, este debe estar compuesto de infinitos modos que conforman un paquete de ondas.

En nuestro trabajo abordamos este problema partiendo desde los conceptos fundamentales de la cuantización de la luz. Comenzamos describiendo una formulación mecanocuántica de la luz que permita estudiar el concepto de función de onda del fotón. Posteriormente estudiamos el proceso de segunda cuantización y analizamos especialmente el concepto de las fluctuaciones del campo de vacío. Basados en una hipótesis en la que asociamos las ondas armónicas con los estados de vacío, construimos un modelo que permite solventar muchas de las dificultades conceptuales que puedan conducir a malas interpretaciones. En este sentido, el estado cuántico de un fotón es entendido como una composición de estados de vacío sobre todos los modos o frecuencias en las que una fuente puede emitir.

De gran importancia en nuestro trabajo es la necesidad de introducir una teoría de procesos aleatorios al estudio de la radiación a nivel fundamental, puesto que consideramos que las fluctuaciones de vacío le otorgan a la radiación un carácter estocástico. Finalmente realizamos una aplicación del modelo propuesto orientada a la emisión espontánea y estimulada. Como resultado principal en esta dirección veremos que nuestro modelo permite calcular las probabilidades de transición mediante una definición particular de los estado inicial y final de un sistema átomo-campo.

*Trabajo de grado de Maestría en Física

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Rafael A. Torres Amarís (Director)

Abstract.

Título: Study of the Solution of the Quantum-Mechanical Equation for Photons and its Relation to the Vacuum Field. *

Autor: Elkin A. Santos Suárez †

Palabras Clave: Función de onda para fotones, Campo de vacío, Análisis de Fourier, Ecuaciones de Maxwell, Cinemática de Einstein.

The issue we intend to solve in our work starts from the understanding that a photon not only needs to be, strictly speaking, a monochromatic field, but also has to be, at least partially, localized in space-time. Contradictions arise since the Fourier analysis only allows a localized field if it is written as a wave packet, that is, as a sum of infinite harmonic wave functions. However, if photon has to be a monochromatic field, it only has one single frequency and according to the Fourier Analysis a monochromatic field is a harmonic wave function which is totally delocalized in space and time.

In our work we take over this problem starting from the foundations of the quantum theory of light. We start by describing a theory of first quantization of light, which allows to introduce a sort of wave function for photons. Then we study the process of second quantization and analyze one of the main features of the theory: the prediction of quantum vacuum fluctuations. Based on the hypothesis that harmonic wave functions are the ones that describe mathematically the vacuum field, we build a model that tries to solve some of the controversial points of the main theory related to the nature of light. As a result we found that the state of one single photon can be written as a composition of infinite vacuum states the same way a wave packet is a sum of infinite harmonic waves.

Also, we introduced the random process theory into the foundations of radiation, since vacuum fluctuations determine the stochastic nature of light emission. At the end of the book we describe a theoretical application of our model to the spontaneous and stimulated emission. Here we found that the probabilities of transition can be computed by means of a clever way of defining the initial and final state for an atom-field system.

*Master's Thesis

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Rafael A. Torres Amarís (Advisor)

Índice general

1. Introducción	13
2. Formulación cuántica de la radiación	18
2.1. Primera cuantización	19
2.1.1. Campo generalizado de Maxwell como función de onda	19
2.1.2. Ecuación mecano-cuántica de un fotón a partir de la cinemática de Einstein	20
2.2. Segunda cuantización	22
2.2.1. Fluctuaciones del campo de vacío	24
2.2.2. El fotón en la segunda cuantización	25
2.2.3. Los operadores escaleras y el campo generalizado de Maxwell	29
3. Fotones como composición del campo de vacío	34
3.1. Particularidades del formalismo Riemann-Silberstein	35
3.2. Propiedades del campo de vacío	37
3.3. El campo de vacío como los armónicos de Fourier	38
4. Naturaleza estocástica de la luz: ¿Qué es el fotón?	40
4.1. Aleatoriedad en el proceso de emisión	41
4.2. Modelo para fotones	44
4.2.1. ¿Qué es el fotón?	46
4.3. Estado de la fuente	48
5. Aplicaciones: Emisión estimulada	51
5.1. Emisión estimulada: Coherencia de fotones	51
6. Conclusiones	58
A. Análisis de Fourier	62
A.1. Señal Analítica: una función con espectro positivo	62
A.2. Paquete de ondas	64
A.3. Relación de incertidumbre	65

Bibliografía

68

Índice de figuras

2.1.	Cavidad óptica unidimensional de longitud L usada para cuantizar el campo. . . .	23
2.2.	Un fotón como superposición de estados número de fotones ubicado a una distancia $d > z$ (a), puede colapsar a un estado número con cierta probabilidad y ser observado por un detector en una posición z (b). Esto no ocurre experimentalmente.	29
2.3.	Representación esquemática de un divisor de haz óptico que muestra la notación para los operadores de campo en las dos secciones de entrada y las dos de salida.	30
4.1.	Un átomo de dos niveles, con ancho de banda Γ en el nivel superior, espontáneamente emite un fotón. Las fluctuaciones del campo de vacío sería la causa que el electrón en el estado excitado decaiga al estado fundamental, en un tiempo característico τ	41
4.2.	Una señal analítica aleatoria no estacionaria $U(t)$, solo la parte real $Re\{U(t)\}$ es mostrada.	42
4.3.	La densidad espectral de potencia instantánea para cada señal de muestra ${}^\omega S(\nu)$ y la de ensamble $E\{{}^\omega S(\nu)\}$	43
4.4.	La energía electromagnética se encuentra localizada dentro del paquete de ondas, τ_i representa la localización temporal de la energía electromagnética dentro del paquete de ondas.	45
4.5.	El operador \hat{b}^\dagger selecciona del vacío electromagnético una función armónica de amplitud y fase aleatoria para cada uno de los modos, de manera que su composición constituye el estado del fotón $ \gamma\rangle$	47
4.6.	Cada densidad espectral de potencia constituye el espectro del paquete de ondas del fotón de energía, $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$	48
4.7.	dos paquetes de onda (fotones) diferentes pero con igual portadora (energía) asociados a dos densidades espectrales de potencia diferentes.	49
4.8.	La densidad espectral de potencia de ensamble, la cual constituye el espectro de la fuente, debidamente normalizada se puede interpretar como una densidad de probabilidad de que la fuente emita fotones de energías $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$	49
5.1.	Tanto el estado excitado de un átomo, $ e\rangle_\sigma$, como el estado base, $ g\rangle_\sigma$, son una superposición de estados en concordancia con la mecánica cuántica.	54

5.2. Si existe un soporte común entre las densidades espectrales del fotón y del átomo (fig. a) existe una probabilidad diferente de cero de que haya interacción. Se presenta el caso máximo si los dos soportes coinciden (fig. b) o el mínimo si no hay soporte común (fig. c).	56
A.1. Traslación del espectro de una señal de altas frecuencias a bajas frecuencias. . . .	64
A.2. Paquete de ondas	65
A.3. Incertidumbre en los dominios para un par de Fourier	66

Capítulo 1

Introducción

“Mi punto de vista es que si tu filosofía no se actualiza cada día, estás cegado a todo lo que el universo puede ofrecerte”–Neil deGrasse Tyson.

Sin lugar a duda, la luz ha sido siempre un elemento manifiesto de nuestra vida diaria y un tema de asombro desde el primer día, cuya verdadera naturaleza se nos ha escabullido por siglos. Muchas propiedades únicas de la luz son extremadamente fascinantes, extrañas y han sido a lo largo de la historia objeto de discusión y polémica dentro de la comunidad científica. Propiedades que han convertido la búsqueda de su verdadera esencia en un tema que aún hoy perturba la imaginación de los mejores físicos [1–3].

Esta naturaleza enigmática de la luz puede ser apreciada por su larga historia de controversias. Sin ir más atrás en el tiempo, podemos empezar con Newton y Huygens a principios de los años 1700. Mientras que Newton consideraba a la luz como un rayo de partículas capaces de, por ejemplo, “rebotar” en un espejo mediante reflexión, Christiaan Huygens sostenía que la luz era de naturaleza ondulatoria. Este último formuló un principio que en la actualidad lleva su nombre; el cual afirma que todo punto de un frente de onda puede ser considerado como una fuente puntual secundaria de ondas esféricas que se extienden con las mismas propiedades de la onda que proceden, y que estas ondas secundarias se superponen para construir un nuevo frente de onda dando lugar así a su propagación. Casi cien años después, en un intento de discernir sobre la naturaleza corpuscular u ondulatoria de la luz, Thomas Young realizó su famoso experimento de la doble rendija, y comprobó que se generaba de un patrón de interferencias cuando una fuente lejana se difractaba en el paso por dos rejillas. Este descubrimiento demostraría que la luz se difractaba tal como lo hacen las ondas y resolvería aparentemente el interrogante en favor de la teoría ondulatoria, y además permitiría a la óptica ser integrada dentro de la teoría electromagnética gracias a los trabajos de Fresnel, Sommerfeld, Kirchhoff, entre otros genios.

De este modo, la base conceptual para entender el fenómeno de la radiación comienza con James Clerk Maxwell y Henrich Hertz. Aunque Newton, Huygens, Young y muchos otros contribuyeron ampliamente a nuestro entendimiento de la óptica, la demostración de Maxwell-Hertz de que la luz está constituida por los mismos ingredientes de las ondas electromagnéticas, campo eléctrico y magnético, puede ser considerada como la primera revelación a la pregunta de qué es

la luz. De acuerdo con la descripción, la luz es radiada por cargas aceleradas y es una excitación electromagnética de lo que en ese entonces se conocía con el nombre de “éter”.

El éxito de la teoría de Maxwell era formidable, era la primera teoría auto-contenida de la radiación que unificaba los fenómenos de electricidad y magnetismo, y le daba significado físico a la polarización transversal de la luz. Los físicos de entonces se atrevían a proclamar que ya se contaba con las teorías necesarias para entender cualquier fenómeno físico... excepto dos, que no se habían explicado aún y que curiosamente involucraban a la luz.

Uno de ellos es el experimento de Michelson-Morley. Su resultado constituiría posteriormente la base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein, descartando la existencia del éter y postulando a la velocidad de la luz como una constante independiente del sistema de referencia inercial en el cual se mide. El segundo, la falta de una explicación adecuada a la catástrofe del ultravioleta (UV) de Rayleigh-Jeans y la naturaleza de la radiación de cuerpo negro, impulsó a Plank a plantear la hipótesis de cuantización de la energía de los osciladores: para una onda electromagnética de frecuencia ν , las únicas energías posibles que podían absorber las paredes de la cavidad eran múltiplos enteros del cuanto $h\nu$, en donde h es una nueva constante fundamental. Una brillante hipótesis que cambiaría radicalmente la concepción física de entonces y conduciría a los orígenes de la mecánica cuántica.

Sin embargo, aunque ambos problemas involucraban a la luz, en ninguno de los dos casos la cuantización de la luz había sido mencionada para explicar dichos fenómenos. La relatividad es una teoría clásica y Plank solo consideraba que las energías de los osciladores de las paredes de la cavidad eran las que estaban cuantizadas, no el campo electromagnético.

El resurgir de la teoría corpuscular de la luz y los inicios del concepto moderno de *fotón* son debido a Albert Einstein, quien tomando prestadas las ideas de la cuantización de las energías de Plank fue un paso más allá al generalizar su hipótesis. Einstein propuso que la luz consistía de un rayo de cuantos de luz, en donde cada cuanto poseía una energía $h\nu$ y utilizó esta visión de luz cuantizada para mostrar que se podía entender de forma simple algunas características hasta entonces inexplicables del efecto fotoeléctrico. Es llamativo que Einstein obtuviera la idea de fotón tratando de explicar el efecto fotoeléctrico, teniendo en cuenta que una teoría semiclásica puede explicar la esencia del fenómeno sin invocar la cuantización de la luz [4]. Veinte años después, la existencia del fotón como una entidad independiente fue demostrada mediante el efecto Compton(1924) y descubrimientos posteriores de efectos cuánticos de la luz hacían indispensable la noción de fotón para una explicación adecuada.

De modo que la conclusión era incuestionable, la interacción entre la luz y la materia se realiza mediante procesos elementales indivisibles, en la que la radiación está compuesta por partículas, los fotones. Parámetros corpusculares, como la energía E y el momento \mathbf{p} del fotón están asociados a parámetros ondulatorios, como la frecuencia ω y el vector de onda \mathbf{k} mediante las relaciones fundamentales

$$E = \hbar\omega \quad (1.1)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

en donde $\hbar = h/2\pi$.

Así, una vez más se regresaba al concepto corpuscular de la luz y el viejo debate de su naturaleza reaparecía. No obstante, la ciencia había progresado lo suficiente y no sería igual que aquella vez. Los científicos entendieron que una completa interpretación de los fenómenos ópticos, especialmente el experimento de Young, solo puede ser obtenida conservando ambos aspectos, corpusculares y ondulatorios de la luz, y mediante la introducción de nuevos conceptos fundamentales; la mecánica cuántica.

Si la luz tiene características tanto ondulatorias como corpusculares, comportándose de uno u otro modo dependiendo de un experimento específico, tal vez para la materia también sea así. Eso pensó de Broglie(1924) para obtener el premio Nobel cinco años después y despejar, con ayuda de algunos más, el camino a Erwin Schrödinger para que pudiera introducir su famosa ecuación para las ondas de materia; la base de la mecánica cuántica no relativista. La visión sobre el debate onda-partícula que proporciona la mecánica cuántica es notable, la luz (o materia), no es ni onda ni partícula, sino una entidad confusa que cumple con el principio de superposición. Cuando el fotón atraviesa la doble rendija en el experimento de Young, es detectado en la pantalla como un punto en una región condicionada por su densidad de probabilidad, y una acumulación de dichos eventos realizados muchas veces reconstruye el patrón de difracción característico de la interferencia de una onda clásica. Sin embargo intentar obtener información acerca del camino tomado por el fotón conduce a la destrucción de las franjas de interferencia y en consecuencia ambas perspectivas, tanto onda como partícula, pueden ser atribuidas a la luz con la misma validez en virtud del principio de complementariedad.

La ecuación de Schrödinger establece la base matemática para la dinámica de la materia, pero ¿qué hay de la luz? Se advierte la necesidad de complementar las ecuaciones de Maxwell con una visión cuantizada del campo electromagnético que incluya la naturaleza aleatoria y probabilística de la luz. Esto es precisamente lo que hace Paul Dirac [5], cuantizar el campo electromagnético utilizando una técnica generalmente conocida como segunda cuantización, y colocar al fotón por primera vez dentro de un formalismo matemático apropiado. Así, acompañado por otros genios, Born(1925), Jordan(1925), Heisenberg(1926), nació la teoría cuántica de la radiación, la cual fue secundada por el extraordinario éxito de la electrodinámica cuántica(1940), una teoría de la interacción luz-materia que ha logrado una exactitud numérica sin precedentes cuando de predecir observaciones experimentales se trata.

La contribución insignia de la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés) puede ser otorgada a la predicción de la existencia del campo de vacío y sus fluctuaciones. El enfoque usual de la cuantización de la radiación electromagnética conduce a concluir que existe un estado fundamental de mínima energía, el cual es independiente de la existencia o no de fotones. Al no haber partículas a qué atribuirles este estado del campo, es entonces atribuido al “vacío”, y sería una propiedad intrínseca del universo en sí mismo, que fluctúa y que le otorgaría a la luz un carácter estocástico. Aunque muchos científicos cuestionan aún la existencia del campo de vacío y lo consideran solo un formalismo necesario para que la teoría funcione, la realidad es que muchos fenómenos pueden ser explicados haciendo uso de él, considerándolo incluso, la causa misma de que estos fenómenos ocurran. La emisión espontánea, el corrimiento Lamb, correlación a nivel de fotones, entre otros, son experimentos que son explicados exitosamente por la teoría e ilustran la realidad de las fluctuaciones del vacío electromagnético [6–9].

En efecto, la teoría cuantizada de la radiación es indispensable para entender las propiedades más inusuales de la luz y su interacción con la materia. Sin embargo, a pesar de que la reputación de la QED parece infalible, limitada solo por la capacidad de los físicos de realizar los cálculos, esta aún presenta problemas conceptuales que conducen a malas interpretaciones. Especial y curiosamente cuando tratamos de responder a la pregunta de qué es un fotón. Los inconvenientes en este sentido surgen al tratar de reconciliar la concepción del fotón como un cuanto portador de energía $h\nu$ y su localización en el espacio. A grandes rasgos, desde el análisis de Fourier, un campo solo puede ser estrictamente monocromático si se extiende infinitamente y de forma homogénea en el tiempo y el espacio. De acuerdo al análisis de Fourier, solo una función armónica de estas características puede tener un espectro único, es decir una única frecuencia asociada. Pero ¿cómo puedo hablar de una partícula localizada y con una única frecuencia si la función de onda que le asocio se extiende infinitamente en el espacio?... con un paquete de ondas, diría alguien más, pero entonces el problema está en la energía. El espectro de Fourier de un paquete de ondas no es único, y por ende la energía del fotón como cuanto $h\nu$ no estaría bien definida. Algunas interpretaciones a este dilema hablan de fotones multimodales y policromáticos, otras del colapso de la función de onda. En este trabajo de maestría abordaremos este problema y, partiendo desde conceptos fundamentales, proponemos una nueva interpretación desde una perspectiva mecano-cuántica y extenderemos el concepto a la definición del estado cuántico de un fotón tomando en cuenta las evidencias experimentales y el carácter estocástico de la radiación.

Estrechamente relacionado con lo mencionado anteriormente sobre la localización del fotón, está el aún hoy debatido concepto de su función de onda y el desarrollo de una mecánica cuántica para fotones al estilo Schrödinger[†] [10–20]. El desarrollo de una “primera cuantización” para fotones ha recobrado interés recientemente, entre otras cosas porque permitiría discutir diversos efectos cuánticos que resultan de la interferencia y el entrelazamiento. Además la introducción de una función de onda asociada al fotón permite una descripción unificada de todas las partículas a ambos niveles (primero y segundo) de cuantización. En esta dirección, se ha comprobado que las ecuaciones de Maxwell pueden ser usadas como guía para interpretaciones mecano-cuánticas apropiadas. El campo electromagnético se puede representar de una forma más natural como un campo vectorial complejo[‡], el cual se comporta precisamente de la misma forma que un campo relativista para una partícula, es decir como una función de onda. De este modo, el enfoque de “primera cuantización” es desarrollado de forma equivalente al electromagnetismo clásico, debido a que representa las ecuaciones de Maxwell en la forma de una ecuación mecano-cuántica relativista para partículas sin masa y de spin-1.

En conclusión, como hemos advertido en este breve recuento histórico, dilucidar cuál es la verdadera naturaleza de la luz no ha sido una pregunta fácil de responder, sin embargo, aunque la misión ha sido larga, parece ir encaminada en la dirección correcta. La descripción cuántica de la luz y la noción de fotón como elemento de excitación del campo cuantizado en un modo normal apropiado, se presenta como una teoría que captura en gran medida el carácter fundamental de la radiación. Sin embargo aún falta camino por recorrer y vacíos por llenar en la búsqueda de una

[†]O de Dirac, en el caso relativista.

[‡]El cual llamaremos campo generalizado de Maxwell definido $\mathbf{F} = \mathbf{E} + ic\mathbf{B}$, en donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son el campo eléctrico y magnético respectivamente.

comprensión completa de la luz. Sírvase esta introducción como motivo suficiente para realizar este trabajo de maestría y contribuir con nuestro aporte a dicha búsqueda.

Nuestra propuesta se reduce a abordar el problema de qué es el fotón desde dos perspectivas: desde una formulación mecano-cuántica, entendiéndolo como un paquete de ondas cuya energía está relacionada con la frecuencia de la portadora de dicho paquete de ondas y que además se encuentra localizada dentro de él con cierta probabilidad determinada por la función envolvente. Y desde una perspectiva de la electrodinámica cuántica, el estado de un fotón lo definiremos como una suma continua de estados de vacío en los infinitos modos espectrales instantáneos que una fuente puede emitir, es decir asociado a la naturaleza estocástica de la radiación. A partir de lo anterior, proponemos que estas dos perspectivas están realmente conectadas si consideramos que el campo de vacío que resulta de la QED es el equivalente clásico al campo monocromático del análisis de Fourier. Asimismo, observaremos en qué forma nuestra visión podría solventar los problemas conceptuales entorno a la localización y la energía del fotón y cuales serían las consecuencias que se manifiestan.

Comenzamos en el siguiente capítulo describiendo la formulación mecano-cuántica para fotones en los dos niveles de cuantización, describimos un desarrollo paralelo desde la cinemática de Einstein y de las ecuaciones de Maxwell para la obtención de una ecuación mecano-cuántica asociada al fotón. La solución de dicha ecuación puede ser cuantizada para dar lugar a los operadores de campo eléctrico y magnético habituales de la QED. En este mismo capítulo discutimos la definición del fotón que proporciona la QED, discutimos sus características y exhibimos una relación existente entre el campo generalizado de Maxwell y los operadores aniquilación y creación. Posteriormente en el Capítulo 3, partimos de las propiedades del campo de vacío y los campos monocromáticos para poner de manifiesto una similitud entre ambos conceptos y una equivalencia entre ambos modelos de cuantización. En el Capítulo 4 introducimos una visión estocástica de la radiación, definimos un nuevo estado de un fotón como una suma de estados de vacío, e introducimos el concepto de estado de una fuente. Finalmente se aplica esta nueva noción al estudio de las probabilidades de transición entre fotones y átomos para la emisión espontánea y la emisión estimulada, haciendo énfasis en esta última para entender la noción de coherencia de fotones. Por último, se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Formulación cuántica de la radiación

“El trabajo de James Clerk Maxwell cambió el mundo para siempre”–Albert Einstein.

Tal y como se mencionó en la introducción, fue Dirac [5]^{*} el primero en combinar los aspectos corpusculares y ondulatorios de la luz de tal manera que se pudieran interpretar todos los fenómenos de interferencia y a la vez se explicara la emisión y absorción de un fotón de cierta energía por un átomo. La esencia de la teoría cuántica de la radiación de Dirac está basada en una idea sencilla, consiste en asociarle un oscilador armónico simple cuantizado a cada modo del campo electromagnético de tal manera que el fotón aparezca como un elemento de excitación de dicho modo. Este proceso se describe como la cuantización del campo electromagnético y el término “segunda cuantización” de la radiación es con frecuencia utilizado en la literatura[†] en analogía a la cuantización del campo en la mecánica cuántica de Schrödinger (o Dirac), la cual es consecuencia de una “primera” cuantización de la dinámica Newtoniana (o de Einstein).

Del mismo modo, referente a la distinción entre la luz vista como campo o como partícula, la definición o existencia de una función de onda y la construcción de una mecánica cuántica para fotones, paralela a la mecánica cuántica para la materia, tendría mucho que ofrecer. Sin embargo la función de onda para fotones es un concepto controversial. El principal obstáculo para definir una función de onda para fotones resulta precisamente del problema de su localización. La idea de que el fotón no puede ser localizado está basado en el concepto de estricta localización matemática, en donde el fotón es presentado con probabilidad uno de localizarse en una región del espacio y probabilidad cero en la región complementaria. Ya en 1949 Newton y Wigner [22] habían formulado que los fotones no cumplían ciertas condiciones de invariancia inevitables para la construcción de un estado localizado, trabajo que fue extendido y corroborado por Wightman [23]. Estos trabajos son considerados por algunos científicos como la prueba de que el fotón no puede ser localizado, sin embargo muchos autores rechazan este punto de vista tan estricto [10, 16, 17, 19, 20, 24], y comparten la opinión de que, abandonando la noción de localización estrictamente matemática, existe la función de onda del fotón, siempre y cuando esta sea útil y esté adecuadamente definida.

^{*}Fermi también fue uno de los pioneros [21].

[†]Aunque se puede discutir el correcto uso del término “segunda cuantización”, dado que realmente consiste en cuantizar la teoría clásica de la luz, es decir las ecuaciones de Maxwell.

Gracias a estos esfuerzos, recientemente se ha puesto en manifiesto un notable resultado. El campo electromagnético tiene una representación más natural como un campo vectorial complejo, llamado campo vectorial de Riemann-Silberstein (RS). Vector que fue estudiado en detalle por primera vez en 1907 por Silberstein [25, 26] quien en su segundo artículo menciona que dicho vector apareció por primera vez en las conferencias de Bernhard Riemann(1901). Lo notable en sus trabajos es que el vector RS parece poseer todas las características deseadas en una función de onda para fotones, primordialmente porque es solución de una ecuación similar a la ecuación de Dirac para partículas relativistas de spin 1/2; ecuación que se puede obtener a partir de la cinemática de Einstein o de las ecuaciones de Maxwell de forma paralela. Y aún más interesante resulta el hecho de que cuantizar dicha función de onda conduce a la teoría cuántica de la radiación tradicional.

Siguiendo esta ruta, este capítulo muestra los conceptos generales para la obtención de la ecuación mecano-cuántica para fotones a partir de dos perspectivas aparentemente independientes, desde las ecuaciones de Maxwell y de la cinemática de Einstein*. Ambos desarrollos conducen a un campo generalizado de Maxwell que relaciona el campo eléctrico y magnético mediante el vector complejo RS. En consecuencia, cuantizar dicho campo generalizado conduce a la cuantización tradicional de la electrodinámica cuántica, ya que cuantizar este campo generalizado es equivalente a cuantizar el campo eléctrico y magnético. Esta cuantización se presenta de manera subsecuente en este capítulo y se muestra cómo las fluctuaciones asociadas a la energía fundamental, las llamadas fluctuaciones del vacío, son producto de dicha cuantización. También discutimos las principales interpretaciones acerca del estado cuántico del fotón que proporciona la teoría y finalmente ponemos de manifiesto una relación directa entre la amplitud del campo generalizado de Maxwell y los operadores escalera.

2.1. Primera cuantización

Siguiendo el procedimiento similar al de los autores [10–20], se deduce una ecuación mecano-cuántica para fotones a partir de las ecuaciones de Maxwell y de la cinemática de Einstein, cuya solución toma la forma de un campo vectorial complejo, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

2.1.1. Campo generalizado de Maxwell como función de onda

Tal como se mencionó, el elemento matemático que merece el nombre de función de onda de un fotón puede ser rastreado a partir de una forma compleja de escribir las ecuaciones de Maxwell que se conoce desde hace tiempo en los trabajos de Riemann y Silberstein. Esta forma compleja de las ecuaciones de Maxwell se obtiene multiplicando las ecuaciones

$$\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c^2 \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

por el imaginario i y luego se suma con el segundo par de ecuaciones de Maxwell

$$-c \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = c \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

*Que las ecuaciones de Maxwell puedan ser obtenidas desde la cinemática de Einstein, recupera la visión del fotón como partícula y no simplemente como un elemento de excitación de un modo del campo electromagnético.

las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$i\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = c\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

en donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 representa la forma compleja de las ecuaciones de Maxwell, en donde \mathbf{F} es un campo generalizado [14]. El siguiente paso a realizar es describir la ecuación 2.3 mediante el uso de las matrices de spin-1 S_x , S_y y S_z conocidas de la mecánica cuántica* [16]

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

La ecuación 2.3 puede escribirse en términos de estas matrices de spin si aplicamos la siguiente regla de conversión de notación vectorial a notación matricial [10]

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -i(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{S}})\mathbf{B}, \quad (2.7)$$

en donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores ordinarios de tres componentes y $\vec{\mathbf{S}} = (S_x, S_y, S_z)$ es un vector de tres componentes compuestas por las matrices de spin-1.

La ecuación resultante

$$i\hbar\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = c\left(\vec{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

representa así la ecuación mecanocuántica para los fotones, cuyo Hamiltoniano es $c(\vec{\mathbf{S}} \cdot [\hbar/i]\nabla)$.

Utilizar el vector complejo 2.5 como función de onda para una partícula en el sentido de una primera cuantización produce resultados consistentes, y sugiere que este vector debería ser una representación más natural para el campo electromagnético clásico también.

2.1.2. Ecuación mecano-cuántica de un fotón a partir de la cinemática de Einstein

El enfoque corpuscular que se usa tradicionalmente también puede ser aplicado a los fotones. Lo que se realiza es un paralelismo del tratamiento realizado por Dirac para determinar la ecuación de onda de un electrón, una partícula de spin 1/2 a partir de la cinemática de Einstein. Siguiendo esta ruta se halla la ecuación de movimiento para una partícula de masa cero y spin 1 [10, 11, 14–16, 19].

*Es posible elegir una representación específica para las matrices S_i , en este caso estas actúan sobre las componentes cartesianas del vector función de onda y no son la proyección del número cuántico de spin sobre el eje z; por eso S_z no es diagonal.

La ecuación de Dirac se deriva de la condición relativista de la energía E , masa m y momento \mathbf{p} ,

$$(E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 - m^2 c^4) I^{(3)} \Psi = 0, \quad (2.9)$$

donde $I^{(3)}$ es la matriz identidad 3×3 y Ψ es una función de onda de tres componentes*. Teniendo en cuenta $m = 0$ para fotones, la ecuación 2.9 la podemos descomponer en

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \right) I^{(3)} = \left(\frac{E}{c} I^{(3)} - \mathbf{p} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) \left(\frac{E}{c} I^{(3)} + \mathbf{p} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) - \begin{bmatrix} p_x^2 & p_x p_y & p_x p_z \\ p_y p_x & p_y^2 & p_y p_z \\ p_z p_x & p_z p_y & p_z^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

en donde $\vec{\mathbf{S}}$ es igualmente el vector matricial de spin 1 cuyas componentes son S_x , S_y y S_z , los cuales cumplen las propiedades

$$[S_x, S_y] = i S_z, \quad [S_z, S_x] = i S_y, \quad [S_y, S_z] = i S_x. \quad (2.11)$$

Por sustitución directa se puede demostrar 2.10. Teniendo en cuenta que

$$\begin{bmatrix} p_x^2 & p_x p_y & p_x p_z \\ p_y p_x & p_y^2 & p_y p_z \\ p_z p_x & p_z p_y & p_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

la expresión 2.10 aplicada a la función de onda de tres componentes Ψ queda

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \right) \Psi = \left(\frac{E}{c} I^{(3)} - \mathbf{p} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) \left(\frac{E}{c} I^{(3)} + \mathbf{p} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) \Psi - \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} (\mathbf{p} \cdot \Psi) = 0, \quad (2.13)$$

de donde finalmente se obtiene que la anterior ecuación debe satisfacer

$$\left(\frac{E}{c} I^{(3)} - \mathbf{p} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) \Psi = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{p} \cdot \Psi = 0. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación 2.14 se puede deducir una ecuación de onda análoga a la ecuación de Schrödinger utilizando el operador de energía y momento

$$E \implies i\hbar \partial_t, \quad \mathbf{p} \implies -i\hbar \nabla. \quad (2.16)$$

*Las componentes de la función de onda están definidas por el número cuántico de spin, a saber $\Psi(\mathbf{r}, t) =$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{r}, t, s) \\ \Psi(\mathbf{r}, t, s-1) \\ \vdots \\ \Psi(\mathbf{r}, t, -(s-1)) \\ \Psi(\mathbf{r}, t, -s) \end{bmatrix}$$

De esta manera se obtiene que

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r},t) = c\left(\vec{\mathbf{S}}\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\Psi(\mathbf{r},t), \quad (2.17)$$

la cual corresponde a la misma expresión 2.8 con $\Psi(\mathbf{r},t) = \mathbf{F}(\mathbf{r},t)$.

Es así, que es posible obtener una ecuación mecano-cuántica del fotón ya sea derivada a partir de la cinemática de Einstein o de las ecuaciones de Maxwell. Este resultado sugiere que las ecuaciones de Maxwell en el fondo corresponden a una teoría cuántica relativista para fotones y no a una teoría clásica. Observemos que el operador Hamiltoniano para el fotón surge de este enfoque como el producto escalar entre el vector momento y el vector de spin (helicidad) multiplicado por la velocidad de la luz c . La ecuación auxiliar 2.15 representa la condición de divergencia $\nabla\cdot\Psi = 0$. Note que el factor \hbar en la expresión 2.17 se puede cancelar, lo cual es consecuencia de que la masa del fotón es cero, de otra manera no se podría cancelar. Esto explica la ausencia de este factor característico de la mecánica cuántica en el electromagnetismo clásico.

Extraordinariamente, James Clerck Maxwell sin saberlo había descubierto una correcta teoría cuántica relativista para los fotones, cuarenta y tres años antes de que Einstein siquiera hubiera postulado su existencia. En donde, si un estado de un fotón del campo electromagnético es creado, entonces su estado cuántico o función de onda asociada, $\Psi(\mathbf{r},t)$, (PWF, por sus siglas en ingles) está determinada por el conocimiento de su distribución del campo eléctrico y magnético en el espacio en virtud de campo vectorial complejo $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$.

2.2. Segunda cuantización

Para analizar la concepción de qué es un fotón desde el punto de vista de la QED, procedemos a cuantizar la función de onda del fotón. Tomemos en cuenta que cuantizar la función de onda $\Psi(\mathbf{r},t)$, es decir elevarla a estatus de operador, $\widehat{\Psi}(\mathbf{r},t)$, y establecer relaciones de conmutación, es equivalente a cuantizar el campo eléctrico y magnético, puesto que se debe cumplir que $\widehat{\Psi}(\mathbf{r},t) = \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + ic\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ [10, 15, 20].

Aunque es posible realizar una cuantización multimodal en el espacio libre como un paquete de ondas, para efectos de nuestro trabajo, podemos con seguir el procedimiento tradicional de la cuantización del campo electromagnético en cavidades teniendo en cuenta que los modos discretos introducidos por la cavidad pasan a ser continuos en el espacio libre [6, 27–29]. Consideremos el caso cuando el campo electromagnético está confinado dentro una cavidad cuasi-unidimensional* de volumen finito con paredes perfectamente reflectantes como se muestra en la figura 2.1. Las condiciones de frontera apropiadas a esta situación física requiere que el campo eléctrico se desvanezca en las paredes. Un modo de un campo electromagnético clásico monocromático y polarizado en la dirección x que se propaga en la dirección z , toma la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_xE_x(z,t) = \hat{\mathbf{e}}_x\left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}q(t)\sin(kz), \quad (2.18)$$

*El cuasi se refiere a que aunque la estructura es realmente tridimensional, son solo los modos que se propagan en una sola dirección los que son de interés.

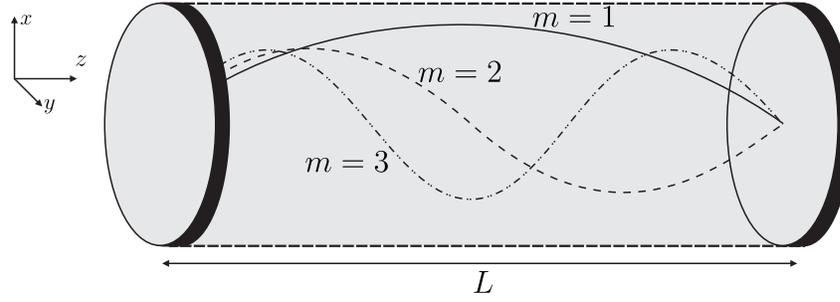


Figura 2.1: Cavidad óptica unidimensional de longitud L usada para cuantizar el campo.

en donde ω es la frecuencia del modo, k es el número de onda relacionado con la frecuencia a partir de $k = \omega/c$, $\hat{\mathbf{e}}_x$ un vector unitario en la dirección de polarización y $q(t)$ corresponde a una función armónica en el tiempo que tiene unidades de longitud. La condición de frontera $z = L$ implica que las frecuencias permitidas son $\omega_m = c(m\pi/L)$, $m = 1, 2, \dots$. El valor de ω en la ecuación 2.18 es una de esas frecuencias, en donde las demás se pueden considerar al expandir el campo en todos los modos de la cavidad [6].

El campo magnético se puede deducir a partir de 2.18 y toma la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_y B_y(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_y \frac{1}{c^2 k} \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (2.19)$$

en donde $\dot{q}(t)$ tiene unidades de momento.

De manera que la energía electromagnética clásica contenida en unidades S.I. está dada por el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right], \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

de lo cual la energía del campo clásico cumple que

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad (2.21)$$

en donde hemos denotado $p(t) = \dot{q}(t)$.

El presente problema dinámico puede ser cuantizado notando que el Hamiltoniano es formalmente equivalente al de un oscilador armónico con masa unitaria. Identificando las variables conjugadas q y p como operadores que cumplen las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad [\hat{q}, \hat{q}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0, \quad (2.22)$$

entonces los operadores campo eléctrico y magnético toman la forma

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{q}(t) \sin(kz), \quad (2.23)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{1}{c^2 k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{p}(t) \cos(kz). \quad (2.24)$$

Y el Hamiltoniano correspondiente como operador es

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (2.25)$$

Es conveniente introducir los operadores no Hermíticos aniquilación y creación mediante las relaciones

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (2.26)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad (2.27)$$

de tal manera que

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (2.28)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz), \quad (2.29)$$

en donde “el campo eléctrico por fotón” es $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ y $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0 \hbar\omega^3/V)^{1/2}$.

Los correspondientes estados propios, $|n\rangle$, del Hamiltoniano satisfacen

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

en donde n puede ser interpretado como el número de fotones en el estado $|n\rangle$ que cumple

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \text{con} \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.31)$$

2.2.1. Fluctuaciones del campo de vacío

Para analizar en qué consisten las fluctuaciones del vacío sigamos considerando el campo electromagnético en un modo de frecuencia ω en una cavidad tal como lo hemos hecho hasta ahora y asumamos que la cavidad contiene precisamente n fotones, esto es, el campo se encuentra en el estado $|n\rangle$. Si intentamos calcular el valor esperado del campo eléctrico para dicho estado

$$\langle n|\hat{E}(z, t)|n\rangle = \mathcal{E}_0 \langle n|\hat{a} + \hat{a}^\dagger|n\rangle \sin(kz), \quad (2.32)$$

notemos que $\langle n|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0$ y que $\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle = 0$, con lo cual encontramos que el valor esperado del campo eléctrico, o el magnético, es cero cuando el campo se

encuentra en un estado puro de número de fotones (llamado también estados de Fock). Esto es cierto no importa que tan grande sea n . En ocasiones se dice que cuando el campo electromagnético contiene un gran número de fotones su estado se aproxima al caso clásico, esto claramente no es cierto para un estado número, ya que no importa que tan grande sea el número de fotones, el valor esperado del campo es siempre cero[†].

Continuando con el estado número, notemos que si calculamos el valor esperado del operador intensidad, es decir el cuadrado del campo eléctrico,

$$\langle n | \hat{E}^2(z, t) | n \rangle = \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a} | n \rangle, \quad (2.33)$$

$$= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n | 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 | n \rangle, \quad (2.34)$$

$$= 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.35)$$

este es diferente de cero incluso cuando no hay fotones presentes, y aumenta a medida que hay más cuantos de luz.

De tal manera que, si las fluctuaciones del campo están caracterizadas por la varianza* o por su raíz cuadrada (incertidumbre), $\Delta\hat{E}(z, t)$, entonces

$$(\Delta\hat{E}(z, t))^2 = \langle \hat{E}^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}(z, t) \rangle^2. \quad (2.36)$$

De lo cual

$$\Delta\hat{E}(z, t) = \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \sin(kz) \sqrt{n + \frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Como se podía esperar, la incertidumbre es diferente de cero, dependiente del número de fotones en el campo y de la posición en la cavidad. Sin embargo, el aspecto que más llama la atención de este resultado, es que la incertidumbre es diferente de cero para el campo incluso cuando $n = 0$, es decir para el estado de vacío $|0\rangle$. Un valor de incertidumbre diferente de cero implica que el campo eléctrico cuantizado exhibe fluctuaciones incluso cuando no hay fotones presente.

Como resultado de estas fluctuaciones, valores aleatorios del campo aparecen y desaparecen. En este sentido, la aleatoriedad intrínseca de la radiación nos permitirá proponer una interpretación al fotón desde un fundamento estocástico, en el que las fluctuaciones del vacío juegan un papel primordial. De este modo, el nombre de “vacío” es un tanto engañoso, ya que aunque no es un campo directamente observable, este tiene efectos indirectos que pueden ser detectados y es de hecho el responsable de fenómenos netamente cuánticos como la emisión espontánea, el corrimiento Lamb, *micromaser*, *quantum beats*, *quantum eraser*, entre otros muchos [31].

2.2.2. El fotón en la segunda cuantización

Aunque la palabra fotón es universal en la óptica cuántica, esta es comúnmente usada en varios sentidos diferentes. Una interpretación común es que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger aniquilan o crean un

[†]De hecho es otro tipo de estados del campo electromagnético conocidos como estados coherentes los que proveen la “mejor” aproximación cuántica a un estado clásico. Introducidos por primera vez por Glauber [30].

*Para cualquier operador \mathcal{A} , la varianza está determinada como $(\Delta\mathcal{A})^2 = \langle \mathcal{A}^2 \rangle - \langle \mathcal{A} \rangle^2$.

fotón

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.38)$$

De acuerdo a esta interpretación, la que otorga la cuantización del campo, el fotón es un cuanto de uno de los modos del campo electromagnético, y como tal este ocupa todo el volumen de cuantización. Según lo dicho, el fotón es una entidad integrada a la cavidad y no posee una identidad independiente, en consecuencia, intentar hablar sobre la localización del fotón resulta ilógico, en este sentido el fotón está en toda la cavidad.

Pese a que esta visión de fotones deslocalizados da resultados razonablemente correctos por ejemplo al explicar la interferencia, ella no provee una representación precisa del proceso físico en experimentos reales, en donde la palabra fotón es con frecuencia utilizada para describir un paquete de radiación relativamente localizado de energía $h\nu$. En estas situaciones, los fotones son siempre objetos multimodales ya que el análisis de Fourier (ver apéndice A.2) implica que la localización de un paquete de ondas requiere una superposición de modos.

A continuación analizamos las dos perspectivas más conocidas que intentan solucionar el problema planteado. Una de ellas interpreta a los fotones como cuantos multimodales con energía promedio y la otra involucra el concepto del colapso de la función de onda a uno de los estados de energía definida.

Fotones multimodales

Para explicar en qué consisten los fotones multimodales, consideremos que una fuente típica de luz actúa mediante emisión espontánea. El tiempo de una emisión es frecuentemente determinado por la estadística aleatoria de la fuente, pero una vez inicia, esta ocurre en un lapso de tiempo Δt y en consecuencia la energía de radiación está localizada en forma de un pulso o paquete de onda. De esta manera, la luz nunca tiene una frecuencia angular bien definida, sino que ω está distribuida en todo un rango de valores $\Delta\omega$ característico de la naturaleza del emisor. Los valores mínimos del tiempo de duración del pulso y rango de frecuencias están relacionados por la teoría del análisis de Fourier a través de sus incertidumbres (ver apéndice A.3).

Esta visión contempla la excitación de un pulso que está en cierto grado localizado en el tiempo e involucra composición de las infinitas ondas monocromáticas (modos) del sistema óptico. La separación frecuencial es generalmente pequeña en comparación con el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$, y es posible tratar la frecuencia ω como una variable continua*. De esta manera, se modifica el operador creación, \hat{a}^\dagger , que crea un fotón, $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$, por el correspondiente operador “creación de paquete de onda”

$$\hat{a}_\xi^\dagger = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega), \quad (2.39)$$

que crea un fotón multimodal

$$|1\rangle = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) |0\rangle, \quad (2.40)$$

*En su libro [32], Cohen-Tannoudji realiza un procedimiento muy interesante en donde describe los campos en el espacio recíproco espacial de Fourier, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$, evitando así considerar el campo en el espacio libre dentro de un cubo de volumen V que tiende a infinito.

en donde $\xi(\omega)$ es la amplitud espectral del paquete de ondas, y $\hat{a}^\dagger(\omega)$ es operador creación continuo sobre todos los modos.

Es así que intentar solucionar el conflicto anteriormente planteado desde esta perspectiva, consiste en que la integración sobre frecuencias remplaza la idea de un cuanto de energía $\hbar\omega$ en un modo discreto por un cuanto promedio $\hbar\omega_0$, en donde ω_0 es una frecuencia media del espectro del paquete de ondas $|\xi(\omega)|^2$. Algunos autores son de la opinión que el fotón es realmente policromático en virtud del principio de incertidumbre y no monocromático contrariamente a lo que muchos piensan, por ejemplo, Keller [33] dedica un capítulo de su libro a desarrollar el concepto de fotón policromático y considera al fotón de Einstein una versión *clásica* de fotón.

El colapso de la función de onda

Por otra parte, para analizar la interpretación del colapso de la función de onda, notemos que en general, cualquier estado del campo puede ser escrito como la superposición de estados propios de energía,

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (2.41)$$

en donde c_n es la amplitud compleja asociada al estado número de fotones, $|n\rangle$, que puede ser interpretada como la amplitud de probabilidad de que el oscilador asociado esté excitado en el n -ésimo estado propio de energía.

Sin embargo hay que recordar que esta combinación es válida solo para uno de los modos ω de la cavidad, dado que así se realizó la cuantización. Para generalizar a un estado de radiación multimodal se introduce un estado generalizado de Fock, escrito de la forma

$$|\{n\}\rangle = |n^{\omega_1}, n^{\omega_2}, n^{\omega_3}, n^{\omega_4}, n^{\omega_5}, \dots\rangle, \quad (2.42)$$

el cual representa un estado puro del campo en el que se tiene en cuenta el número de ocupación para cada uno de los modos de la cavidad, $\omega_m = c2\pi m/L$.

Nuevamente, como los estados de Fock forman una base ortonormal completa, siguiendo las reglas de la mecánica cuántica, podemos expresar cualquier estado del campo en términos de una superposición de estados de Fock o estados número, pero ahora teniendo en cuenta todos los modos de la cavidad, de la siguiente manera

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n\}} \xi(\{n\}) |\{n\}\rangle, \quad (2.43)$$

en donde $\xi(\{n\})$ es la amplitud de probabilidad normalizada que el campo se encuentre en el estado $|\{n\}\rangle$.

Observemos entonces que ocurre cuando tenemos un fotón en la cavidad, es decir $|\Psi\rangle = |1\rangle$. De acuerdo con la ecuación 2.43, el estado $|1\rangle$ se puede describir como una combinación lineal de estados $|\{1\}\rangle$, en donde

$$|\{1\}^{\omega_1}\rangle = |1^{\omega_1}, 0, 0, 0, 0, \dots\rangle, \quad (2.44)$$

$$|\{1\}^{\omega_2}\rangle = |0, 1^{\omega_2}, 0, 0, 0, \dots\rangle, \quad (2.45)$$

$$|\{1\}^{\omega_3}\rangle = |0, 0, 1^{\omega_3}, 0, 0, \dots\rangle, \text{ etc.} \quad (2.46)$$

Por lo tanto

$$|1\rangle = \sum \xi(\{1\})|\{1\}\rangle, \quad (2.47)$$

y dado que el operador creación que actúa sobre el campo de vacío crea un fotón en la frecuencia ω , $\hat{a}^\dagger(\omega)|0\rangle$, entonces

$$|1\rangle = \sum_{\omega} \xi(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega)|0\rangle. \quad (2.48)$$

Para describir el fotón en el espacio libre, se introduce el cambio de modos discretos a modos continuos [6,9], $\sum_k \rightarrow \int d\omega$, y por lo tanto el estado de un fotón es definido como

$$|1\rangle = \int d\omega \xi(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega)|0\rangle. \quad (2.49)$$

¿Qué se puede interpretar entonces de la ecuación 2.49 en términos del concepto de fotón? La interpretación del colapso de la función de onda consiste en que el estado del fotón no está en un estado de Fock definido, sino que tiene cierta probabilidad de estar en uno de los estados número $|n=1\rangle$ dentro de la superposición. Esto significa que el estado de un fotón no tiene una energía definida, sino que puede colapsar a una de ellas $\hbar\omega_m$ y a su estado correspondiente $|\{1\}^{\omega_m}\rangle$ con cierta probabilidad al momento de la detección.

Análisis

Notemos que las dos interpretaciones antes mencionadas, aunque diferentes, son matemáticamente equivalentes. Esto se entiende debido a que las interpretaciones deben estar en concordancia con el modelo de la cuantización del campo, que aunque pueda presentar falencias conceptuales que puedan conducir a interpretaciones diferentes, sin duda la QED ha capturado el formalismo adecuado que modela la radiación tal como lo demuestra su capacidad de describir los experimentos con gran exactitud.

Es cierto que las dos interpretaciones intentan unificar una visión de fotón localizado como un cuanto de energía $h\nu$, sin embargo consideramos que ambas conducen a algunas situaciones sin sentido. Por ejemplo, aunque físicamente más realista, un paquete de ondas el cual porta un cuanto de energía básico $\hbar\omega_0$, en el que ω_0 es un promedio de las frecuencias contenidas en su espectro, implicaría que en un experimento en el que un fotón interactúa con un átomo, como en el efecto fotoeléctrico, el átomo podría en principio interactuar con una frecuencia diferente a la frecuencia ω_0 , puesto que todo el espectro está presente dentro del paquete de ondas y ninguno tiene preferencia sobre otro, es decir que la diferencia de energía del electrón excitado podría ser $\Delta E \neq \hbar\omega_0$. Si esto es así, entonces un átomo que es excitado por un fotón de energía $\hbar\omega_0$ podría emitir un fotón de energía diferente al decaer, ya que la interacción puede no realizarse a la frecuencia media sino a una de las frecuencias del espectro. Aún más extraño si consideramos los modos discretos dentro de una cavidad; si la combinación de los modos genera el paquete de ondas, entonces la frecuencia promedio ω_0 puede ni siquiera ser una de las frecuencias promediadas, es decir puede ser una frecuencia que no pertenezca al espectro de la cavidad, lo cual carece de sentido.

En contraste, la interpretación del colapso de la función de onda no presenta ese problema, ya que la interacción tiene cierta probabilidad de producirse con una única frecuencia del espectro. Sin embargo, el colapso de la función de onda implica que el estado final del fotón es un estado $|1\rangle^\omega$, estado de energía $\hbar\omega$. El estado puro de un fotón, como se pudo ver en la cuantización, es un estado deslocalizado espacialmente, se extiende en toda la cavidad (fig. 2.1), entonces si el fotón es una combinación de estados que se extienden indefinidamente ¿por qué no se puede detectar el fotón en cualquier región del espacio? Es decir, si un detector se ubica en cierta distancia z de la fuente y se activa en un tiempo $t \neq z/c$, es decir, ya sea cuando el fotón no ha llegado al detector o cuando lo ha sobrepasado (ver fig.2.2), en principio la probabilidad de detectarlo sería diferente de cero ya que hay cierta probabilidad de que colapse a un estado número, y como este se extiende en todo el espacio, se podría detectar independientemente de que el detector haya sido ubicado un tiempo posterior al transcurso del fotón. Claramente esto no ocurre experimentalmente, en cuyo caso el fotón nunca es detectado.

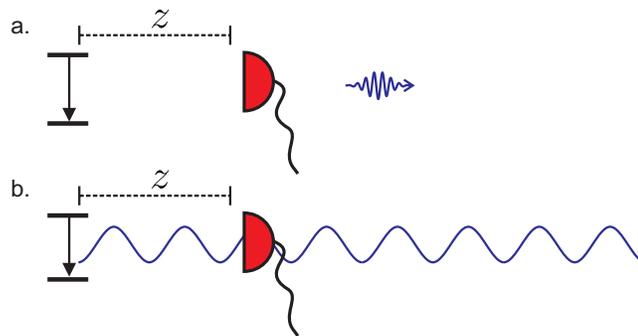


Figura 2.2: Un fotón como superposición de estados número de fotones ubicado a una distancia $d > z$ (a), puede colapsar a un estado número con cierta probabilidad y ser observado por un detector en una posición z (b). Esto no ocurre experimentalmente.

Por estas razones presentamos una versión alternativa a la interpretación del estado de un fotón, la cual se explicará desde el formalismo cuántico basándonos en premisas experimentales que se deben cumplir y que, al igual que las dos interpretaciones anteriores, conserva la estructura matemática que predice la teoría cuántica (4). Antes, para efectos de esta trabajo pondremos de manifiesto una relación existente entre el operador de campo generalizado de Maxwell y los operadores escalera.

2.2.3. Los operadores escaleras y el campo generalizado de Maxwell

Las ideas de la cuantización en cavidades pueden ser extendidas a sistemas ópticos abiertos, en donde no hay una cavidad identificable, pero donde la configuración experimental tiene una extensión finita determinada por las fuentes, las secciones transversales del haz, y los detectores [6, 7, 9]. Las ondas estacionarias asociadas a cada modo de la cavidad cerrada, se rempazan por ondas viajeras que se propagan de fuentes a detectores. Uno de los sistemas ópticos más simple a considerar se muestra en la fig. 2.2.3 y consiste en un divisor de haz. El cual es uno de los

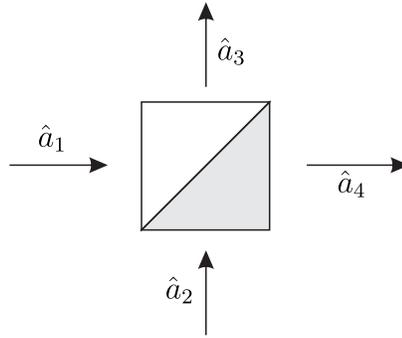


Figura 2.3: Representación esquemática de un divisor de haz óptico que muestra la notación para los operadores de campo en las dos secciones de entrada y las dos de salida.

componentes centrales en el estudio de la naturaleza cuántica de la luz. Un experimento que distingue entre la naturaleza clásica y cuántica de la luz consiste en una fuente que emite luz hacia una de las secciones de entrada y que es dirigida por el divisor de haz hacia los detectores ubicados en las secciones de salida. Los modos espaciales relevantes al sistema en este ejemplo constituyen una excitación conjunta de la sección de entrada elegida y de ambas secciones de salida.

Los operadores \hat{a}_i en la figura 2.2.3 son los operadores aniquilación de fotones para las secciones de entrada ($i = 1, 2$) y salida ($i = 3, 4$). Sin entrar a resolver el problema del divisor de haz, la idea básica es que los operadores aniquilación esencialmente representan las amplitudes de los campos electromagnéticos cuánticos en las cuatro secciones del divisor de haz, los cuales son análogos a las amplitudes clásicas complejas [27].

Aunque en óptica cuántica es usual considerar a \hat{a} como el “campo”, realmente los operadores de campo eléctrico en las cuatro secciones son proporcionales a la suma de \hat{a}_i y su Hermítico conjugado \hat{a}_i^\dagger (ecuación 2.28), con lo cual no es muy preciso describirlo como tal. Sin embargo, una relación un poco más clara entre los operadores escalera y el campo electromagnético se puede hacer si consideramos, en vez del campo eléctrico y magnético por separado, el campo generalizado de Maxwell o vector RS.

Notemos que el operador del campo generalizado de Maxwell se escribe de la forma $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + ic\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, sin embargo en nuestro trabajo estamos interesados solo en su dependencia temporal, $\mathbf{F}(t)$, puesto que es la dependencia temporal la que constituye el paquete de ondas. El operador campo generalizado se puede escribir teniendo en cuenta las ecuaciones 2.23 y 2.24 de la forma

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \hat{\mathbf{E}}(t) + ic\hat{\mathbf{B}}(t), \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{q}(t)\mathbf{e}_1 + ic\left(\frac{1}{c^2k}\right)\hat{p}(t)\mathbf{e}_2 \right], \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega} [\omega\hat{q}(t)\mathbf{e}_1 + i\hat{p}(t)\mathbf{e}_2]. \quad (2.52)$$

Esta última expresión toma una forma similar al operador aniquilación pero donde aparecen

los vectores unitarios, \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , asociados a la dirección de polarización del campo eléctrico y magnético respectivamente. En este sentido pensamos que es posible realizar una asociación entre los operadores escalar y el operador RS si consideramos las variables canónicas asociadas a la cuantización de forma vectorial.

Para ello definimos la relación de conmutación entre los operadores posición y momento vectorialmente de la forma

$$[\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{q}} \otimes \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}} = i\hbar \hat{\mathbf{1}}, \quad (2.53)$$

en donde los operadores $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$ son vectores cuyas componentes son operadores, los cuales de ahora en adelante llamaremos vectores operador. Es decir $\hat{\mathbf{1}}$ es un vector operador identidad que al actuar sobre un estado genera el mismo estado..

Proposición 1. Sea $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ dos vectores operador de tres componentes $(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ y $(\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3)$ respectivamente. Definimos el conmutador entre ellos en la forma

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} [\hat{A}_1, \hat{B}_1] + [\hat{A}_1, \hat{B}_2] + [\hat{A}_1, \hat{B}_3] \\ [\hat{A}_2, \hat{B}_1] + [\hat{A}_2, \hat{B}_2] + [\hat{A}_2, \hat{B}_3] \\ [\hat{A}_3, \hat{B}_1] + [\hat{A}_3, \hat{B}_2] + [\hat{A}_3, \hat{B}_3] \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

y el producto entre dos vectores operador en la forma

$$\hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_1 \hat{B}_2 + \hat{A}_1 \hat{B}_3 \\ \hat{A}_2 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2 + \hat{A}_2 \hat{B}_3 \\ \hat{A}_3 \hat{B}_1 + \hat{A}_3 \hat{B}_2 + \hat{A}_3 \hat{B}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

De manera que el producto entre dos vectores operador genera otro vector operador y dos vectores operador serán conmutativos únicamente si todas las componentes del primer vector conmutan con todas las componentes del segundo.

La suma está definida componente a componente de la forma

$$\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 + \hat{B}_2 \\ \hat{A}_3 + \hat{B}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Se pueden verificar las siguientes propiedades

- Asociación

$$(\hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{B}}) \otimes \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}} \otimes (\hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{C}}) \quad (2.57)$$

- Distribución

$$\hat{\mathbf{A}} \otimes (\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}}) = \hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{C}} \quad (2.58)$$

Nuestro interés está en definir ahora los los operadores creación y aniquilación en una forma vectorial tal que

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{\mathbf{q}}(t) + i\hat{\mathbf{p}}(t)), \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t) = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{\mathbf{q}}(t) - i\hat{\mathbf{p}}(t)). \quad (2.60)$$

Y por lo tanto los campos eléctrico (Ec. 2.23) y magnético (Ec. 2.24) toman una forma intrínsecamente vectorial con los operadores escalar definidos anteriormente,

$$\hat{\mathbf{E}}(z, t) = \mathcal{E}_0(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \sin(kz), \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i}(\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^\dagger) \cos(kz), \quad (2.62)$$

en donde $\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}\mathbf{e}_1$ y $\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}\mathbf{e}_2$ y los vectores unitarios \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son dos vectores perpendiculares asociados a la dirección de polarización del campo eléctrico y magnético respectivamente. En este caso particular $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$.

Notemos que

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger] = (2\hbar\omega)^{-1} \{(\omega\hat{\mathbf{q}} + i\hat{\mathbf{p}}) \otimes (\omega\hat{\mathbf{q}} - i\hat{\mathbf{p}}) - (\omega\hat{\mathbf{q}} - i\hat{\mathbf{p}}) \otimes (\omega\hat{\mathbf{q}} + i\hat{\mathbf{p}})\}, \quad (2.63)$$

$$= (2\hbar\omega)^{-1} \{-i\omega[\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}] - i\omega[\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}]\}, \quad (2.64)$$

$$= (2\hbar\omega)^{-1} \{\hbar\omega + \hbar\omega\}, \quad (2.65)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger] = \hat{\mathbf{1}}, \quad (2.66)$$

y que además, dada la relación de conmutación 2.66, el operador Hamiltoniano cumple

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.67)$$

Podemos observar que la acción del operador $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ sobre un estado de Fock, $|n\rangle$, efectivamente aumenta la energía electromagnética en un cuanto $\hbar\omega$,

$$\hbar\omega \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes \hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes \hat{\mathbf{a}} \right) |n\rangle = E_n \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle, \quad (2.68)$$

$$\hbar\omega \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes [\hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{1}}] \right) |n\rangle = E_n \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle, \quad (2.69)$$

$$\left(\frac{\hbar\omega}{2} \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hbar\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes \hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hbar\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger \right) |n\rangle = E_n \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle, \quad (2.70)$$

$$\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger \otimes \hat{\mathbf{a}} \right) \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle, \quad (2.71)$$

en donde hemos utilizado la propiedad de asociación 2.57.

De manera que observando las expresiones para el operador RS, $\mathbf{F}(t)$ (2.52), y el vector operador aniquilación, $\hat{\mathbf{a}}(t)$ (2.59), notamos que hay una equivalencia entre ellas, y que en concordancia se podría argumentar que el operador aniquilación puede entenderse como el análogo cuántico del campo, pero no del campo eléctrico, sino del campo generalizado de Maxwell $\mathbf{F}(t) = \mathbf{E}(t) + ic\mathbf{B}(t)^*$. El vector operador creación de fotones, $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t)$, estaría relacionado con el Hermítico conjugado del

*En un fotón, el campo eléctrico y magnético son elementos conjugados, en donde no se puede entender la existencia de uno sin el otro. En este sentido, la relación del operador aniquilación con el campo generalizado es interesante, puesto que es precisamente este campo el que los fusiona como una sola entidad.

operador $\hat{\mathbf{F}}(t)$, $\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{E}(t) - ic\mathbf{B}(t)$. Por lo tanto esta relación entre el vector RS y los operadores escalar proporcionarían un mecanismo de asociación entre un modelo de segunda cuantización y uno de primera cuantización. De manera que cobra sentido para nuestro trabajo que cuando construimos un paquete de ondas desde la primera cuantización hacemos uso del vector RS y cuando lo hacemos desde una segunda cuantización usamos el operador creación, además, puesto que en la construcción del paquete de ondas, el operador creación siempre actúa sobre el estado de vacío, en los capítulos posteriores desarrollaremos la idea de que las funciones armónicas del vector RS podrían ser las funciones de onda que mejor se ajustan a la descripción del campo de vacío.

Capítulo 3

Fotones como composición del campo de vacío

“La ciencia no conoce su deuda a la imaginación” – Ralph W. Emerson.

Por el precio de trabajar con campos complejos, el uso del formalismo de Riemann-Silberstein simplifica de manera significativa la descripción del campo electromagnético tanto en el dominio clásico como cuántico. Sin embargo, cuando de fotones se trata, pensamos que esta representación compleja no solo simplifica la descripción cuántica, sino que además es la representación adecuada y natural para entender verdaderamente qué es un fotón. Esencialmente, porque a nivel fundamental el campo eléctrico y magnético deben ser entidades acopladas, es inconcebible entender el fotón como campo eléctrico y magnético por separado. Esta concepción es lograda dentro de este formalismo de campo generalizado, además de las notables características mencionadas anteriormente, tales como que este campo es solución de una expresión que toma la forma de una ecuación mecanocuántica relativista y que su solución posee las características adecuadas para ser considerada una función de onda del fotón.

Inicialmente, en este capítulo describiremos las propiedades básicas en el formalismo de Riemann-Silberstein para el campo electromagnético. Puesto que cada solución de la ecuación 2.17 es una solución de la ecuación de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1)$$

estudiaremos en particular las soluciones como ondas armónicas, y basados en el procedimiento estándar del análisis de Fourier, se construirá el paquete de ondas que describe la función de onda de un fotón.

Es conocido en el electromagnetismo clásico, que las soluciones como ondas armónicas no existen en la naturaleza. Son soluciones idealizadas que actúan como funciones base para construir las señales finitas que realmente se obtienen experimentalmente. Sin embargo, como veremos posteriormente en este capítulo, nuestra propuesta consiste en que las ondas armónicas presentan

algunas propiedades que en el marco de la electrodinámica cuántica, pueden ser encontradas en uno de sus resultados principales: el vacío cuántico electromagnético.

3.1. Particularidades del formalismo Riemann-Silberstein

El vector complejo de Riemann-Silberstein puede ser construido considerando ya sea la suma del campo eléctrico y magnético, tal como lo hicimos anteriormente, o considerando la resta de ambos campos sin perder validez. De manera general se puede escribir que

$$\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \pm ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)), \quad (3.2)$$

con $\mathbf{F}_+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_+^*(\mathbf{r}, t)$ y en donde la constante $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}$ se introduce para que la energía electromagnética clásica

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)) dV, \quad (3.3)$$

tome la forma característica

$$H = \int \mathbf{F}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) dV. \quad (3.4)$$

De la anterior expresión se nota que el Hamiltoniano clásico conduce directamente al valor medio apropiado en la mecánica cuántica de la energía para la función de onda del fotón [15, 33].

En mecánica cuántica las soluciones estacionarias de la ecuación de onda juegan un rol significativo, puesto que a partir de ellas se construyen todas las soluciones. Las soluciones estacionarias se obtienen al separar la variable temporal y resolver la ecuación de valores propios resultante. En el caso de la ecuación de onda para fotones 2.17, la ecuación de valores propios se escribe

$$c \left(\vec{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hbar\omega \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Observemos que si tomamos en cuenta la elección del signo en la definición del vector RS, la expresión para las ecuaciones mecano-cuánticas toman la forma

$$i\hbar\partial_t \mathbf{F}_+ = c \left(\vec{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \mathbf{F}_+, \quad (3.6)$$

$$i\hbar\partial_t \mathbf{F}_- = -c \left(\vec{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \mathbf{F}_-, \quad (3.7)$$

Si asumimos una energía positiva, se lee de la expresión anterior que la proyección del spin en la dirección del momento es positiva. Esta cantidad se conoce con el nombre de helicidad. De manera que la elección del signo en el campo vectorial, es equivalente a elegir helicidad positiva o negativa, la cual corresponde a una polarización derecha e izquierda respectivamente.

Este resultado conduce a una conclusión interesante. De acuerdo a la mecánica cuántica, las soluciones con frecuencias positivas corresponden a las partículas, y aquellas con frecuencias negativas a las antipartículas. Esto quiere decir que las partes frecuenciales positivas y negativas de una misma solución describen dos entidades físicas muy diferentes. Sin embargo para los fotones no es así, puesto que las energías negativas pueden ser atribuidas a la polarización del fotón (o a la helicidad)[†], entonces la información contenida en la parte negativa de una solución debe ser la misma que la contenida en la positiva. Esto es, los fotones no tienen antipartículas, o de otra forma, los antifotones son idénticos a los fotones. En física clásica, la parte frecuencial positiva de una solución se conoce como señal analítica (ver apéndice A.1). En nuestro caso denotaremos $\mathbf{F}_{\pm}^{(+)}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{F}_{\pm}^{(-)}(\mathbf{r})$ a la solución de frecuencias positiva y negativa respectivamente.

Como se mencionó en la introducción, el campo generalizado de Maxwell es solución de la ecuación de onda [34]. Por lo tanto, de acuerdo al análisis de Fourier, una representación integral de $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ conduce a una expansión de ondas planas monocromáticas de la forma

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{F}(\mathbf{k}; \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k}, \quad (3.8)$$

en donde hemos considerado la parte frecuencial positiva de la solución[‡] y $\mathbf{F}(\mathbf{k}; \omega)$ corresponde a la amplitud compleja asociada a cada modo de la expansión.

Notemos que una onda plana asociada a uno de los modos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{k}; \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.9)$$

también constituye una solución a la ecuación de onda 3.1. Para nuestro análisis, estamos interesados únicamente en la dependencia temporal de \mathbf{F} . Consideremos entonces la integral de Fourier

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}; \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.10)$$

Una componente del paquete de ondas describe una onda monocromática de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}; \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.11)$$

Esta función indica que para una posición fija, \mathbf{r} , la amplitud del campo oscila de manera armónica a la cual se le puede asociar una frecuencia angular ω .

Observemos que la base de la expansión son ondas armónicas (sinusoidales), las cuales por definición son funciones monocromáticas que tienen una extensión temporal infinita. Por ende, 3.11 no puede representar un campo real en la naturaleza dado que las señales y funciones de

[†]Nótese que este hecho es consecuencia de que los fotones no poseen masa en reposo, si tuvieran masa en reposo, este concepto no aplica tal como ocurre con la ecuación de Dirac para electrones.

[‡]En su artículo, Birula [15], considera a $\mathcal{F}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_+^{(+)} \\ \mathbf{F}_-^{(+)} \end{bmatrix}$ como la verdadera función de onda del fotón, puesto que involucra ambas helicidades, y con solo la parte positiva es suficiente para tomar en cuenta toda la información de la función.

onda que vemos en la vida real tienen un principio y un final, en otras palabras, en la naturaleza la monocromaticidad pura no existe como tal. Sin embargo cada una de estas señales pueden ser razonadas a partir de la composición de un infinito número de estas ondas armónicas para formar un paquete de ondas. Lo que ocurre es que al sumar las ondas sinusoidales, estas exactamente se cancelan en todo tiempo, excepto durante el tiempo en el que la señal está presente. Por lo tanto, todas las señales que vemos en la vida real pueden ser concebidas como una composición de un infinito número de ondas sinusoidales que han estado siempre presente desde el inicio del tiempo y que continuarán existiendo por toda la eternidad.

En nuestro trabajo, proponemos que la característica anteriormente mencionada sobre las ondas armónicas, puede ser en principio atribuida al campo de vacío electromagnético. Esta hipótesis, nos permite adoptar una perspectiva diferente en la descripción de los fotones, puesto que esto nos permite establecer vínculos entre un paquete de ondas de radiación y el estado cuántico de un fotón. La principal de ellas es que si un fotón es una composición de ondas armónicas monocromáticas entonces el estado de dicho fotón se describe como una composición de estados de vacío.

3.2. Propiedades del campo de vacío

Nuestra asunción se basa en la existencia de un campo de vacío electromagnético que se expande en todo el espacio, que es aleatorio y que además contiene todo el espectro de radiación. De manera que a cada una de las componente espectrales del campo vacío se le pueda asociar una onda monocromática de amplitud y fase aleatorias.

De acuerdo a la electrodinámica cuántica, la energía para un modo del estado de vacío se calcula a partir del valor esperado del Hamiltoniano 2.30, dando como resultado que

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (3.12)$$

Esta es la energía asociada a las fluctuaciones del campo de vacío, y aunque se puede argumentar que la energía no fluctúa, debemos observar que este valor de la energía coincide con la integral de volumen del valor esperado del cuadrado del campo eléctrico para el estado de vacío [3].

Demostración. Clásicamente la densidad de energía electromagnética se expresa

$$u = \epsilon_0 \mathbf{E}^2, \quad (3.13)$$

y por lo tanto la integral de volumen determina la energía contenida en el campo electromagnético en un volumen V ,

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \int \mathbf{E}^2 dV. \quad (3.14)$$

Introduciendo el valor esperado del cuadrado del campo eléctrico para el campo de vacío en la

anterior integral, y teniendo en cuenta la expresión 2.35, se tiene que

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \int \langle 0 | \hat{E}^2(z, t) | 0 \rangle dV \quad (3.15)$$

$$= \epsilon_0 \int \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \sin^2(kz) dV, \quad (3.16)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{A \cdot L} \int_0^L \sin^2(kz) A dz, \quad (3.17)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{L} \cdot \frac{1}{2} L, \quad \text{Condiciones de frontera de la cavidad, } \sin(kL) = 0, \quad (3.18)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (3.19)$$

□

Este resultado surge como consecuencia de las consideraciones que se postulan sobre los campos al momento de realizar la cuantización, tal como que el “campo eléctrico” por fotón tome la forma $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$, puesto que la energía electromagnética de un campo clásico de dicha amplitud da como valor $\hbar\omega$, la energía de un fotón. En su libro, Aspect [7] menciona que la elección de la amplitud del campo es un grado de libertad que se elige para que el conmutador entre el operador aniquilación y creación sea igual a uno. Desde esta perspectiva es interesante ver la razón de que el Hamiltoniano del campo aumente o disminuya en valores enteros de $\hbar\omega$.

Por lo tanto, dado que el Hamiltoniano y la integral de volumen del valor esperado del cuadrado del campo de vacío coinciden en su energía, esto permitiría argumentar que no solo el campo de vacío fluctúa, sino que también lo hace su energía, es solo que el Hamiltoniano arroja como resultado el valor medio de energía electromagnética, $\frac{\hbar\omega}{2}$. En otras palabras, la expresión $\langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle$ puede ser entendida de alguna manera como una densidad de energía electromagnética. Y puesto que existen fluctuaciones en el campo de vacío, entonces existen fluctuaciones en esta densidad de energía. Dichas fluctuaciones se dan alrededor de un valor medio de energía $\hbar\omega/2$ el cual es el valor esperado de la energía calculado a partir del Hamiltoniano del sistema.

Un comportamiento similar es también encontrado en las ondas armónicas, en donde el valor medio o promedio temporal del cuadrado de una función sinusoidal de la forma $A \sin(\omega t)$ es $A^2/2$. Estas características que comparten las ondas armónicas y el vacío cuántico electromagnético son las razones que nos hace pensar que las ondas armónicas que componen un paquete de ondas son las funciones adecuadas para la descripción física del campo de vacío. Lo cual indica que posiblemente la solución trivial de las ecuaciones de Maxwell, las ondas armónicas, son el análogo clásico del campo de vacío de la QED, el cual no es físicamente medible, así como una onda armónica no es realizable en la naturaleza.

3.3. El campo de vacío como los armónicos de Fourier

Es conocido de algún tiempo, que el decaimiento espontáneo de un átomo no es necesariamente una propiedad invariable del átomo, sino que esta puede ser modificada y controlada mediante

las propiedades de la radiación electromagnética. Sin embargo, resulta interesante que la emisión espontánea se puede inhibir cuando se eliminan los modos de vacío a las frecuencias de transición [35–38]. Es decir, un átomo no emite radiación mediante emisión espontánea si no existe un campo de vacío a la frecuencia de transición para estimularlo* .

Esta es una conclusión inequívoca de que el campo de vacío y la luz están ligados, y no solo eso, sino que podríamos ir aún más allá y pensar que la luz está realmente compuesta de dicho campo. Si el campo de vacío es el componente de la luz, entonces un átomo excitado dentro de una cavidad a la cual se le ha eliminado la frecuencia de transición no tiene de donde “tomar la radiación prestada” para poder emitir.

Hemos tratado de poner de manifiesto todas estas observaciones partiendo de los conceptos fundamentales de la primera y segunda cuantización de la luz. Siguiendo en la misma línea, planteamos la siguiente analogía: las ondas armónicas es al campo de vacío lo que los paquetes de ondas son a los fotones. Es el campo de vacío el componente fundamental de los fotones. Esto es, si $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ describe la función de onda del fotón, esta se escribe de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}; \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.20)$$

En tanto que el estado de un fotón, y teniendo en cuenta el resultado obtenido en la sección 2.2.3, se describe como un paquete de ondas en la segunda cuantización de la forma

$$|\gamma\rangle = \int d\omega \xi(\omega) \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\omega) |0\rangle. \quad (3.21)$$

La escritura en negrita de los operadores escalera hace referencia a que su acción está asociada al aumento o disminución de la energía del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, es decir del campo electromagnético en todo el sentido de la palabra, así se pueden evitar ambigüedades al pensar en el campo eléctrico y magnético como entidades independientes del fotón. Esta forma de ver el problema permitiría apreciar la cuantización del campo desde otra perspectiva, siempre pensando en campo electromagnético como una sola entidad y de esta manera no llevar la analogía con el oscilador mecano-cuántico tan lejos.

Continuando con nuestro argumento previo, puesto que sería el campo de vacío el responsable de la existencia de los fotones, que podemos preguntarnos en qué forma el campo de vacío constituye el fotón. Notemos que si comparamos las dos expresiones 3.20 y 3.21 parece haber un inconveniente, ya que el estado $\hat{\mathbf{a}}^\dagger |0\rangle$ es el estado de un fotón $|1\rangle$ y no un estado de vacío. Sin embargo, este estado $\hat{\mathbf{a}} |0\rangle$ no está solo, sino que tiene unos coeficientes que lo acompañan. Estos coeficientes cumplen un papel fundamental en la construcción del estado del fotón, el cual estudiaremos en el capítulo siguiente. Consideraremos que el vacío es un campo fluctuante e introduciremos el concepto de estado de vacío congelado a partir de los conceptos estudiados hasta ahora.

* Así como se puede inhibir completamente, el decaimiento de un átomo se puede intensificar si se eliminan todos los modos del vacío excepto a la frecuencia de transición [39].

Capítulo 4

Naturaleza estocástica de la luz: ¿Qué es el fotón?

“Si quieres encontrar los secretos del universo, piensa en términos de energía, frecuencia y vibración” – Nikola Tesla.

Se debe resaltar que el formalismo cuántico (o sus formalismos equivalentes como espacios de Hilbert, integrales de camino de Feynman, funciones de Wigner, etc.) provee un conjunto de reglas matemáticas cuyos cálculos coinciden cuantitativamente con los experimentos de forma impresionante. No obstante, se paga un precio en cuanto a que este formalismo no ofrece una clara imagen del micromundo. Desde esta perspectiva, con la búsqueda de una descripción para el fotón que procure esclarecer un poco la física escondida, intentamos proveer una nueva noción que, basada en argumentos heurísticos proporcionados por los experimentos, permita explicar muchos fenómenos ópticos tanto cuantitativamente como cualitativamente.

La clave para nosotros la encontramos al involucrar el carácter aleatorio de la radiación electromagnética al concepto de fotón. Es conocido, que el proceso de emisión de una fuente no es determinista. Existen muchos factores que generan fluctuaciones en la fuente; el ruido térmico o radiaciones de fondo en la cual está inmersa la fuente, hacen que los átomos vibren de forma indeterminada y que consecuentemente la radiación electromagnética tenga en principio un grado de aleatoriedad inherente. Este tipo de situaciones se estudian dentro de una teoría estocástica de la radiación, la cual consideramos necesaria para relacionar los fotones con las fluctuaciones del campo de vacío, dado que es inevitable que una fuente, por más idealizada que fuese, no esté inmersa en el campo de vacío. Por consiguiente, sería precisamente este campo el encargado de otorgarle el mínimo grado de aleatoriedad posible a la radiación.

Un primer paso en el estudio de la naturaleza de los fotones se realizó en el trabajo de Calderón [40], cuyos resultados son nuestro punto de partida para ir en una nueva dirección introduciendo la teoría de los procesos aleatorios al concepto de fotón. Mostraremos que, tomando en cuenta las fluctuaciones del vacío, cada fotón generado por una fuente puede ser considerado como un proceso aleatorio independiente, el cual tiene asociada una densidad espectral de potencia “instantánea” que caracteriza un paquete de ondas. Introducimos el concepto de estado de la

fuelle, el cual es construido a partir de una superposición de estados de un fotón, en donde la energía de cada uno de los estados de la superposición está asociada a la portadora de un paquete de ondas. Dichas portadoras constituirán el espectro de la fuente para un ensamble de fotones.

4.1. Aleatoriedad en el proceso de emisión

La teoría cuántica de la radiación asume que la luz es emitida o absorbida cuando un átomo realiza un salto entre dos estados cuánticos. Si el átomo está en un estado $|b\rangle$ con energía \mathcal{E}_b , este puede decaer a un estado, $|a\rangle$ de menor energía \mathcal{E}_a , emitiendo un fotón de energía $h\nu = \Delta\mathcal{E}$ (Fig. 4.1); proceso conocido como emisión espontánea.

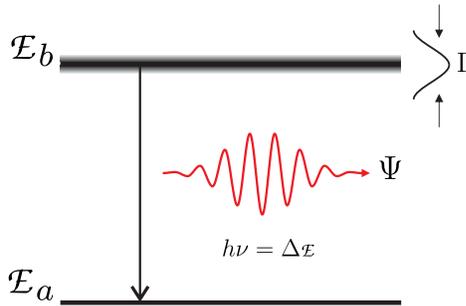


Figura 4.1: Un átomo de dos niveles, con ancho de banda Γ en el nivel superior, espontáneamente emite un fotón. Las fluctuaciones del campo de vacío sería la causa que el electrón en el estado excitado decaiga al estado fundamental, en un tiempo característico τ .

Si la transición electrónica es realizada un gran número de veces, el correspondiente cambio de energía del átomo no varía siempre de la misma forma. Este comportamiento es evidenciado mediante la observación de la función de densidad espectral de potencia, la cual es una medida de la distribución de la energía electromagnética para un rango de frecuencias determinado y que constituye lo que se conoce como el espectro de emisión de la fuente [8, 41, 42]. Una interpretación cuántica de esta situación implica que la energía, y por lo tanto su frecuencia, de cada fotón emitido es diferente, y que además, el espectro de la fuente constituye una medida de la probabilidad de que un fotón con cierta energía sea emitido. La densidad espectral de potencia de la fuente debidamente normalizada, se conoce con el nombre de perfil de línea espectral, y está definida en la forma [41, 42]

$$g_\nu(\nu - \nu_0) = \frac{S(\nu)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu}, \quad (4.1)$$

en donde $S(\nu)$, corresponde a la densidad espectral de potencia de la fuente.

Aunque el proceso de emisión espontánea sugiere que el decaimiento de un átomo es un evento fortuito, lo cierto es que la teoría cuántica de la radiación presenta una justificación a este fenómeno. La emisión espontánea realmente es en cierto sentido una emisión estimulada, en donde el campo que estimula el decaimiento son las fluctuaciones del vacío [6, 7, 33]. Este campo aleatorio que sería el responsable, entre otros fenómenos, del decaimiento “espontáneo” de un átomo no se

puede ignorar y por ende entendemos que juega un papel fundamental en la creación del fotón, principalmente el hecho de que este campo es un campo intrínsecamente aleatorio, y que de igual manera, este debe otorgarle al fotón un carácter estocástico.

Si consideramos que la radiación electromagnética debe ser acordemente tratada tomando en cuenta su fundamento aleatorio, en estas situaciones el análisis espectral debe realizarse mediante técnicas matemáticas diferentes apropiadas. En tales casos, las componentes frecuenciales individuales están representados en términos de su contenido potencial o densidad espectral de potencia, la cual recibe un tratamiento estadístico dentro de los procesos estocásticos [41–43].

En la teoría de procesos aleatorios o estocásticos las medidas son funciones continuas del tiempo. Tal es el caso del campo eléctrico $U(t)$, cuyas funciones están definidas dentro de cierto intervalo de tiempo. Una medida de un proceso aleatorio ω -ésimo, ${}^\omega U(t)$, produce una señal en el tiempo que debe ser medida repetidamente para cada valor del tiempo con el fin de especificar un proceso completamente. Una colección de estas señales, $E\{{}^\omega U(t)\}$ se denomina ensamble y cada señal del ensamble, ${}^1U(t)$, ${}^2U(t)$, ${}^3U(t)$, ..., ${}^\omega U(t)$, llamada muestra, puede ser tratada de forma determinista, como se muestra en la figura 4.2.

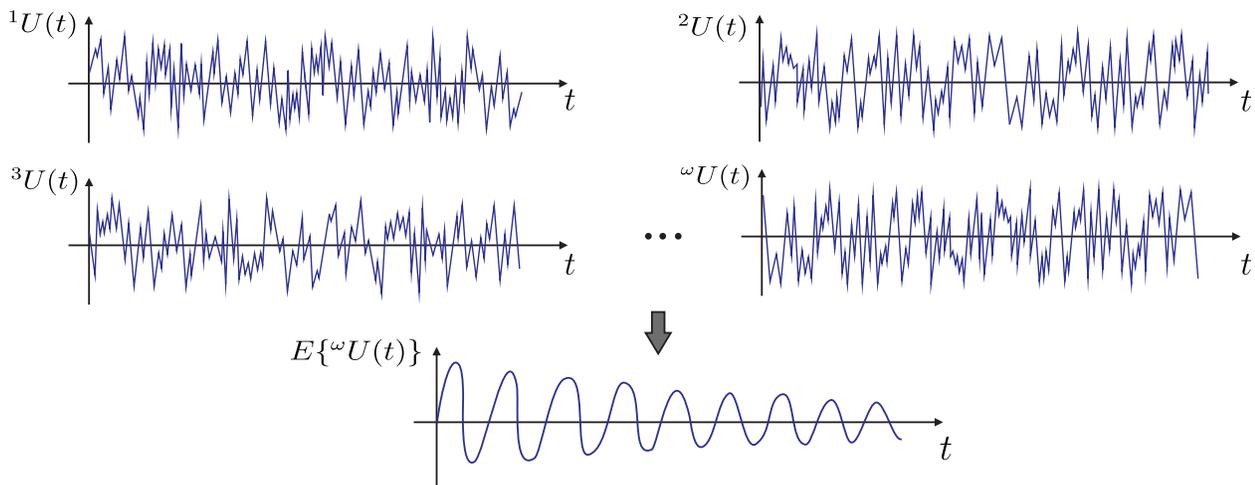


Figura 4.2: Una señal analítica aleatoria no estacionaria $U(t)$, solo la parte real $Re\{U(t)\}$ es mostrada.

Es decir, si se realiza una medida del campo eléctrico para el tiempo t , el valor obtenido tiene asociada una señal diferente cada vez que realizo el mismo procedimiento incluso si es para el mismo tiempo t . Esto es, alguna vez el valor medido estará asociado a la señal ${}^1U(t)$, otra vez el valor estará asociado a la señal ${}^2U(t)$, y así sucesivamente. Este comportamiento define lo que se conoce como un proceso aleatorio*.

La densidad espectral de potencia (PSD, por sus siglas en inglés), es una función matemática que proporciona información sobre cómo está distribuida la energía de dicha señal sobre las distintas frecuencias de las que está formada, es decir su espectro. Para una señal determinista, la

*A diferencia de una variable aleatoria ξ , en la que una medida produce un valor para dicha variable, y ξ es estadísticamente especificada cuando se mide un gran número de veces y se puede construir una función de densidad de probabilidad [41].

PSD se encuentra determinada por la transformada de Fourier de la señal [41, 42], sin embargo para un proceso estocástico la definición de la PSD es un poco más complicada. Dada una PSD ω -ésima, ${}^\omega S(\nu)$, para un proceso aleatorio, ${}^\omega U(t)$, definimos la PSD del proceso como el promedio de ensamble de todas las PSDs de las señales de muestra “instantáneas”, $E\{{}^\omega S_U(\nu)\}$, como se muestra en la figura 4.3. En donde cada una de las PDS “instantáneas”^{*} está definida por [41]

$${}^\omega S(\nu) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{F}[{}^\omega U_X(t)]|^2}{T}, \quad (4.2)$$

y ${}^\omega U_X(t)$ es el proceso aleatorio truncado $U(t)\Pi(t/T)$.

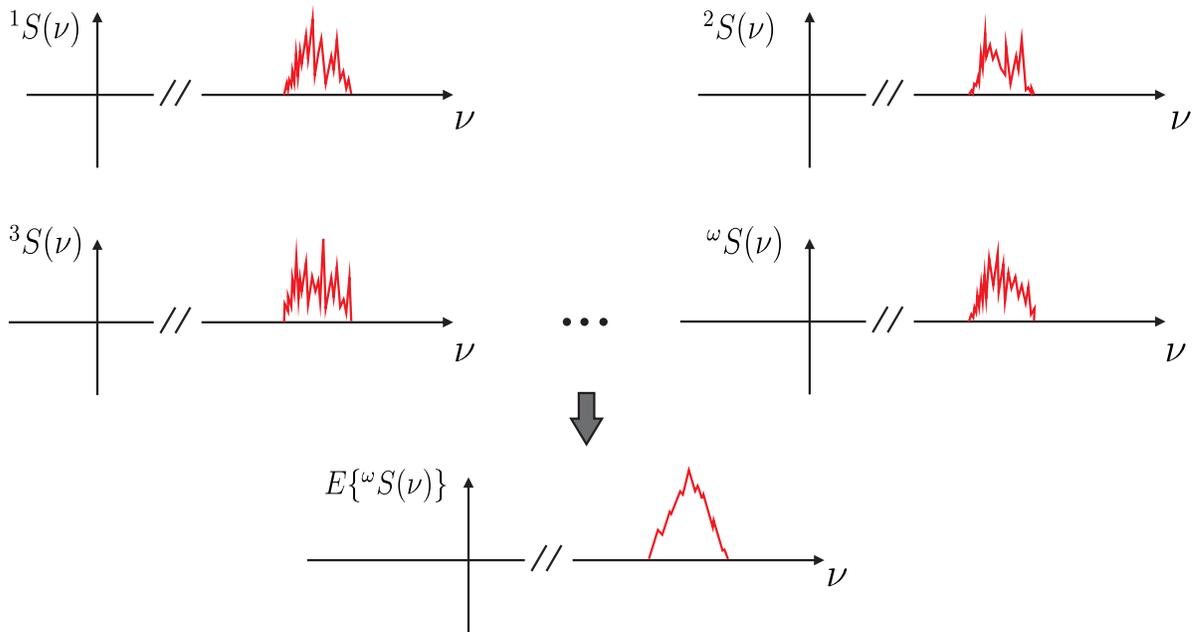


Figura 4.3: La densidad espectral de potencia instantánea para cada señal de muestra ${}^\omega S(\nu)$ y la de ensamble $E\{{}^\omega S(\nu)\}$.

Asociación al proceso de emisión de un fotón

Con lo anteriormente mencionado, proponemos las siguientes relaciones entre las características de los procesos aleatorios y el proceso de creación de un fotón por un átomo al decaer:

1. El proceso de emisión de un fotón debe estudiarse dentro del marco de procesos aleatorios, considerando que las fluctuaciones del campo de vacío otorgan el mínimo grado de aleatoriedad posible.
2. Un fotón está asociado a una de las señales instantáneas posibles de un proceso aleatorio.

^{*}La palabra instantánea hace referencia a que en cada instante en el que se mide el campo, un proceso es asociado a esta medición y por ende una densidad de espectral de potencia “instantánea” es definida para dicho proceso.

3. Un fotón emitido contiene el espectro asociado a cada una de las densidades espectrales de potencia instantáneas del proceso realizado.
4. La frecuencia ν , de un fotón emitido con energía $\mathcal{E} = h\nu$, corresponde a uno de los modos frecuenciales del espectro instantáneo asociado a cada proceso estocástico de emisión.
5. La energía de los fotones emitidos constituyen el espectro de la fuente y por lo tanto, dentro de un marco de procesos estocásticos, estas están asociados a la densidad espectral de potencia de ensamble, $E\{\omega S(\nu)\}$.
6. El perfil de línea espectral para la densidad de potencia de ensamble constituye una medida de la probabilidad que tiene la fuente de emitir un fotón con energía $h\nu$.

Consideramos que estas proposiciones descritas son importantes para una conveniente descripción de la radiación, puesto que ahora la teoría de los procesos estocásticos constituye una herramienta valiosa para estudio de la radiación electromagnética a nivel fundamental. Observemos ahora el modelo para fotones que proponemos y cómo la teoría de procesos aleatorios juega un papel fundamental en la descripción de una fuente de emisión.

4.2. Modelo para fotones

La explicación del efecto fotoeléctrico de Einstein [44], jugó un enorme papel en el desarrollo de la teoría cuántica moderna. Sin embargo, a pesar de las muchas aplicaciones exitosas que se han realizado a partir de la noción de cuantos de luz, su descripción está basada en un concepto de radiación en completo desacuerdo con los conceptos más fundamentales de la teoría clásica de la radiación electromagnética, especialmente en el proceso de transferencia de energía y el concepto de campo monocromático.

Sobre la transferencia de energía

De vital importancia es el hecho de que los experimentos muestran que no existe límite inferior en el tiempo de acumulación de la energía electromagnética para el efecto fotoeléctrico [45,46]. En vista de que la emisión de un fotón tiene un tiempo de vida radiactivo, es decir, existe un tiempo τ de transición electrónica para la producción de un fotón [7,8], el hecho de que no exista un límite inferior en el tiempo de acumulación de energía indica que la energía se puede absorber durante cualquier tiempo $t < \tau$ incluso cuanto $t \rightarrow 0$, es decir de forma instantánea.

En esta dirección proponemos una interpretación diferente a la situación anterior. Si pensamos en que la energía electromagnética está localizada, posiblemente de manera puntual, dentro del paquete de ondas de radiación, entonces la transferencia de energía siempre es instantánea, es decir no existe acumulación de energía, no es que la energía se vaya absorbiendo durante ese tiempo. En otras palabras la interacción entre un fotón y un electrón estaría condicionada a la probabilidad de donde se encuentre ubicada la energía electromagnética dentro del paquete de ondas, es decir puede realizarse dentro de cualquier tiempo dentro de la longitud de coherencia $0 < \tau_i < \tau$ incluso cuando $\tau_i \rightarrow 0$ tal como se muestra en la figura 4.4.

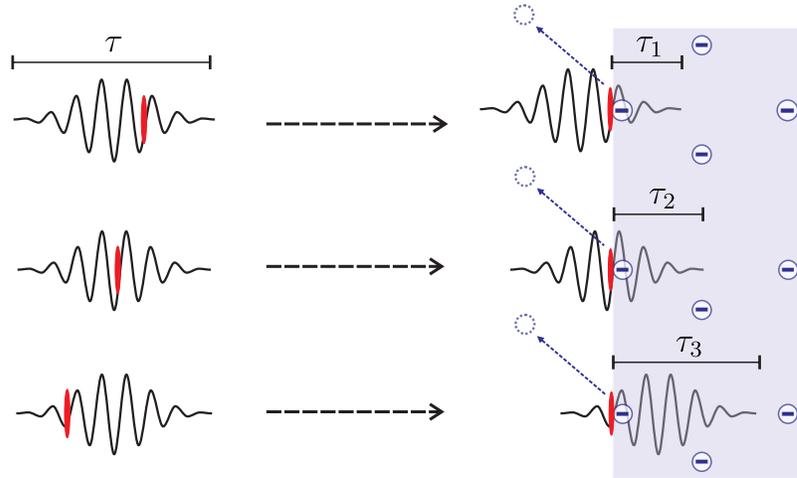


Figura 4.4: La energía electromagnética se encuentra localizada dentro del paquete de ondas, τ_i representa la localización temporal de la energía electromagnética dentro del paquete de ondas.

Este concepto apoya la idea de que la energía electromagnética no está distribuida uniformemente dentro del fotón, sino que esta debe estar localizada con cierta probabilidad determinada por la envolvente del paquete de ondas [40]. Así pues, la interacción entre el fotón y la materia tiene mayor probabilidad de ocurrir cuando ha transcurrido un tiempo del orden $t \sim \tau/2$ dentro de la longitud temporal del paquete de ondas, puesto que la energía electromagnética tiene mayor probabilidad de encontrarse en el centro.

Sobre el concepto de monocromaticidad

En virtud de la relación de Einstein $\mathcal{E} = h\nu$, el fotón tiene una frecuencia bien definida, lo cual se evidencia en el hecho de que si un fotón se hace pasar a través de un prisma, este se refracta espectralmente de acuerdo a su frecuencia. En este sentido, el fotón es estrictamente monocromático, sin embargo esta definición de monocromaticidad dista de la definición de campo monocromático usual. Esto es, si el fotón es un paquete de ondas, ¿cuál es la frecuencia asociada a la energía del fotón? Acá es donde el concepto de campo monocromático entra en conflicto, básicamente porque si los fotones son intrínsecamente monocromáticos, esta definición de monocromaticidad se separa del concepto de campo monocromático en el sentido del análisis de Fourier, el cual corresponde a una función armónica que se extiende infinitamente en el tiempo.

Sin embargo, es llamativo que sean las mismas propiedades del propio análisis de Fourier las que proveen una forma de asociar una frecuencia ν particular a un paquete de ondas. Esto se logra, reescribiendo un paquete de ondas, $\psi(\mathbf{r}, t)$, en la forma (Ver apéndice A.2)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\mathbf{r}, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{r}, t) e^{i(2\pi\tilde{\nu}t + \tilde{\phi}(\mathbf{r}))}, \quad (4.3)$$

en donde $\tilde{\nu}$ es la frecuencia de la portadora del paquete de ondas y corresponde a una de las frecuencias del espectro, $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{r}, t)$ y $\tilde{\phi}(\mathbf{r})$ corresponden a la envolvente del paquete de ondas y a una

fase correspondientes a la frecuencia $\tilde{\nu}$ respectivamente.

Por lo tanto, un fotón es monocromático en el sentido de Einstein, es decir que cumple la relación fundamental $\mathcal{E} = h\nu$ pero no lo es en el sentido de Fourier, puesto que un paquete de ondas contiene infinitos modos. La mayoría de autores en la literatura tratan ambos conceptos como si fueran lo mismo y consideran que la frecuencia asociada a la energía de un fotón corresponde a uno de los modos de una función armónica. Para nosotros, esta es una imposición innecesaria que lleva a los problemas conceptuales mencionados. Consideramos que se debe separar el concepto de frecuencia asociada a la energía del fotón de la frecuencia asociada a una función armónica, puesto que aunque matemáticamente son equivalentes, físicamente no existe una justificación para realizar dicha correspondencia.

4.2.1. ¿Qué es el fotón?

Entonces ¿qué es el fotón? Nuestra visión consiste en definir el fotón a partir de sus características, las cuales se pueden sintetizar dentro de la siguiente lista:

- El fotón es un paquete de ondas cuántico[†].
- El espectro de dicho paquete de ondas se encuentra determinado por la densidad espectral de potencia instantánea, ${}^\omega S(\nu)$, del proceso aleatorio, ${}^\omega U(\mathbf{r}, t)$, asociado a la emisión del fotón.
- La energía del fotón se encuentra localizada dentro del paquete de ondas y la envolvente de dicho paquete de ondas determina la probabilidad de localización temporal de la energía.
- La energía del fotón asociada a la frecuencia $\tilde{\nu}$ cumple la relación $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$, en donde $\tilde{\nu}$ es la frecuencia de la portadora del paquete de ondas[‡], y es matemáticamente equivalente a uno de los modos de la PSD instantánea.

¿Cuál es el estado cuántico de un fotón?

Para introducir el estado cuántico de un fotón libre, sea un operador $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$ definido

$$\hat{\mathbf{b}}^\dagger(\omega) = \widehat{\xi \mathbf{a}^\dagger(\omega)}, \quad (4.4)$$

el cual es un operador cuya acción sobre el estado de vacío $|0\rangle$,

$$\hat{\mathbf{b}}(\omega)|0\rangle = |0_\omega^\uparrow\rangle, \quad (4.5)$$

[†]La palabra cuántico la usamos para distinguirlo de un paquete de ondas clásico policromático. Como veremos más adelante en el capítulo 5, las componentes espectrales del fotón pueden entenderse como componentes espectrales de probabilidad, por ejemplo de interacción con la materia.

[‡]Asignar la frecuencia de la portadora a la energía del fotón es un principio que nosotros proponemos para que nuestro modelo sea consistente.

“congela” para el modo ω uno de los infinitas configuraciones del vacío*, en donde $|0_\omega^\dagger\rangle$ es el estado de vacío “congelado” en la frecuencia ω , tal que la composición de estos estados constituyen el estado de un fotón de energía $\frac{3\hbar\omega}{2}$,

$$|\gamma\rangle = \int d\omega |0_\omega^\dagger\rangle. \quad (4.6)$$

Desde nuestra perspectiva, el operador \hat{b}^\dagger actúa sobre el vacío seleccionando una onda armónica con una amplitud y una fase aleatoria correspondiente para cada uno de los infinitos modos permitidos. Estas ondas armónicas son representadas en los estados “congelados”† $|0_\omega^\dagger\rangle$ y la composición de todos estos estados construyen el estado del fotón (paquete de ondas) tal como se muestra en la figura 4.5.

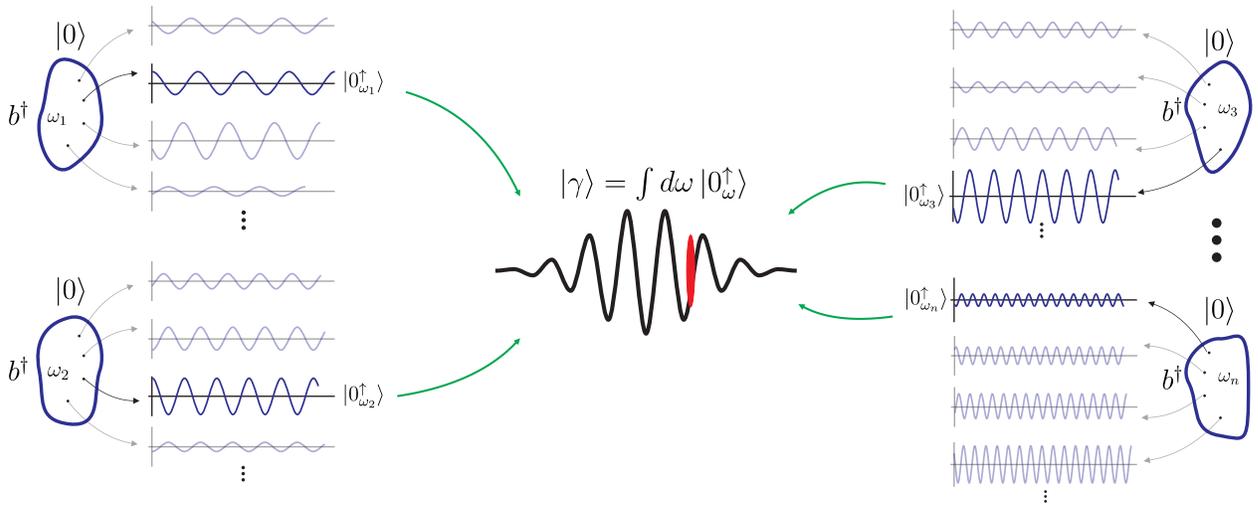


Figura 4.5: El operador \hat{b}^\dagger selecciona del vacío electromagnético una función armónica de amplitud y fase aleatoria para cada uno de los modos, de manera que su composición constituye el estado del fotón $|\gamma\rangle$.

De esta manera concluimos que el campo de vacío es el verdadero campo monocromático en el sentido del análisis de Fourier, y que la función de onda de un fotón en la primera cuantización está relacionado con el estado de un fotón en la segunda cuantización como un paquete de ondas,

$$\gamma(t) = \int \zeta(\omega) e^{i[\omega t + \phi(\omega)]} d\omega \quad \Longleftrightarrow \quad |\gamma\rangle = \int d\omega |0_\omega^\dagger\rangle. \quad (4.7)$$

Notemos que nuestra interpretación, no entra en contradicción con la definición de fotón como un paquete de ondas en la electrodinámica cuántica en términos de su frecuencia angular, ω , de

*Puesto que el vacío fluctúa, el operador \hat{b}^\dagger selecciona instantáneamente una posible configuración.

†Estos estados tienen una amplitud y fase “congelada” para cada modo, de manera que una vez el fotón es creado, las funciones armónicas que lo componen no cambian hasta el momento de su aniquilación.

la forma

$$|\gamma\rangle = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) |0\rangle, \quad (4.8)$$

puesto que matemáticamente son equivalentes y por lo tanto cumple con las propiedades matemáticas de la electrodinámica cuántica. Sin embargo, hemos partido de una interpretación diferente para llegar a él, en el que el estado de un fotón es una composición de estados de vacío, cuyos modos conforman el espectro de densidad de potencia instantánea del paquete de ondas asociado en el momento de su creación. Sin embargo, solo uno de los modos se manifiesta matemáticamente como la frecuencia asociada a la energía del fotón: la portadora del paquete de ondas.

En nuestro caso, la energía electromagnética está asociada a la frecuencia de la portadora del paquete de ondas, pensando que el campo electromagnético asociado vibra con dicha frecuencia, hemos denominado al estado $|\gamma\rangle$ como el “estado vibracional” asociado a un fotón, el cual de ahora en adelante lo llamaremos como tal.

4.3. Estado de la fuente

Si la densidad espectral de potencia instantánea es la responsable de otorgarle las componentes espectrales al fotón, como se muestra en la figura 4.6, entonces en cada instante que se da una transición electrónica, el fotón creado tiene características diferentes, puesto que la PSD del proceso asociado es distinta y en consecuencia, el paquete de ondas lo compone un espectro diferente.

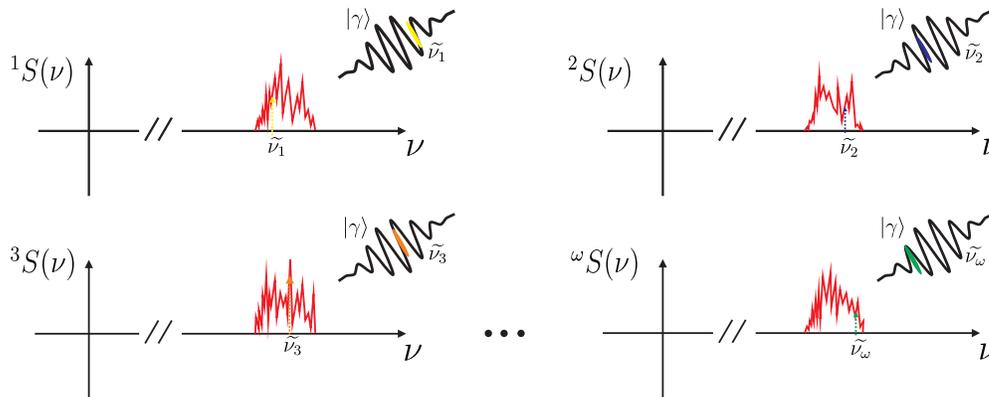


Figura 4.6: Cada densidad espectral de potencia constituye el espectro del paquete de ondas del fotón de energía, $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$.

Note que incluso fotones con la misma energía, es decir paquetes de ondas con igual portadora, pueden existir a pesar de que las densidades espectrales de potencia fluctúen. Esto significa que dos fotones, con independencia de que tengan la misma energía, son distintos en el sentido de que el paquete de ondas asociado a cada fotón puede tener una envolvente y una fase diferentes pero igual portadora (Fig. 4.7)*.

*Este concepto es fundamental a la hora de definir la coherencia de fotones, puesto que a diferencia de lo que se

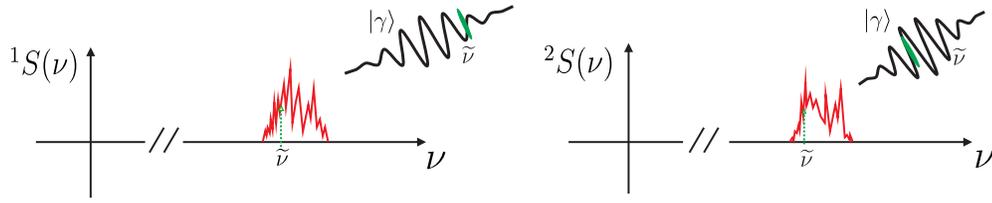


Figura 4.7: dos paquetes de onda (fotones) diferentes pero con igual portadora (energía) asociados a dos densidades espectrales de potencia diferentes.

Por otra parte, la densidad espectral de potencia de ensamble es una medida del espectro de la fuente, y tal como se explicó al inicio de este capítulo, esta función debidamente normalizada se conoce como perfil de línea espectral. En nuestra situación, la fuente debe estar condicionada al proceso aleatorio, puesto que el espectro de la fuente está determinado por la energía de los fotones que ella emite. Por lo tanto, el perfil de línea espectral de la fuente lo definimos como

$$g_\nu(\nu) = \frac{E\{S(\nu)\}}{\int_{-\infty}^{\infty} E\{S(\nu)\} d\nu}, \quad (4.9)$$

y lo consideraremos como una densidad de probabilidad $P(\tilde{\nu})$ de que una fuente pueda emitir fotones con cierta energía determinada $h\tilde{\nu}$ (Fig. 4.8).

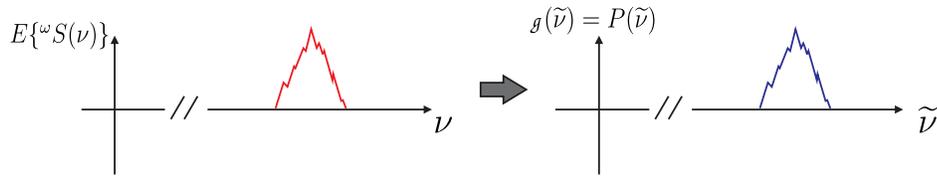


Figura 4.8: La densidad espectral de potencia de ensamble, la cual constituye el espectro de la fuente, debidamente normalizada se puede interpretar como una densidad de probabilidad de que la fuente emita fotones de energías $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$.

De esta manera es posible construir lo que llamamos el estado de una fuente, $|\mathcal{F}\rangle$, a partir de la superposición de estados de un solo fotón, de la forma

$$|\mathcal{F}\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\omega [g(\omega)]^{1/2} |\gamma_\omega\rangle, \quad (4.10)$$

expresada en términos de la frecuencia angular. Y por lo tanto, la probabilidad de que la fuente emita un fotón de energía $\hbar\omega_0$, es decir un estado $|\gamma_{\omega_0}\rangle$ cuya portadora es $\omega_0 = 2\pi\tilde{\nu}_0$, se puede hallar aplicando

$$|\langle\gamma_{\omega_0}|\mathcal{F}\rangle|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} d\omega [g(\omega)]^{1/2} \langle\gamma_{\omega_0}|\gamma_\omega\rangle \right|^2 = g(\omega_0), \quad (4.11)$$

cree, nuestro resultado indica que dos fotones no son iguales simplemente por tener la misma energía.

puesto que $\langle \gamma_{\omega'} | \gamma_{\omega} \rangle = \delta(\omega - \omega')$ [40] y $g(\omega_0)$ es la probabilidad determinada por el perfil de línea espectral de ensamble 4.9.

Notemos que el estado de la fuente, $|\mathcal{F}\rangle$ corresponde a una superposición de estados vibracionales, $|\gamma_{\omega}\rangle$. Contrastemos esto con la interpretación del colapso de la función onda discutida en el capítulo 4, allí el fotón estaba compuesto por una superposición de estados número de fotones $|n = 1\rangle$, y medir uno de esos estados implicaba un “colapso” a uno de los estados número de fotones $|n = 1\rangle$, el cual no cumple con las propiedades de los fotones libres tal como hemos discutido. Por otra parte, nuestro modelo permite construir el estado de la fuente, y por lo tanto ahora existe una diferencia significativa, puesto que la fuente es una superposición de estados $|\gamma_{\omega}\rangle$, y por lo tanto medir uno de esos estados implica un “colapso” a uno de estos estados, es decir el estado vibracional es un estado puro de la radiación en el espacio libre, el cual no presenta el problema de la localización que sí presentan los estados de Fock.

En resumen, las fluctuaciones del campo de vacío son el componente fundamental que hemos utilizado en la búsqueda de entender qué es un fotón. Las fluctuaciones del campo de vacío le otorga al fotón un carácter estocástico, y como tal debe ser tratado. Hay que aclarar que el concepto estocástico de la radiación no es nuevo, e incluso existe una rama de la electrodinámica denominada Electrodinámica Estocástica (SED, por sus siglas en inglés).

La Electrodinámica Estocástica [47–50] nace como un intento de darle significado físico a la mecánica cuántica partiendo de los resultados proporcionados por la QED. Esto es realizado mediante un proceso de secuencia inversa de los pasos en los que se basa el razonamiento de la QED, en el cual partiendo de la QED, eventualmente se concluye que existen las fluctuaciones del vacío o un estado fundamental de energía finita de la radiación electromagnética. Para la SED, se empieza partiendo del supuesto básico de que existe un campo de fondo clásico y aleatorio que no puede ser detectado y que tiene la potencia espectral del estado fundamental en la QED, e intenta mostrar que se pueden predecir los fenómenos cuánticos de la radiación usando las ecuaciones clásicas de Maxwell y agregando este nuevo campo aleatorio.

Lo interesante de nuestro desarrollo y que se diferencia de la SED, es que mientras la SED intenta modelar matemáticamente cada fenómeno cuántico, muchas veces de manera aislada, en nuestra concepción de fotón llegamos directamente al modelo matemático descrito por la electrodinámica cuántica, en el que el estado del fotón es definido como un paquete de ondas con características que conducen a nuevas perspectivas. A partir de acá, mostraremos que es posible interpretar partiendo desde nuestra perspectiva algunos fenómenos explicados desde el formalismo matemático de la óptica cuántica, por ejemplo la emisión espontánea y estimulada.

Capítulo 5

Aplicaciones: Emisión estimulada

“Para aquellos que han ido a la escuela, donde probablemente les dijeron algo de la luz comportándose como ondas. Les estoy diciendo como se comportan realmente—como partículas”— Richard Feynman.

5.1. Emisión estimulada: Coherencia de fotones

La teoría cuántica de la radiación asume que la luz se emite o se absorbe cada vez que un átomo realiza un salto entre dos estados cuánticos. Se distinguen dos procesos: uno de absorción, que se presenta cuando el átomo salta a un estado de energía superior, proceso en el que se absorbe un cuanto de luz cuya energía corresponde a la diferencia energética del estado inicial y final. Y un proceso de emisión correspondiente al proceso en el cual un átomo emite un fotón al decaer a un estado de energía inferior.

Un átomo en un estado excitado tiene una tendencia natural a des-excitarse y perder su exceso de energía. Este proceso radiactivo lleva por nombre emisión espontánea y cada tipo de átomo tiene un espectro de emisión característico que determina todas las infinitas posibilidades en que una transición energética se puede llevar a cabo. Por otra parte, el campo de un fotón incidente puede inducir una transición atómica de un nivel superior a uno inferior, dicho proceso, el cual es inverso al de absorción, recibe el nombre de emisión estimulada. En estas circunstancias, el nuevo fotón emitido replica todas las características del fotón que induce la transición, y este fenómeno de amplificación de fotones que está directamente relacionado con la noción de coherencia de fotones, es esencial en el funcionamiento del láser (LASER: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

Albert Einstein [51], basado en el análisis de intercambio de energía entre los átomos y la radiación en condiciones de equilibrio térmico, fue capaz de postular ciertas expresiones para las densidades de probabilidad de los diferentes tipos de transición que experimenta un átomo cuando interactúa con radiación policromática de densidad espectral de energía $\rho(\nu)$. Los coeficientes A y B introducidos por Einstein describen la tasa (probabilidad por unidad de tiempo) en la que puede ocurrir emisión espontánea y estimulada respectivamente.

Las tasas de emisión y absorción pueden ser calculadas mediante los mecanismos de la mecánica cuántica [8, 27]. A continuación utilizaremos el Hamiltoniano de un sistema átomo-campo cuantizado para obtener las probabilidades de transición que resulta a partir de la interacción de n fotones, cada uno en el estado vibracional $|\gamma\rangle$, tal como fue postulado en 4.8, con un átomo. Introduciremos el estado $|n\rangle_\gamma$, que describe n fotones en el mismo estado $|\gamma\rangle$ e introduciremos la noción del estado de un átomo excitado a partir de los operadores de transición electrónica y la densidad espectral $g(\nu)$ característica del átomo, finalmente observaremos que para el caso límite de muchos átomos y muchos fotones las expresiones se ajustan al cálculo estadístico.

para empezar, supongamos que

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(r), \quad (5.1)$$

describe el Hamiltoniano de un electrón ligado a un átomo en ausencia de campos externos, en donde $V(r)$ es el potencial de interacción que liga al electrón con el núcleo. En presencia de campos externos, el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (5.2)$$

en donde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\phi(\mathbf{r}, t)$ son el potencial vectorial y escalar respectivamente, y e la carga del electrón tomada positivamente.

Dentro de lo que se conoce como la aproximación dipolar [6, 7, 9, 27], en donde se considera que el vector potencial no varía espacialmente en las vecindades del átomo, esto es $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$, y mediante una recalibración del gauge, el Hamiltoniano en presencia de un campo externo puede reducirse a la expresión más simple,

$$\hat{H}' = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(r) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (5.3)$$

la cual contiene solo el término de interacción $e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$. La cantidad $-e\mathbf{r}$ es el momento dipolar, $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$, de allí el nombre de la aproximación. En general el momento dipolar es un operador, $\hat{\mathbf{d}}$, entonces,

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \hat{H}^{(I)}, \quad (5.4)$$

en donde $\hat{H}^{(I)} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$, es el Hamiltoniano de interacción.

Nótese que en la expresión 5.4 no se ha especificado la naturaleza del campo de interacción, este puede ser considerado clásico o cuántico y observar las diferencias en cada caso[†]. Puesto que nosotros estamos interesados en analizar la interacción de un átomo con el campo cuantizado, se hace uso del operador campo eléctrico 2.28, pero considerando todos los posibles modos del campo. Esto es

$$\hat{\mathbf{E}} = \int \boldsymbol{\epsilon}_0 [\hat{a}(\omega) + \hat{a}^\dagger(\omega)] d\omega, \quad (5.5)$$

[†]La principal diferencia que se puede encontrar resulta del hecho de que un campo clásico no da lugar a emisión espontánea, puesto que si no hay campo con el que interactuar en principio no habría emisión. Sin embargo cuánticamente, la probabilidad de emisión es diferente de cero incluso cuando no hay fotones presentes [7, 27].

en donde $\mathcal{E}_0 = i(\hbar\omega/2\epsilon_0 V)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}$. Además, puesto que se está considerando ahora la dinámica del campo electromagnético en el sistema, \hat{H}_0 debe contener también el Hamiltoniano asociado al campo electromagnético. Para definir el Hamiltoniano asociado a los estados vibracionales, primero definimos un operador creación de un estado vibracional, $\hat{\mathcal{B}}^\dagger$, de la forma [40]

$$\hat{\mathcal{B}}^\dagger = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega), \quad (5.6)$$

en donde $\hat{\mathcal{B}}^\dagger |0\rangle = |\gamma\rangle$. Y de manera análoga al Hamiltoniano descrito en 2.31, definimos el operador número de fotones en el estado vibracional como

$$\hat{\mathcal{N}} = \hat{\mathcal{B}}^\dagger \hat{\mathcal{B}}, \quad (5.7)$$

y por lo tanto el Hamiltoniano para el estado vibracional es

$$\hat{H}_\gamma = \hbar\omega \left(\hat{\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.8)$$

En consecuencia el Hamiltoniano del sistema átomo-campo, \hat{H}_0 , sin considerar el Hamiltoniano de interacción debe escribirse

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(r) + \hbar\omega \left(\hat{\mathcal{B}}^\dagger \hat{\mathcal{B}} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.9)$$

Esto significa que el Hamiltoniano total

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}^{(I)}, \quad (5.10)$$

en donde hemos incluido el Hamiltoniano de interacción, describe la energía total del sistema.

A partir de acá, hacemos uso de los llamados operadores de transición atómica [27], definidos como

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_+^\dagger, \quad (5.11)$$

para realizar una extensión en el concepto del estado de un átomo excitado o en estado base. Por un lado el operador $\hat{\sigma}_+$ actúa sobre un estado base $|g\rangle$ y lo lleva a un estado excitado $|e\rangle$, $\hat{\sigma}_+ |g\rangle = |e\rangle$, similarmente, $\hat{\sigma}_+^\dagger |e\rangle = |g\rangle$.

Es conocido en espectroscopía que las líneas espectrales de los átomos tienen cierto ancho y no corresponden realmente a una línea [52–54] incluso para medidas con muy alta precisión. En nuestro trabajo este resultado juega un papel fundamental, ya que esto indica que el nivel energético de un átomo no está bien definido sino que cada átomo tiene un ancho de banda natural determinado por la función de perfil de línea espectral $g(\nu)$. Esta función de línea espectral es una medida de la probabilidad de que al momento de que un átomo decaiga a un estado de energía inferior, esta haya disminuido una cantidad $\Delta\mathcal{E} = h\nu$. Por lo tanto nosotros proponemos que tanto el estado base como el excitado de un átomo no corresponden a un estado puro, puesto que múltiples transiciones energéticas son posibles cada uno con una probabilidad determinada por el perfil de línea espectral de ensamble 4.9. Por lo tanto, en concordancia con la mecánica

cuántica, proponemos que tanto el estado excitado como el estado base de un átomo es realmente una superposición de estados, los cuales toman la forma (ver fig 5.1)

$$|e\rangle_\sigma = \int d\omega [g_e(\omega)]^{1/2} \hat{\sigma}_+(\omega) |g\rangle, \quad (5.12)$$

$$|g\rangle_\sigma = \int d\omega [g_g(\omega)]^{1/2} \hat{\sigma}_+(\omega) |e\rangle, \quad (5.13)$$

en donde $[g_e(\omega)]^{1/2}$ y $[g_g(\omega)]^{1/2}$ pueden interpretarse como la amplitud de probabilidad de que un átomo en estado excitado decaiga a alguno de los estados base y que un átomo en estado base se excite a alguno de los estados excitados respectivamente. De manera que el producto de la amplitud espectral del estado excitado, $[g_e(\omega)]^{1/2}$, con la amplitud espectral $[g_g(\omega)]^{1/2}$, determina la densidad espectral de la transición en su conjunto, es decir, dada su respectiva normalización, el perfil de línea espectral de ensamble, $[g_e(\omega)]^{1/2} \cdot [g_g(\omega)]^{1/2} = g(\omega)$ Esta definición para los estados excitado y base de un átomo tienen la característica que para un ensamble de átomos se recupera la densidad espectral medida experimentalmente en espectroscopía, puesto que para cada átomo el perfil de línea espectral es un perfil de probabilidad que en el caso límite de muchos átomos construye el perfil de intensidad, en concordancia con la mecánica cuántica.

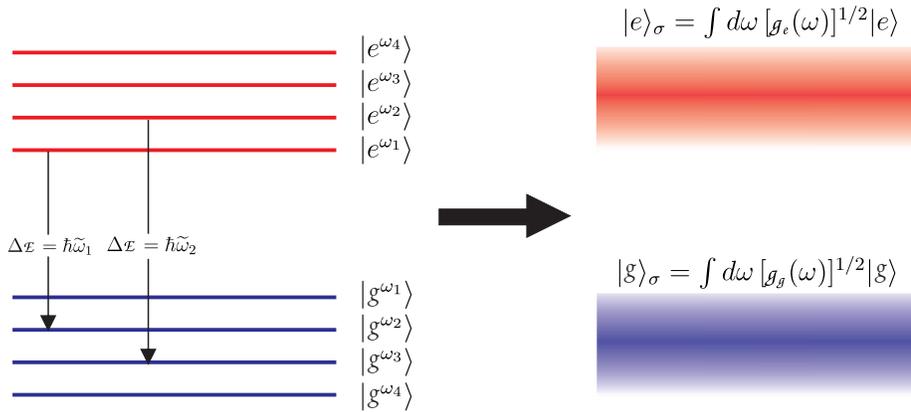


Figura 5.1: Tanto el estado excitado de un átomo, $|e\rangle_\sigma$, como el estado base, $|g\rangle_\sigma$, son una superposición de estados en concordancia con la mecánica cuántica.

Por otra parte, introducimos también el estado “n-vibracional”, $|n\rangle_\gamma$, un estado de n fotones cada uno en el mismo estado vibracional. Definimos este estado como

$$|n\rangle_\gamma = \int d\omega \xi(\omega) \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (5.14)$$

en donde hemos utilizado la relación $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$.

Con todo lo anterior, supongamos que el estado inicial del sistema átomo-campo es $|i\rangle = |e\rangle_\sigma |n\rangle_\gamma$, es decir el átomo está en un estado excitado y hay n fotones en el estado vibracional. Por

lo tanto el estado final del sistema es $|f\rangle = |g\rangle_\sigma |n+1\rangle_\gamma$, el cual indica que el átomo ha decaído a su estado base y en consecuencia emite un fotón.

La tasa de transición de un proceso de emisión o absorción se encuentra determinada por la llamada regla de oro de Fermi [7–9, 27]. La cual indica que la tasa de transición es directamente proporcional al cuadrado del módulo de la matriz de elementos del respectivo proceso, $\langle f | \hat{H}^{(I)} | i \rangle$, esto es

$$W_e \propto \left| \langle f | \hat{H}^{(I)} | i \rangle \right|^2, \quad (5.15)$$

en donde W_e es la tasa de transición de emisión y $\hat{H}^{(I)}$ es el Hamiltoniano de interacción.

En general, en la literatura la regla de oro de Fermi es usada para calcular la tasa de transición entre líneas energéticas, es decir sin considerar el ancho de banda de los átomos [7–9, 27]. Lo que se realiza posteriormente es una integral sobre todas las frecuencias introduciendo a mano la densidad de energía de la luz y el perfil de línea espectral para un ensamble de átomos [53, 54]. En nuestro desarrollo observaremos que este resultado surge de manera natural gracias a las consideraciones realizadas anteriormente para los estados inicial y final del sistema átomo-campo.

Para ello, observemos que tanto el Hamiltoniano de interacción, $\hat{H}^{(I)}$, como los estados inicial, $|i\rangle$, y final, $|f\rangle$ tal como los definimos contienen integrales de frecuencia, por lo tanto

$$\langle i | \hat{H}^{(I)} | f \rangle = \langle n+1 |_\gamma \langle g |_\sigma \hat{H}^{(I)} | e \rangle_\sigma | n \rangle_\gamma \quad (5.16)$$

$$= \int d\omega \xi^2(\omega) g(\omega) \langle g, n+1 | \hat{H}'^{(I)} | e, n \rangle, \quad (5.17)$$

en donde $\hat{H}'^{(I)}$ corresponde al Hamiltoniano de interacción para uno de los modos [27]. Nótese que si $\xi(\omega)$ corresponde a la amplitud espectral, entonces el cuadrado de ella $\xi^2(\omega)$ describe la densidad espectral de la radiación $\rho(\omega)$.

La expresión que aparece dentro de la integral dentro de la integral, $\langle g, n+1 | \hat{H}'^{(I)} | e, n \rangle$ corresponde a la transición entre líneas energéticas antes mencionada. Los coeficientes de Einstein para la emisión espontánea y para la emisión estimulada son calculados a partir de dicha la expresión. El coeficiente para la emisión espontánea es calculado cuando en el estado inicial no hay fotones presentes, esto es $\mathbb{A} \propto \left| \langle g, 1 | \hat{H}'^{(I)} | e, 0 \rangle \right|^2$, mientras que en el caso de la emisión estimulada, $\mathbb{B} \propto \left| \langle g, n+1 | \hat{H}'^{(I)} | e, n \rangle \right|^2$.

Por lo tanto nuestro resultado implica que la tasa de transición (o densidad de probabilidad) está descrita mediante la expresión

$$W_e = \int_{\mathbb{R}} d\omega \rho(\omega) g(\omega) \left| \langle g, n+1 | \hat{H}'^{(I)} | e, n \rangle \right|^2. \quad (5.18)$$

Lo notable de nuestro resultado parte de que las probabilidades de transición se encuentran ponderadas por las densidad espectral de los átomos y de la radiación de manera natural, partiendo de las definiciones de los estados inicial y final propuestos. Y lo más importante de todo está en que la expresión 5.18 es válida incluso cuando la interacción se realiza entre un único átomo y un único fotón.

Tal como lo estudiamos en este trabajo, un fotón en el estado vibracional posee una amplitud espectral característica, la cual caracteriza lo que denominamos densidad de potencia instantánea en el capítulo 4. De forma similar, nuestra definición del estado de un átomo permite a su vez asociarle una densidad espectral a él, a pesar de ser uno solo. Esto significa que en la interacción de un fotón con un átomo, una interpretación adecuada conlleva a que las densidades espectrales $\rho(\omega)$ y $g(\omega)$ juegan el papel de densidades de probabilidad de interacción, tal que en el caso límite de un ensamble de átomos y fotones, se recupera el resultado clásico[†].

Es decir, un átomo puede interactuar con un fotón, siempre y cuando exista un soporte común entre las densidades espectrales de probabilidad $\rho(\omega)$ y $g(\omega)$ tal como se muestra en la figura 5.2. Nuestro análisis implica que un fotón puede estimular el decaimiento de un átomo excitado con una probabilidad máxima en el caso de que los soportes coincidan perfectamente y mínima cuando no coinciden, es decir unos fotones inducen más la transición que otros. Nótese que en el modelo cuántico usado tradicionalmente [7–9, 27] esta situación no se puede presentar, puesto que en dicho modelo el fotón que induce la transición tiene que igualar la diferencia de energía del estado inicial y final, de lo contrario una transición estimulada no es posible.

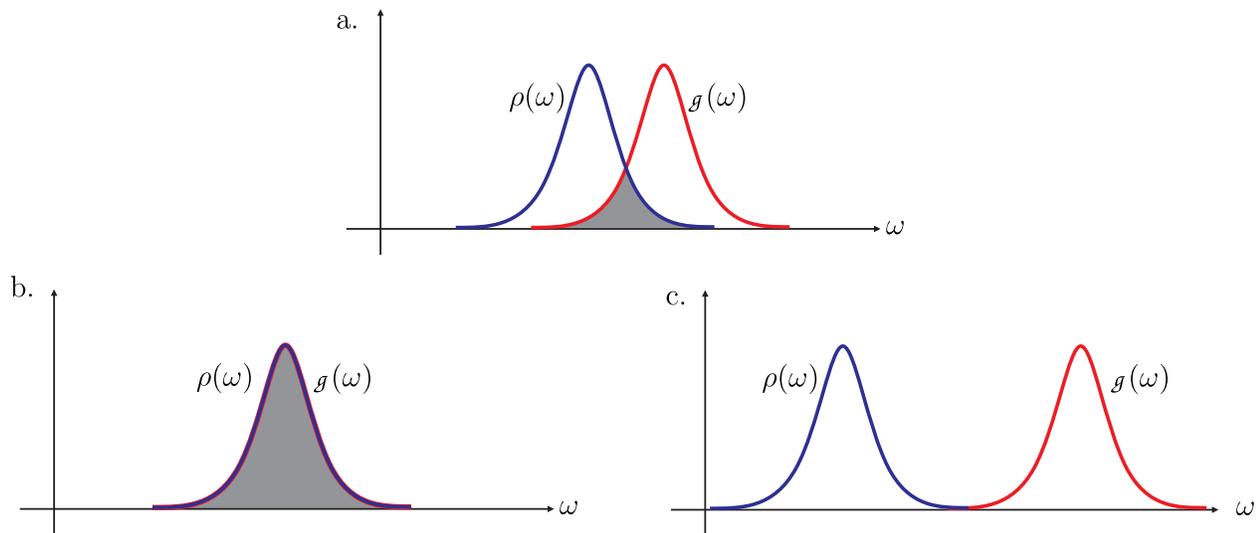


Figura 5.2: Si existe un soporte común entre las densidades espectrales del fotón y del átomo (fig. a) existe una probabilidad diferente de cero de que haya interacción. Se presenta el caso máximo si los dos soportes coinciden (fig. b) o el mínimo si no hay soporte común (fig. c).

Pensamos que esta situación está estrechamente relacionada con un proceso de detección de fotón no destructivo. Recientemente se ha estudiado la posibilidad de detección de un fotón sin destruirlo [55–58], dentro de lo que se conoce bajo el nombre de No Demolición Cuántica (QND, por sus siglas en inglés). En estos trabajos se hace mención de la posibilidad de un átomo de detectar la presencia de un fotón sin que este sea absorbido y pueda ser “visto” por otro átomo

[†]En el caso clásico (o mejor en el caso estadístico) se introducen a mano las densidades espectrales tanto de la radiación como de los átomos en el cálculo de las probabilidades de transición, pero solo para un ensamble de átomos, puesto que para un átomo y un fotón ellos consideran que la transición solo se da entre líneas energéticas [53, 54].

más adelante. Desde nuestro punto de vista, esto es un indicio de que existe una interacción entre el fotón y el átomo lo suficientemente débil para no inducir una transición electrónica. Esta puede ser la situación entre un fotón cuya frecuencia está relativamente alejada de la frecuencia de transición del átomo, ya que tal como lo muestra nuestro resultado en 5.18, una interacción entre un fotón y un átomo puede ser lo suficientemente débil si el soporte común entre sus densidades es pequeño, y por lo tanto no ser suficiente para inducir una transición, aunque sí lo suficiente para perturbar el átomo y permitir la “detección” del fotón sin destruirlo.

Otro resultado importante de nuestro desarrollo parte del hecho de que podemos establecer una noción de coherencia de fotones. En nuestro caso dos fotones serán coherentes siempre y cuando ambos estén en el mismo estado vibracional. Por lo tanto, en la emisión estimulada, el estado final del campo corresponde al estado $|n + 1\rangle_\gamma$ indicando así que tanto el fotón emitido como el que estimuló la transición tienen el mismo estado, es decir comparten los mismos estados de vacío congelados*. Este concepto de coherencia es imposible de entender desde la noción de fotón tradicional como estados de Fock [27], puesto que la descripción cuántica de la emisión estimulada solo considera que el fotón emitido tiene la misma energía del que indujo la transición.

Además, la expresión 5.18 también permite entender el funcionamiento de dispositivos láser a partir de la noción de coherencia de fotones. En este sentido, observemos que los fotones emitidos por los átomos del medio activo del láser comparten un soporte común amplio con los propios átomos (Fig.5.2). Por lo tanto son esos mismos fotones los que tienen la mayor probabilidad de inducir una transición, este proceso repetido se refuerza cada vez más hasta garantizar que los fotones sean en su gran mayoría coherentes.

*Comparten la misma envolvente, portadora y fase.

Capítulo 6

Conclusiones

“Por el resto de mi vida, voy a reflexionar sobre lo que es la luz” – Albert Einstein.

A continuación presentaremos las conclusiones y resultados principales de nuestro trabajo.

- En el Capítulo 2 pusimos en evidencia que las ecuaciones de Maxwell tienen una representación natural mediante el uso de un campo vectorial complejo de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Este campo vectorial complejo es solución de una ecuación mecanocuántica para fotones que puede ser deducida de manera paralela mediante las ecuaciones de Maxwell o de la cinemática de Einstein para partículas sin masa y spin-1, esto significa que las ecuaciones de Maxwell intrínsecamente representan una descripción cuántica de la luz. También se mostró que cuantizar dicho campo vectorial complejo es equivalente a cuantizar el campo eléctrico y magnético por separado y como resultado principal encontramos que los operadores creación y aniquilación esencialmente representan la amplitud del campo generalizado de Maxwell.
- En este mismo capítulo estudiamos como factor fundamental la existencia de un campo electromagnético de energía mínima, este campo de vacío existe y fluctúa con independencia de si hay fotones o no. A su vez analizamos la visión de fotón otorgada por la electrodinámica cuántica, en este sentido el fotón es un modo normal de excitación del campo cuantizado dentro de una cavidad y que como tal este se extiende a lo largo de dicha cavidad, es decir no posee una localización definida dentro de ella. En esta dirección, discutimos los inconvenientes que presentan las dos visiones principales de fotones localizados: una en la que se considera que los fotones son policromáticos o multimodales cuya energía está asociada a la frecuencia promedio y otra donde se considera el colapso de el estado de un fotón a un estado puro de energía.
- En el Capítulo 3 estudiamos algunas particularidades del formalismo de Riemann-Silberstein. Como resultado observamos que las soluciones negativas del campo generalizado $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ son las soluciones positivas del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - ic\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, y en consecuencia los “antifotones” son los mismos fotones con helicidad negativa. Además, concluimos que dadas las propiedades que comparte, cada uno de los modos del campo de vacío

está asociada a una onda armónica, y en consecuencia la función de onda de un fotón descrita como un paquete de ondas puede interpretarse mediante la composición de estados de vacío. El resultado principal de este capítulo y el cual es la base de este trabajo se resume en que **las ondas armónicas son al campo de vacío lo que los paquetes de onda son a los fotones**. Es decir, el campo de vacío es el verdadero campo monocromático en el sentido matemático del análisis de Fourier, puesto que este está asociado a una onda armónica. Por su parte un fotón localizado lo describimos como un paquete de ondas cuántico compuesto de campos de vacío, y por consiguiente el estado de un fotón es una composición de estados de vacío.

- En el capítulo 4 hicimos uso de la teoría de procesos aleatorios para aplicarla al entendimiento de la luz. Concluimos que una correcta descripción de la luz a nivel fundamental debe considerar el carácter aleatorio que le otorga las fluctuaciones del campo de vacío. Como resultado de esta propuesta, encontramos que un fotón puede ser asociado a una señal instantánea de un proceso aleatorio y que cada una de estas señales instantáneas posee una densidad espectral (espectro) de potencia característica para cada fotón. La frecuencia asociada a la energía del fotón es uno de los modos frecuenciales del espectro y puesto que la energía de los fotones emitidos constituyen el espectro de la fuente, estos están asociados a una densidad espectral de potencia de ensamble.
- Concluimos que la función de onda asociada al fotón debe describirse mediante un paquete de ondas, sin embargo encontramos que dicho paquete de ondas puede expresarse a partir de una función envolvente, una frecuencia asociada a la portadora del paquete de ondas y una fase de acuerdo a la expresión 4.3. Concluimos que en principio es posible realizar una asociación entre la frecuencia de la portadora y la frecuencia asociada a la energía del fotón, $\mathcal{E} = h\nu$. La razón de esta asociación está basada en que en un paquete de ondas existe una función que oscila la cual está modulada, esta función puede ser interpretada como el campo electromagnético que oscila a una frecuencia determinada, por lo tanto dicha frecuencia es la mejor candidata para relacionarla con la energía del fotón. Además concluimos que la energía electromagnética no se distribuye uniformemente lo largo del paquete de ondas sino que debe estar localizada tal como los experimentos lo indican. En esta dirección consideramos que la función envolvente es una medida de la probabilidad de localización de la energía electromagnética, teniendo mayor probabilidad de estar en el centro del paquete de ondas. Definimos un estado de dichas característica a partir de la expresión 4.8, el cual denominamos estado vibracional.
- Asimismo, en el capítulo 4, definimos el estado de vacío congelado, $|0_{\omega}^{\uparrow}\rangle$, a partir de la acción del operador excitación de vacío, b^{\dagger} , descrito en 4.4. Los llamamos estados de vacío congelados ya que una vez seleccionados, estos componen el estado vibracional sin modificarse. Debido a las fluctuaciones del campo de vacío, los estados de vacío congelados son diferentes cada vez que se crea un fotón, de ahí la necesidad de introducir la teoría de procesos aleatorios a nuestro trabajo. En nuestro trabajo hacemos una diferenciación entre la superposición de estados y la composición de estados, estos no deben ser tomados como

sinónimos. En nuestro caso, el estado de un fotón se construye a partir de la composición de estados de vacío a diferencia de una superposición de estados, que en mecánica cuántica se utiliza para describir un sistema físico que existe simultáneamente en todos sus estados teóricos posibles, lo que implica, dentro de la interpretación de Copenhague, un colapso a uno de dichos estados mediante un proceso de medida*. Tal es el caso del estado de la fuente descrito en 4.3.

- Concluimos que es posible describir el estado de una fuente a partir de los estados vibracionales asociados a los fotones emitidos, es decir, la frecuencia asociada a la energía de cada fotón emitido por una fuente compone lo que se conoce como el espectro de la fuente. Como resultado, el estado de una fuente, $|\mathcal{F}\rangle$, es escrito como la superposición de estados vibracionales y la densidad espectral de potencia de ensamble normalizada, llamada perfil de línea espectral de ensamble, es entendida como una densidad de probabilidad de que la fuente emite un fotón de energía $\mathcal{E} = h\tilde{\nu}$, en donde $\tilde{\nu}$ es una de las frecuencias del espectro de la fuente.
- En el capítulo 5 concluimos que fue posible realizar una formulación mecanocuántica aplicando los conceptos estudiados para la descripción de la emisión estimulada. En este capítulo introducimos el estado excitado y base de un átomo mediante las expresiones 5.12. La razón para realizar estas definiciones parten del hecho de que experimentalmente se ha demostrado que los átomos no poseen transiciones energéticas de líneas sino de bandas, es decir un átomo excitado no decae siempre con la misma diferencia energética y un átomo en el estado base no se excita siempre con la misma diferencia energética. En nuestro trabajo nosotros le otorgamos a esta situación un carácter fundamental, es decir, introducimos este concepto desde el mismo estado cuántico del átomo. A su vez introducimos un estado n -vibracional, compuesto por n fotones en el mismo estado (5.14). Como resultado importante, se obtuvieron las probabilidades de transición calculadas a partir de la regla de oro de Fermi. El resultado obtenido en la expresión 5.18 expresa que **la probabilidad de transición está condicionada por el soporte común entre el espectro de los átomos y de los fotones**. En la literatura, las densidades espectrales de los átomos y la radiación son introducidas posteriormente por necesidad, sin embargo en nuestro resultado las expresiones surgen de forma natural.
- Como resultado observamos que la expresión 5.18 es válida incluso cuando la interacción es entre un átomo y un fotón, un resultado impensable desde el punto de vista acostumbrado de la electrodinámica cuántica. En este sentido, las densidades espectrales juegan el papel de densidades de probabilidad, siendo máxima la probabilidad de interacción cuando el soporte común entre el átomo y el fotón es amplio. Este resultado también juega un papel importante en el entendimiento de la coherencia a nivel fundamental, puesto que **dos fotones serán coherentes si comparten todas las características, es decir si están en el mismo estado vibracional**. Nuestro resultado provee un mecanismo para comprender por qué un

*Una composición de estados puede entenderse como una expansión en términos de otros estados. Un ejemplo claro de esto son los estados coherentes de campo electromagnético, los cuales corresponden a una composición de estados número.

fotón emitido por un átomo mediante emisión estimulada comparte las características del fotón que indujo la transición.

Finalmente solo queda decir que las perspectivas de este trabajo apuntan a sus aplicaciones y a la posibilidad de explicar una gran cantidad de fenómenos cuánticos y sobre todo tener un punto de vista diferente a la hora de interpretar dichos fenómenos. Desde mi punto de vista, a pesar de que nuestro entendimiento de la luz ha incrementado enormemente e el último siglo, sospecho que la luz seguirá siendo un tema fascinante por un largo tiempo y continuará atrayendo nuevas ideas y conceptos al entendimiento de su naturaleza.

Apéndice A

Análisis de Fourier

Explicamos dos aspectos importantes del análisis de Fourier: la señal analítica y el paquete de ondas.

A.1. Señal Analítica: una función con espectro positivo

Sea F la transformada de Fourier de f ,

$$F(x') = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi x x'} dx'. \quad (\text{A.1})$$

Si f es una función real, es decir $f(x) = \overline{f(x)}$, entonces F tiene simetría hermítica,

$$F(-x') = \overline{F(x')}. \quad (\text{A.2})$$

Dado que $F(x' < 0) \neq 0$, se dice que la función f tiene espectro negativo. Se desea entonces construir una función f_A cuyo espectro se estrictamente positivo, dado que para el caso de la radiación, las frecuencias negativas no son físicamente realizables; no existen en la naturaleza.

Para ello definimos

$$F_A(x') = F(x') \Theta(x') \quad (\text{A.3})$$

en donde

$$\Theta(x') = \begin{cases} 0, & x' < 0 \\ 1, & x' \geq 0 \end{cases}$$

es la distribución de Heaviside.

Para hallar la función f_A correspondiente, usamos la transformación inversa

$$f_A(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} F(x') \Theta(x') e^{+i2\pi x x'} dx', \quad (\text{A.4})$$

en donde el dos que multiplica es necesario para la conservación de la energía. Usando la propiedad $\mathcal{F}[f * g] = F \cdot G$, se obtiene

$$f_A(x) = 2f(x) * \int_{\mathbb{R}} \Theta(x') e^{+i2\pi x x'} dx'. \quad (\text{A.5})$$

La distribución $\mathbf{1}$ se puede definir $\mathbf{1} = v.p. \frac{x}{x}$, donde *v.p.* significa el valor principal de la función, en este caso $\frac{x}{x}$. De esta manera, partiendo de la transformada de la distribución $\mathbf{1}$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} e^{-i2\pi xx'} dx = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x} e^{-i2\pi xx'} dx = v.p. \frac{1}{-i2\pi} \frac{d}{dx'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} e^{-i2\pi xx'} dx. \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} e^{-i2\pi xx'} dx' = \delta(x') = \frac{d\Theta(x')}{dx'}, \quad (\text{A.7})$$

en el sentido de las distribuciones $\delta(x') = \frac{d\Theta(x')}{dx'}$.

Es así que igualando A.6 y A.7 tenemos que

$$v.p. \frac{1}{-i2\pi} \frac{d}{dx'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} e^{-i2\pi xx'} dx = \frac{d}{dx'} \Theta(x'), \quad (\text{A.8})$$

donde finalmente

$$v.p. \frac{1}{-i2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} e^{-i2\pi xx'} dx = \Theta(x') + C. \quad (\text{A.9})$$

Teorema: La transformada de Fourier de una función impar es siempre impar, es decir, si $f(x) = -f(-x) \rightarrow F(x') = -F(-x')$.

Entonces, dado que la función $\frac{1}{x}$ es una función impar, su transformada debe ser impar. Pero la función Heaviside no es impar a menos que la constante $C = -\frac{1}{2}$. Es así que la expresión A.5 se escribe ahora

$$f_A(x) = 2f(x) * \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{i2\pi} v.p. \int \frac{1}{x} e^{-i2\pi xx'} dx \right] e^{+i2\pi xx'} dx'. \quad (\text{A.10})$$

Distribuyendo, se tiene

$$f_A = f(x) * \delta(x) + i f(x) * v.p. \frac{1}{\pi x}, \quad (\text{A.11})$$

y dado que

$$f(x) * \delta(x) = f(x), \quad f(x) * v.p. \frac{1}{\pi x} = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\eta)}{x - \eta} d\eta$$

llegamos a la señal analítica

$$\boxed{f_A(x) = f(x) + i f_H(x)}, \quad (\text{A.12})$$

en donde

$$f_H = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\eta)}{x - \eta} d\eta \quad (\text{A.13})$$

se conoce como la transformación de Hilbert de la función $f(x)$.

Es fácil demostrar que la transformación de Hilbert de la función $A \cos(kx - \omega t)$, la cual corresponde a la solución más sencilla de la ecuación de onda electromagnética unidimensional (una onda plana), es la función $A \sin(kx - \omega t)$.

Es decir, la señal analítica de la onda electromagnética $\phi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ es la versión compleja $\Phi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, la cual ya no presenta el inconveniente de las frecuencias negativas.

A.2. Paquete de ondas

Veremos cómo aplicando las propiedades del análisis de Fourier, un paquete de ondas se puede escribir de infinitas formas, todas ellas como el producto de una portadora y una envolvente.

De la sección anterior se obtuvo que una señal analítica $f_A(x)$ se puede escribir a partir de una función real $f(x)$ como $f_A(x) = f(x) + i f_H(x)$, en donde f_H es la transformada de Hilbert dada por A.13.

Escribiendo la señal analítica en forma polar, se tiene que

$$f_A = A(x)e^{i\phi(x)}, \quad (\text{A.14})$$

en donde $A(x) = \sqrt{f^2(x) + f_H^2(x)}$ y $\phi(x) = \arctan\left(\frac{f_H(x)}{f(x)}\right)$.

El espectro de la función puede ser trasladado en el dominio de Fourier arbitrariamente, como se muestra en la figura A.2, mediante una operación de convolución,

$$F_A(x') = \tilde{F}_A(x') * \delta(x' - \tilde{x}') \quad (\text{A.15})$$

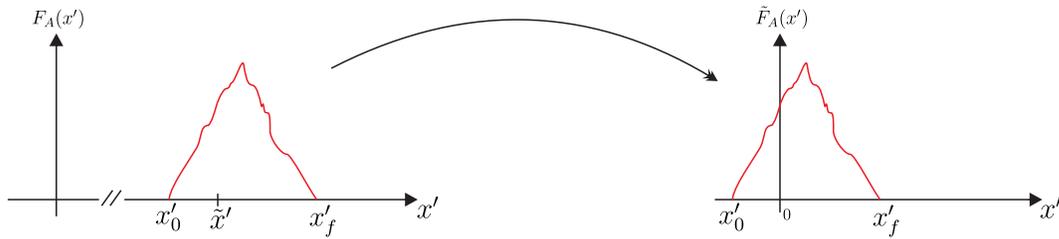


Figura A.1: Traslación del espectro de una señal de altas frecuencias a bajas frecuencias.

Esta translación es válida para un \tilde{x}' totalmente arbitrario, incluso para un valor por fuera del espectro, la expresión A.15 siempre es válida.

Es así que una señal analítica, escrita como un paquete de ondas (combinaciones de ondas monocromáticas), puede ser entendida como

$$\int_{\mathbb{R}} F_A(x') e^{+i2\pi x x'} dx' = f_A(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_A(x') * \delta(x' - \tilde{x}') e^{+i2\pi x x'} = \tilde{f}_A(x) e^{+i2\pi x \tilde{x}'}, \quad (\text{A.16})$$

en donde hemos utilizado la propiedad $\mathcal{F}[f \cdot g] = F * G$.

Entonces, dado que la señal analítica $\tilde{f}_A(x)$ es compleja, $\tilde{f}_A(x) = \tilde{A}(x)e^{i\tilde{\phi}(x)}$, tenemos que la señal deseada se puede escribir de la forma

$$f_A(x) = \tilde{A}(x)e^{i[\tilde{\phi}(x) + 2\pi x \tilde{x}']}. \quad (\text{A.17})$$

En donde es evidente que hay infinitas formas de construir la misma señal como un paquete de ondas, solo depende de la elección de \tilde{x}' , ver fig A.2

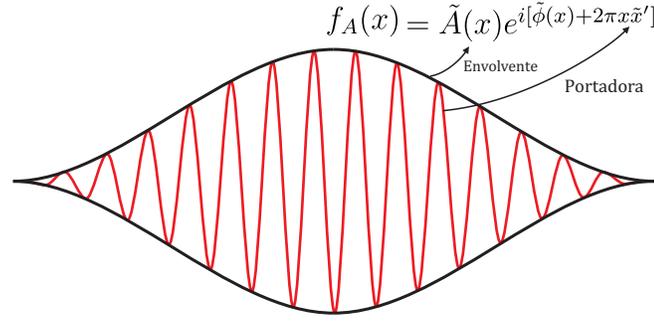


Figura A.2: Paquete de ondas

Es decir que considerar que \tilde{x}' pertenezca al espectro $[x'_0, x'_f]$ es una condición física que nosotros imponemos a la construcción del paquete de ondas, dado que no es necesaria desde el punto de vista matemático. De esta manera la frecuencia de la portadora siempre se encuentra dentro del espectro que uno detecta de la señal.

A.3. Relación de incertidumbre

Veamos ahora cómo la relación de incertidumbre puede ser deducida directamente del análisis de Fourier.

Matemáticamente

$$\int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx = \bar{x}, \quad (\text{A.18})$$

esto es equivalente al 'centro de masa' de la función $|f(x)|^2$, teniendo en cuenta la condición de normalización

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1. \quad (\text{A.19})$$

La desviación estándar, la cual puede ser interpretada como una medida de incertidumbre, es una medida de dispersión de los datos con respecto al número promedio, está definida como (ver figura A.3)

$$\Delta x = \left[\int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (\text{A.20})$$

Asumiendo que el valor medio de la distribución, se encuentra en el origen, es decir, $\bar{x} = 0$, calculamos $\Delta x \Delta x'$.

Por la definición de producto interno, $\langle \phi(x) | \psi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \cdot \psi^*(x)$ se tiene que

$$(\Delta x)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \langle x f(x), x f(x) \rangle, \quad (\text{A.21})$$

$$(\Delta x')^2 = \int_{\mathbb{R}} x'^2 |F(x')|^2 dx' = \langle x' F(x'), x' F(x') \rangle. \quad (\text{A.22})$$

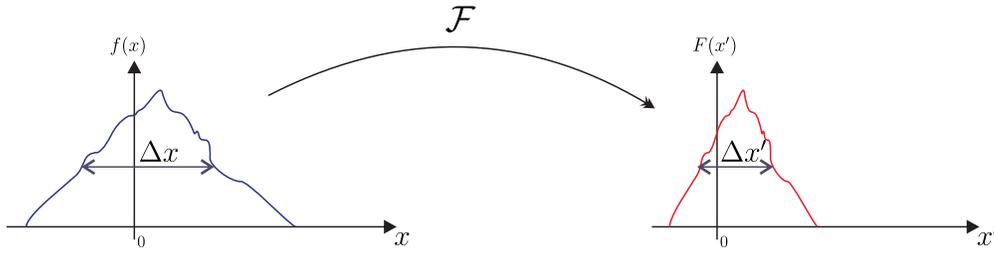


Figura A.3: Incertidumbre en los dominios para un par de Fourier

Notemos que si

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x') e^{i2\pi x x'} dx', \quad (\text{A.23})$$

entonces al derivar con respecto a x se obtiene que

$$\frac{d}{dx} f(x) = i2\pi \int_{\mathbb{R}} x' F(x') e^{i2\pi x x'} dx', \quad (\text{A.24})$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{i2\pi} \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] = x' F(x'). \quad (\text{A.25})$$

Es así que

$$(\Delta x')^2 = \langle x' F(x'), x' F(x') \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right], \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \right\rangle. \quad (\text{A.26})$$

Teorema de Parseval: La energía de una señal es igual a la energía de su transformada:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |F(x')|^2 dx'. \quad (\text{A.27})$$

Por lo tanto

$$(\Delta x')^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \frac{d}{dx} f(x), \frac{d}{dx} f(x) \right\rangle. \quad (\text{A.28})$$

Con lo cual, el producto que se deseaba calcular inicialmente se puede escribir

$$(\Delta x)^2 (\Delta x')^2 = \frac{1}{4\pi^2} \langle x f(x), x f(x) \rangle \langle f'(x), f'(x) \rangle, \quad (\text{A.29})$$

en donde $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \geq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle,$$

vemos que

$$(\Delta x)^2(\Delta x')^2 = \frac{1}{4\pi^2} \langle xf(x), xf(x) \rangle \langle f'(x), f'(x) \rangle \geq \frac{1}{4\pi^2} |\langle xf(x), f'(x) \rangle|^2. \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, nos queda resolver el producto interno de la desigualdad

$$\langle xf(x), f'(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} xf(x)f'^*(x) dx. \quad (\text{A.31})$$

Integrando por partes la ecuación A.31, tenemos que

$$u = xf(x), \quad du = [f(x) + xf'(x)] dx, \quad (\text{A.32})$$

$$v = f^*(x), \quad dv = f'^*(x) dx, \quad (\text{A.33})$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'^*(x) dx = xf(x)f^*(x)|_{-\infty}^{\infty} - \left[\int_{\mathbb{R}} f^*(x)f(x) dx + \int_{\mathbb{R}} xf^*(x)f'(x) dx \right], \quad (\text{A.34})$$

$$2 \int_{\mathbb{R}} xf(x)f'^*(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \quad (\text{A.35})$$

en donde el primer término de la derecha se desvanece dado que la función es absolutamente integrable, es decir, debe tender a cero en los extremos para que la integral sea un valor finito. También se usó la propiedad de $\langle \phi(x), \psi(x) \rangle = \langle \psi(x), \phi(x) \rangle$.

Finalmente se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'^*(x) dx = -\frac{1}{2}, \quad (\text{A.36})$$

$$\Rightarrow (\Delta x)^2(\Delta x')^2 \geq \frac{1}{4\pi^2} \left| -\frac{1}{2} \right|^2. \quad (\text{A.37})$$

Para finalmente llegar a la relación de incertidumbre

$$\Delta x \Delta x' \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (\text{A.38})$$

La desigualdad A.38 no es por sí misma un principio cuántico. Ella solo expresa una propiedad general del análisis de Fourier, donde numerosas aplicaciones pueden ser encontradas en física clásica. Cuando se tiene en cuenta el carácter ondulatorio de la materia, manifiesto mediante las relaciones de De Broglie, la relación anterior se convierte en un principio de la naturaleza, el principio de incertidumbre de Heiseberg.

Tomemos la solución de una onda plana $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, existe entonces una relación de incertidumbre entre la frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ y el tiempo, para una posición fija. Es fácil ver que si x , representa al dominio del tiempo y x' el de las frecuencias, el principio de incertidumbre correspondiente es

$$\Delta \nu \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (\text{A.39})$$

Usando la relación de De Broglie para la energía de una partícula, $E = h\nu$, se obtiene la conocida relación

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{A.40})$$

con $\hbar = h/2\pi$.

De igual forma, para un instante determinado, existe una relación de incertidumbre entre el momento y la posición de la partícula. Usando la relación de De Broglie para el momento, $\frac{2\pi p}{h} = k$ se obtiene la aún más conocida relación

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{A.41})$$

en donde x representa la posición y x' el momento de la partícula.

Bibliografía

- [1] Anton Zeilinger, Gregor Weihs, Thomas Jennewein, and Markus Aspelmeyer. Happy centenary, photon. *Nature*, 433(7023):230–238, 2005.
- [2] Chandra Roychoudhuri, Al F Kracklauer, and Kathy Creath. *The nature of light: what is a photon?* CRC Press, 2008.
- [3] Marian O Scully and Murray Sargent. The concept of the photon. *Physics Today*, 25:38, 1972.
- [4] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] Paul AM Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 114, pages 243–265. The Royal Society, 1927.
- [6] M.O. Scully and S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [7] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press, 2010.
- [8] Mark Fox. *Quantum optics: an introduction*, volume 15. OUP Oxford, 2006.
- [9] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.
- [10] Brian J Smith and MG Raymer. Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory. *New Journal of Physics*, 9(11):414, 2007.
- [11] A Gersten. Maxwell’s equations as the one-photon quantum equation. *Journal of Genetic Counseling*, 12(3):291–298, 1999.
- [12] Valeri V Dvoeglazov. Generalized maxwell and weyl equations for massless particles. *arXiv preprint math-ph/0102001*, 2001.
- [13] Valeri V Dvoeglazov. Generalized maxwell equations from the einstein postulate. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(28):5011, 2000.
- [14] Iwo Bialynicki-Birula. The photon wave function. In *Coherence and Quantum Optics VII*, pages 313–322. Springer, 1996.

- [15] Iwo Bialynicki-Birula. V photon wave function. volume 36 of *Progress in Optics*, pages 245 – 294. Elsevier, 1996.
- [16] Iwo Bialynicki-Birula. On the wave function of the photon. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, 86(1):97–116, 1994.
- [17] Justin Dressel, Konstantin Y. Bliokh, and Franco Nori. Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism. *Physics Reports*, 589:1 – 71, 2015. Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism.
- [18] Peter J Mohr. Solutions of the maxwell equations and photon wave functions. *Annals of Physics*, 325(3):607–663, 2010.
- [19] JE Sipe. Photon wave functions. *Physical Review A*, 52(3):1875, 1995.
- [20] Donald H Kobe. A relativistic schrödinger-like equation for a photon and its second quantization. *Foundations of Physics*, 29(8):1203–1231, 1999.
- [21] Enrico Fermi. Quantum theory of radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 4:87–132, Jan 1932.
- [22] Theodore Duddell Newton and EP Wigner. Localized states for elementary systems. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):400, 1949.
- [23] Arthur S Wightman. On the localizability of quantum mechanical systems. *Reviews of Modern Physics*, 34(4):845, 1962.
- [24] Margaret Hawton. Photon wave mechanics and position eigenvectors. *Phys. Rev. A*, 75:062107, Jun 2007.
- [25] Ludwig Silberstein. Elektromagnetische grundgleichungen in bivektorieller behandlung. *Annalen der Physik*, 327(3):579–586, 1907.
- [26] Ludwig Silberstein. Nachtrag zur abhandlung über, “elektromagnetische grundgleichungen in bivektorieller behandlung”. *Annalen der Physik*, 329(14):783–784, 1907.
- [27] C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [28] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer, 2007.
- [29] Peter Lambropoulos and David Petrosyan. *Fundamentals of quantum optics and quantum information*, volume 23. Springer, 2007.
- [30] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130:2529–2539, Jun 1963.
- [31] Ashok Muthukrishnan, Marlan O Scully, and M Suhail Zubairy. The concept of the photon—revisited. *Optics and photonics news*, 14(10):18–27, 2003.

- [32] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley, 1997.
- [33] Ole Keller. *Light-The Physics of the Photon*. CRC Press, 2014.
- [34] Iwo Bialynicki-Birula and Zofia Bialynicka-Birula. The role of the riemann–silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(5):053001, 2013.
- [35] Daniel Kleppner. Inhibited spontaneous emission. *Physical Review Letters*, 47(4):233, 1981.
- [36] Randall G Hulet, Eric S Hilfer, and Daniel Kleppner. Inhibited spontaneous emission by a rydberg atom. *Physical review letters*, 55(20):2137, 1985.
- [37] W Jhe, A Anderson, EA Hinds, D Meschede, L Moi, and S Haroche. Suppression of spontaneous decay at optical frequencies: Test of vacuum-field anisotropy in confined space. *Physical review letters*, 58(7):666, 1987.
- [38] Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical review letters*, 58(20):2059, 1987.
- [39] DJ Heinzen, JJ Childs, JE Thomas, and MS Feld. Enhanced and inhibited visible spontaneous emission by atoms in a confocal resonator. *Physical review letters*, 58(13):1320, 1987.
- [40] Leonardo Calderón. Noción de estados vibracionales del campo electromagnético: una nueva visión sobre fotones libres. Tesis, Universidad Industrial de Santander, 2015.
- [41] Mark A Linne. *Spectroscopic measurement: an introduction to the fundamentals*. Academic Press, 2002.
- [42] B.W. Shore. *The Theory of Coherent Atomic Excitation: Simple atoms and fields*. The Theory of Coherent Atomic Excitation. Wiley, 1990.
- [43] Wilbur B Davenport, William L Root, et al. *An introduction to the theory of random signals and noise*, volume 159. McGraw-Hill New York, 1958.
- [44] Albert Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtetes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der physik*, 322(6):132–148, 1905.
- [45] Ernest O Lawrence and JW Beams. The element of time in the photoelectric effect. *Physical Review*, 32(3):478, 1928.
- [46] A Theodore Forrester, Richard A Gudmundsen, and Philip O Johnson. Photoelectric mixing of incoherent light. *Physical Review*, 99(6):1691, 1955.
- [47] Luis de La Peña and Ana Maria Cetto. *The quantum dice: an introduction to stochastic electrodynamics*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.

- [48] Timothy H Boyer. A brief survey of stochastic electrodynamics. In *Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics*, pages 49–63. Springer, 1980.
- [49] Timothy H. Boyer. Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Phys. Rev. D*, 11:790–808, Feb 1975.
- [50] Trevor Marshall and Emilio Santos. Stochastic optics: A reaffirmation of the wave nature of light. *Foundations of physics*, 18(2):185–223, 1988.
- [51] Albert Einstein. Zur quantentheorie der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, 18, 1917.
- [52] Volker BE Thomsen. Why do spectral lines have a linewidth? *J. Chem. Educ*, 72(7):616, 1995.
- [53] Bahaa EA Saleh, Malvin Carl Teich, and Bahaa E Saleh. *Fundamentals of photonics*, volume 22. Wiley New York, 1991.
- [54] A. Yariv and P. Yeh. *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford Series in Electrical an. Oxford University Press, 2007.
- [55] Serge Haroche and Jean-Michel Raimond. *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons*. Oxford university press, 2006.
- [56] M Brune, S Haroche, JM Raimond, L Davidovich, and N Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of “schrödinger cat”states. *Physical Review A*, 45(7):5193, 1992.
- [57] Philippe Grangier, Juan Ariel Levenson, and Jean-Philippe Poizat. Quantum non-demolition measurements in optics. *Nature*, 396(6711):537–542, 1998.
- [58] Arno Rauschenbeutel, Gilles Nogues, Stefano Osnaghi, Patrice Bertet, Michel Brune, Jean-Michel Raimond, and S Haroche. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity qed. *Physical Review Letters*, 83(24):5166, 1999.