

Implementación de herramientas matemáticas, basadas en la lógica difusa, a problemas de  
producción agrícola

Leidy Vanesa Espitia Cruz

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Élder Jesús Villamizar Roa

Doctor en Matemáticas

Codirector

Gilberto Arenas Díaz

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2024

### **Dedicatoria**

A Dios quien me ha otorgado la vida y las posibilidades para la realización de este trabajo de investigación.

A mi madre, quien con su amor y dedicación me ha formado y apoyado incondicionalmente. Ella es mi fuerza, mi apoyo y mi guía; quien nunca me ha abandonado.

A mi hermano, quien ha sido un apoyo y un hombre amigo al cual siempre recurrir.

A mis profesores, por compartir su conocimiento y brindarme su orientación, siendo una fuente de inspiración que me ayudó a superar los desafíos a lo largo de este proceso.

A mi director de tesis Élder Jesús Villamizar Roa, quien me guio en este proceso con la mayor disposición y dedicación, y de quien he recibido un apoyo incondicional.

A mis compañeros y amigos con quienes he compartido, he crecido, he aprendido en esta etapa de formación, de quienes he recibido apoyo, ayuda y motivación, incluso en los momentos más difíciles de este viaje académico.

### **Agradecimientos**

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis.

En primer lugar, agradezco a mi director de tesis Élder Jesús Villamizar Roa y mi codirector Gilberto Arenas Díaz, por su invaluable guía, paciencia y apoyo durante todo este proceso. Sus conocimientos y consejos han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Asimismo, agradezco a la Universidad Industrial de Santander y el proyecto “Formación de capital humano de alto nivel para el departamento de Santander en la Universidad Industrial de Santander” (BPIN 2020000100536), el cual me brindó el apoyo financiero necesario para realizar el programa de maestría.

Finalmente, a mi familia, por su amor, comprensión y apoyo incondicional. Gracias por creer en mí y por ser mi fuente constante de inspiración.

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>19</b>
<b>1. Fundamentos del cultivo de papa</b>	<b>29</b>
1.1. Cultivo de papa	29
1.2. Tipos de suelo para cultivo de papa	29
1.3. Ciclo del cultivo de papa	30
1.4. Plagas en el cultivo de papa	31
1.4.1. El gusano blanco de la papa ( <i>Premnotrypes Vorax</i> )	31
1.4.2. La polilla de la papa ( <i>Phthorimaea Operculella Zeller</i> )	32
1.4.3. Polilla guatemalteca ( <i>Tecia Solanivora</i> )	32
1.4.4. Pulguilla ( <i>Epitrix Spp.</i> )	33
1.4.5. Mosca blanca ( <i>Trialeurodes Vaporariorum</i> )	33
1.4.6. Babosas ( <i>Deroceras Sp.</i> )	33
1.5. Enfermedades	34
1.5.1. Sarna común ( <i>Streptomyces Scabiei</i> )	34
1.5.2. Costra negra ( <i>Rhizoctonia Solani</i> )	34
1.5.3. Gota ( <i>Phytophthora Infestans</i> )	35
1.5.4. Tizón temprano ( <i>Alternaria Solani</i> )	35

1.6. Métodos de control de plagas	36
1.6.1. Control cultural	36
1.6.2. Control químico	36
1.6.2.1. Tiametoxam	37
1.6.2.2. Lambda-Cihalotrina	37
<b>2. Conceptualización matemática y estadística</b>	<b>37</b>
2.1. Números fuzzy	38
2.1.1. Aritmética entre números fuzzy	40
2.1.2. Diferencia generalizada de Hukuhara	41
2.2. Estructura métrica	42
2.3. Análisis fuzzy	43
2.3.1. Diferenciabilidad de una función fuzzy	44
2.3.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias impulsivas fuzzy	48
2.4. Algunos teoremas de aplicaciones contractivas	50
2.5. Lógica fuzzy	51
2.5.1. Operadores lógicos fuzzy	51
2.6. Modelos basados en reglas fuzzy	54
2.6.1. Modelo Mamdani	54
2.6.2. Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)	56
2.7. Técnicas estadísticas de estimación de parámetros	59

2.7.1. Tablas de vida	59
2.7.2. Mínimos cuadrados no lineales	61
2.7.3. Regresión polinómica local (LOESS)	61
<b>3. Tasa intrínseca de crecimiento y evolución de la población del <i>Premnotrypes Vorax</i> mediante información fuzzy</b>	<b>63</b>
3.1. Materiales y métodos	66
3.2. Resultados	70
3.2.1. Estimación de la tasa intrínseca de crecimiento del gusano blanco de la papa mediante tablas de vida	70
3.2.2. Diseño del modelo fuzzy	72
3.2.3. Población en función del tiempo	76
<b>4. Existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy bajo la derivada generalizada de Hukuhara mediante principios de mapeo de tipo contractivo</b>	<b>83</b>
4.1. Problema de valor inicial impulsivo fuzzy	86
4.2. Teoremas de existencia y unicidad	105
<b>5. Aplicación de ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy en el control de la dinámica de poblaciones</b>	<b>118</b>
5.1. Materiales y métodos	120

5.1.1. Ecuación diferencial impulsiva fuzzy	120
5.2. Resultados	124
5.2.1. Población dependiente del tiempo	124
5.2.2. Caso de estudio: <i>Phthorimaea Operculella Zeller</i> en el cultivo de papa	127
5.2.2.1. Tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla del tubérculo de la papa	127
5.2.2.2. Población de la polilla de la papa en función del tiempo	132
<b>6. Comparación de dos enfoques para resolver un sistema fuzzy que describe la cinética de degradación de plaguicidas en modelos de absorción de plantas</b>	<b>137</b>
6.1. Modelo matemático	139
6.1.1. Concentración de plaguicida en suelo	140
6.1.2. Concentración de plaguicidas en el tubérculo papa	141
6.1.2.1. $(i)-(i)-gH$ derivada	142
6.1.2.2. $(i)-(ii)-gH$ derivada	143
6.1.2.3. $(ii)-(i)-gH$ derivada	144
6.1.2.4. $(ii)-(ii)-gH$ derivada	145
6.2. Un primer enfoque a la validación del modelo	146
6.2.1. Datos iniciales	147
6.2.2. Parámetros	147
6.2.2.1. Estimación de parámetros	149
6.2.3. Cálculo de la solución de (49)	154

6.3. Un segundo enfoque. Un modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)	156
6.4. Comparación de los dos enfoques	160
6.5. Cultivo de papa Vereda el Portillo en Guaca, Santander	161
6.5.1. Experimento de campo	161
6.5.2. Resultados	163
<b>7. Otros cultivos agrícolas</b>	<b>166</b>
7.1. La caña de azucar	166
7.1.1. Problema: estimación del porcentaje de sacarosa de una planta de caña de azúcar	167
7.2. Café	168
7.2.1. Problema: determinación de la severidad de la Roya del café	169
7.2.2. Problema: determinación de la incidencia de la roya del café y estimación de la tasa de infección	169
7.3. Cacao	171
7.3.1. Problema: el cadmio en suelo y cadmio en el cacao	171
7.4. Maíz	172
7.4.1. Problema: control del peso del grano del maíz	172
7.5. Arándanos	173
7.5.1. Problema: degradación cinética de fungicidas en arándano	174
<b>8. Conclusiones</b>	<b>175</b>

<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>198</b>
-----------------------------------	------------

<b>Apéndices</b>	<b>199</b>
------------------	------------

**Lista de Figuras**

Figura 1.	Línea de tiempo de algunas aplicaciones de modelos basados en reglas de inferencia fuzzy	24
Figura 2.	Ciclo del cultivo de papa	31
Figura 3.	Gusano blanco	32
Figura 4.	Polilla de la papa	32
Figura 5.	Polilla Guatemalteca	33
Figura 6.	Pulguilla	33
Figura 7.	Mosca blanca	33
Figura 8.	Babosa	34
Figura 9.	Sarna común	34
Figura 10.	Costra negra	34
Figura 11.	Gota	35
Figura 12.	Tizón temprano	35
Figura 13.	Estructura de un modelo basado en reglas fuzzy	55
Figura 14.	Ilustración método de inferencia modelo de Mamdani	57
Figura 15.	Esquema del enfoque para el modelado de la población del Premnotype Vorax	71

- Figura 16. Términos lingüísticos para la variable de entrada Temperatura ( $T^{\circ}C$ ) (Temperatura muy baja  $T_{ma}$ , Temperatura baja  $T_b$ , Temperatura media  $T_m$ , Temperatura alta  $T_a$  y Temperatura muy alta  $T_{ma}$ ) representados como números fuzzy triangulares y trapezoidales 75
- Figura 17. Funciones lineales de base para las reglas de inferencia, interpoladas a partir de los datos *a priori* de las tasas intrínsecas de crecimiento ( $r$ ) obtenidos en la Tabla 5 75
- Figura 18. Función resultante  $r(T)$  del modelo TSK diseñado con la temperatura  $T$  como variable de entrada 76
- Figura 19. Poblaciones iniciales  $P_{0(a)}$ ,  $P_{0(b)}$  y  $P_{0(c)}$  del gusano blanco de la papa por unidad de superficie, con diferentes  $\alpha$ -niveles 79
- Figura 20. (i)- $gH$  y (ii)- $gH$  soluciones a  $7^{\circ}C$  79
- Figura 21. (i)- $gH$  y (ii)- $gH$  soluciones a  $13^{\circ}C$  81
- Figura 22. (i)- $gH$  y (ii)- $gH$  soluciones a  $19^{\circ}C$  82
- Figura 23. Soporte ( $\alpha = 0$ ) (curvas azul y amarilla) y la altura ( $\alpha = 1$ ) (curva púrpura) de la solución fuzzy de (23) 88
- Figura 24. Soporte ( $\alpha = 0$ ) (curvas azul y amarilla) y la altura ( $\alpha = 1$ ) (curva púrpura) funciones de la tercera solución del Problema (24) 89
- Figura 25. Modelo TSK diseñado para la estimación de  $r$  130
- Figura 26. Función resultante  $r(T)$  del modelo TSK diseñado 132

Figura 27. Poblaciones iniciales $P_a$ , $P_b$ y $P_c$ de la polilla del tubérculo de la papa por unidad de superficie	134
Figura 28. (i)- $gH$ y (ii)- $gH$ soluciones a $7^\circ C$	134
Figura 29. (i)- $gH$ y (ii)- $gH$ soluciones a $13^\circ C$	135
Figura 30. (i)- $gH$ y (ii)- $gH$ soluciones a $19^\circ C$	136
Figura 31. Datos fuzzy de concentraciones iniciales $C_{p_0}$ y $C_{s_0}$	147
Figura 32. Concentración de plaguicidas en el suelo a lo largo del tiempo	155
Figura 33. Concentración de plaguicidas en la papa a lo largo del tiempo	156
Figura 34. Variables de entrada y salida en el modelo TSK	158
Figura 35. Primer enfoque vs segundo enfoque	160
Figura 36. Cultivo de papa Vereda el Portillo	161
Figura 37. Resultados análisis de suelo	162
Figura 38. Surcos del experimento del 1 al 5	163
Figura 39. Surcos de papa afectados por la granizada	164
Figura 40. Producción de cada uno de los surcos	165
Figura 41. Principales cultivos agrícolas en Colombia	166
Figura 42. Caña de azúcar	166
Figura 43. Café	168
Figura 44. Roya del café	169
Figura 45. Cacao	171

Figura 46.	El cadmio en granos de cacao	171
Figura 47.	Maíz	172
Figura 48.	Arándonos	173

**Lista de Tablas**

Tabla 1.	Relaciones entre los parámetros de las tablas de vida	59
Tabla 2.	Parámetros estimados de las funciones de supervivencia y regresiones lineales de las tasas de desarrollo por etapas	69
Tabla 3.	Tasas de supervivencia del gusano blanco de la papa en sus diferentes etapas de desarrollo, a temperaturas de $5^{\circ}C$ , $10^{\circ}C$ , $15^{\circ}C$ , $20^{\circ}C$ y $25^{\circ}C$	72
Tabla 4.	Fecundidad, tasa neta de reproducción y tiempo generacional medio de hembras adultas del gusano blanco de la papa a temperaturas de $5^{\circ}C$ , $10^{\circ}C$ , $15^{\circ}C$ , $20^{\circ}C$ y $25^{\circ}C$	73
Tabla 5.	Tasa intrínseca de crecimiento de la población del gusano blanco de la papa por semana a diferentes temperaturas	74
Tabla 6.	Tasa intrínseca de crecimiento de la población del gusano blanco de la papa por semana a diferentes temperaturas	77
Tabla 7.	$\alpha$ -niveles de las $(i)$ - $gH$ y $(ii)$ - $gH$ soluciones para temperaturas de $7^{\circ}C$ , $13^{\circ}C$ y $19^{\circ}C$	80
Tabla 8.	Primera colección de datos de la tasa intrínseca de crecimiento de la polilla del tubérculo de la papa	129
Tabla 9.	Escalamiento de datos de la tabla 8	129
Tabla 10.	Base de reglas de inferencia fuzzy	131

Tabla 11.	Tasa intrínseca de crecimiento semanal de la población de la polilla del tubérculo de la papa a diferentes temperaturas	132
Tabla 12.	Datos obtenidos en laboratorio	146
Tabla 13.	Datos de entrada de LOESS	149
Tabla 14.	Resultado de las iteraciones de minimización (60)	150
Tabla 15.	Concentración de tiametoxam en el suelo (Abd-Alrahman, 2014)	151
Tabla 16.	Resultado de las iteraciones de minimización (61)	153
Tabla 17.	Parámetros del modelo (49) para tiametoxam	153
Tabla 18.	Antecedente de las reglas de inferencia.	159
Tabla 19.	Tratamientos de cada surco	163
Tabla 20.	Producción por surco	164

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Análisis de resultados laboratorio del suelo y recomendaciones	199
Apéndice B. Informe de resultados primera muestra de papa	200
Apéndice C. Informe de resultados segunda muestra de papa	201
Apéndice D. Informe de resultados tercera muestra de papa	202

## Resumen

**Título:** Implementación de herramientas matemáticas, basadas en la lógica difusa, a problemas de producción agrícola \*

**Autor:** Leidy Vanesa Espitia Cruz \*\*

**Palabras Clave:** modelos difusos, cultivo de papa, dinámicas poblacionales, tasa intrínseca de crecimiento, degradación de pesticidas.

**Descripción:** En esta tesis, se aplican herramientas de la lógica y el análisis fuzzy para estudiar y modelar algunas dinámicas agrícolas, que están impregnadas de incertidumbre, vaguedad, imprecisión y subjetividad en los parámetros y en los datos involucrados. En particular, se abordan problemas relacionados con el proceso de vigilancia y control de plagas en el cultivo de papa. En primer lugar, considerando que el gusano blanco de la papa (*Premnotrypes Vorax*) es una de las plagas más dañinas y económicamente devastadoras para el cultivo de papa, conocer su ciclo de vida y estimar su tasa intrínseca de crecimiento es crucial para seleccionar un método de control adecuado. Se presenta un modelo Malthusiano fuzzy que describe la evolución del gusano blanco en el cultivo, considerando que la tasa intrínseca de crecimiento y los datos iniciales reportados sobre el problema son de naturaleza fuzzy. Se estima la tasa intrínseca de crecimiento del gusano blanco en función de la temperatura, mediante un modelo basado en reglas fuzzy de tipo Takagi–Sugeno–Kang (TSK); y dado que en la práctica la población inicial del gusano blanco en un cultivo es subjetiva, imprecisa y vaga, conociendo la tasa intrínseca de crecimiento, se propone y resuelve un problema de valor inicial fuzzy (PVIF) para determinar la evolución en el tiempo de la población del gusano blanco, permitiendo así estimar la población en función de la temperatura media semanal dentro de un intervalo cuya longitud depende del grado de imprecisión en la población inicial y en la tasa de crecimiento. En el segundo problema, se consideran las ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy (EDIF), para el modelado de procesos sometidos a impulsos a lo largo de su evolución que involucran datos y parámetros de naturaleza fuzzy. Se estudia la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial impulsivos fuzzy (PVIIF), bajo la derivada generalizada de Hukuhara, y la diferencia generalizada de Hukuhara en la definición de la variación en cada punto de impulso, en el contexto de funciones débilmente contractivas en conjuntos parcialmente ordenados. Se aplican las EDIF para modelar el crecimiento de poblaciones sujetas a impulsos de decrecimiento; se estudia específicamente la población de la polilla de la papa (*Phthorimaea Operculella Zeller*), donde la incertidumbre y la subjetividad se manifiestan en la tasa intrínseca de crecimiento, y la naturaleza no determinista de la población inicial. Para estimar la tasa intrínseca de crecimiento de la polilla se diseña un modelo TSK, y posteriormente, conociendo este parámetro, se utiliza un PVIIF para describir la evolución de la población de esta plaga bajo un control químico en el cultivo en diferentes tiempos. En el tercer problema, dado que el control químico en cultivos agrícolas incluye el uso de agentes químicos, se analiza matemáticamente la disminución de residuos de pesticidas en tubérculos de papa. Se propone y se resuelve un PVIF asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales fuzzy para modelar la concentración de pesticidas en papa tras la última fumigación del cultivo de papa. Se aplica el modelo a una situación real, evaluando la evolución de la concentración de tiametoxam en tubérculos de papa desde dos enfoques: en el primer enfoque, considerando un conjunto reducido de datos de campo, se utiliza una regresión polinómica (LOESS) para obtener nuevos datos, que permiten estimar los parámetros involucrados en el PVIF. En el segundo enfoque, se diseña un modelo TSK para aproximar la degradación de la concentración de tiametoxam basado en reglas fuzzy derivadas de los datos obtenidos por la regresión LOESS. Ambos enfoques muestran un comportamiento similar y adecuado, incluso con un número limitado de datos fuzzy. El contenido desarrollado en esta tesis es aplicable a una amplia variedad de sistemas dinámicos y pueden ser de gran relevancia en la toma de decisiones por parte de los agricultores.

---

\* Tesis de Maestría

\*\* Facultad de Ciencias. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas. Codirector: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas.

## Abstract

**Title:** Implementation of mathematical tools, based on fuzzy logic, to agricultural production problems \*

**Author:** Leidy Vanesa Espitia Cruz \*\*

**Keywords:** fuzzy models, potato crop, population dynamics, intrinsic growth rate, pesticide degradation.

**Description:** In this thesis, we apply fuzzy logic and fuzzy analysis tools to study and model some agricultural dynamics, which are impregnated with uncertainty, vagueness, imprecision and subjectivity in the parameters and the data involved. In particular, we study problems related with the monitoring and control process of pests in the potato crop. In the first one, considering that the white potato worm (*Premnotrypes Vorax*) is one of the most damaging and economically devastating pests to the potato crop, knowing its life cycle and estimating its intrinsic growth rate is crucial for selecting an appropriate control method. We present a fuzzy Malthusian model describing the evolution of the white potato worm in the crop, considering that the intrinsic growth rate and the reported initial data on the problem are of fuzzy nature. We estimate the intrinsic growth rate of the white potato worm, in function of the temperature, by using a Takagi–Sugeno–Kang (TSK) type fuzzy rule-based model; and since in practice the initial white potato worm population in a crop is subjective, imprecise and vague, knowing the intrinsic growth rate, we propose and solve a fuzzy initial value problem (FIVP) to determine the evolution in time of the white potato worm population, allowing us to estimate the population as a function of the mean weekly temperature and time within an interval whose length depends on the degree of imprecision of the initial population and the growth rate. In the second problem, we consider the fuzzy impulsive differential equations (FIDE), for the modeling of processes subject to impulses throughout their evolution involving data and parameters of a fuzzy nature. We study the existence and uniqueness of solutions for fuzzy impulsive initial value problems (FIIVP), under the generalized Hukuhara derivative, and the generalized Hukuhara difference in the variation definition at each impulse point, in the context of the weakly contractive mappings over partially ordered sets. We apply FIDE to model the growth over time of populations subject to decreasing impulses; we study specifically the potato tuber moth (*Phthorimaea Operculella Zeller*) population, where the uncertainty and subjectivity are observed in the intrinsic growth rate, and in the non-deterministic nature of the initial population. To estimate the intrinsic growth rate of the potato tuber moth we design a TSK model, and subsequently, knowing this parameter, we use a FIIVP to describe the evolution of the population of this pest under chemical control in the crop at different times. In the third problem, taking into account that the chemical control in agricultural crops includes the use of chemical agents, we analyze mathematically the decrease of pesticide residues in potato tubers. We propose and solve a FIVP associated with a fuzzy differential equations system to model the pesticide concentration in potato tubers after the last spraying of the potato crop. We apply the model in a real situation, evaluating the evolution of the thiamethoxam concentration in potato tubers, by two approaches: in the first approach, considering a small set of field data, we use a polynomial regression (LOESS) to obtain new data, which allow us to estimate the parameters involved in the FIVP. In the second approach, we design a TSK model to approximate the degradation of thiamethoxam concentration, based on fuzzy rules derived from data obtained by LOESS regression. These two approaches show a similar and suitable behavior, even with a limited amount of fuzzy data. The content that we develop in this thesis is applicable to a large class of dynamical systems and can be of great relevance to the decision making of growers.

---

\* Master Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas. Codirector: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas.

## Introducción

En Colombia, el sector agrícola constituye una parte fundamental de la economía, contribuyendo con un 6% del Producto Interno Bruto (PIB) nacional en 2022 (FEDEPAPA y FNFP, 2023b; CORTEVA). Entre los principales cultivos agrícolas se destacan los cultivos de flores, plátano, café, azúcar, arroz y papa, que en conjunto aportan el 70% del PIB agrícola del país. En particular, el cultivo de papa representa el 3.3% de este total. El 90% de la producción nacional de papa se concentra en los departamentos de Cundinamarca (37%), Boyacá (27%), Nariño (23%), Antioquia (5%), Cauca (3%), Santander (2.2%), Norte de Santander (2%), Tolima (1%) y Caldas (0.2%).

De acuerdo con los informes recientes de la Federación Colombiana de Productores de Papa (Fedepapa) y el Fondo Nacional de Fomento de la Papa (FNFP), Santander se posiciona como la cuarta economía del país, aportando el 6.31% del PIB nacional. Su actividad agrícola se caracteriza por cultivos permanentes como la caña, la palma de aceite, la piña, la mandarina, el limón y el plátano, y cultivos transitorios de yuca, cebolla de rama, tomate y papa. En 2022, la producción de papa en Santander representó el 1.27% de la producción agrícola del departamento, consolidándose como el sexto departamento con mayor superficie dedicada a este cultivo en Colombia, con un área sembrada estimada en 2023 de 2.654 hectáreas y una producción aproximada de 55.734 toneladas (21 toneladas por hectárea). Es importante destacar que el cultivo de papa ocupa el noveno lugar entre los productos agrícolas en Colombia, generando cerca de 100.000 empleos directos y más de 250.000 empleos indirectos, tanto en zonas rurales como urbanas. Además, es uno de los cultivos con mayor demanda de fungicidas e insecticidas para el control de problemas fitosanitarios, y el segundo en uso de fertilizantes. Estos datos subrayan la importancia de la actividad

agrícola y, en particular, de la producción de papa a nivel nacional y departamental.

En el desarrollo de la actividad agrícola se ejecutan una serie de procesos que el agricultor debe vigilar y controlar de manera eficiente con el fin de obtener una cosecha de calidad, que sea apta para el consumo humano y que además genere una ganancia económica. Un proceso fundamental en cualquier cultivo agrícola es el control de sus problemas fitosanitarios como las plagas y las enfermedades (ICA y MINAGRO, 2011; Acuña *et al.*, 2015; CORTEVA). Los agricultores realizan fumigaciones periódicas de manera tradicional, utilizando, al parecer, insecticidas sin un conocimiento totalmente técnico y específico relacionado con la adecuación de los tiempos, las cantidades óptimas de los productos químicos utilizados, ni la evolución y características particulares de la plaga en el cultivo. El control de plagas es crucial para asegurar la calidad del producto y un buen valor en el mercado, por lo tanto, el poseer conocimiento sobre el comportamiento y las dinámicas poblacionales de las plagas y enfermedades en los cultivos, las formas de infección, así como sobre el uso de químicos y comportamiento de estos sobre el producto final cosechado, es crucial para la toma de decisiones informadas.

Aunque existen datos y conocimiento acumulado sobre el proceso de producción de los diferentes cultivos agrícolas, así como sobre algunos procesos biológicos de las plagas que los afectan, hasta donde sabemos, se carece de estudios basados en modelos matemáticos concretos, que permitan describir dinámicas en el cultivo, considerando que la información (población inicial de plagas en el cultivo, concentración de pesticidas en papa, datos de campo, etc.) y parámetros (tasas de crecimiento, tasas de supervivencia, tasas de desarrollo, efectividad del control de plagas, etc.) involucrados se encuentran impregnados de incertidumbre, subjetividad, ambigüedad, imprecisión, y vaguedad, debido a la naturaleza del problema, a la incertidumbre e imprecisión en el proceso de recolección de datos, a la propia naturaleza no determinista de los datos y parámetros,

entre otros factores. De manera que, para modelar problemas y dinámicas agrícolas, se hace necesario establecer un enfoque matemático adecuado el cual permita lidiar con la incertidumbre y la naturaleza fuzzy del problema, así como la de los datos y parámetros involucrados.

En el tratamiento de la incertidumbre se destacan el enfoque probabilista y la lógica fuzzy. El enfoque probabilista busca lidiar con la incertidumbre causada por la aleatoriedad de eventos, siendo fundamental para el tratamiento de esta el uso de métodos estocásticos; por otro lado, la lógica fuzzy es una lógica multivaluada, es decir que permite más de dos valores de verdad (valores entre  $[0, 1]$ ), en la cual se establece un concepto de pertenencia y verdad parcial proporcionando un marco matemático que lidia con la incertidumbre y establece herramientas formales para su tratamiento. La lógica fuzzy tuvo su origen en 1965 con la definición de conjunto fuzzy en el artículo “Fuzzy sets” de Lofti A. Zadeh (Zadeh, 1965), catedrático de la Universidad de Berkeley, California, USA. Esta lógica se propone como una forma de procesar la información, permitiendo que los datos del problema y las afirmaciones planteadas tengan un grado parcial de pertenencia y verdad en relación con un marco de conocimiento universal.

A partir de la definición de conjunto fuzzy se extienden las estructuras de la teoría de conjuntos y la lógica clásica (proposiciones, las relaciones, las implicaciones, etc.) al contexto fuzzy (Klir y Yuan, 1995; Villamizar-Roa y Arenas-Díaz, 2018). De igual manera, se desarrolla una teoría de análisis fuzzy, partiendo de la definición de una función fuzzy y el análisis de multifunciones, para el estudio de la continuidad, la diferenciabilidad, la medibilidad y la integración de funciones fuzzy, permitiendo a posteriori el estudio y la aplicación de ecuaciones diferenciales fuzzy en el modelado de fenómenos y procesos dinámicos que involucran incertidumbre, subjetividad y vaguedad (Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015; Villamizar-Roa y Arenas-Díaz, 2018; Angulo-Castillo *et al.*, 2020). Esta teoría ha cobrado gran

importancia en la comunidad científica, principalmente por sus aplicaciones.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) han constituido una herramienta importante en el modelado matemático de procesos y fenómenos dinámicos, y de igual manera, la extensión al contexto fuzzy de esta teoría es una herramienta fundamental en el análisis de fenómenos sujetos a imprecisión, vaguedad, subjetividad e incertidumbre tanto en los parámetros como en los datos iniciales involucrados (Angulo-Castillo *et al.*, 2020; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015). El desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales fuzzy (EDF) empieza con Kandel y Byatt (1978) a partir de la extensión del concepto de la derivada de Hukuhara a conjuntos fuzzy (Puri y Ralescu, 1983); Kaleva (1987) establece las bases del análisis fuzzy necesarias para el abordaje de problemas de valor inicial fuzzy (PVIF), problema que es estudiado por diversos autores (Puri y Ralescu, 1983; Buckley y Feuring, 2000; Fernández *et al.*, 2003; Lakshmikantham y Mohapatra, 2004; Galanis *et al.*, 2005). En esta tesis se consideran, se plantean y resuelven PVIF empleando el concepto de derivada generalizada de Hukuhara de funciones fuzzy (ver Capítulo 2), enfoque que ha sido estudiado en Bede (2008); Bede y Stefanini (2012); Chalco-Cano *et al.* (2013); Villamizar-Roa *et al.* (2015); Osuna *et al.* (2022, 2023).

Por otro lado, en el contexto de la lógica fuzzy, en la década de los 70's con el desarrollo de modelos basados en reglas de inferencia fuzzy, aparecen las primeras aplicaciones de esta herramienta en el diseño de sistemas de control fuzzy para el desarrollo de procesos industriales. Los modelos basados en reglas de inferencia fuzzy, son sistemas que emulan el proceso de razonamiento de un humano experto en un campo específico de conocimiento empleando una base de conocimiento (datos, literatura, experimentos, experiencia, etc.) expresado en términos de una serie de reglas que generan inferencias fuzzy correspondientes al área y el contexto del problema. En 1974, Mamdani planteó un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy conocido como modelo

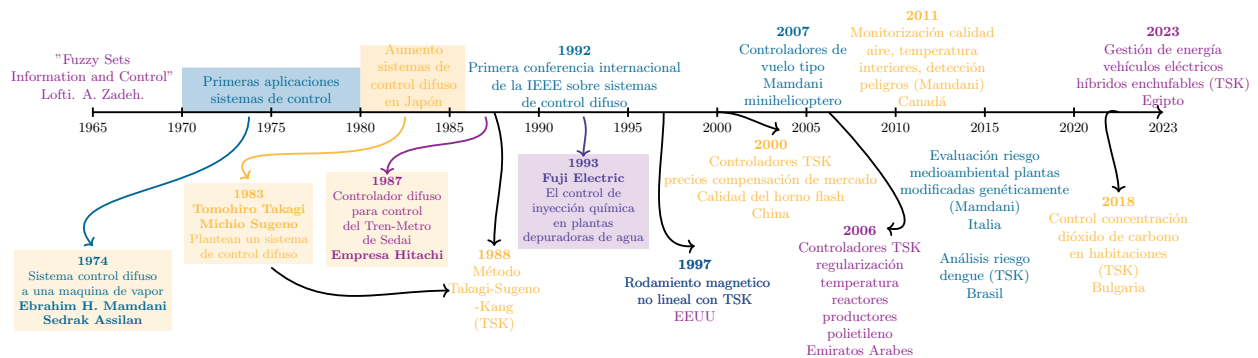
de Mamdani. En 1983, Takagi y Sugeno (Sugeno y Takagi, 1983) plantean otro tipo de modelo basado en reglas fuzzy el cual posteriormente es enriquecido por Geuntaek Kang (Sugeno y Kang, 1988), permitiendo trabajar sistemas que tratan con una base de datos muy extensa, posibilitando la creación de reglas condicionales más sencillas y objetivas.

Recientemente, se han implementado modelos basados en reglas de inferencia fuzzy en el abordaje de problemas en los campos de la biología (de Barros *et al.*, 2000, 2003), la medicina y la epidemiología (Ortega *et al.*, 2000; Jafelice *et al.*, 2004; Massad *et al.*, 2009), la aeronáutica (Sanchez *et al.*, 2007), los procesos de control de calidad (Tennakoon *et al.*, 2010; Wan *et al.*, 2000), los análisis de riesgo (Silveira y de Barros, 2015), la mecánica (Biswas *et al.*, 2022; Ashwini *et al.*, 2023), los análisis de mercado (Niimura y Nakashima, 2001), el diseño de sistemas de control fuzzy (Oshima *et al.*, 1988; Micera *et al.*, 1999; Mahfouf *et al.*, 2001; Ghasem, 2006; Yordanova, 2018; Szedlak-Stinean *et al.*, 2022), entre otras áreas y disciplinas (Aji *et al.*, 2024). La Figura 1 ilustra una línea del tiempo con algunas de estas aplicaciones. En el trabajo de grado de Luna (2020) se realizó una aproximación al uso de modelos basados en reglas fuzzy a problemas agrícolas de cultivo de mora. Sin embargo, hasta donde conocemos, no hay investigaciones sobre el uso de controladores y modelos basados en reglas de inferencia fuzzy en problemas agrícolas como los relacionados con el control de plagas en el cultivo de papa.

El crecimiento de plagas obedece a una dinámica con ingredientes no determinísticos, provenientes de la imprecisión de los datos y subjetividad de los parámetros (tasas de crecimiento, tasas de migración, tasas de efectividad de insecticidas, poblaciones iniciales, etc.). En el caso particular de los cultivos de papa, aunque se tiene amplia información sobre la componente biológica de las plagas (ciclo de vida), se desconoce información concreta de las tasas intrínsecas de crecimiento de estas plagas que afectan la producción del tubérculo, entre ellas, el gusano blanco

**Figura 1**

Línea de tiempo de algunas aplicaciones de modelos basados en reglas de inferencia fuzzy



de la papa (*Premnotrypes Vorax*, *P. Vorax*) considerado en Colombia como una de las plagas más importantes del cultivo de papa, en términos de daño, siendo el *P. Vorax* la especie que causa las mayores afectaciones y los más altos niveles de pérdida económica; también se encuentra la polilla de la papa (*Phthorimaea Operculella Zeller*), la cual causa un impacto significativo en el cultivo principalmente a nivel de tallo y hojas de la planta, afectando la productividad y rendimiento del cultivo. Asimismo, la dinámica de degradación de químicos, en una matriz como lo es el tubérculo de papa, involucra ingredientes cargados de incertidumbre, provenientes de la imprecisión y la naturaleza no determinista de los datos de campo, las condiciones de campo, la dinámica del químico en el suelo, así como de la subjetividad y vaguedad de los parámetros involucrados (tasas difusión del químico, tasas de dilución del químico, tasas de degradación, concentraciones iniciales, etc.). En consecuencia, el uso de herramientas matemáticas, como la lógica fuzzy y el análisis fuzzy, resulta justificado y presentan un marco matemático adecuado para el modelado matemático y el tratamiento de la incertidumbre debido a la naturaleza fuzzy de los problemas a abordar, así como la subjetividad y vaguedad asociada a estos.

El propósito central de este trabajo es la aplicación de herramientas de lógica y análisis fuzzy, como los modelos basados en reglas de inferencia fuzzy y las ecuaciones diferenciales

ordinarias fuzzy respectivamente, para abordar problemas y dinámicas en cultivos agrícolas, relacionadas particularmente con el control de plagas en el cultivo de papa. Se busca proporcionar herramientas matemáticas adecuadas para modelar dinámicas que puedan brindar al agricultor un conocimiento concreto que le permita tomar decisiones informadas sobre la vigilancia y el control de plagas en el cultivo. Y establecer una primera aproximación concreta de la aplicación este tipo de herramientas matemáticas al abordaje de problemas agrícolas y cómo pueden ser extendidas al estudio de otras dinámicas en otro tipo de cultivos.

En este trabajo se abordan 3 problemas específicos relacionados con los problemas fitosanitarios en cultivos agrícolas, enfocándose en el cultivo de papa. En primer lugar, el análisis de la dinámica poblacional de las plagas sobre el cultivo de papa sin control químico alguno, considerando el problema de la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento de la población de la plaga; con el fin de obtener un conocimiento de la evolución en el tiempo de la plaga en el cultivo a partir de características particulares de este. Segundo, el modelado de la dinámica poblacional de plagas en el cultivo de papa considerando los efectos de un control químico con insecticidas aplicados por el agricultor durante el ciclo de producción del cultivo; de manera que se pueda establecer el comportamiento de la plaga después de cada fumigación, permitiendo al agricultor decidir la forma adecuada de controlar esta plaga. Tercero, el análisis de la dinámica de la concentración residual en los tubérculos de papa de los químicos usados en los procesos de fumigación (control químico de plagas) del cultivo, en particular se considera la última fumigación antes de la cosecha del tubérculo; con el fin de proporcionar una idea del comportamiento de estos químicos y las implicaciones en el consumo humano del producto final cosechado. Por otro lado, se plantea la extensión de las herramientas matemáticas fuzzy aplicadas en esta tesis a otros problemas y dinámicas de otro tipo de cultivos como la mora, el cacao, el café y el maíz, e inclusive el arándano.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1, se introduce al lector en el contexto agrícola del cultivo de papa, sus características (tipo de suelo, ciclo de vida, tipos de control de plagas) y los principales problemas fitosanitarios que lo afectan. En el Capítulo 2, se presentan los preliminares necesarios para el desarrollo matemático de esta tesis. Preliminares de la teoría de conjuntos fuzzy, particularmente de los números fuzzy, su estructura métrica, la teoría de ecuaciones diferenciales fuzzy en el sentido de la derivada generalizada de Hukuhara, la lógica fuzzy en modelos basados en reglas de inferencia fuzzy de tipo Mamdani y Takagi-Sugeno-Kang. Se presentan algunos teoremas de punto fijo para funciones débilmente contractivas necesarios para el desarrollo teórico de la existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial impulsivos fuzzy, utilizados para el abordaje del segundo problema planteado. Y finalmente se introducen algunos métodos estadísticos de regresión y estimación de parámetros, a saber, las tablas de vida, los mínimos cuadrados no lineales y la regresión polinómica local; utilizados en el abordaje de los problemas planteados.

En el Capítulo 3, se aborda el problema de modelado del gusano blanco (*Premnotrypes Vorax*) en el cultivo de papa sin considerar limitantes o factores externos (migración, control de plagas, etc.) que puedan afectar su dinámica. Se plantea y resuelve un PVIF Maltusiano, estimando la tasa intrínseca de crecimiento de la plaga mediante el diseño de un modelo TSK, partiendo de la data de desarrollo, supervivencia y fecundidad de la plaga dada por Kühne *et al.* (2007) y la aplicación de la técnica de tablas de vida.

En el Capítulo 4, se propone el uso de ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy (EDIF) para abordar el problema de modelado de la dinámica poblacional de plagas en el cultivo de papa, considerando los efectos de un control químico con insecticidas durante el ciclo de producción del cultivo. Se estudia la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial impul-

sivos fuzzy, considerando la derivada generalizada de Hukuhara, y la diferencia generalizada de Hukuhara en la definición de la variación en cada punto de impulso. Se utilizan algunos resultados de punto fijo sobre funciones débilmente contractivas sobre conjuntos parcialmente ordenados.

En el Capítulo 5, se aborda el modelado de la dinámica de plagas en un cultivo de papa ante un control químico mediante un modelo de ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy, considerando la efectividad del control de plagas realizado en cada fumigación. Como un caso de estudio se modela la dinámica de la Polilla de la papa (*Phthorimaea Operculella Zeller*), se estima su tasa intrínseca de crecimiento mediante el diseño de un modelo TSK y posteriormente se describe su dinámica por medio del problema de valor inicial impulsivo fuzzy (PVIIF) planteado.

En el Capítulo 6, se estudia la dinámica de la concentración residual de químicos en el tubérculo de papa después de la última fumigación del cultivo, se consideran dos enfoques de modelado fuzzy. En el primero, se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales fuzzy considerando la derivada generalizada de Hukuhara. Se obtiene un pequeño conjunto de datos de campo sobre la concentración de tiametoxam en tubérculos de papa de la variedad Tocana, en la finca Plan del Agua en la Vereda el Portillo del municipio de Guaca, Santander. La cual se encuentra ubicada a una altura de 3700 msnm, con una temperatura promedio de 14°C. A partir de los cuales, mediante técnicas de regresión local polinomial y mínimos cuadrados no lineales se estiman los parámetros involucrados en el modelo (tasas de degradación, tasas de dilución y difusión del químico). En el segundo enfoque, se diseña un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy de tipo Takagi-Sugeno-Kang a partir de los datos de campo para aproximar la degradación de la concentración de tiametoxam. Finalmente, se compara el comportamiento de los dos enfoques de modelado para concentración residual de tiametoxam en papa. También, se muestran los resultados, condiciones e inconvenientes de la recolección de datos de un experimento realizado sobre el cultivo de papa, con

el objetivo de describir el efecto del número de fumigaciones aplicadas al cultivo en la producción de papa.

En el Capítulo 7, se plantean algunos problemas y dinámicas agrícolas adicionales que se pueden abordar mediante herramientas matemáticas de lógica y análisis fuzzy como los planteados y utilizados a lo largo de esta tesis, en cultivos importantes a nivel nacional y departamental como lo son el cultivo de mora, de caña de azúcar, de cacao, de maíz y de arándanos. Finalmente, en el Capítulo 8, se presentan las conclusiones finales de los resultados de este trabajo de investigación.

## 1. Fundamentos del cultivo de papa

En este capítulo, se presentan algunos preliminares sobre el contexto agrícola del cultivo de papa, necesarios para el abordaje de los problemas planteados y desarrollados en esta tesis.

### 1.1. Cultivo de papa

La papa (*Solanum tuberosum L.*) (Acuña *et al.*, 2015) es una planta con flores perteneciente a la familia de las Solanáceas originaria de la Cordillera de los Andes, cuya producción y consumo se extiende en el mundo convirtiéndose en el sexto producto agrícola a nivel de producción para el 2023, después de la caña de azúcar, el maíz, el trigo, el arroz y el fruto de la palma de aceite (FAO/ESS, 2023). Es cultivada en más de 100 países, y se constituye como un producto esencial de la canasta familiar, con más de 5000 variedades comestibles de papa. En Colombia se cuenta con cerca de 850 clases de papa, y se cultiva en las zonas altas de las tres cordilleras, con el 90% de su producción (FEDEPAPA y FNFP, 2023b) concentrada en los departamentos de Cundinamarca (37%), Boyacá (27%), Nariño (23%), Antioquia (5%), Cauca (3%), Santander (2.2%), Norte de Santander (2%), Tolima (1%) y Caldas (0.2%).

### 1.2. Tipos de suelo para cultivo de papa

La papa puede cultivarse en la mayoría de suelos, aunque se recomiendan suelos que tengan poca resistencia al crecimiento de los tubérculos, siendo los más adecuados suelos francos, franco-arenosos, franco-limosos y franco-arcillosos, con buen drenaje y ventilación (INTAGRI, 2017). Además, son necesarios suelos con una profundidad efectiva mayor a 50 cm con un pH entre 5.0 y 7.0, con una densidad aparente de  $1.20 \text{ g/cm}^3$ , un contenido de materia orgánica mayor a 3.5% y una conductividad eléctrica menor a  $4 \text{ dS/m}$  (deciSiemens por metro). Es importante tener en

cuenta que los suelos salinos, alcalinos o compactados provocan trastornos en el desarrollo y producción de la papa.

### 1.3. Ciclo del cultivo de papa

Un cultivo de papa se desarrolla en 5 etapas definidas como (Acuña *et al.*, 2015):

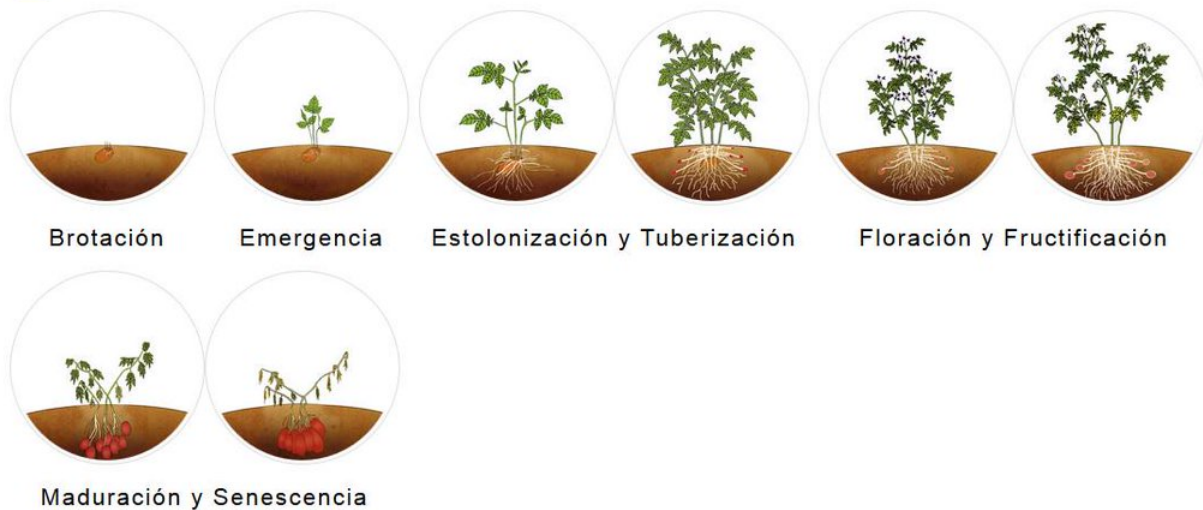
1. **Brotación:** en esta etapa comienza la brotación de los tubérculos, dando paso a la formación de raíces y tallos. Además, el tubérculo-semilla comienza el desarrollo de hojas escama, las cuales darán origen a los estolones de la planta.
2. **Emergencia de las plántulas:** después de la brotación, los brotes generados comienzan su crecimiento de forma vertical traspasando la superficie del suelo. Dependiendo de la variedad, edad fisiológica de los tubérculos y de las condiciones climáticas (principalmente temperatura), la emergencia del cultivo ocurre aproximadamente entre los 20 y 30 días posteriores a la plantación.
3. **Tuberización y estolonización:** en esta etapa la planta de la papa comienza una rápida expansión foliar, desarrollo y crecimiento de hojas, brotes principales y laterales de la planta de Papa. Además, comienza un ensanchamiento de los estolones en la tierra iniciando la creación de los tubérculos.
4. **Floración y fructificación:** aparece en la planta el órgano floral, donde se aprecian botones florales (flores rojas, blancas, rosadas, púrpuras o azules) y los primeros pétalos. Durante la noche sucede el proceso de ensanchamiento de los tubérculos.
5. **Maduración y senescencia:** en esta última etapa, las plantas comienzan su proceso de senescencia, perdiendo fuerza hasta caer de forma natural o por otros métodos, ya sean mecánicos (desgarramiento, trituración o siega), químicos (aplicación, por pulverización foliar de algún

desecante), ó térmicos (deshidratar las plantas mediante la aplicación directa de calor). De manera que, mientras la planta finaliza sus días, los tubérculos maduran, la cascara de los tubérculos se engrosa y el contenido de materia seca aumenta, listo para cosecha.

La Figura 2 ilustra cada una de las etapas del ciclo de desarrollo del cultivo de papa.

## Figura 2

### *Ciclo del cultivo de papa*



*Nota.* Tomado de Acuña *et al.* (2015).

### 1.4. Plagas en el cultivo de papa

Las plagas y enfermedades más comunes y que constituyen los principales problemas fitosanitarios en el cultivo de la papa según organizaciones como el Instituto Colombiano Agropecuario (ICA), el Instituto de Investigaciones Agropecuarias (INIA) y Corteva Agriscience (ICA y MINAGRO, 2011; Acuña *et al.*, 2015; CORTEVA) son plagas como el gusano blanco de la papa, la polilla de la papa, la polilla guatemalteca, la pulguilla, la mosca blanca, las babosas, y enfermedades como la sarna común, la costra negra, la gota y el tizón temprano.

#### 1.4.1. El gusano blanco de la papa (*Premnotrypes*

*Vorax*). Plaga también conocida como gorgojo de los Andes, presenta un ciclo biológico que consta de 5 etapas de desarrollo, donde los huevos son depositados dentro de los tallos secos de plantas en proceso de descomposición, preferiblemente en gramíneas. Como larva, el insecto pasa por 4 o 5 instares larvales y se muestra de color blanco cremoso, con la cabeza pigmentada y un cuerpo en forma de “C”. Ingresa, crece y se alimenta de la pulpa del tubérculo, destruyéndolo internamente; realiza un proceso de empupamiento, donde la larva sale del tubérculo y forma una celda pupal con tierra. Finalmente, como adulto, el insecto se presenta como un gorgojo casi negro que se congrega en la base de los tallos y se alimenta del follaje durante la noche.

**Figura 3**  
*Gusano blanco*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

#### **Figura 4**

*Polilla de la papa*



*Nota.* Tomado de Kurt Ahlmark, Microlepidoptera on Solanaceae, USDA APHIS PPQ, Bugwood.org (s.f).

#### 1.4.2. La polilla de la papa (*Phthorimaea Oper-*

*culella Zeller*). Esta polilla en su etapa de larva atraviesa por 4 estadios, donde posee un aparato bucal masticador-mordedor con el que se alimenta y produce galerías en hojas, tallos, brotes y tubérculos, causando un daño directo a los tejidos, debilitando la planta y provocando la muerte de los centros de crecimiento y el quiebre de tallos. En su estado adulto tiene un tamaño de 8 a 10 mm de largo y 15 mm de expansión alar cubiertas con escamas de color pardo, mezcladas con tonalidades grises plateadas y con pequeñas pecas negras.

**1.4.3. Polilla guatemalteca (*Tecia Solanivora*).** Es considerado uno de los insectos plaga más importantes que atacan al cultivo de papa, debido a que su ataque causa grandes pérdidas y las medidas de control químico no son suficientes la mayoría de las veces. Están presentes en todo el ciclo del cultivo, incluyendo el almacenamiento. Causa daños en la apariencia del tubérculo y a su vez lo inutiliza para fines de producción de semillas y para consumo animal y humano; además, la aparición de galerías en el tubérculo favorece la penetración de microorganismos.

**Figura 5**  
*Polilla Guatemalteca*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**Figura 6**  
*Pulguilla*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**1.4.4. Pulguilla (*Epitrix Spp.*).** Son cucarrones que se alimentan en los cogollos y al llegar a las hojas causan huecos de diferente tamaños o bien cicatrices redondas y claras en el haz de las hojas. En una planta recién germinada, destruyen gran parte del área foliar y es entonces cuando el cultivo puede sufrir daños considerables. Los ataques son de especial importancia durante el primer mes después de germinada la papa.

**Figura 7**  
*Mosca blanca*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**1.4.5. Mosca blanca (*Trialeurodes Vaporariorum*).** La ninfas y adultos de esta plaga causan daños que afectan el rendimiento y la calidad del cultivo al alimentarse de hojas jóvenes. Se cree que es la responsable de la transmisión de al menos 5 enfermedades virales en papa, entre las que sobresale el amarillamiento de venas.

**Figura 8***Babosa*

*Nota.* Tomado de ICA y MINAGRO (2011).

**1.5. Enfermedades****1.5.1. Sarna común (*Streptomyces Scabiei*).**

También conocida como manchado o caratoseno, afecta el tubérculo, causando lesiones de apariencia corchosa en los tubérculos; pueden ser lesiones superficiales donde solo se ve afectada la cáscara del tubérculo y su aspecto puede variar desde una capa reticulada, a lesiones elevadas. Por otro lado se encuentran las lesiones profundas produciendo hoyos de dimensiones variables, que pueden asemejar al daño causado por insectos.

**Figura 10***Costra negra*

*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**1.4.6. Babosas (*Deroceras Sp.*).**

Son moluscos que atacan principalmente el follaje de la planta, aunque también los tubérculos y raíces. El control químico se basa en el uso de cebos tóxicos peletizados, que actúan como un atrayente alimenticio y una molécula química que destruye este tipo de moluscos.

**Figura 9***Sarna común*

*Nota.* Tomado de Ramírez-Villapudua y Sáinz-Rodríguez (2017).

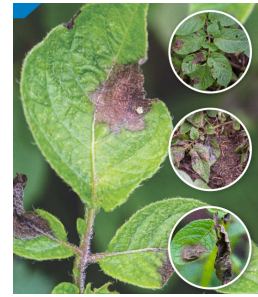
**1.5.2. Costra negra (*Rhizoctonia Solani*).**

En esta enfermedad se genera la formación de tubérculos deformes con protuberancias y costras negras que disminuyen su calidad, manchas negras cubiertas por estructuras algodonosas de color blanco en la base de las plantas y retraso en el desarrollo de las plantas, entorchamiento del ápice y necrosis del tejido leñoso.

Las costras negras afectan los estolones o brotes del tubérculo causando manchas y chancros de color café-rojizo, y pueden causar la muerte de los puntos de crecimiento.

**1.5.3. Gota (*Phytophthora Infestans*).** También conocida como tizón tardío o añublo de la papa, es la enfermedad en papa más limitante a nivel mundial. Afecta tanto hojas como tallos aéreos y tubérculos. Los síntomas varían según el órgano afectado, la variedad y las condiciones climáticas. Inicia como pequeñas manchas de color verde en las hojas de la planta, las cuales crecen rápidamente, tornándose de color café grisáceo en el centro y presentando en algunos casos halos cloróticos.

**Figura 11**  
*Gota*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**Figura 12**

*Tizón temprano*



*Nota.* Tomado de CORTEVA.

**1.5.4. Tizón temprano (*Alternaria Solani*).**

Enfermedad principalmente del follaje que se presenta desde los 90 días posteriores a la siembra en adelante. Se ve favorecido por la humedad y temperaturas por encima de los 25°C. Se presenta generalmente en la segunda mitad del ciclo del cultivo, sobre todo en plantas desnutridas, atacadas por otras enfermedades y plagas o con menor vigor, por lo que el patógeno se considera a veces como “oportunista”.

## 1.6. Métodos de control de plagas

En el proceso de control de plagas se utilizan tradicionalmente dos tipos prácticas, a saber, el control cultural y el control químico.

**1.6.1. Control cultural.** Este tipo de control y manejo del cultivo consiste en una serie de buenas prácticas agrícolas que buscan controlar o eliminar la enfermedad o plaga que afecta al cultivo, buscando evitar la expansión de esta a todo el cultivo. Entre estas buenas prácticas agrícolas encontramos:

1. Uso de semilla certificada.
2. Buena preparación del suelo 30 a 45 días antes de la siembra.
3. Rotación de cultivos.
4. Eliminación restos de papas de almacenamiento, cosecha y selección.
5. Desinfección de herramientas y equipos de trabajo.
6. Cosecha en ambientes secos.
7. Ventilación adecuada de los almacenes.
8. Destrucción y eliminación de follaje infectado.
9. Uso de buenos drenajes en los surcos.

**1.6.2. Control químico.** Consiste en la utilización de herbicidas o pesticidas en el cultivo con el fin de controlar áreas extensas con poco esfuerzo, reducir el daño al cultivo de papa (ya que las herramientas pueden dañar las raíces del cultivo), implementar técnicas de labranza

reducida y manejar eficazmente especies de malezas perennes. Sin embargo, si no se toman medidas para usarlos adecuadamente se corre el riesgo de ocasionar daños al ambiente y a la salud humana. Entre los principales químicos utilizados como ingredientes activos en pesticidas para el control de plagas como el gusano blanco en el cultivo de papa se encuentran el tiametoxam y el lambda-cihalotrina.

**1.6.2.1. Tiametoxam.** (Neonicotinoide) Es un insecticida sistémico de la familia de los neonicotinoides con actividad por contacto e ingestión. Posee una amplio espectro de actividad como insecticida y un gran efecto residual. Puede ser aplicado tanto por pulverización foliar como vía radical en el agua de riego. Es un insecticida activo contra una amplia gama de plagas chupadoras y masticadoras de importancia comercial como Aphididae, Thysanoptera, Coleoptera, Chilopoda, Diplopoda, Symphyta, larvas come hojas e Isoptera (Maienfisch *et al.*, 2001).

**1.6.2.2. Lambda-Cihalotrina.** (Piretroide sintético no sistémico) Insecticida con una gran capacidad de penetración, con acción ante contacto e ingestión, con buen efecto de choque y buena persistencia que actúa sobre el sistema nervioso de los insectos alternando el flujo de iones a través de la membrana nerviosa. Además, proporciona un control preventivo de los virus de las plantas transmitidos por insectos (He *et al.*, 2008).

## **2. Conceptualización matemática y estadística**

En este capítulo se introducen los conceptos básicos de la teoría de conjuntos fuzzy, la lógica fuzzy, el análisis fuzzy, y otros elementos necesarios para el abordaje de los problemas que serán planteados a lo largo de esta tesis.

## 2.1. Números fuzzy

La teoría de conjuntos fuzzy nace en 1965 con la definición del concepto de conjunto fuzzy por Lofti A. Zadeh (Zadeh, 1965), con el objetivo de introducir una manera de representar la incertidumbre, la vaguedad y la subjetividad de un concepto, problema o proceso.

**Definición 1** (Conjunto fuzzy). *Sea  $X \neq \emptyset$ . Un conjunto fuzzy de  $X$  es una pareja  $(A, u_A)$  donde  $A$  es un subconjunto de  $X$  y  $u_A : X \rightarrow [0, 1]$  es una **función de membresía** tal que  $u_A(x)$  representa el grado de pertenencia de un elemento  $x \in X$  a  $A$ .*

Así como en la teoría clásica de conjuntos, en la teoría de conjuntos fuzzy se establecen las operaciones básicas entre conjuntos, a saber, la unión, la intersección y el complemento de conjuntos fuzzy.

**Unión:**  $(u_A \vee u_B)(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\} := A(x) \vee B(x) = (A \vee B)(x),$

**Intersección:**  $(u_A \wedge u_B)(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\} := A(x) \wedge B(x) = (A \wedge B)(x),$

**Complemento:**  $u_{A^c}(x) = 1 - u_A(x).$

Es indispensable conocer y comprender los conceptos de  $\alpha$ -nivel y soporte de un conjunto fuzzy, los cuales permiten extender operaciones y propiedades clásicas (crisp) al contexto fuzzy, al existir una representación única de cada conjunto fuzzy en términos de sus  $\alpha$ -niveles (Ver Teorema de descomposición (Klir y Yuan, 1995)). El concepto de  $\alpha$ -nivel es importante porque permite establecer un puente entre la teoría de conjuntos clásica y la teoría de conjuntos fuzzy (ver Villamizar-Roa y Arenas-Díaz (2018)).

**Definición 2** ( $\alpha$ -nivel). *Sea  $u : X \rightarrow [0, 1]$  un conjunto fuzzy, y  $\alpha \in (0, 1]$ . Se define el  $\alpha$  – nivel de  $u$  como el conjunto*

$$[u]^\alpha = \{x \in X \mid u(x) \geq \alpha\}.$$

**Definición 3** (Soporte). *Sea  $u : X \rightarrow [0, 1]$  un conjunto fuzzy, donde  $X$  es un espacio topológico. El soporte de un conjunto fuzzy  $u$  se define como la clausura del conjunto de todos los  $x \in X$  tales que su valor de pertenencia es positivo, es decir,*

$$[u]^0 = \overline{\{x \in X \mid u(x) > 0\}}.$$

Los conjuntos fuzzy sobre espacios métricos proporcionan un marco matemático propicio para diversas aplicaciones. En particular, debido a la naturaleza de los problemas a abordar a lo largo de esta tesis, se considera el conjunto de los números fuzzy (Villamizar-Roa y Arenas-Díaz, 2018), el cual será denotado por  $\mathcal{F}$ .

**Definición 4** (Número fuzzy). *Un número fuzzy es un conjunto fuzzy de la forma*

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

*que cumple las siguientes cuatro propiedades:*

1. *Existe un  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x_0) = 1$ . ( $u$  es un conjunto normal).*
2.  *$u$  es un convexo:  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}, \forall \lambda \in [0, 1]$ .*
3.  *$[u]^\alpha$  es un intervalo cerrado para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .*
4. *El soporte de  $u$ ,  $[u]^0$ , es compacto.*

De las condiciones 2, 3 y 4 de la Definición 4, se tiene que para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , los  $\alpha$ -niveles  $[u]^\alpha$  de un número fuzzy  $u$  son conjuntos compactos y convexos de  $\mathbb{R}$  (El conjunto de los subconjuntos compactos convexos de  $\mathbb{R}$  será denotado por  $\mathcal{K}_c$ ). Luego, los  $\alpha$ -niveles y el soporte

de un número fuzzy  $u$ , pueden expresarse como

$$[u]^\alpha = [u_l(\alpha), u_r(\alpha)] = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

donde  $\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . El siguiente resultado caracteriza los números fuzzy a través de estas funciones.

**Teorema 1** (Goetschel Jr. y Voxman (1986)).  $u \in \mathcal{F}$  está completamente determinado por un par de funciones  $\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha$ , con  $\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , que definen, respectivamente, los extremos izquierdo y derecho de cada  $\alpha$ -nivel, y que satisfacen:

1. La función  $\alpha \mapsto \underline{u}_\alpha \in \mathbb{R}$  es acotada, no decreciente, continua en  $(0, 1]$  y continua por la derecha en 0.
2. La función  $\alpha \mapsto \overline{u}_\alpha \in \mathbb{R}$  es acotada, no creciente, continua en  $(0, 1]$  y continua por la derecha en 0.
3.  $\underline{u}_\alpha \leq \overline{u}_\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**2.1.1. Aritmética entre números fuzzy.** En  $\mathcal{F}$  se definen las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación, división y producto por un escalar, por medio de los  $\alpha$ -niveles como sigue:

**Teorema 2** (Klir y Yuan (1995)). Para  $u$  y  $v$  números fuzzy, con  $\odot$  representando cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). El conjunto fuzzy  $u \odot v$  puede expresarse por medio de sus  $\alpha$ -niveles como

$$[u \odot v]^\alpha = [u]^\alpha \odot [v]^\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha] \odot [\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Sobre  $\mathcal{F}$  se tienen las siguientes propiedades:

**Teorema 3** (Mareš (1997)). Sean  $u, v, w, \eta, 1, 0 \in \mathcal{F}$ , donde se define  $1 = \chi_{\{1\}}$  y  $0 = \chi_{\{0\}}$ . Entonces,

1.  $u + v, y u \cdot v \in \mathcal{F}$  (clausurativa).
2.  $u + v = v + u$  y  $u \cdot v = v \cdot u$  (conmutativa).
3.  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (asociativa para la suma).
4. Si los soportes de  $u, v$  y  $w$  no contienen el cero, entonces  $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$ .
5.  $u + 0 = 0 + u = u$  y  $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$  (identidad).
6. Si  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \cdot b \geq 0$ , entonces  $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ .
7. Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $(a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$ .
8.  $u \cdot (v + w) \subseteq u \cdot v + u \cdot w$  (subdistributiva).
9. Si  $b \cdot c \geq 0$  para cada  $b \in [v]^0$  y  $c \in [w]^0$ , entonces  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$  (distributiva).
10. Si  $u = \chi_{\{a\}} = a$ , entonces  $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ .
11.  $0 \subseteq u - u$  y  $1 \in u/u$ , siempre que  $0 \notin [u]^0$ .
12. Si  $u \subseteq w$  y  $v \subseteq \eta$ , entonces  $u \odot v \subseteq w \odot \eta$ .

**2.1.2. Diferencia generalizada de Hukuhara.** Para establecer una noción de derivada en el contexto fuzzy (ver Section 2.3) se requiere tener un concepto de diferencia entre números fuzzy. Una primera noción de diferencia fuzzy fue dada por Hukuhara extendiendo el concepto de diferencia de Hukuhara entre conjuntos compactos convexos  $\mathcal{K}_c$  al contexto fuzzy.

**Definición 5.** Sean  $u, v \in \mathcal{F}$ . Si existe  $w \in \mathcal{F}$  tal que  $u = v + w$ , entonces  $w$  es llamada la diferencia de Hukuhara ( $H$ -diferencia) entre  $u$  y  $v$ , y se denota por  $u \ominus v$ .

Stefanini (2010) introdujo una generalización de la  $H$ -diferencia fuzzy, la cual es llamada diferencia generalizada de Hukuhara o  $gH$ -diferencia entre números fuzzy, y es denotada por  $u \ominus_{gH} v$ , para  $u, v \in \mathcal{F}$ .

**Definición 6.** Para  $u, v \in \mathcal{F}$ , la  $gH$ -diferencia  $u \ominus_{gH} v$  es dada por  $z \in \mathcal{F}$  tal que

$$u \ominus_{gH} v = z \iff \begin{cases} (i) & u = v + z, \quad o \\ (ii) & v = u + (-1)z. \end{cases}$$

En  $\mathcal{F}$ ,  $u \ominus_{gH} v$  no siempre existe; sin embargo, el siguiente resultado presenta condiciones bajo las cuales existe  $u \ominus_{gH} v$ .

**Proposición 1** (Stefanini (2010)). Para  $u, v \in \mathcal{F}$  dos números fuzzy con  $\alpha$ -niveles dados por  $[u]^\alpha$  y  $[v]^\alpha$ , respectivamente. La  $gH$ -diferencia  $u \ominus_{gH} v \in \mathcal{F}$  existe si, y solo si, una de las siguientes condiciones se cumple:

1.  $\text{diam}([u]^\alpha) \geq \text{diam}([v]^\alpha)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha$  es no decreciente con respecto a  $\alpha$  y  $\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha$  es no creciente con respecto a  $\alpha$ , ó
2.  $\text{diam}([u]^\alpha) \leq \text{diam}([v]^\alpha)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha$  es no decreciente con respecto a  $\alpha$  y  $\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha$  es no creciente con respecto a  $\alpha$ .

## 2.2. Estructura métrica

El espacio  $\mathcal{F}$  está dotado de la métrica  $d_\infty(u, v) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$  para  $u, v \in \mathcal{F}$ , donde  $d_H$  es la métrica de Hausdorff sobre  $\mathcal{K}_c$ , definida por

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\},$$

para cada  $A, B \in \mathcal{K}_c$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana habitual en  $\mathbb{R}$ . El par  $(\mathcal{F}, d_\infty)$  es un espacio métrico completo.

Para  $A, B \in \mathcal{K}_c$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , las operaciones de Minkowski se definen como sigue:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{y} \quad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Además, la diferencia de Hukuhara ( $H$ -diferencia) entre  $A$  y  $B$ , que se denota por  $A \ominus B$  existe si, y sólo si,  $A = B + C$  para algún  $C \in \mathcal{K}_c$ . Tenga en cuenta que la diferencia de Hukuhara no siempre existe, pero si existe, es única.

**Teorema 4** (Galanis *et al.* (2005)). Sean  $A, B, C, D \in \mathcal{K}_c$ , si existen las diferencias de Hukuhara  $A \ominus C$  y  $B \ominus D$ , se cumple que

$$(i) \quad d_H(kA, kB) = |k|d_H(A, B), \quad k \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad d_H(A + C, B + D) \leq d_H(A, B) + d_H(C, D),$$

$$(ii) \quad d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B),$$

$$(iii) \quad d_H(A \ominus C, B \ominus D) \leq d_H(A, B) + d_H(C, D).$$

**Definición 7.** En  $\mathcal{F}$ , para  $u, v \in \mathcal{F}$  con  $\alpha$ -niveles  $[u]^\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha]$  y  $[v]^\alpha = [\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha]$ , se puede definir un orden parcial  $\lesssim$  como sigue

$$u \lesssim v \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}_\alpha \leq \underline{v}_\alpha \quad \text{y} \quad \overline{u}_\alpha \leq \overline{v}_\alpha, \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde, la inversa del orden parcial  $\lesssim$  se denota por  $\gtrsim$ .

### 2.3. Análisis fuzzy

Dado  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , una función fuzzy sobre  $\mathbb{R}$  se define como una aplicación  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  donde  $F(t) \in \mathcal{F}$  para cada  $t \in \Omega$ . Se define además, la familia de multifunciones

$F_\alpha : \Omega \rightarrow K_c$  para  $\alpha \in [0, 1]$ , tal que  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [\underline{F_\alpha}(t), \overline{F_\alpha}(t)]$ , donde  $\underline{F_\alpha}$  y  $\overline{F_\alpha}$  son funciones definidas de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , para cada  $t \in \Omega$ .

**2.3.1. Diferenciabilidad de una función fuzzy.** Considere el problema de valor inicial fuzzy (PVIF) en el que se busca hallar  $x : J \rightarrow \mathcal{F}$  tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

con  $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  una función fuzzy,  $x_0 \in \mathcal{F}$  y  $t_0 \in J$ , siendo  $J$  un intervalo de números reales. Para abordar el PVIF (1), es indispensable establecer la noción de diferenciabilidad en el contexto fuzzy.

El desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales fuzzy inicia con la definición de una primera noción de derivada fuzzy, la derivada de Hukuhara (Puri y Ralescu, 1983), la cual fue establecida a partir del concepto de diferencia de Hukuhara fuzzy y la diferenciabilidad de multifunciones. Entre los primeros trabajos en el área se destacan los resultados de Kaleva (1987), Seikkala (1987) y Kloeden (1991), entre otros. Dado que la clase de funciones  $H$ -diferenciables es bastante restrictiva (Bede y Gal, 2005), se considera un nuevo enfoque en el cual se define la derivada generalizada de Hukuhara fuzzy ( $gH$ -derivada), establecida a partir del concepto de la diferencia generalizada de Hukuhara fuzzy y la diferenciabilidad de multifunciones (Bede y Stefanini, 2012).

**Definición 8.** Una función  $f : J \rightarrow \mathcal{F}$  se dice  $gH$ -diferenciable en  $t \in J$ , si existe  $f'_{gH}(t_0) \in \mathcal{F}$  tal que

$$f'_{gH}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t+h) \ominus_{gH} f(t)]. \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la definición de  $gH$ -diferencia en (2), se tienen dos casos de la  $gH$ -

derivada de una función fuzzy, a saber, la (i)-gH derivada y la (ii)-gH derivada. Se dice que  $f$  es (i)-gH diferenciable si las diferencias de Hukuhara  $f(t+h) \ominus f(t)$ ,  $f(t) \ominus f(t-h)$  existen, y

$$f'_{gH}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(t+h) \ominus f(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(t) \ominus f(t-h)].$$

Además,  $f$  es (ii)-gH diferenciable si las diferencias de Hukuhara  $f(t) \ominus f(t+h)$ ,  $f(t-h) \ominus f(t)$  existen, y

$$f'_{gH}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [f(t) \ominus f(t+h)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [f(t-h) \ominus f(t)].$$

**Definición 9** (Continuidad). Una función fuzzy  $F : J \rightarrow \mathcal{F}$  es continua en un punto  $t_0 \in \Omega$  si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d_\infty(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$ , para  $t \in J$  con  $\|t - t_0\| < \delta$ .

**Definición 10.** Sea  $F : J \rightarrow \mathcal{F}$  una función fuzzy. La integral de  $F$  sobre  $J$ , denotada  $\int_J F(t) dt$ , se define a través de sus  $\alpha$ -niveles como

$$\left[ \int_J F(t) dt \right]^\alpha = \int_J [F(t)]^\alpha dt, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Teorema 5.** Sean  $F, G : J \rightarrow \mathcal{F}$  integrables y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces:

1.  $\int_J (\lambda F(t) + G(t)) dt = \lambda \int_J F(t) dt + \int_J G(t) dt$ .
2.  $d_\infty(F, G)$  es integrable.
3.  $d_\infty(\int_J F(t) dt, \int_J G(t) dt) \leq \int_J d_\infty(F, G)(t) dt$ .

**Definición 11.** Considerando el PVIF (1) bajo la derivada generalizada de Hukuhara, se dice que

1.  $x(t)$  es una (i)-gH solución, si  $x(t)$  es (i)-gH diferenciable.
2.  $x(t)$  es una (ii)-gH solución, si  $x(t)$  es (ii)-gH diferenciable.

**Teorema 6** (Khastan y Rodríguez-López (2016), Theorem 2.2). *Sea  $x : [t_0, b] \rightarrow \mathcal{F}$  una función fuzzy gH-diferenciable y suponiendo que la derivada  $x'$  es integrable sobre  $[t_0, b]$ . Al considerar el problema de valor inicial fuzzy (1) se tiene que:*

1.  *$x$  es una (i)-gH solución de (1) si y sólo si  $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ ;*
2.  *$x$  es una (ii)-gH solución de (1) si y sólo si  $x(t) = x(t_0) \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ , asumiendo que existe la diferencia de Hukuhara  $\ominus$ .*

*En este caso, las integrales se consideran en el sentido de la integral de Aumann (Seikkala, 1987).*

El siguiente resultado proporciona un marco matemático para la solución del PVIF (1) considerando la gH-derivada.

**Teorema 7** (Bede y Stefanini (2012)). *Sean  $R_0 = [t_0, t_0 + \eta] \times \bar{B}(x_0, \rho)$ , con  $\eta, \rho > 0$ ,  $x_0 \in \mathcal{F}$  y  $f : R_0 \rightarrow \mathcal{F}$  continua tal que*

$$f(t, x)_\alpha = [\underline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha), \bar{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha)], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

*y se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si para cada  $\alpha \in [0, 1]$  las funciones  $\underline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha)$ , y  $\bar{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha)$ , son equicontinuas y uniformemente lipschitzianas con respecto a la segunda y tercera componente, es decir, existe una constante  $k > 0$  tal que para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  y cualesquiera  $(t, x), (t, y) \in R_0$  se satisface que  $|\underline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha) - \underline{f}_\alpha(t, \underline{y}_\alpha, \bar{y}_\alpha)| \leq k(|\underline{x}_\alpha - \underline{y}_\alpha| + |\bar{x}_\alpha - \bar{y}_\alpha|)$ , y  $|\bar{f}_\alpha(t, \bar{x}_\alpha, \underline{x}_\alpha) - \bar{f}_\alpha(t, \bar{y}_\alpha, \underline{y}_\alpha)| \leq k(|\bar{x}_\alpha - \bar{y}_\alpha| + |\underline{x}_\alpha - \underline{y}_\alpha|)$ .*
2.  *$\underline{f}_\alpha, \bar{f}_\alpha : R_0 \rightarrow \mathcal{F}$  tienen derivadas parciales con respecto a  $\alpha \in [0, 1]$  acotadas, donde las cotas son independientes de  $(t, x) \in R_0$  y  $\alpha \in [0, 1]$ .*

3. Las funciones  $\underline{x}_0$  y  $\overline{x}_0$  son diferenciables, existen  $c_1 > 0$  con  $\underline{x}_{0\alpha} \geq c_1$  y  $c_2 < 0$  con  $\overline{x}_{0\alpha} \leq c_2$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , y se tienen las siguientes posibilidades:

- a)  $\underline{x}_{0_1} < \overline{x}_{0_1}$ , o
- b) si  $\underline{x}_{0_1} = \overline{x}_{0_1}$ , entonces el nivel  $[f(t, x)]_1$  consiste exactamente de un elemento para cualquier  $(t, x) \in R_0$ , siempre que  $[x]_1$  consiste exactamente de un elemento.

Satisfechas todas las condiciones anteriores, el problema de valor inicial fuzzy (1) es equivalente, sobre algún intervalo  $[t_0, t_0 + h]$  para algún  $h > 0$ , con la unión de los dos siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = \underline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha), & \underline{x}_\alpha(0) = \underline{x}_{\alpha_0}, \\ \overline{x}'(t) = \overline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha), & \overline{x}_\alpha(0) = \overline{x}_{\alpha_0}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1], \quad , y \quad (3)$$

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = \overline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha), & \underline{x}_\alpha(0) = \underline{x}_{\alpha_0}, \\ \overline{x}'(t) = \underline{f}_\alpha(t, \underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha), & \overline{x}_\alpha(0) = \overline{x}_{\alpha_0}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (4)$$

Ahora, para  $J$  un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ , en el Capítulo 4 se va a considerar el siguiente orden parcial en  $C(J, \mathcal{F})$  (el conjunto de todas las funciones fuzzy continuas en el intervalo  $J$  con valores en  $\mathcal{F}$ ):

$$f, g \in C(J, \mathcal{F}), \quad f \lesssim g \iff f(t) \lesssim g(t), \quad \forall t \in J.$$

**Lema 1** (Ver Nieto y Rodriguez-Lopez (2006)). *En el espacio  $C(J, \mathcal{F})$  con el orden  $\lesssim$  se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F})$  sea una sucesión no decreciente, si  $f_k \rightarrow f$  en  $C(J, \mathcal{F})$ , entonces  $f_k \lesssim f$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

(ii) Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F})$  sea una sucesión no creciente, si  $f_k \rightarrow f$  en  $C(J, \mathcal{F})$ , entonces  $f_k \succeq f$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Para cualquier par de elementos en los espacios  $(\mathcal{F}, \preceq)$  y  $(C(J, \mathcal{F}), \preceq)$ , siempre existe una cota superior (Nieto y Rodriguez-Lopez, 2006).

**2.3.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias impulsivas fuzzy.** Las ecuaciones diferenciales impulsivas son comúnmente usadas en el modelado de dinámicas de fenómenos y procesos cuya evolución es afectada una o más veces por una fuerza que puede ser tratada como instantánea, y llamada "impulso" (Samoilenko y Perestyuk, 1995; Stamova y Stamov, 2016). Además, el estudio de estas dinámicas pueden involucrar incertidumbre, subjetividad, vaguedad e imprecisión, en sus parámetros y datos iniciales, como se aborda en los Capítulos 4 y 5 de esta tesis; por lo cual se estudia la teoría de las ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy (EDIF), la cual combina la teoría de ecuaciones diferenciales fuzzy con la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas clásicas (crisp).

Se considera el siguiente problema de valor inicial impulsivo fuzzy (PVIF),

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{para } t \in [0, T^*], t \neq t_p, \\ \Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-)), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (5)$$

donde  $x'$  se supone en el sentido de la  $gH$ -derivada,  $x_0 \in \mathcal{F}$ ,  $f : [0, T^*] \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , y  $\mathbb{I}_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $p = 1, \dots, k$ , son funciones fuzzy, con  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = T^*$ .

Sean  $x(t_p^-)$  y  $x(t_p^+)$  las funciones fuzzy que representan los límites izquierdo y derecho de

$x(t)$  en  $t = t_p$ , respectivamente. La variación  $\Delta x(t_p)$  de  $x$  en  $t_p$ , se define por

$$\Delta x(t_p) := x(t_p^+) \ominus_{gH} x(t_p^-). \quad (6)$$

**Observación 1.** La  $gH$ -diferencia en (6) implica dos casos en la definición de  $x(t_p^+)$  como sigue

1. Primer caso de la  $gH$ -diferencia (diferencia de Hukuhara): la variación  $\Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-))$  significa que

$$x(t_p^+) = x(t_p^-) + \Delta x(t_p) = x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-)). \quad (7)$$

2. Segundo caso de la  $gH$ -diferencia:  $\Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-))$  significa que

$$x(t_p^-) = x(t_p^+) + (-1)\Delta x(t_p) = x(t_p^+) + (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p^-)),$$

lo cual implica que

$$x(t_p^+) = x(t_p^-) \ominus (-1)\Delta x(t_p). \quad (8)$$

Para establecer la definición de una solución para (5), se considera el espacio de Banach

$$PC([0, T^*], \mathcal{F}) = \{x : [0, T^*] \rightarrow \mathcal{F} : x \in C((t_p, t_{p+1}], \mathcal{F}),$$

$$i = 0, \dots, k, \text{ y } \exists(x(t_p^-), x(t_p^+)), \text{ con } x(t_p^-) = x(t_p)\}.$$

Denotando por  $D_{(i)}x(t)$  la  $(i)$ - $gH$  derivada de  $x(t)$ , y por  $D_{(ii)}x(t)$  la  $(ii)$ - $gH$  derivada de  $x(t)$ . En el mismo espíritu de (Liu *et al.*, 2020b, Definición 2.6), se definen los siguientes espacios solución para (5).

**Definición 12.** 1. Sea  $x \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F}) := \{x : x \in PC([0, T^*], \mathcal{F}) \text{ y } \exists D_{(i)}x\}$ . Si  $x$  satisface (5) considerando  $x' = D_{(i)}x$ , entonces  $x$  es llamada una  $(i)$ - $gH$  solución del problema

*impulsivo fuzzy de Cauchy (5).*

2. Sea  $x \in PC_{(ii)}(J, \mathcal{F}) := \{x : x \in PC([0, T^*], \mathcal{F}) \text{ y } \exists D_{(ii)}x\}$ , si  $x$  satisfice (5) considerando  $x' = D_{(ii)}x$ , entonces  $x$  se llama una (ii)-gH solución del problema impulsivo fuzzy de Cauchy (5).

#### 2.4. Algunos teoremas de aplicaciones contractivas

En esta sección se presentan algunos resultados de punto fijo, que generalizan los resultados de otros autores (Dutta y Choudhury, 2008; Lan y Nieto, 2009; Rhoades, 2001) sobre funciones débilmente contractivas, que permiten estudiar en el Capítulo 4, la existencia de solución para un problema de valor inicial impulsivo fuzzy como en (5) considerando el concepto de  $gH$ -derivada.

**Definición 13** (Ver Harjani and Sadatrangani (2010)). *Una función  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que*

(i)  $\psi(t) = 0$  si, y solo si,  $t = 0$ ;

(ii)  $\psi$  es continua y no decreciente

*se denomina función de distancia alternante.*

**Definición 14** (Ver Harjani and Sadatrangani (2010)). *Sea  $(\mathcal{F}, d_\infty)$  un espacio métrico y una función  $f : X \rightarrow X$ .  $f$  es débilmente contractiva si*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \forall x, y \in X, \quad (9)$$

*donde  $\psi$  y  $\phi$  son funciones de distancia alternante.*

**Definición 15.** *Sea  $f : X \rightarrow X$  una función donde  $(X, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado.  $f$  es monótona no decreciente, si todo  $x, y \in X$  con  $x \leq y$  implica que  $f(x) \leq f(y)$ . Además,  $f$  es monótona no creciente, si para todo  $x, y \in X$  con  $x \leq y$  implica que  $f(x) \geq f(y)$ .*

**Teorema 8** (Ver Harjani and Sadatrangani (2010)). *Sea  $(X, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica  $d$  en  $X$  tal que  $(X, d)$  es un espacio métrico completo. Sea  $f : X \rightarrow X$  una función monótona no decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \text{para } x \geq y, \quad (10)$$

*para algunas funciones de distancia alternante  $\psi$  y  $\phi$ . Supóngase que  $X$  verifica que si una sucesión no decreciente  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente a  $x \in X$ , entonces  $x_k \leq x$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o que  $f$  sea continua. Si existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_0 \leq f(x_0)$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

**Teorema 9** (Ver Harjani and Sadatrangani (2010)). *Sea  $(X, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica  $d$  en  $X$  tal que  $(X, d)$  es un espacio métrico completo. Sea  $f : X \rightarrow X$  sea una función monótona no decreciente tal que (10) se cumple. Supóngase que  $X$  verifica que si una sucesión no creciente  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente a  $x \in X$ , entonces  $x \leq x_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o que  $f$  es continua. Si existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_0 \geq f(x_0)$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

**Teorema 10** (Ver Harjani and Sadatrangani (2010)). *Bajo las hipótesis del Teorema 8 (Teorema 9), respectivamente), si cada par de elementos de  $X$  tiene una cota superior o una cota inferior,  $f$  tiene un único punto fijo. Además, si  $\tilde{x}$  es el punto fijo de  $f$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \tilde{x}$  para todo  $x \in X$ .*

## 2.5. Lógica fuzzy

**2.5.1. Operadores lógicos fuzzy.** La extensión de los operadores lógicos clásicos al contexto fuzzy se definen como t-norma, t-conorma y negación fuzzy.

**Definición 16** (t-norma). *Establece la extensión del operador lógico de conjunción al contexto fuzzy. Una t-norma es una función de la forma:  $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface las siguientes propiedades:*

1.  $i(a, 1) = a$  (elemento neutro);
2.  $i(a, b) = i(b, a)$  (conmutatividad);
3.  $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$  (asociatividad);
4.  $b \leq d$  implica  $i(a, b) \leq i(a, d)$  (monotonicidad).

**Definición 17** (t-conorma). Una t-conorma define la extensión del operador lógico de disyunción al contexto fuzzy. Es una función de la forma  $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $u(a, 0) = a$  (elemento neutro);
2.  $u(a, b) = u(b, a)$  (conmutatividad);
3.  $u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d)$  (asociatividad);
4.  $b \leq d$  implica  $u(a, b) \leq u(a, d)$  (monotonicidad).

**Definición 18.** La extensión del operador lógico de negación al contexto fuzzy es una función de la forma  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $c(0) = 1$  y  $c(1) = 0$  (condición de frontera);
2. Si  $a \leq b$ , entonces  $c(a) \geq c(b)$  (monotonicidad);
3.  $c(c(a)) = a$  para todo  $a \in [0, 1]$  (involución).

Para introducir los modelos basados en reglas de inferencia fuzzy, Mamdani y Takagi-Sugeno-Kang, se definen algunos conceptos, a saber, relación fuzzy, variable lingüística y proposición fuzzy.

**Definición 19** (Relación fuzzy). *Una relación fuzzy es un conjunto fuzzy definido sobre el producto cartesiano de los conjuntos clásicos  $X_1, \dots, X_n$ , donde las tuplas  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  pueden tener grados de pertenencia en  $[0, 1]$ , determinados por una función de pertenencia. La relación sobre los conjuntos  $X_1, \dots, X_n$  se denota por  $R(X_1, \dots, X_n)$ .*

**Definición 20** (Variable lingüística). *Una variable lingüística  $\mathcal{X}$  en un universo  $U$  es una variable cuyos valores asumidos son subconjuntos fuzzy de  $U$ .*

Cada concepto lingüístico representado dentro de la variable lingüística es denominado un término lingüístico y se encuentra determinado por un conjunto fuzzy.

El tipo de proposiciones que se utilizaran para los modelos basados en reglas de inferencia fuzzy son proposiciones condicionales no cualificadas.

**Definición 21** (Proposiciones condicionales no cualificadas). *Son proposiciones de la forma:*

$$p : \text{si } \mathcal{X} \text{ es } A, \text{ entonces } \mathcal{Y} \text{ es } B,$$

*donde  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  son variables lingüísticas que toman valores en conjuntos  $X$  y  $Y$  respectivamente, y donde  $A$  y  $B$  son conjuntos fuzzy asociados a términos lingüísticos. Se puede notar también como:  $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$  es  $R$ .*

**Ejemplo 1.** *Considérese como variable lingüística la temperatura corporal del ser humano (Temperatura corporal  $T_c$ ), con términos lingüísticos definidos como: temperatura saludable  $T_{cs}$ , temperatura alta  $T_{ca}$  y temperatura muy alta  $T_{cma}$ , y sea la variable lingüística el nivel de gravedad de la enfermedad (Enfermedad  $E$ ), con términos lingüísticos definidos como: no grave  $S$ , grave  $G$ , muy grave  $MG$ . Un ejemplo de una proposición condicional no cualificada es dada como sigue:*

$$p: \text{si la temperatura corporal es alta, entonces la enfermedad es grave,}$$

*la cual se puede escribir como*

*$p$ : si  $T$  es  $T_a$ , entonces  $E$  es  $G$ .*

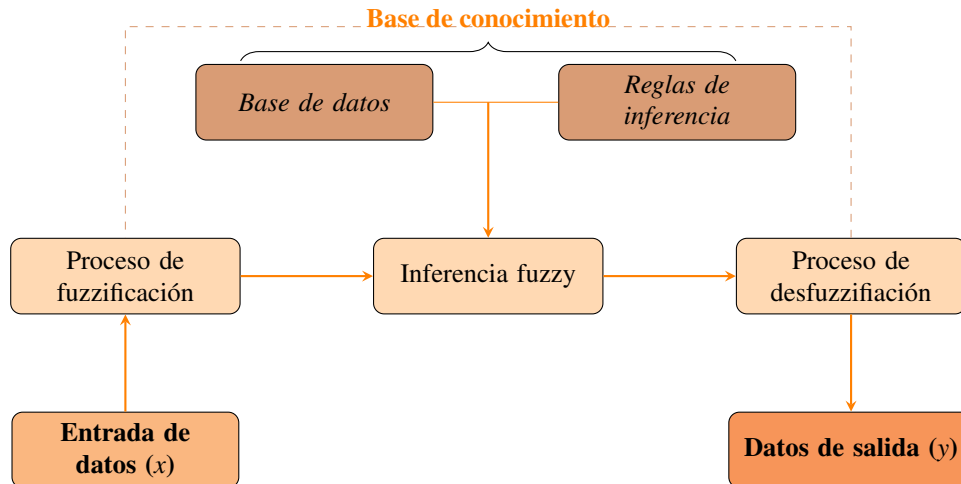
## **2.6. Modelos basados en reglas fuzzy**

Entre los objetivos de este trabajo está el uso de modelos basados en reglas de inferencia fuzzy para el desarrollo y resolución de problemas relacionados con el sector agrícola; para ello consideramos el modelo Mamdani y el modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Este tipo de modelos emulan el proceso de razonamiento humano en un campo específico del conocimiento en términos de reglas de inferencia fuzzy (Massad *et al.*, 2009). Así como en el caso clásico en donde la lógica nos brinda métodos de razonamiento que permiten deducir afirmaciones a partir de premisas, su extensión al concepto fuzzy también tiene esa finalidad. De otro lado, es de resaltar que los modelos matemáticos son, en esencia, formulaciones matemáticas que permiten establecer una relación entre variables, parámetros y restricciones. La utilidad de la lógica fuzzy para representar la experiencia y conocimiento humano, y la necesidad de modelos que permitan representar estos conceptos, surge la idea de modelos basados en reglas de inferencia fuzzy, donde las variables de entrada y de salida se interpretan como variables lingüísticas. La estructura de un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy se puede dividir en 4 partes, a saber, la fuzzificación, donde las variables de entrada se interpretan como conjuntos fuzzy; la base de reglas, donde se definen las reglas de inferencia fuzzy a partir de datos, experiencia, conocimiento experto, literatura, entre otros; el proceso de inferencia, donde a partir de la base de reglas se obtienen salidas interpretadas como conjuntos fuzzy; y la defuzzificación, donde los conjuntos fuzzy son convertidos en números reales. Esta estructura se ilustra en la Figura 13. Los modelos basados en reglas de inferencia fuzzy clásicos son el Mamdani y el Takagi-Sugeno-Kang.

**2.6.1. Modelo Mamdani.** El modelo Mamdani fue el primer sistema basado en reglas de inferencia fuzzy que se desarrolló en el campo de los sistemas de control (Mamdani y

**Figura 13**

Estructura de un modelo basado en reglas fuzzy



Assilan, 1975), y fue ampliamente extendido y aplicado. El creciente interés por los modelos fuzzy en la biomedicina y la epidemiología han aumentado la relevancia del modelo Mamdani (Ortega *et al.*, 2000; Massad *et al.*, 2009). Dado que en estos campos la experiencia y el conocimiento experto son fundamentales. En este tipo de sistemas se establece el conjunto de reglas como sigue:

Regla 1 : Si  $x_1$  es  $A_{11}$ ,  $x_2$  es  $A_{12}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{1m}$ , entonces  $\mathcal{Y}$  es  $B_1$ ,

Regla 2 : Si  $x_1$  es  $A_{21}$ ,  $x_2$  es  $A_{22}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{2m}$ , entonces  $\mathcal{Y}$  es  $B_2$ ,

⋮

Regla  $n$  : Si  $x_1$  es  $A_{n1}$ ,  $x_2$  es  $A_{n2}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{nm}$ , entonces  $\mathcal{Y}$  es  $B_m$ ,

donde,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son variables lingüísticas en  $X_1, X_2, \dots, X_m$  respectivamente; con valores en conjuntos fuzzy  $A_{j1}, \dots, A_{jm}$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de reglas y  $m$  el número de variables de entrada, y  $\mathcal{Y}$  es la variable de salida que toma valores en el universo  $Y$  con conjuntos fuzzy  $B_j$ . Cada regla describe una relación  $R_j$  dada por  $R_j(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathcal{Y}) =$

$\min\{A_{j1}(x_1), A_{j2}(x_2), \dots, A_{jm}(x_m), B_j(\mathcal{Y})\}$ , así, la función de pertenencia de la relación fuzzy global establecida en el modelo, se obtiene a partir de la t-conorma estándar como:

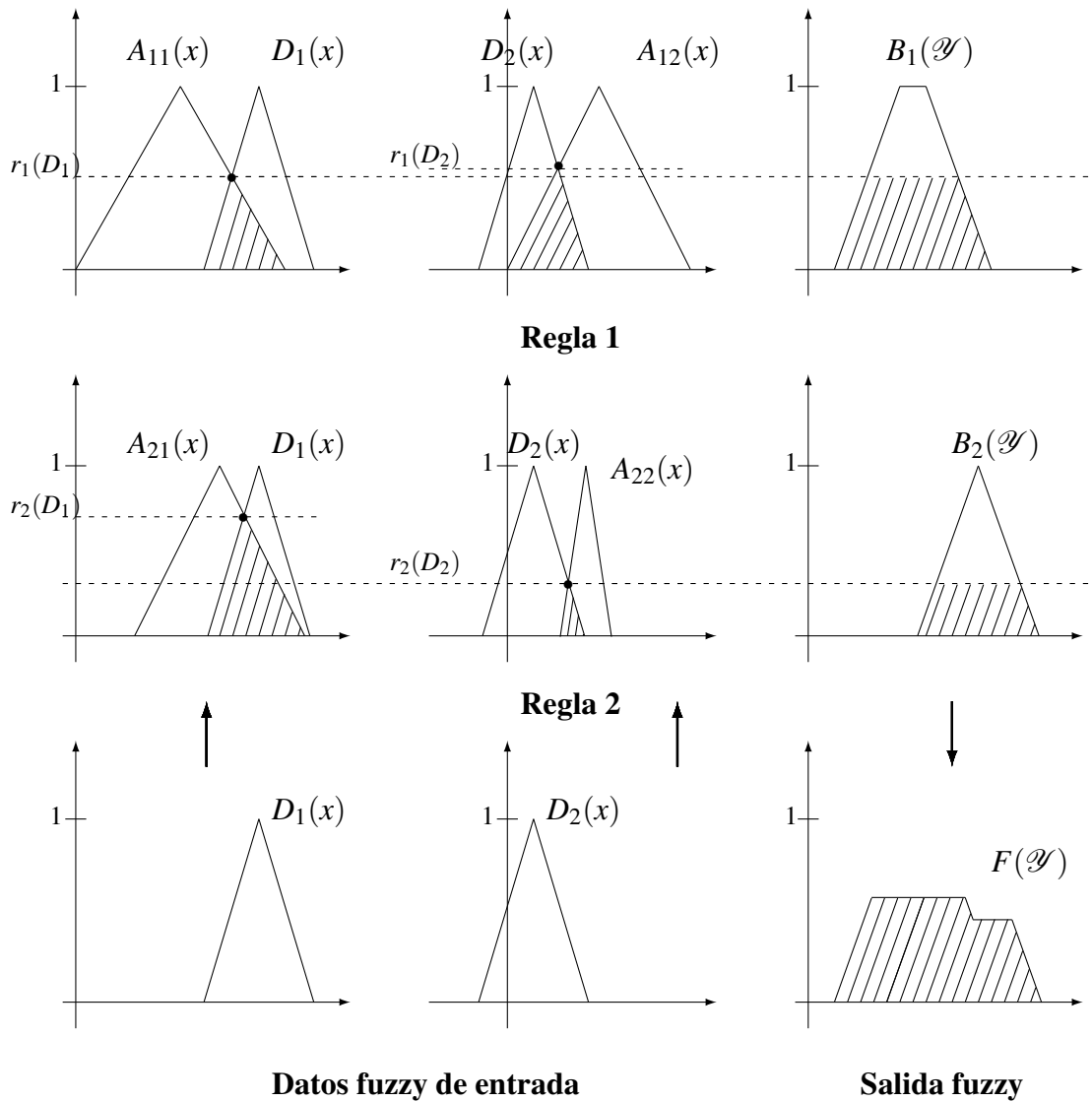
$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathcal{Y}) &= \max_j \{R_j(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathcal{Y})\} \\ &= \max_j \{\min\{A_{j1}(x_1), A_{j2}(x_2), \dots, A_{jm}(x_m), B_j(\mathcal{Y})\}\} \end{aligned} \quad (11)$$

Para encontrar la salida fuzzy del modelo se procede con un razonamiento multicondicional (Massad *et al.*, 2009), en el cual, para una entrada dada por los conjuntos fuzzy  $D_1, D_2, \dots, D_m$ , la salida fuzzy  $F$  del modelo es obtenida por  $F(\mathcal{Y}) = \max_j \{\min\{\min\{r_j(D_1), \dots, r_j(D_m)\}, B_j(\mathcal{Y})\}\}$  donde  $r_j(D_k)$  es llamado el grado de consistencia de  $D_k$  con el conjunto  $A_{jk}$  y se define como  $r_j(D_k) = \sup_{x_j} \{\min\{A_{jk}(x_j), D_k(\mathcal{Y})\}\}$ , para  $k = 1, \dots, m$ . La Figura 14 ilustra el método de inferencia del modelo.

**2.6.2. Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK).** El modelo Takagi-Sugeno-Kang fue propuesto por Sugeno y Takagi (1983), y posteriormente trabajado por Kang (Sugeno y Kang, 1988). El modelo TSK ha sido aplicado en varios campos y disciplinas, incluyendo, entre otros, la teoría de la toma de decisiones (Duarte *et al.*, 2006; Ramathilagam y Pitchipoo, 2022), el entrenamiento de redes neuronales (Dimitriadis *et al.*, 1998), el diseño de sistemas de control (Oshima *et al.*, 1988; Micera *et al.*, 1999; Mahfouf *et al.*, 2001; Ghasem, 2006; Yordanova, 2018; Szedlak-Stinean *et al.*, 2022), y el análisis de riesgos (Silveira y de Barros, 2015). Además, se ha utilizado en la estimación de parámetros; por ejemplo, en la estimación de la tasa de transferencia en un modelo de VIH para el comportamiento dinámico entre individuos seropositivos asintomáticos y sintomáticos (Jafelice *et al.*, 2004; Massad *et al.*, 2009), y la seroprevalencia de anticuerpos contra la rabia canina para perros (Ortega *et al.*, 2000; Massad *et al.*, 2009). La idea fundamental del modelo TSK es utilizar la información sobre la relación funcional entre las variables de entrada en

**Figura 14**

*Ilustración método de inferencia modelo de Mamdani*



el modelo fuzzy. Así, las reglas de inferencia están formadas por conjuntos fuzzy en el antecedente y una función crisp en el consecuente, como sigue:

Regla 1 : Si  $x_1$  es  $A_{11}$ ,  $x_2$  es  $A_{12}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{1m}$ , entonces  $\mathcal{Y}_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m$ ,

Regla 2 : Si  $x_1$  es  $A_{21}$ ,  $x_2$  es  $A_{22}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{2m}$ , entonces  $\mathcal{Y}_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m$ ,

⋮

Regla  $n$  : Si  $x_1$  es  $A_{n1}$ ,  $x_2$  es  $A_{n2}$ , ... y  $x_m$  es  $A_{nm}$ , entonces  $\mathcal{Y}_n = a_{n0} + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m$ .

En un caso más general, estas funciones lineales en los consecuentes de las reglas pueden ser sustituidas por funciones no lineales. En este sentido, cada regla del modelo TSK anterior es de la siguiente forma:

$$\text{Si } x_1 \text{ es } A_{i1}, x_2 \text{ es } A_{i2}, \dots \text{ y } x_m \text{ es } A_{im}, \text{ entonces } \mathcal{Y}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (12)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son las variables lingüísticas de entrada en los universos  $X_1, X_2, \dots, X_m$  respectivamente, con valores en conjuntos fuzzy  $A_{j1}, \dots, A_{jm}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  y  $\mathcal{Y}_j$  son funciones, donde  $n$  representa el número de reglas fuzzy. Considerando un operador t-norma “ $i$ ” entre conjuntos fuzzy, se calcula la fuerza de salida  $w_j$  de cada regla  $j$  haciendo  $w_j = i(A_{j1}(x_1), A_{j2}(x_2), \dots, A_{jm}(x_m))$ , y así, se obtiene el valor final “ $y$ ” del modelo mediante la expresión  $y = \frac{\sum_{(j=1)}^n (w_j \mathcal{Y}_j)}{\sum_{(j=1)}^n w_j}$ .

La gran ventaja de los modelos TSK es su capacidad para describir sistemas altamente no lineales utilizando un número reducido de reglas. Así mismo, la principal diferencia respecto a métodos de inferencia como el de Mamdani yace en que no es necesario realizar un proceso de defuzzificación.

## 2.7. Técnicas estadísticas de estimación de parámetros

**2.7.1. Tablas de vida.** En el Capítulo 3, el método de las tablas de vida, va a permitir obtener de manera “sintética” datos *a priori* necesarios para establecer las reglas de inferencia fuzzy en el proceso de estimación de la tasa intrínseca de crecimiento de la plaga por medio de un modelo TSK. Es una técnica que se utiliza en el análisis de supervivencia para estudiar la mortalidad y la esperanza de vida de una población. En este método, se recopilan datos de los individuos de una población a lo largo de su vida, y se utilizan para construir una tabla de vida, la cual es un registro de las tasas de supervivencia, reproducción o mortalidad de una población, desglosadas por edad, tamaño o etapa de desarrollo (Southwood y Henderson, 2015). Las columnas de las tablas de vida suelen presentar la siguiente información biológica:  $x$  edad,  $n_x$  número de individuos vivos a la edad  $x$ ,  $l_x$  proporción de organismos que sobreviven desde el inicio de la tabla de vida hasta la edad  $x$ ,  $S_x$  tasa de supervivencia de los individuos desde la edad  $x$  hasta  $x + 1$ ,  $d_x$  número de individuos que mueren entre las edades  $x$  a  $x + 1$ ,  $q_x$  tasa de mortalidad “*per cápita*” en el rango de edad  $x$  a  $x + 1$ , y  $b_x$  fecundidad, la cual es determinada por el número de hembras producidas en la edad  $x$  (Krebs, 2014). La Tabla 1 muestra las relaciones entre los parámetros obtenidos mediante la observación de la población.

**Tabla 1**

*Relaciones entre los parámetros de las tablas de vida*

Edad ( $x$ )	$n_x$	$b_x$	$l_x$	$S_x$	$d_x$	$q_x$
0	$n_0$	$b_0$	$\frac{n_0}{n_0}$	$\frac{l_1}{l_0}$	$n_0 - n_1$	$\frac{(n_0 - n_1)}{n_0}$
1	$n_1$	$b_1$	$\frac{n_1}{n_0}$	$\frac{l_2}{l_1}$	$n_1 - n_2$	$\frac{(n_0 - n_2)}{n_0}$
2	$n_2$	$b_2$	$\frac{n_2}{n_0}$			

La tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ) es un parámetro fundamental en el estudio de una población de insectos (Birch, 1948), siendo un indicador importante para entender la dinámica de la población y su capacidad para crecer en ausencia de factores limitantes externos. Para el cálculo de

$r$  se necesita la tabla de vida del adulto y sólo la supervivencia total de los estadios inmaduros (independientemente de la edad). En la práctica, las tasas de fecundidad por edad  $b_x$  se establecerán para algún intervalo de edad conveniente. Si se ponen  $N$  huevos por hembra viva entre las edades  $x$  a  $x+i$  en la unidad de tiempo elegida, entonces  $b_x$ , es igual a  $N$  cuando la proporción de sexos es 1:1. Para la estimación de  $r$  es fundamental conocer la tasa neta de reproducción ( $R_0$ ) y el tiempo medio generacional ( $T_G$ ) de la población.

La tasa neta de reproducción se define como la tasa de reproducción por generación (Steiner *et al.*, 2014), es decir, la proporción de crías que produce una hembra a lo largo de su vida; se estima mediante la suma de las crías supervivientes en los distintos grupos de edad de la siguiente manera

$$R_0 = \sum l_x b_x. \quad (13)$$

Por otro lado, Dublin y Lotka (1925) definen  $T_G$  como el periodo medio que transcurre entre el “nacimiento” de los padres y el “nacimiento” de la descendencia; así

$$T_G = \frac{\sum l_x b_x x}{\sum l_x b_x} = \frac{\sum l_x b_x x}{R_0}, \quad (14)$$

esta es una definición aproximada, ya que la descendencia se produce a lo largo de un periodo de tiempo y no todos a la vez, es decir, aunque la ovoposición de la hembra se extienda a lo largo de un período de tiempo, puede considerarse concentrada para cada generación en un punto del tiempo (Dublin y Lotka, 1925).

De este modo, la tasa intrínseca de crecimiento puede ser estimada como:

$$r = \frac{\ln(R_0)}{T_G}, \quad (15)$$

siendo esta una subestimación de  $r$  debido a la definición aproximada de  $T_G$  (Dublin y Lotka, 1925).

**2.7.2. Mínimos cuadrados no lineales.** En el Capítulo 6, los modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias planteados para modelar la concentración de plaguicidas en papa, involucran parámetros cuya estimación es un problema matemático relevante. En este sentido, se usa el método de mínimos cuadrados no lineales (Bates y Chambers, 1992) para el proceso de estimación de parámetros. Los mínimos cuadrados no lineales son un tipo de análisis de mínimos cuadrados utilizado para ajustar a un conjunto de  $n$  observaciones un modelo que es no lineal con  $l$  parámetros desconocidos ( $n > l$ ). Este método se utiliza para estimar los parámetros de un modelo de regresión no lineal minimizando los residuales del modelo al cuadrado. Considere un conjunto de  $n$  observaciones,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , y una curva (función de regresión)  $y = f(x, \beta)$ , que depende de la variable  $x$  así como de los  $l$  parámetros  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ , el objetivo es encontrar el vector  $\beta$  de parámetros que minimice la siguiente suma de residuales al cuadrado

$$SSR = \sum_{k=1}^n r_k^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k, \beta))^2.$$

**2.7.3. Regresión polinómica local (LOESS).** Teniendo en cuenta la limitada cantidad de datos sobre la concentración de tiametoxam en tubérculos de papa para abordar el problema del Capítulo 6, se introducen nuevos datos a partir de los datos de campo, mediante una regresión polinómica local (LOESS), la cual es una estrategia para ajustar curvas suaves a datos empíricos (Cleveland *et al.*, 1988, 1992). Sean  $y_k, k = 1, \dots, n$ , las observaciones de la variable dependiente (la variable *concentración* en este caso) y  $x_k$  las observaciones de la variable independiente (la variable *tiempo* en este caso). Sea  $y_k = g(x_k) + \epsilon_k$ , donde  $g(x)$  es una función suave de  $x$  a estimar, y  $\epsilon_k$  son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Sea  $x$  un punto en el que vamos a calcular una estimación  $\hat{g}(x)$  de  $g(x)$ . Es necesario

definir la proporción  $\lambda \in [0, 1]$  de observaciones que se utilizarán para la regresión local; el tamaño de la vecindad  $q$  para la estimación en la regresión local, que viene dado por  $\lambda n$  truncada en un entero; la distancia  $d(x)$  del  $q$ -ésimo  $x_k$  más cercano a  $x$ , y  $w_k(x)$  un conjunto de pesos para los puntos  $(x_k, y_k)$  definidos por

$$w_k(x) = W\left(\frac{|x_k - x|}{d(x)}\right), \text{ para } k = 1, \dots, n,$$

donde,  $W(u)$  es una función de peso para  $u > 0$ , tal que  $W(u) \geq 0$ , con  $W(u) = 0$  para  $u > 1$ , y no creciente para  $u \in (0, 1]$ . Para obtener  $\hat{g}(x)$  (valor de la función ajustada en  $x$ ), se ajusta una función lineal que depende de la variable independiente sobre la variable dependiente por mínimos cuadrados ponderados con pesos  $w_k(x)$  en  $(x_k, y_k)$ , como sigue (Dodge, 2008):

$$l_k = \hat{\beta}_{0w} + \hat{\beta}_{1w}x_k,$$

donde

$$\hat{\beta}_{1w} = \frac{\sum_{k=1}^n w_k (x_k - \bar{x}_w)(y_k - \bar{y}_w)}{\sum_{k=1}^n w_k (x_k - \bar{x}_w)^2} \text{ y } \hat{\beta}_{0w} = \bar{y}_w - \hat{\beta}_{1w}\bar{x}_w,$$

considerando las medias ponderadas

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{k=1}^n w_k x_k}{\sum_{k=1}^n w_k} \text{ y } \bar{y}_w = \frac{\sum_{k=1}^n w_k y_k}{\sum_{k=1}^n w_k}.$$

Luego, la forma de  $\hat{g}(x)$  considerando una estimación lineal de  $y_k$  viene dada por (véase Cleveland *et al.* (1992))

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=1}^n l_k(x)y_k.$$

### **3. Tasa intrínseca de crecimiento y evolución de la población del *Premnotrypes Vorax* mediante información fuzzy**

La papa (*Solanum tuberosum*) es una planta con flores de la familia de las solanáceas, originaria de los Andes de Sudamérica. Existen más de 5000 variedades comestibles de papa, lo que la convierte en uno de los cultivos más importantes en términos de consumo (Saeed *et al.*, 2023). El ciclo de desarrollo de la papa consta de las etapas de brotación, emergencia de plántulas, estolonización y tuberización, floración y fructificación, y finalmente, maduración y senescencia, cinco etapas que el agricultor debe monitorear y controlar para lograr una cosecha de calidad. Para un control eficaz de plagas, es esencial conocer el ciclo de vida de la papa, así como la biología y el comportamiento de las plagas, con el fin de tomar decisiones que reduzcan el impacto medioambiental y garantice una cosecha apta para el consumo y rentable para el agricultor. El gusano blanco de la papa, también conocido como gorgojo de los Andes, es una de las principales plagas que afectan al cultivo de la papa en las regiones andinas, causando los mayores daños al cultivo de la papa y las mayores pérdidas económicas al agricultor; pertenece a la familia de los Coleopteros, géneros *Premnotrypes* y *Rhigopsidius*, y especies como *Premnotrypes Latithorax* (Pierce), *Premnotrypes Sutoricallus* (Kuschel) y *Premnotrypes Vorax* (Hustache), entre otras (Alyokhin *et al.*, 2022). Su ciclo biológico consta de cinco etapas de desarrollo: huevo, larva, pupa, prepupa y adulto. Los huevos se depositan en el interior de los tallos secos de plantas en descomposición. En su fase larvaria, el insecto pasa por 4 o 5 estadios larvarios; después entra, crece y se alimenta de la pulpa del tubérculo, destruyéndolo internamente. Realiza un proceso de pupación, abandonando el tubérculo y formando una celda pupal con tierra. Como adulto, el insecto aparece como un gorgojo casi negro que se congrega en la base de los tallos y se alimenta del follaje por la noche (Puma y Calderon, 2016).

El control químico tradicional del gusano blanco de la papa es realizado por el agricultor, aplicando insecticidas periódicamente y siguiendo un conocimiento subjetivo de la evolución de la plaga, que depende de factores externos como el efecto de la temperatura en el desarrollo de la plaga. Partiendo de esta premisa, se propone analizar la dinámica poblacional del gusano blanco de la papa mediante herramientas matemáticas que permitan cuantificar adecuadamente la tasa intrínseca de crecimiento de la población y su evolución temporal, considerando que, en la práctica, la información subyacente es de naturaleza no determinista. La estimación de la tasa intrínseca de crecimiento poblacional es desconocida y los datos estadísticos que se han reportado son escasos y están impregnados de incertidumbre, imprecisión y vaguedad, lo que constituye un gran problema cuando en la práctica se quiere predecir el crecimiento poblacional. Adicionalmente, la falta de precisión en la cuantificación y la imposibilidad de obtener información completa sobre la población inicial impiden el uso de enfoques clásicos para predecir la población en un momento futuro. Hasta donde se sabe, los datos reportados se centran en la cuantificación y el análisis de las fases de desarrollo del ciclo de vida del gusano blanco de la papa, como se muestra en Zenner y Posada (1968), Alcalá y Sedaño (1976), Calvache y Alvarado (1980), Zenner (1986), Calvache (1988), Garzón *et al.* (1996), Alcázar y Cisneros (1999), Niño *et al.* (2004), y otros trabajos citados por Kühne (2007). Estudios más recientes, como los de Villamil *et al.* (2016), Poveda *et al.* (2019), Bravo-Portocarrero *et al.* (2021) y Caro-Arias *et al.* (2021), abordan la diversidad, la distribución geográfica de la plaga y el uso del manejo biológico de la misma. Estos estudios permiten reconocer la relación del factor temperatura con el desarrollo de la plaga en cada una de las etapas de su ciclo de vida, así como su influencia en la supervivencia, mortalidad y fecundidad de la plaga y otros datos entomológicos.

De hecho, en Kühne *et al.* (2007), basándose en los datos de laboratorio, los autores ajustan

taron modelos lineales para las tasas de desarrollo, modelos cuadráticos para las tasas de supervivencia por fase de desarrollo, un modelo lineal para la longevidad de los adultos y un modelo de regresión de Weibull para ajustar los datos de fecundidad. Validando estos modelos en un ensayo de laboratorio y de campo con temperaturas fluctuantes, determinando y comprobando el efecto del factor temperatura en los procesos biológicos del gusano blanco de la papa. Sin embargo, el estudio realizado en Kühne *et al.* (2007) no ofrece una herramienta que modele eficazmente la evolución temporal de la población en el cultivo, lo cual es útil para el agricultor en el seguimiento y control del gusano blanco de la papa.

Teniendo en cuenta que existe un alto grado de subjetividad, inexactitud y vaguedad en el problema de determinar el crecimiento de la población del *Premnotrypes Vorax*, este no puede tratarse mediante un procesamiento lógico estándar. Por ello, un enfoque matemático basado en herramientas fuzzy puede considerarse apropiado en este caso. En este capítulo, se propone el uso de la lógica fuzzy y de herramientas del análisis fuzzy para modelar matemáticamente el crecimiento de la población del gusano blanco de la papa. Se destacan dos contribuciones fundamentales en este estudio: en primer lugar, el uso de un modelo basado en reglas fuzzy de tipo TSK para determinar la tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ). En este caso, este enfoque permite describir una relación funcional de ( $r$ ) con la temperatura utilizando la información proporcionada por una base de datos, con el fin de definir un conjunto reducido de reglas fuzzy que determina la estructura del modelo. Y como segunda contribución, conociendo la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ), se determina la población como una función fuzzy dependiente del tiempo, que corresponde a la solución de una ecuación diferencial ordinaria donde la condición inicial es un número fuzzy. En consecuencia, conociendo la temperatura, se puede estimar la población del gusano blanco de la papa en un cultivo y su evolución en el tiempo; esta información puede ser útil al agricultor para tomar decisiones respecto a su cultivo.

Las principales aportaciones y novedades de este trabajo se resumen en los dos siguientes aspectos: primero, la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento del gusano blanco de la papa, en función de la temperatura, mediante un modelo basado en reglas fuzzy de tipo Takagi-Sugeno-Kang; y segundo, dado que en la práctica la población inicial del gusano blanco de la papa en un cultivo es subjetiva, imprecisa y vaga, conociendo la tasa intrínseca de crecimiento, se propone y resuelve un problema de valor inicial fuzzy para determinar la evolución en el tiempo de la población del gusano blanco de la papa a través de un modelo Maltusiano. En conclusión, dada una temperatura media semanal, es posible conocer la población del gusano blanco de la papa por unidad de superficie oscilando en un intervalo cuya duración depende del grado de imprecisión de la población inicial y de la tasa intrínseca de crecimiento. Este estudio puede ser relevante para la toma de decisiones del agricultor en cuanto al tipo y frecuencia del control de plagas en su cultivo.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en el artículo “Intrinsic growth rate and evolution of the *Premnotrypes Vorax* population using fuzzy information” (Villamizar-Roa *et al.*, 2024).

### 3.1. Materiales y métodos

Bajo la hipótesis de que el crecimiento de la población es exponencial, y que no existen otros aspectos que puedan eventualmente influir en la dinámica poblacional, como primera aproximación a la descripción de la dinámica poblacional se propone una versión fuzzy del modelo maltusiano clásico para describir la evolución temporal de la población del *Premnotrypes Vorax* dada por el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t), P(t_0) = P_0, \quad (16)$$

donde  $P(t)$  representa la población del gusano blanco de la papa en cualquiera de sus fases de desarrollo por unidad de superficie en  $t$  (semanas),  $P_0$  es la población en la observación inicial  $t_0 = 0$ , y  $r$  es el parámetro de la tasa intrínseca de crecimiento de la población. En (16) el parámetro ( $r$ ) es desconocido y el valor  $P_0$  es subjetivo, impreciso y vago; en consecuencia, el problema (16) corresponde a una ecuación diferencial ordinaria fuzzy (Angulo-Castillo *et al.*, 2020). Resolver (16) requiere, como ya se mencionó, conocer el significado de la derivada  $\frac{dP(t)}{dt}$ . En este trabajo se considera  $\frac{dP(t)}{dt}$  en el sentido de la derivada generalizada de Hukuhara (ver Bede y Stefanini (2012); Chalco-Cano *et al.* (2013), Sección 2.3).

Por lo tanto, teniendo en cuenta que la definición de la  $gH$ -derivada implica dos formas de la derivada, a saber, la (i)- $gH$  derivada y la (ii)- $gH$  derivada, en términos de sus  $\alpha$ -niveles, con  $r > 0$ , la ecuación diferencial ordinaria fuzzy en (16) viene dada por  $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]^\alpha = \left[r\underline{P}_\alpha(t), r\overline{P}_\alpha(t)\right]$  con la (i)- $gH$  derivada; y  $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]^\alpha = \left[r\overline{P}_\alpha(t), r\underline{P}_\alpha(t)\right]$  para la (ii)- $gH$  derivada, donde  $\underline{P}_\alpha(t)$  y  $\overline{P}_\alpha(t)$  son funciones reales en el intervalo de observación  $[0, T^*]$ ,  $T^* > 0$ , que representan las funciones finales de  $P$ . En consecuencia, siguiendo a Villamizar-Roa *et al.* (2015) y considerando que  $P_0$  puede representarse (por simplicidad) como un número fuzzy triangular (véase Villamizar-Roa y Arenas-Díaz (2018)) con  $\alpha$ -niveles  $[P_0]^\alpha = \left[\underline{P}_{0\alpha}, \overline{P}_{0\alpha}\right]$ , la solución de (16) es dada en términos de sus  $\alpha$ -niveles ( $[P(t)]^\alpha$ ) por

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \underline{P}_{0\alpha} e^{rt}, \overline{P}_{0\alpha} e^{rt} \right] = e^{rt} [P_0]^\alpha, \quad (i)\text{-}gH \text{ derivada,} \\ \left[ \frac{(\underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha})e^{rt} - (\overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha})e^{-rt}}{2}, \frac{(\underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha})e^{rt} + (\overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha})e^{-rt}}{2} \right], \quad (ii)\text{-}gH \text{ derivada.} \end{array} \right.$$

En el caso,  $r < 0$  las definiciones de la  $gH$ -derivada se invierten y la solución ( $[P(t)]^\alpha$ ) viene

dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{(P_{0\alpha} + \overline{P_{0\alpha}})e^{rt} - (\overline{P_{0\alpha}} - P_{0\alpha})e^{-rt}}{2}, \frac{(P_{0\alpha} + \overline{P_{0\alpha}})e^{rt} + (\overline{P_{0\alpha}} - P_{0\alpha})e^{-rt}}{2} \right], \quad (i)\text{-gH derivada,} \\ \left[ \underline{P_{0\alpha}}e^{rt}, \overline{P_{0\alpha}}e^{rt} \right] = e^{rt} [P_0]^\alpha, \quad (ii)\text{-gH derivada.} \end{array} \right.$$

Kühne *et al.* (2007) utilizaron herramientas estadísticas para modelar parámetros biológicos del gusano blanco de la papa dependientes de la temperatura, a saber, las tasas de desarrollo, las tasas de supervivencia por etapa de desarrollo y la fecundidad de las hembras del gusano blanco de la papa. Utilizaron datos de laboratorio y los estudios de Zenner y Posada (1968), Garzón *et al.* (1996) y Niño *et al.* (2004) para ajustar modelos de regresión lineales para las tasas de desarrollo por etapa, y regresiones cuadráticas para las tasas de supervivencia ( $S_x$ ) de las diferentes etapas del ciclo de vida, de la siguiente manera:

$$S_x = y_0 + m_1T + m_2T^2, \quad (17)$$

donde la estimación de los parámetros  $y_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ , así como del intercepto y la pendiente de los modelos lineales para las tasas de desarrollo, se muestran en la Tabla 2.

Por otro lado, Kühne *et al.* (2007) presentaron un modelo de ajuste de la distribución Weibull de 4 parámetros ( $a = 2,171$ ,  $b = 18622,021$ ,  $c = 5989,938$  y  $x_0 = 13,052$ ) modelando el número normalizado de huevos por hembra, de la siguiente manera:

$$a \left( \frac{c-1}{c} \right)^{\left(\frac{1-c}{c}\right)} \left[ \frac{T-x_0}{b} + \left( \frac{c-1}{c} \right)^{\left(\frac{1}{c}\right)} \right]^{c-1} c^{-\left[ \frac{T-x_0}{b} + \left( \frac{c-1}{c} \right)^{\frac{1}{c}} \right] + \frac{c-1}{c}}. \quad (18)$$

A partir de (18) y suponiendo una proporción entre machos y hembras del gusano blanco de

**Tabla 2**  
*Parámetros estimados de las funciones de supervivencia y regresiones lineales de las tasas de desarrollo por etapas*

Etapa de desarrollo	Tasas de supervivencia <sup>1</sup>			Tasas de desarrollo <sup>2</sup>	
	$y_0$	$m_1$	$m_2$	Intercepto	Pendiente
Huevo	52.84	3.3	-0.11	-0.016	0.0036
Larva	29.19	10.2	-0.46	-0.014	0.0025
Prepupa	48.78	6.64	-0.28		
Pupa	15.48	9.49	-0.32	-0.001	0.0031

*Nota.* Datos obtenidos de Kühne *et al.* (2007).

<sup>1</sup> Parámetros de las regresiones cuadráticas (17) ajustadas por Kühne *et al.* (2007) para las tasas de supervivencia entre las etapas de desarrollo.

<sup>2</sup> Parámetros de las regresiones lineales ajustadas por Kühne *et al.* (2007) para las tasas de desarrollo en cada etapa del ciclo de vida del *Premnotrypes vorax*.

la papa de 1:1, se estima la fecundidad de la plaga ( $b_x$ ), un parámetro necesario para la estimación de  $R_0$  y  $T_G$ , y en consecuencia de ( $r$ ), como en (15).

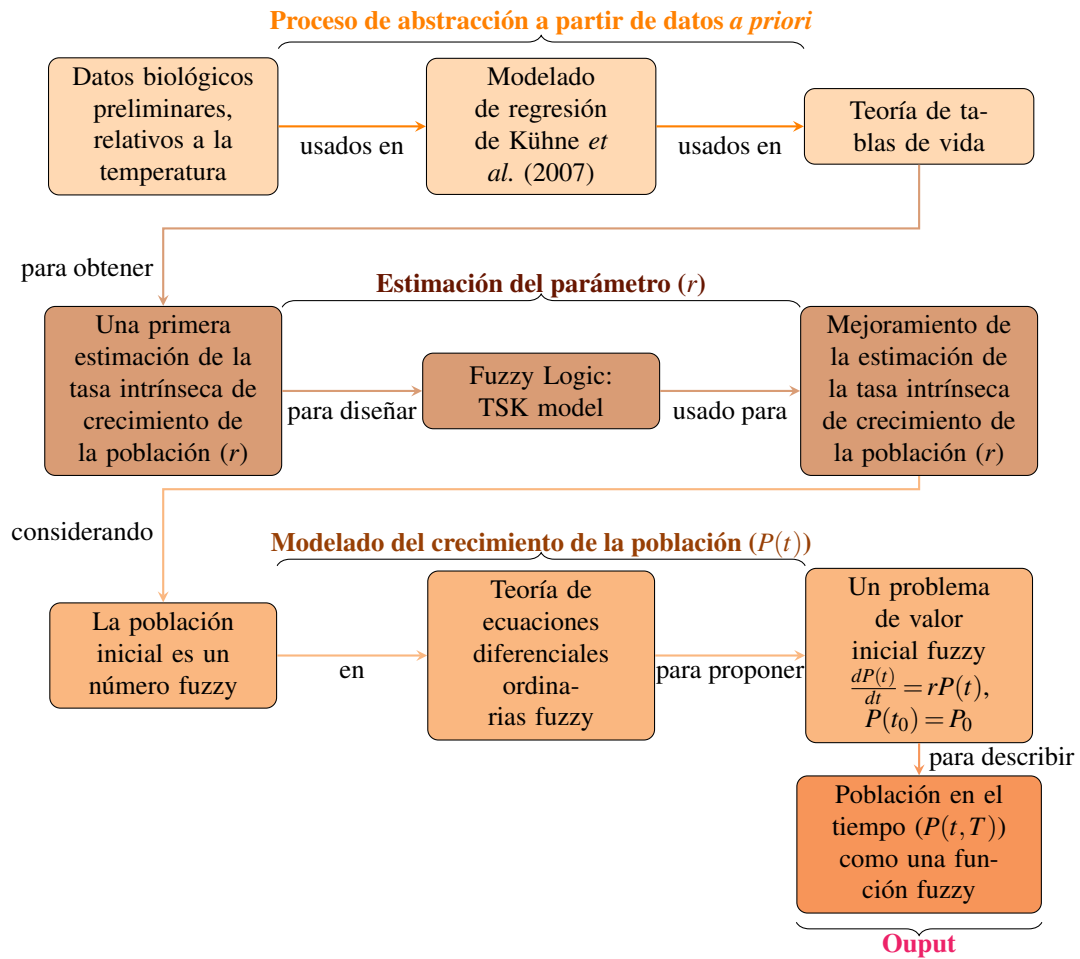
### 3.2. Resultados

El objetivo de esta sección es presentar las principales aportaciones de este capítulo. En la primera parte, se presenta una estimación preliminar de la tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ) del gusano blanco de la papa, haciendo uso de la herramienta de las tablas de vida y considerando algunos datos y modelos reportados de Kühne *et al.* (2007). En una segunda parte, se diseña un modelo basado en reglas fuzzy de tipo TSK para gestionar la incertidumbre de la información preliminar y así, obtener una estimación más precisa de la tasa intrínseca de crecimiento en comparación con la obtenida en la parte anterior mediante herramientas estadísticas. Finalmente, conociendo la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ) del gusano blanco de la papa, se resuelve el problema de valor inicial fuzzy (16) utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales fuzzy. Los pasos de nuestro enfoque se muestran en la Figura 15.

**3.2.1. Estimación de la tasa intrínseca de crecimiento del gusano blanco de la papa mediante tablas de vida.** Se utilizan los modelos ajustados por Kühne *et al.* (2007) para estimar las tasas de supervivencia dependientes de la temperatura (17), las tasas de desarrollo y fecundidad (18); de igual manera se hace uso de la definición de Dublín y Lotka del tiempo generacional (Dublin y Lotka, 1925), y la relación de la tasa de desarrollo del gusano blanco de la papa con el tiempo de desarrollo  $t = \frac{1}{(\text{tasa de desarrollo})}$ . Las Tablas 3 y 4 presentan los valores estimados de los parámetros  $S_x$ ,  $b_x$ ,  $R_0$  y  $T_G$ , para temperaturas comprendidas entre 5°C y 25°C; y finalmente la Tabla 5 muestra los valores de ( $r$ ).

**Figura 15**

Esquema del enfoque para el modelado de la población del *Premnotrype Vorax*



**Tabla 3**

*Tasas de supervivencia del gusano blanco de la papa en sus diferentes etapas de desarrollo, a temperaturas de 5°C, 10°C, 15°C, 20°C y 25°C*

Temperatura (°C)	$S_H^1$	$S_L^2$	$S_{PP}^3$	$S_P^4$	$l_A = S_H S_L S_{PP} S_P^5$
5	0.6659	0.6889	0.7498	0.5493	0.1889
10	0.7484	0.8589	0.87186	0.7838	0.4377
15	0.7759	0.7929	0.8538	0.8583	0.4508
20	0.7484	0.4999	0.6958	0.7728	0.2012
25	0.6659	-0.0231	0.3978	0.5273	-0.0032

<sup>1</sup> Tasa de supervivencia de huevo a larva  $S_H$  a diferentes temperaturas.

<sup>2</sup> Tasa de supervivencia de larvas a prepupas  $S_L$  a diferentes temperaturas.

<sup>3</sup> Tasa de supervivencia de pre-pupas a pupas  $S_P$  a diferentes temperaturas.

<sup>4</sup> Tasa de supervivencia de pupa a adulto  $S_{PP}$  a diferentes temperaturas.

<sup>5</sup> Tasa de supervivencia del huevo al adulto  $l_A$ , utilizando la relación entre los parámetros de las tablas de vida.

**3.2.2. Diseño del modelo fuzzy.** Las tablas de vida permiten obtener una estimación de la tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ ); sin embargo, esta estimación es cruda y subjetiva, debido a la naturaleza no determinista y vaga de los parámetros; por lo tanto, a través de un modelo basado en reglas fuzzy de tipo TSK y tomando como variable de entrada la temperatura ambiente ( $T$ ), el objetivo es encontrar mejores estimaciones del parámetro ( $r$ ), haciendo uso de las estimaciones encontradas por las tablas de vida en la Tabla 5, para establecer las reglas de inferencia.

Se definen los términos lingüísticos en un intervalo de  $[5, 20]^\circ\text{C}$ , dado que en este intervalo la plaga tiene capacidad de desarrollo y reproducción. De este modo, se definen los términos lingüísticos de  $T$ ; por simplicidad, se consideran números fuzzy triangulares y trapezoidales (Angulo-Castillo *et al.*, 2020) como sigue (véase la Figura 16): Temperatura muy baja  $T_{mb} = \langle 2, 5, 6, 5, 9, 5 \rangle$ ; Temperatura baja  $T_b = \langle 6, 5, 9, 5, 12, 5 \rangle$ ; Temperatura media  $T_m = \langle 9, 5, 12, 5, 15, 5 \rangle$ ; Temperatura alta  $T_a = \langle 12, 5, 15, 5, 18, 5 \rangle$ ; Temperatura muy alta  $T_{ma} = \langle 15, 5, 18, 5, 20, 23 \rangle$ .

**Tabla 4**  
*Fecundidad, tasa neta de reproducción y tiempo generacional medio de hembras adultas del gusano blanco de la papa a temperaturas de 5°C, 10°C, 15°C, 20°C y 25°C*

Temperatura (°C)	Fecundidad ( $b_A$ )	Tasa neta de reproducción ( $R_0$ )	Tiempo generacional medio ( $T_G$ )
5	0.2053	3.8781	111.9571
10	0.7601	33.2695	37.2414
15	0.84995	38.31	23.74
20	0.0024	0.0487	16.36
25	0	0	

*Nota.* Estimaciones de la fecundidad ( $b_A$ ), la tasa neta de reproducción ( $R_0$ ) y el tiempo generacional medio ( $T_G$ ) del gusano blanco utilizando datos de Kühne *et al.* (2007) y la teoría de tablas de vida.

**Tabla 5**

*Tasa intrínseca de crecimiento de la población del gusano blanco de la papa por semana a diferentes temperaturas*

Temperatura ( $^{\circ}C$ )	Tasa intrínseca de crecimiento ( $r$ )
5	0.0121
10	0.0941
15	0.1536
20	-0.1847

*Nota.* Tasas de crecimiento intrínsecas dadas por la ecuación (15) a temperaturas en el intervalo  $[5, 20]^{\circ}C$ . A  $25^{\circ}C$  la reproducción del gusano blanco de la papa es nula.

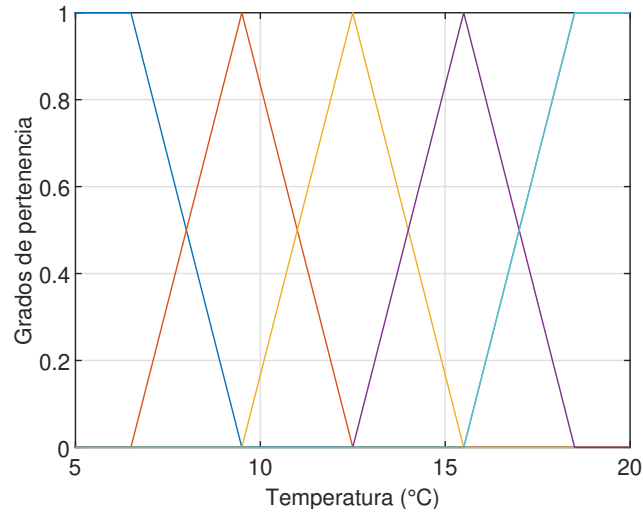
Utilizando los datos *a priori* para ( $r$ ) obtenidos en la Tabla 5, se interpola la función  $T$  (temperatura)  $\rightarrow r(T)$  (tasa intrínseca de crecimiento) a partir de estos puntos conocidos. Para simplificar, se considera las funciones *a priori* lineales  $F_1(T) = 0,0164T - 0,0699$ ,  $F_2(T) = 0,0119T - 0,0249$  y  $F_3(T) = -0,06766T + 1,1685$ , como se muestra en la Figura 17; sin embargo, merece la pena señalar que como funciones *a priori* podrían utilizarse funciones no lineales. En ese caso, se necesitan más datos de interpolación en la Tabla 5 (y en la Tabla 4).

Conociendo  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  se establecen las siguientes reglas de inferencia fuzzy:

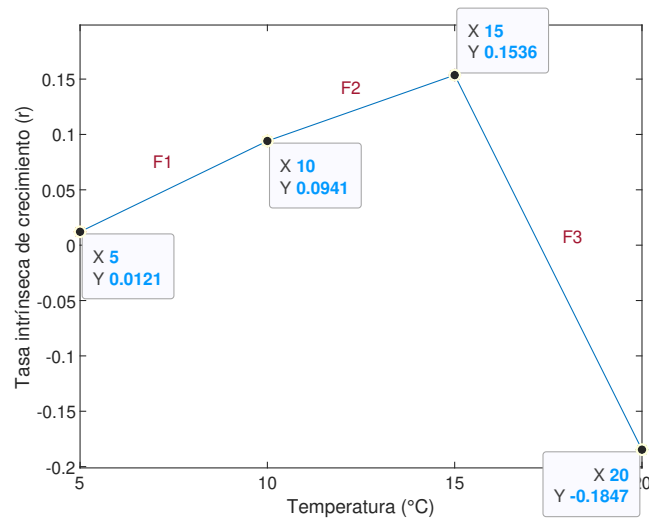
1. Si  $T$  es  $Tmb$ , entonces  $F_1$ .
2. Si  $T$  es  $Tb$ , entonces  $F_1$ .
3. Si  $T$  es  $Tm$ , entonces  $F_2$ .
4. Si  $T$  es  $Ta$ , entonces  $F_3$ .
5. Si  $T$  es  $Tma$ , entonces  $F_3$ .

**Figura 16**

Términos lingüísticos para la variable de entrada Temperatura ( $T^{\circ}\text{C}$ ) (Temperatura muy baja  $T_{ma}$ , Temperatura baja  $T_b$ , Temperatura media  $T_m$ , Temperatura alta  $T_a$  y Temperatura muy alta  $T_{ma}$ ) representados como números fuzzy triangulares y trapezoidales

**Figura 17**

Funciones lineales de base para las reglas de inferencia, interpoladas a partir de los datos a priori de las tasas intrínsecas de crecimiento ( $r$ ) obtenidos en la Tabla 5



Siguiendo el proceso de inferencia proporcionado por el modelo TSK en Massad *et al.* (2009), para una entrada de temperatura  $T_0$ , que se fuzzifica mediante su función característica, la

tasa intrínseca de crecimiento semanal de la población del gusano blanco de la papa viene dada por:

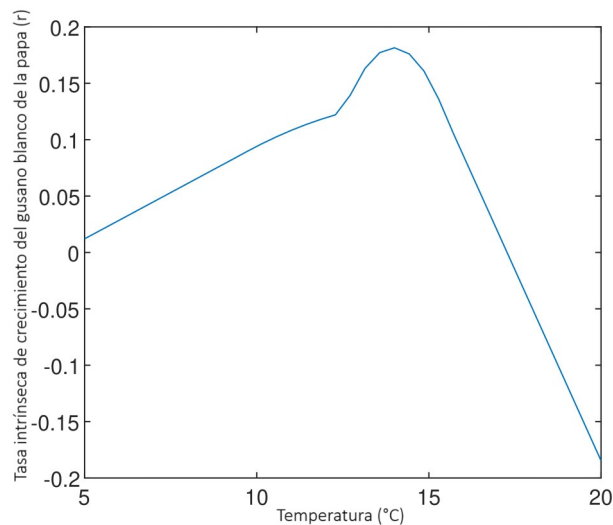
$$r(T_0) = \frac{Tmb(T_0)F_1(T_0) + Tb(T_0)F_1(T_0) + Tm(T_0)F_2(T_0) + Ta(T_0)F_3(T_0) + Tma(T_0)F_3(T_0)}{Tmb(T_0) + Tb(T_0) + Tm(T_0) + Ta(T_0) + Tma(T_0)}. \quad (19)$$

Utilizando Matlab Fuzzy Logic Designer, se ejecuta el método de inferencia; algunos resultados se muestran en la Tabla 6. Estos resultados muestran la tasa intrínseca de crecimiento semanal del gusano blanco de la papa estimada por el modelo basado en reglas fuzzy TSK a diferentes temperaturas, espaciadas por dos grados en el intervalo  $[5, 20]^{\circ}\text{C}$ .

La Figura 18 presenta la función resultante de la inferencia del modelo TSK diseñado.

**Figura 18**

*Función resultante  $r(T)$  del modelo TSK diseñado con la temperatura  $T$  como variable de entrada*



**3.2.3. Población en función del tiempo.** Conocida la estimación de ( $r$ ) como función de la temperatura  $T$ , se procede a determinar la evolución temporal de la población del gusano blanco de la papa. Dado que a efectos prácticos el agricultor no conoce con precisión la población

**Tabla 6**

*Tasa intrínseca de crecimiento de la población del gusano blanco de la papa por semana a diferentes temperaturas*

Temperatura (°C)	Tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ )
7	0.0449
9	0.0777
11	0.108
13	0.156
15	0.154
17	0.0183
19	-0.117

*Nota.* Tasas intrínsecas de crecimiento estimadas utilizando el modelo TSK diseñado a temperaturas en el rango  $[5, 20]^{\circ}C$ .

inicial de la plaga en su cultivo, el problema de valor inicial (16) es de naturaleza fuzzy. Entonces, se considera  $P(0) = P_0$  como un número fuzzy y utilizan las estimaciones de las tasas intrínsecas de crecimiento ( $r$ ) obtenidas en el modelo TSK diseñado.

Sea  $[P(t)]^{\alpha} = [\underline{P}_{\alpha}(t), \overline{P}_{\alpha}(t)]$  y la población inicial representada como un número fuzzy triangular con  $\alpha$ -niveles  $[P_0]^{\alpha} = [\underline{P}_{0\alpha}, \overline{P}_{0\alpha}]$  y  $r > 0$ . Considerando el concepto de la ( $i$ )- $gH$  derivada se tiene que  $[\frac{dP(t)}{dt}]^{\alpha} = [r\underline{P}_{\alpha}(t), r\overline{P}_{\alpha}(t)]$ , lo que equivale a resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (Villamizar-Roa *et al.*, 2015):

$$\begin{cases} \underline{P}'_{\alpha}(t) = r\underline{P}_{\alpha}(t), & \underline{P}_{\alpha}(0) = \underline{P}_{0\alpha}, \\ \overline{P}'_{\alpha}(t) = r\overline{P}_{\alpha}(t), & \overline{P}_{\alpha}(0) = \overline{P}_{0\alpha}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (20)$$

La solución del sistema (20) es  $[\underline{P}_{0\alpha}e^{rt}, \overline{P}_{0\alpha}e^{rt}]$ , lo cual implica que, la ( $i$ )- $gH$  solución de (16) es tal que sus  $\alpha$ -niveles son dados por  $[P(t)]^{\alpha} = [\underline{P}_{0\alpha}e^{rt}, \overline{P}_{0\alpha}e^{rt}]$ . Por otro lado, si se considera

el concepto de la (ii)-gH derivada, se obtiene  $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]^\alpha = \left[r\overline{P_\alpha(t)}, r\underline{P_\alpha(t)}\right]$ ; obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \underline{P_\alpha}'(t) = r\underline{P_\alpha(t)}, & \underline{P_\alpha}(0) = \underline{P_{0\alpha}}, \\ \overline{P_\alpha}'(t) = r\overline{P_\alpha(t)}, & \overline{P_\alpha}(0) = \overline{P_{0\alpha}}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1], \quad (21)$$

cuya solución en términos de sus  $\alpha$ -niveles es

$$[P(t)]^\alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P_{0\alpha}} + \overline{P_{0\alpha}} \right) e^{rt} - \left( \overline{P_{0\alpha}} - \underline{P_{0\alpha}} \right) e^{-rt}, \left( \underline{P_{0\alpha}} + \overline{P_{0\alpha}} \right) e^{rt} + \left( \overline{P_{0\alpha}} - \underline{P_{0\alpha}} \right) e^{-rt} \right].$$

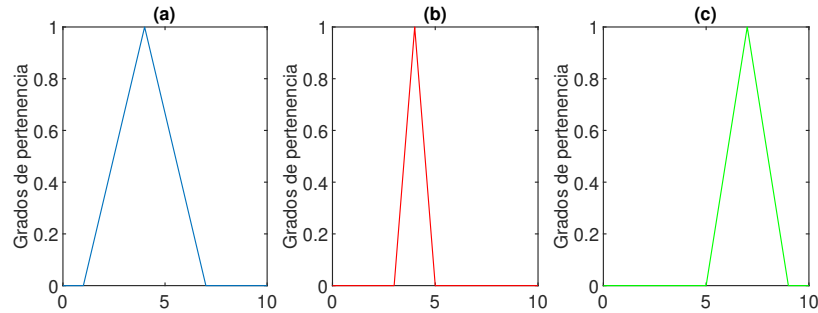
En el caso  $r < 0$ , la (i)-gH derivada es  $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]^\alpha = \left[r\overline{P_\alpha(t)}, r\underline{P_\alpha(t)}\right]$ , lo que equivale a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (21), mientras que, si se considera la (ii)-gH derivada, entonces  $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right]^\alpha = \left[r\underline{P_\alpha(t)}, r\overline{P_\alpha(t)}\right]$ , obteniendo el sistema (20), lo que implica que, la (i)-gH solución de (16) es tal que sus  $\alpha$ -niveles vienen dados por

$$[P(t)]^\alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P_{0\alpha}} + \overline{P_{0\alpha}} \right) e^{rt} - \left( \overline{P_{0\alpha}} - \underline{P_{0\alpha}} \right) e^{-rt}, \left( \underline{P_{0\alpha}} + \overline{P_{0\alpha}} \right) e^{rt} + \left( \overline{P_{0\alpha}} - \underline{P_{0\alpha}} \right) e^{-rt} \right], \text{ y la (ii)-gH solución en términos de sus } \alpha\text{-niveles es dada por } [P(t)]^\alpha = \left[ \underline{P_{0\alpha}} e^{rt}, \overline{P_{0\alpha}} e^{rt} \right].$$

Considerando, por ejemplo, tres poblaciones iniciales diferentes dadas por los números triangulares fuzzy con  $\alpha$ -niveles  $[P_{0(a)}]^\alpha = [3\alpha + 1, 7 - 3\alpha]$ ,  $[P_{0(b)}]^\alpha = [\alpha + 3, 5 - \alpha]$ , y  $[P_{0(c)}]^\alpha = [2\alpha + 5, 9 - 2\alpha]$ , como se muestra en la Figura 19. Tomando las estimaciones de la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) para  $7^\circ\text{C}$ ,  $13^\circ\text{C}$  y  $19^\circ\text{C}$ , se obtienen las soluciones de (16) que se muestran en la Tabla 7, y en las Figuras 20-22 se presentan las funciones de soporte y altura (Angulo-Castillo *et al.*, 2020) de las (i)-gH soluciones y las (ii)-gH soluciones.

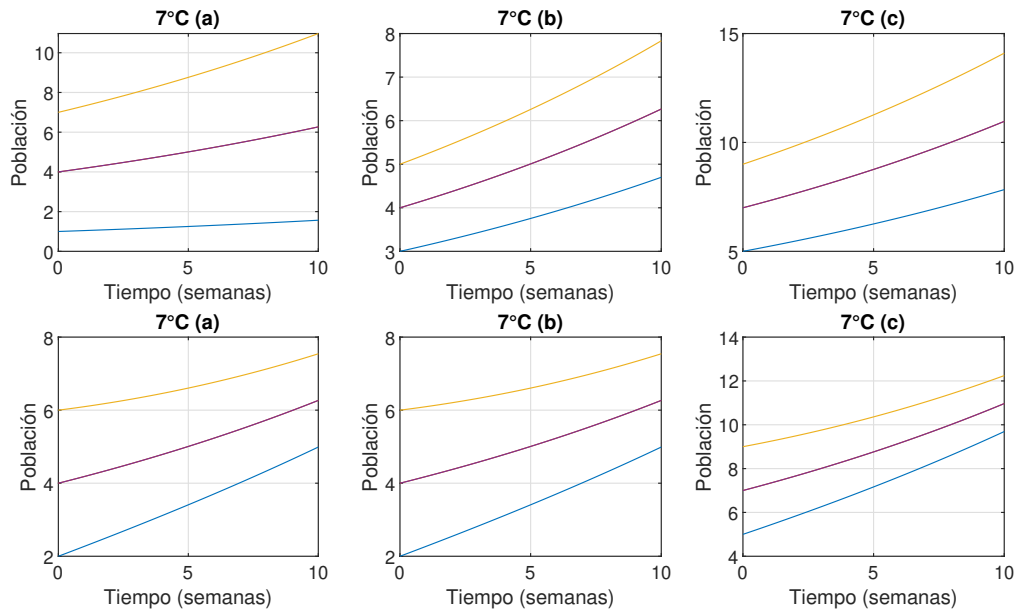
**Figura 19**

*Poblaciones iniciales  $P_{0(a)}$ ,  $P_{0(b)}$  y  $P_{0(c)}$  del gusano blanco de la papa por unidad de superficie, con diferentes  $\alpha$ -niveles*



**Figura 20**

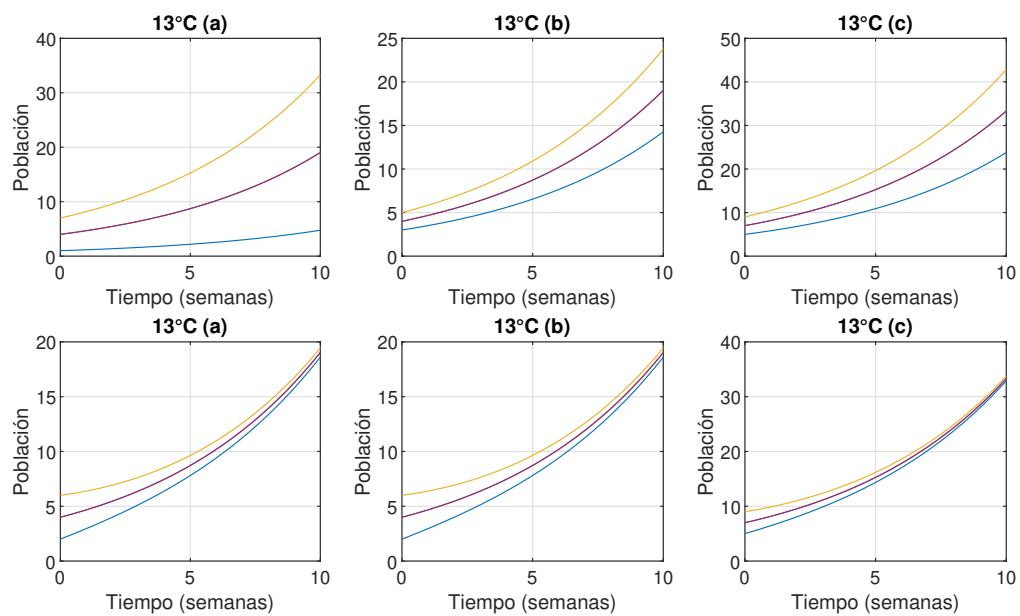
*(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 7°C*



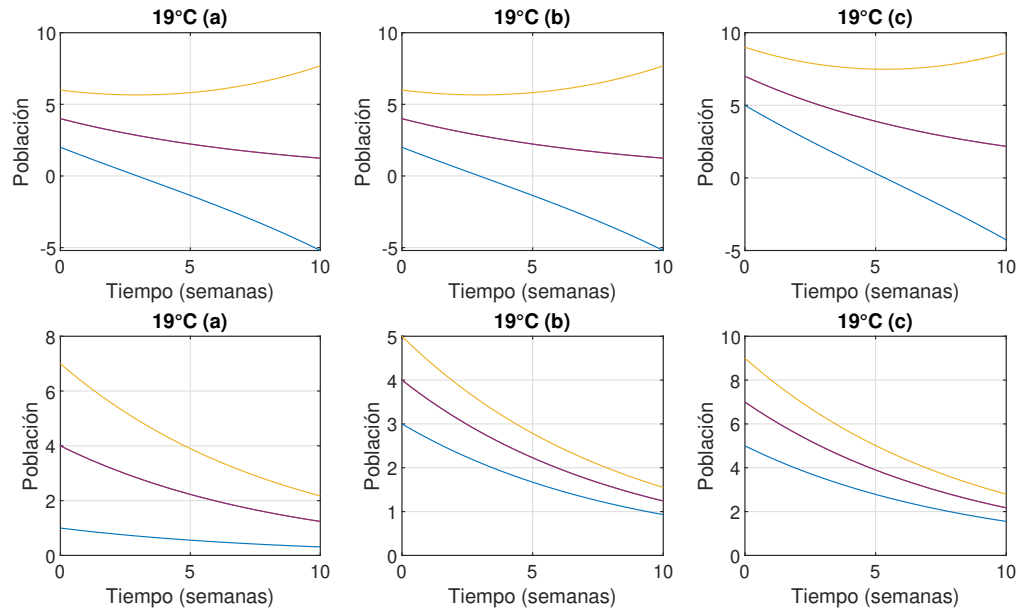
*Nota.* Se consideran las poblaciones  $P_{0(a)}$ ,  $P_{0(b)}$  y  $P_{0(c)}$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las (i)-gH soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las (ii)-gH soluciones.

**Tabla 7**  
 $\alpha$ -niveles de las (i)-gH y (ii)-gH soluciones para temperaturas de 7°C, 13°C y 19°C

$T(^{\circ}C)$	(i)-gH solución	$[P(t)]^{\alpha}$	(ii)-gH solución
7(a)	$[(3\alpha + 1), (7 - 3\alpha)]e^{0.0449t}$	$[4e^{0.0449t} - (3 - 3\alpha)e^{-0.0449t}, 4e^{0.0449t} + (3 - 3\alpha)e^{-0.0449t}]$	
7(b)	$[(\alpha + 3), (5 - \alpha)]e^{0.0449t}$	$[4e^{0.0449t} - (1 - \alpha)e^{-0.0449t}, 4e^{0.0449t} + (1 - \alpha)e^{-0.0449t}]$	
7(c)	$[(2\alpha + 5), (9 - 2\alpha)]e^{0.0449t}$	$[7e^{0.0449t} - (2 - 2\alpha)e^{-0.0449t}, 7e^{0.0449t} + (2 - 2\alpha)e^{-0.0449t}]$	
13(a)	$[(3\alpha + 1), (7 - 3\alpha)]e^{0.156t}$	$[4e^{0.156t} - (3 - 3\alpha)e^{-0.156t}, 4e^{0.156t} + (3 - 3\alpha)e^{-0.156t}]$	
13(b)	$[(\alpha + 3), (5 - \alpha)]e^{0.156t}$	$[4e^{0.156t} - (1 - \alpha)e^{-0.156t}, 4e^{0.156t} + (1 - \alpha)e^{-0.156t}]$	
13(c)	$[(2\alpha + 5), (9 - 2\alpha)]e^{0.156t}$	$[7e^{0.156t} - (2 - 2\alpha)e^{-0.156t}, 7e^{0.156t} + (2 - 2\alpha)e^{-0.156t}]$	
19(a)	$[4e^{-0.117t} - (3 - 3\alpha)e^{0.117t}, 4e^{-0.117t} + (3 - 3\alpha)e^{0.117t}]$	$[(3\alpha + 1), (7 - 3\alpha)]e^{-0.117t}$	
19(b)	$[4e^{-0.117t} - (1 - \alpha)e^{0.117t}, 4e^{-0.117t} + (1 - \alpha)e^{0.117t}]$	$[(\alpha + 3), (5 - \alpha)]e^{-0.117t}$	
19(c)	$[7e^{-0.117t} - (2 - 2\alpha)e^{0.117t}, 7e^{-0.117t} + (2 - 2\alpha)e^{0.117t}]$	$[(2\alpha + 5), (9 - 2\alpha)]e^{-0.117t}$	

**Figura 21***(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 13°C*

*Nota.* Se consideran las poblaciones  $P_{0(a)}$ ,  $P_{0(b)}$  y  $P_{0(c)}$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las (i)-gH soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las (ii)-gH soluciones.

**Figura 22***(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 19°C*

*Nota.* Se consideran las poblaciones  $P_{0(a)}$ ,  $P_{0(b)}$  y  $P_{0(c)}$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las *(i)-gH* soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las *(ii)-gH* soluciones.

La solución del problema de valor inicial (16) muestra un comportamiento exponencial fuzzy. Para la *(i)-gH* solución, a medida que aumenta el tiempo, el conjunto de soporte también aumenta, mientras que en la *(ii)-gH* solución, a medida que aumenta el tiempo el conjunto de soporte disminuye. Se observa un crecimiento exponencial más rápido para una población inicial mayor (compárese  $P_{0(c)}$  frente a  $P_{0(a)}$ ). Por otro lado, para los datos iniciales  $P_{0(a)}$  y  $P_{0(b)}$ , se puede observar cómo el grado de imprecisión de la población inicial afecta a la longitud del intervalo al que pertenece la población del gusano blanco de la papa.

#### **4. Existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy bajo la derivada generalizada de Hukuhara mediante principios de mapeo de tipo contractivo**

Como ya se ha mencionado, las ecuaciones diferenciales fuzzy (EDF) son una herramienta importante en el modelado matemático de procesos dinámicos sujetos a subjetividad, imprecisión, vaguedad e incertidumbre en los parámetros y los datos iniciales involucrados (Angulo-Castillo *et al.*, 2020; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015, 2024). Además, algunos fenómenos de la vida real, modelados mediante EDF, presentan perturbaciones de corta duración en su dinámica que provocan cambios bruscos en sus trayectorias. Normalmente, este tipo de perturbaciones instantáneas se denominan “impulsos”; en este sentido, las EDF que incorporan los impulsos en el sistema, se denominan ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy (EDIF). Algunos ejemplos de este tipo de problemas se pueden encontrar en el control químico de plagas en cultivos, en los que el crecimiento de la plaga a lo largo del tiempo disminuye bruscamente en los tiempos de aplicación del plaguicida como se abordará en el Capítulo 5, así como en el estudio de la dinámica de poblaciones sujetas a eventos como fenómenos naturales, temporadas de caza, etc (Jia *et al.*, 2021), que causan un incremento o decrecimiento de la población en determinados periodos de tiempo. Otros ejemplos incluyen el modelado de la dinámica de procesos como la administración de fármacos o tratamientos donde las dosis se administran a intervalos específicos de tiempo (Mondal *et al.*, 2024; Zhao *et al.*, 2021), el estudio de intervenciones gubernamentales o de los cambios bruscos en políticas económicas que afectan instantáneamente a los mercados (Stamov y Stamov, 2013), así como en el diseño y análisis de sistemas de control donde se aplican pulsos de control en tiempos discretos, como en los sistemas de control para aviones, satélites o robots, (Chu *et al.*, 2024) entre otros.

Para analizar un problema de valor inicial fuzzy impulsivo (IFIVP), primero se debe establecer el sentido de la derivada. Se han considerado varias aproximaciones para estudiar las EDF Bede y Gal (2010); Chalco-Cano *et al.* (2011), siendo la más popular la derivada de Hukuhara ( $H$ -derivada); sin embargo, la clase de funciones  $H$ -diferenciables es muy restrictiva. En este capítulo se considera la derivada generalizada de Hukuhara ( $gH$ -derivada) de funciones fuzzy (Bede, 2008; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015). Este concepto de diferenciabilidad establece dos formas (tipos) de la derivada. La primera forma, la  $(i)$ - $gH$  derivada, coincide con la  $H$ -derivada, extendiendo así la clase original de funciones fuzzy diferenciables, admitiendo con la  $(ii)$ - $gH$  derivada la diferenciabilidad de funciones fuzzy que tienen longitud (diámetro) decreciente de sus conjuntos de soporte.

Algunos autores han estudiado la teoría de las EDIF, la cual ha llegado a ser un campo importante de investigación en los recientes años. En Lakshmikantham y Mcrae (2001) se consideró por primera vez las EDIF, combinando la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas y la teoría de ecuaciones diferenciales fuzzy. En Lan y Nieto (2009), los autores utilizaron el Teorema de contracción de Banach para obtener teoremas de existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial de EDIF implícitos de primer orden, definiendo la variación en cada punto de impulso mediante la diferencia de Hukuhara. En Rodríguez-López (2008), la autora estudió las EDIF con condiciones de contorno periódicas, considerando la existencia de soluciones (en el sentido de la  $H$ -derivada) y el cálculo de éstas para algunos problemas “lineales” periódicos, con el fin de aproximar soluciones a problemas no lineales bajo condiciones apropiadas. En Ramesh y Vengataasalam (2014), los autores demostraron la existencia y unicidad de la solución de una EDIF considerando la  $H$ -derivada mediante la construcción de una sucesión de funciones convergentes a la solución de la EDIF. Además, en Vu y VanHoa (2016), los autores demostraron la existencia y unicidad de la solución de EDIF bajo la derivada generalizada de Hukuhara y la variación

en cada punto de impulso definida por la  $H$ -diferencia, utilizando el principio de contracción de funciones. En Liu *et al.* (2020b,a, 2023), los autores estudiaron la sensibilidad de las soluciones de tres variantes de EDIF lineales de primer orden a perturbaciones en sus condiciones iniciales o en la propia ecuación diferencial, estudiando la estabilidad de Ulam (Brzdek *et al.*, 2018). Dieron una representación de las soluciones de una clase particular de EDIF lineales de primer orden con coeficientes constantes utilizando el concepto de  $gH$ -derivada y una matriz fundamental impulsiva. Finalmente, establecieron la existencia y la unicidad de soluciones  $gH$ -diferenciables de EDIF no lineales de primer orden descritas por una parte lineal y con una variación no lineal utilizando el principio de contracción de funciones.

Motivados por el trabajo de Villamizar-Roa *et al.* (2015), en este capítulo se utilizan algunos teoremas de punto fijo sobre funciones débilmente contractivas definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, para probar la existencia y la unicidad de soluciones de un problema de valor inicial impulsivo fuzzy (PVIIF) en el sentido de la  $gH$ -derivada y definiendo la variación en cada punto de impulso mediante la  $gH$ -diferencia. De esta manera, se establecen 5 teoremas que sintetizan los resultados de este capítulo.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sección 4.1, se plantea el PVIIF a estudiar y se presentan las definiciones y resultados necesarios para el abordaje del problema y el planteamiento de los teoremas de existencia. En la Sección 4.2, se presentan en 5 teoremas, los principales resultados de existencia y unicidad de una (i)- $gH$  solución y una (ii)- $gH$  solución para un PVIIF considerando la definición de variación en cada impulso a partir de la  $gH$ -diferencia.

#### 4.1. Problema de valor inicial impulsivo fuzzy

Se considera el siguiente PVIIF

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{para } t \in [0, T^*], t \neq t_p, \\ \Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-)), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (22)$$

donde  $x_0 \in \mathcal{F}$  es el valor inicial fuzzy,  $f: [0, T^*] \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{I}_p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $p = 1, \dots, k$ , son funciones fuzzy dadas,  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = T$  son los tiempos donde se establecen los impulsos,  $x(t_p^-)$  y  $x(t_p^+)$  representan los límites a izquierda y a derecha de  $x(t)$  en  $t = t_p$ , respectivamente. Y  $x'$  se asume en el sentido de la  $gH$ -derivada. Además,  $\Delta x(t_p)$  representa la variación de  $x$  en  $t_p$ , que se define por  $\Delta x(t_p) := x(t_p^+) \ominus_{gH} x(t_p^-)$  (ver Sección 2.3.2).

En el siguiente ejemplo se aborda un problema de valor inicial impulsivo fuzzy, bajo la  $gH$ -derivada y las dos formas de la  $gH$ -diferencia en (6).

**Ejemplo 2.** Considerando el problema de valor inicial impulsivo fuzzy:

$$\begin{cases} x'(t) = -0.4x(t), & \text{para } t \in [0, T], t \neq t_p, \\ \Delta x(t_p) = \theta_p x(t_p^-), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (23)$$

donde,  $x_0 = \langle 98, 100, 102 \rangle$  es un número triangular con  $\alpha$ -niveles  $[\underline{x}_{0\alpha}, \overline{x}_{0\alpha}] = [2\alpha + 98, 102 - 2\alpha]$ , tiempos de impulso  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 4$ , y  $\theta_1 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 1$ , para  $p = 1, 2$ .

En primer lugar, para  $x(t_p^+)$  definido como en (7), al considerar (i)-gH derivada de  $x$  la (i)-gH solución de (23) en términos de sus  $\alpha$ -niveles viene dada por:

$$[x_1(t)]^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} - \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} + \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ 0.75 \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} - \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} + \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t} \right], & \text{si } 2 < t \leq 4, \\ 1.5 \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} - \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} + \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t} \right], & \text{si } 4 < t. \end{cases}$$

Por otro lado, si se considera la (ii)-gH derivada de  $x$ , entonces la (ii)-gH solución de (23) en términos de sus  $\alpha$ -niveles es dada por:

$$[x_2(t)]^\alpha = \begin{cases} \left[ \underline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t}, \overline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ 1.5 \left[ \underline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t}, \overline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 2 < t \leq 4, \\ 3 \left[ \underline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t}, \overline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 4 < t. \end{cases}$$

En segundo lugar, para  $x(t_p^+)$  definido como en (8), si  $x$  es (i)-gH diferenciable, entonces la (i)-gH solución de (23) en términos de sus  $\alpha$ -niveles es dada por:

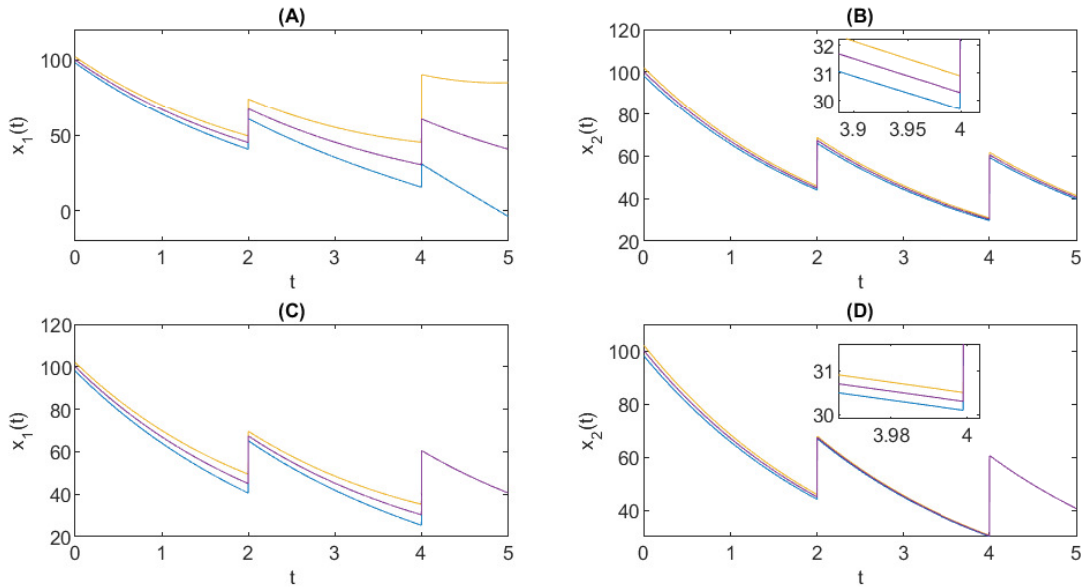
$$[x_1(t)]^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} - \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} + \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ \left[ 0.75 \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} - 0.25 \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t}, 0.75 \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} + 0.25 \left( \overline{x_{0\alpha}} - \underline{x_{0\alpha}} \right) e^{0.4t} \right], & \text{si } 2 < t \leq 4, \\ 1.5 \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) e^{-0.4t} \right], & \text{si } 4 < t. \end{cases}$$

Por otra parte, si  $x$  es (ii)-gH diferenciable, entonces, la (ii)-gH solución de (23) en términos de sus  $\alpha$ -niveles es dada por:

$$[x_2(t)]^\alpha = \begin{cases} \left[ \underline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t}, \overline{x_{0\alpha}} \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + 0.5\overline{x_{0\alpha}} \right) \cdot e^{-0.4t}, \left( \overline{x_{0\alpha}} + 0.5\underline{x_{0\alpha}} \right) \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 2 < t \leq 4, \\ 1.5 \left[ \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) \cdot e^{-0.4t}, \left( \underline{x_{0\alpha}} + \overline{x_{0\alpha}} \right) \cdot e^{-0.4t} \right], & \text{si } 4 < t. \end{cases}$$

**Figura 23**

Soporte ( $\alpha = 0$ ) (curvas azul y amarilla) y la altura ( $\alpha = 1$ ) (curva púrpura) de la solución fuzzy de (23)



*Nota.*  $gH$ -soluciones de (23). (A): Evolución de  $x(t)$  en el caso donde  $x(t)$  es (i)- $gH$  diferenciable y  $x(t_p^+)$  se define como en (7). (B): Evolución de  $x(t)$  en el caso donde  $x(t)$  es (ii)- $gH$  diferenciable y  $x(t_p^+)$  se define como en (7). (C): Evolución de  $x(t)$  en el caso donde  $x(t)$  es (i)- $gH$  diferenciable y  $x(t_p^+)$  se define como en (8). (D): Evolución de  $x(t)$  en el caso donde  $x(t)$  es (ii)- $gH$  diferenciable y  $x(t_p^+)$  se define como en (8).

Seguindo el enfoque de Villamizar-Roa et al. (2015), se puede combinar la (i)- $gH$  diferenciable y la (ii)- $gH$  diferenciable en (23) para obtener otras soluciones. Por ejemplo, si se considera  $x(t_p^+)$  como en (7) y que  $x$  es (ii)- $gH$  diferenciable para  $t \in [0, 2] \cup (4, T]$  y  $x$  es (i)- $gH$  diferenciable para  $t \in (2, 4]$ , entonces se debe resolver el siguiente problema

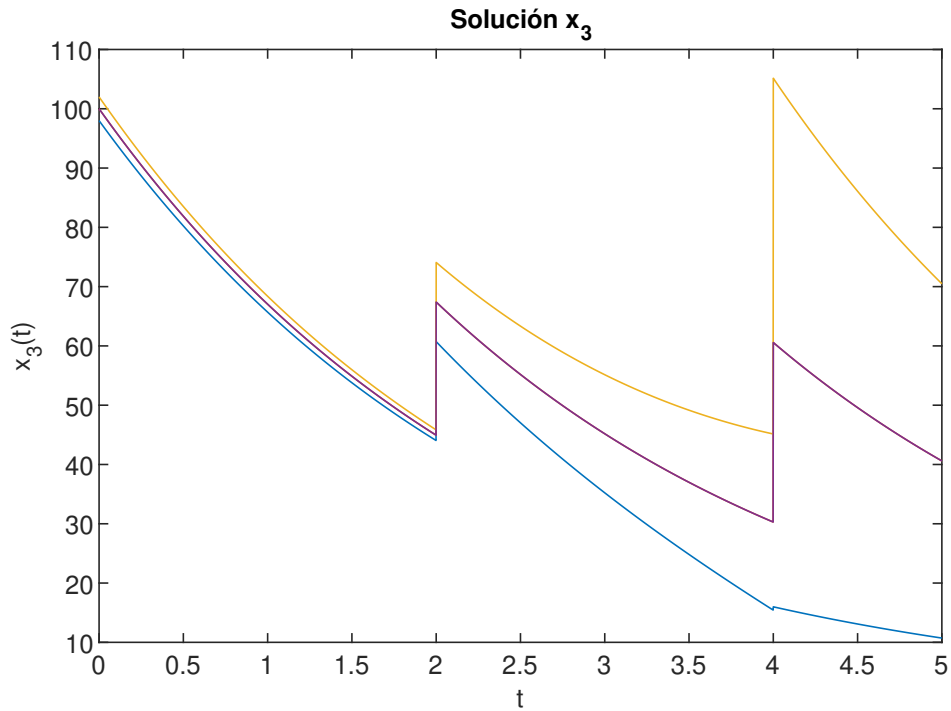
$$\left\{ \begin{array}{ll} x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, & t \in [0, 2], \\ x'(t) = -0.4x(t), \quad x(2^+) = (1 + \theta_1)x_2(2), & t \in (2, 4], \\ x(4^+) = (1 + \theta_2)x_3(4), & t \in (4, T], \end{array} \right. \quad (24)$$

así, se obtiene una tercera solución de (23) dada por

$$[x_3(t)]^\alpha = \begin{cases} [\underline{x}_{0\alpha} \cdot e^{-0.4t}, \overline{x}_{0\alpha} \cdot e^{-0.4t}], & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ 0.75 \left[ (\underline{x}_{0\alpha} + \overline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4t} - (\overline{x}_{0\alpha} - \underline{x}_{0\alpha}) e^{0.4t}, (\underline{x}_{0\alpha} + \overline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4t} + (\overline{x}_{0\alpha} - \underline{x}_{0\alpha}) e^{0.4t} \right], & \text{si } 2 < t \leq 4, \\ 1.5 \left[ (\underline{x}_{0\alpha} + \overline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4t} - (\overline{x}_{0\alpha} - \underline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4(t-8)}, (\underline{x}_{0\alpha} + \overline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4t} + (\overline{x}_{0\alpha} - \underline{x}_{0\alpha}) e^{-0.4(t-8)} \right], & \text{si } 4 < t. \end{cases}$$

**Figura 24**

Soporte ( $\alpha = 0$ ) (curvas azul y amarilla) y la altura ( $\alpha = 1$ ) (curva púrpura) funciones de la tercera solución del Problema (24)



El siguiente resultado establece la forma integral de las soluciones de (22).

**Teorema 11.** (i) Una función fuzzy  $x : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$  es una (i)-gH solución de (22) si, y solo si,  $x$  satisface una de las siguientes ecuaciones integrales fuzzy:

$$(a) \quad x(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^k \mathbb{I}_i(x(t_i)), & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T, \end{cases} \quad (25)$$

siempre que  $x(t_p^+)$  se defina como en (7).

$$(b) \quad x(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ [x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds] \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ [x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds] \ominus (-1) \sum_{i=0}^k \mathbb{I}_i(x(t_i)), & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T, \end{cases} \quad (26)$$

siempre que  $x(t_p^+)$  se defina como en (8).

(ii) Una función fuzzy  $x : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$  es (ii)-gH solución de (22) si, y solo si,  $x$  satisface una de las siguientes ecuaciones integrales fuzzy:

(a)

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ [x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ [x_0 + \sum_{i=0}^k \mathbb{I}_i(x(t_i))] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T, \end{cases} \quad (27)$$

siempre que  $x(t_p^+)$  se defina como en (7).

(b)

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_0 \ominus (-1) [\int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))], & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_0 \ominus (-1) [\int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^k \mathbb{I}_i(x(t_i))], & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T, \end{cases} \quad (28)$$

siempre que  $x(t_p^+)$  se defina como en (8).

En (26), (27) y (28) se asume que la diferencia de Hukuhara existe.

*Demostración.* Primero, se probará para el caso (i)-gH, se analizará para cada caso de la definición de  $x(t_p^+)$  en (22) como sigue:

*Subcaso (a).* Se probará que si  $x$  es una (i)-gH solución de (22) y  $x(t_p^+)$  se define como

en (7), para  $p = 1, \dots, k$ , entonces  $x$  se expresará mediante la ecuación integral (25). En efecto, si  $t \in [0, t_1]$  se tiene que de entonces por el Teorema 6-(1) se tiene que  $x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$ , así,  $x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds$ .

Si  $t \in (t_1, t_2]$ , el Teorema 6-(1) y la Observación 1-(1) implica que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= (x(t_1^-) + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds + \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) + \int_0^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Por inducción, si  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  y usando el Teorema 6-(1) y la Observación 1-(1) una vez más, se obtiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= (x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-))) + \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds + \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds + \mathbb{I}_2(x(t_2^-)) + \int_{t_2}^{t_3} f(s, x(s))ds + \right. \\ &\quad \left. \dots + \mathbb{I}_{p-1}(x(t_{p-1}^-)) + \int_{t_{p-1}}^{t_p} f(s, x(s))ds \right) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i^-)) + \int_0^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Ahora se probará que si  $x$  satisface (25) entonces  $x$  es una  $(i)$ - $gH$  solución de (22) y  $x(t_p^+)$  está definida como en (7). En efecto, por el Teorema 6-(1) para  $t \in [0, t_1]$ , se tiene que  $D_{(i)}x(t) =$

$f(t, x(t))$ . Si  $t \in (t_1, t_2]$  y  $t+h \in (t_1, t_2]$  con  $h > 0$  suficientemente pequeño, se tiene que

$$\begin{aligned} x(t+h) \ominus x(t) &= \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \right] \\ &\ominus \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\ &= \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

y para  $t-h \in (t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned} x(t) \ominus x(t-h) &= \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\ &\ominus \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \right] \\ &= \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \\ &= \int_{t-h}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

luego, se obtiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [x(t+h) \ominus x(t)] = f(t, x(t)), \text{ y, } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [x(t) \ominus x(t-h)] = f(t, x(t)),$$

por lo tanto  $x$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable y en consecuencia  $D_{(i)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_1, t_2]$ .

Nuevamente, por inducción, para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  se obtiene que

$$\begin{aligned} x(t+h) \ominus x(t) &= \left[ x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) + \int_{t_p}^{t+h} f(s, x(s)) ds \right] \\ &\ominus \left[ x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_p}^{t+h} f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
&= \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds,
\end{aligned}$$

y, para  $t - h \in (t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned}
x(t) \ominus x(t-h) &= \left[ x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \right] \\
&\ominus \left[ x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) + \int_{t_p}^{t-h} f(s, x(s)) ds \right] \\
&= \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_p}^{t-h} f(s, x(s)) ds \\
&= \int_{t-h}^t f(s, x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Entonces,  $x$  es  $(i)$ -gH diferenciable y  $D_{(i)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ . Luego, como para cada  $p = 1, \dots, k$ ,  $x(t)$  es  $(i)$ -gH diferenciable en  $(t_p, t_{p+1}]$ , por Teorema 6-(1) se cumple que  $x(t) = x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds$ , y como  $x(t)$  satisface (25), se tiene que

$$\begin{aligned}
x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds &= \left( x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) + \mathbb{I}_p(x(t_p)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
&= (x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p))) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds,
\end{aligned}$$

por lo cual,  $x(t_p^+) = (x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p)))$ , es decir  $x(t_p^+)$  es como en (7).

*Subcaso (b).* Primero, se demostrará que si  $x$  es una  $(i)$ -gH solución de (22) y  $x(t_p^+)$  se define como en (8), entonces  $x$  puede ser expresada mediante la ecuación integral fuzzy (26). En efecto, si  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) = D_{(i)}x(t) = f(t, x(t))$ , por el Teorema 6-(2) se tiene que  $x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds$ ; entonces,  $x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds$ .

Si  $t \in (t_1, t_2]$ , el Teorema 6-(2) y la Observación 1-(1) implica que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= (x(t_1^-) \ominus (-1)\mathbb{I}_1(x(t_1^-))) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1)\mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left( x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1)\mathbb{I}_1(x(t_1^-)).
 \end{aligned}$$

Por inducción, si  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  y utilizando el Teorema 6-(1) y la Observación 1-(1) una vez más, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= (x(t_p^-) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p^-))) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left[ \left( \left( \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1)\mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right) \ominus \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \ominus (-1)\mathbb{I}_{p-1}(x(t_{p-1}^-)) \right) + \int_{t_{p-1}}^{t_p} f(s, x(s)) ds \right] \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p^-)) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_{p-1}} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i^-)) \right) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p^-)) \right] + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left[ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right] \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)).
 \end{aligned}$$

Ahora se probará que si  $x$  satisface (26) entonces  $x$  es una  $(i)$ - $gH$  solución de (22). En efecto, por el Teorema 6-(1) para  $t \in [0, t_1]$ , se tiene que  $D_{(i)}x(t) = f(t, x(t))$ . Si  $t \in (t_1, t_2]$  y  $t+h \in (t_1, t_2]$  con  $h > 0$  suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}
x(t+h) \ominus x(t) &= \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \right] \\
&\quad \ominus \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\
&= \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\
&= \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds,
\end{aligned}$$

y, para  $t-h \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
x(t) \ominus x(t-h) &= \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\
&\quad \ominus \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) + \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \right] \\
&= \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \ominus \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \\
&= \int_{t-h}^t f(s, x(s)) ds,
\end{aligned}$$

similar a la demostración en el caso (a) por inducción se obtiene que  $x$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable y  $x'(t) = D_{(i)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$ . Luego, como para cada  $p = 1, \dots, k$ ,  $x(t)$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable en  $(t_p, t_{p+1}]$ , por Teorema 6-(1) se cumple que  $x(t) = x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds$ , y como  $x(t)$  satisface (26), se tiene que

$$\begin{aligned}
x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds &= \left[ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right] \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \\
&= \left[ \left( \left( x_0 + \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p)) \right] + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
&= (x(t_p^-) \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p))) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds,
\end{aligned}$$

por lo cual,  $x(t_p^+) = (x(t_p^-) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p)))$ , es decir  $x(t_p^+)$  es como en (8).

En esta segunda parte, se considerarán los casos que involucran la (ii)-gH derivada:

*Subcaso (a).* En este caso, se probará que si  $x$  es una (ii)-gH solución de (22) y  $x(t_p^+)$  se define como en (7) entonces  $x$  satisface (26). De hecho, si  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) = D_{ii}x(t) = f(t, x(t))$  y por el Teorema 6-(2),  $x(t) = x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s))ds$ , entonces,  $x(t_1) = x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds$ . Si  $t \in (t_1, t_2]$ , el Teorema 6-(2) y la Observación 1-(1) implican que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1^+) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= (x(t_1^-) + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds \right) + \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &= [x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Por inducción, si  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  y utilizando el Teorema 6-(2) y la Observación 1-(1) una vez más, se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_p^+) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= (x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-))) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= \left[ \left( \left( \left( \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds \right) + \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds \right) + \dots \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \mathbb{I}_{p-1}(x(t_{p-1}^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_{p-1}}^{t_p} f(s, x(s))ds \right) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-)) \right] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \\ &= \left[ \left( \left( x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i^-)) \right) \ominus (-1) \int_0^{t_{p-1}} f(s, x(s))ds \right) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-)) \right] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

$$= \left[ x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Ahora se probará que si  $x$  satisface (26) entonces  $x$  es una (ii)- $gH$  solución de (22). De hecho, por el Teorema 6-(2) para  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) = D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ . Si  $t \in (t_1, t_2]$  y  $t+h \in (t_1, t_2]$  con  $h > 0$  suficientemente pequeño, se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) \ominus x(t+h) &= \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\ &\quad \ominus \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \right] \\ &= (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \\ &= (-1) \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

y, para  $t-h \in (t_1, t_2]$  se tiene que

$$\begin{aligned} x(t-h) \ominus x(t) &= \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \right] \\ &\quad \ominus \left[ (x_0 + \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\ &= (-1) \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= (-1) \int_{t-h}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [x(t) \ominus x(t+h)] = f(t, x(t)), \text{ y, } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [x(t-h) \ominus x(t)] = f(t, x(t)),$$

por tanto  $x$  es (ii)- $gH$  diferenciable y en consecuencia  $D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_1, t_2]$ . De nuevo por inducción, para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  se obtiene que  $x$  es (ii)- $gH$  diferenciable, y

$D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ .

Así, como para cada  $p = 1, \dots, k$ ,  $x(t)$  es (ii)-gH diferenciable en  $(t_p, t_{p+1}]$ , por Teorema 6-(2) se cumple que  $x(t) = x(t_p^+) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds$ , y como  $x(t)$  satisface (27), se tiene que

$$\begin{aligned} x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds &= \left[ x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds \\ &= \left[ \left( x_0 + \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) \ominus (-1) \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \mathbb{I}_p(x(t_p)) \right] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds, \\ &= [x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p))] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

por lo cual,  $x(t_p^+) = (x(t_p^-) + \mathbb{I}_p(x(t_p)))$ , es decir  $x(t_p^+)$  es como en (7).

*Subcaso (b).* Primero, se probará que si  $x$  es una (ii)-gH solución de (22) y  $x(t_p^+)$  se define como en (8) entonces  $x$  satisface (28). De hecho, si  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) = D_{ii}x(t) = f(t, x(t))$ , y por el Teorema 6-(2),  $x(t) = x_0 \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) ds$ , así,  $x(t_1) = x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds$ . Para  $t \in (t_1, t_2]$ , el Teorema 6-(2) y la Observación 1-(2) implican que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1^+) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= (x(t_1^-) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-))) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 \ominus (-1) \left[ \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Por inducción, si  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  y utilizando el Teorema 6-(2) y la Observación 1-(2) una vez más, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t_p^+) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= (x(t_p^-) \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p^-))) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left[ \left( \left( \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \ominus (-1) \mathbb{I}_{p-1}(x(t_{p-1}^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_{p-1}}^{t_p} f(s, x(s)) ds \right] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= \left[ \left( x_0 \ominus (-1) \left( \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i^-)) \right) + \int_0^{t_{p-1}} f(s, x(s)) ds \right) \right] \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p^-)) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds \\
 &= x_0 \ominus (-1) \left[ \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, se probará que si  $x$  satisface (28) entonces  $x$  es una solución (ii)- $gH$  de (22). De hecho, por el Teorema 6-(b) para  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) = D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ . Si  $t \in (t_1, t_2]$  y  $t+h \in (t_1, t_2]$  con  $h > 0$  suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}
 x(t) \ominus x(t+h) &= \left[ \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right] \\
 &\quad \ominus \left[ \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \right] \\
 &= (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^{t+h} f(s, x(s)) ds \\
 &= (-1) \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds,
 \end{aligned}$$

y, para  $t-h \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
 x(t-h) \ominus x(t) &= \left[ \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \right] \\
 &\quad \ominus \left[ \left( \left( x_0 \ominus (-1) \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds \right) \ominus (-1) \mathbb{I}_1(x(t_1^-)) \right) \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (-1) \int_{t_1}^{t-h} f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds \\ &= (-1) \int_{t-h}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

así, se obtiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [x(t) \ominus x(t+h)] = f(t, x(t)), \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{-h} [x(t-h) \ominus x(t)] = f(t, x(t)),$$

por tanto  $x$  es (ii)-gH diferenciable y  $D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_1, t_2]$ . De nuevo por inducción, de forma similar al caso (a) para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, \dots, k$  se obtiene que  $x$  es (ii)-gH diferenciable y  $D_{(ii)}x(t) = f(t, x(t))$ , para  $t \in (t_p, t_{p+1}]$ .

Ahora, como para cada  $p = 1, \dots, k$ ,  $x(t)$  es (ii)-gH diferenciable en  $(t_p, t_{p+1}]$ , por Teorema 6-(2) se cumple que  $x(t) = x(t_p^+) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds$ , y como  $x(t)$  satisface (28), se tiene que

$$\begin{aligned} x(t_p^+) + \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds &= x_0 \ominus (-1) \left[ \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right] \\ &= x_0 \ominus (-1) \left[ \int_0^{t_p} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right] \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p)) \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds, \\ &= [x(t_p^-) \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p))] \ominus (-1) \int_{t_p}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

por lo cual,  $x(t_p^+) = (x(t_p^-) \ominus (-1) \mathbb{I}_p(x(t_p)))$ , es decir  $x(t_p^+)$  es como en (8). □

A continuación, se definen las sub y las super soluciones del problema de valor inicial impulsivo (22).

**Definición 22.** Sea  $\mu \in PC_{(i)}([0, T], \mathcal{F})$  (respectivamente,  $\mu \in PC_{(ii)}([0, T], \mathcal{F})$ ) una función fuzzy, se dice que es una (i)-gH sub-solución (respectivamente, una (ii)-gH sub-solución) para

el problema (22) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'(t) \lesssim f(t, \mu(t)), \quad t \in (t_p, t_{p+1}], p = 0, 1, \dots, k, \\ \mu(t_p^+) \lesssim \mu(t_p) + \mathbb{I}_p(\mu(t_p)) \text{ (para } x(t_p^+) \text{ como en (7)), ó} \\ \mu(t_p^+) \lesssim \mu(t_p) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(\mu(t_p)) \text{ (para } x(t_p^+) \text{ como en (8)), } p = 1, \dots, k, \\ \mu(0) \lesssim x_0. \end{array} \right. \quad (29)$$

Sea  $\mu \in PC_{(i)}([0, T], \mathcal{F})$  (respectivamente,  $\mu \in PC_{(ii)}([0, T], \mathcal{F})$ ) una función fuzzy, se dice que es una (i)-gH super-solución (respectivamente, una (ii)-gH super-solución) para el problema (22) si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'(t) \gtrsim f(t, \mu(t)), \quad t \in (t_p, t_{p+1}], p = 0, 1, \dots, k, \\ \mu(t_p^+) \gtrsim \mu(t_p) + \mathbb{I}_p(\mu(t_p)) \text{ (para } x(t_p^+) \text{ como en (7)), ó} \\ \mu(t_p^+) \gtrsim \mu(t_p) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(\mu(t_p)) \text{ (para } x(t_p^+) \text{ como en (8)), } p = 1, \dots, k, \\ \mu(0) \gtrsim x_0. \end{array} \right. \quad (30)$$

**Ejemplo 3.** Siguiendo (Villamizar-Roa et al., 2015), se hace notar que se puede obtener por inspección una sub-solución (super-solución) bajo condiciones adecuadas sobre  $f(t, x(t))$  y  $x(t_p^+)$ . Primero, si existen intervalos fuzzy  $W$  y  $W_p$  tales que  $W \lesssim f(t, x(t))$  y  $W_p \lesssim x(t_p) + \Delta x(t_p)$  ( $W_p \lesssim x(t_p) \ominus (-1)\Delta x(t_p)$ ) para  $p = 1 \dots, k$ , entonces se puede obtener una sub-solución resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'(t) = W, \\ \mu(t_p^+) = W_p. \end{array} \right.$$

Por otra parte, si se considera el siguiente tipo de PVIIIF

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{g}(t, x(t)), & \text{para } t \in [0, T], t \neq t_p, \\ \Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-)), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (31)$$

donde  $\tilde{g}$  es obtenida de la aplicación del principio de extensión de Zadeh sobre el segundo argumento de una función continua  $g : (t_p, t_{p+1}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = 1, \dots, k$ . Luego resolviendo alguno de los problemas impulsivos

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(t_p^+) = \underline{[x(t_p) + \mathbb{I}_p(x(t_p))]}_0, \\ y(0) = \underline{x_{0_0}}, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & t \in [0, T], t \neq t_p, \\ y(t_p^+) = \underline{[x(t_p) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p))]}_0, \\ y(0) = \underline{x_{0_0}}, \end{cases}$$

(dependiendo de la definición de  $\Delta(x(t_p^-))$  (ver Observación 1)). Se puede obtener una sub-solución (31) considerando  $\mu(t) = \chi \{y(t)\}$ . Además, si se considera el siguiente tipo de PVIIIF

$$\begin{cases} x'(t) = \widehat{g}(t, x(t), W), & \text{para } t \in [0, T], t \neq t_p, \\ \Delta x(t_p) = \mathbb{I}_p(x(t_p^-), W_p), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (32)$$

donde  $\tilde{g}$  se obtiene de la aplicación de la aritmética estándar de intervalos fuzzy de una función continua  $g : (t_p, t_{p+1}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = 1, \dots, k$ , entonces resolviendo alguno de los problemas impulsivos

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \text{mín} \widehat{g}(t, y(t), [W]_0), \\ y(t_p^+) = \underline{[x(t_p) + \mathbb{I}_p(x(t_p^-), W_p)]_0}, \\ y(0) = \underline{x_{0_0}}, \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \text{mín} \widehat{g}(t, y(t), [W]^0), \\ y(t_p^+) = \underline{[x(t_p) \ominus (-1)\mathbb{I}_p(x(t_p), W_p)]_0}, \\ y(0) = \underline{x_{0_0}}, \end{array} \right. \quad t \in [0, T], t \neq t_p,$$

se puede obtener una sub-solución de (32) considerando  $\mu(t) = \chi \{y(t)\}$ . Este escenario se ilustrará con el siguiente ejemplo:

Se considera la siguiente ecuación diferencial impulsiva fuzzy con la (i)-gH derivada

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = Wx(t), \\ \Delta x(t_p) = W_p x(t_p), \\ x(0) = x_0 = \langle 0.3, 0.4, 0.5 \rangle, \end{array} \right. \quad \text{para } t \in [0, T], t \neq t_p, \quad (33)$$

donde  $W = \langle 0.2, 0.3, 0.4 \rangle$ ,  $W_1 = \langle 0.1, 0.2, 0.3 \rangle$  y  $W_2 = \langle -0.1, 0, 0.1 \rangle$  para  $t_1 = 1$  y  $t_2 = 2$ .

En este caso,  $\text{mín} \widehat{g}(t, y, [W]_0) = 0.2y$ , si se considera que  $\Delta x(t_p^-)$  se define a partir de la diferencia de Hukuhara, se tiene que

$$\underline{[x(t_1) + \mathbb{I}_1(x(t_1), W_1)]_0} = 0.33e^{0.2} \quad \text{y} \quad \underline{[x(t_2) + \mathbb{I}_2(x(t_2), W_2)]_0} = -0.065e^{1.2}.$$

Entonces, se puede tomar la función fuzzy  $\mu(t) = \chi \{y(t)\}$ , donde  $y$  es una solución del problema diferencial impulsivo

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = 0.2y(t), \\ y(1^+) = 0.33e^{0.2}, y(2^+) = -0.065e^{1.2}, \\ y(0) = 0.3. \end{array} \right. \quad t \in [0, T], t \neq t_p,$$

Puesto que, para cada  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $[\mu(t)]^\alpha = [\chi \{y(t)\}]^\alpha = \{y(t)\}$  entonces  $\mu$  es una sub-solución de (33).

#### 4.2. Teoremas de existencia y unicidad

Los principales resultados que establecen la existencia y unicidad de soluciones de un PVIIF vienen dados por los Teoremas 12-15, establecidos a continuación.

En un primer caso, se abordan los PVIIF tal que la variación se define por la diferencia de Hukuhara, es decir  $x(t_p^+)$  se define como en (7).

**Teorema 12.** *Supóngase que existe una (i)-gH sub-solución  $\mu \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  del problema (22). Sea  $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua y  $\mathbb{I}_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua para  $p = 1, \dots, k$ , tal que:*

- (i) *f es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \succeq y$  entonces  $f(t, x) \succeq f(t, y)$ ,*
- (ii)  *$\mathbb{I}_p$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \succeq y$  entonces  $\mathbb{I}_p(x) \succeq \mathbb{I}_p(y)$ , para  $p = 1, \dots, k$ .*
- (iii) *f es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_1$  y  $\phi_1$ , se cumple que*

$$\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y)) - \phi_1(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y,$$

- (iv)  *$\mathbb{I}_p$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_2$  y  $\phi_2$ , se cumple que*

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y, \quad p = 1, \dots, k.$$

Entonces, el problema (22) tiene una única (i)-gH solución definida en  $J$ .

*Demostración.* Se quiere aplicar el Teorema 10. Para ello, se define el operador  $\mathcal{A}_1 : PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F}) \rightarrow PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  por

$$[\mathcal{A}_1](t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \quad t \in (t_p, t_{p+1}] \subset J.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 11 parte (i)-(a), se observa que si  $x \in PC_{(i)}(J, \mathcal{F})$  es un punto fijo de  $\mathcal{A}_1$ , entonces  $x \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  es una solución del Problema (22) y de manera inversa.

En  $PC(J, \mathcal{F})$ , sea  $\rho > 0$  lo suficientemente grande para que  $\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} < \frac{1}{2}$ , se considera la métrica

$$D_\rho = \sup_{s \in J} \{d_\infty(x(s), y(s))e^{-\rho s}\}, \quad x, y \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F}).$$

A partir de las hipótesis (i) y (ii) se tiene que siempre que  $x \succeq y$  y  $t \in J$ . Entonces,  $\mathcal{A}_1 y \preceq \mathcal{A}_1 x$  siempre que  $y \preceq x$ , y en consecuencia, el operador  $\mathcal{A}_1$  es no decreciente. Ahora, a partir de (iii),  $f$  verifica

$$\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y)) - \phi_1(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y, \quad (34)$$

entonces, para todo  $x \succeq y$ ,

$$\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y)). \quad (35)$$

Si se supone que  $d_\infty(x, y) < d_\infty(f(t, x), f(t, y))$ , para todo  $x \succeq y$ , dado que  $\psi_1$  es no decreciente, se cumple que  $\psi_1(d_\infty(x, y)) \leq \psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y)))$ . De la desigualdad (35)  $\psi_1(d_\infty(x, y)) = \psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y)))$ , para todo  $x \succeq y$ . Remplazando (34) en (35), se tiene que  $0 \leq -\phi_1(d_\infty(x, y))$ ,

y por tanto,  $\phi_1(d_\infty(x, y)) = 0$ , de lo cual  $d_\infty(x, y) = 0$ , así  $\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) = \phi_1(d_\infty(x, y)) = 0$ . Por lo tanto, puesto que  $\phi_1$  es un función de distancia alternante,  $d_\infty(f(t, x), f(t, y)) = 0$ , llegando a una contradicción. En consecuencia,

$$d_\infty(f(t, x), f(t, y)) \leq d_\infty(x, y), \quad \text{para todo } x \succeq y. \quad (36)$$

Del mismo modo, de (iv),  $\mathbb{I}_p$  verifica

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y, \quad p = 1, \dots, k, \quad (37)$$

entonces, para todos  $x \succeq y$ ,

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)). \quad (38)$$

Suponiendo que  $d_\infty(x, y) < d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))$ , para todo  $x \succeq y$ . Entonces, dado que  $\psi_2$  es no decreciente, se cumple que  $\psi_2(d_\infty(x, y)) \leq \psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y)))$ . De la desigualdad (35)  $\psi_2(d_\infty(x, y)) = \psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y)))$ , para todo  $x \succeq y$ . Reemplazando (37) en (38), se deduce que  $0 \leq -\phi_2(d_\infty(x, y))$ , y por lo tanto,  $\phi_2(d_\infty(x, y)) = 0$ , de lo cual  $d_\infty(x, y) = 0$ . Así,  $\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) = \phi_2(d_\infty(x, y)) = 0$ . Por lo tanto, como  $\phi_2$  es una función de distancia alternante,  $d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y)) = 0$ , llegando a una contradicción. En consecuencia,

$$d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y)) \leq d_\infty(x, y), \quad \text{para todo } x \succeq y. \quad (39)$$

Para  $x \succeq y$  se cumple que

$$D_\rho(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y) = \sup_{t \in J} \{d_\infty([\mathcal{A}_1x](t), [\mathcal{A}_1y](t)) e^{-\rho t}\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{t \in J} \left\{ d_{\infty} \left( x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), x_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) e^{-\rho t} \right\} \\
 &= \sup_{t \in J} \left\{ d_{\infty} \left( \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \int_0^t f(s, y(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) e^{-\rho t} \right\} \\
 &\leq \sup_{t \in J} \left\{ d_{\infty} \left( \int_0^t f(s, x(s)) ds, \int_0^t f(s, y(s)) ds \right) e^{-\rho t} + d_{\infty} \left( \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) e^{-\rho t} \right\} \\
 &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t d_{\infty}(x(s), y(s)) ds e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^p d_{\infty}(x(t_i), y(t_i)) e^{-\rho t} \right\} \quad \text{por (36) y (39)} \\
 &= \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t d_{\infty}(x(s), y(s)) e^{-\rho s} e^{\rho s} ds e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^p d_{\infty}(x(t_i), y(t_i)) e^{-\rho t_i} e^{\rho t_i} e^{-\rho t} \right\} \\
 &= \sup_{t \in J} \left\{ \int_0^t D_{\rho}(x, y) e^{\rho s} ds e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^p D_{\rho}(x, y) e^{\rho t_i} e^{-\rho t} \right\} \\
 &\leq \sup_{t \in J} \left\{ D_{\rho}(x, y) \frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho} + D_{\rho}(x, y) e^{-\rho t} \int_0^t e^{\rho s} ds \right\} \\
 &= \sup_{t \in J} \left\{ D_{\rho}(x, y) \frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho} + D_{\rho}(x, y) \frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho} \right\} \\
 &= \sup_{t \in J} \left\{ D_{\rho}(x, y) \frac{2 - 2e^{-\rho t}}{\rho} \right\}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $D_{\rho}(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y) \leq \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} D_{\rho}(x, y)$ . Se mantiene que

$$\begin{aligned}
 \gamma(D_{\rho}(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y)) &\leq \gamma\left(D_{\rho}(x, y) \frac{2 - 2e^{-\rho T}}{\rho}\right) \\
 &= \gamma(D_{\rho}(x, y)) - \left[ \gamma(D_{\rho}(x, y)) - \gamma\left(D_{\rho}(x, y) \frac{2 - 2e^{-\rho T}}{\rho}\right) \right],
 \end{aligned}$$

para alguna función de distancia alternante creciente  $\gamma$ . A continuación, se define la distancia alternante  $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}t\right)$  tal que para  $x \succeq y$ ,

$$\gamma(D_{\rho}(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y)) \leq \gamma(D_{\rho}(x, y)) - \Phi(D_{\rho}(x, y)).$$

Finalmente, utilizando la hipótesis de existencia de la  $(i)$ - $gH$  sub-solución y el Teorema 11 parte  $(i)$ -(a), se tiene que

$$\mu(t) \lesssim x_0 + \int_0^t f(s, \mu(s)) ds + \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_i(\mu(t_i)) = [\mathcal{A}_1 \mu](t), \quad t \in J.$$

Por tanto  $\mu \lesssim \mathcal{A}_1 \mu$ . De esta manera el operador  $\mathcal{A}_1$  verifica todas las hipótesis del Teorema 8, y por tanto,  $\mathcal{A}_1$  tiene un punto fijo en  $PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$ . Dado que cada par de elementos de  $C(J, \mathcal{F})$  tiene una cota superior, entonces, cada par de elementos de  $PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior (ver Teorema 10), se deduce que el operador  $\mathcal{A}_1$  tiene un único punto fijo. En conclusión, el Problema (22) tiene una única  $(i)$ - $gH$  solución. □

**Teorema 13.** *Supóngase que existe una  $(ii)$ - $gH$  sub-solución  $\mu \in PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  para el Problema (22). Sea  $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua y  $\mathbb{I}_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua para  $p = 1, \dots, k$ , tal que:*

(i)  $\text{diam} \left( [x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))]^\alpha \right) \geq \text{diam} \left( [\int_0^t f(s, x(s)) ds]^\alpha \right)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , y  $p = 1, \dots, k$ ,  $\overline{(x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)))_\alpha} - \int_0^t \underline{f_\alpha}(t) dt$  es no decreciente con respecto a  $\alpha$ , y  $\overline{(x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)))_\alpha} - \int_0^t \overline{f_\alpha}(t) dt$  es no creciente con respecto a  $\alpha$ , donde

$$1. [x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))]^\alpha = \left[ \underline{x_{0_\alpha}} + \sum_{i=0}^p \underline{\mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha}, \overline{x_{0_\alpha}} + \sum_{i=0}^p \overline{\mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha} \right], y$$

$$2. [\int_0^t f(s, x(s)) ds]^\alpha = \left[ \int_0^t \underline{f_\alpha}(t) dt, \int_0^t \overline{f_\alpha}(t) dt \right].$$

(ii)  $f$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \gtrsim y$  entonces  $f(t, x) \gtrsim f(t, y)$ ,

(iii)  $\mathbb{I}_p$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \gtrsim y$  entonces  $\mathbb{I}_p(x) \gtrsim \mathbb{I}_p(y)$ , para  $p = 1, \dots, k$ .

(iv)  $f$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_1$  y  $\phi_1$ , se cumple que

$$\psi_1(d_\infty(f(t,x), f(t,y))) \leq \psi_1(d_\infty(x,y)) - \phi_1(d_\infty(x,y)), \quad \text{si } x \succeq y,$$

(v)  $\mathbb{I}_p$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_2$  y  $\phi_2$ , se cumple que

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x,y)) - \phi_2(d_\infty(x,y)), \quad \text{si } x \succeq y, \quad p = 1, \dots, k.$$

Entonces, el Problema (22) tiene una única (ii)-gH solución definida en  $J$ .

*Demostración.* Del mismo modo, en el espíritu del teorema anterior, se define el operador  $\mathcal{A}_2 : PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F}) \rightarrow PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  por

$$[\mathcal{A}_2x](t) = \left( x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)).$$

La condición (i) garantiza la existencia de  $(x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))) \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s))$ . Teniendo en cuenta el Teorema 11 parte (ii) – (a), si  $x \in PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  es un punto fijo de  $\mathcal{A}_2$ , entonces es una solución para el Problema (22) y a la inversa. Además, el operador  $\mathcal{A}_2$  es no decreciente, ya que para  $x \succeq y$  y la condición (ii) y (iii),

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_2x](t) &= \left( x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)) \\ &\succeq \left( x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) \ominus (-1) \int_0^t f(s, y(s)) = [\mathcal{A}_2y](t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Como  $f$  verifica (iv) y  $\mathbb{I}_p$  verifica (v), se tiene que  $\psi_1(d_\infty(f(t,x), f(t,y))) \leq \psi_1(d_\infty(x,y))$  y  $\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x,y)) - \phi_2(d_\infty(x,y))$ , si  $x \succeq y$ ,  $p = 1, \dots, k$ , para todo  $x \succeq y$ . Entonces,  $d_\infty(f(t,x), f(t,y)) \leq d_\infty(x,y)$  y  $d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y)) \leq d_\infty(x,y)$ . Así, para  $x \succeq y$ , se cumple que

$$\begin{aligned} d_\infty([\mathcal{A}_2x](t), [\mathcal{A}_2y](t)) &= d_\infty\left(\left[x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right] \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)), \right. \\ &\quad \left. \left[x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i))\right] \ominus (-1) \int_0^t f(s, y(s))\right) \\ &= d_\infty\left(\sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \ominus (-1) \int_0^t f(s, x(s)), \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \ominus (-1) \int_0^t f(s, y(s))\right) \\ &\leq d_\infty\left(\int_0^t f(s, x(s)) ds, \int_0^t f(s, y(s)) ds\right) + d_\infty\left(\sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i))\right). \end{aligned}$$

De ello se deduce que  $D_\rho(\mathcal{A}_2x, \mathcal{A}_2y) \leq \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} D_\rho(x, y)$ . Entonces, si  $\gamma$  es alguna función de distancia alternante, se cumple que

$$\begin{aligned} \gamma(D_\rho(\mathcal{A}_2x, \mathcal{A}_2y)) &\leq \gamma\left(D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}\right) \\ &= \gamma(D_\rho(x, y)) - \left[\gamma(D_\rho(x, y)) - \gamma\left(D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}$$

Entonces, si  $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} t\right)$  y siempre que  $x \succeq y$  se deduce que

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_2x, \mathcal{A}_2y)) \leq \gamma(D_\rho(x, y)) - \Phi(D_\rho(x, y)).$$

Finalmente, usando la existencia de la (ii)-gH sub-solución y el Teorema 11 parte (ii)-(b), se tiene que

$$\mu(t) \lesssim \left(x_0 + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(\mu(t_i))\right) \ominus (-1) \int_0^t f(s, \mu(s)) = [\mathcal{A}_2\mu](t), \quad t \in J.$$

Así  $\mu \lesssim \mathcal{A}_2\mu$ . El operador  $\mathcal{A}_2$  verifica todas las hipótesis del Teorema 8, y por tanto,  $\mathcal{A}_2$  tiene un punto fijo en  $PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$ . Dado que cada par de elementos de  $C([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior, entonces, cada par de elementos de  $PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior (ver Teorema 10), se deduce que el operador  $\mathcal{A}_2$  tiene un único punto fijo. En conclusión, el PVIIF (22) tiene una única (ii)-gH solución.

□

En el segundo caso, asumiendo que la definición de la variación es dada por (8), así, se obtienen los siguientes resultados:

**Teorema 14.** *Supóngase que existe una (i)-gH solución  $\mu \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  para el Problema (22). Sea  $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua y  $\mathbb{I}_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  es continua para  $p = 1, \dots, k$ , tal que:*

(i)  $\text{diam} \left( \left[ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right]^\alpha \right) \geq \text{diam} \left( \left[ \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right]^\alpha \right)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , y  $p = 1, \dots, k$ ,  $\overline{\left( x_0 + \int_0^t f(t) dt \right)_\alpha} - \overline{\sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha}$  es no decreciente con respecto a  $\alpha$ , y  $\overline{\left( x_0 + \int_0^t f(t) dt \right)_\alpha} - \overline{\sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha}$  es no creciente con respecto a  $\alpha$ , donde

$$1. \left[ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right]^\alpha = \left[ \underline{x_{0_\alpha}} + \int_0^t \underline{f_\alpha}(s, x(s)) ds, \overline{x_{0_\alpha}} + \int_0^t \overline{f_\alpha}(s, x(s)) ds \right], \text{ y}$$

$$2. \left[ \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right]^\alpha = \left[ \sum_{i=0}^p \underline{\mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha}, \sum_{i=0}^p \overline{\mathbb{I}_i(x(t_i))_\alpha} \right].$$

(ii)  $f$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \gtrsim y$  entonces  $f(t, x) \gtrsim f(t, y)$ ,

(iii)  $\mathbb{I}_p$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \gtrsim y$  entonces  $\mathbb{I}_p(x) \gtrsim \mathbb{I}_p(y)$ , para  $p = 1, \dots, k$ .

(iv)  $f$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_1$  y  $\phi_1$ , se cumple que

$$\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y)) - \phi_1(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \gtrsim y,$$

(v)  $\mathbb{I}_p$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_2$  y  $\phi_2$ , se cumple que

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y, \quad p = 1, \dots, k.$$

Entonces, el Problema (22) tiene una única (i)-gH solución definida en  $J$ .

*Demostración.* Se define el operador  $\mathcal{A}_3 : PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F}) \rightarrow PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  por

$$[\mathcal{A}_3x](t) = \left( x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \right) \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)).$$

La condición (i) garantiza la existencia de  $(x_0 + \int_0^t f(s, x(s))) \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))$ . Teniendo en cuenta el Teorema 11 parte (i)-(b), si  $x \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  es un punto fijo de  $\mathcal{A}_3$ , entonces  $x$  es una solución para el Problema (22) y a la inversa. Además, el operador  $\mathcal{A}_3$  es no decreciente, ya que para  $x \succeq y$  y la condición (ii) y (iii),

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_3x](t) &= \left( x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \right) \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \\ &\succeq \left( x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \right) \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \\ &= [\mathcal{A}_3y](t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Como  $f$  verifica (iv) y  $\mathbb{I}_p$  verifica (v), se tiene que  $\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y))$  y  $\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y))$ , si  $x \succeq y$ ,  $p = 1, \dots, k$ , para todo  $x \succeq y$ . Entonces  $d_\infty(f(t, x), f(t, y)) \leq d_\infty(x, y)$ . Así, siempre que  $x \succeq y$  se cumple que

$$d_\infty([\mathcal{A}_4x](t), [\mathcal{A}_4y](t)) = d_\infty \left( \left[ x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \right] \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \right.$$

$$\begin{aligned} & \left[ x_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \right] \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \\ &= d_\infty \left( \int_0^t f(s, x(s)) ds \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \int_0^t f(s, y(s)) ds \ominus (-1) \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) \\ &\leq d_\infty \left( \int_0^t f(s, x(s)) ds, \int_0^t f(s, y(s)) ds \right) + d_\infty \left( \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que  $D_\rho(\mathcal{A}_3x, \mathcal{A}_3y) \leq \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} D_\rho(x, y)$ . Entonces, si  $\gamma$  es alguna función de distancia alternante creciente, se cumple que

$$\begin{aligned} \gamma(D_\rho(\mathcal{A}_3x, \mathcal{A}_3y)) &\leq \gamma\left(D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}\right) \\ &= \gamma(D_\rho(x, y)) - \left[ \gamma(D_\rho(x, y)) - \gamma\left(D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}\right) \right]. \end{aligned}$$

Entonces, si  $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}t\right)$  y siempre que  $x \succeq y$  se deduce que

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_3x, \mathcal{A}_3y)) \leq \gamma(D_\rho(x, y)) - \Phi(D_\rho(x, y)).$$

Por último, utilizando la existencia de la  $(i)$ - $gH$  solución y el Teorema 11 parte  $(i)$ - $(b)$ , tiene que

$$\mu(t) \lesssim x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, \mu(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(\mu(t_i)) \right) = [\mathcal{A}_3\mu](t), \quad t \in J.$$

Luego  $\mu \lesssim \mathcal{A}_3\mu$ . Por tanto,  $\mathcal{A}_3$  tiene un punto fijo en  $PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$ . Dado que cada par de elementos de  $C([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior, entonces, cada par de elementos de  $PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior (ver Teorema 10), por lo cual sigue que el operador  $\mathcal{A}_3$  tiene un único punto fijo. En conclusión, el PVIIF (22) tiene una única  $(i)$ - $gH$  solución.

□

**Teorema 15.** *Supóngase que existe una (ii)-gH sub-solución  $\mu \in PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  para el Problema (22). Sea  $f : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua y  $\mathbb{I}_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  continua para  $p = 1, \dots, k$ , tal que:*

- (i)  $\text{diam}([x_0]^\alpha) \geq \text{diam}\left(\left[\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right]^\alpha\right)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , y  $p = 1, \dots, k$ ,  
 $\frac{x_{0\alpha} - \left(\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right)_\alpha}{\bar{x}_{0\alpha} - \left(\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right)_\alpha}$  es no decreciente con respecto a  $\alpha$ , y  
 $\frac{x_{0\alpha} - \left(\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right)_\alpha}{\bar{x}_{0\alpha} - \left(\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right)_\alpha}$  es no creciente con respecto a  $\alpha$ , donde

$$1. [x_0]^\alpha = [x_{0\alpha}, \bar{x}_{0\alpha}], \text{ y}$$

$$2. \left[\int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i))\right]^\alpha = \left[\int_0^t \underline{f}_\alpha(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \underline{\mathbb{I}}_i(x(t_i))_\alpha, \int_0^t \overline{f}_\alpha(s, x(s))ds + \sum_{i=0}^p \overline{\mathbb{I}}_i(x(t_i))_\alpha\right].$$

(ii)  $f$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \succeq y$  entonces  $f(t, x) \succeq f(t, y)$ ,

(iii)  $\mathbb{I}_p$  es no decreciente en la segunda variable, es decir, si  $x \succeq y$  entonces  $\mathbb{I}_p(x) \succeq \mathbb{I}_p(y)$ , para  $p = 1, \dots, k$ .

(iv)  $f$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_1$  y  $\phi_1$ , se cumple que

$$\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y)) - \phi_1(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y,$$

(v)  $\mathbb{I}_p$  es débilmente contractiva por elementos comparables, es decir, para algunas funciones de distancia alternantes  $\psi_2$  y  $\phi_2$ , se cumple que

$$\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y)), \quad \text{si } x \succeq y, \text{ } p = 1, \dots, k.$$

Entonces, el Problema (22) tiene una única (ii)-gH solución definida en  $J$ .

*Demostración.* Con el mismo camino de los teorema anterior, se define el operador

$$\mathcal{A} : PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F}) \rightarrow PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F}),$$

$$[\mathcal{A}_4x](t) = x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, \mu(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right).$$

Nótese que la condición (i) garantiza la existencia de  $x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, x(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right)$ . Teniendo en cuenta el Teorema 11 parte (ii)-(b), si  $x \in PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  es un punto fijo de  $\mathcal{A}_2$ , entonces  $x$  es una solución para el Problema (22) y a la inversa. Además, se sostiene que el operador  $\mathcal{A}_4$  es no decreciente, ya que para  $x \succeq y$ , por las condiciones (i) y (iii),

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_4x](t) &= x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, x(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) \\ &\succeq x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, y(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right) = [\mathcal{A}_4y](t), \quad t \in J. \end{aligned}$$

Desde que  $f$  verifica (iv) y  $\mathbb{I}_p$  verifica (v), se tiene que  $\psi_1(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi_1(d_\infty(x, y))$  y  $\psi_2(d_\infty(\mathbb{I}_p(x), \mathbb{I}_p(y))) \leq \psi_2(d_\infty(x, y)) - \phi_2(d_\infty(x, y))$ , si  $x \succeq y$ ,  $p = 1, \dots, k$ , para todo  $x \succeq y$ . Entonces,  $d_\infty(f(t, x), f(t, y)) \leq d_\infty(x, y)$ , así, siempre que  $x \succeq y$  se cumple que

$$\begin{aligned} d_\infty([\mathcal{A}_4x](t), [\mathcal{A}_4y](t)) &= d_\infty \left( x_0 \ominus (-1) \left[ \int_0^t f(s, x(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right], \right. \\ &\quad \left. x_0 \ominus (-1) \left[ \int_0^t f(s, y(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right] \right) \\ &= d_\infty \left( \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)), \int_0^t f(s, y(s)) ds + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(y(t_i)) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que  $D_\rho(\mathcal{A}_4x, \mathcal{A}_4y) \leq \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} D_\rho(x, y)$ . Luego, si  $\gamma$  es alguna función de distancia alternante creciente, se cumple que

$$\begin{aligned} \gamma(D_\rho(\mathcal{A}_4x, \mathcal{A}_4y)) &\leq \gamma \left( D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} \right) \\ &= \gamma(D_\rho(x, y)) - \left[ \gamma(D_\rho(x, y)) - \gamma \left( D_\rho(x, y) \frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Entonces, si  $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{2-2e^{-\rho T}}{\rho}t\right)$  y siempre que  $x \gtrsim y$  se deduce que

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_4x, \mathcal{A}_4y)) \leq \gamma(D_\rho(x, y)) - \Phi(D_\rho(x, y)).$$

Finalmente, usando la existencia de la  $(ii)$ - $gH$  solución y el Teorema 11 parte  $(ii)$ - $(b)$ , se tiene que

$$\mu(t) \lesssim x_0 \ominus (-1) \left( \int_0^t f(s, x(s)) + \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_i(x(t_i)) \right) = [\mathcal{A}_4\mu](t), \quad t \in J.$$

Por tanto  $\mu \lesssim \mathcal{A}_4\mu$ . De esta forma el operador  $\mathcal{A}_4$  verifica todas las hipótesis del Teorema 8, y por tanto,  $\mathcal{A}_4$  tiene un punto fijo en  $PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$ . Dado que cada par de elementos de  $C([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior, entonces, cada par de elementos de  $PC_{(ii)}([0, T^*], \mathcal{F})$  tiene una cota superior (ver Teorema 10); así el operador  $\mathcal{A}_4$  tiene un único punto fijo. En conclusión, el Problema (22) tiene una única  $(ii)$ - $gH$  solución.

□

Sustituyendo la existencia de una  $(i)$ - $gH$  sub-solución ( $(ii)$ - $gH$  sub-solución) por la existencia de una  $(i)$ - $gH$  super-solución ( $(ii)$ - $gH$  super-solución, respectivamente) en los Teoremas 12-15 se obtienen los resultados correspondientes.

**Teorema 16.** *Si se supone la existencia de una  $(i)$ - $gH$  super-solución ( $(ii)$ - $gH$  super-solución) en lugar de una  $(i)$ - $gH$  sub-solución ( $(ii)$ - $gH$  sub-solución) del Problema (22) en los Teoremas 12-15, sus conclusiones se siguen cumpliendo.*

## **5. Aplicación de ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy en el control de la dinámica de poblaciones**

El modelado de los fenómenos del mundo real se encuentra sujeto a la limitación en la medición la recopilación de datos, la comprensión, y la interpretación de estos. En la actualidad, se utilizan distintos enfoques para tratar la incertidumbre y la subjetividad, entre estos se encuentran, el enfoque probabilístico y el uso de la lógica fuzzy. El enfoque probabilístico se ocupa de la incertidumbre en los sucesos aleatorios mediante el uso de métodos estocásticos y modelos de distribución; mientras que la lógica fuzzy (Zadeh, 1965) se ocupa de la incertidumbre permitiendo la interpretación de una pertenencia parcial (grado de pertenencia) de los elementos de un universo, desarrollando un formalismo para manipular eficientemente la imprecisión y vaguedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente.

La dinámica de poblaciones constituye un ejemplo en el que la incertidumbre y subjetividad están siempre involucradas; están expresadas en diferentes formas, incluyendo los datos y su proceso de recolección, las herramientas de medida, la falta y la calidad de la información, el ruido ambiental o demográfico, entre otros. En este sentido, un marco matemático para modelar la dinámica poblacional es a través de las ecuaciones diferenciales fuzzy (Angulo-Castillo *et al.*, 2020; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Khastan y Rodríguez-López, 2016; Villamizar-Roa *et al.*, 2015). Además, más allá de la impresión y subjetividad en sus datos y parámetros, la dinámica poblacional suele estar sometida a cambios bruscos causados por enfermedades, cosechas, cacerías, desastres naturales, entre otros. Estas perturbaciones a corto plazo que actúan de forma instantánea o como impulsos dentro de la dinámica poblacional, se llamarán en este capítulo un “evento control”. En consecuencia, una estrategia interesante para modelar tanto la fuente de

incertidumbre en el problema de la dinámica de poblaciones como las perturbaciones a corto plazo de la dinámica continua y suave, cuya duración es despreciable en comparación con la duración de una evolución completa, es adaptar las ecuaciones diferenciales impulsivas (Samoilenko y Perestyuk, 1995; Stamova y Stamov, 2016) al contexto fuzzy (Benchohra *et al.*, 2007; Lakshmikantham y Mcrae, 2001; Liu *et al.*, 2020b; Ramesh y Vengataasalam, 2014).

Un escenario particular en el que se produce un decrecimiento abrupto de una población es en el proceso de control químico de plagas dentro de la gestión de cultivos agrícolas. Un ejemplo de población en este contexto se da en el crecimiento poblacional de la polilla del tubérculo de la papa (*Phthorimaea Operculella Zeller*) cuyo huésped principal es la papa (*Solanum tuberosum*) (CABI/EPPO, 2022). Esta plaga pertenece a la familia Gelechiidae y al género *Phthorimaea*; es una plaga nocturna, que pone sus huevos en el suelo cerca de la base de las plantas en climas cálidos y en climas fríos en el tercio apical de las plantas de papa. En su estado larvario puede socavar los tallos causando la muerte de los terminales y en ocasiones las larvas maduras descienden de la planta e invaden los tubérculos provocando una importante reducción en la producción del cultivo (Rondon, 2010).

En este capítulo se propone un modelo matemático, descrito mediante ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy lineales de primer orden, para analizar la dinámica de poblaciones sujetas a fuentes de incertidumbre en sus datos y parámetros, así como a eventos de control. En particular se muestra su aplicabilidad en el contexto agrícola a través del estudio de la población de la polilla de la papa, tratando la incertidumbre e imprecisión en el proceso de estimación del parámetro de la tasa intrínseca de crecimiento poblacional ( $r$ ) y el alto grado de subjetividad, imprecisión y vaguedad en el problema de describir el comportamiento inicial de la población de la polilla en el cultivo. El análisis se centra en dos aspectos principales, a saber, la estimación de la tasa intrínse-

ca de crecimiento de la polilla de la papa  $r$  y la evolución de la polilla de la papa a lo largo del tiempo, partiendo del hecho de que la población inicial es un dato fuzzy. Para la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento de la polilla de la papa  $r$ , se trata la incertidumbre e inexactitud de los datos involucrados en el problema mediante el diseño de un modelo Takagi–Sugeno–kang (TSK), teniendo en cuenta la relación entre la temperatura y los parámetros de la tabla de vida estudiados por Sporleder *et al.* (2004); Golizadeh *et al.* (2010); Golizadeh and Zalucki (2012) y Andreadis *et al.* (2017). Por otro lado, conociendo la tasa intrínseca de crecimiento  $r$ , se analiza la evolución temporal de la polilla del tubérculo de la papa proponiendo un problema de valor inicial impulsivo fuzzy. En este contexto, los eventos de control están representados por las aplicaciones de pesticidas en el cultivo de la papa. Para ilustrar el proceso, se consideran tres aplicaciones de pesticidas en un cultivo de papa con diferentes tasas de efectividad sobre poblaciones iniciales representadas como números triangulares. Los resultados de este capítulo se encuentran reportados en Espitia-Cruz y Villamizar-Roa (2024).

## 5.1. Materiales y métodos

Para describir la evolución temporal de una población con eventos de control, se propone utilizar ecuaciones diferenciales impulsivas, en el contexto fuzzy, teniendo en cuenta que los datos iniciales y los parámetros son de naturaleza fuzzy. Una vez establecida la ecuación diferencial impulsiva fuzzy para describir la dinámica, es necesario determinar el método de obtención de los parámetros, así como seleccionar la representación de los datos iniciales fuzzy.

**5.1.1. Ecuación diferencial impulsiva fuzzy.** Para estudiar la variación temporal de una población, involucrando datos de naturaleza fuzzy y eventos o sucesos que producen disminución o muerte de individuos en un corto periodo de tiempo (por ejemplo, control químico de plagas, caza, algunos fenómenos naturales), y suponiendo que la población crece o decrece expo-

nencialmente con perturbaciones instantáneas en tiempos  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k$ , se propone un modelo descrito por el siguiente problema de valor inicial impulsivo fuzzy: Encontrar  $P : [0, T^*] \rightarrow \mathcal{F}$  tal que

$$\begin{cases} P'(t) = rP(t), & \text{para } t \in [0, T^*], t \neq t_p, \\ \Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-), \\ P(0) = P_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (40)$$

donde  $P(t)$  representa la población en el tiempo  $t$ , y  $P'$  su derivada, que se asume en el sentido de la derivada generalizada de Hukuhara (Bede y Stefanini, 2012; Villamizar-Roa *et al.*, 2015). Además, en (40),  $P_0 \in \mathcal{F}$  denota la población inicial,  $r \in \mathbb{R}$  es la tasa intrínseca de crecimiento de la población,  $\theta_p \in [-1, 0]$  denota la fuerza del decaimiento la población para el evento control  $p$  en el tiempo  $t_p$ ,  $p \in \mathbb{I} = \{1, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Ahora, se establece el significado de  $\Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-)$ . Denotando por  $t_0 = 0$ ,  $t_{k+1} = T^*$ , se define  $P(t_p^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} P(t_p + \varepsilon)$ ,  $P(t_p^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(t_p + \varepsilon)$ ,  $[P(t_p^-)]^\alpha = [\underline{P_\alpha(t_p^-)}, \overline{P_\alpha(t_p^-)}]$  y  $[P(t_p^+)]^\alpha = [\underline{P_\alpha(t_p^+)}, \overline{P_\alpha(t_p^+)}]$  los  $\alpha$ -niveles de  $P(t_p^-)$  y  $P(t_p^+)$  respectivamente. En la teoría clásica de ecuaciones diferenciales impulsivas (Samoilenko y Perestyuk, 1995; Stamova y Stamov, 2016), la variación  $\Delta P(t_p)$  se define como  $\Delta P(t_p) := P(t_p^+) - P(t_p^-)$ ; sin embargo, en el contexto fuzzy, hay que tener en cuenta ciertos cuidados para definir convenientemente la diferencia en  $\Delta P(t_p)$ . De hecho, si  $\Delta P(t_p) := P(t_p^+) + (-1)P(t_p^-)$ , la condición  $\Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-)$  en (40) implica que

$$\begin{aligned} [\Delta P(t_p)]^\alpha &= [\underline{P_\alpha(t_p^+)}, \overline{P_\alpha(t_p^+)}] + [-\overline{P_\alpha(t_p^-)}, -\underline{P_\alpha(t_p^-)}] \\ &= [\underline{P_\alpha(t_p^+) - P_\alpha(t_p^-)}, \overline{P_\alpha(t_p^+) - P_\alpha(t_p^-)}] \\ &= [\underline{\theta_p P_\alpha(t_p^-)}, \overline{\theta_p P_\alpha(t_p^-)}]. \end{aligned}$$

Luego  $\theta_p \overline{P_\alpha(t_p^-)} = \underline{P_\alpha(t_p^+) - P_\alpha(t_p^-)}$  y  $\theta_p \underline{P_\alpha(t_p^-)} = \overline{P_\alpha(t_p^+) - P_\alpha(t_p^-)}$ .

Esto implica que los  $\alpha$ -niveles de  $P(t_p^+)$  son dados por  $\underline{P}_\alpha(t_p^+) = (1 + \theta_p)\overline{P}_\alpha(t_p^-)$  y  $\overline{P}_\alpha(t_p^+) = (1 + \theta_p)\underline{P}_\alpha(t_p^-)$ , lo que, considerando que  $\theta_p \in [-1, 0]$ , hace que  $P(t_p^+)$  no defina un conjunto fuzzy. Así, una forma natural de definir la variación  $\Delta P(t_p)$  es utilizando la diferencia generalizada de Hukuhara ( $gH$  diferencia), es decir,

$$\Delta P(t_p) := P(t_p^+) \ominus_{gH} P(t_p^-).$$

De acuerdo con la definición de la  $gH$ -diferencia, se tienen dos casos: en el primero (diferencia de Hukuhara), la condición  $\Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-)$  implica que  $P(t_p^+) = P(t_p^-) + \Delta P(t_p) = P(t_p^-) + \theta_p P(t_p^-)$ , cuyos  $\alpha$ -niveles son dados por  $[P(t_p^+)]^\alpha = [\underline{P}_\alpha(t_p^+), \overline{P}_\alpha(t_p^+)]$  con  $\underline{P}_\alpha(t_p^+) = \underline{P}_\alpha(t_p^-) + \theta_p \underline{P}_\alpha(t_p^-)$  y  $\overline{P}_\alpha(t_p^+) = \overline{P}_\alpha(t_p^-) + \theta_p \overline{P}_\alpha(t_p^-)$ . Sin embargo, dado que  $\theta_p \leq 0$ ,  $\underline{P}_\alpha(t_p^+)$  podría alcanzar valores negativos cuando  $\overline{P}_\alpha(t_p^-)$  es suficientemente grande, lo cual no es interesante desde el punto de vista biológico. En el segundo caso (que es el que utilizará para definir la variación  $\Delta P(t_p)$ ) a partir de la condición  $\Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-)$  se tiene que

$$P(t_p^-) = P(t_p^+) + (-1)\Delta P(t_p) = P(t_p^+) + (-1)\theta_p P(t_p^-),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} [P(t_p^-)]^\alpha &= [\underline{P}_\alpha(t_p^+), \overline{P}_\alpha(t_p^+)] + [-\theta_p \underline{P}_\alpha(t_p^-), -\theta_p \overline{P}_\alpha(t_p^-)] \\ &= [\underline{P}_\alpha(t_p^+) - \theta_p \underline{P}_\alpha(t_p^-), \overline{P}_\alpha(t_p^+) - \theta_p \overline{P}_\alpha(t_p^-)]. \end{aligned}$$

Luego, los  $\alpha$ -niveles de  $P(t_p^+)$  son determinados por

$$\begin{cases} \underline{P}_\alpha(t_p^+) = (1 + \theta_p) \underline{P}_\alpha(t_p^-), \\ \overline{P}_\alpha(t_p^+) = (1 + \theta_p) \overline{P}_\alpha(t_p^-). \end{cases}$$

Para establecer la definición de solución para (40), se considera el espacio

$$PC([0, T^*], \mathcal{F}) = \{P : [0, T^*] \rightarrow \mathcal{F} : P \in C((t_p, t_{p+1}], \mathcal{F}), \\ i \in \mathbb{I} \cup \{0\} \text{ y } \exists (P(t_p^-), P(t_p^+)), \text{ con } P(t_p^-) = P(t_p)\}.$$

Se denota por  $D_{(i)}P(t)$  la derivada (i)-gH de  $P(t)$ , y por  $D_{(ii)}P(t)$  la derivada (ii)-gH de  $P(t)$ , siguiendo (Liu *et al.*, 2020b, Definición 2.6) la siguiente definición establece los espacios solución de (40) con la gH-derivada.

**Definición 23.** Sea  $P \in PC_{(i)}([0, T^*], \mathcal{F}) := \{P : P \in PC([0, T^*], \mathcal{F}), \exists D_{(i)}P\}$ . Si  $P$  satisface (40) considerando  $P' = D_{(i)}P$ , entonces  $P$  es llamado una (i)-solución del problema impulsivo de Cauchy fuzzy (40). Además, denotando por  $P \in PC_{(ii)}(J, \mathcal{F}) := \{P : P \in PC([0, T^*], \mathcal{F}), \exists D_{(ii)}P\}$ , si  $P$  satisface (40) considerando  $P' = D_{(ii)}P$ , entonces  $P$  es llamada una (ii)-solución del problema impulsivo de Cauchy fuzzy (40).

Si  $r > 0$ , y  $P(t)$  es (i)-gH diferenciable, entonces  $[D_{(i)}P(t)]^\alpha = [\underline{P'_\alpha(t)}, \overline{P'_\alpha(t)}]$  (Bede, 2008), luego, el sistema equivalente de ecuaciones diferenciales ordinarias impulsivas de (40) es dado por:

$$\begin{cases} \underline{P'_\alpha(t)} = r\underline{P_\alpha(t)}, \overline{P'_\alpha(t)} = r\overline{P_\alpha(t)}, \\ \underline{P_\alpha(t_p^+)} = (1 + \theta_p)\underline{P_\alpha(t_p^-)}, \overline{P_\alpha(t_p^+)} = (1 + \theta_p)\overline{P_\alpha(t_p^-)}, \quad \alpha \in [0, 1]. \\ \underline{P_\alpha(0)} = \underline{P_{0\alpha}}, \overline{P_\alpha(0)} = \overline{P_{0\alpha}}, \end{cases} \quad (41)$$

Por otra parte, si  $P(t)$  es (ii)-gH diferenciable, entonces  $[D_{(ii)}P(t)]^\alpha = [\overline{P'_\alpha(t)}, \underline{P'_\alpha(t)}]$ , lo que implica que (40) es equivalente a resolver el siguiente sistema impulsivo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P}'_{\alpha}(t) = r\underline{P}_{\alpha}(t), \overline{P}'_{\alpha}(t) = r\overline{P}_{\alpha}(t), \\ \underline{P}_{\alpha}(t_p^+) = (1 + \theta_p)\underline{P}_{\alpha}(t_p^-), \overline{P}_{\alpha}(t_p^+) = (1 + \theta_p)\overline{P}_{\alpha}(t_p^-), \quad \alpha \in [0, 1]. \\ \underline{P}_{\alpha}(0) = \underline{P}_{0\alpha}, \overline{P}_{\alpha}(0) = \overline{P}_{0\alpha}, \end{array} \right. \quad (42)$$

Para  $r < 0$ , si  $P(t)$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable el problema de valor inicial impulsivo fuzzy (40) es equivalente al sistema impulsivo (42), mientras que si  $P(t)$  es  $(ii)$ - $gH$  diferenciable (40) es equivalente al sistema impulsivo (41).

## 5.2. Resultados

En esta sección se presentan los principales aportes de este capítulo. En la primera parte, se resuelve el problema de valor impulsivo fuzzy (40) para modelar el crecimiento de una población genérica sujeta a eventos de control. En la segunda parte, se analiza la población de la polilla del tubérculo de la papa diseñando un modelo TSK para estimar la tasa intrínseca de crecimiento  $r$  de la plaga mediante el uso de datos *a priori*, y así, conociendo el valor estimado de  $r$ , se aplica la teoría de las ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy para describir el crecimiento en tiempo de la población de la polilla del tubérculo de la papa, suponiendo que el agricultor aplica un control químico al cultivo.

**5.2.1. Población dependiente del tiempo.** En primer lugar, se considera que la tasa intrínseca de crecimiento  $r > 0$ . A continuación, con el fin de resolver (40) se considera una población inicial fuzzy con  $\alpha$ -niveles  $[P_0]^\alpha = [\underline{P}_{0\alpha}, \overline{P}_{0\alpha}]$  y  $\theta_p \in [-1, 0]$ . Sea  $[P(t)]^\alpha = [\underline{P}_{\alpha}(t), \overline{P}_{\alpha}(t)]$ , con  $\underline{P}_{\alpha}(t) \geq 0$  los  $\alpha$ -niveles de  $P(t)$ . Si se considera la  $(i)$ - $gH$  derivada (derivada de Hukuhara), los  $\alpha$ -niveles de  $P'_\alpha(t)$  vienen dados por  $[D_{(i)}P(t)]^\alpha = [r\underline{P}_{\alpha}(t), r\overline{P}_{\alpha}(t)]$ . Así, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales impulsivas (41) (que proviene de (40) considerando la  $(i)$ - $gH$  derivada)

viene dada como sigue

$$\underline{P}_\alpha(t) = \begin{cases} \underline{P}_{0\alpha} e^{rt}, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ (1 + \theta_1) \underline{P}_\alpha(t_1^-) e^{r(t-t_1)}, & \text{si } t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (1 + \theta_p) \underline{P}_\alpha(t_p^-) e^{r(t-t_p)}, & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (1 + \theta_k) \underline{P}_\alpha(t_k^-) e^{r(t-t_k)}, & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T^*, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1], \quad (43)$$

$$\overline{P}_\alpha(t) = \begin{cases} \overline{P}_{0\alpha} e^{rt}, & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ (1 + \theta_1) \overline{P}_\alpha(t_1^-) e^{r(t-t_1)}, & \text{si } t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (1 + \theta_p) \overline{P}_\alpha(t_p^-) e^{r(t-t_p)}, & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (1 + \theta_k) \overline{P}_\alpha(t_k^-) e^{r(t-t_k)}, & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T^*, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1], \quad (44)$$

donde  $\underline{P}_\alpha(t_p^-)$  y  $\overline{P}_\alpha(t_p^-)$  son dados por:

$$\underline{P}_\alpha(t_p^-) = e^{rt_p} \underline{P}_{0\alpha} \prod_{l=1}^{p-1} (1 + \theta_l), \quad \overline{P}_\alpha(t_p^-) = e^{rt_p} \overline{P}_{0\alpha} \prod_{l=1}^{p-1} (1 + \theta_l).$$

Por otro lado, si se considera la (ii)-gH derivada, los  $\alpha$ -niveles de  $P'(t)$  son  $[D_{(ii)}P(t)]^\alpha = [\overline{rP}_\alpha(t), \underline{rP}_\alpha(t)]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ; así, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales impulsivas equivalente (42) (que proviene de (40) considerando la (ii)-gH derivada) viene dada como sigue

$$P_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha} \right) e^{rt} - \left( \overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha} \right) e^{-rt} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_1) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_1^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_1^-) \right) e^{r(t-t_1)} - \left( \overline{P}_{\alpha}(t_1^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_1^-) \right) e^{-r(t-t_1)} \right], & \text{si } t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_p) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_p^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_p^-) \right) e^{r(t-t_p)} - \left( \overline{P}_{\alpha}(t_p^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_p^-) \right) e^{-r(t-t_p)} \right], & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_k) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_k^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_k^-) \right) e^{r(t-t_k)} - \left( \overline{P}_{\alpha}(t_k^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_k^-) \right) e^{-r(t-t_k)} \right], & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T^*, \end{cases} \quad (45)$$

$$\overline{P_{\alpha}(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha} \right) e^{rt} + \left( \overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha} \right) e^{-rt} \right], & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_1) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_1^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_1^-) \right) e^{r(t-t_1)} + \left( \overline{P}_{\alpha}(t_1^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_1^-) \right) e^{-r(t-t_1)} \right], & \text{si } t_1 < t \leq t_2, \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_p) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_p^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_p^-) \right) e^{r(t-t_p)} + \left( \overline{P}_{\alpha}(t_p^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_p^-) \right) e^{-r(t-t_p)} \right], & \text{si } t_p < t \leq t_{p+1}, \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (1 + \theta_k) \left[ \left( \underline{P}_{\alpha}(t_k^-) + \overline{P}_{\alpha}(t_k^-) \right) e^{r(t-t_k)} + \left( \overline{P}_{\alpha}(t_k^-) - \underline{P}_{\alpha}(t_k^-) \right) e^{-r(t-t_k)} \right], & \text{si } t_k < t \leq t_{k+1} = T^*, \end{cases} \quad (46)$$

donde  $\underline{P_{\alpha}(t_p^-)}$  y  $\overline{P_{\alpha}(t_p^-)}$  son dados por:

$$\underline{P_{\alpha}(t_p^-)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha} \right) e^{rt_p} - \left( \overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha} \right) e^{-rt_p} \right] \prod_{l=1}^{p-1} (1 + \theta_l),$$

$$\overline{P_{\alpha}(t_p^-)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{P}_{0\alpha} + \overline{P}_{0\alpha} \right) e^{rt_p} + \left( \overline{P}_{0\alpha} - \underline{P}_{0\alpha} \right) e^{-rt_p} \right] \prod_{l=1}^{p-1} (1 + \theta_l).$$

En el caso  $r < 0$ , si  $P(t)$  es (i)-gH diferenciable se tiene que  $[D_{(i)}P(t)]^{\alpha} = [\overline{rP_{\alpha}(t)}, \underline{rP_{\alpha}(t)}]$ , lo que implica que la solución de (40) es tal que sus  $\alpha$ -niveles vienen dados por (45-46), mientras que si se considera que  $P(t)$  es (ii)-gH diferenciable, se tiene que  $[D_{(ii)}P(t)]^{\alpha} = [\underline{rP_{\alpha}(t)}, \overline{rP_{\alpha}(t)}]$ ;

por lo tanto la solución de (40) es tal que sus  $\alpha$ -niveles vienen dados por (43-44).

### **5.2.2. Caso de estudio: *Phthorimaea Operculella Zeller* en el cultivo de papa.**

El objetivo del proceso de control de plagas es controlar la población de plagas en un cultivo; tradicionalmente este proceso se realiza mediante la aplicación periódica de plaguicidas. Como se ha dicho, una de las plagas más importantes que afectan a la producción de papa es la polilla del tubérculo de la papa (*Phthorimaea Operculella Zeller*) que causa un impacto significativo en el cultivo Kroschel (1995); Salama *et al.* (1972). En esta sección se utiliza el marco matemático con el fin de analizar la dinámica poblacional de la polilla del tubérculo de la papa utilizando las ecuaciones diferenciales impulsivas fuzzy y considerando los datos reportados en Golizadeh *et al.* (2010).

**5.2.2.1. Tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla del tubérculo de la papa.** En Sporleder *et al.* (2004), los autores utilizaron datos obtenidos de colonias de polillas de la papa en el laboratorio del Centro Internacional de la Papa, y analizaron las tasas de desarrollo, para cada fase de desarrollo empleando modelos lineales y modelos Sharpe & DeMichele (Sharpe y DeMichele, 1977). También aplicaron regresiones cuadráticas para analizar los datos de supervivencia de las polillas, una versión de cuatro parámetros del modelo Sharpe & DeMichele (Schoolfield *et al.*, 1981) y un modelo exponencial para estudiar los datos de vida de los adultos. Además, utilizaron la distribución gamma para modelar por edad la tasa de fecundidad, a temperaturas comprendidas entre 10°C y 32°C. (Golizadeh and Zalucki, 2012) estimó las tasas de desarrollo dependientes de la temperatura para cada etapa de desarrollo de la polilla del tubérculo de la papa con modelos lineales ordinarios y modelos lineales de Ikemoto a temperaturas constantes entre 16°C y 36°C, utilizando datos recolectados en almacenes de papa infestados por la polilla del tubérculo de la papa en la provincia de Ardabil, en el noroeste de Irán. Además, Golizadeh

*et al.* (2010) exploró los efectos de la temperatura en el tiempo de desarrollo, la longevidad de los adultos y su reproducción, empleando regresiones lineales. Realizaron su estudio observando unas 200 larvas neonatas en tubérculos de papa a temperaturas constantes (16, 20, 24, 28, 32, 34 y 36°C); la observación continuó hasta la emergencia de los adultos, recogiendo datos de supervivencia de inmaduros y del tiempo hasta la madurez, y luego, esos datos se utilizaron para calcular los parámetros de la tabla de vida: la tasa reproductiva neta, el tiempo medio generacional, la tasa finita de incremento y, por último, la tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla del tubérculo de la papa. Andreadis *et al.* (2017) estudiaron las tasas de desarrollo mediante modelos lineales y modelos Logan I (Logan *et al.*, 1976), para evaluar la supervivencia mediante un modelo lineal generalizado (GLM) con una distribución de error binomial; determinaron la longevidad de los adultos de la polilla de la papa del tubérculo analizando los datos recolectados en tubérculos de papa infestados en Kato Nevrokopi, en el norte de Grecia, a temperaturas constantes (17.5, 20, 22, 5, 25, 27, 5, 30, 32, 5 y 35°C). Estos estudios analizaron los parámetros de la tabla de vida de la plaga y mostraron que la temperatura se considera el factor más importante para el desarrollo y la reproducción de la polilla del tubérculo de la papa, mientras que otros factores como la humedad mostraron que no tenían un efecto significativo (Hovey, 1943). En este estudio, como datos iniciales *a priori*, se utiliza la estimación de  $r$  obtenida por Golizadeh *et al.* (2010) a temperaturas comprendidas entre 10°C y 35°C, que se registran en la Tabla 8.

Para analizar el crecimiento de la plaga en un cultivo real de papa, se utiliza la técnica de escalado lineal a intervalos (“Interval LST”) (Actis di Pasquale y Balsa, 2017) sobre los datos proporcionados por la Tabla 8 escalándolos en un rango de temperaturas entre 5°C y 20°C; así se obtienen los datos de la Tabla 9.

**Tabla 8**

*Primera colección de datos de la tasa intrínseca de crecimiento de la polilla del tubérculo de la papa*

Temperatura (°C)	Tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ )
10	0
16	0.294
20	0.665
24	1.106
28	1.596
32	1.344
35	0

**Tabla 9**

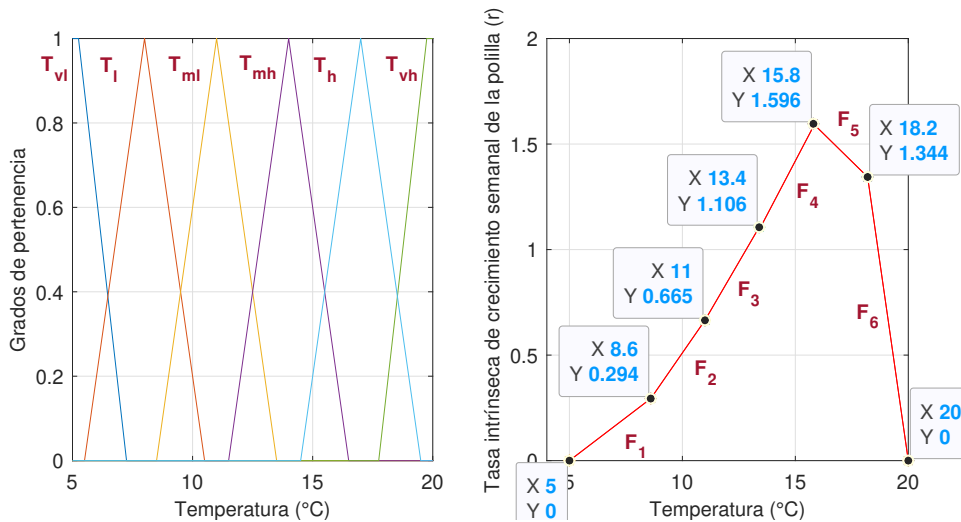
*Escalamiento de datos de la tabla 8*

Temperatura (°C)	Tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ )
5	0
8.6	0.294
11	0.665
13.4	1.106
15.8	1.596
18.2	1.344
20	0

Teniendo en cuenta la imprecisión y la incertidumbre que supone la estimación *a priori* del parámetro de la tasa intrínseca de crecimiento, se diseña un modelo TSK con la Temperatura ( $T$ ) como variable de entrada y la tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla de la papa ( $r$ ) como variable de salida. La elección de  $T$  como variable de entrada se debe a la relación de la temperatura con el desarrollo y los procesos biológicos de la plaga (Andreadis *et al.*, 2017; Golizadeh *et al.*, 2010; Golizadeh and Zalucki, 2012; Sporleder *et al.*, 2004).

Los términos lingüísticos para la variable Temperatura ( $T$ ) se tomaron en un rango de  $[5, 20]^{\circ}C$ , ya que en este rango la plaga tiene la capacidad real de desarrollarse en un cultivo de papa. Por simplicidad, se consideran los términos lingüísticos como números fuzzy triangulares y trapezoidales, como sigue (ver Figura 25.A): Temperatura muy baja  $T_{vl} = \langle 2.75, 4.75, 5.25, 7.25 \rangle$ ; Temperatura baja  $T_l = \langle 5.5, 8, 10.5 \rangle$ ; Temperatura medio baja  $T_{ml} = \langle 8.5, 11, 13.5 \rangle$ ; Temperatura medio alta  $T_{mh} = \langle 11.5, 14, 16.5 \rangle$ ; Temperatura alta  $T_h = \langle 14.5, 17, 19.5 \rangle$ ; Temperatura muy alta  $T_{vh} = \langle 17.75, 19.75, 20.25, 22.25 \rangle$ .

**Figura 25**  
Modelo TSK diseñado para la estimación de  $r$



Nota. (A) Términos lingüísticos de la variable de entrada Temperatura ( $T^{\circ}C$ ) (Temperatura muy baja  $T_{vl}$ , Temperatura baja  $T_l$ , Temperatura media baja  $T_{ml}$ , Temperatura media alta  $T_{mh}$ , Temperatura alta  $T_h$  y Temperatura muy alta  $T_{vh}$ ) dados por números fuzzy triangulares y trapezoidales. (B) Funciones lineales de base para las reglas de inferencia, interpoladas a partir de los datos *a priori* de las tasas intrínsecas de crecimiento ( $r$ ) obtenidas en la Tabla 9.

Utilizando datos *a priori* para ( $r$ ) obtenidos en la Tabla 9, se interpola la función

$$T \text{ (temperatura)} \rightarrow r(T) \text{ (tasa intrínseca de crecimiento),}$$

a partir de estos puntos conocidos. Por simplicidad, se consideran las siguientes funciones lineales a priori  $F_1(T) = \frac{1}{3.6} (0.294T - 1.47)$ ,  $F_2(T) = \frac{1}{2.4} (0.371T - 2.485)$ ,  $F_3(T) = \frac{1}{2.4} (0.441T - 3.255)$ ,  $F_4(T) = \frac{1}{3.6} (0.49T - 3.9416)$ ,  $F_5(T) = \frac{1}{2.4} (7.812 - 0.252T)$  y  $F_6(T) = \frac{1}{1.8} (26.88 - 1.344T)$ , como se muestra en la Figura 25.B. Conociendo  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  y  $F_6$ , se establecen las reglas de inferencia fuzzy como se muestra en la Tabla 10.

**Tabla 10**  
*Base de reglas de inferencia fuzzy*

Conjunto de reglas	
Regla 1	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_{vl}$ , entonces la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_1$ .
Regla 2	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_l$ , la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_2$ .
Regla 3	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_{ml}$ , la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_3$ .
Regla 4	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_{mh}$ , la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_4$ .
Regla 5	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_h$ , la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_5$ .
Regla 6	Si la temperatura ( $T$ ) es $T_{vh}$ , entonces la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) es $F_6$ .

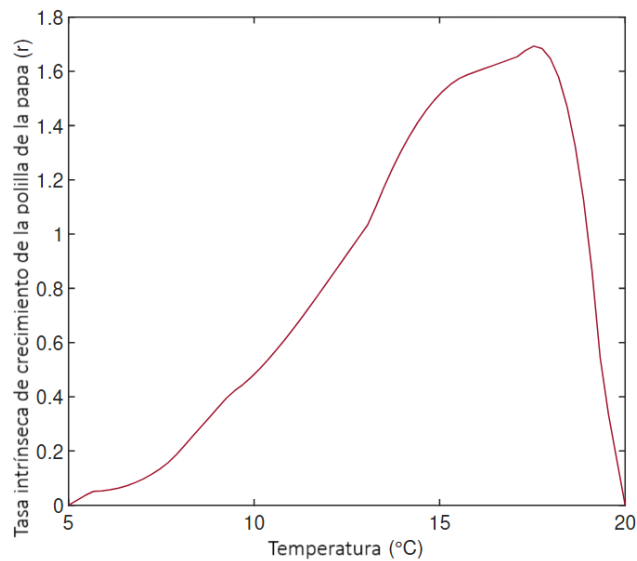
Así, para una temperatura de entrada  $T_0$ , la tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla de la papa viene dada por:

$$r(T_0) = \frac{T_{vl}(T_0)F_1(T_0) + T_l(T_0)F_2(T_0) + T_{ml}(T_0)F_3(T_0) + T_{mh}(T_0)F_4(T_0) + T_h(T_0)F_5(T_0) + T_{vh}(T_0)F_6(T_0)}{T_{vl}(T_0) + T_l(T_0) + T_{ml}(T_0) + T_{mh}(T_0) + T_h(T_0) + T_{vh}(T_0)} \tag{47}$$

Se implementa el TSK diseñado utilizando la interfaz Fuzzy Logic Designer en Matlab, y así, se estima la tasa intrínseca de crecimiento de la población de la polilla de la papa  $r$  en función de la temperatura. Este procedimiento permite obtener la curva resultante en la Figura 26. La Tabla 4 muestra algunas estimaciones de  $r$ .

**Figura 26**

*Función resultante  $r(T)$  del modelo TSK diseñado*

**Tabla 11**

*Tasa intrínseca de crecimiento semanal de la población de la polilla del tubérculo de la papa a diferentes temperaturas*

Temperatura (°C)	Tasa intrínseca de crecimiento semanal (r)
7	0.0962
9	0.356
11	0.641
13	1.02
15	1.52
17	1.65
19	0.996

Tasas intrínsecas de crecimiento estimadas utilizando el modelo TSK diseñado a temperaturas en el rango  $[5, 20]^{\circ}\text{C}$ .

**5.2.2.2. Población de la polilla de la papa en función del tiempo.** Conociendo la tasa intrínseca de crecimiento de la polilla del tubérculo de la papa ( $r$ ), se considera el siguiente problema de valor inicial impulsivo fuzzy para determinar el crecimiento de la población de la

polilla del tubérculo de la papa  $P(t)$  a lo largo del tiempo  $t$ :

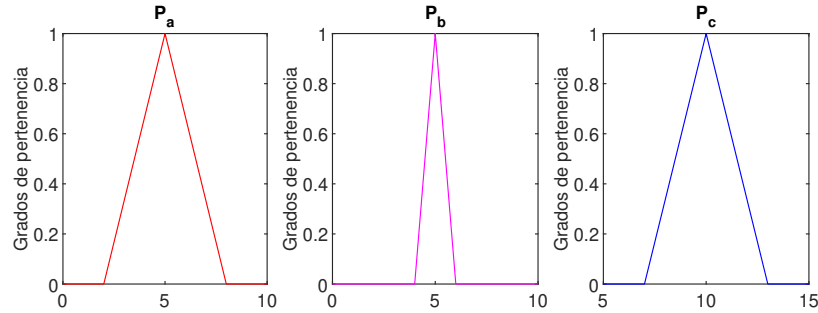
$$\begin{cases} P'(t) = rP(t), & \text{para } t \in [0, T^*], t \neq t_p, \\ \Delta P(t_p) = \theta_p P(t_p^-), \\ P(0) = P_0 \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (48)$$

donde  $\theta_p$  denota la tasa de efectividad del plaguicida en la aplicación en el tiempo  $t_p$  y  $P_0$  es la población inicial. Se consideran tres aplicaciones de plaguicidas, en los tiempos  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 4$  y  $t_3 = 5$  (semanas), con  $\theta_1 = 0,5$ ,  $\theta_2 = 0,2$  y  $\theta_3 = 0,1$ . Para ilustrar el proceso, se utilizan las estimaciones de la tasa intrínseca de crecimiento semanal ( $r$ ) obtenidas por el modelo TSK diseñado a  $7^\circ C$ ,  $13^\circ C$  y  $19^\circ C$ . Además, se consideran tres poblaciones iniciales diferentes representadas por números triangulares fuzzy  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$  con sus correspondientes  $\alpha$ -niveles  $[P_a]^\alpha = [3\alpha + 2, 8 - 3\alpha]$ ,  $[P_b]^\alpha = [\alpha + 4, 6 - \alpha]$ , y  $[P_c]^\alpha = [3\alpha + 7, 13 - 3\alpha]$  (ver Figura 27). Las funciones soporte y altura (Angulo-Castillo *et al.*, 2020) de las (i)-gH y (ii)-gH soluciones se muestran en las Figuras 28-30.

La solución del problema de valor inicial impulsivo fuzzy (48) muestra un comportamiento exponencial fuzzy en cada intervalo  $(t_p, t_{p+1}]$ . Asimismo, para la (i)-gH solución, a medida que aumenta el tiempo, el conjunto de soporte también aumenta, mientras que en la (ii)-gH solución, a medida que aumenta el tiempo el conjunto de soporte disminuye en  $(t_p, t_{p+1}]$  para todo  $p \in \mathbb{I}_0$ . En cada momento  $t_p$  de aplicación del plaguicida la población disminuye instantáneamente, como es de esperar. Se observa que la incertidumbre representada en la población inicial influye en la función soporte de la solución en cada intervalo (véanse las soluciones con poblaciones iniciales  $P_a$  y  $P_b$  en las Figuras 28-30).

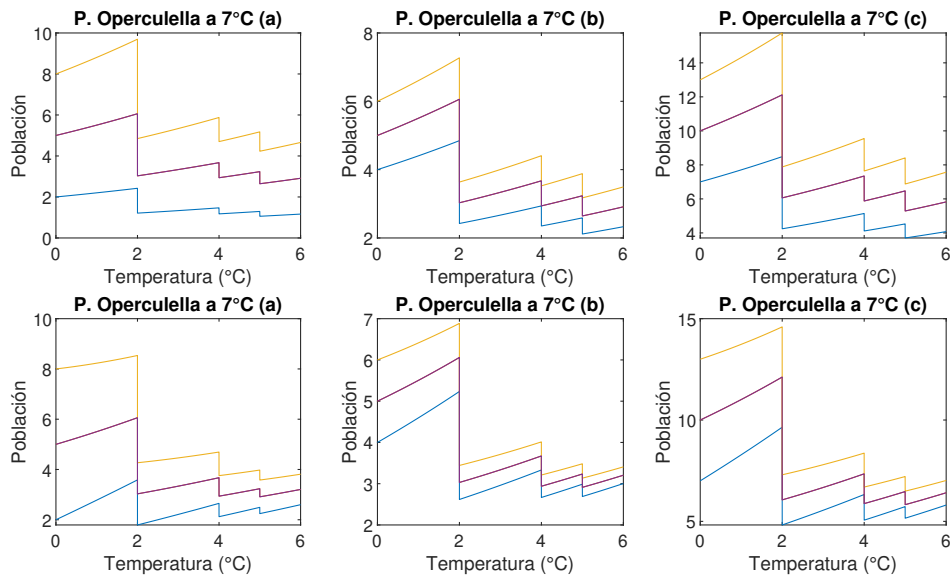
**Figura 27**

*Poblaciones iniciales  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$  de la polilla del tubérculo de la papa por unidad de superficie*



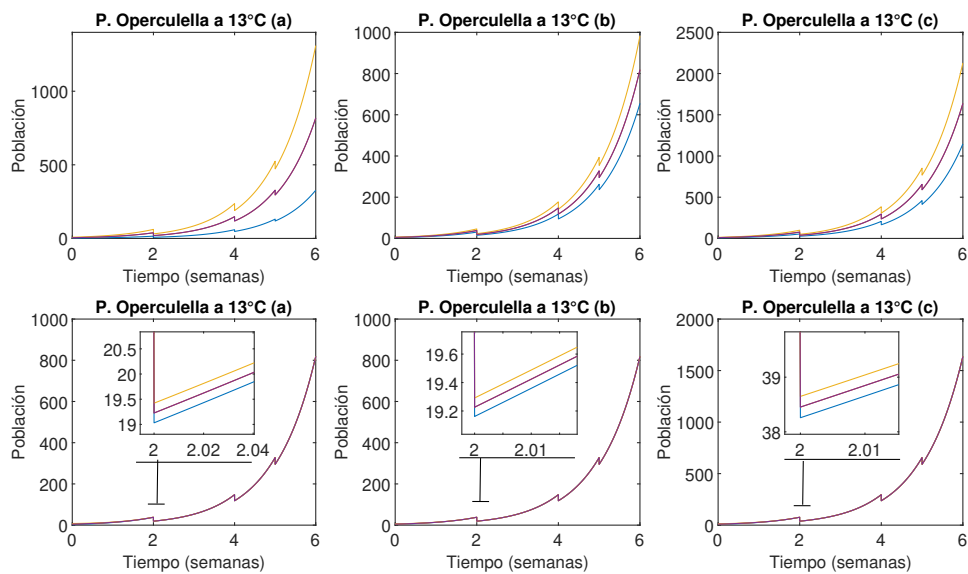
**Figura 28**

*(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 7°C*



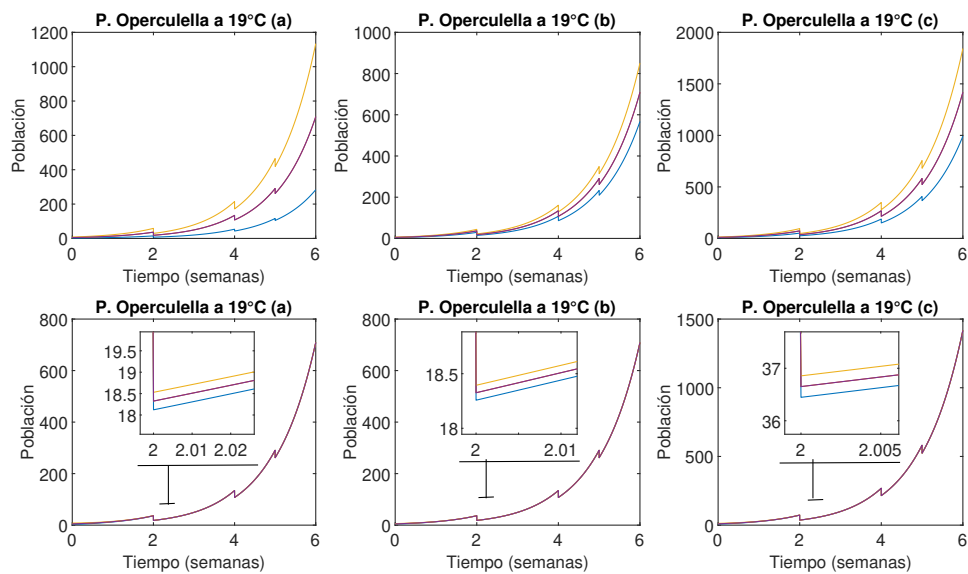
*Nota.* Se consideran las poblaciones iniciales  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las (i)-gH soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las (ii)-gH soluciones.

**Figura 29**  
*(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 13°C*



*Nota.* Se consideran las poblaciones iniciales  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las (i)-gH soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las (ii)-gH soluciones.

**Figura 30**  
*(i)-gH y (ii)-gH soluciones a 19°C*



*Nota.* Se consideran las poblaciones iniciales  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$ ; la primera fila muestra las funciones soporte ( $\alpha = 0$ ) y altura ( $\alpha = 1$ ) de las (i)-gH soluciones, y la segunda fila muestra las funciones correspondientes de las (ii)-gH soluciones.

## 6. Comparación de dos enfoques para resolver un sistema fuzzy que describe la cinética de degradación de plaguicidas en modelos de absorción de plantas

El uso de plaguicidas en los cultivos agrícolas es fundamental para el control químico de plagas y enfermedades, lo que se traduce en la aplicación de plaguicidas por parte del agricultor sobre el cultivo mediante fumigación. Uno de los cultivos más importantes en la producción mundial, después de la caña de azúcar, el maíz, el trigo, el arroz y el fruto de la palma de aceite, es la papa (*Solanum tuberosum*) (FAO/ESS, 2023), producto nativo de la región andina de América del Sur (Saeed *et al.*, 2023). Como se mencionó en el Capítulo 1, una de las principales plagas del cultivo de la papa es el gusano blanco de la papa (*Premnotrypes Vorax*), para cuyo control los plaguicidas comunes combinan generalmente la acción de dos principios activos: tiametoxam (Neonicotinoide) y lambda-cihalotrina (Piretroide sintético). El tiametoxam es un insecticida sistémico que inhibe los receptores nicotínicos de acetilcolina (Maienfisch *et al.*, 2001), mientras que la lambda-cialotrina es un insecticida no sistémico que interfiere con el canal de sodio (He *et al.*, 2008). Estos productos químicos producen una pérdida de control, parálisis y, posteriormente, la muerte de la plaga.

El análisis de residuos químicos en los productos de la cosecha (en este caso, el tubérculo de papa) es un problema relevante para estudiar la calidad y aptitud del producto para el consumo humano, considerando los parámetros establecidos por la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO) y la Organización Mundial de la Salud (OMS). En Abd-Alrahman (2014), Xiao *et al.* (2021) y Li y Fantke (2023) se han presentado algunos análisis estadísticos sobre este problema. En Abd-Alrahman (2014) el autor consideró un comportamiento exponencial decreciente de la concentración de plaguicidas en la papa y en el suelo sin tener en

cuenta agentes o procesos externos que afecten a la dinámica; por otra parte, en Xiao *et al.* (2021); Li y Fantke (2023), consideran condiciones complejas de campo abierto que incluyen múltiples procesos de absorción y eliminación de plaguicidas por las plantas, y establecieron un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para modelar la concentración de plaguicidas en la papa utilizando los resultados de Juraske *et al.* (2011) y Fantke *et al.* (2011).

En este capítulo, se propone el uso de modelos matemáticos fuzzy para describir el comportamiento de la concentración de plaguicidas en tubérculos de papa  $C_p(t)$  considerando la naturaleza no determinística de los datos obtenidos en campo, así como la imprecisión, vaguedad, subjetividad e incertidumbre involucradas. En primer lugar, se utiliza la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias fuzzy (EDOF) (Bede, 2008; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015; Khastan y Rodriguez-López, 2016; Angulo-Castillo *et al.*, 2020) para describir la disminución de la concentración de plaguicidas en tubérculos de papa considerando una versión fuzzy de los modelos crisp propuestos en Abd-Alrahman (2014) y Li y Fantke (2023). En este caso, se considera que la concentración inicial del plaguicida en el suelo y en los tubérculos de papa son números fuzzy que corresponden a un escenario más realista; De hecho, como estudio de caso se analiza la residualidad de tiametoxam en la papa utilizando datos de campo de un cultivo de papa de Santander, Colombia, e información de la bibliografía (Abd-Alrahman, 2014; Li y Fantke, 2023; Trapp *et al.*, 2007), para estimar y establecer los parámetros de degradación, dilución y difusión del tiametoxam que intervienen en los modelos, mediante el uso de algunas herramientas estadísticas, a saber, regresiones polinómicas locales y mínimos cuadrados no lineales. El segundo objetivo de este capítulo es diseñar un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy de tipo Takagi–Sugeno–Kang (TSK) (Massad *et al.*, 2009) para modelar la variación temporal de la concentración química ( $\Delta C_p(t)$ ) para finalmente interpolar la curva de la concentración del pesticida en tubérculos de papa. Al comparar estos dos enfoques se concluye que presentan un comportamiento similar.

Ambos enfoques podrían utilizarse como buenas herramientas para modelar la concentración de otros pesticidas o productos químicos en los tubérculos de papa.

El presente estudio se llevó a cabo con el fin de introducir y desarrollar una herramienta matemática para tratar un problema agrícola realista. En la Sección 6.1, se propone y resuelve el sistema general de EDO fuzzy expresando la solución en términos de los parámetros involucrados. En la Sección 6.2, se analiza la determinación de los parámetros en una situación real específica, es decir, considerando datos relacionados con la concentración de tiametoxam en la papa. Estimando el conjunto de parámetros, se puede determinar explícitamente la concentración del plaguicida a lo largo del tiempo. En la sección 6.3, se diseña un modelo TSK para aproximar la variación de la concentración de tiametoxam, como enfoque alternativo. Finalmente, se comparan estos dos enfoques, mostrando una aproximación bastante razonable en su comportamiento, incluso disponiendo de una cantidad mínima de datos fuzzy. Los resultados de este trabajo se encuentran reportados en Espitia-Cruz y Villamizar-Roa (2024).

### **6.1. Modelo matemático**

Considerando la naturaleza no determinista de los datos de la concentración inicial de pesticidas en tubérculos de papa, así como la naturaleza fuzzy de los parámetros de degradación y difusión (cómo ocurre realmente), se propone un modelo matemático para describir la evolución de la concentración de pesticidas en papa  $C_p(t)$ , mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias fuzzy:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_p(t) = k_{s \rightarrow p} C_s(t) + (-1)[k_{p \rightarrow s} + k_{\text{growth},p} + k_{\text{deg},p}] C_p(t), \\ C'_s(t) = -k_{\text{deg},s} C_s(t), \\ C_p(0) = C_{p_0}, \\ C_s(0) = C_{s_0}, \end{array} \right. \quad (49)$$

donde  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  son funciones fuzzy que representan las concentraciones de plaguicida en los tubérculos de papa y en el suelo respectivamente, con sus respectivas tasas de degradación del plaguicida  $k_{\text{deg},p}$  y  $k_{\text{deg},s}$ . Además,  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$  son las tasas de absorción del plaguicida del suelo a la papa y de eliminación del plaguicida de la papa al suelo por difusión, y  $k_{\text{growth},p}$  representa la tasa de crecimiento de la papa. Los términos  $C_{p_0}$  y  $C_{s_0}$  son los datos iniciales que se suponen elementos de  $\mathcal{F}$ . El sistema (49) corresponde a una versión fuzzy del sistema diferencial propuesto por Xiao *et al.* (2021) y Li y Fantke (2023). Así, el primer elemento clave en la descripción del sistema fuzzy (49), es el sentido de la derivada  $C'_p(t)$ . Siguiendo a (Bede, 2008; Bede y Stefanini, 2012; Chalco-Cano *et al.*, 2013; Villamizar-Roa *et al.*, 2015) se utiliza el concepto de derivada generalizada de Hukuhara ( $gH$ -derivada para abreviar).

Para resolver (49), teniendo en cuenta que (49) es un sistema (semi) desacoplado, primero se resuelve (49)<sub>2,4</sub>, y luego se sustituye  $C_s(t)$  en (49)<sub>1,3</sub> y se resuelve para obtener  $C_p(t)$ . Este procedimiento se realiza en las siguientes subsecciones.

**6.1.1. Concentración de plaguicida en suelo.** Considerando la concentración inicial de pesticida en el suelo  $C_{s_0}$  como un número fuzzy (por simplicidad, un número fuzzy trian-

gular), se resuelve primero el problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} C'_s(t) = -k_{\text{deg},s}C_s(t), \\ C_s(0) = C_{s_0}, \end{cases} \quad (50)$$

donde, como se ha dicho,  $C_s(t)$  representa la concentración de plaguicida en el tiempo  $t$ , y  $k_{\text{deg},s}$  es la tasa de degradación del plaguicida en el suelo. Se tienen dos casos, dependiendo del sentido del tipo de  $gH$ -derivada. En efecto, si  $C_s(t)$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable, entonces los  $\alpha$ -niveles de  $C'_s(t)$  vienen dados por  $[C'_s(t)]^\alpha = [\underline{C_s^{\alpha'}(t)}, \overline{C_s^{\alpha'}(t)}] = [-k_{\text{deg},s}\overline{C_s^\alpha(t)}, -k_{\text{deg},s}\underline{C_s^\alpha(t)}]$ .

Aquí,  $[C'_s(t)]^\alpha = [\underline{C_s^{\alpha'}(t)}, \overline{C_s^{\alpha'}(t)}]$  denota los  $\alpha$ -niveles de la  $(i)$ - $gH$  derivada de  $C_s(t)$ , lo que significa que  $\underline{C_s^{\alpha'}(t)}$  es la derivada de  $\underline{C_s^\alpha(t)}$  y  $\overline{C_s^{\alpha'}(t)}$  es la derivada de  $\overline{C_s^\alpha(t)}$ . Por lo tanto, la  $(i)$ - $gH$  solución de (50) en términos de sus  $\alpha$ -niveles viene dada por

$$[C_s(t)]^\alpha = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{-k_{\text{deg},s}t} - \left( \overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{k_{\text{deg},s}t}, \left( \underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{-k_{\text{deg},s}t} + \left( \overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{k_{\text{deg},s}t} \right]. \quad (51)$$

Por otra parte, si  $C_s(t)$  es  $(ii)$ - $gH$  diferenciable se tiene que  $[C'_s(t)]^\alpha = [\overline{C_s^{\alpha'}(t)}, \underline{C_s^{\alpha'}(t)}] = [-k_{\text{deg},s}\overline{C_s^\alpha(t)}, -k_{\text{deg},s}\underline{C_s^\alpha(t)}]$ ; entonces la  $(ii)$ - $gH$  solución de (50) viene dada por

$$[C_s(t)]^\alpha = \left[ \underline{C_{s_0}^\alpha} e^{-k_{\text{deg},s}t}, \overline{C_{s_0}^\alpha} e^{-k_{\text{deg},s}t} \right]. \quad (52)$$

**6.1.2. Concentración de plaguicidas en el tubérculo papa.** Para obtener  $C_p(t)$ , se reemplaza la función  $C_s(t)$ , obtenida en la sección 6.1.1, en (49)<sub>1</sub>, y luego se resuelve el PVIF (49)<sub>1,3</sub>, considerando  $k_{s \rightarrow p}, \lambda = -[k_{p \rightarrow s} + k_{\text{growth},p} + k_{\text{deg},p}] \in \mathbb{R}^-$  y  $k_{\text{deg},s} \in \mathbb{R}^+$ . Sea  $[C_s(t)]^\alpha = [\underline{C_s^\alpha(t)}, \overline{C_s^\alpha(t)}]$  y  $[C_p(t)]^\alpha = [\underline{C_p^\alpha(t)}, \overline{C_p^\alpha(t)}]$  los  $\alpha$ -niveles de las funciones fuzzy  $C_s(t)$  (véase la Sección 6.1.1) y  $C_p(t)$  respectivamente, con datos de concentración inicial  $[C_s(0)]^\alpha = [\underline{C_{s_0}^\alpha}, \overline{C_{s_0}^\alpha}]$  y

$[C_p(0)]^\alpha = [\underline{C_{p_0}^\alpha}, \overline{C_{p_0}^\alpha}]$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} [k_{s \rightarrow p} C_s(t) + \lambda C_p(t)]^\alpha &= k_{s \rightarrow p} [C_s(t)]^\alpha + \lambda [C_p(t)]^\alpha \\ &= [k_{s \rightarrow p} \overline{C_s^\alpha(t)}, k_{s \rightarrow p} \underline{C_s^\alpha(t)}] + [\lambda \overline{C_p^\alpha(t)}, \lambda \underline{C_p^\alpha(t)}] \\ &= [k_{s \rightarrow p} \overline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \overline{C_p^\alpha(t)}, k_{s \rightarrow p} \underline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \underline{C_p^\alpha(t)}]. \end{aligned}$$

Así, si  $C_p(t)$  es  $(i)$ - $gH$  diferenciable, los  $\alpha$ -niveles de  $C'_p(t)$  son tales que

$$[C'_p(t)]^\alpha = [\underline{C_p^{\alpha'}(t)}, \overline{C_p^{\alpha'}(t)}] = [k_{s \rightarrow p} \overline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \overline{C_p^\alpha(t)}, k_{s \rightarrow p} \underline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \underline{C_p^\alpha(t)}]. \quad (53)$$

Por otro lado, si  $C_p(t)$  es  $(ii)$ - $gH$  diferenciable, los  $\alpha$ -niveles de  $C'_p(t)$  son tales que

$$[C'_p(t)]^\alpha = [\overline{C_p^{\alpha'}(t)}, \underline{C_p^{\alpha'}(t)}] = [k_{s \rightarrow p} \overline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \overline{C_p^\alpha(t)}, k_{s \rightarrow p} \underline{C_s^\alpha(t)} + \lambda \underline{C_p^\alpha(t)}]. \quad (54)$$

En este punto es importante observar que para reemplazar los  $\alpha$ -niveles de  $C_s(t)$ , se necesita considerar los dos casos correspondientes que provienen del sentido de la derivada  $gH$  en  $C'_s(t)$ . Esto implica que, en total, se tienen cuatro posibles soluciones, a saber, la  $(i)$ - $(i)$ - $gH$  solución, la  $(i)$ - $(ii)$ - $gH$  solución, la  $(ii)$ - $(i)$ - $gH$  solución y la  $(ii)$ - $(ii)$ - $gH$  solución según los tipos de derivadas. A continuación se describe cada uno de ellos.

**6.1.2.1.  $(i)$ - $(i)$ - $gH$  derivada.** En este caso, se considera que  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  son  $(i)$ - $gH$  diferenciables; es decir,  $C'_p(t)$  es como en (53) y  $C_s(t)$  viene dado por (51). Entonces, el problema de valor inicial fuzzy (49) es equivalente a resolver el siguiente sistema de EDO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C_p^\alpha}(t) = \frac{k_{s \rightarrow p}}{2} \left[ \left( \underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{-k_{deg,s}t} + \left( \overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{k_{deg,s}t} \right] + \lambda \overline{C_p^\alpha}(t), \\ \overline{C_p^\alpha}(t) = \frac{k_{s \rightarrow p}}{2} \left[ \left( \underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{-k_{deg,s}t} - \left( \overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha} \right) e^{k_{deg,s}t} \right] + \lambda \underline{C_p^\alpha}(t), \\ \underline{C_p^\alpha}(0) = \underline{C_{p_0}^\alpha}, \overline{C_p^\alpha}(0) = \overline{C_{p_0}^\alpha}, \\ \underline{C_s^\alpha}(0) = \underline{C_{s_0}^\alpha}, \overline{C_s^\alpha}(0) = \overline{C_{s_0}^\alpha}, \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1], \quad (55)$$

por lo tanto, la solución de (49) (la (i)-(i)-gH solución) en términos de su  $\alpha$ -niveles está dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C_p^\alpha}(t) = C_1 e^{\lambda t} - C_2 e^{-\lambda t} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(\lambda + k_{deg,s})} \left( -(\overline{C_{s_0}^\alpha} + \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{-k_{deg,s}t} + (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{k_{deg,s}t} \right), \\ \overline{C_p^\alpha}(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} - \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(\lambda + k_{deg,s})} \left( (\overline{C_{s_0}^\alpha} + \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{-k_{deg,s}t} + (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{k_{deg,s}t} \right), \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2} \left( \underline{C_{p_0}^\alpha} + \overline{C_{p_0}^\alpha} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{(\lambda + k_{deg,s})} (\underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha}) \right), \\ C_2 = \frac{1}{2} \left( \overline{C_{p_0}^\alpha} - \underline{C_{p_0}^\alpha} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{(\lambda + k_{deg,s})} (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) \right), \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1].$$

**6.1.2.2. (i)-(ii)-gH derivada.** En el segundo caso, se considera que  $C_p(t)$  es (i)-gH diferenciable y  $C_s(t)$  es (ii)-gH diferenciable; es decir,  $C_p'(t)$  es como en (53) y  $C_s(t)$  viene dado por (52), obteniendo el siguiente sistema de EDO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C_p^\alpha}(t) = k_{s \rightarrow p} \overline{C_{s_0}^\alpha} e^{-k_{\text{deg},s} t} + \lambda \overline{C_p^\alpha}(t), \\ \overline{C_p^\alpha}(t) = k_{s \rightarrow p} \underline{C_{s_0}^\alpha} e^{-k_{\text{deg},s} t} + \lambda \underline{C_p^\alpha}(t), \\ \underline{C_p^\alpha}(0) = \underline{C_{p_0}^\alpha}, \quad \overline{C_p^\alpha}(0) = \overline{C_{p_0}^\alpha}, \\ \underline{C_s^\alpha}(0) = \underline{C_{s_0}^\alpha}, \quad \overline{C_s^\alpha}(0) = \overline{C_{s_0}^\alpha}, \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1]; \quad (56)$$

así, la solución de (49) (la solución (i)-(ii)-gH) viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C_p^\alpha}(t) = C_1 e^{\lambda t} - C_2 e^{-\lambda t} + \frac{k_{s \rightarrow p} \overline{C_{s_0}^\alpha} k_{\text{deg},s} - \lambda \underline{C_{s_0}^\alpha} k_{s \rightarrow p}}{\lambda^2 - k_{\text{deg},s}^2} e^{-k_{\text{deg},s} t}, \\ \overline{C_p^\alpha}(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + \frac{k_{s \rightarrow p} \underline{C_{s_0}^\alpha} k_{\text{deg},s} - \lambda \overline{C_{s_0}^\alpha} k_{s \rightarrow p}}{\lambda^2 - k_{\text{deg},s}^2} e^{-k_{\text{deg},s} t}, \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2} \left( \underline{C_{p_0}^\alpha} + \overline{C_{p_0}^\alpha} - \frac{k_{s \rightarrow p} (k_{\text{deg},s} - \lambda)}{\lambda^2 - k_{\text{deg},s}^2} (\overline{C_{s_0}^\alpha} + \underline{C_{s_0}^\alpha}) \right), \\ C_2 = \frac{1}{2} \left( \overline{C_{p_0}^\alpha} - \underline{C_{p_0}^\alpha} + \frac{k_{s \rightarrow p} (k_{\text{deg},s} + \lambda)}{\lambda^2 - k_{\text{deg},s}^2} (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) \right), \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1].$$

**6.1.2.3. (ii)-(i)-gH derivada.** En el tercer caso, se considera que  $C_p(t)$  es (ii)-gH diferenciable y  $C_s(t)$  es (i)-gH diferenciable; es decir,  $C_p'(t)$  y  $C_s(t)$  vienen dados como en (54) y (51), respectivamente. Entonces se obtiene el siguiente sistema de EDO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C_p^\alpha}'(t) = \frac{k_{s \rightarrow p}}{2} \left[ (\underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha}) e^{-k_{\text{deg},s} t} - (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{k_{\text{deg},s} t} \right] + \lambda \underline{C_p^\alpha}(t), \\ \overline{C_p^\alpha}'(t) = \frac{k_{s \rightarrow p}}{2} \left[ (\underline{C_{s_0}^\alpha} + \overline{C_{s_0}^\alpha}) e^{-k_{\text{deg},s} t} + (\overline{C_{s_0}^\alpha} - \underline{C_{s_0}^\alpha}) e^{k_{\text{deg},s} t} \right] + \lambda \overline{C_p^\alpha}(t), \\ \underline{C_p^\alpha}(0) = \underline{C_{p_0}^\alpha}, \quad \overline{C_p^\alpha}(0) = \overline{C_{p_0}^\alpha}, \\ \underline{C_s^\alpha}(0) = \underline{C_{s_0}^\alpha}, \quad \overline{C_s^\alpha}(0) = \overline{C_{s_0}^\alpha}, \end{array} \right. \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (57)$$

Resolviendo (57) se encuentra que la solución de (49) (la solución (ii)-(i)-gH) viene dada por

$$\begin{cases} \underline{C}_p^\alpha(t) = C_1 e^{\lambda t} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(-k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha + \underline{C}_{s_0}^\alpha) e^{-k_{\text{deg},s} t} - \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha - \underline{C}_{s_0}^\alpha) e^{k_{\text{deg},s} t}, \\ \overline{C}_p^\alpha(t) = C_2 e^{\lambda t} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(-k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha + \underline{C}_{s_0}^\alpha) e^{-k_{\text{deg},s} t} + \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha - \underline{C}_{s_0}^\alpha) e^{k_{\text{deg},s} t}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde,

$$\begin{cases} C_1 = \underline{C}_{p_0}^\alpha - \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(-k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha + \underline{C}_{s_0}^\alpha) + \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha - \underline{C}_{s_0}^\alpha), \\ C_2 = \overline{C}_{p_0}^\alpha - \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(-k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha + \underline{C}_{s_0}^\alpha) - \frac{k_{s \rightarrow p}}{2(k_{\text{deg},s} - \lambda)} (\overline{C}_{s_0}^\alpha - \underline{C}_{s_0}^\alpha), \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1].$$

**6.1.2.4. (ii)-(ii)-gH derivada.** En el cuarto caso, se considera que  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  son (ii)-gH diferenciables; es decir,  $C_p'(t)$  viene dado como en (54) y  $C_s(t)$  viene dado por (52). Entonces se obtiene el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} \underline{C}_p^\alpha(t) = k_{s \rightarrow p} \underline{C}_{s_0}^\alpha e^{-k_{\text{deg},s} t} + \lambda \underline{C}_p^\alpha(t), \\ \overline{C}_p^\alpha(t) = k_{s \rightarrow p} \overline{C}_{s_0}^\alpha e^{-k_{\text{deg},s} t} + \lambda \overline{C}_p^\alpha(t), \\ \underline{C}_p^\alpha(0) = \underline{C}_{p_0}^\alpha, \quad \overline{C}_p^\alpha(0) = \overline{C}_{p_0}^\alpha, \\ \underline{C}_s^\alpha(0) = \underline{C}_{s_0}^\alpha, \quad \overline{C}_s^\alpha(0) = \overline{C}_{s_0}^\alpha, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (58)$$

La solución de (49) (la solución (ii)-(ii)-gH) en términos de sus  $\alpha$ -niveles viene dada por

$$\begin{cases} \underline{C}_p^\alpha(t) = C_1 e^{\lambda t} - \frac{k_{s \rightarrow p} \underline{C}_{s_0}^\alpha}{\lambda + k_{\text{deg},s}} e^{-k_{\text{deg},s} t}, \\ \overline{C}_p^\alpha(t) = C_2 e^{\lambda t} - \frac{k_{s \rightarrow p} \overline{C}_{s_0}^\alpha}{k_{\text{deg},s} + \lambda} e^{-k_{\text{deg},s} t}, \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde,

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_{p0}^\alpha}{\lambda + k_{\text{deg},s}} + \frac{k_{s \rightarrow p} C_{s0}^\alpha}{\lambda + k_{\text{deg},s}}, \\ C_2 = \frac{C_{p0}^\alpha}{k_{\text{deg},s} + \lambda} + \frac{k_{s \rightarrow p} C_{s0}^\alpha}{k_{\text{deg},s} + \lambda}, \end{cases} \alpha \in [0, 1].$$

## 6.2. Un primer enfoque a la validación del modelo

En la Sección 6.1, se obtuvo la solución de (49) en un entorno general, es decir, sin considerar valores específicos para los datos iniciales fuzzy y los parámetros. En esta sección, se valida el modelo considerando algunos datos iniciales fuzzy y estimando los parámetros desconocidos mediante una combinación de datos de campo y un análisis de regresión, para un producto químico específico. Como se ha dicho, uno de los plaguicidas más utilizados en el control de plagas es el *tiametoxam*, y por lo tanto, se utilizan algunos datos de campo e información reportada sobre este plaguicida, con el fin de validar el modelo. Para ello, se recolectaron algunos datos de concentración de tiametoxam en tubérculos de papa cosechados en un cultivo de papa en un campo de producción en Santander, Colombia. Estos datos permiten conocer la concentración de este químico en los tubérculos en 3 momentos diferentes. Las muestras utilizadas en laboratorio fueron homogeneizadas y extraídas por el método QuEChERS (Wilkowka y Biziuk, 2011) en el laboratorio de Cromatografía y Espectrometría de Masas de la Universidad Industrial de Santander (CROMASS). Los resultados del laboratorio se muestran en la Tabla 12.

**Tabla 12**

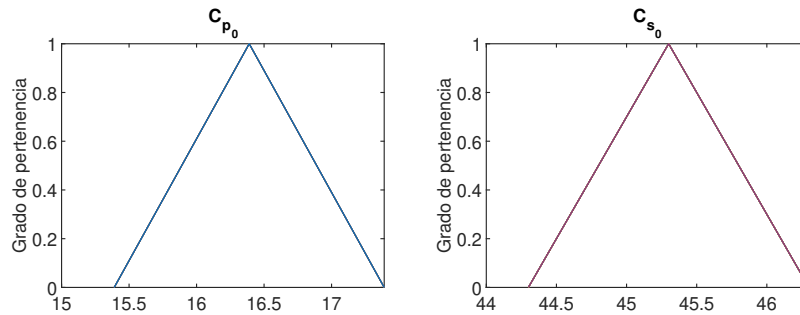
*Datos obtenidos en laboratorio*

Tiempo (días)	Concentración ( $\mu\text{gkg}^{-1}$ )
0	16.39
3	11.72
10	8.15

**6.2.1. Datos iniciales.** El modelo (49) involucra 2 datos iniciales, a saber,  $C_{s_0}$  y  $C_{p_0}$ . Se considera  $C_{s_0}$  como una fuzzificación del valor crisp  $45,3 \mu gkg^{-1}$ , que se ha tomado proporcional al valor reportado en Abd-Alrahman (2014) en su estudio de concentración de pesticidas en el suelo (ver Tabla 15). Además, se considera  $C_{p_0}$  como una fuzzificación del valor crisp  $16,39 \mu gkg^{-1}$ , que se ha tomado de los datos de campo a  $t = 0$  (ver Tabla 12). En concreto, se toman las concentraciones iniciales como números fuzzy triangulares (por simplicidad) con  $\alpha$ -niveles  $[C_{s_0}]^\alpha = [\alpha + 44.3, 46.3 - \alpha]$  y  $[C_{p_0}]^\alpha = [\alpha + 15.39, 17.39 - \alpha]$ , para los cuales  $[C_{s_0}]^1 = \{45.3\}$  y  $[C_{p_0}]^1 = \{16.39\}$  (ver Figura 31).

**Figura 31**

*Datos fuzzy de concentraciones iniciales  $C_{p_0}$  y  $C_{s_0}$*



**6.2.2. Parámetros.** El modelo (49) involucra 5 parámetros, a saber,  $k_{growth,p}$ ,  $k_{deg,p}$ ,  $k_{deg,s}$ ,  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$ . Se toma  $k_{growth,p}$  como en Trapp *et al.* (2007), véase la Tabla 17. Así pues, se debe estimar  $k_{deg,p}$ ,  $k_{deg,s}$ ,  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$ . Con respecto a  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$ , según (Li y Fantke, 2023), se definen como

$$k_{s \rightarrow p} = \frac{23D_{effe}}{[r_p]^2 K_{sw} \rho_p}, \quad k_{p \rightarrow s} = \frac{23D_{effe}}{[r_p]^2 K_{pw} \rho_p},$$

donde  $D_{effe}(m^2d^{-1})$  es la difusividad efectiva del plaguicida en los tejidos de la papa;  $r_p(m)$  es el radio del tubérculo de la papa,  $K_{sw}(Lkg^{-1})$  y  $K_{pw}(Lkg^{-1})$  son los coeficientes de partición suelo-agua y papa-agua del plaguicida, respectivamente, y  $\rho_p(kgL^{-1})$  es la densidad de la papa. Estos

nuevos parámetros dependen de las características particulares del suelo y de la papa (contenido de agua en la papa, contenido de lípidos en la papa, contenido de carbohidratos en la papa, fracción volumétrica de aire en el suelo, fracción volumétrica de materia orgánica en el suelo y fracción volumétrica de agua en el suelo, entre otros); dado que no se conoce esta información particular sobre el suelo y la papa, es necesario estimarlos utilizando otras herramientas.

Para estimar los parámetros desconocidos, se utilizan los datos de la Tabla 12; sin embargo, dada la cantidad limitada de datos de campo sobre la concentración de tiametoxam en los tubérculos de papa, se necesita obtener más datos para una estimación adecuada de los parámetros; por lo tanto, se usa una técnica de regresión polinómica local LOESS (véase la Sección 12) sobre los datos de la Tabla 12 y la teoría de los mínimos cuadrados, como se describe a continuación.

Se utilizarán los *SSR* definidos en la Sección 2.7.2 en dos momentos. En primer lugar, se utiliza en la regresión LOESS (ver Sección 2.7.3) para estimar el intercepto y el alcance en una regresión lineal sobre los datos de campo de la Tabla 12 considerando una función de peso, tal que la función lineal ajustada sea la mejor en el sentido de los mínimos cuadrados. En segundo lugar, se utiliza para estimar los parámetros desconocidos en el modelo (49) minimizando el *SSR*, considerando el conjunto de datos obtenidos por LOESS y funciones de regresión no lineal establecidas.

Se aplica el procedimiento LOESS para obtener nuevos datos de concentración de tiametoxam en tubérculos de papa. Se toman los datos de campo de la Tabla 12, lo que significa que  $n = 3$ ; además, se supone que  $\lambda = 0,75$  lo que nos permite usar dos datos para cada nueva estimación; lo cual significa que  $q = 2$ . Se usa RStudio para aplicar la regresión LOESS usando la función *loess*( $\cdot$ ), que utiliza la función tricúbica ( $W(u) = (1 - u^3)^3$ ) para definir las funciones de peso  $w_k(x) = \left(1 - \left(\frac{|x_k - x|}{d(x)}\right)^3\right)^3$ , donde  $|x_k - x| < d(x)$ , para todo  $x_k$  en la vecindad seleccionada

de  $x$ . La Tabla 13 recolecta los datos obtenidos mediante LOESS.

**Tabla 13**  
*Datos de entrada de LOESS*

Tiempo $t_k$ (días)	Concentración $y_k$ ( $\mu\text{gkg}^{-1}$ )
0	16.39
1	15.179259
2	12.930741
3	11.72
4	11.522245
5	11.012245
6	10.314848
7	9.555102
8	8.857755
9	8.347755
10	8.15

**6.2.2.1. Estimación de parámetros.** Para estimar el parámetro de degradación del plaguicida en los tubérculos de papa  $k_{\text{deg},p}$  se utiliza el método de mínimos cuadrados no lineales (véase la Sección 2.7.2). Para ello, se debe definir una función de regresión  $y = \widehat{C}_p(t, k_{\text{deg},p})$  sobre los datos  $y_k$  de la Tabla 13 tal que  $y_k = \widehat{C}_p(t_k, k_{\text{deg},p}) + \varepsilon_k$ , para  $k = 1, \dots, 11$ . Considerando el escenario de modelado de la concentración de plaguicidas en tubérculos de papa en el que se supone un comportamiento exponencial decreciente de la concentración de plaguicidas en el tubérculo (Abd-Alrahman, 2014), como sigue:

$$\begin{cases} \widehat{C}_p'(t) = -k_{\text{deg},p}\widehat{C}_p(t), \\ \widehat{C}_p(0) = 16.39, \end{cases} \tag{59}$$

donde el valor 16,39 se ha tomado de los datos de campo de la Tabla 13 a  $t = 0$ . Así, se estima  $k_{deg,p}$  tal que minimice la brecha ( $SSR$ ) entre el valor observado (datos de la Tabla 13) y el valor obtenido por la función de regresión  $\widehat{C}_p(t)$  dada por el modelo (59), es decir,

$$\min_{k_{deg,p}} SSR = \min_{k_{deg,p}} \sum_{k=1}^{11} \left( y_k - \widehat{C}_p(t_k, k_{deg,p}) \right)^2 = \min_{k_{deg,p}} \sum_{k=1}^{11} \left( y_k - 16.39e^{-k_{deg,p}t_k} \right)^2. \quad (60)$$

Se utiliza el método Newton para aproximar  $\min_{k_{deg,p}} SSR$ , cuyas iteraciones vienen dadas por

$$k_{deg,p}^{(s+1)} = k_{deg,p}^{(s)} - \frac{SSR'(k_{deg,p}^{(s)})}{SSR''(k_{deg,p}^{(s)})}, \text{ donde}$$

$$\frac{\partial SSR}{\partial k_{deg,p}} = 32.78 \sum_{k=1}^{11} \left( y_k - 16.39e^{-k_{deg,p}t_k} \right) \cdot t_k e^{-k_{deg,p}t_k},$$

y;

$$\frac{\partial^2 SSR}{\partial k_{deg,p}^2} = 32.78 \sum_{k=1}^{11} -y_k t_k^2 e^{-k_{deg,p}t_k} + 32.78 \left( -t_k^2 e^{-2k_{deg,p}t_k} \right).$$

Utilizando el dato inicial de  $k_{deg,p}^{(0)} = 0$ , se realizan 5 pasos de iteración (ver Tabla 14), donde el valor final es  $k_{deg,p} = 0.078947$  en  $SSR = 3.428921$ .

**Tabla 14**  
*Resultado de las iteraciones de minimización (60)*

Iteración ( $s$ )	SSR	Estimación	Convergencia
0	360.7893	0	6.13
1	18.82518	0.05829214	2.02
2	3.532288	0.07713355	$1.72 \times 10^{-1}$
3	3.428986	0.07890152	$4.32 \times 10^{-3}$
4	3.428921	0.07894645	$8.30 \times 10^{-5}$
5	3.428921	0.07894731	$1.59 \times 10^{-6}$

Por otra parte, para estimar  $k_{\text{deg},s}$  se necesita obtener un conjunto de datos sobre la concentración de tiametoxam en el suelo. Puesto que no se poseen datos de campo sobre la concentración de tiametoxam en el suelo, se usan los datos de concentración de plaguicidas en el suelo proporcionales a los reportados por Abd-Alrahman (2014) en su estudio sobre la concentración de tiametoxam en el suelo (véase la Tabla 15). En este caso, de forma similar al caso  $k_{\text{deg},p}$ , se considera la función de regresión dada por la solución del caso crisp del modelo (50), y se estima  $k_{\text{deg},s}$  de forma que minimice el cuadrado de los residuos ( $SSR$ ) entre los valores observados del conjunto de datos y los valores calculados con la función de regresión para obtener el mejor ajuste de la función de regresión a los datos en el sentido de mínimos cuadrados.

**Tabla 15**

*Concentración de tiametoxam en el suelo (Abd-Alrahman, 2014)*

Tiempo (días)	Concentración ( $\mu\text{gkg}^{-1}$ )	
0	7582	45.3
1	4850	48.3542249
2	3700	36.8887902
3	3150	31.4053214
5	1450	14.4564178
7	420	4.1873762
14	30	0.2990983

Para estimar  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$ , se utilizan los parámetros  $k_{\text{deg},p}$ ,  $k_{\text{deg},s}$  previamente estimados, y se minimizan los  $SSR$  (el cuadrado de los residuos) considerando como función de regresión la solución para la concentración de pesticidas en papa del caso crisp del PVIF (49) sobre los datos de la Tabla 13, es decir,

$$\begin{aligned}
 \min_{(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s})} SSR &= \min_{(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s})} \sum_{k=1}^{11} r_k^2 \\
 &= \min_{(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s})} \sum_{k=1}^{11} \left( y_k - \left( \frac{k_{s \rightarrow p} C_{s0}}{k_{p \rightarrow s} + k_{\text{growth}, p} + k_{\text{deg}, p} - k_{\text{deg}, s}} \left( e^{-k_{\text{deg}, s} t_k} - e^{-(k_{p \rightarrow s} + k_{\text{growth}, p} + k_{\text{deg}, p}) t_k} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_{p0} e^{-(k_{p \rightarrow s} + k_{\text{growth}, p} + k_{\text{deg}, p}) t_k} \right) \right)^2 \\
 &= \min_{(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s})} \sum_{k=1}^{11} \left( y_k - \left( \frac{45.3 k_{s \rightarrow p}}{k_{p \rightarrow s} + 0.030347} \left( e^{-0.1876 t_k} - e^{-(k_{p \rightarrow s} + 0.217947) t_k} \right) + 16.39 e^{-(k_{p \rightarrow s} + 0.217947) t_k} \right) \right)^2.
 \end{aligned} \tag{61}$$

En este caso, se utiliza el método Gauss-Newton para aproximar  $\min_{(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s})} SSR$ , cuyas itera-

ciones vienen dadas por  $\begin{pmatrix} k_{s \rightarrow p}^{(s+1)} \\ k_{p \rightarrow s}^{(s+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{s \rightarrow p}^{(s)} \\ k_{p \rightarrow s}^{(s)} \end{pmatrix} - (J_r^T J_r)^{-1} J_r^T r(k_{s \rightarrow p}^{(s)}, k_{p \rightarrow s}^{(s)})$ , donde  $r = [r_1, \dots, r_{11}]^T$ ,

y  $J_r \in \mathbb{R}^{11,2}$  es la matriz jacobiana de  $r$ , dada por  $J_r = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial r_k}{\partial k_{s \rightarrow p}} & \frac{\partial r_k}{\partial k_{p \rightarrow s}} \end{array} \right]_{k=1, \dots, 11}$  con

$$\frac{\partial r_k}{\partial k_{s \rightarrow p}}(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s}) = \frac{45.3}{k_{p \rightarrow s} + 0.030347} \left( e^{-0.1876 t_k} - e^{-(k_{p \rightarrow s} + 0.217947) t_k} \right),$$

y;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_k}{\partial k_{p \rightarrow s}}(k_{s \rightarrow p}, k_{p \rightarrow s}) &= \frac{-45.3 k_{s \rightarrow p}}{(k_{p \rightarrow s} + 0.030347)^2} \left( e^{-0.1876 t_k} - e^{-(k_{p \rightarrow s} + 0.217947) t_k} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{45.3 k_{s \rightarrow p}}{k_{p \rightarrow s} + 0.030347} - 16.39 \right) t_k e^{-(k_{p \rightarrow s} + 0.217947) t_k}.
 \end{aligned}$$

Utilizando los datos iniciales  $k_{p \rightarrow s} = 1$  y  $k_{s \rightarrow p} = 1$ , se realizan 7 pasos de iteración (ver Tabla 16), donde los valores finales son  $k_{p \rightarrow s} = -0.2101313$  y  $k_{s \rightarrow p} = -0.03575658$  en  $SSR = 1.168946$ .

**Tabla 16***Resultado de las iteraciones de minimización (61)*

Iteración ( $s$ )	SSR	Estimación $k_{s \rightarrow p}$	Estimación $k_{p \rightarrow s}$	Convergencia
0	694.4690	1	1	3.67
1	93.79722	0.4001766	0.552406	1.71
2	37.24385	0.0452268	-0.00757589	6.13
3	3.329989	-0.03626096	-0.2045454	1.36
4	1.170877	-0.03613011	-0.2110658	$4.08 \times 10^{-2}$
5	1.168946	-0.03574021	-0.2100982	$6.84 \times 10^{-4}$
6	1.168946	-0.03575724	-0.2101326	$2.65 \times 10^{-5}$
7	1.168946	-0.03575658	-0.2101313	$1.18 \times 10^{-6}$

En el proceso de estimación de  $k_{deg,p}$ ,  $k_{deg,s}$ ,  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$ , se utiliza la función  $nls(\cdot)$  de RStudio. La tabla 17 recoge la estimación de los parámetros que intervienen en el sistema (49).

**Tabla 17***Parámetros del modelo (49) para tiametoxam*

Parámetro	Estimación
$k_{deg,p}$	0.078947
$k_{deg,s}$	0.1876
$k_{growth,p}$	0.1390
$k_{s \rightarrow p}$	-0.03575658
$k_{p \rightarrow s}$	-0.2101313
$\lambda = -[k_{p \rightarrow s} + k_{growth,p} + k_{deg,p}]$	-0.0078157

**Observación 2.** En el análisis anterior los parámetros  $k_{growth,p}$ ,  $k_{deg,p}$ ,  $k_{deg,s}$ ,  $k_{s \rightarrow p}$  y  $k_{p \rightarrow s}$  han sido considerados como números reales; sin embargo, dada la naturaleza no determinista de estos

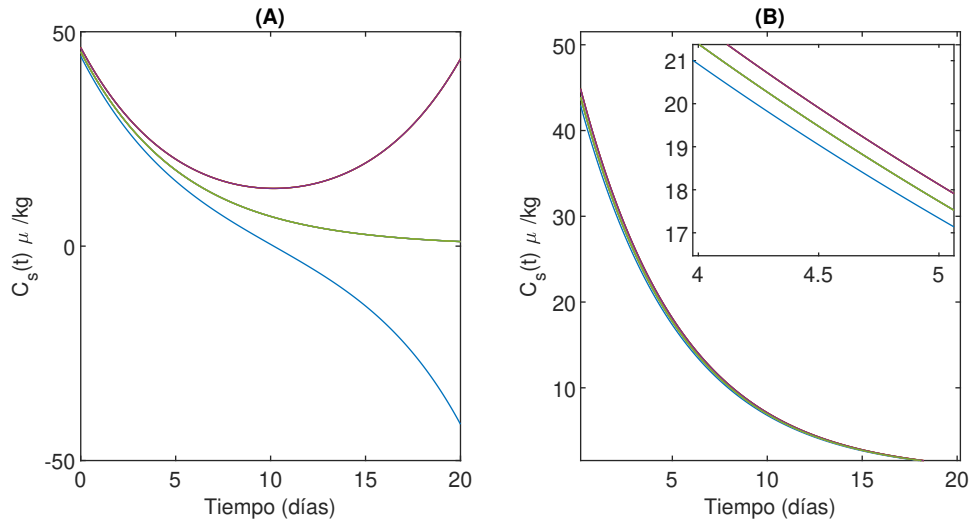
*parámetros podrían ser considerados como números fuzzy, lo que implica un nuevo análisis del problema de valor inicial fuzzy (49).*

**6.2.3. Cálculo de la solución de (49).** Se resuelve el sistema diferencial ordinario fuzzy (49) para el tiametoxam, considerando los datos iniciales como en la Sección 6.2.1 y los parámetros estimados que se muestran en la Tabla 17. Primero se resuelve el sistema para  $C_s(t)$ . La Figura 32 muestra la  $(i)$ - $gH$  solución y la  $(ii)$ - $gH$  solución de (50). En ambos casos, los 1-niveles (curvas verdes) de las  $(i)$  y  $(ii)$ - $gH$  soluciones corresponden al caso crisp, mientras que el soporte viene determinado por las curvas azules y moradas. Se observa que la  $(ii)$ - $gH$  solución para  $C_s(t)$  tiene un comportamiento fuzzy exponencial decreciente, como era de esperar, y su longitud de soporte disminuye, a medida que aumenta el tiempo; mientras que la longitud de soporte de la  $(i)$ - $gH$  solución aumenta, a medida que aumenta el tiempo. En el caso de la  $(i)$ - $gH$  solución, incluso la curva que define su 1-nivel es positiva y converge a cero asintóticamente, la función inferior que describe el soporte de la  $(i)$ - $gH$  solución (curva azul) alcanza valores negativos, lo que no tiene sentido físico.

Ahora, conociendo  $C_s(t)$  se resuelve la ecuación diferencial para  $C_p(t)$ . La solución  $C_p(t)$  implica cuatro casos de acuerdo con el análisis discutido en la Sección 6.1.2, dado que se tienen dos tipos de derivadas tanto para  $C_s(t)$  como para  $C_p(t)$ , y se encuentra  $C_p(t)$  después de sustituir  $C_s(t)$  en la ecuación diferencial de  $C_p(t)$ . Esto genera cuatro posibles soluciones, que se muestran en la Figura 33, a saber, las  $(i)$ - $(i)$ ,  $(i)$ - $(ii)$ ,  $(ii)$ - $(i)$  y  $(ii)$ - $(ii)$ - $gH$  soluciones. La  $(i)$ - $(ii)$ - $gH$  solución y la  $(ii)$ - $(ii)$ - $gH$  solución de (49) muestran un comportamiento fuzzy exponencial decreciente como era de esperar. La  $(i)$ - $(i)$ - $gH$  solución muestra un incremento en el soporte de la solución, incluso la curva que define su 1-nivel es de tipo exponencial (ver Figura 33(A), curva verde). Más aún, la solución alcanza valores negativos para tiempos grandes, lo que no tiene interés físico. El aumento

**Figura 32**

Concentración de plaguicidas en el suelo a lo largo del tiempo



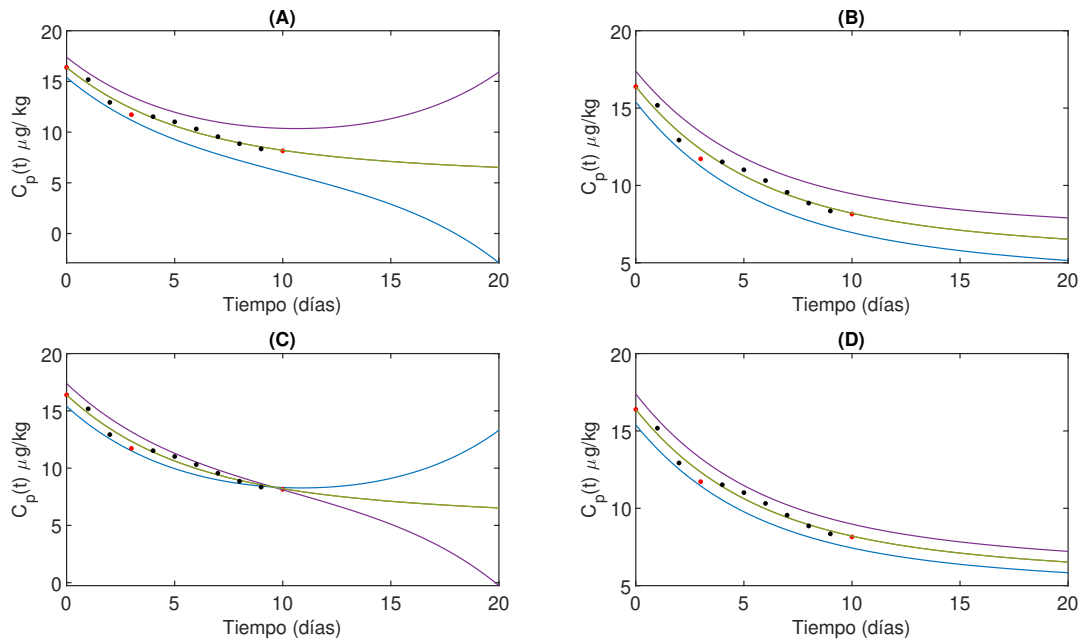
*Nota.* Evolución de  $C_s(t)$ . (A): Evolución de  $C_s(t)$  en el caso de que  $C_s(t)$  sea  $(i)$ - $gH$  diferenciable. (B): Evolución de  $C_s(t)$  en el caso en que  $C_s(t)$  sea  $(ii)$ - $gH$  diferenciable.

del soporte de la solución  $C_p(t)$  se debe al correspondiente aumento del soporte de  $C_s(t)$  como se muestra en la Figura 32(A). La  $(ii)$ - $(i)$ - $gH$  solución no tiene un comportamiento monótono en su soporte; tiene un punto crítico en  $t = t_1 = \frac{\ln(k-\lambda-k_{s \rightarrow p}) - \ln(-k_{s \rightarrow p})}{k-\lambda} \approx 9.55106946$ , donde  $C_p(t_1)$  es un singleton. Para  $t > t_1$  no es difícil comprobar que los  $\alpha$ -niveles  $[C_p(t)]^\alpha = [\underline{C_p(t)}, \overline{C_p(t)}]$  de la  $(ii)$ - $(i)$ - $gH$  solución  $C_p(t)$  no definen un número fuzzy; sin embargo, la familia de  $\alpha$ -niveles dada por  $[\overline{C_p(t)}, \underline{C_p(t)}]$  define una función fuzzy que no es  $(ii)$ - $gH$  diferenciable pero sí es  $(i)$ - $gH$  diferenciable.

En este sentido, los casos que presentan una interpretación física del comportamiento de  $C_p(t)$  vienen dados por los casos  $(i)$ - $(ii)$  (ver Subsección 6.1.2.2) y  $(ii)$ - $(ii)$  (ver Subsección 6.1.2.4).

**Figura 33**

Concentración de plaguicidas en la papa a lo largo del tiempo



*Nota.* Evolución de  $C_p(t)$ . (A): Evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  sean (i)- $gH$  diferenciables. (B): Evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  sea (i)- $gH$  diferenciable y  $C_s(t)$  sea (ii)- $gH$  diferenciable. (C): Evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  sea (ii)- $gH$  diferenciable y  $C_s(t)$  sea (i)- $gH$  diferenciable. (D): Evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  son (ii)- $gH$  diferenciables. En los cuatro casos, cada figura muestra las funciones de soporte ( $\alpha = 0$ ; líneas azul y morada) y altura ( $\alpha = 1$ ; línea verde) de la solución  $C_p(t)$  correspondiente, los puntos en color rojo son los datos de campo mientras que los negros son los datos de la Tabla 13.

### 6.3. Un segundo enfoque. Un modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

Con el fin de establecer un enfoque de modelado alternativo para determinar la degradación de la concentración de tiametoxam en tubérculos de papa, se propone utilizar un modelo basado en reglas fuzzy del tipo TSK para aproximar la variación  $\Delta C_p(t)$ . Se diseña un modelo TSK que permite describir la variación  $\Delta C_p(t)$ . La idea general es utilizar la versión discreta del sistema diferencial (49) creando una secuencia de valores que aproximen la solución  $C_p(t)$ . Para ello, se

toman como variables lingüísticas de entrada la concentración de pesticida en la papa  $C_p$  y la concentración inicial de pesticida en el suelo  $C_s(0) = C_{s_0}$ . A continuación, se definen los términos lingüísticos de la variable  $C_p$  teniendo en cuenta los datos proporcionados por la Tabla 13 y se representan como números fuzzy triangulares y trapezoidales (véase la Figura 34.A) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 C_{p_0} &= \langle 15.1793, 16.39, 17.6007 \rangle, & C_{p_1} &= \langle 13.9685, 15.1793, 16.39 \rangle, \\
 C_{p_2} &= \langle 10.6822, 12.9307, 15.1793 \rangle, & C_{p_3} &= \langle 10.5093, 11.72, 12.9307 \rangle, \\
 C_{p_4} &= \langle 11.3245, 11.5223, 11.72 \rangle, & C_{p_5} &= \langle 10.5022, 11.0123, 11.5223 \rangle, \\
 C_{p_6} &= \langle 9.6176, 10.3149, 11.0123 \rangle, & C_{p_7} &= \langle 8.7954, 9.5551, 10.3149 \rangle, \\
 C_{p_8} &= \langle 8.1604, 8.8578, 9.5551 \rangle, & C_{p_9} &= \langle 7.8378, 8.3478, 8.8578 \rangle, \\
 C_{p_{10}} &= \langle 7.9522, 8.15, 8.3478 \rangle, & C_{p_{11}} &= \langle 0, 0, 7.9523, 8.15 \rangle.
 \end{aligned}$$

Además, se definen los términos lingüísticos de la variable  $C_{s_0}$  mediante los siguientes números fuzzy triangulares y trapezoidales (ver Figura 34.B):

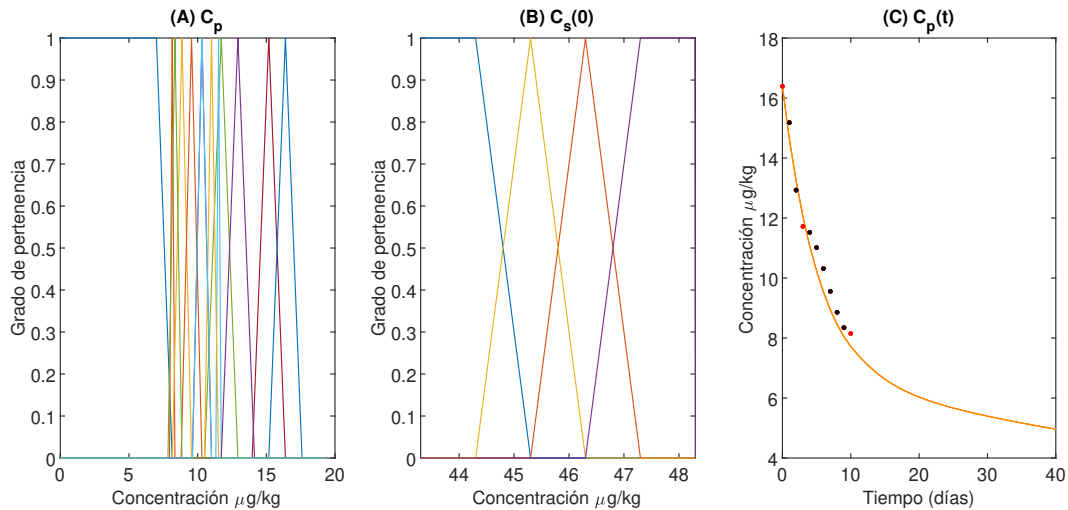
$$\begin{aligned}
 C_{s_l} &= \langle 42.3, 43.3, 44.3, 45.3 \rangle, & C_{s_{ml}} &= \langle 44.3, 45.3, 46.3 \rangle, \\
 C_{s_{mh}} &= \langle 45.3, 46.3, 47.3 \rangle, & C_{s_h} &= \langle 46.3, 47.3, 48.3, 49.3 \rangle.
 \end{aligned}$$

Para definir las reglas de inferencia, se consideran todas las combinaciones posibles de los términos lingüísticos de  $C_p$  con los términos lingüísticos de  $C_{s_0}$ . Así, se definen 48 reglas de inferencia cuyas partes antecedentes se presentan en la Tabla 18. Se define la función consecuente  $\Delta C_p(t)$  para cada regla de inferencia número  $j$ , para  $j = 1, \dots, 48$  como sigue:

$$\Delta_j C_p(t) = k_{s \rightarrow p} \mu_{j_{C_{s_0}}}(C_{s_0}) C_{s_0} e^{-k_{\text{deg},s} t} + \lambda \mu_{j_{C_p}}(C_p(t)) C_p(t),$$

**Figura 34**

*VARIABLES DE ENTRADA Y SALIDA EN EL MODELO TSK*



*Nota.* Segundo enfoque de modelado. (A) Variable lingüística concentración de plaguicida en la papa. (B) Variable lingüística concentración inicial de pesticida en el suelo. (C) La curva naranja es la solución  $C_p(t)$  obtenida mediante el modelo TSK diseñado; los puntos en color rojo son los datos de campo mientras que los negros son los datos de la Tabla 13.

donde  $\mu_{j_{C_{s_0}}}(C_{s_0})$  y  $\mu_{j_{C_p}}(C_p(t))$  representan el grado de pertenencia de  $C_{s_0}$  y  $C_p(t)$  al conjunto de términos lingüísticos en la variable  $C_{s_0}$  y  $C_p$  respectivamente implicados en cada regla  $j$  según la Tabla 18.

Siguiendo el proceso de inferencia de la Sección 6.3, la variación  $\Delta C_p(t)$  se calcula como

$$\Delta C_p(t) = \frac{\sum_{(j=1)}^{40} (w_j \Delta_j C_p(t))}{\sum_{(j=1)}^{40} w_j}, \quad (62)$$

donde  $w_j = i(\mu_{j_{C_{s_0}}}(C_{s_0}), \mu_{j_{C_p}}(C_p(t))) = \min\{\mu_{j_{C_{s_0}}}(C_{s_0}), \mu_{j_{C_p}}(C_p(t))\}$ . Se utiliza el  $\Delta C_p(t)$  estimado por el modelo TSK diseñado en (62) para aproximar  $C_p(t)$  por  $C_p(t+1) = C_p(t) + \Delta C_p(t)$ , de lo que se obtiene la curva mostrada en la Figura 34.C.

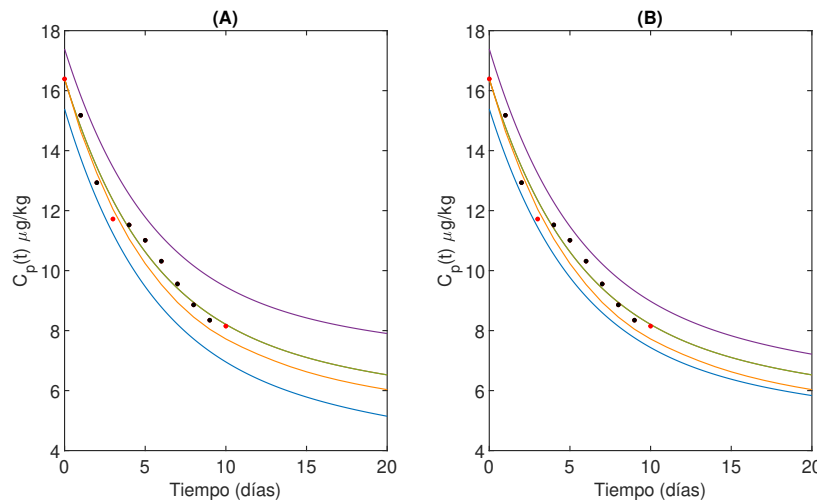
**Tabla 18***Antecedente de las reglas de inferencia.*

n°	Regla	n°	Regla
1	Si $C_p$ es $C_{p_0}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	25	Si $C_p$ es $C_{p_0}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
2	Si $C_p$ es $C_{p_1}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	26	Si $C_p$ es $C_{p_1}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
3	Si $C_p$ es $C_{p_2}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	27	Si $C_p$ es $C_{p_2}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
4	Si $C_p$ es $C_{p_3}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	28	Si $C_p$ es $C_{p_3}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
5	Si $C_p$ es $C_{p_4}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	29	Si $C_p$ es $C_{p_4}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
6	Si $C_p$ es $C_{p_5}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	30	Si $C_p$ es $C_{p_5}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
7	Si $C_p$ es $C_{p_6}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	31	Si $C_p$ es $C_{p_6}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
8	Si $C_p$ es $C_{p_7}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	32	Si $C_p$ es $C_{p_7}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
9	Si $C_p$ es $C_{p_8}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	33	Si $C_p$ es $C_{p_8}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
10	Si $C_p$ es $C_{p_9}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	34	Si $C_p$ es $C_{p_9}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
11	Si $C_p$ es $C_{p_{10}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	35	Si $C_p$ es $C_{p_{10}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
12	Si $C_p$ es $C_{p_{11}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_l}$	36	Si $C_p$ es $C_{p_{11}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{mh}}$
13	Si $C_p$ es $C_{p_0}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	37	Si $C_p$ es $C_{p_0}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
14	Si $C_p$ es $C_{p_1}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	38	Si $C_p$ es $C_{p_1}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
15	Si $C_p$ es $C_{p_2}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	39	Si $C_p$ es $C_{p_2}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
16	Si $C_p$ es $C_{p_3}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	40	Si $C_p$ es $C_{p_3}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
17	Si $C_p$ es $C_{p_4}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	41	Si $C_p$ es $C_{p_4}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
18	Si $C_p$ es $C_{p_5}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	42	Si $C_p$ es $C_{p_5}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
19	Si $C_p$ es $C_{p_6}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	43	Si $C_p$ es $C_{p_6}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
20	Si $C_p$ es $C_{p_7}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	44	Si $C_p$ es $C_{p_7}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
21	Si $C_p$ es $C_{p_8}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	45	Si $C_p$ es $C_{p_8}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
22	Si $C_p$ es $C_{p_9}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	46	Si $C_p$ es $C_{p_9}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
23	Si $C_p$ es $C_{p_{10}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	47	Si $C_p$ es $C_{p_{10}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$
24	Si $C_p$ es $C_{p_{11}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_{ml}}$	48	Si $C_p$ es $C_{p_{11}}$ y $C_{s_0}$ es $C_{s_h}$

### 6.4. Comparación de los dos enfoques

La Figura 35 muestra la comparación entre  $C_p(t)$  modelada mediante ecuaciones diferenciales ordinarias fuzzy (ver Sección 6.1, más concretamente los casos de las Subsecciones 6.1.2.2 y 6.1.2.4), y la  $C_p(t)$  modelada mediante un modelo de lógica fuzzy (modelo TSK; ver Sección 6.3). Se observa que el  $C_p(t)$  obtenido por el enfoque de lógica fuzzy (modelo TSK, ver Figura 34) se ajusta dentro del soporte de solución de los dos casos con interpretación física en el modelo de ecuaciones diferenciales fuzzy, describiendo un comportamiento similar y consistente de  $C_p(t)$  en ambos enfoques.

**Figura 35**  
*Primer enfoque vs segundo enfoque*



*Nota.* Comparación de los dos enfoques de modelado. (A): La evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  sea  $(i)$ - $gH$  diferenciable y  $C_s(t)$  sea  $(ii)$ - $gH$  diferenciable. (B): La evolución de  $C_p(t)$  en el caso en que  $C_p(t)$  y  $C_s(t)$  sean  $(ii)$ - $gH$  diferenciables. Cada figura muestra las funciones de soporte ( $\alpha = 0$ ; líneas azul y morada) y de altura ( $\alpha = 1$ ; línea verde) de la solución en los casos  $(i)$ - $(ii)$ - $gH$  y  $(ii)$ - $(ii)$ - $gH$  derivable con la curva de  $C_p(t)$  basada en el modelo TSK diseñado (curva naranja); los puntos en color rojo son los datos de campo mientras que los negros son los datos de la Tabla 13.

### 6.5. Cultivo de papa Vereda el Portillo en Guaca, Santander

Santander es uno de los 9 departamentos más importantes para la producción de papa en Colombia. En el abordaje del problema del problema de modelado en este capítulo, se tomaron y tuvieron en cuenta los datos (ver Tabla 12) obtenidos mediante estudios de laboratorio para detección de químicos, después de la última fumigación antes de la cosecha, en muestras de tubérculos en un cultivo de papa, de la variedad Tocana, en la finca Plan del Agua, en la Vereda el Portillo, del municipio de Guaca, Santander, la cual se encuentra ubicada a una altura de 3700 msnm, con una temperatura promedio de 14°C (ver Figura 36).

#### Figura 36



*Cultivo de papa Vereda el Portillo*



**6.5.1. Experimento de campo.** Por otro lado, con el fin de obtener datos sobre la importancia y el efecto del número de fumigaciones sobre la productividad del cultivo de papa, se sembraron 25 plantas de papa apartadas del cultivo principal, en un total de 5 surcos con 5 plantas

de papa cada uno. Cada surco cultivado en un suelo de textura franco-arenosa, adecuada para el cultivo de papa, con un pH de 4.6, es decir un suelo muy fuertemente ácido, con contenidos medios en materia orgánica y nitrógeno. Niveles bajos en calcio, magnesio, boro y cobre, y niveles altos en fósforo, potasio, hierro y aluminio, adecuados en manganeso, zinc, azufre y sodio (ver Figura 37). Por lo cual se realizó una preparación del suelo que incluyó el uso de Cal Dolomita antes de la siembra.

**Figura 37**  
*Resultados análisis de suelo*

	<b>LABORATORIO QUÍMICO DE SUELOS</b> <b>UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER</b>		Código: <b>F-AA-03</b>
	<b>RESULTADO ANÁLISIS DE SUELOS</b>		Versión: <b>02</b>
			Página 1 de 1

<b>Ciente</b>		<b>Fecha de recepción de la muestra</b>	Febrero 21 de 2023	<b>Departamento</b>	Santander	<b>Finca</b>	Plan del Agua
<b>Entidad</b>	-----	<b>Fecha de Análisis</b>	Febrero - Marzo de 2023	<b>Municipio</b>	Guaca	<b>Cultivo</b>	Papa Establecer
<b>Dirección</b>		<b>Fecha de Emisión de Resultado</b>	Marzo 13 de 2023	<b>Vereda</b>	Portillo		
<b>Análisis solicitado</b>	<b>Caracterización</b> X	<b>Elementos menores</b> X	<b>Azufre</b> X	<b>C.I.C</b>	X	<b>C.E</b>	X

**RESULTADO DEL ANÁLISIS DE SUELOS**

Código muestra	pH unid	%C	P (ppm)	Ca	Mg	Na	K	Al	% Arena	% Limo	% Arcilla	Textura	B	Fe	Mn	Cu	Zn	S	CIC meq/100g	CE mmhos/cm
				meq/100g suelo									(ppm)							
23-0063	4,6	4,46	64,2	3,68	0,59	0,07	0,75	2,6	62	30	8	Fco-Arenoso	0,09	455	32,8	0,76	3,34	8,11	34,8	0,09

PARÁMETROS	MÉTODO ANALÍTICO	NOTAS	ABREVIATURAS
pH: Potencial de Hidrógeno C: Carbono P: Fósforo disponible Ca, Mg, Na, K % Textura B: Boro Fe, Mn, Cu, Zn S: Azufre CIC: Capacidad de Intercambio Catiónico CE: Conductividad Eléctrica	Electrométrico: Relación 1:1 Agua destilada Colorimétrico: Walkley Black K2Cr2O7-H2SO4 Colorimétrico: Bray II. HCl 0,1 N-NH4F 0,03 N Absorción Atómica; Extracción: Acetato de Amonio Bouyoucos: Agua destilada Colorimétrico: Extracción Fosfato Monocálcico Absorción Atómica: Extracción con DTPA Turbidimétrico: Extracción Fosfato Monocálcico Extracción: Acetato de Amonio Electrométrico: Agua destilada	<b>Nota 1:</b> Prohibida la reproducción total o parcial de este documento. <b>Nota 2:</b> Estos resultados son válidos únicamente para las muestras suministradas por el cliente. <b>Nota 3:</b> Los métodos analíticos aplicados en el laboratorio son válidos únicamente para muestras de suelos, y no a otros materiales de características físicas similares. <b>Nota 4:</b> La contramuestra de la muestra analizada se almacenará por un periodo de tiempo de 2 meses a partir de la fecha de emisión del resultado. <b>Nota 5:</b> Información y muestra suministrada por el cliente.	N.D: No Detectable a la mínima concentración establecida por el método. N.S: No Suministrado por el Cliente. N.A: No Aplica. N.S.C: No Solicitado por el Cliente.  <div style="text-align: center;"> <b>Luz Yolanda Vargas Fiallo</b>                      Directora                      Química. M.Sc Química UIS                 </div>
<b>OBSERVACIONES:</b>			

Ciudad Universitaria Carrera 27 Calle 9 - Edificio CICEIPA / Conmutador: (7) 6344000 Ext. 2499-1182 Telefax: (7) 6324861  
 E-mail: [labquimicodesuelos@uis.edu.co](mailto:labquimicodesuelos@uis.edu.co) y [laboratorioquimicodesuelosuis@yahoo.com](mailto:laboratorioquimicodesuelosuis@yahoo.com)  
 Bucaramanga - Colombia

En cada surco se realizó una variación en el tratamiento químico de plagas original del cultivo que refiere 8 fumigaciones, variando el número de fumigaciones realizadas durante el desarrollo del cultivo. La Tabla 19 especifica los tratamientos y la Figura 38 muestra los 5 surcos.

**Observación 3.** Durante el desarrollo del cultivo en el municipio de Guaca, Santander el día 30 de agosto de 2023 ocurrió un fenómeno climático donde se registro la caída de granizo, el cual afecto el desarrollo de las plantas de papa y finalmente el rendimiento del cultivo, especialmente los 5 surcos apartados (ver Figura 39).

**Tabla 19**

*Tratamientos de cada surco*

Surco	Surco 1	Surco 2	Surco 3	Surco 4	Surco 5
Nº de fumigaciones	1	2	4	4 1/2 <sup>1</sup>	7

<sup>1</sup> 1/2 refiere a una fumigación usando la mitad de la concentración de una fumigación regular.

**Figura 38**

*Surcos del experimento del 1 al 5*



Surco 1

Surco 2

Surco 3 y 4

Surco 5

**6.5.2. Resultados.** La cosecha del cultivo fue realizada en diciembre de 2023. En los 5 surcos del experimento, se cosechó cada planta y se obtienen datos de el número de plantas con producción (ver Figura 40), la producción (número de papas obtenidas), el diámetro del tubérculo, y el número de tubérculos afectados por gusano blanco (ver 20).

En los resultados, se observa el efecto del control químico del cultivo en el desarrollo de la planta de papa, tanto a nivel de producción (cantidad de tubérculos obtenidos por surco), como a nivel de calidad (engrosamiento, e inocuidad del tubérculo cosechado). Es importante tener en cuenta que los resultados se vieron afectados por variables externas como se mencionó en la Observación 3. Para continuar con el estudio de campo y obtener resultados concluyentes, sería ideal tener un cultivo con un mayor número de plantas para el estudio, de manera que se pudiera controlar los tratamientos sobre los diferentes surcos y determinar no solamente el efecto en la producción final sino en las diferentes etapas de desarrollo de la planta. De igual manera, en el estudio de la degradación de plaguicidas en papa, sería ideal el análisis de laboratorio de una mayor cantidad de muestras de tubérculos, considerando más tiempos después de la fumigación.

**Figura 39**  
*Surcos de papa afectados por la granizada*



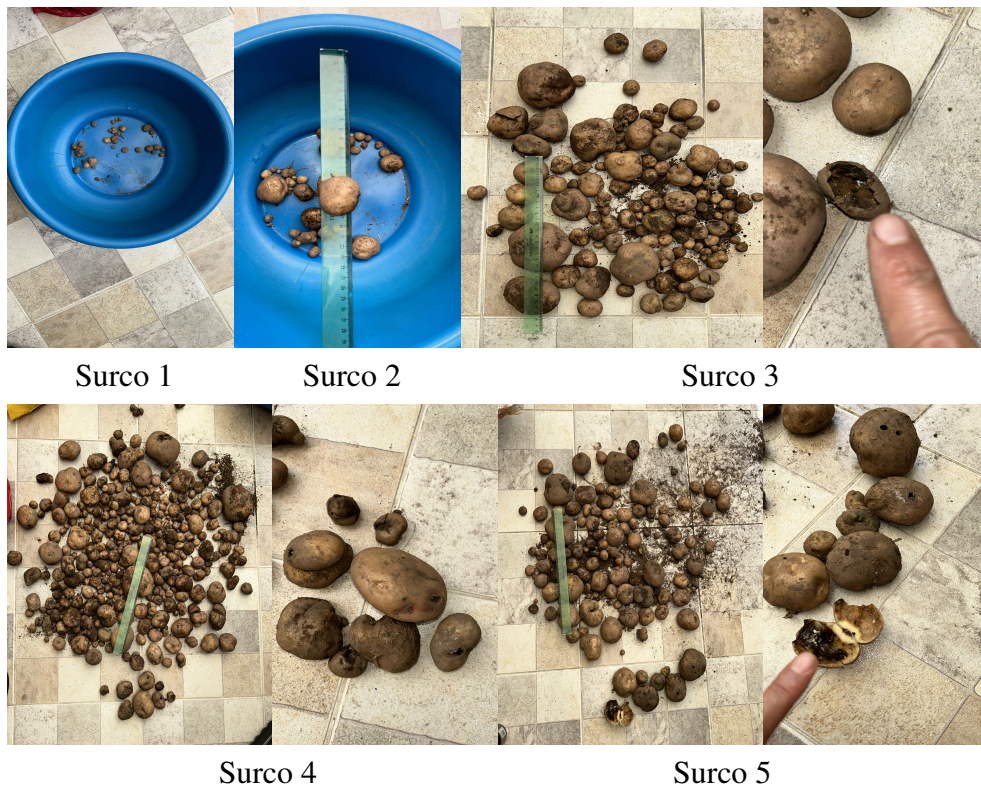
**Tabla 20**  
*Producción por surco*

Surco	N° de plantas salvadas	Producción	Diámetro (cm) <sup>1</sup>	N° papas afectadas
Surco 1	1	24	1.5	0
Surco 2	1	30	5	0
Surco 3	3	96	9	1
Surco 4	3	160	8	8
Surco 5	2	100	8	8

<sup>1</sup> El diámetro máximo de una papa en cada surco.

**Figura 40**

*Producción de cada uno de los surcos*

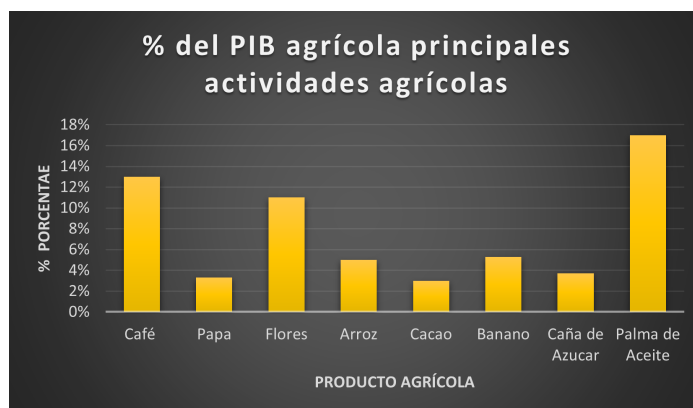


## 7. Otros cultivos agrícolas

Como se ha resaltado en este documento, la actividad agrícola es fundamental para la economía Colombiana, en particular, para el departamento de Santander. En esta sección se quiere dar a entender como las herramientas matemáticas fuzzy usadas en los problemas abordados a lo largo de esta tesis, pueden ser de gran utilidad en el abordaje de otros problemas y dinámicas del entorno agrícola de cultivos como el café, la caña de azúcar, el maíz, e incluso, cultivos relativamente nuevos en el país como lo es el cultivo de arándanos, teniendo en cuenta el contexto de cada cultivo y de cada problema.

### Figura 41

*Principales cultivos agrícolas en Colombia*

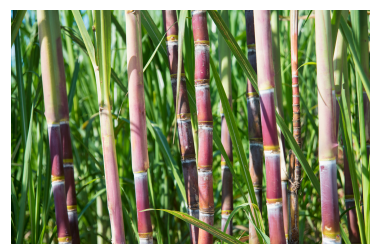


### 7.1. La caña de azúcar

La caña de azúcar (*Saccharum officinarum L.*) es originaria de Nueva Guinea. En América se extiende desde Santo Domingo hacia el Caribe y Sur América donde se ha desarrollado como un cultivo de gran relevancia económica y altamente demandado. En Colombia, se producen aproximadamente 21.56 millones de toneladas de caña (CONADEUCA, 2015), las cuales son usadas en la

### Figura 42

*Caña de azúcar*



*Nota.* Tomada de CONADEUCA (2015).

producción de azúcar, energía, alcohol carburante y subproductos como el bagazo y la vinaza. La caña de azúcar está constituida básicamente por agua y carbohidratos, los cuales están presentes de forma soluble (sacarosa, glucosa, fructuosa) e insoluble en agua (la fibra) (Pujol *et al.*, 2008). Santander tiene un amplio potencial para la producción de caña de azúcar, para el 2022 presentaba 25.538 hectáreas sembradas y una producción anual de 234.224 toneladas (UPRA, 2022).

**7.1.1. Problema: estimación del porcentaje de sacarosa de una planta de caña de azúcar.** El precio y por lo tanto el beneficio económico obtenido de la caña de azúcar viene determinado por el peso de la caña y la concentración de sacarosa en el jugo de la caña de azúcar, por lo cual con el fin de aumentar la producción y los beneficios de los productores es necesario mejorar el rendimiento y la calidad de la caña (Watanabe *et al.*, 2016). Para los productores, el controlar y poder estimar la concentración de sacarosa en un cultivo es beneficioso y necesario con el fin de prepararse para el manejo del producto. Una mala estimación del porcentaje de sacarosa en la caña, puede incurrir en grandes pérdidas económicas para los productores.

El rendimiento de la caña de azúcar y la acumulación de sacarosa están significativamente influenciadas por estreses bióticos y abióticos (Mehdi *et al.*, 2024), y factores como la temperatura, la luz, el agua, las precipitaciones y los fenómenos meteorológicos extremos; son cruciales para el rendimiento y la concentración de sacarosa (Zhao y Li, 2015). En la literatura se presenta información expresada lingüísticamente dada por la experiencia y estudios estadísticos (CENICAÑA, 1995; Mehdi *et al.*, 2024; Samuels *et al.*, 1952) sobre el efecto de estos factores en la concentración de sacarosa y el rendimiento de la caña de azúcar. Por lo cual, una alternativa de modelado matemático para la estimación del porcentaje de sacarosa en la caña, es el uso y el diseño de un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy de tipo Mamdani, donde las variables de entrada sean, por ejemplo, la temperatura y la humedad relativa, y la variable de salida sea el porcentaje de concen-

tración de sacarosa de la caña, y con reglas de inferencia fuzzy definidas a partir del conocimiento expresado en la literatura y la experiencia (CENICAÑA, 1995; Mehdi *et al.*, 2024; Samuels *et al.*, 1952).

## 7.2. Café

El cultivo del café en Colombia se encuentra centralizado sobre las dos vertientes de las tres grandes cordilleras del país, contando con 7.300.000 hectareas que están dispuestas para la producción del café (AsoExport, s.f). Entre los principales problemas fitosanitarios del cultivo del café en el país se encuentran las plagas como la broca del café (*Hypothenemus hampei*) (Coleoptera: Curculionidae), el minador de las hojas (*Leucoptera coffeella*) (Lepidoptera: Lyonetiidae), las cochinillas harinosas de las raíces, en especial las especies *Puto barberi* y *Pseudococcus jackbeardsleyi* Gimpel & Millar (Hemiptera: Pseudococcidae), la arañita roja (*Acari: Tetranychidae*) y la chinche de la chamusquina del café (*Hemiptera: Miridae*) (Benavides Machado *et al.*, 2013).

**Figura 43**  
Café



*Nota.* Tomada de Vanegas (2018).

En Santander el café es parte fundamental de su economía, representando el 23% de la producción agrícola departamental, haciendo presencia en todas las provincias de Santander con 55.300 hectáreas en 74 municipios, donde Socorro y municipios cercanos presentan la mayor producción, constituyéndose como una de las caficulturas más jóvenes y productivas del país, siendo el sexto departamento a nivel de producción con un 6.17% de la producción nacional (FEDECAFÉ, 2024).

**7.2.1. Problema: determinación de la severidad de la Roya del café.** La roya del café es una enfermedad causada por el hongo *Hemileia vastatrix*, la cual puede llegar a causar grandes pérdidas de rendimiento del cultivo al reducir la superficie foliar sana de la planta del café. La vigilancia del cultivo ante posibles brotes de esta enfermedad es fundamental para asegurar un cultivo sano y beneficioso para el productor, en este sentido, ante la aparición de la enfermedad, la evaluación de la severidad de la infección por roya del café en el cultivo, es fundamental, para una toma de decisiones rápida y eficaz sobre su control.

La severidad de la roya en el café, es decir la gravedad de la enfermedad es afectada por los cambios en las condiciones ambientales durante los meses de cultivo. Pale-Ezquivel *et al.* (2023) determinan que el porcentaje de severidad de la enfermedad en la planta de café puede ser explicado por la temperatura media, la temperatura mínima, la temperatura máxima y el promedio de las precipitaciones en el mes. Con el fin de manejar la incertidumbre relacionada al determinar un porcentaje de severidad, dada la subjetividad de los datos de severidad y la información climática que puede presentar inconsistencias y cierta imprecisión en su medición, una herramienta que puede ser útil es el diseño de un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy que puede ser de tipo TSK, donde las variables de temperatura y precipitación sean representadas por términos lingüísticos y relacionados en los reglas de inferencia fuzzy haciendo uso de los trabajos y estudios estadísticos de (Pale-Ezquivel *et al.*, 2023; Otiniano *et al.*, 2019).

#### **Figura 44**

*Roya del café*



*Nota.* Tomada de INVESA.

**7.2.2. Problema: determinación de la incidencia de la roya del café y estimación de la tasa de infección.** La determinación de la incidencia y por ende el progreso de la enfermedad en el cultivo, es importante para el entendimiento de la dinámica de la enfermedad del cultivo. La evaluación de la inci-

dencia puede realizarse teniendo en cuenta 2 condiciones, a saber, el espaciado entre hileras y el rendimiento (ó carga de fruta). Hinnah *et al.* (2018) define la combinación de dos formas de espaciado de hileras y dos condiciones de cargas de frutos, obteniendo la evaluación de 4 casos, a saber, una alta carga de frutos, y un espacio ancho entre hileras (HW); una alta carga de frutos, y un espacio angosto (HN); una baja carga de frutos, y un espacio ancho (LW); y una baja carga de frutos, y un espacio angosto (LN). En cuanto mayor es la carga frutal, mayor es la incidencia de la enfermedad, ya que en estas condiciones la planta tiene su sistema de defensa debilitado (Kushalappa, 1989; Meira *et al.*, 2009). Así, partiendo de los resultados de Hinnah *et al.* (2018) se puede diseñar un modelo de tipo Mamdani, considerando como variables de entrada el espaciado entre hileras, el rendimiento por planta, así como el tiempo del cultivo, de manera que se busque como variable de salida la incidencia de la roya en el cultivo de café en el tiempo, definiendo niveles de incidencia, y estableciendo las reglas de inferencia, a partir de los datos, información, resultados y regresiones de Hinnah *et al.* (2018). Permitiendo, obtener un mecanismo que permita tomar decisiones dependiendo de la incidencia de la roya en el cultivo.

Otro problema relevante para entender el desarrollo de la enfermedad en el cultivo de café y crear un sistema de alerta para la toma de decisiones, es la estimación de la tasa de infección aparente de la roya del café. En Hinnah *et al.* (2018) se hace uso de una base de datos sobre la incidencia de 1998 a 2017 en cultivos de café en Brasil, estimando la tasa de infección aparente a partir un modelo ajustado a la incidencia de la enfermedad (Modelo Gompertz). Además, establece que las variables de temperatura media, temperatura mínima, humedad relativa, y precipitación son significantes en la explicación de la tasa de infección aparente de la roya. Luego, haciendo uso de las variables de espaciado y rendimiento se puede usar un modelo TSK para la estimación de la tasa de infección de la roya (siguiendo un camino similar al realizado en el Capítulo 3), donde las funciones en las reglas de inferencia fuzzy son dadas a partir de los modelos ajustados por Hinnah

*et al.* (2018).

### 7.3. Cacao

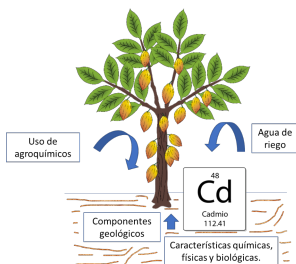
El cacao (*Theobroma cacao L.*) es un cultivo perenne que pertenece a la familia de los Esterculiaceae, es una planta que produce flores y frutas en el tallo y ramas (Antolinez Sandoval *et al.*, 2020). Latinoamérica produce cerca del 15% de la producción mundial de cacao. En Colombia, existen alrededor de 65 mil familias productoras de cacao, con una producción promedio nacional para el 2020 fue de 60 mil toneladas, donde el grano colombiano es reconocido a nivel mundial por su fino sabor y aroma (FINAGRO, 2020). Santander constituye el primer productor de cacao en Colombia, en los municipios de San Vicente de Chucurí, Betulia, Zapatoca y Girón por su producción y calidad. Para el 2022 Santander presentaba 60.078 hectáreas sembradas y una producción de 35.775 toneladas (UPRA, 2022)

**Figura 45**  
Cacao



*Nota.* Tomada de FEDECA-CAO (2023).

**Figura 46**  
El cadmio en granos de cacao



*Nota.* Tomada de FEDECA-CAO (2023).

#### 7.3.1. Problema: el cadmio en suelo y cadmio en el cacao.

En Sudamérica el cultivo de cacao enfrenta numerosos retos, entre los más difíciles se encuentra la acumulación elevada de cadmio (Cd) en los granos de cacao, la cual puede tener efectos nocivos en la salud humana y afectar la exportación del producto (Oliva *et al.*, 2020). Los niveles de cadmio en los granos de cacao dependen de una serie de factores, características químicas, físicas y biológicas del suelo; aspectos geológicos (el origen del material del suelo); la contaminación por uso de agroquímicos o agua de riego con alto contenido de cadmio. Por lo cual, el estudiar la concentración de cadmio en el suelo de

cultivo es relevante para el estudio de la concentración de cadmio en el grano de cacao (Chavez *et al.*, 2015). Teniendo en cuenta que en la movilidad y disponibilidad de metales pesados en el suelo intervienen características como el pH, la cantidad de materia orgánica, los óxidos de Fe y Mn y el contenido de arcilla (Alloway, 2013). Se pueden establecer relaciones que permitan definir reglas fuzzy a partir de los datos, resultados estadísticos e información obtenida en (Huamaní-Yupanqui *et al.*, 2012; Chavez *et al.*, 2015; Rofner, 2018; Arévalo-Gardini *et al.*, 2016; Edilberto, 2019) para determinar el nivel de contaminación por Cadmio e inclusive otro tipo de metales pesados como el plomo, en el suelo, diseñando un modelo de reglas fuzzy de tipo Mamdani, que permita definir el nivel de contaminación del metal en el suelo, y comenzar a inferir la contaminación en el grano.

#### 7.4. Maíz

El cultivo de maíz (*Zea mays L.*) es una planta de la familia Poaceae. En Colombia, se siembra alrededor de 390 mil hectáreas de Maíz en 21 departamentos. Siendo Córdoba, Meta, Huila, Sucre y Tolima los departamentos con mayor superficie sembrada. Para el 2023 se cosecharon 1.010.442 toneladas de maíz amarillo y 594.778 de maíz blanco (Fenalce, 2023). Los santanderes aportan el 8% de la producción nacional en maíz tradicional y 0.9% en maíz tecnificado, donde para el 2022 Santander presentaba 9.434 hectareas de maíz sembradas con una producción de 18.921 toneladas (UPRA, 2022).

**Figura 47**  
Maíz



*Nota.* Tomada de Fenalce (2023).

**7.4.1. Problema: control del peso del grano del maíz.** El valor en el mercado del maíz viene dado principalmente por el peso del grano, por tanto para obtener beneficios económicos del cultivo es necesario conocer los factores que puedan afectar este factor. En Coronado *et al.* (2012) se establece que el rendimiento del grano del maíz (RG) es determinado

por el número de granos por unidad de superficie (NG) y del peso individual del grano (PIG) cosechado. El peso que puede alcanzar el grano difiere del peso que alcanza en su madurez fisiológica, debido a factores agronómicos y ambientales (fecha de siembra, densidad de población, nitrógeno disponible, temperatura, estrés hídrico) y a factores intrínsecos del genotipo (ciclo ontogénico, relaciones fuente-demanda, tolerancia a estrés biótico y abiótico). El estudio del crecimiento del grano de maíz se basa en el periodo efectivo de llenado del grano (PELLG) y la tasa de llenado del grano (TLLG), la cual se define como la cantidad de materia seca acumulada en el grano por unidad de tiempo. En el proceso de estimación del peso de llenado del grano (PSG), puede ser usado un modelo TSK (similar al diseñado en los Capítulos 3 y 5), usando como variables de entrada el TLLG, el PELLG y el tiempo térmico acumulado (TT) definido como la diferencia entre la temperatura media del aire y la temperatura base ( $0^{\circ}\text{C}$ ), a partir de los datos y los modelos de regresión de Corona-Mendoza *et al.* (2012) para definir las reglas de inferencia fuzzy.

### 7.5. Arándonos

El arándano (*Vaccinium corymbosum L.*) pertenece a la familia Ericaceae, catalogada como una planta caducifolia cuyo fruto es muy apetecido por ser bajo en calorías y sodio, siendo una fuente importante de fibras, pectina y vitamina C (Leguizamó, 2021). Es un cultivo de reciente producción en Colombia, actualmente se han establecido cultivo en Antioquia, Cundinamarca y Boyacá, donde se manejan variedades de arándano como el Arándano bajo (*Vaccinium angustifolium Alton*), el Arándano ojo de conejo (*Vaccinium ashei Reade*) y el Arándano alto (*Vaccinium Corymbosum L.*) (INTAGRI, 2017).

**Figura 48**  
Arándonos



Nota. Tomada de INTAGRI (2017).

**7.5.1. Problema: degradación cinética de fungicidas en arándano.** El cultivo de arándanos es frecuentemente afectado por enfermedades causadas por hongos y la contaminación por micotoxinas, por lo cual es fundamental las aplicaciones de fungicidas como el azoxystrobin, el boscalid, el cyprodinil, el fludioxonil y el pyraclostrobin, cuyos residuos pueden tener repercusiones en los rendimientos productivos y crear dificultades para la exportación. En este sentido la evaluación de la cinética de degradación de estos fungicidas es fundamental, para ello siguiendo las herramientas utilizadas en el Capítulo 6, se puede utilizar un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias fuzzy adaptadas al contexto de los arándanos y los datos del problema (Hetz *et al.*, 2004; Munitz, 2012; Leguízamo, 2021; Alvarez, 2021).

## 8. Conclusiones

En esta tesis se estudiaron algunas dinámicas agrícolas relacionadas con la vigilancia y el control de plagas, particularmente en el cultivo de papa, aplicando herramientas de la lógica y el análisis fuzzy. Las principales conclusiones de este trabajo de investigación son las siguientes:

1. Se diseñó un modelo basado en reglas de inferencia fuzzy de tipo Takagi–Sugeno–Kang para estimar la tasa intrínseca de crecimiento del gusano blanco en el cultivo de papa en función de la temperatura.
2. Se resolvió un problema de valor inicial fuzzy para describir la evolución de la población del gusano blanco de la papa en el cultivo, cuando el cultivo no está sometido a un control de plagas.
3. Se realizó un análisis teórico relativo a la existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial impulsivos fuzzy en el sentido de la derivada generalizada de Hukuhara, considerando la variación en los tiempos de impulso a partir de la diferencia generalizada de Hukuhara. Se demostraron varios teoremas de existencia y unicidad de solución utilizando herramientas de punto fijo para funciones débilmente contractivas en conjuntos parcialmente ordenados.
4. Se propuso un marco de modelado para describir la dinámica de poblaciones con datos y parámetros iniciales fuzzy, cuando se producen uno o más eventos de control, en diferentes tiempos, que fuerzan el decrecimiento de la población, combinando la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas y las ecuaciones diferenciales fuzzy.
5. Se modeló la dinámica poblacional de la polilla del tubérculo de papa en un cultivo de papa en el cual se lleva a cabo con control químico, para ello:



la plaga en el cultivo, se puede conocer el crecimiento de la población en las semanas siguientes, y con esta información, el agricultor podría decidir oportunamente sobre el tiempo y la forma de control adecuada. Además, el estudio del comportamiento de degradación de químicos usados en la fumigación en el tubérculo de papa, le permitirá al agricultor decidir el mejor momento de cosecha de manera que el producto sea apto para el consumo humano. El modelado matemático arrojó que aproximadamente después de 12 días a partir de la última fumigación, el tubérculo está con la concentración de tiametoxam abajo del umbral permitido por las organizaciones que regulan los límites máximos de concentración, y en consecuencia, está apto para consumo.

10. Se establecieron algunas posibles aplicaciones de las herramientas de lógica y análisis fuzzy, desarrolladas en esta tesis, para el estudio de otros cultivos agrícolas.

### Referencias Bibliográficas

- Abd-Alrahman, S. H. (2014). Residue and dissipation kinetics of thiamethoxam in a vegetable-field ecosystem using QuEChERS methodology combined with HPLC–DAD. *Food chemistry*, 159, 1-4. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2014.02.124>.
- Actis di Pasquale, E. y Balsa, J. (2017). La técnica de escalamiento lineal por intervalos: una propuesta de estandarización aplicada a la medición de niveles de bienestar social . *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 23, 175-193, <https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2691>.
- Acuña, I., Muñoz, M., Sandaña, P., Orena, S., Bravo, R., Kalazich, J., Tejada, P., Castro, M. P. y Sandoval, C. (2015). Manual Interactivo de la papa INIA. Instituto de Investigaciones Agropecuarias (INIA). Chile. <https://manualinia.papachile.cl>.
- Alloway, B. J. (2013). Heavy Metals in Soils/Edited by B. J. Alloway. Blackie Academic & Professional, London.
- Ahlmark, K. (s.f) Microlepidoptera on Solanaceae, USDA APHIS PPQ, Bugwood.org.
- Aji, B. W., Azizi, H. E., Melandari, T. A., Irawanto, B., Surarso, B., Farikhin, F., y Dasril, Y. (2024). Application of Mamdani fuzzy inference system with centroid method for prediction of carbon dioxide emission from car. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3024, No. 1). AIP Publishing. <https://doi-org.bibliotecavirtual.uis.edu.co/10.1063/5.0204381>.
- Andreadis, S. S., Spanoudis, C. G., Zakka, G., Aslanidou, B., Noukari, S. y Savopoulou-Soultani, M. (2017). Effect of temperature on rate of development, survival and adult longevity of Phtho-

- rimaea Operculella (Lepidoptera: Gelechiidae). *Eur. J. Entomol.*, 114, 35-41, <https://doi.org/10.14411/eje.2017.006>.
- Alcalá, P. y Sedaño, J. A. (1976). Biología y comportamiento de *Premnotrypes Suturicallus* Kuschel (Col.: Curculionidae). *Rev. Peru. Entomol.* 19, 49-52.
- Alcázar, J. y Cisneros, F. (1999). Taxonomy and bionomics of the Andean potato weevil complex: *Premnotrypes* spp. and related genera. In: Impact on a changing world. International Potato Center Program Report 1997-1998. CIP, pp. 141-151.
- Alvarez Romero, J. A. (2021). Alternativa de control de la oidiosis en Arándano (*Vaccinium corymbosum*) orgánico en Piura.
- Alyokhin, A., Rondon, S. I. y Gao, Y. (2022). Insect pests of potato: global perspectives on biology and management (2nd ed). Academic Press.
- Angulo-Castillo, V., Chalco-Cano, Y., Khastan, A. y Villamizar-Roa, É. J. (2020). Applications of generalized fixed points theorems to the existence of uncertain differential equations with finite delay. *Iranian Journal of Fuzzy Systems.*, 17(6), 1-15, <https://doi.org/10.22111/IJFS.2020.5597>.
- Antolinez Sandoval, E. Y., Almanza Merchán, P. J., Barona Rodriguez, A. F., Polanco Díaz, E., y Serrano Cely, P. A. (2020). Estado actual de la cacaocultura: una revisión de sus principales limitantes.
- Arévalo-Gardini, E., Obando-Cerpa, M. E., Zúñiga-Cernades, L. B., Arévalo-Hernández, C. O., Baligar, V., y He, Z. (2016). Metales pesados en suelos de plantaciones de cacao (*Theobroma cacao* L.) en tres regiones del Perú. *Ecología aplicada*, 15(2), 81-89.
- Ashwini, K., Sahu, S., Nayak, B. B., y Roy, S. (2023). Damage detection in structural elements:

using adaptive Mamdani model. In E3S Web of Conferences (Vol. 391, p. 01165). EDP Sciences. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202339101165>.

AsoExport. (s.f) Cultivo de Café. <https://asoexport.org/cultivo-decafe/>.

Bates, D. M., y Chambers, J. M. (1992). Nonlinear models. In: Chapter 10 of Statistical Models in S eds J. M. Chambers, T. J. Hastie, Wadsworth & Brooks/Cole.

Bede, B. (2008). Note on "Numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor–corrector method". *Information Sciences*, 178(7), 1917-1922, <https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.11.016>.

Bede, B., y Gal, S. G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 151(3), 581-599

Bede, B. y Gal, S. G., 2010. Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability.

Bede, B., Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 230, 119-141. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.10.003>.

Bede, B., Rudas, I. J. y Bencsik, A. L. (2007). First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Information Sciences*, 177(7), 1648-1662. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2006.08.021>.

Benavides Machado, P., Gil-Palacio, Z., Constantino, L. M., Villegas García, C., y Giraldo-Jaramillo, M. (2013). Plagas del café: Broca, minador, cochinillas harinosas, arañita roja y monalunion. En Federación Nacional de Cafeteros de Colombia, Manual del cafetero colombiano: Investigación y tecnología para la sostenibilidad de la caficultura (Vol. 2, pp. 215–260). Cenicafé. [https://doi.org/10.38141/cenbook0026\\_24](https://doi.org/10.38141/cenbook0026_24).

- Benchohra, M., Nieto, J. J. y Ouahab, A. (2007). Fuzzy solutions for impulsive differential equations. *Communications in Applied Analysis*, 11(3-4), 379-394, <http://www.acadsol.eu/en/articles/11/3/3.pdf>.
- Birch, L. (1948). The intrinsic rate of natural increase of an insect population. *The Journal of Animal Ecology*, 15-26, <https://doi.org/10.2307/1605>.
- Biswas, S., Chaudhuri, S. R., Biswas, A. y Bhawal, A. (2022). Fuzzy Logic-Based Air Conditioner System. *Convergence of Deep Learning In Cyber-IoT Systems and Security*, 147-164. <https://doi.org/10.1002/9781119857686.ch7>.
- Bravo-Portocarrero, R. Y., Idme-Bustinza, V. H., Lima-Medina, I., Cornejo-Condori, G. y Casa-Coila, V. H. (2021). Diversidad de gorgojo de los Andes (Coleoptera: Curculionidae) en papa (*Solanum spp.*) en Puno-Perú. *Revista Colombiana de Entomología*. 47(2), e10797. <https://doi.org/10.25100/socolen.v47i2.10797>.
- Brzdek, J., Popa, D., Rasa, I. y Xu, B. (2018) *Ulam stability of operators*. Academic Press.
- Buckley, J. J. y Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and Systems*, 110(1), 43-54. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00141-9).
- CABI/EPPO. (2022). *Phthorimaea operculella* (potato tuber moth). *CABI Compendium, CABI International*, 40686, <https://doi.org/10.1079/cabicompendium.40686>.
- Café de Santander - Federación Nacional de Cafeteros Santander. (2024, 23 febrero). Federación Nacional de Cafeteros Santander. <https://santander.federaciondecafeteros.org/cafe-de-santander/>
- Fenalce (2023). DATOS AL GRANO: Cereales, Leguminosas y Soya, 2023-B. Departamento

Económico y de Apoyo a la comercialización. <https://fenalce.co/wp-content/uploads/2024/06/Datos-al-Grano-2023B.pdf>.

Calvache, H. (1988). Colombia: Manejo del gusano blanco (P.Vorax). Permanencia de larvas de P. vorax en papa almacenada bajo condiciones de luz difusa. *Notipracipa*, 7, 4-5.

Calvache, H. C. y Alvarado, L. F. (1980). El gusano blanco de la papa, *Premnotrypes Vorax* (Hustache) y su control. Instituto Colombiano Agropecuario (ICA).

Caro-Arias, A. X., Yépez-Bolaños, D. A. y Soto-Giraldo, A. (2021). *Premnotrypes Vorax Hustache* (Coleoptera: Curculionidae) y su control con nematodos entomopatógenos nativos. *Bol. Cient. Mus. Hist. Nat. U. de Caldas*, 25(2), 33-42. <https://doi.org/10.17151/bccm.2021.25.2.2>.

CENICAÑA (Centro de Investigación de la Caña de Azúcar de Colombia). (1995). El Cultivo de la Caña en la Zona Azucarera de Colombia. Cassalet, C.; Torres, J.; e Isaacs, C. (eds.). Cali, Colombia. 412 p.

Chalco-Cano, Y., Rufián-Lizana, A., Román-Flores, H. y Jiménez-Gamero, M. D. (2013). Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49–67, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.004>.

Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H. y Jiménez-Gamero, M. D. (2011). Generalized derivative and  $\pi$ -derivative for set-valued functions. *Information Sciences*, 181(11), 2177-2188.

Chavez, E., He, Z. L., Stoffella, P. J., Mylavarapu, R. S., Li, Y. C., Moyano, B., y Baligar, V. C. (2015). Concentration of cadmium in cacao beans and its relationship with soil cadmium in southern Ecuador. *Science of the total environment*, 533, 205-214.

Chu, Y., Li, X. y Han, X. (2024). Exponential synchronization of complex networks with unmea-

sured coupling delays via impulsive observer and impulsive control. *Applied Mathematics and Computation*, 479, 128843. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128843>.

Cleveland, W. S., Devlin, S. J. y Grosse, E. (1988). Regression by local fitting: methods, properties, and computational algorithms. *Journal of econometrics*, 37(1), 87-114. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(88\)90077-2](https://doi.org/10.1016/0304-4076(88)90077-2).

Cleveland, W. S., Grosse, E. y Shyu, W. M. (1992). Local regression models. In: Chapter 8 of *Statistical Models in S* eds J.M. Chambers and T.J. Hastie, Wadsworth & Brooks/Cole

CONADESUCA (Comité Nacional para el Desarrollo sustentable de la Caña de Azúcar). (2015). Ficha técnica del cultivo de la caña de azúcar (*Saccharum officinarum* L.).

CORTEVA agriscience. Cultivo de papa: Enfermedades, insectos y nematodos. [https://www.corteva.co/productos-y-soluciones/proteccion-de-cultivos/enfermedades-y-plagas-en-papa.html#anchor\\_4](https://www.corteva.co/productos-y-soluciones/proteccion-de-cultivos/enfermedades-y-plagas-en-papa.html#anchor_4).

Corona-Mendoza, E., Martínez-Rueda, C. G. y Estrada-Campuzano, G. (2012). Determinantes del peso de grano en cultivares nativos e híbridos de maíz. *Revista mexicana de ciencias agrícolas*, 3(8), 1479-1494.

Dimitriadis, A., Theocharis, J. y Vachtsevanos, G. (1998). Front: A novel method for training fuzzy neural networks with TSK rules. *Control and Intelligent Systems*, 26(3), 92-101.

de Barros, L. C., Bassanezi, R. C. y Tonelli, P. A. (2000). Fuzzy modelling in population dynamics. *Ecological modelling*, 128(1), 27-33.

de Barros, L. C., Leite, M. F. y Bassanezi, R. C. (2003). The SI epidemiological models with a fuzzy transmission parameter. *Computers & Mathematics with Applications*, 45(10-11), 1619-1628.

- Dodge, Y. (2008). Weighted Least-Squares Method. In: The Concise Encyclopedia of Statistics. Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1\\_422](https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1_422).
- Duarte, P. S., Mastrocolla, L. E., Farsky, P. S., Sampaio, C. R. E. P. S., Tonelli, P. A., Barros, L. C., Ortega, N. R. y Pereira, J. C. R. (2006). Selection of patients for myocardial perfusion scintigraphy based on fuzzy sets theory applied to clinical-epidemiological data and treadmill test results. *Braz. J. Med. Biol. Res.*, 39(1), 9–18, <https://doi.org/10.1590/S0100-879X2006000100002>.
- Dublin, L. I. y Lotka, A. J. (1925). On the true rate of natural increase: As exemplified by the population of the United States, 1920. *Journal of the American Statistical Association*. 20(151), 305–339. <https://doi.org/10.1080/01621459.1925.10503498>.
- Dhutta, P. N., y Choudhury, B. S. (2008). A generalization of contraction principle in metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.* Article ID, 406368.
- Dávila Zamora, E. C. (2019). Uso de enmiendas en la reducción del contenido de cadmio en el suelo y en los granos del cacao (*Theobroma cacao* l.) clon ccn-51.
- Espitia-Cruz, L. V. y Villamizar-Roa, É. J. (2024). Application of fuzzy impulsive differential equations in the control of population dynamics [Preprint].
- Espitia-Cruz, L. V. y Villamizar-Roa, É. J. (2024). Comparison of two approaches for solving a fuzzy system describing the degradation kinetics of pesticides in plant uptake models [Preprint].
- Fantke, P., Charles, R., de Alencastro, L. F., Friedrich, R. y Jolliet, O. (2011). Plant uptake of pesticides and human health: Dynamic modeling of residues in wheat and ingestion intake. *Chemosphere*, 85(10), 1639–1647. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2011.08.030>.

- FAO/ESS. (2023). Production/Crops and livestock products - Metadata. <https://www.fao.org/faostat/en/#data/QCL/metadata>.
- FEDECACAO. (2023). Inicia proyecto para la mitigación del cadmio en cacao en Colombia. Sitefedecacao. <https://www.fedecacao.com.co/post/inicia-proyecto-para-la-mitigaci%C3%B3n-del-cadmio-en-cacao-en-colombia>
- FEDEPAPA y FNFP. (2023). Boletín regional nacional. Volumen 7. Fedepapa Estadísticas.
- FEDEPAPA y FNFP. (2023). Boletín regional Santanderes. Volumen 7. Fedepapa Estadísticas.
- Fernández Cara, E., Rojas Medar, M. A. y Viera Brandao, A. J. (2003). Inclusiones diferenciales, matemática difusa y aplicaciones. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 24, 31-62.
- FINAGRO. (2020). Inteligencia de mercado: Cacao.
- Galanis, G. N., Bhaskar, T. G., Lakshmikantham, V. y Palamides, P. K. (2005). Set valued functions in Fréchet spaces: Continuity, Hukuhara differentiability and applications to set differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 61(4), 559-75. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.01.004>.
- Garzón, M. Y., Aza, B. O., Jiménez G, J. y Luque Z, J. E. (1996). Potential of the nematode *Steinernema* sp. for the biological control of the Andean weevil. *Revista Colombiana de Entomología*. 22(1), 25-30. <https://doi.org/10.25100/socolen.v22i1.9917>.
- Ghasem, N. M. (2006). Design of a fuzzy logic controller for regulating the temperature in industrial polyethylene fluidized bed reactor. *Chemical Engineering Research and Design*, 84(2), 97-106, <https://doi.org/10.1205/cherd.05116>.

- Goetschel Jr, R. y Voxman, W. (1986). Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy sets and systems*, 18(1), 31-43. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(86\)90026-6](https://doi.org/10.1016/0165-0114(86)90026-6).
- Golizadeh, A., Razmjou, J., Rafiee-Dastjerdi, H. y Hassanpour, M. (2012). Effects of temperature on development, survival, and fecundity of potato tuberworm, *Phthorimaea operculella* (Lepidoptera: Gelechiidae) on potato tubers. *American journal of potato research*, 89, 150-158, <https://doi.org/10.1603/EC09245>.
- Golizadeh, A. y Zalucki, M. P. (2012). Estimating temperature-dependent developmental rates of potato tuberworm, *Phthorimaea operculella* (Lepidoptera: Gelechiidae). *Insect Science*, <https://doi.org/10.1111/j.1744-7917.2012.01503.x>.
- Harjani, J. y Sadarangani, K. (2010). Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3-4), 1188-1197. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.08.003>.
- He, L. M., Troiano, J., Wang, A. y Goh, K. (2008). Environmental Chemistry, Ecotoxicity, and Fate of Lambda-Cyhalothrin. In: Whitacre, D.M. (eds) *Reviews of Environmental Contamination and Toxicology*. Vol 195. Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-77030-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-77030-7_3)
- Hetz, E., Saavedra, M., Venegas, A. y López, M. (2004). Ventana de aplicación de plaguicidas en huertos de arándano (*Vaccinium* sp.) de la zona de Los Ángeles, Chile. *Agricultura Técnica*, 64(4), 375-387.
- Hinnah, F. D., Sentelhas, P. C., Meira, C. A. A. y Paiva, R. N. (2018). Weather-based coffee leaf rust apparent infection rate modeling. *International journal of biometeorology*, 62, 1847-1860.
- Hovey, C. L. (1943). Effects of temperature and humidity on certain developmental stages of the potato tuber moth. *J. Econ. Entomol.*, 36(4), 627-628, <https://doi.org/10.1093/jee/36.4.627a>.

- Huamaní-Yupanqui, H. A., Mansilla-Minaya, L. G., Florida-Rofner, N., y Neira-Trujillo, G. M. (2012). Presencia de metales pesados en cultivo de cacao (*Theobroma cacao* L.) orgánico. *Acta agronómica*, 61(4), 339-344.
- ICA y Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural (2011) Manejo fitosanitario del cultivo de la papa (*Solanum tuberosum* subsp. andigena y *S. phureja*) - Medidas para la temporada invernal
- Igamberdiev, A. U. (2017). Evolutionary transition from biological to social systems via generation of reflexive models of externality. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 131, 336-347. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2017.06.017>.
- Ikemoto, T. y Takai, K. (2000). A new linearized formula for the law of total effective temperature and the evaluation of line-fitting methods with both variables subject to error. *Environmental Entomology*, 29(4), 671-682, <https://doi.org/10.1603/0046-225X-29.4.671>.
- INTAGRI. (2017). El Cultivo de Arándano. Serie Frutillas Núm. 17. Artículos Técnicos de INTAGRI. México. 10 p.
- INVESA. (s.f.). Roya - *Hemileia vastatrix*.
- INTAGRI. (2017). Requerimientos de Clima y Suelo para el Cultivo de la Papa. Serie Hortalizas. Artículos Técnicos de INTAGRI. México. 10, 3.
- Jafelice, R., Barros, L. C., Bassanezi, R. C. y Gomide, F. (2004). Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population. *Bull. Math. Biol.*, 66, 1597–1620, <https://doi.org/10.1016/j.bulm.2004.03.002>.
- Jia, J., Liu, S., Ding, J., Liao, G., Wei, Y. y Zhang, R. (2021). The impact of imported cases on the control of COVID-19 in China. *Scientia Sinica Mathematica*, 659-672. <https://doi.org/10.1360/SSM-2020-0072>.

- Juraske, R., Mosquera-Vivas, C. S., Erazo-Velásquez, A., García-Santos, G., Berdugo-Moreno, M. B., Diaz-Gomez, J. et al. (2011). Pesticide uptake in potatoes: model and field experiments. *Environmental Science & Technology*, 45, 651–657. <https://doi.org/10.1021/es102907v>.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 24(3), 301-317. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(87\)90029-7](https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7).
- Kandel, A., & Byatt, W. (1978). Fuzzy differential equations. *Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society*, 1213-1216
- Khastan A. y Rodríguez-López, R. (2016). On the solutions to first order linear fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 295, 114-135, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.06.005>.
- Klir, G. y Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic (Vol. 4). Prentice hall New Jersey.
- Kloeden, P. (1991). Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 44(1), 161-163.
- Krebs, C. J. (2014). Intrinsic capacity for increase in numbers. In: Ecology: the experimental analysis of distribution and abundance (6ed). Pearson New International Ed., pp. 78–101.
- Kroschel, J. (1995). Integrated pest management in potato production in the Republic of Yemen with special reference to the integrated biological control of the potato tuber moth (*Phthorimaea Operculella* Zeller). Tropical Agriculture, Volume 8, Margraf Verlag, Weikersheim, Germany.
- Kühne, M. (2007). The Andean potato weevil *Premnotrypes Sutoricallus* ecology and interactions with the entomopathogenic fungus *beauveria bassiana*. Dissertation. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

- Kühne, M., Sporleder, M. y Vidal, S. (2007). Temperature depending development of the cold adapted Andean potato weevil *Premnotrypes Suturellus*. The Andean potato weevil *Premnotrypes Suturellus*, pp. 78–101.
- Kushalappa, A. C. (1989). Coffee rust: epidemiology, resistance and management (p. 360). A. B. Eskes (Ed.). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Lakshmikantham, V. y Mcrae, F. A. (2001). Basic results for fuzzy impulsive differential equations. *Mathematical Inequalities & Applications*, 4(2), 239-246, <https://doi.org/10.7153/MIA-04-23>.
- Lakshmikantham, V. y Mohapatra, R. N. (2004). Theory of fuzzy differential equations and inclusions. CRC press.
- Lan, H. Y. y Nieto, J. J. (2009) On initial value problems for first-order implicit impulsive fuzzy differential equations. *Dynamic Systems and Applications*, 18(3), 677.
- Leguízamo, J. A. C. (2021). Fundamentos técnicos del cultivo del arándano (*Vaccinium corymbosum* L.) en la región central de Colombia (Vol. 43). Editorial de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia-UPTC.
- Li, Z. y Fantke, P. (2023). Considering degradation kinetics of pesticides in plant uptake models: proof of concept for potato. *Pest Management Science*, 79(3), 1154-1163. <https://doi.org/10.1002%2Fps.7288>.
- Liu, R., Wang, J. y O'Regan, D. (2020) Ulam type stability of first-order linear impulsive fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems* 400, 34-89. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.11.001>.
- Liu, R., Wang, J. y O'Regan, D. (2020). On the solutions of first-order linear impulsive fuzzy

- differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 400, 1-33, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.11.001>.
- Liu, R., Wang, J. y O'Regan, D. (2023) Existence of solutions to nonlinear impulsive fuzzy differential equations. *Filomat*, 37(4), 1223-1240. <https://doi.org/10.2298/FIL2304223L>.
- Logan, J. A., Wollkind, D. J., Hoyt, S. C. y Tanigoshi, L. K. (1976). An analytic model for description of temperature dependent rate phenomena in arthropods. *Environmental Entomology*, 5(6), 1133-1140, <https://doi.org/10.1093/ee/5.6.1133>.
- Luna, N. (2020). Una introducción a los sistemas de control difuso. Universidad Industrial de Santander.
- Mahfouf, M., Abbod, M. F. y Linkens, D. A. (2001). A survey of fuzzy logic monitoring and control utilization in medicine. *Artif. Intell. Med.*, 21, 27-42, [https://doi.org/10.1016/S0933-3657\(00\)00072-5](https://doi.org/10.1016/S0933-3657(00)00072-5).
- Maienfish, P., Angst, M., Brandl, F., Fischer, W., Hofer, D., Kayser, H., Kobel, W., Rindlisbacher, A., Senn, R., Steinemann, A. y Widmer, H. (2001). Chemistry and biology of thiamethoxam: a second generation neonicotinoid. *Pest management science*, 57(10), 906-13. <https://doi.org/10.1002/ps.365>.
- Mamdani, E. H., y Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 7(1), 1-13.
- Mareš, M. (1997). Weak arithmetics of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and Systems*, 91(2), 143-153. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00136-X](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00136-X).
- Massad, E., Ortega, N. R. S., de Barros, L. C. y Struchiner, C. J. (2009). Fuzzy logic in action: Applications in epidemiology and beyond, Volume 232, Springer Science & Business Media.

- Mehdi, F., Cao, Z., Zhang, S., Gan, Y., Cai, W., Peng, L. y Yang, B. (2024). Factors affecting the production of sugarcane yield and sucrose accumulation: suggested potential biological solutions. *Frontiers in Plant Science*, *15*, 1374228.
- Meira, C. A. A., Rodrigues, L. H. A. y Moraes, S. A. D. (2009). Modelos de alerta para o controle da ferrugem-do-cafeeiro em lavouras com alta carga pendente. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, *44*, 233-242.
- Micera, S., Sabatini, A. M. y Dario, P. (1999). Adaptive fuzzy control of electrically stimulated muscles for arm movements. *Med. Biol. Eng. Comput.*, *37*, 680-685, <https://doi.org/10.1007/bf02513367>.
- Mondal, S., Peters, J. F., Ghosh, P., Sarkar, A. K. y Sasmal, S. K. (2024). Impulsive differential equation model in HIV-1 inhibition: Advances in dual inhibitors of HIV-1 RT and in for the prevention of HIV-1 replication. *Journal of Biological Systems*, *32(02)*, 371-405. <https://doi.org/10.1142/S0218339024500141>.
- Munitz, M. S. (2012). Arándanos: micoflora contaminante, micotoxinas, residuos de fungicidas y cinéticas de degradación (Doctoral dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales).
- Nelder, J. A. y Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The computer journal*, *7(4)*, 308-313. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>.
- Nieto, J. J. y López-Rofriguez, R. (2006). Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations. *Revista Matemática Complutense*, *19(2)*, 361-383.
- Niimura, T. y Nakashima, T. (2001). Deregulated electricity market data representation by fuzzy regression models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, *31(3)*, 320-326. <https://doi.org/10.1109/5326.971659>.

- Niño, L., Acevedo, E., Becerra, F. y Guerrero, M. (2004). Some biological aspects and population fluctuations of the white tuberworm *Premnotrypes Vorax Hustache* (Coleoptera: Curculionidae) in Mucuchies, Merida State, Venezuela. *Entomotropica*, *19*(1), 15-19.
- Oliva, M., Rubio, K., Epquin, M., Marlo, G. y Leiva, S. (2020). Cadmium uptake in native cacao trees in agricultural lands of Bagua, Peru. *Agronomy*, *10*(10), 1551.
- Ortega, N. R. S., Sallum, P. C., Massad, E., 2000. Fuzzy dynamical systems in epidemic modeling. *Kybernetes*, *29*(1-2), 201–218, <https://doi.org/10.1108/03684920010312768>.
- Oshima, H., Yasunobu, S. y Sekino, S. I. (1988). Automatic train operation system based on predictive fuzzy control. In: Proceedings of the International Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications, IEEE. 485-489 pp, <https://doi.org/10.1109/AIIA.1988.13336>.
- Osuna-Gómez, R., Costa, T. M., Chalco-Cano, Y. y Hernández-Jiménez, B. (2022). Quasilinear approximation for interval-valued functions via generalized Hukuhara differentiability. *Computational and Applied Mathematics*, *41*(4), 149. <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01746-6>.
- Osuna-Gómez, R., Costa, T. M. D., Hernández-Jiménez, B. y Ruiz-Garzón, G. (2023). Necessary and sufficient conditions for interval-valued differentiability. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *46*(2), 2319-2333. <https://doi.org/10.1002/mma.8647>.
- Otiniano, A. J., Ventura, R. B., Huamán, L. A., Vera, N. J., Cepero, V. C. y Amez, S. B. (2019). Relación entre la incidencia y la severidad de la roya del café (*Hemileia vastatrix*) en San Ramón, Chanchamayo, Perú. *Journal of Science and Research*, *4*(4), 1-9.
- Pale-Ezquivel, I., Lagunes, R. M., Pineda-López, M. D. R., Alarcón-Gutiérrez, E. y Sánchez-Velásquez, L. R. (2023). Temporal progress of coffee leaf rust and environmental conditions affecting severity in Veracruz State, Mexico. *Universidade Federal de Viçosa* <https://doi.org/10.25186/ufv.v18i.2047>.

- Poveda, K., Diaz, M. F., Espinosa, S., Obregon, D. y Ramirez, A. (2019). Landscape complexity and elevation affect the effectiveness of a local pest-management practice. *Global Ecology and Conservation*. 20, e00763. <https://doi.org/10.1016/j.gecco.2019.e00763>.
- Pujol, V., Díaz, J., Rodríguez, E. y Arias, M. L. (2008). Contaminación microbiológica y actividad antimicrobiana del azúcar de caña cristalizado sobre algunos agentes de interés médico en Costa Rica. *Revista de Biología Tropical*, 56(2), 431-437.
- Puma, A. y Calderon, J. (2016). Integrated pest management and its impact on Andean weevil (Pest) and diseases in potato crop. *Revista Ciencia, Tecnología e Innovación*, 12(13), 739-754.
- Puri, M. L. y Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(2), 552-558. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(83\)90169-5](https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90169-5).
- Ramathilagam, A. y Pitchipoo, P. (2022). Modeling and development of fuzzy logic-based intelligent decision support system. *Roman. J. Inf. Sci. Technol.*, 25(1), 58-79.
- Ramesh, R. y Vengataasalam, S. (2014). Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy impulsive differential equations. *Italian journal of pure and applied mathematics*, 33, 345-366.
- Rhoades, B. E. (2001). Some theorems on weakly contractive maps, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47(4), 2683-2693. [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(01\)00388-1](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00388-1).
- Rodríguez-López, R. (2008) Periodic boundary value problems for impulsive fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*. 1;159(11), 1384-409. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.09.005>.
- Rofner, N. F., Melchor, S. L. C. y Bernal, R. G. (2018). El pH y la absorción de cadmio en almendras de cacao orgánico (*Theobroma cacao* L.) en Leoncio Prado, Huánuco, Perú. *Folia Amazonica*, 27(1), 1-8.

- Rondon, S. I. (2010). The potato tuberworm: A literature review of its biology, ecology, and control. *Am. J. Pot Res*, 87, <https://doi.org/10.1007/s12230-009-9123-x>.
- Saeed, F., Dangol, S. D., Hashmi, M. H., Hossain, Md. J. y Bakhsh, A. (2023). Role of genetic engineering in improving potato production. In: *Potato Production Worldwide*. Elsevier, pp. 303-315.
- Salama, H. S., Dimetry, N. Z. y Sharaby, A. M. (1972). Contributions to the biology of the potato tuber moth, *Phthorimaea operculella* Zeller. In *Egypt (Lepidoptera: Gelechiidae)*.
- Samoilenko, A. M. y Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive Differential Equations*, World Scientific.
- Samuels, G., Lugo López, M. A. y Landrau Jr., P. (1952). FACTORS AFFECTING THE SUCROSE CONTENT OF SUGARCANE: FERTILIZERS. *The Journal of Agriculture of the University of Puerto Rico*, 36(3), 194–202. <https://doi.org/10.46429/jaupr.v36i3.13786>.
- Sanchez, E. N., Becerra, H. M. y Velez, C. M. (2007). Combining fuzzy, PID and regulation control for an autonomous mini-helicopter. *Information Sciences*, 177(10), 1999-2022.
- Schoolfield, R. M., Sharpe, P. J. H. y Magnuson, C. E. (1981). Non-linear regression of biological temperature-dependent rate models based on absolute reaction-rate theory. *Journal of theoretical biology*, 88(4), 719-731. [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(81\)90246-0](https://doi.org/10.1016/0022-5193(81)90246-0).
- Seikkala, S. (1987) On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 319-330. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(87\)90030-3](https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90030-3).
- Sharpe, P. J. y DeMichele, D. W. (1977). Reaction kinetics of poikilotherm development. *Journal of theoretical biology*, 64(4), 649-670, [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(77\)90265-X](https://doi.org/10.1016/0022-5193(77)90265-X).
- Silveira, G. P. y de Barros, L. C. (2015). Analysis of the dengue risk by means of a Takagi–Sugeno–style model. *Fuzzy Sets and Systems*, 277, 122-137, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.03.003>.

Southwood, T. R. E. y Henderson, P. A. (2009). *Ecological methods*. John Wiley & Sons

Sporleder, M., Kroschel, J., Gutierrez-Quispe, M. R. y Lagnaoui, A. (2004). A Temperature-Based Simulation Model for the Potato Tuberworm, *Phthorimaea Operculella* Zeller (Lepidoptera; Gelechiidae). *Environmental Entomology*, 33(3), 477–486, <https://doi.org/10.1603/0046-225X-33.3.477>.

Stamov, G. T. y Stamov, A. G. (2013). On almost periodic processes in uncertain impulsive delay models of price fluctuations in commodity markets. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10), 5376-5383.

Stamova, I. y Stamov, G. T. (2016). *Applied impulsive mathematical models*, Volume 318, Canadian Mathematical Society, Springer International Publishing AG Switzerland.

Stefanini, L. (2008). A generalization of Hukuhara difference, in: D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds.), *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*, in: *Series on Advances in Soft Computing*, Springer.

Stefanini, L. (2010). A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems*, 161, 1564–1584. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.009>.

Steiner, U. K., Tuljapurkar, S. y Coulson, T. (2014). Generation time, net reproductive rate, and growth in stage-age-structured populations. *The American Naturalist*. 183(6), 771–783. <https://doi.org/10.1086/675894>.

Sugeno, M. y Kang, G. (1988). Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28(1), 15-33, [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(88\)90113-3](https://doi.org/10.1016/0165-0114(88)90113-3).

Sugeno, M. y Takagi, T. (1983). A new approach to design of fuzzy controller. In: *Advances in*

- Fuzzy Sets, Possibility Theory, and Applications. Springer New York, NY, pp. 325–334, <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3754-6>.
- Szedlak-Stinean, A. I., Precup, R. E., Petriu, E. M., Roman, R. C., Hedrea, E. L. y Bojan-Dragos, C. A. (2022). Extended Kalman filter and Takagi–Sugeno fuzzy observer for a strip winding system. *Expert Systems with Applications*, 208, 118215, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118215>.
- Tennakoon, M., Mayorga, R. V. y Shirif, E. (2010). A fuzzy inference system prototype for indoor air and temperature quality monitoring and hazard detection. *Journal of Environmental Informatics*, 16(2), 70-79. <https://doi.org/10.3808/jei.201000179>.
- Trapp, S., Cammarano, A., Capri, E., Reichenberg, F. y Mayer, P. (2007). Diffusion of PAH in potato and carrot slices and application for a potato model. *Environmental Science & Technology*, 41(9), 3103–3108. <https://doi.org/10.1021/es062418o>.
- Unidad de planificación rural agropecuaria-UPRA (2022). SANTANDER Microanálisis Evaluaciones agropecuarias- EVAs.
- Villamil, J. E., Martínez, J. W. y Pinzón, E. H. (2016). Biological activity of entomopatogenic fungi on *Premnotrypes Vorax Hustache* (Coleoptera: Curculionidae). *Rev. Cien. Agrí.* 33(1), 34-42. <https://doi.org/10.22267/rcia.163301.4>.
- Villamizar-Roa, É. J. y Arenas-Díaz, G. (2018). Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas. Ediciones UIS.
- Villamizar-Roa, É. J., Angulo-Castillo, V. y Chalco-Cano, Y. (2015). Existence of solutions to fuzzy differential equations with generalized Hukuhara derivative via contractive like mapping principles. *Fuzzy sets and systems*, 265, 24–38, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.07.015>.



- Villamizar-Roa, É. J., Espitia-Cruz, L. V. y Arenas-Díaz, G. (2024). Intrinsic growth rate and evolution of the *Premnotypes Vorax* population using fuzzy information. *Biosystems*, 237, 105161, <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2024.105161>.
- Ramírez-Villapudua, J. y Sáinz-Rodríguez, R. A. (2017). Roña común de la papa - *Streptomyces scabies*. *Panorama Agropecuario*.
- Vanegas, F. (2018). Taxonomía del café. *Coffee Media*. <https://www.yoamoelcafedecolombia.com/2016/08/31/taxonomia-del-cafe/>
- Vu, H. y VanHoa, N. (2016) On impulsive fuzzy functional differential equations. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 13(4), 79-94. <https://doi.org/10.22111/ijfs.2016.2597>.
- Wan, W. H., Wan, B. W. y Yand, J. Y. (2000). Human simulating fuzzy quality control model of nickel flash furnace in Jinchuan smeltery. In *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation (Cat. No. 00EX393) (Vol. 3, pp. 1662-1666)*. IEEE.
- Watanabe, K., Nakabaru, M., Taira, E., Ueno, M. y Kawamitsu, Y. (2016). Relationships between nutrients and sucrose concentrations in sugarcane juice and use of juice analysis for nutrient diagnosis in Japan. *Plant Production Science*, 19(2), 215-222.
- Wilkowska, A. y Biziuk, M. (2011). Determination of pesticide residues in food matrices using the QuEChERS methodology. *Food Chemistry*, 125(3), 803-812. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2010.09.094>.
- Xiao, X., Gong, Y., Li, Z. y Fantke, P. (2021). Improving Pesticide Uptake Modeling into Potatoes: Considering Tuber Growth Dynamics. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, 69(12), 3607-3616. <https://doi.org/10.1021/acs.jafc.1c00151>.

- Yordanova, S. (2018). TSK model-based fuzzy logic control of carbon dioxide concentration in rooms. *Mechatronic Systems and Control*, 46(1), 32-38, <http://doi.org/10.2316/Journal.201.2018.1.201-2861>.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- Zenner, I. (1986). Guía general de manejo de plagas en el cultivo de la papa. Instituto Colombiano Agropecuario (ICA).
- Zenner, I. y Posada, L. (1968). Generalidades sobre el gusano blanco de la papa *Premnotrypes* *Vorax* (Hustache). *Agricultura tropical*. 24(1), 33-40.
- Zhao, D. y Li, Y. R. (2015). Climate change and sugarcane production: potential impact and mitigation strategies. *International Journal of Agronomy*, 2015(1), 547386.
- Zhao, Z., Pang, L. y Li, Q. (2021). Analysis of a hybrid impulsive tumor-immune model with immunotherapy and chemotherapy. *Chaos, Solitons & Fractals*, 144, 110617. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110617>.

## Apéndices

### Apéndice A

#### *Análisis de resultados laboratorio del suelo y recomendaciones*

	<b>LABORATORIO QUÍMICO DE SUELOS</b> <b>UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.</b>		Código: <b>F-AA-03</b>
	<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS Y RECOMENDACIONES</b>		Versión: <b>02</b> Página 1 de 1

<b>Fecha de Emisión:</b>	Marzo 11 de 2023	<b>Cultivo:</b>	PAPA
<b>Código Muestra:</b>	23-0063	<b>Edad:</b>	Establecer

**ANÁLISIS DE RESULTADOS:** pH: 4.6. Suelo Muy Fuertemente Ácido. No Óptimo. Contenidos **Medios** en Materia Orgánica y Nitrógeno. Niveles **Bajos** en Calcio, Magnesio, Boro y Cobre. Niveles **Altos** en Fósforo, Potasio, Hierro y Aluminio. **Adecuados** en Manganeseo, Zinc, Azufre y Sodio. Relación Calcio: Magnesio Desbalanceada. Capacidad de Intercambio Catiónico (C.I.C) Alto y Conductividad Eléctrica (C.E) Ideal. Textura del suelo: Franco-Arenoso, adecuada para el cultivo de papa.

**RECOMENDACIONES:** Incorporar por hectárea 1.700 kilogramos de **Cal Dolomita** un mes antes de efectuar la siembra. Realizar fertilización foliar con **Humus líquido** en dosis de 750 cc en 100 litros de agua, más 200 gramos de **Sulfato de Magnesio**, más 50 gramos de **Borato de Sodio**, más 50 gramos de **Sulfato de Cobre** y repetir a los 10 y 20 días, aplicados después de un día de lluvia o de aplicar riego en las primeras horas de la mañana. Realizar nuevamente análisis de suelos 12 meses.

**Apéndice B***Informe de resultados primera muestra de papa*

	<b>LABORATORIO DE CROMATOGRAFÍA Y ESPECTROMETRÍA DE MASAS</b> UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	CÓDIGO: CM-FSE-12
		VERSIÓN: 06
	<b>INFORME DE RESULTADOS</b> Código: 994088-CG-MRP Orbitrap	PÁGINA 2 de 2

**4. RESULTADOS**

**Tabla 1.** Niveles mínimos de cuantificación (NMC=2NMD), tiempos de retención ( $t_R$ ) por UHPLC-ESI-ORBITRAP-HRMS y resultados de los plaguicidas analizados en la(s) muestra(s).

Compuesto	$t_R$ , min	NMC, ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )	Concentración en la muestra ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )
			994088-01- CG
			PAPA 1, VEREDA PORTILLO 06/11.
Clorotalonil	6.5	0.2	2.18
Tiametoxam	3.8	0.2	16.39

**ANEXO 1 de 1**(5 páginas del **Anexo 1**)

Cromatogramas obtenidos por UHPLC-ESI<sup>±</sup>-ORBITRAP-HRMS de la mezcla estándar de referencia certificada de plaguicidas y de los extractos analizados

	Nombre	Profesión	Cargo
Elaboró	William SALGAR RANGEL	Químico M.Sc.	Subdirector Técnico
Revisó	Elizeth MATAJIRA	Química	Subdirectora de Aseguramiento de Calidad
Autorizó	Elena E. STASHENKO	Química Ph.D.	Directora General Laboratorio CROM-MASS
Informe firmado digitalmente.			

## Apéndice C

### Informe de resultados segunda muestra de papa

	<b>LABORATORIO DE CROMATOGRAFÍA Y ESPECTROMETRÍA DE MASAS</b> UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	CÓDIGO: CM-FSE-12
	<b>INFORME DE RESULTADOS</b> Código: 994098-CG-MRP Orbitrap	VERSIÓN: 06
		PÁGINA 2 de 2

#### 4. RESULTADOS

**Tabla 1.** Niveles mínimos de cuantificación (NMC=2NMD), tiempos de retención ( $t_R$ ) por UHPLC-ESI-ORBITRAP-HRMS y resultados de los plaguicidas analizados en la(s) muestra(s).

Compuesto	$t_R$ , min	NMC, ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )	Concentración en la muestra ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )
			994098-01- CG
			PAPA 2, VEREDA PORTILLO 09/11.
Clorotalonil	6.5	0.2	6.38
Tiametoxam	3.8	0.2	11.72

#### ANEXO 1 de 1

(2 páginas del **Anexo 1**)

Cromatogramas obtenidos por UHPLC-ESI<sup>±</sup>-ORBITRAP-HRMS de la mezcla estándar de referencia certificada de plaguicidas y de los extractos analizados

	Nombre	Profesión	Cargo
Elaboró	William SALGAR RANGEL	Químico M.Sc.	Subdirector Técnico
Revisó	Elizeth MATAJIRA	Química	Subdirectora de Aseguramiento de Calidad
Autorizó	Elena E. STASHENKO	Química Ph.D.	Directora General Laboratorio CROM-MASS
Informe firmado digitalmente.			

**Apéndice D***Informe de resultados tercera muestra de papa*

	<b>LABORATORIO DE CROMATOGRAFÍA Y ESPECTROMETRÍA DE MASAS</b> UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	CÓDIGO: CM-FSE-12
		VERSIÓN: 06
	<b>INFORME DE RESULTADOS</b> <b>Código: 994120-CG-MRP Orbitrap</b>	PÁGINA 2 de 2

**Tabla 1.** Niveles mínimos de cuantificación (NMC=2NMD), tiempos de retención ( $t_R$ ) por UHPLC-ESI-ORBITRAP-HRMS y resultados de los plaguicidas analizados en la(s) muestra(s).

Compuesto	$t_R$ , min	NMC ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )	Concentración en la muestra ( $\mu\text{g kg}^{-1}$ )
			994120-01- CG
			PAPA 3, VEREDA PORTILLO 16/11.
Clorotalonil	6.5	0.2	2.98
Tiametoxam	3.8	0.2	8.15

**ANEXO 1 de 1**(2 páginas del **Anexo 1**)

Cromatogramas obtenidos por UHPLC-ESI<sup>±</sup>-ORBITRAP-HRMS de la mezcla estándar de referencia certificada de plaguicidas y de los extractos analizados

	Nombre	Profesión	Cargo
Elaboró	William SALGAR RANGEL	Químico M.Sc.	Subdirector Técnico
Revisó	Elizeth MATAJIRA	Química	Subdirectora de Aseguramiento de Calidad
Autorizó	Elena E. STASHENKO	Química Ph.D.	Directora General Laboratorio CROM-MASS
Informe firmado digitalmente.			